EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Uso de Tecnologías Digitales

Volumen 9, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

Patrick Scott, Yuri Morales
y Angel Ruiz
Editores

CIAEM
IACME
desde - since 1961

© 2023
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Uso de Tecnologías Digitales
[Volumen 9, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-793-9
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen al *Comité Interamericano de Educación Matemática*.

Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

Estos materiales están bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y al *Comité Interamericano de Educación Matemática*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: “un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas” (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con “sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo”. Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional.*

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

El presente volumen es parte de la colección digital *Educación Matemática en las Américas 2023*, que corresponde a las *Memorias* de la [XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática](#) (celebrada en Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023).

Los diez volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Estos volúmenes se pueden revisar o descargar gratuitamente en la página ***Memorias XVI CIAEM*** del sitio principal del CIAEM.

Ajuste de curvas com o GeoGebra

Odair José Teixeira da **Fonseca**
Universidade Federal de Rondônia
Brasil
odairfonseca@unir.br
Rubens **Pazim**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
pazim@ufmt.br

Resumo

Nesta oficina apresentamos uma proposta de ensino sobre ajustes de curvas com a utilização do *software* livre GeoGebra. Propomos atividades de ajustes de modelos: ajuste linear, potência e logístico, aplicados a dois problemas experimentais relacionados à engenharia de processos e um problema sobre órbitas planetárias. A escolha pelo GeoGebra se justifica pela praticidade de sua funcionalidade por meio de interfaces gráficas, algébricas e planilhas. O objetivo é aproximar o conhecimento científico ao ensino em sala de aula por meio de recursos computacionais, evidenciando a importância da utilização desse mecanismo no processo de ensino e aprendizagem de matemática, além das possíveis contribuições com a divulgação científica.

Palavras-chave: Ajuste de Curvas; Regressão Linear; GeoGebra; Recurso Computacional; Dados Experimentais.

Introdução

Ao desenvolver atividades experimentais o pesquisador pode obter um conjunto de valores a partir das observações realizadas. Muitas vezes esses valores fornecem informações importantes sobre como o fenômeno observado se comporta ao longo do tempo ou durante o período investigado. Dessa forma, pode ser do interesse do pesquisador construir um modelo matemático que possa descrever o comportamento do problema estudado, a partir dos dados coletados. Neste caso, uma das formas de construir o modelo é por meio do ajuste de curvas. O tipo de ajuste dependerá do comportamento característico dos pontos dispostos no diagrama de dispersão (Pazim & Fonseca, 2022).

Considerando que os valores experimentais podem envolver uma quantidade relativamente grande de dados, a utilização de recurso computacional assume um papel importante como facilitador no desenvolvimento de cálculos, bem como na representação gráfica. Neste caso, indicamos as planilhas eletrônicas como um dos recursos computacionais disponíveis. Dentre as várias possibilidades, destacamos a planilha do GeoGebra, um *software* livre, "cuja interface [dinâmica] possibilita o trabalho com várias áreas da matemática, tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico" (Pazim & Fonseca, 2022, p. 4). Assim, além da vantagem de ser um programa de acesso livre, o caráter dinâmico de sua interface torna-o uma ótima opção do ponto de vista didático. Dessa forma, propomos nessa oficina, o desenvolvimento de atividades com o GeoGebra para implementação de métodos de ajustes de curvas.

Vários pesquisadores destacaram a importância da utilização de recursos computacionais em aulas de matemática. Por exemplo, Fey (1989) aponta que a aplicação de ferramentas computacionais a conceitos mais avançados de matemática mostra sua vantagem mais clara em qualquer situação que envolva muitas variáveis inter-relacionadas ou grandes conjuntos de dados. Assim, o acesso a computadores permite que os alunos trabalhem com coleções interessantes e realistas de dados numéricos (Fey, 1989). A pesquisa de Rojano (1996) aponta que a utilização de planilhas em ambiente de ensino ajudou os alunos na transição do pensamento específico para o geral. Borba (2009) afirma que o uso de *software* na sala de aula altera o *status* da visualização da aula, uma vez que o processo "mais chamativo", mais dinâmico e interativo de desenhar gráficos de funções e diferentes figuras geométricas está se tornando mais comum nas aulas.

Souza e Calejon (2019) enfatizam que "o uso do "*software* GeoGebra" busca a interatividade auxiliando professor-aluno no processo de ensino – aprendizagem, procurando novas formas de solucionar as atividades propostas em sala de aula" (p. 232). O referido aplicativo é muito versátil e pode "ser utilizado em todos os níveis de ensino, onde combina a geometria, álgebra, elaboração de tabelas, formação de gráficos, e cálculos estatísticos em uma única aplicação" (Souza & Calejon, 2019, p. 232). Isto posto, o respectivo aplicativo pode ser considerado como uma ferramenta computacional tanto na comunicação/divulgação científica, quanto no ambiente escolar com o objetivo de contribuir com o ensino e aprendizado de conteúdos matemáticos.

Nesse sentido, considerando as potencialidades didáticas do *software*, nesta oficina buscamos evidenciar possibilidades de aproximação entre teoria e prática, seja no âmbito da pesquisa ou de ensino. Nas atividades, usaremos a versão on-line do respectivo aplicativo (https://www.geogebra.org). No que segue delineamos brevemente os procedimentos metodológicos do desenvolvimento da oficina. Advertimos que utilizaremos o ponto (.) como separador decimal para padronizar com a linguagem do GeoGebra.

Procedimentos metodológicos

Os procedimentos utilizados na realização das atividades são os descritos por Pazim e Fonseca (2022). Conforme descrito pelos autores, o GeoGebra se destaca pela praticidade e integração dinâmica entre planilhas e representações analíticas (pontos descritos como coordenadas) e geométricas (diagrama de dispersão) de dados experimentais. Assim, para uma diretriz a ser seguida na oficina, descrevemos brevemente esta integração. Na apresentação dos procedimentos metodológicos utilizaremos os dados da Tabela 1.

Planilha - para exibir a planilha eletrônica efetuamos as respectivas etapas: “*menu*” (barras horizontais no canto superior direito), posteriormente “exibir” e por fim selecionar a caixa de diálogo da planilha. Veja a Figura 1.

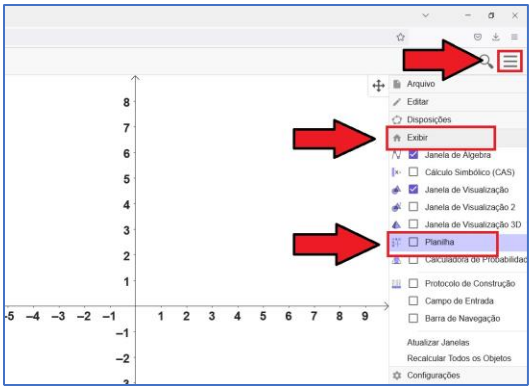


Figura 1. Acessando a planilha do GeoGebra.

Após a ativação/exibição da planilha, inserimos os valores da Tabela 1 e criamos uma lista de pontos efetuando as seguintes etapas: selecionamos as duas colunas e com o cursor do *mouse* no canto inferior direito das respectivas células deverá aparecer um sinal de “+”, clique com o botão direito, vá para “criar” e posteriormente “lista de pontos”. Automaticamente o GeoGebra irá exibir o diagrama de dispersão dos dados na janela de visualização e a representação analítica dos respectivos pontos na janela de álgebra. Veja a Figura 2: à esquerda exibimos os dados na planilha e à direita temos o diagrama de dispersão. Se necessário, redimensione os eixos cartesianos para uma melhor visualização geométrica (aqui, usamos a proporção 5:1).

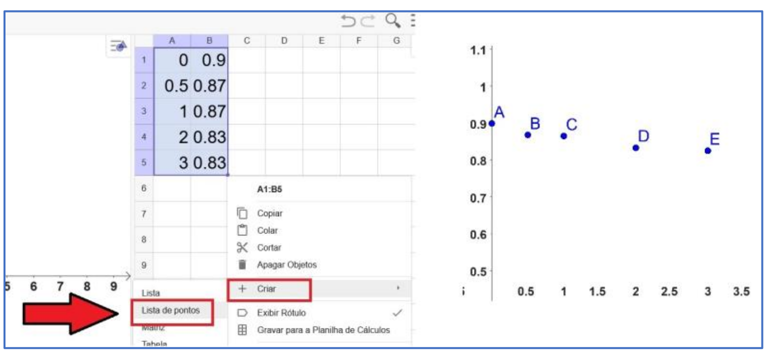


Figura 2. Criando lista de pontos com o GeoGebra.

Regressão - com a ferramenta “RegressãoLinear(Lista de Pontos)” na janela de álgebra obtemos a reta de regressão dos respectivos dados. Simultaneamente é gerada a equação da reta na janela álgebra e a representação geométrica correspondente na janela de visualização. Veja as Figuras 3 e 5.

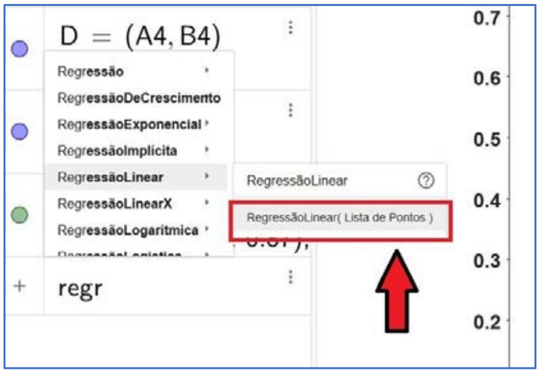


Figura 3. Acessando os recursos de regressão no GeoGebra.

Coeficiente de determinação - para obter o coeficiente de determinação R^2da curva de regressão associada aos dados correlatos, usamos o comando "RQuadrado(Lista de Pontos, Função)" na janela de álgebra. Veja Figura 4.

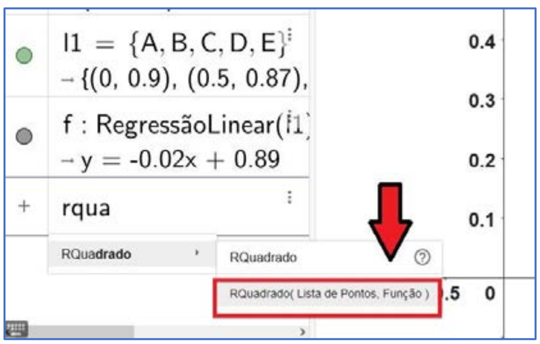


Figura 4. Acessando o recurso para o cálculo de R^2 no GeoGebra.

Atividades

Nesta seção propomos três atividades a serem desenvolvidas na oficina. As atividades, envolvem dados experimentais relacionados com problemas de engenharias de processos e distâncias médias entre os planetas e o sol.

Atividade 1

Na dissertação intitulada *Desidratação osmótica e secagem de maçãs: I. Comportamento do tecido em soluções osmóticas. II. Modelagem matemática de difusão*, o pesquisador desenvolve uma pesquisa, cujo objetivo consistiu em "avaliar a integridade celular de maçãs em função de tratamentos em soluções osmóticas de sacarose e elucidar sua influência sobre as cinéticas de desidratação osmótica e de secagem" (Rodrigues, 2003, p. 19). Na Tabela 1, apresentamos os dados sobre a concentração volumétrica de água para desidratação osmótica (DO) de maçãs em solução com 40% de sacarose.

Tabela 1
Concentração volumétrica de água na DO de maçãs em solução com 40% de sacarose.

Tempo (horas)	Concentração volumétrica de água (g/ml)
0	0.899
0.5	0.868
1	0.865
2	0.833
3	0.825

Fonte: Adaptado de Rodrigues (2003, p. 51).

Considerando os valores dispostos na Tabela 1, vamos utilizar o GeoGebra para construir o diagrama de dispersão e a respectiva curva de regressão. Após a inserção dos valores na planilha e a construção da lista de pontos, conforme delineado na seção anterior, observamos que os valores apresentam um comportamento linear. Assim, o ajuste por uma reta parece ser ideal. Para realizarmos esse tipo de ajuste, acessamos o "campo de entrada" na janela de álgebra e utilizamos a opção regressão linear, como a lista de pontos já foi construída e nomeada automaticamente por "l1", basta digitar "RegressãoLinear(l1)" que o *software* irá exibir o gráfico da reta de regressão na janela de visualização e a expressão algébrica na janela de álgebra, neste caso a reta obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$y = -0.024x + 0.889 \text{ e } R^2 = 0.913$$

Na Figura 5, exibimos o diagrama de dispersão, a reta de regressão e o respectivo valor de R^2. O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção da regressão para esta atividade através do *link* https://www.geogebra.org/classic/jgq6caew.

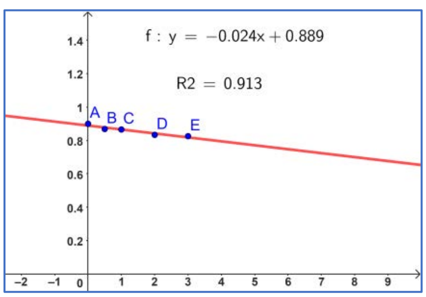


Figura 5. Diagrama de dispersão, reta de regressão e o coeficiente R^2 para os dados da Tabela 1.

Atividade 2

Na dissertação de mestrado intitulada *Efeito do congelamento e da temperatura de armazenamento na cinética de crescimento de Listeria monocytogenes em salsichas*, Massia (2022) desenvolve uma pesquisa com o objetivo de investigar:

> a cinética do crescimento de *Listeria monocytogenes* inoculadas em salsichas comerciais do tipo *hot dog* para entender o efeito do armazenamento sob congelamento no posterior desenvolvimento desta bactéria em temperaturas desde a refrigeração até próximo da condição ótima de crescimento (Massia, 2022, p. 17).

Para facilitar a visualização dos valores no GeoGebra, apresentaremos os valores ajustados por uma escala conveniente. Na Tabela 2, disponibilizamos os valores experimentais obtidos pela pesquisadora.

Tabela 2
Contagens de L. monocytogenes em salsicha para temperatura de 15 °C com congelamento prévio de 30 dias.

Tempo (hora)	UFC/cm^2 ($\times 10^4$)	Tempo (hora)	UFC/cm^2 ($\times 10^4$)
0	0.01000	108	1.40471
12	0.01133	132	2.84291
24	0.01197	144	6.07894
36	0.01624	156	10.96633
60	0.08891	180	11.35695
84	0.33448	–	–

Fonte: Adaptado de Massia (2022).

Ao inserir os valores da Tabela 2 na planilha e criar a lista de pontos, observa-se que os dados apresentam um crescimento amortecido (veja Figura 6), sugerindo um comportamento logístico. Dessa forma, uma regressão logística parece bastante adequada, neste caso, utilizamos o recurso "RegressãoLogística(Lista de Pontos)", digitando RegressãoLogística(l1), no "campo de entrada". Neste caso a curva obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$y = \frac{11.86263}{1 + 68706645.76831e^{-0.12712}} \quad \text{e} \quad R^2 = 0.98508$$

Na Figura 6, exibimos o diagrama de dispersão, a curva de regressão e o respectivo valor do coeficiente R^2. O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção da regressão para esta atividade através do *link* https://www.geogebra.org/classic/hbyx34yn.

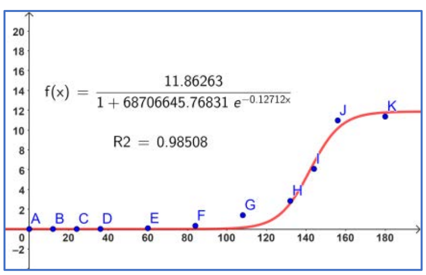


Figura 6. Diagrama de dispersão, curva de regressão e R^2 para os dados da Tabela 2.

Atividade 3

Considerando a Terceira Lei de Kepler "o quadrado período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita" (Tipler & Mosca, 2002, p. 301), ou seja, $T^2 = ka^3$, em que a é o comprimento do semieixo maior. Um modo funcional de relacionarmos o período com semieixo maior é

$$T = ka^{3/2}$$

Na sequência, apresentamos a Tabela 3 com a distância média dos planetas ao Sol e seus períodos de translação. Tendo em conta que as excentricidades das órbitas dos respectivos planetas são próximas de zero (McFadden et al, 2007), podemos considerar o valor da distância média de cada planeta ao Sol como sendo o comprimento do semieixo maior da respectiva órbita.

Tabela 3

Distância média dos planetas ao Sol ($10^{11}m$) com o período de revolução (em anos).

Planeta	Distância ($10^{11}m$)	Período (anos)	Planeta	Distância ($10^{11}m$)	Período (anos)
Mercúrio	0.58	0.24	Júpiter	7.8	12
Vênus	1.1	0.61	Saturno	14	29
Terra	1.5	1	Urano	29	84
Marte	2.3	1.9	Netuno	45	160

Fonte: Tipler e Mosca (2002) e Stewart (2009).

Com o uso do recurso "RegressãoPotência(lista de pontos)" construímos a regressão potência dos dados da Tabela 3. Neste caso a curva obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$T = 0.54a^{1.5} \text{ e } R^2 = 1$$

Já esperávamos $R^2 = 1$, visto que os dados não são empíricos, mas sim referem-se a elementos teóricos. Vale destacar que a potência, valor equivalente a 1.5, já era conhecida previamente. Dessa forma, podemos utilizar uma regressão com apenas um grau de liberdade para os parâmetros, no caso da função $T = ka^{3/2}$, o único parâmetro a ser calculado é k. Para isto, conforme descrito em Pazim e Fonseca (2022), inserimos a respectiva função na janela de álgebra com o parâmetro k na forma de controle deslizante e com o uso do recurso "Regressão(lista de pontos , função)" obtemos

$$T = 0.53a^{1.5} \text{ e } R^2 = 1$$

Note que os resultados são praticamente os mesmos, o que já era esperado. Entretanto, se aumentarmos a precisão para cinco algarismos significativos obtemos:

$$T = 0.54211a^{1.4994} \text{ e } R^2 = 0.9950 \text{ (regressão com dois graus de liberdade)}$$

$$T = 0.53227a^{1.5} \text{ e } R^2 = 0.99989 \text{ (regressão com um grau de liberdade)}$$

Destacamos que a segunda equação é mais apropriada para o ambiente planetário de Kepler. Na Figura 7 exibimos o diagrama de dispersão, da curva de regressão e o respectivo valor do coeficiente R^2. O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção das regressões para esta atividade através do *link* https://www.geogebra.org/classic/tjvbbphh.

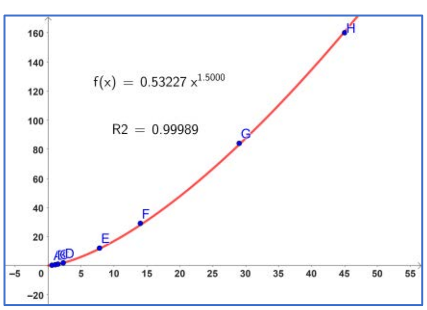


Figura 7. Diagrama de dispersão, curva de regressão e R^2 para os dados da Tabela 3.

Considerações finais

Nesta oficina propomos o desenvolvimento de atividades sobre ajustes de curvas com o GeoGebra. A ideia central é evidenciar a potencialidade do *software* como ferramenta computacional que pode contribuir com o ensino de análise de regressão, bem como o potencial do aplicativo na divulgação científica.

O foco principal consistiu em apresentar algumas funcionalidades do GeoGebra para em seguida desenvolver atividades sobre ajuste de curvas a dados tabelados. As atividades propostas contemplam três tipos específicos de ajustes de curvas: ajuste linear, ajuste logístico e ajuste potência. Em cada uma das práticas, após a construção do diagrama de dispersão, foi realizado o respectivo ajuste aos dados com os recursos do aplicativo.

As atividades podem ser desenvolvidas em cursos de graduação, e também, podem ser adaptadas para o ensino médio, visto que não demanda a discussão de conceitos matemáticos muito sofisticados, pois o foco principal está na utilização do aplicativo. A característica dinâmica da interface do GeoGebra permite que várias possibilidades possam ser explanadas.

Referências e bibliografia

Borba, M. C. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 41, 453–465. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2.

Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educ Stud Math.* 20, 237–272. https://link.springer.com/article/10.1007/BF00310873.

Massia, A. G. (2022). *Efeito do congelamento e da temperatura de armazenamento na cinética de crescimento de Listeria monocytogenes em salsichas*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina). Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFSC. https://tede.ufsc.br/teses/PEAL0404-D.pdf.

McFadden, L. A., Weissman, P. R., & Johnson, T. V. (2007). *Encyclopedia of the Solar System*. (2a ed.). Elsevier.

Pazim, R., & Fonseca, O. J. T. (2022). *Modelos matemáticos: análise de regressão com o GeoGebra*. (1a ed.). Fundação Uniselva. (MT Ciência – Série livros). https://www.mtciencia.com.br/editora/livros.

Rodrigues, A. E. (2003). *Desidratação osmótica e secagem de maçãs: I. Comportamento do tecido em soluções osmóticas. II. Modelagem matemática de difusão*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista). Repositório Institucional da UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90791

Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving within a Spreadsheet Environment. In: N. Bernarz, C. Kieran, L. Lee, (eds) *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*. (pp. 137–146) Mathematics Education Library, vol 18. Springer.

Souza, R., & Calejon, L. (2019). Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no Ensino da Estatística Descritiva. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10 (4), 227–244. https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2432.

Stewart, J. (2009). *Cálculo Vol 1*(6a ed.). Cengage Learning.

Tipler, P. A., & Mosca, G (2000). *Física para Cientistas e Engenheiros Vol. 1*, (4a ed.). LTC.

Análise de Conteúdo Automatizada: evidências nas pesquisas em Educação Matemática

Leonardo **Martins**
Universidade Anhanguera de São Paulo
professor@leomartins.net
Karla Jocelya **Nonato**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
karlanonato@yahoo.com.br
Nielce Meneguelo Lobo **da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo
nielce.lobo@gmail.com

Resumo

Este estudo visa identificar evidências do uso de *software* de apoio na análise de conteúdo nas pesquisas em Educação Matemática, nas quais a Análise de Conteúdo Automatizada foi utilizada como metodologia de pesquisa, em particular com os *software*s Iramuteq, Nvivo e/ou CHIC. Para tanto, os procedimentos metodológicos, dos quais foram constituídos por busca de conjuntos de termos relacionados ao estudo, via programa Harzing's Publish or Perish, na base do Google Scholar. Os dados foram analisados com apoio do *Software* Iramuteq e os resultados apresentados em Diagrama de Zipf e em Nuvem de Palavras. Constatamos, o uso automatizado para análises dos dados da pesquisa, por parte de pesquisadores sem, contudo, haver a menção de que se tratava de uma Análise de Conteúdo Automatizada.

Palavras-chave: Recursos Tecnológicos; Software para análise de dados; Iramuteq; Nvivo; CHIC.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo identificar evidencias del uso de software de apoyo en el análisis de contenido en la investigación en Educación Matemática, en el que se utilizó el Análisis de Contenido Automatizado como metodología de investigación, en particular con el software Iramuteq, Nvivo y/o CHIC. Para ello, los procedimientos metodológicos, que se constituyeron por la búsqueda de conjuntos de términos relacionados con el estudio, a través del programa Harzing's Publish or Perish, en la base de datos de Google Scholar. Los datos se analizaron utilizando el software Iramuteq y los resultados se presentaron en Zipf Diagram y Word Cloud. Encontramos el uso automatizado para el análisis de datos de investigación por parte de investigadores sin mencionar, sin embargo, que se trataba de un Análisis de contenido automatizado.

Palabras llave: Recursos Tecnológicos; Software de soporte para el analizar datos; Iramuteq; Nvivo; CHIC.

Introdução

Atualmente há muito investimento para desenvolver a Inteligência Artificial (IA), que por um lado vai facilitar e auxiliar o homem, por outro lado, causa temor quanto ao seu alcance. A IA reproduz a inteligência humana, via sistemas ou máquinas, realiza tarefas e pode aprimorar seus procedimentos a partir de informações coletadas quando o device interage com o humano (Lee, 2019). A IA pode ser aplicada de várias formas, como por exemplo, nos smartphones, na compilação de dados, nos mecanismos de segurança.

O temor em relação a IA é que ela venha nos substituir, tomando decisões por nós, ganhando vida própria, inclusive quanto à manipulação e uso de dados pessoais, que podem até ser compartilhados sem autorização prévia. Esse é um risco que pesquisadores não podem correr, pois a autonomia do cientista é fundamental para o desenvolvimento de suas pesquisas. É ele quem toma as decisões definindo referencial teórico e procedimentos metodológicos a partir das características do objeto estudado e do objetivo. A seleção, organização e interpretação dos dados é exclusividade do pesquisador, entretanto, ele pode se valer de recursos tecnológicos e da IA para tais processos.

A IA pode auxiliar no auxílio de pesquisas, incluindo nas sobre o ensino de Matemática (Jess, 2004) e na área de Educação Matemática, por exemplo, a Análise de Conteúdo (AC) (Bardin, 1977) é um referencial metodológico utilizado por inúmeros cientistas para análise dos dados. Com o avanço das tecnologias, foi desenvolvida a Análise de Conteúdo Automatizada (ACA) (Grimmer & Stewart, 2013), que é a AC realizada com o auxílio de recursos tecnológicos (*software*). Neste contexto, a proposta desta pesquisa foi identificar evidências do uso de *software* de apoio na análise de conteúdo nas pesquisas em Educação Matemática.

Análise de Conteúdo Automatizada

A AC surgiu na 1º Guerra Mundial, enquanto a IA, ao contrário do rememorado em nosso imaginário, despontou na década de 1940 e é mais velha que a ACA. A ACA é um procedimento de síntese qualitativa e quantitativa para dados manifestados em forma de texto. Tal recurso, ao minerar o texto, utiliza aprendizagem de máquina (um tipo de Inteligência Artificial) e análise de texto. O aprendizado de máquina que a ACA utiliza "se concentra no reconhecimento de padrões e em fazer previsões a partir de dados, para identificar e definir conceitos/tópicos [...] dentro de um corpo" (Nunez-Mir *et al,* 2016, p. 1263).

Vivemos um momento em que há documentos digitais disponíveis em grande quantidade, a ACA agiliza o processo de tabulação dos dados, sem contudo excluir a necessidade de uma leitura minuciosa do pesquisador, ou seja, do controle das variáveis pelo pesquisador.

Desta forma, a ACA é a AC executada com o auxílio de recursos tecnológicos e mesmo com *software* para auxiliar na ACA, a seleção e organização dos dados, a interpretação e as conclusões são realizadas pelo pesquisador (Grimmer & Stewart, 2013). Os *software* que realizam a inferência dos dados, proporcionam ao cientista, além do ganho de tempo, a visualização de relações entre os dados, pois evidencia Classes Hierárquicas e outras relações nem sempre simples de se perceber manualmente. Mais uma vez, frisamos que os *software* não substituem o pesquisador, pois é ele quem deve preparar o corpus, levantar as categorias (ou reconhecê-las a posteriori), interpretar os dados, estabelecer as relações entre categorias e chegar às conclusões.

Existem pequenas diferenças entre a ACA e a AC. A ACA examina a palavra, enquanto a AC considera os sentidos das permutas comunicativas nas unidades de análise. Os tratamentos dos dados realizado com *software* são feitos por análises matemáticas em relação ao verbete (Cúrcio, 2006). Assim a ACA e a AC são compatíveis, entretanto não são idênticas.

É primordial ao pesquisador, que opta por utilizar a ACA, se apropriar dos resultados veiculados pelos software e, a partir deles, constatar e reafirmar quais palavras são relevantes para atingir o objetivo de pesquisa. Para tanto deve seguir os procedimentos metodológicos de modo a manter a confiabilidade.

Metodologia

A IA pode e deve ser utilizada a nosso favor. Para realizarmos as buscas, utilizamos o *software Harzing's Publish or Perish,* dotado de IA, que funciona a partir de comandos humanos. Com a finalidade de atingir o objetivo da pesquisa, empregamos no método a pesquisa bibliográfica do tipo Revisão Sistemática de Literatura (Kitchenham, 2004). Sem delimitação temporal, de nacionalidade e de idioma dos textos, a consulta e identificação bibliográfica se deu no banco de dados do Google Scholar, no mês de julho de 2022, via *software* "Harzing's Publish or Perish" versão 8.2.3944.8118.

Foram utilizados os operadores boolenos AND e OR e realizadas combinações de termos de busca, sendo: I) "Análise de conteúdo automatizada" AND "Educação Matemática"; II) "Análise de Conteúdo" AND "Educação Matemática" AND "Iramuteq"; III) "Análise de Conteúdo" AND "Educação Matemática" AND "Nvivo"; IV) "Análise de conteúdo" AND "Educação Matemática" AND "CHIC"; e V) "Iramuteq" OR "Nvivo" OR "CHIC" AND "Análise de Conteúdo" AND "Educação Matemática".

Foi construído um *corpus* textual com as palavras-chave das pesquisas identificadas nas cinco consultas realizadas, no qual foi submetido a processamento no IRaMuTeQ na função estatística textual descritiva e, dentre os resultados disponibilizados, optamos pelo Diagrama de Zipf – que expõe a quantidade de vezes que uma palavra-chave foi utilizada pelos pesquisados e a Nuvem de Palavras – que é um método de análise lexical simples, pelo qual se organiza graficamente as palavras por tamanho, em função da frequência com que aparecem nos textos.

Análise dos dados

A primeira busca realizada por ele (termos I) resultou em 3 pesquisas, que após a leitura flutuante foram descartadas, pois eram de outras áreas. A segunda consulta (termos II) retornou 101 pesquisas; a terceira (termos III) apresentou 141 artigos; enquanto a quarta consulta (termos IV) 47 estudos.

O *software* Iramuteq classificou o *corpus* textual em 910 ocorrências (segmentos de textos) e em 477 formas, encontrando 362 hápax (palavras com única frequência) em um texto. O *corpus* textual foi submetido à função de estatística textual descritiva no Iramuteq. Nesse processamento, o Diagrama de Zipf forneceu o comportamento de frequência das palavras por meio de uma ilustração gráfica (Figura 1). O Diagrama de Zipf apresenta a relação entre a frequência das formas (y) e a quantidade de formas (x).

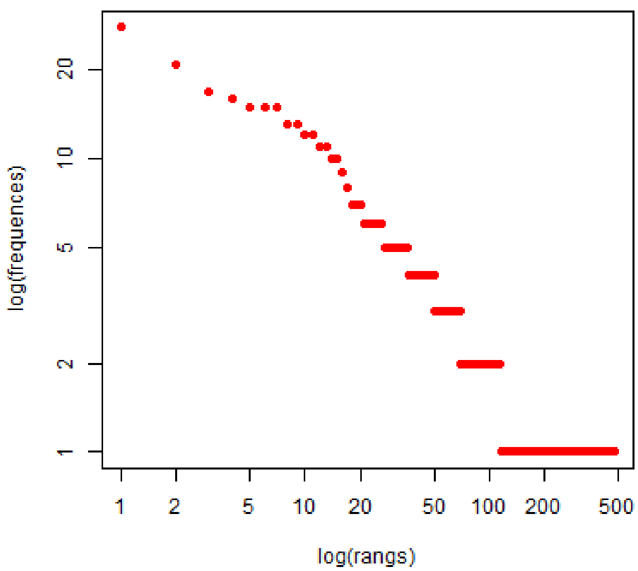


Figura 1. Diagrama de Zipf de frequência de palavras
Fonte. Autores (2022).

Observamos o seguinte resultado na Figura 1: um termo com frequência superior a 20; outro termo com aproximadamente 20 repetições; e cinco termos entre 15 e 20 usos pelos autores. Aproximadamente 350 verbetes foram utilizados uma vez como palavra-chave.

Na nuvem de palavras (Figura 1) criada, os verbetes com fonte maior são as mais utilizadas como palavras-chaves nos textos encontrados nas pesquisas, aparecendo com maior frequência no *corpus* textual e no Diagrama de Zipf (Figura 1).

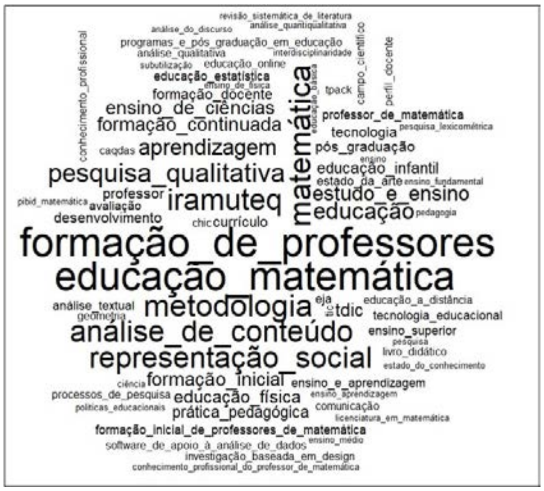


*Figura 2***.** Nuvem de Palavras
Fonte. Autores (2022).

Na Nuvem de Palavras (Figura 2) a palavra-chave que mais se destacou foi "formação de professores", e, segundo o Diagrama de Zipf (Figura 1), ela foi utilizada mais de 20 vezes. "Educação Matemática", que se destaca na Nuvem de Palavras, foi mencionada como palavra-chave, aproximadamente, 20 vezes. Já "Matemática", "Metodologia", "Iramuteq", "Análise de Conteúdo" e "Representação Social" estão entre 15 e 20 citações.

Em contrapartida, de acordo com o hápax, temos 362 verbetes únicos, como por exemplo, "Abordagem Investigativa", "Ciência e Tecnologia", "Modelagem Matemática", "Pesquisa Quantitativa" e "Metodologia Científica". O hápax representa justamente as palavras presentes uma vez no *corpus* textual.

Para as buscas, utilizamos os nomes dos *software* de apoio à Análise de Conteúdo Automatiza, o termo "Iramuteq" foi o mais relevante na Nuvem de Palavras, seguido pelo termo "CHIC", como visibilidade menor, a exceção é o termo "Nvivo", que foi inexpressivo. O termo, "Análise de Conteúdo", dentre todos, foi o de maior destaque, pois está no grupo que foi citado entre 15 e 20 vezes.

Considerações Finais

Na ACA, os *software* de apoio utilizados, realizam uma série de combinações de análises quantitativas e qualitativas do corpus textual durante o tratamento dos dados. Para tal, utilizam desde a teoria dos grafos até a lematização, entre outros. Mas, a máquina, dotada ou não de IA é dependente dos comandos humanos, os resultados, com indicativo percentual de confiabilidade, dependem da organização dos dados e interpretação realizada pelo pesquisador.

Quanto as pesquisas que utilizaram *software* como Iramuteq, NVivo e CHIC, para análise de dados, mesmo não sendo citada a realização de ACA, a partir do momento em que a metodologia utilizada foi a AC, combinada ou não com outra, e o *software* utilizado gerou gráficos, representações, inferências e índices em geral, ela se caracteriza no grupo das análises de conteúdo automatizadas.

Ao buscarmos evidências do uso de *software* de apoio na análise de conteúdo no desenvolvimento de pesquisa em Educação Matemática, mostramos que a ACA é utilizada como metodologia. Mesmo com a a inexpressividade do termo "Análise de Conteúdo Automatizado" propriamente dito, a expressividade dos termos vinculados ao tema representadas no Diagrama de Zipf e na Nuvem de palavras apontam para o emprego da ACA nas pesquisas em Educação Matemática.

Apoio

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências e bibliografia

Barrientos-Fernández, A., Pericacho-Gómez, F.-J. y Sánchez-Cabrero, R. (2020). Competencias sociales y emocionales del profesorado de Educación Infantil y su relación con la gestión del clima de aula. *Estudios sobre Educación*, *38*, 59–78. https://doi.org/10.15581/004.38.59-78

Bourguignon, R., Garaudel, P., & Porcher, S. (2020). Global framework agreements and trade unions as monitoring agents in transnational corporations. *Journal of Business Ethics*, *165*(3), 517–533. https://doi.org/10.1007/s10551-019-04115-w

Cúrcio, V. R. (2006). Estudos estatísticos de textos literário. Revista Texto Digital, (2)

Grimmer, J., & Stewart, B. M. (2013). Text as Data: The Promise and Pitfalls of Automatic Content Analysis Methods for Political Texts. Political Analysis, (pp. 1–31).

Jess, G. M. (2004). Dissertação. https://www.acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32969/R%20-%20D%20-%20GIL%20MARCOS%20JESS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Lee, K. F. (2019). Inteligência artificial. Globo Livros.

Nunez-Mir et al. Automated content analysis: addressing the big literature challenge in ecology and evolution. Methods in Ecology and Evolution (pp. 1262-1272). Kitchenham, B. (2004). Procedures for performing systematic reviews. Keele, UK, Keele University, 33(2004), (pp. 1-26).

Tur Marí, J. A. y Pons Biescas, A. (2005). La alimentación en el mundo Púnico. En J. Salas-Salvadó, P. García Lorda y J. M. Sánchez Ripollés (Eds.), *La alimentación y la nutrición a través de la historia* (pp. 82–112). Glosa.

Análisis sobre la implementación de un software en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en el primer nivel de ingeniería

Germán **Martínez** Armendáriz
Universidad Politécnica Estatal de Carchi
Ecuador
german.martinez@upec.edu.ec
Teresa **Sánchez**
Universidad Politécnica Estatal de Carchi
Ecuador
teresa.sanchez@upec.edu.ec
Libardo **Peña**
Universidad Politécnica Estatal de Carchi
Ecuador
libardo.penia@upec.edu.ec
Javier **Montalvo**
Universidad Politécnica Estatal de Carchi
Ecuador
javier.montalvo@upec.edu.ec

Resumen

En el presente artículo se destaca la preocupación que tienen los expertos en procesos de aprendizajes de la matemática; se resalta que los docentes del Centro de Ciencias Básicas(CECIB) de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi(UPEC) tienen identificado los vacíos que los estudiantes traen respecto a la matemática que es la asignatura fundamental para una carrera de ingeniería; y en respuesta a esta problemática se plantea el uso de un Software matemático y de esta manera aprovechar las ventajas que las TIC presentan en los aprendizajes de esta asignatura. Para fortalecer lo manifestado se encuestó a estudiantes de primer nivel y se entrevistó a docentes para saber cuál es el criterio que tienen respecto a la utilización de un Software para dicho aprendizaje. Con lo anterior se concluye que estudiantes y docentes del CECIB consideran efectivo el uso de un Software Educativo para el fortalecimiento del aprendizaje de dicha cátedra.

Palabras clave: Matemática educativa; Educación superior; TICs; Enseñanza; Aprendizaje.

Introducción

Los docentes de Calculo Diferencial que laboran en centro de Ciencias Básicas tienen identificado los vacíos que traen los estudiantes respecto a los conocimientos previos al aprendizaje de esta asignatura fundamental para una carrera de ingeniería; razón ´por la que se planteó una propuesta de enseñanza aprendizaje en nivelación mediante la aplicación de un Software Educativo.

En este contexto, Peña, L., Patiño, L., Ordoñez, D., & Bravo, A. (2019); afirman que las ventajas de las TIC no están aprovechadas lo suficiente como para poder disminuir las dificultades de quienes estudian matemática o que el impacto que las tecnologías producen es incipiente en los procesos de aprendizaje; lo que significa que los alumnos continúan con los apuntes de clase y limitado uso de herramientas informáticas que pudieran fortalecer la adquisición del conocimiento. Además, no se aprovecha el potencial de los estudiantes que al ser "nativos digitales" manejan celulares de mediana y alta gama y que podrían ser utilizados en las aulas como herramienta para familiarizarlos con las TIC y de esta manera mejorar el aprendizaje.

En este marco, en el Modelo Educativo (2022) de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi (UPEC); se afirma que la metodología de aula en sus diferentes modalidades requiere del manejo eficiente de las herramientas tecnológicas, así como la aplicación permanente de estrategias didácticas debidamente planificadas, que se desarrollen en diversidad de ambientes de aprendizaje, reconociendo las necesidades individuales, las del contexto de aula, de la comunidad y del entorno en general. De igual forma su aplicación, requiere de la instauración de procesos y procedimientos académicos – administrativos que prioricen la dotación de las TIC, que simplifiquen los trámites internos y que aseguren la calidad para el buen desarrollo y articulación de las funciones sustantivas.

Con relación a los antes mencionado, Pérez, Builes y Rivera (2017, p. 45) manifiestan que es fundamental que el profesor adquiere ciertas habilidades, conocimientos y actitudes que lo capaciten para aplicar estrategias innovadoras y modelos alternos que incluyan la enseñanza por medio de la TIC proporcionando al alumno un rol activo en su proceso de aprendizaje. Asimismo, Chancusig et al. (2017), dadas las nuevas formas de enseñar y aprender en la educación actual, es prioritario incluir y añadir distintos recursos interactivos de aprendizaje para mejorar la formación de los estudiantes y así optimizar su desempeño activo y crítico y reflexivo en todas las asignaturas, especialmente en matemáticas

Marco Teórico

El siglo XXI ha generado diversas transformaciones cuando se trata de la educación, ya que se encuentra en constante desafío ante la nueva sociedad del conocimiento de la información que permitan responder a las necesidades del contexto, donde las Tecnologías de Información y la Comunicación (TIC) tienen un rol fundamental ante el panorama de formación educativa. De allí que es vital para este estudio dar a conocer los modelos dentro de la enseñanza que permitan la integración de las TIC que se caracterizan por brindar nuevas formas de aprender (Jiménez & Segovia, 2020).

En sus comienzos las TIC incluían solo el uso de computadores como soporte técnico, pero actualmente han ingresado al mercado una gran variedad de tecnologías: teléfonos inteligentes, tablets, computadoras portátiles, que aumentaron la aplicación de programas, considerando que las tecnologías de la información cuando se emplean adecuadamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje pueden ser de gran apoyo y utilidad, tales como cuando se utiliza un programa multimedia avanzado puede proporcionar estrategias de aprendizaje e información cultural, y asegurar el desarrollo de habilidades de acuerdo con las necesidades e intereses del estudiante (Dorta, 2017).

Un software educativo es una herramienta digital que forma parte de los recursos de la educación. Es un programa de cómputo que incluye datos, procedimientos y pautas que facilitan realizar diversas tareas en un sistema informático, este puede ser mediante de sistema, de programación o aplicación, puede ser usado como medio didáctico, el cual se refiere a un material que se diseña y luego emplea con una finalidad educativa, que a su vez forma parte de un recurso pedagógico (Márquez & Márquez, 2018). El uso de un software matemático y su incidencia en el proceso de enseñanza aprendizaje es fundamental porque el estudiante explore, investigue e interaccione con la tecnología actual y así se fomenten acciones de incentivos para el docente (Pizarro, 2019).

Metodología

Para la presente investigación se optó por un enfoque mixto, es decir cuantitativo y cualitativo. El enfoque cuantitativo se lo utilizó en la aplicación de una encuesta a treinta (30) estudiantes del primer nivel de ingeniería de la UPEC, cuyo propósito fue recolectar datos que contribuyan a responder las interrogantes sobre el uso de un software en el aprendizaje de matemáticas. Estos datos fueron analizados en base de estadígrafos que ayudaron a diagnosticar la situación actual de los alumnos del Centro de Ciencias Básicas. El cualitativo se lo aplicó para realizar una entrevista a diez (10) docentes de nivelación y del CECIB que imparten la asignatura de matemática; cuyo propósito es conocer sus intenciones, creencias y motivaciones respecto a la asignatura que imparten, lo que se evidenciará con los criterios emitidos por dichos docentes.

Resultados y Discusión

Mediante la encuesta realizada a estudiantes de las 4 carreras de ingeniería que posee la UPEC se obtuvieron las respuestas que se observan en la Figura 1; en cuyo instrumento constan siete (7) preguntas. La primera pregunta manifiesta: ¿Según tus conocimientos, consideras que es efectivo el Software educativo aplicado para la asignatura de Matemática como refuerzo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del centro de nivelación de la UPEC? En esta pregunta, el 100% de los estudiantes responden afirmativamente; las preguntas siguientes tienen respuestas positivas con relación al uso del software en la clase, la importancia de su aplicación, el correcto manejo entre otros, en la figura 1 se muestra el comportamiento de las respuestas emitidas por los estudiantes en cada pregunta donde la mayor tendencia de color azul es la respuesta siempre, seguida de casi siempre, en menor significancia a veces y en menor proporción la respuesta nunca.

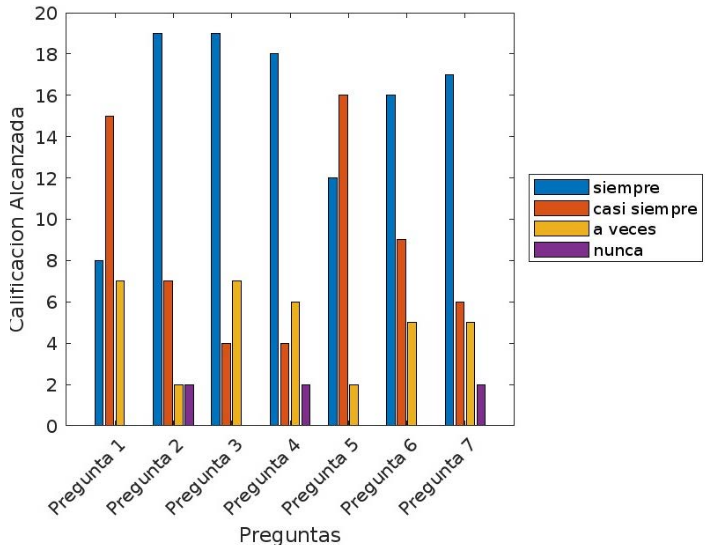


Figura 1. Respuestas de los estudiantes a las siete (7) preguntas.

En la figura 2 se observa que el 52% de los estudiantes contestaron siempre; el 29% casi siempre; y el 16 % a veces; y el 3 % nunca. Lo que significa que el Software Educativo tiene aceptación por parte de los estudiantes.

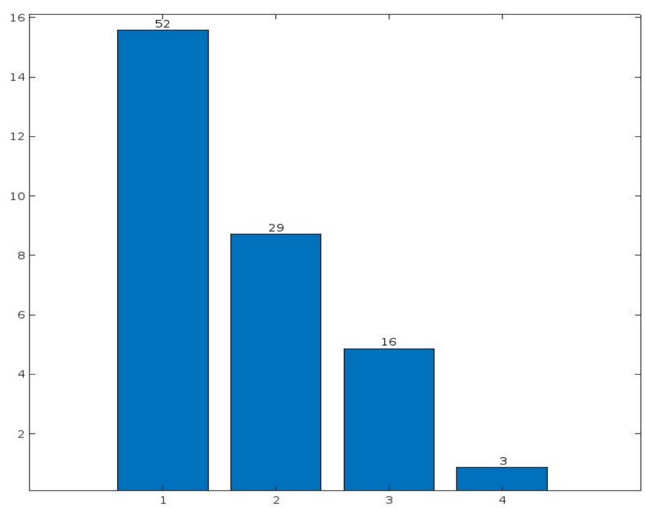


Figura 2. Porcentaje de las medias aritméticas de las respuestas de los estudiantes

En cuanto a la entrevista realizada a los docentes de matemática del centro de nivelación y del CECIB fueron de respuesta abierta con las cuales se obtuvo:

Pregunta 1

¿Cómo incide el uso del software educativo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura matemática recibida por los estudiantes del centro de nivelación de la UPEC? Esta pregunta trata sobre la incidencia del uso del software en el proceso de enseñanza aprendizaje en la asignatura matemática recibida por los estudiantes donde los docentes coinciden que es significativo porque se da una complementariedad útil en la enseñanza de la matemática. Además, es positivo porque permite que los estudiantes interactúan con la tecnología empleando el conocimiento teórico matemático.

Pregunta 2

¿Cuál es el nivel de conocimiento de la asignatura de matemática de los estudiantes del centro de nivelación? En cuanto al nivel de conocimientos de la asignatura de matemática por parte de los estudiantes del centro de nivelación es bajo, esto obedece a los dos años de enseñanza virtual recibida durante la pandemia; lo que significa que es necesario implantar estrategias que ayuden a subir el nivel del aprendizaje de la matemática en las clases presenciales con al ayuda del Software Educativo.

Pregunta 3

¿Cuáles son las debilidades y vacíos en los conocimientos de los estudiantes del centro de nivelación a través de la evaluación diagnóstica que tienen mayor los estudiantes de nivelación en la asignatura de matemáticas? En esta pregunta, se puede observas que concuerdan los docentes que existen debilidades en conocimientos básicos de "Aritmética, algebra, geometría, trigonometría y su aplicación en ejercicios", otro punto donde coincidieron los profesores es el manejo de funciones y sus gráficos.

Pregunta 4

¿Qué Software Educativo considera importante para la enseñanza de la Matemática para los nuevos estudiantes del centro de nivelación? En relación al Software Educativo en la enseñanza de la Matemática para los nuevos estudiantes del Centro de nivelación, los docentes expusieron que es necesario un Software que contribuya a "Entender los conceptos matemáticos y sus aplicaciones con ejercicios de la vida real", para lo cual manifiestan que existe el "GeoGebra(Software potente y gratuito que pueden usarlo muchos estudiantes); además del MatLab (que aunque no es libre, tiene importantes aplicaciones)"

Pregunta 5

¿Cómo se puede determinar la efectividad del uso del software educativo para la asignatura de Matemática como refuerzo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del centro de nivelación de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi? La mayoría de los educadores piensan que "Se puede determinar mediante evaluaciones en físico o digitales", además "Realizando prácticas presenciales de cada tema de la matemática, y efectuar análisis para la retroalimentación de los conocimientos"

Pregunta 6

¿Qué evaluaciones se pueden aplicar para medir la efectividad del uso del Software Educativo para la asignatura de Matemática como refuerzo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del centro de nivelación de la UPEC? Los docentes que participaron en la investigación indicaron que en correspondencia "ya que el Software es digital se debería aplicar evaluaciones digitales" asimismo las "tareas individuales y grupales, prácticas gerenciales, presentación de proyectos" además de las "prácticas en el laboratorio de computación.

Conclusiones

Casi en su totalidad los docentes entrevistados están de acuerdo con la utilización de un software en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de matemática y una de sus principales ventajas que permite que los estudiantes interactúen con la tecnología empleando el conocimiento teórico matemático

Según los docentes entrevistados el nivel de conocimientos de los estudiantes que ingresan a la signatura de Cálculo diferencial es bajo, debido a los dos años de pandemia con educación virtual.

Los profesores usan con preferencia el sofware GeoGebra para la enseñanza de funciones, límites y cálculo Diferencia. ya que es un programa gratuito al alcance de los estudiantes

El uso de las Tics cada vez es más frecuente en la enseñanza; lo que significa que es necesario implantar estrategias que ayuden a subir el nivel del aprendizaje de la matemática en las clases presenciales con la ayuda del Software Educativo.

Con la implementación de un software los docentes sugieren realizar evaluaciones, trabajos, talleres de forma virtual para aprovechar las ventajas de trabajar con programas computacionales.

Gran parte de los docentes entrevistados coinciden que el software permitirá al estudiante entender los conceptos matemáticos y sus aplicaciones con ejercicios de la vida real.

Referencias y bibliográficas

Chancusig, J., Flores, G., Venegas, G., Cadena, J., Guaypatin, O., & Izurieta, E. (2017). Utilización de recursos didácticos e interactivos a través de las TICS en el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de matemática. Boletín Virtual, 6(4), 112-134. doi:https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6119349

Dorta, O. (2017). El software en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física. Centro Universitario de Guantánamo, 18(63), 1-9. Recuperado el 29 de 06 de 2022, de https://www.redalyc.org/journal/4757/475756619014/html/

Jiménez, I., & Segovia, Y. (2020). Modelos de integración didáctica con mediación TIC: algunos retos de innovación en las prácticas de enseñanza. Cultura y Educación, 32(3), 399-340. doi:10.1080/11356405.2020.1785140

Márquez, J., & Márquez, G. (2018). Software educativo o recurso educativo. Varona, 67, 13. Recuperado el 24 de Septiembre de 2022, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1992-82382018000200013&script=sci_arttext&tlng=en

Peña, L., Patiño, L., Ordoñez, D., & Bravo, A. (Julio - diciembre de 2019). Posibilidad de recurrir a las TIC para mejorar el aprendizaje del cálculo diferencial y disminuir la deserción de los estudiantes. Sathiti: sembrador, 14(2), 167-185. https:// doi.org/10.32645/13906925.896.

Pérez, I., Builes, L., & Rivera, Á. (2017). Estrategias para implementar las TIC en el aula de clase como herramientas facilitadoras de la gestión epidemiológica. Medellín: Universidad de Medellín. Retrieved Octubre 24, 2022

Pizarro, L. (2019). Uso de un software matemático y su incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del algebra elemental. Dans Spécificités, 2(13), 204-219. Recuperado el 28 de 06 de 2022, de https://www.cairn.info/revue-specificites-2019-2-page-204.htm

Universidad Politécnica Estatal del Carchi. (2022). Modelo Educativo Ecológico Contextual "Un camino hacia la sostenibilidad planetaria". https://doi.org/10.32645/9789942914842

Aplicação da Coletânea LABGG para formação de professores: Módulo de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI) NEF.M910 - Função Quadrática com a técnica da Seqüência de Ensino Programático com Tecnologia (SEPT)

Eimard Gomes Antunes do **Nascimento**
Universidade de Aveiro - Portugal, Ministério da Educação/Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil e Instituto GeoGebra Fortaleza - Brasil
Brasil
prof.eimard@gmail.com
Domingos Sávio de **Sousa**
Secretaria da Educação do Estado do Ceará
Brasil
sousaanderline@gmail.com
Reginaldia Garcia da **Silva**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
reginaldia_garcia@yahoo.com.br
Amsranon Guilherme Felicio Gomes da **Silva**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
amsranon@gmail.com
Italândia Ferreira de Azevedo
Secretaria da Educação do Estado do Ceará
Brasil
italandiag@gmail.com
Francisca Geny **Lustosa**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
franciscageny@yahoo.com.br

Resumo

Os recursos tecnológicos têm emergido nas últimas décadas, favorecendo o ensino e a aprendizagem. A Coletânea LABGG (Laboratório no GeoGebra) surge como um desses recursos ao ensino da Matemática e disciplinas afins, com a finalidade de servir como ferramenta pedagógica e tecnológica de apoio para os professores utilizarem em sala de aula, sob uma abordagem construtivista no processo de ensino. Tal Coletânea está organizada numa forma estrutural de módulos de E^A (Ensino eleva a aprendizagem descrito em formato teórico e colocado em prática no formato de oficinas). Tem como objetivo, proporcionar aos participantes o uso da técnica própria da Seqüência de Ensino Programático com Tecnologia (SEPT) e na aplicação da Geometria Dinâmica e Interativa. Nessa oficina será utilizada a quarta experiência do módulo escolhido, vislumbrando uma forma alternativa de ensino em um ambiente de caráter laboratorial, pelo qual possibilitará a prática pretendida de uma forma participativa, dinâmica e atrativa.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matemática; Formação de professores; Coletânea LABGG; GeoGebra; Função quadrática; Seqüência de ensino; GDI.

Introdução

Mediante a realidade tecnológica atual em que estamos vivendo, é quase certo quando falamos em educação, citarmos o uso das novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na valorização e na melhoria do ensino e da aprendizagem, considerando que estas têm tido a sua inserção demandada pelas práticas pedagógicas, desencadeando cada vez mais a necessidade de discussões e reflexões acerca dessa inclusão (Barbosa, 2013, Brasil, 2006 Santos, 2007 & Nascimento, 2012a). No entanto, uso das TIC no contexto escolar e universitário ainda necessita ser fortalecido, uma vez que existe uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais e a aceitação, a compreensão e utilização desses mesmos recursos pelos professores.

Sob este enfoque os documentos oficiais brasileiros como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental e Médio expressam a importância dos recursos tecnológicos para a educação com vistas à melhoria da qualidade do ensino aprendizagem (Brasil, 1998; 2006). Destacam também que a informática na educação “[…] permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender”, “[…] oferece recursos rápidos e eficientes para realizar cálculos complexos, transformar dados, consultar, armazenar e transcrever informações, o que permite dedicar mais tempo a atividades de interpretação e elaboração de conclusões”. (Brasil, 1998, p. 147–148).

Os Princípios e Normas para a Matemática escolar americana, publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (2008) também motivam claramente o desenvolvimento curricular da matemática escolar associado ao uso de tecnologías, pelo principio da tecnología relata que “A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos.”(p. 26).

O *link* entre a teoria e a prática quando implantado de forma agradável e estimulante causa ao aluno o senso de curiosidade e, por via de conseqüência, o senso de pesquisa. Segundo Nascimento (2012a), as ideias básicas do pesquisador Dewey (2007) desde à década de 30 sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. Afirma, outrossim, que o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa.

Verifica-se que as ideias de Dewey apregoam o princípio de que os alunos aprendem melhor realizando tarefas práticas associadas aos conteúdos estudados, fato que causa grandes estímulos e maior aprimoramento e memorização em vez de decorá-los. (Nascimento, 2012a, 2012b). Outro fator é que vai de encontro com os preceitos dos PCN em que se adapta as ideias de Dewey quando relata que:

> a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (Brasil, 1998, p. 27)

De acordo com a exposição deste cenário, surgiu a Coletânea LABGG (Laboratório no GeoGebra) pela qual também está pautada nas ideias basilares do investigador John Dewey, cujas ideias de defesa se centram numa educação que está voltada para o desenvolvimento da capacidade, de raciocínio e de espírito crítico do aluno com vistas fundantes na defesa da democracia e da liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. O processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola/universidade, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa (Dewey, 2007; Nascimento, 2012a).

A Coletânea foi apresentada pela primeira vez em 2012 na *Conferencia Latinoamericano do GeoGebra em Montevideo, Uruguay* (Nascimento, 2012b). De acordo com o mesmo autor, foi criada com a finalidade de servir como ferramenta pedagógica e tecnológica de apoio para os professores utilizarem em sala de aula, sob uma abordagem construtivista no processo de possibilidades de estudos da Matemática e disciplinas afins (Fig. 1).

Figura 1 - Logo da Coletânea LABGG, versão 2/2017.
Fonte: Nascimento, *et al*, 2018, p. 181.

A Coletânea funciona junto com o software GeoGebra, no qual foi denominada de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), pois, segundo Nascimento, *et al.* (2018) com o recurso tecnológico e com uma programação transforma num recurso de interatividade com o usuário no manejo dos módulos da Coletânea e com o intuito de auxiliar as tecnologias habitualmente utilizadas, tais como: quadro de demonstração da matéria (giz ou pincel) e a aula tradicional com livro (s) e caderno (fig. 2).

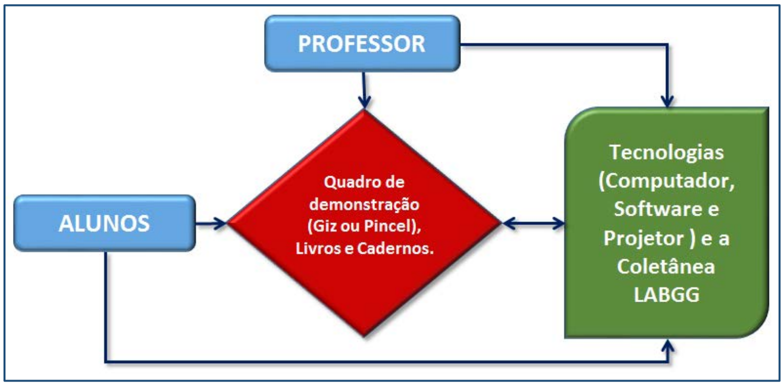


Figura 2 - Fluxograma metodológico da Coletânea LABGG.
Fonte: Nascimento, *et al.* 2018, p. 182.

O que é o LABGG ?

O Laboratório no GeoGebra ou LABGG é a organização estrutural e ferramenta própria de uma metodologia utilizada na formatação de módulos em cada série/ano de ensino. A utilização de um software de Matemática dinâmica como o GeoGebra é de um complemento visual e interativo para o entendimento e assimilação dos conteúdos matemáticos expostos em sala de aula. A sua estrutura centra-se em servir de ferramenta pedagógica e tecnológica de apoio aos professores para que eles possam utilizar em sala de aula, sob uma abordagem construtivista no processo de possibilidades de estudos da Matemática e disciplinas afins. A Coletânea é organizada numa forma estrutural de módulos aplicado na potência E^A (chama-se Ensino-Aprendizagem), no qual é o produto de possibilidades de ensino e seus diversos formatos e formas até chegar a uma aprendizagem de qualidade, sintetizando a potencia desenvolvida por Nascimento *et al.* (2018) mostra que esse produto de formato e formas de ensino eleva o Aprendizado em nível de melhor entendimento e absorção dos conteúdos por parte do aluno. Os módulos são descritos em formatos de artigos e colocados em prática nos formatos de minicursos e oficinas. A interface da teoria e da prática desse material tendencia uma execução voltada a uma experiência agradável e estimulante para o aluno, pois desperta nele o censo de curiosidade e, consequentemente, o senso de pesquisa.

Aplicação da Coletânea LABGG para formação básica de professores: Módulo da GDI NEF-M903D - Função Quadrática

No caso da nomenclatura designada para cada módulo de cada investigação, será utilizado a seguir um exemplo para identificação prática e rápida do módulo, neste caso o "NEF-M910D", pelo qual funciona da seguinte maneira a sua respectiva leitura: verifica-se primeiramente a estrutura antes do hífen que, neste exemplo, é expresso por "NEF", representando que o estudo pertence ao "Núcleo do Ensino Fundamental" e, a estrutura após o hífen, começada pela letra "M", representa a disciplina do estudo, neste caso, o módulo é relacionado ao ensino da Matemática e, a numeração "910", representa a terceira experiência/investigação do 9º ano de escolaridade e a letra "D" representa a quarta modificação ou progressão desse módulo. Esta codificação para os módulos tem a sua aplicabilidade para todos os núcleos da Coletânea. Desta forma, o professor ou leitor, facilmente identificará qual é o assunto investigado e discutido, a disciplina e o ano educacional relativo ao estudo.

O objetivo da oficina é Proporcionar aos participantes as técnicas iniciais de manuseio e de uma programações simples no LABGG para as possibilidades de estudo nos assuntos em Matemática.

Nesta oficina será contemplada por dois temas da Coletânea LABGG aplicados em Matemática no ensino básico/fundamental, o módulo NEF.M901 – aplicação da função quadrática e o NEF.M910 - aplicação da função afim, ambas representam os módulos do ensino fundamental II,
do 9º ano. A oficina é direcionada para formação do professor e futuros professores, no qual possibilitará aos mesmos obter uma melhor interação com os alunos e ter outra forma de ensino em um ambiente de caráter laboratorial.

Metodologia: será de caráter experimental e aplicada nos conceitos bases de acordo com os livros didáticos, como o de Giovanni Junior (2012) e Bigode (2015) aplicados nas escolas públicas do estado do ceará e alguns outros autores ou conceitos que os docentes relatarem na oficina, no qual será transformado em uma prática laboratorial nos computadores ou com *laptops*.

Aplicação da Seqüência de ensino SEPT na animação e programação do módulo

No LABGG o professor pode programar para que fique mais interessante e dinâmico sua aula. Por exemplo, a coletânea mostra como o assunto de função quadrática pode se tornar uma animação e simulação para as diversas possibilidades de condições nos quais os alunos possam realizar suas próprias análises, questionamentos ou façam suas interações com a aplicação do que aprendeu na teoria e/ou com a simulação e troca de partilha com os colegas de sala de aula.

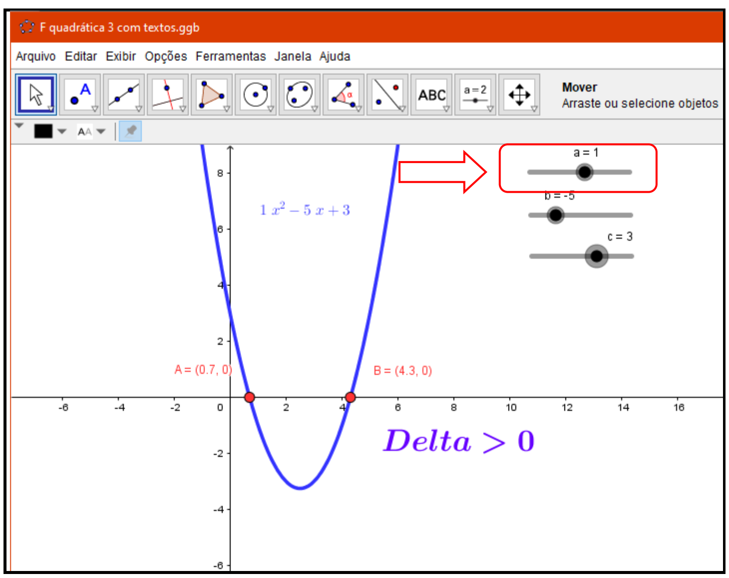


Figura 3 - Animação da função pelo controle deslizante a, movimento de a=1

Vejamos a figura 3 - Quando o controle deslizante a estiver valendo 1, isto é a=1, b= -5 e c = 3, logo aparecerá no centro da parábola a função quadrática $1x^2 - 5x + 3$, para a função generalizada $f(x) = ax^2 - bx + c$ estudada em sala de aula por exemplo. Na sala de aula o professor conta com as tecnologias : quadro negro e giz ou quadro branco e pincel e os alunos com seus livros, cadernos, canetas e lápis, o professor fica limitado a mostrar cada mudança de variável para ação de copiar ao lado um do outro e desenha novamente, ficando cansativo ao tempo que vai aumentando o numero de alterações. No LABGG, com uma pequena programação utiliza-se as variáveis ao comando de controle deslizante e limita o tamanho da amostra para cada variável, isto é, para a variável a posso programar para que ele fique no intervalo fechado de -10 a 10, na matemática escreve [-10;10] e no LABB, basta colocar o ponteiro do mouse no ponto a no controle deslizante e arrasta para esquerda indo até -10 e para direita até 10. Com esse simples movimento o professor terá 21 possibilidades de mudar essa variável em segundos e poder demonstrar em uma só figura, pois automaticamente essa figura vai tomando as formas de acordo com o valor da variável vai sendo escolhida, conforme a fig. 4a. a variável a =-10 e parábola está invertida e aparece o Delta > 0. Já na fig. 4b verifica-se que a variável a = 10 e a parábola esta voltada para cima o Delta < 0. o que se passa? ele pergunta aos alunos.

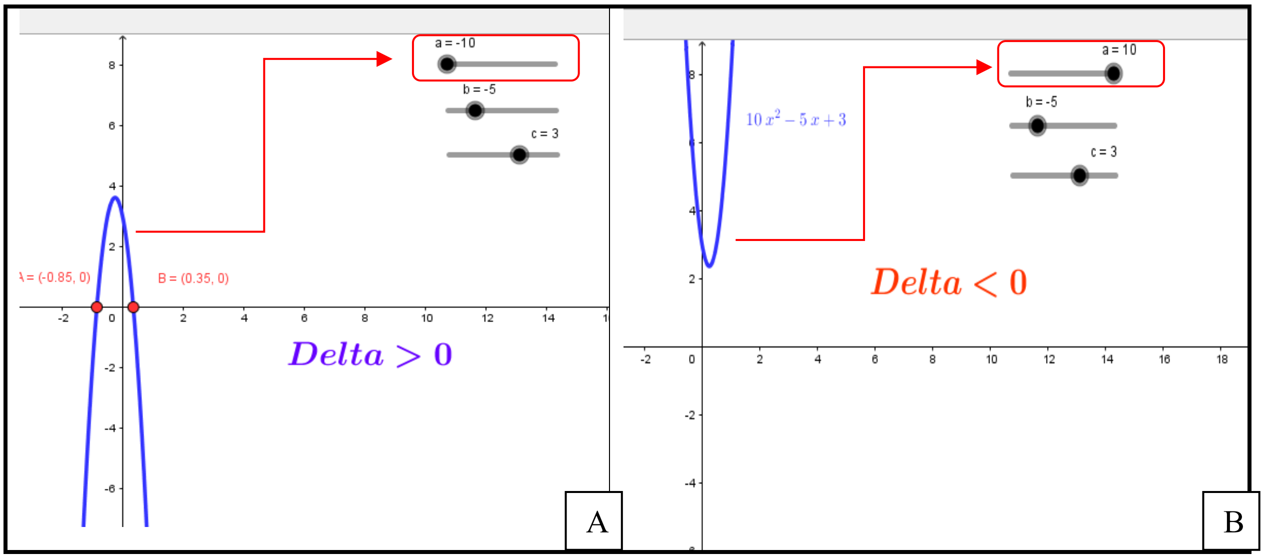


Figura 4 - Animação da função pelo controle deslizante a, movimento no intervalo [-10;10]

Dessa forma seguindo uma seqüência de ensino que interliga a forma usual para leitura matemática e depois para leitura programável , o professor conseguirá minimizar seu trabalho, tempo e voz para utilizar o recurso tecnológico ao seu favor, tornando a aula de matemática dinâmica e um laboratório virtual, no qual pode simular e trabalhar de várias maneiras e criando muitas conjecturas. Nesse módulo da função quadrática, por exemplo o professor terá 21 x 3 = 63 possibilidades combinadas entre si ... imagine o número de possibilidades , testes, perguntas e questionamentos que podem obter e estudar a função, fora os outros conceitos como por exemplo o estudo do Delta ou Δ que é obtida pela fórmula $\Delta = b^2 - 4.a.c$ que você verifica que o próprio LABGG pode ajudar a visualizar conforme as figuras 3, 4a e 4b. Que será mostrado na oficina em questão para facilitar o raciocínio e a memorização dos alunos. Caso tenha tempo pode-se aprofundar na seqüência de ensino e melhorar a programação, conforme a figura 5.

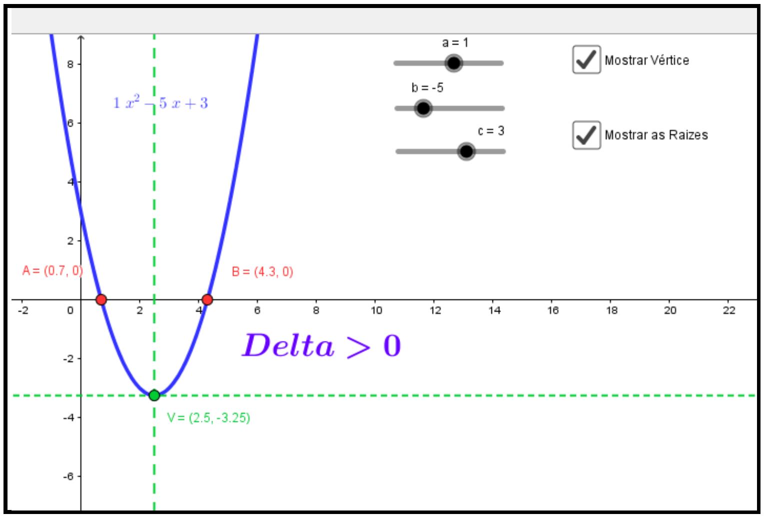


Figura 5 - Animação da função e programação realizada pela a SEPT.
Fonte: Os autores.

Por fim, o professor encontrará vários objetos (variáveis) que poderá aplicar para ensinar este conteúdo de uma forma agradável e estimulante. Podendo aprofundar mais no estudo da função Quadrática.

Para o evento seguirá a seguinte estrutura:

Ementa

- Apresentação do LABGG;
- Apresentação do módulo NEF.M910 com o Técnica de SEPT;
- Parte teórica: Conceito de Função do 2º grau e seuselementos: coeficientes, como encontrar as raízes da função, e sua representação no plano cartesiano (os pontos e o gráfico);
- Uso da Técnica SEPT na Parte Prática, programação e animação: toda a parte teórica apresentada no LABGG.

Recursos a ser utilizados

- Laboratório com computadores (com monitor se possível).
- Projetor (Data Show).
- Software Livre GeoGebra instalado.
- Áudio (caso seja em auditório ou laboratório grande).
- Acesso à Internet

Considerações Finais

A aplicação do LABGG no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, Física, Estatística e outras disciplinas ou áreas afins, pode contribuir em muitos fatores, especificamenteno que tange a manipulação geométrica. A habilidade de manipular pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

A coletânea tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica e ter ação de interação.

Em face do exposto, o LABGG se fundamenta na perspectiva didática proativa e interativa,vivenciada em duas representações diferentes do mesmo objeto que interagem entre si: no caso, arepresentação geométrica e sua representação algébrica. A utilização do software como recurso didático no ensino da Matemática se constitui um caminho para o professor vivenciar com os alunos o processo ensino e aprendizagem, a motivação, competência e habilidade em relação à aprendizagem com qualidade.

Referências

Barbosa, A. F. (2013). *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras: TIC Educação 2012* [livro eletrônico]. ISBN 978-85-60062-67-6. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil - Cetic.Br / Nic.Br.

Bigode, A. J. L. (2015). Projeto Velejar: Matemática – 9º ano (Manual do professor). 1ª ed. São Paulo.SP, Brasil: Scipione.

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC.

_______ (2006). Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. 1a ed. Brasília-DF, Brasil: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Dewey, J. (2007). Democracia e educação: capítulos essenciais. São Paulo: Ática.

Giovanni J., J. R. (2012). A conquista da Matemática, 9º ano. Edição renovada, São Paulo: FTD.

Nascimento, E. G. Af. do (2012a). Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE.

Nascimento, E. G. A. do (2012b). Proposta de uma nova aplicação como instrumento psicopedagogica na escola: o LABGG (Laboratório GeoGebra). *In Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra, Montevideo, Uruguai.*

Nascimento, E. G. A. do, Sousa, C. de, Ribeiro, J. W. & Trompieri Filho, N. (2018). Coletânea LABGG (Laboratório no Geogebra) Para Escolas e Universidades, Módulo NEF.M803 – O Triângulo e os Pontos Notáveis Baricentro e Circuncentro. *Revista Contexto & Educação*, 33(105), 175-197.

NCTM (2008). National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e Normas para a MatemáticaEscolar. Edição Portuguesa, Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Santos, V.P. (2007). Interdisciplinaridade na sala de aula. São Paulo: Loyola.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Optimización de rutas: aplicación del PVA para determinar una ruta entre volcanes de Costa Rica

Cristin **Solano** Pérez
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
cristin.solano@ucr.ac.cr
Josías **Castillo** Valdivia
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
josias.castillo@ucr.ac.cr
Lisandro **Cortes** Brenes
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
lisandro.cortes@ucr.ac.cr
Kervin **Navarro** Ortiz
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
kervin.navarro@ucr.ac.cr

Resumen

En el presente informe se retoma el proyecto de investigación realizado en el curso MA-0560 Computación y Métodos numéricos de cuarto año de la carrera Enseñanza de la Matemática, en el cual se plantea la optimización de rutas mediante el Problema del Vendedor Ambulante (PVA), aquí se propone la resolución de un problema relacionado a la optimización de una ruta entre volcanes de Costa Rica. Junto con esto, se propone un taller dirigido a estudiantes avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, con la intención de que logren generar la noción de optimización y que además el estudiante reconozca las facilidades que ofrecen los softwares matemáticos ante situaciones donde el cálculo manual es casi imposible.

Palabras clave: Matemática Combinatoria; Optimización; Tecnologías Educativas; PVA; MATLAB; Resolución de Problemas; Geometría; Educación Superior; Modelización.

Introducción

El tema de este trabajo de investigación es la optimización de rutas aplicando el Problema del Vendedor Ambulante (PVA); el mismo se desarrolló como parte de la evaluación del curso MA-0560 Computación y Métodos Numéricos de cuarto año de la carrera Enseñanza de las Matemáticas con el interés de darle solución a problemas en contextualizados que implicaran dificultad al momento de resolverlos de forma manual como lo es este caso de optimización de rutas, en donde según su cantidad el problema se torna factorial lo que imposibilita los cálculos manuales.

La finalidad de este presente trabajo de investigación es brindar una herramienta tecnológica que les permita a personas en formación docente en el área de matemáticas analizar y resolver problemas de optimización con un enfoque no tradicional y, seguidamente, que con este puedan innovar en sus futuras formas de enseñanza motivando al estudiantado a la elección de carreras STEM. Además, se espera enseñar al grupo de personas a participar, la importancia de nuestro principal resultado en esta investigación.

Como metodología se pretende el desarrollo de un taller con un grupo de estudiantes avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, en donde resuelvan poco a poco el problema propuesto para este proyecto con el objetivo de que descubran que el problema se vuelve imposible de resolver manualmente a partir de cinco puntos de referencia pues el problema es factorial. Se espera, además, que las personas a participar en el taller logren intuir la fórmula para determinar la cantidad de rutas óptimas que se pueden trazar con los diferentes lugares establecidos en el problema.

En cuanto a la estructura que sigue el presente informe, primeramente, se plantean los elementos teóricos en los cuales se destaca las principales ideas matemáticas del problema en cuestión; seguidamente en el apartado de la descripción se muestran los diferentes componentes de la investigación, así como el proceso de la misma; también se muestra el problema y respectiva resolución haciendo uso del software MATLAB y, finalmente, se explica el taller propuesto.

Elementos teóricos

Problema del Vendedor Ambulante

Anaya et al. (2016) definen el PVA (TSP por sus siglas en inglés) como un problema de optimización en el que una persona debe realizar un recorrido entre ciudades en donde debe considerar visitar cada ciudad una sola vez y cumplir con que el punto de llegada sea el mismo punto de partida. Así entonces, esto presenta la ruta más corta que debe seguir esa persona para realizar el recorrido entre rutas, a lo cual se le conoce como la ruta óptima.

Matemática detrás del PVA

Este problema se puede definir formalmente como lo plantea Buthainah (citado en Anaya et al. 2016) como una cadena de elementos $G[N, A, C]$ que está dada por N cantidad de nodos (puntos), A el conjunto de arcos y C matriz, con entradas c_{ij} , donde c_{ij} es el coste (distancia) de moverse de un nodo i a un nodo j; el proceso intrínseco que sigue el problema del viajero es el mismo que se plantea con los ciclos de Hamilton, en donde se busca recorrer todos los puntos, buscando además recorrer dichos puntos con un costo mínimo.

Para este problema se establecen tres condiciones según Corral (2020), la primera de ellas es que "exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente después de la ciudad i", la segunda condición es que "exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente antes de la ciudad j" y la tercera condición es que "Se eliminan los subtours, los cuales son aquellas rutas que tras visitar una ciudad regresan al punto de partida sin terminar el recorrido completo".

Función objetivo: definidas las tres condiciones anteriores, es utilizada la variable C_{ij}. Esta función busca el recorrido con la distancia total más corta. Para ello, se calcula el sumatorio de todos los caminos elegidos, es decir, cuando $X_{ij} = 1$ y a estos se les multiplica la distancia que supone recorrer dicho camino.

$$mín \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

Tecnologías de la Información y Comunicación

El uso de las TIC en el área de las matemáticas actualmente es uno de los temas más relevantes en la educación debido al impacto que esta genera en el aprendizaje del adolescente; como beneficios de la implementación de las TIC dentro del aula, García et al. 2016 menciona que tanto para el estudiantado como para el profesorado son provechosas ya que, permite el desarrollo de competencias y del pensamiento matemático en las personas estudiantes mientras que a las personas docentes les ayuda a desenvolverse en el manejo de la tecnología así como a innovación el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Descripción del trabajo

En un inicio, se tenía cierta noción sobre el PVA; sin embargo, se desconocía tanto la matemática detrás del problema como las condiciones para desarrollar el mismo y obtener la ruta más óptima. Dado esto se resolvió el problema con puntos (A, B, C, D) de forma manual para comprender el proceso que se seguía y de esa manera llegar a obtener la ruta más óptima; con esto también logramos visualizar la cantidad de rutas que se podían trazar según la cantidad de puntos establecidos. A partir de esto es que se alcanzó conocer los distintos enfoques que tenía el problema y con eso realizar el pertinente estudio de códigos de MATLAB para seguidamente plantear el problema y el taller.

Enfoque del problema

Antes de emplear la función objetivo, se debe resaltar que el PVA puede tener dos tipos de enfoque: simétrico o antisimétrico, en donde la principal diferencia entre estos enfoques radica en la cantidad "real" de distancias que existen entre las diferentes rutas. Para el desarrollo de este trabajo se utiliza un enfoque simétrico para el cual Corral (2020) señala que es un problema en el que el coste de trasladarse de una ciudad i hasta una ciudad j es el mismo que ir de j hacia i.

Con respecto a la cantidad de rutas posibles, estas se pueden generalizar mediante la fórmula $(n - 1)!$, donde n representa el número de ciudades por visitar; con el enfoque simétrico esa cantidad total de rutas se reduce a la mitad pues al ir de un punto a otro o viceversa, la distancia que se ocupa recorrer es la misma, utilizando entonces la fórmula $\frac{(n-1)!}{2}$.

Códigos

En cuanto al código utilizado para la solución del problema propuesto a continuación, cada integrante se dio a la tarea de revisar diferentes códigos que podrían ayudar al objetivo planteado con la investigación, en este proceso se encontraron diversos códigos, de los cuales algunos no cumplían con nuestro objetivo de trazar una ruta óptima que considerara relieves; dos de estos códigos sí cumplían con parte de las características buscadas pues en estos existían aún problemas como por ejemplo, que al correr la función se obtenía una ruta de forma poligonal y no se mostraba la distancia óptima, por esta razón se decidió aplicar el segundo código en el proyecto, el cual pese a presentar la misma problemática con la gráfica de la ruta, proporcionaba la ruta óptima y la distancia asociada a esta. Finalmente, se realizó una inspección minuciosa de las líneas del código con la intención de comprender el propósito de cada chunk de la función y determinar qué partes de este aportaban información a la investigación y solución del problema.

Planteamiento del problema

Un grupo de personas desean realizar un recorrido por los volcanes Turrialba, Irazú, Poás, Rincón de la Vieja y Miravalles. Considerando que el punto de partida puede ser cualquiera de los cinco volcanes, ¿cuál sería la ruta más óptima para realizar dicho recorrido si el punto de llegada debe ser el mismo punto de partida?

Tabla 1.
Matriz simétrica de distancias entre volcanes.

Volcanes	1.Irazú	2.Turrialba	3.Poás	4.Miravalles	5. Rincón de la Vieja
1.Irazú	0	20.4 km	91.5 km	253 km	293 km
2.Turrialba	20.4 km	0	102 km	263 km	303 km
3.Poás	91.5 km	102 km	0	198 km	239 km
4.Miravalles	253 km	263 km	198 km	0	45.6 km
5. Rincón de la Vieja	293 km	303 km	239 km	45.6 km	0

Fuente: elaboración propia

Observe que al hacer variaciones en términos de punto de partida se obtienen rutas distintas, sin embargo, estas presentan la misma distancia total a recorrer, lo cual se debe a un problema de combinatoria. A continuación, se presenta solamente una de las rutas óptimas para realizar el viaje, determinada a partir del código en MATLAB.

En este caso la ruta más óptima que brinda el programa para realizar el tour es 3 4 5 2 1, la cual en términos de volcanes sería Poás - Miravalles - Rincón de la Vieja - Turrialba - Irazú, con la cual la distancia total es de 658.5 km.

```
      Inf   20.4000   91.5000  253.0000  293.0000
  20.4000       Inf  102.0000  263.0000  303.0000
  91.5000  102.0000       Inf  198.0000  239.0000
 253.0000  263.0000  198.0000       Inf   45.6000
 293.0000  303.0000  239.0000   45.6000       Inf

El recorrido mas corto entre los diferentes puntos es : 658.5km, el cual esta definido por la ruta : 3  4  5  2  1
```

Figura 1. Resultado obtenido al ejecutar el código.

Corrección en la gráfica de la ruta

Una vez elegido el código que permitía calcular la ruta más óptima, así como su respectiva distancia, se propuso implementar algún otro código o herramienta que permitiera graficar la ruta contemplando los relieves; realizar una búsqueda entre las herramientas de MATLAB se encontró una que permitía realizar un “plot” de la ruta sobre el mapa de Costa Rica con relieve. Para ello fue necesario determinar las coordenadas de los volcanes en *Google Maps,* agregarlas en un archivo Excel con el objetivo de importarlas al entorno de MATLAB para correr el código a obtener un cambio en el trazo de la ruta como se presenta a continuación.

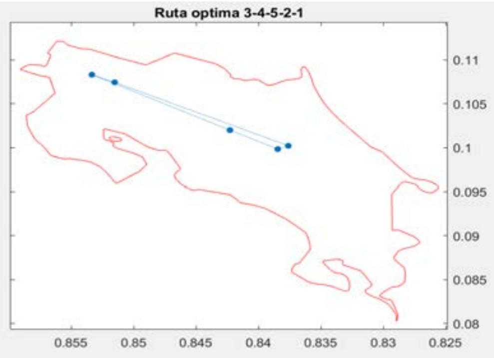


Figura 2. Trazo poligonal.

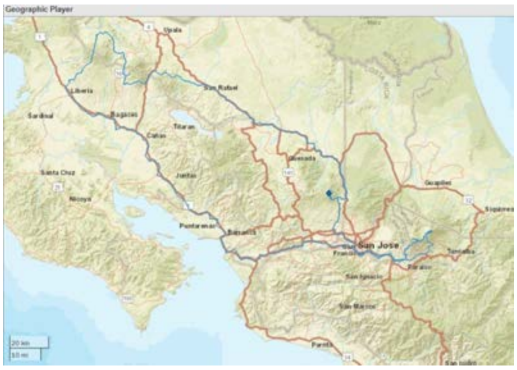


Figura 3. Trazo con relieve.

Reflexiones

En ocasiones durante el proceso de formación docente en el área de la matemática se deja de lado la implementación de tecnologías que permitan observar la matemática desde una perspectiva más aplicada lo que puede impedir al estudiantado el desarrollo de las habilidades tecnológicas y así limitar la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Con la implementación del software MATLAB en la resolución problemas se espera en el estudiantado un cambio en la forma de buscar una respuesta a una situación problema sin dejar de lado los conocimientos teóricos ya adquiridos.

Este proyecto de investigación permitió conocer y resolver el problema del PVA para aplicarlo en la resolución de problemas contextualizados, lo que permitió a su vez la exploración del programa MATLAB, dejando en videncia la utilidad del mismo como una herramienta didáctica dentro del aula.

Por último, en esta investigación se presenta el uso de una herramienta dentro del programa MATLAB, que no se logró observar en ninguna de las investigaciones consultadas y revisadas sobre el PVA; este aspecto resulta innovador y relevante dentro de la presente investigación.

Referencias

Anaya, G., Hernández, E., Seck, J. y Medina, J. (2016). Solución al Problema de Secuenciación de Trabajos mediante el Problema del Agente Viajero. *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial, 13(4), 430-437* https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/143544/Anaya%3bHern%c3%a1ndez%3bSeck%20%20Soluci%c3%b3n%20al%20Problema%20de%20Secuenciaci%c3%b3n%20de%20Trabajos%20mediante%20el%20Problema%20del....pdf?sequence=1&isAllowed=y

Corral Sánchez, A. (2020). Estudio experimental de diferentes modelos matemáticos para resolver el problema TSP. https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/105754/TFG-3222-CORRAL%20SANCHEZ.pdf?sequence=1&isAllowed=y

García, J. y Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad, 4(7)* https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654

Artefatos da Teoria da Objetivação Elaborados na Plataforma GeoGebra no Ensino da Função Polinomial

Ricardo Antônio Faustino da Silva **Braz**
Núcleo de Formação Docente-CAA, Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
ricardo.sbraz@ufpe.br
Josinalva Estacio **Menezes**
Núcleo de Formação Docente-CAA, Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
jomene@bol.com.br

Resumo

Esse artigo trata da utilização de artefatos da Teoria da Objetivação utilizados no ensino da função polinomial através da Plataforma GeoGebra Cálculo Diferencial e Integral. Os artefatos são mecanismos desenvolvidos intentando materializar o saber pelas formas de representações semióticas objetivando o conhecimento, conforme a teoria citada. A Abordagem adotada no processo ensino e aprendizagem do conceito proposto como objetivação do saber, segundo Luis Radford, tem os atores principais, os estudantes e o professor no cenário de sala de aula, trabalhando de forma participativa para atualização do saber em forma de conhecimento, correspondendo ao Labor Conjunto. A metodologia utilizada nessa pesquisa foi uma ação educativa onde licenciandos de matemátíca atuaram de forma colaborativa e interativa. O instrumento utilizado com objetivo de potencializar o saber foi uma sequência didática que contem tarefas do meio social. Como resultados, os estudantes puderam realizar suas construções de forma dinâmica e potencializar o seu aprendizado.

Palavras-chave: Artefatos; Cálculo Diferencial; Ensino Superior; Função Polinomial; GeoGebra; Licenciandos; Teoria da Objetivação

Introdução

Percebemos por meio de leituras em pesquisas bem como em nossa experiência de sala de aula que os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem das funções polinomiais, conteúdo abordado nas disciplinas de matemática básica e Cálculo I com licenciandos de matemática em várias instituições do país. Destacamos aqui a materialização do saber do conceito das funções polinomiais, na forma gráfica, uma dificuldade para eles, o que pode ser auxiliado pela representação semiótica, e isso requer o direcionamento da prática docente, pois o professor precisa mudar suas atitudes e formas de atualização do saber para os estudantes no ambiente de sala de aula.

Em nossa pesquisa usamos a Teoria da Objetivação de Radford (2010; 2014) e seus elementos com o objetivo de criarmos um cenário para ser desenvolvido em sala de aula e que possibilite estudantes e professores estudarem de forma colaborativa, participativa e interativa conduzindo à materialização do saber em conhecimento. Este cenário foi criado com o apoio do GeoGebra que associado a uma ação educativa potencializa os estudantes e o professor, na materialização do saber, fato que a teoria da objetivação trata por Labor Conjunto. Menezes, Nascimento e Magalhães. (2001, p.12) afirmam que:

> Professores e alunos precisam estar mais sintonizados em torno de um tema comum que é a formação de profissionais de nível superior incluindo professores de matemática em geral, e o aprofundamento do pensamento matemático incluindo o ensino-aprendizagem do Cálculo I em particular.

A ideia nos remete de volta à ideia de labor conjunto que corrobora com a teoria Radford (2010; 2014), cuja ideia fundamental é que a aprendizagem está ligada tanto ao conhecimento, o objeto, quanto ao sujeito, à subjetividade do ser. Diante desse conceito o desenvolvimento da teoria da objetivação tanto afeta a relação do sujeito com o saber, materializando em conhecimento, quanto descaracteriza o sujeito com novas concepções.

Assim, entendemos que nessa teoria, a aprendizagem não se limita ao conhecer, mas ainda com a nova postura do sujeito, um novo ser, que pensa e critica quando necessário. Essa teoria embasou fundamentalmente esse trabalho, por sinalizar uma prática docente conectada com os estudantes e que devem estar sintonizados nos mesmo nível do processo de ensino e aprendizagem. Essa atitude possibilita o desenvolvimento de uma habilidade, o pensar matematicamente, de forma reflexiva e crítica.

Através de leituras em livros, artigos, dissertações e teses, constatamos que estudiosos como Radford afirmam sobre o processo de interação do sujeito em um contexto histórico e cultural que modelos mentais, meios de comunicação e as ações com sinais e artefatos resultam no conhecimento, como uma forma de representação do saber por parte dos estudantes.

Partindo das dificuldades de o aluno pensar matematicamente, por não terem supostamente sido apresentados ao referido modelo de aprendizagem desde o ensino básico e agir nessa perspectiva, pensamos uma mudança na prática docente em que o saber em cena também seja responsabilidade dos estudantes, de forma colaborativa, participativa e interativa.

O conteúdo da Geometria, tendo menos destaque na educação básica em detrimento da Álgebra, pode levar o aluno a não ser motivado a pensar os conteúdos da matemática em qualquer dimensão, pela prática docente adotada em sala de aula.

Assim, visando estabelecer o trabalho colaborativo, participativo e interativo no desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, tratamos os conteúdos em conjunto com uma mudança de prática docente, o que também foi informado aos estudantes. Seguimos nessa direção.

Procedimentos metodológicos

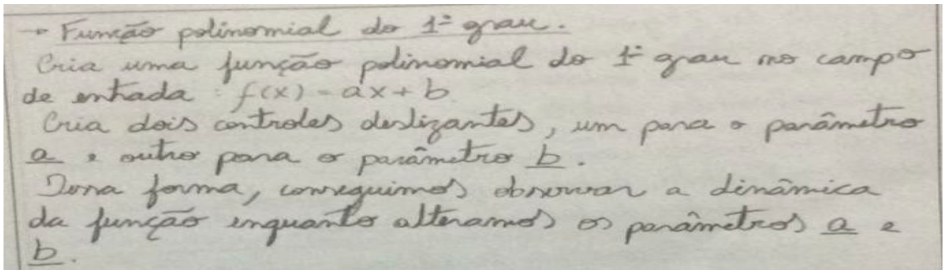
Trabalhamos com doze alunos de Licenciatura de uma universidade pública cursando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Assim adotamos, em nossa pesquisa empírica, com as ideias vigentes na Teoria escolhida para nortear o trabalho, quais sejam: *prática docente*, onde pensamos e elaboramos os problemas que permitam a discussão entre os estudantes com o objetivo de chegar à resposta e trocar experiências com o professor para juntos objetivar o saber atualizando em conhecimento, e segundo a qual o professor deve deixar claro para os estudantes que para ocorrer o processo de objetivação eles estão em um mesmo nível no processo de ensino e aprendizagem.

A *atuação dos estudantes* deve ser feita em grupo, objetivando socializarem suas concepções e experiências com os colegas para que juntos e com o apoio do professor apresente suas dificuldades para objetivar o saber; os *artefatos*, no nosso caso, construídos com o *software GeoGebra*, gratuito, escolhido pela sua qualidade trazida à visualização das construções nele elaboradas. A possibilidade de alteração dos valores das variáveis é um grande diferencial no processo ensino e aprendizagem tanto para os professores quanto para os estudantes. Esse *software* permite ao estudante construir modelos e analisar suas construções visualizando mudanças instantaneamente. Foram dadas aos estudantes duas *atividades e tarefas,* descritas em anexo.

Tanto as atividades quanto as tarefas a seguir referem-se ao que vamos abordar nas ações educativas com os estudantes. Elas foram elaboradas com a intencionalidade de tratar a habilidade da formação do pensamento algébrico matemático no processo de ensino e aprendizagem da função polinomial.

Resultados

Os registros apresentados pelos estudantes na resolução das tarefas e atividades foram acompanhados por meio de instrumentos elaborados com o propósito de construirmos nossos dados para análise e posterior apresentação. Já nas primeiras produções, constatamos a ênfase da Álgebra em vez da Geometria na abordagen de suas resoluções. Mais ainda, notamos a atualização favorecida com os artefatos no Geogebra, e expressas nas representações da função polinomial, conforme destaque a seguir:



→ Função polinomial do 1º grau.
Cria uma função polinomial do 1º grau no campo de entrada: $f(x) = ax + b$
Cria dois controles deslizantes, um para o parâmetro a e outro para o parâmetro b.
Dessa forma, conseguimos observar a dinâmica da função enquanto alteramos os parâmetros a e b.

Figura 01. Transcrição da resposta de um estudante.

Nas atividades, o fato de terem sido resolvidas por meio de artefatos do GeoGebra possibilitou que o estudante entendesse o objetivo das questões e que, com os colegas, discutissem as formas de resolução. As construções no aplicativo ainda permitiram avançar para a objetivação do conhecimento. Portanto, elementos da teoria usada foram destacados no desenvolvimento e na resolução das atividades. Os gestos, os sinais e os *insights* e feedbacks percebidos nessas etapas nos levam a entender que elementos da teoria foram atingidos, justificando o estudo.

Na teoria da objetivação para ocorrer a objetivação de fato, o saber deve ser objetivado em forma de conhecimento. A materialização ou a atualização ocorre no momento em que o estudante constata que a potencialidade proporcionada nos artefatos sugeridos pelo *GeoGebra* possibilita o avanço do conhecimento. Na teoria, o estudante cria suas estratégias, juntamente com os colegas e o professor. Possibilitou a discussão coletiva, participativa e interativa, valorizando o trabalho de todos e socializando as responsabilidades no processo ensino e aprendizagem.

Dessa forma identificamos que no momento da resolução das atividades, temos os elementos, labor conjunto, a presença dos gestos e sinais, os debates, as explicações tudo com o objetivo de atingir o conhecimento. Sendo assim entendemos que ao adotarmos a teoria da objetivação como fundamentação para nossas atividades possibilitou o avanço dos estudantes na materialização do conhecimento. Logo, o trabalho colaborativo, onde o estudante expressou suas ideias, mostrou contribuir para uma melhor compreensão do assunto, e interpretação gráfica da situação, e o uso dos artefatos construídos *GeoGebra* nas tarefas atuou como, de fato, como auxiliar da sua compreensão.

Considerações finais

Destacamos aqui alguns aspectos relevantes no que trata da relação ensino e aprendizagem, relacionados à pratica docente também devem ser levados em consideração, não só o saber deve estar em cena como a postura do professor para desenvolver o conteúdo de forma dinâmica e participativa com os estudantes. Observamos, nessa pesquisa, que os estudantes mostraram quererem aprender e buscam a informação desde que seja de uma forma motivadora, dinâmica e atualizada com o meio social e cultural, pois o saber pode ser desenvolvido nesta perspectiva.

Entendemos ser importante que os professores possam abordar o saber com o apoio, a participação, a colaboração e a interação dos estudantes, provocando uma materialização do saber de forma dinâmica, como visto nessa pesquisa, como uma ação educativa pode ser desenvolvida em um ambiente de virtual de ensino com o uso dos artefatos para atualização do saber. Portanto, devemos desenvolver outras ações e esperamos contribuir para que professores entendam a forma como a Teoria da Objetivação coloca o saber para ser tratado em sala de aula, na ideia de dar um objetivo ao saber por meio de uma atualização resultando em conhecimento.

Referências e bibliografia

Menezes, J. E.; Nascimento, J. R. A.; Magalhães, J.M.C (2001). Os Obstáculos no Processo de Ensino-Aprendizagem da Disciplina Cálculo 1 nos Cursos de Graduação de UFRPE. Rio de Janeiro: Impa.

Radford. L. (2010). Algebric Thinking From a Cultural Semiotic Perpesctive. *Disponível em:* <*http://luisradford.ca/publications/*>*. Acesso em: 17/12/2018.*

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Disponível em:* <*http://luisradford.ca/publications/*>*. Acesso em: 17/12/2018.*

Apêndice: Tarefa aplicada aos estudantes.

Tarefa 01

Produza um prisma e um cilindro através do aplicativo GeoGebra. Essas figuras geométricas podem ser construídas a partir de qualquer forma em sua base e altura e ainda de quaisquer valores, ficando a critério dos participantes do grupo.

Essa construção dos sólidos no aplicativo GeoGebra favorece a compreensão na relação entre o raio, volume e altura das formas geométricas.

Além de conhecer ferramentas do aplicativo como o controle deslizante e a visualização da construção permitindo variações dos valores das variáveis envolvidas.

Atividade 01

Segundo o site do Ministério do Desenvolvimento Social – MDS, "a cisterna para consumo humano é projetada para suprir necessidades básicas (beber, cozinhar e higiene pessoal) de uma família de até cinco pessoas por oito meses, o período normal de estiagem no Semiárido". É uma tecnologia social – um conhecimento desenvolvido e compartilhado na própria comunidade –, simples e de baixo custo, que capta a água da chuva. Trata-se de um reservatório de alvenaria que armazena a água da chuva captada por um sistema de calhas interligado a ela, instalado no telhado.

O Programa Cisternas também apoia a construção de tecnologias sociais de acesso à água para ampliar as condições das famílias agricultoras produzirem alimentos para o autoconsumo e também para a comercialização de excedentes em feiras locais ou nos programas de compras institucionais, como o Programa de Aquisição de Alimentos (PAA) e o Programa Nacional de Alimentação Escolar (PNAE)." (MDS, 2018)[1])

Diante disso: Qual deve ser a melhor relação entre o volume e o raio da base desta cisterna para uma capacidade de 250 litros, e de 800 litros?

Qual deve ser a melhor relação entre o volume e a altura da cisterna para uma família que necessita de 50.000 litros para se sustentar por oito meses?

Estabeleça a partir da relação proposta entre volume e o raio uma representação algébrica?

Estabeleça a partir da relação proposta entre volume e altura uma representação algébrica?

Escreva sua compreensão a respeito da generalização da função polinomial proposta na atividade.

[1] Acesso ao site em 13-08-2018. http://mds.gov.br/area-de-imprensa/noticias/2017/agosto/programa-cisternas-e-uma-das-tres-melhores-politicas-publicas-do-mundo

Tarefa 02

Produza uma generalização da função polinomial do primeiro grau usando como artefatos do GeoGebra os controles deslizantes, que permitem a dinâmica na visualização das construções. Em seguida construa a generalização das funções polinomiais do segundo grau utilizando os artefatos do GeoGebra os controles deslizantes com o mesmo objetivo.

O objetivo da tarefa anterior foi dar auxílio para os estudantes entenderem como se cria a genera-lização da representação algébrica das funções polinomiais através dos artefatos do GeoGebra.

Atividade 02

Em nossa região, temos duas operadoras de telefonia móvel que são representadas por: A e B que oferecem planos de telefonia para seus usuários. Sendo os seus custos apresentados. Operadora A com um custo de R$2,30 pelos três primeiros minutos, R$4,40 para seis minutos, R$6,50, para nove minutos, R$8,60 para doze minutos. Operadora B apresenta a seguinte proposta: R$1,22 para três minutos iniciais, R$2,42 para seis minutos, R$3,62 para nove minutos, R$4,82 para doze minutos. Um consumidor precisa de ajuda para saber qual o custo que as operadoras cobram para 60 minutos, 100 minutos e 240 minutos.

Avaliando investigações de Geometria com o GeoGebra 3D

William **Vieira**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos
Brasil
wvieira@ifsp.edu.br
Esther Vanessa do Nascimento **Santos**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos
Brasil
esther.vanessa@aluno.ifsp.edu.br
Roberto Seidi **Imafuku**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos
Brasil
roberto.imafuku@ifsp.edu.br
Emanoel Fabiano Menezes **Pereira**
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos
Brasil
emanoel.pereira@ifsp.edu.br

Resumo

Discute-se, neste artigo, as potencialidades envolvidas em uma atividade investigativa com o GeoGebra 3D, que trata do levantamento de hipóteses a partir de um problema que combina as Geometrias Plana e Espacial. Para atingir este objetivo, foi proposto uma oficina online sobre o GeoGebra 3D para 17 licenciandos em Matemática, que foi seguida da aplicação da investigação para um dos participantes. Nas análises, utiliza-se os Três Mundos da Matemática. Os resultados indicam potencialidades da atividade em colocar em evidência conhecimentos e dificuldades dos participantes sobre elementos de Geometria Plana e Espacial.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Geometria; GeoGebra 3D; Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação; Três Mundos da Matemática.

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes no cotidiano e tiveram sua relevância acentuada nos últimos anos devido ao período pandêmico. A área da Educação Matemática também vem sendo impactada pelas TDIC, e professores e pesquisadores têm se debruçado sobre as possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem que são colocadas com o desenvolvimento de novos recursos tecnológicos. Essa perspectiva também se reflete nos documentos oficiais dos diversos países. No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) destaca que os estudantes devem exercitar a curiosidade intelectual, utilizando as tecnologias como incentivadora à resolução de diferentes tipos de problema, de forma crítica e significativa.

No caso da Geometria, pesquisadores têm apontado a importância do uso de recursos tecnológicos, em especial os softwares de geometria dinâmica, no ensino de seus diversos temas, que são potencializados nos processos de visualização de objetos, na identificação de conceitos e nas propriedades e formulação de conjecturas (Sousa, Alves, Fontenele, 2020; Soares, Santana, Santos, 2022).

Apesar dos diversos avanços recentes no ensino com o uso de tecnologias, Lecrer e Pazuch (2020) apontam que pesquisas que desenvolvam atividades de ensino com o uso de softwares de geometria dinâmica e que investiguem a formação de futuros professores precisam ser expandidas. Procurando apresentar respostas para as demandas colocadas por estes autores, em (Santos, Vieira, Imafuku, Pereira, 2021; 2022) apresentamos atividades de ensino sobre Geometria Espacial aplicadas em oficina com futuros professores de Matemática com o uso de GeoGebra 3D. Nosso objetivo, neste artigo, é o de discutir uma das atividades que compôs essa investigação e que trata do levantamento de hipóteses a partir de um problema que combina as Geometrias Plana e Espacial. Os Três Mundos da Matemática é o referencial teórico adotado na análise.

Materiais e Métodos

Para que nosso objetivo fosse atingido, realizamos uma oficina de duas horas e meia para 17 licenciandos em Matemática de uma instituição pública de ensino. Na oficina, foram apresentadas funcionalidades básicas do GeoGebra 3D, a fim de nivelar os conhecimentos dos participantes sobre as ferramentas que seriam necessárias para a realização das atividades de investigação. A oficina foi realizada de forma online, no período da pandemia, via a plataforma Google Meet, e os participantes puderam realizar as atividades pelos aparelhos que melhor se adequassem às suas realidades (tablets, notebooks, celulares ou computadores). Ao todos foram aplicadas três atividades de ensino. A atividade 1 foi realizada na plataforma GeoGebra Classroom (Santos et al., 2021; 2022), a atividade 2 e a atividade 3 foram realizadas no GeoGebra 3D.

Na parte inicial da oficina, a segunda autora deste artigo fez uma exposição do GeoGebra 3D, explicando como identificar e manipular os eixos coordenados, como exibir e esconder o plano xy (plano cinza) e os objetos construídos, e também apresentou-se a divisão e as possíveis utilizações da janela de álgebra e janela gráfica.

Neste artigo, discutimos a resolução do estudante D, um dos participantes da investigação. Ele utilizou seu computador pessoal para acessar o GeoGebra 3D online e compartilhou sua tela na plataforma Google Meet, na qual foi acompanhado e questionado por um dos pesquisadores. Toda a discussão foi gravada com o programa OBS Studio. Os Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) é o referencial teórico adotado nas análises. Essa teoria diz que o conhecimento matemático se desenvolve a partir de uma jornada pelos mundos: corporificado, que é o mundo em que a partir das percepções e ações sobre os objetos matemáticos: construções, imagens, figuras e objetos físicos ou virtuais, se desenvolvem imagens mentais; pelo mundo simbólico, que é o mundo dos símbolos, a partir dos quais se tornam possíveis a manipulação dos objetos e operações matemática (algébricas/aritméticas), e no qual os símbolos podem ser os próprios objetos matemáticos; e pelo mundo formal, no qual ocorre a construção dos conceitos, definições, axiomas, justificativas e demonstrações matemáticas, de acordo com a Teoria dos Conjuntos.

Discussão dos Resultados

No que segue, apresentamos uma análise didática da atividade 2 e discutimos as respostas apresentadas pelo estudante D, nosso participante.

Com a construção proposta na atividade (Figura 1), nosso objetivo é o de avaliar se e como os participantes da investigação fazem a transição entre objetos simbólicos-formais, presentes no enunciado da atividade, e os objetos do mundo corporificado, caracterizado pela construção a ser realizada na janela de visualização do GeoGebra 3D. Com o item a, pretendemos observar se a partir da manipulação dos objetos (mundo corporificado), os participantes são capazes de identificar e classificar o hexágono regular (mundo formal). No item b, estamos interessados em avaliar a presença, ou não, de características formais nos argumentos utilizados pelos participantes para justificar que a figura construída no passo 3 é plana. Entendemos que uma das maneiras para justificar esse fato pode ser realizada com o auxílio da ferramenta de construção de Plano por três pontos (mundo corporificado-formal) e da Janela de Álgebra do GeoGebra 3D (características do mundo simbólico-formal).

Atividade 2

Construa, no GeoGebra, as figuras descritas abaixo e depois responda às questões.

Construção – Passos:

1. Desenhe um cubo ABCDEFGH, de aresta 1, com base ABCD no plano xy. Mantenha o cubo sem preechimento.
2. Marque os pontos médios das arestas AD, DC, CG, GF, FE e EA.
3. Trace os segmentos que unem os pontos médios obtidos no Passo 2 na sequência em que aparecem.

Agora, responda:

a) Qual a figura formada pela união dos segmentos traçados no Passo 3? Justifique sua resposta.
b) A figura formada é plana? Justifique sua resposta.

Figura 1. Passos da construção e perguntas da Atividade 2

O participante D apresentou dificuldades na interpretação do enunciado e na construção proposta no item 1. Após construir o cubo destacado na Figura 2(a), foi questionado pelo pesquisador sobre as dificuldades que estava enfrentando, disse "Tá sendo colocar a aresta 1".

Neste momento, o pesquisador o lembrou sobre o uso dos eixos coordenados como uma referência para a construção desejada; então, clicou na origem e em seguida no ponto $(0, 1, 0)$ e obteve o cubo destacado na Figura 2(b). Essa construção foi seguida do comentário "Ahhh... entendi".

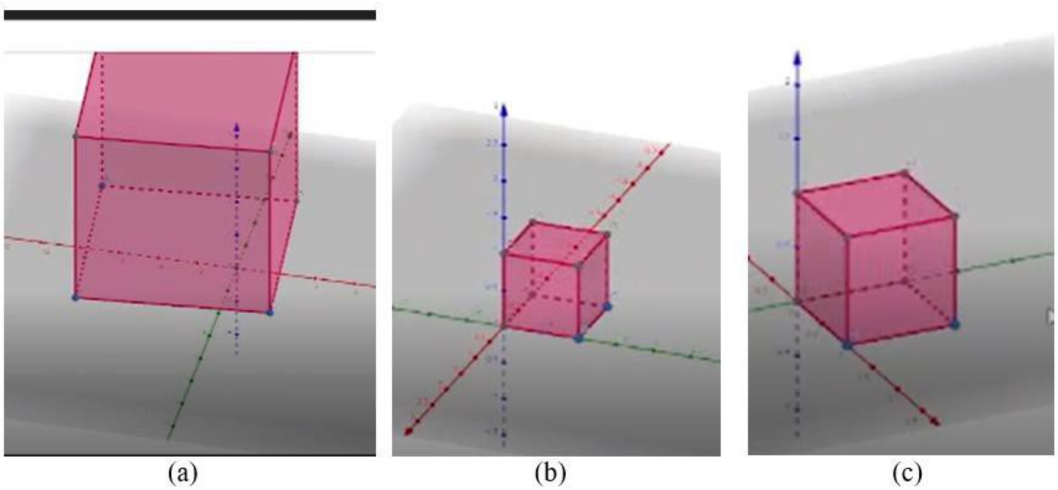


Figura 2. Construções realizadas pelo estudante D para o passo 1.

O participante, então, observa que o cubo construído está na parte negativa do eixo x, apaga a construção e a refaz (Figura 2(c)), clicando no ponto $(1, 0, 0)$. Questionado se o cubo poderia ser construído sobre a parte negativa do eixo x, disse "Poderia, eu acho... é, porque falou aresta ... é, na verdade poderia, pois a aresta é 1 de qualquer jeito, mesmo estando sobre o -1". Embora tenha apresentado dificuldades em seguir alguns passos, o estudante D mobiliza características do mundo simbólico-formal para realizar a construção proposta (mundo corporificado).

Nosso participante não teve dificuldades com o passo 2 da construção (pontos médios), porém se confundiu novamente no passo 3 (Figura 1), e precisou ser convidado a reler as orientações. A Figura 3 apresenta algumas etapas da construção realizada pelo participante.

Ao finalizar a construção, disse "Legal! Não sabia que formava essa figura não".

Perguntado sobre o que achava 'legal', disse "Eu achei interessante, porque, eu não sei se estou falando certo, mas é legal que forma outro polígono dentro". Questionado sobre qual seria o outro polígono, corrigiu-se "Não... é... o cubo é um poliedro. Forma um polígono dentro". Neste ponto, entramos na discussão sobre qual é a figura formada e se ela é plana, propostas nos itens a e b da atividade 2 (Figura 1).

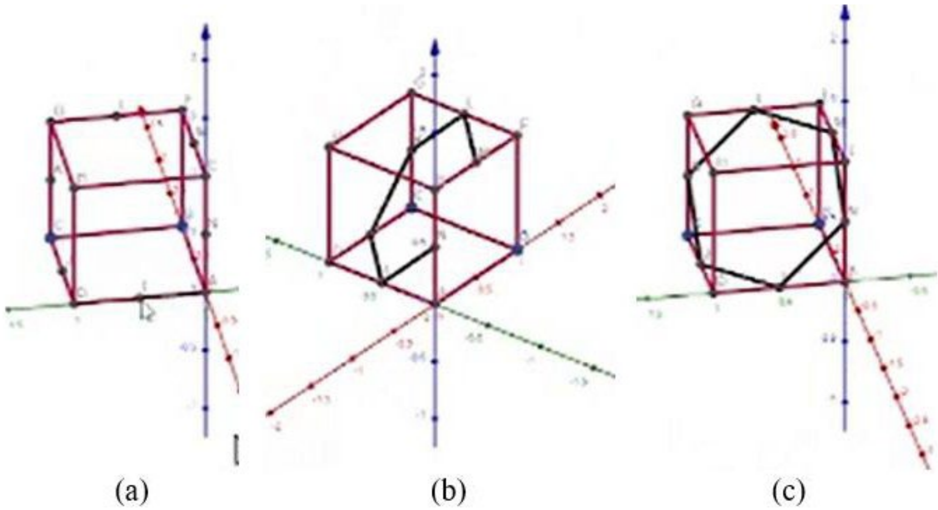


Figura 3. Construção dos passos 2 e 3 realizadas pelo estudante D.

Questionado, disse que "Eu sei que é um hexaedro. Mas... é um polígono né? O hexaedro é um polígono... deixa eu ver...", em seguida, conta os lados da figura de 1 a 6 e reitera "É... é um hexaedro". Neste ponto, optamos por não corrigir a linguagem do participante e, perguntado se a figura era plana, reiterou que "É uma figura plana... justamente por não ser uma figura tridimensional, né, ser uma figura plana, não é um poliedro, então... Eu classifico assim, se é plano é um polígono e se é tridimensional é um poliedro.". Instigado a justificar sua posição, tentou apresentar a definição de polígono "Eu não lembro direito, mas ... Pra mim, assim, o polígono ele tem que ser plano e ter o mesmo número de lados e de ângulos, não é?". Apesar da linguagem inadequada (não usa o termo hexágono) e de alguns equívocos relacionados ao Mundo Formal (a ideia de plano ou espacial não servem para identificar polígonos ou poliedros, pois há figuras planas que não são polígonos), o participante revela características do mundo simbólico-formal sobre polígonos e poliedros, mas não consegue estabelecer uma relação para justificar que a figura construída (mundo corporificado) é plana.

Ao dizermos que não estávamos convencidos de que a figura era plana com a justificativa apresentada, nosso participante ficou em dúvida e disse "É, aí me pegou... Na verdade ela está viajando pelas três dimensões aqui... assim, pra mim ela não tem volume, ela está dentro de um cubo, mas ela não tem volume, então acho que é plana". Neste ponto, lembramos o participante da opção do GeoGebra para omitir objetos. Ele faz isso (Figura 4(a)) e então diz "Uhum não, ela é 3D... sei lá, fiquei confuso". Perguntado sobre o que significa uma figura ser plana, disse "Que ela está só no eixo xy, né?" e, com base nessa ideia, reiterou "É... ela não é plana". Então, questionado se não existem outros planos, voltou a apresentar dúvidas e confusões em sua análise, então, o informamos que uma figura ser plana significa estar contida em um plano.

Nesse sentido, o participante revela incompreensões sobre características formais relacionadas a Geometria Espacial, uma vez que houve a necessidade de uma intervenção para que se lembrasse da existência de outros planos.

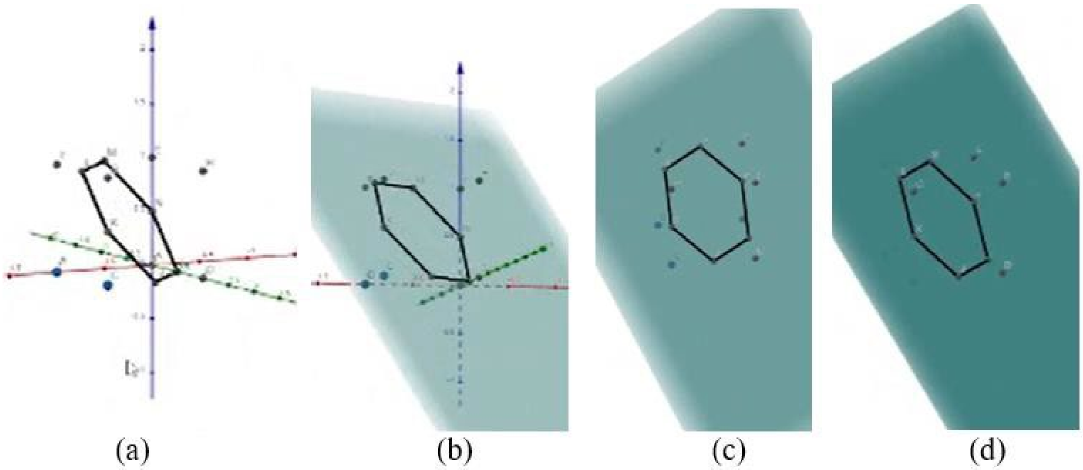


Figura 4. Construção de planos a partir do hexágono realizada pelo estudante D

Quase instantaneamente ao ouvir essa informação, disse "Ahhh... eu acho que se eu fizer... espera aí...", busca a ferramenta Plano do GeoGebra 3D, clica em dois lados não consecutivos do polígono, gerando a imagem destaca na Figura 4(b), e diz "Aí eu criei outro plano, não é?".

Perguntado se essa imagem garante que a figura é plana, disse "Olhando assim, se eu tirar os eixos [esconde os eixos coordenados], ela está contida em um plano, então ela é plana". Neste caso, o estudante D se ampara na definição da ferramenta Plano do GeoGebra e na imagem construída (mundo corporificado-formal) para justificar sua decisão. No entanto, questionado novamente se a imagem garante o fato da figura ser plana, voltou a ter dúvidas "Aí eu não sei dizer".

Neste ponto, perguntado se o fato de ter escolhido dois lados do polígono garante que os demais também estejam no plano obtido, nosso participante construiu um novo plano, usando outros dois lados não consecutivos (Figura 4(c)) e afirmou que continuava o mesmo plano.

Perguntado sobre a justificativa para isso, utilizou a Janela de álgebra do GeoGebra 3D e disse "Aqui ó, esse foi primeiro plano que eu criei [plano p na Figura 5(b)] 0,25x, 0,25y, 0,25z e o outro que eu criei [plano q] tem as mesmas coordenadas [e isso garante] que são o mesmo plano, na minha opinião". Embora use uma linguagem inadequada para se referir a equação do plano, o estudante D se vale de características do mundo simbólico (equações da janela de álgebra) para sustentar sua posição.

Questionado uma vez mais se esses dois planos bastavam, voltou a apresentar dúvidas e disse "Não... eu acho que tenho que fazer com todos os lados... mas eu acho que eu peguei os lados errados, eu acho que tenho que usar os lados opostos", mas não soube explicar o porquê dessa posição.

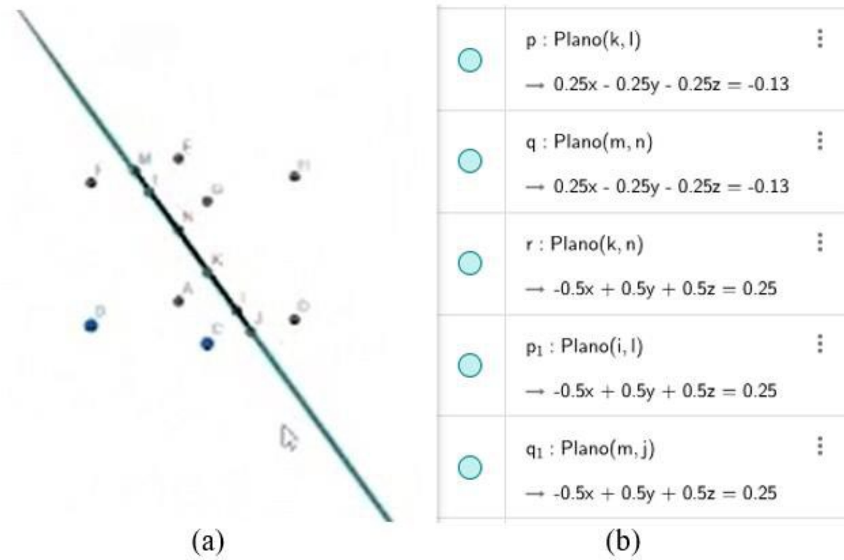


Figura 5. Visualização e Janela de álgebra usadas pelo estudante D

Em seguida a essa posição, constrói novos planos usando pares de lados opostos paralelos do hexágono (Figura 4(d)), volta a Janela de álgebra e se surpreende com as novas equações obtidas e diz “Ah não! Não, não! São planos diferentes”. Convidado a explicar a diferença entre eles, disse que “Quando eu usei dois lados opostos, as coordenadas são diferentes, olha [aponta a Figura 5(b)] antes era 0,25 no x e agora é 0,5”.

Neste ponto, insistimos para que nosso participante comparasse as imagens obtidas (Figura 4) e questionamos se ainda achava que os planos eram diferentes e ele disse que “Ah! Parecem o mesmo plano, não consigo ver diferença, mas... eu estou confuso por causa das variáveis, são diferentes, 0,25 e 0,5, e isso faz parecer que são diferentes, mas se eu olho a figura, parecem o mesmo plano, talvez tenha alguma equivalência, não sei, entre esses planos”. Nosso participante não conseguiu decidir-se sobre as diferenças observadas nas equações (mundo simbólico) e as imagens obtidas (mundo corporificado) e, sustentando-se nas imagens, reafirmou que a figura é plana.

Considerações finais

De maneira geral, a atividade proposta apresentou potencialidades para o desenvolvimento de características dos mundos corporificado, simbólico e formal. De fato, ao longo da discussão, nosso participante pôde externalizar diversos conhecimentos sobre Geometria Plana e Espacial, e também muitas dúvidas. Em diversas situações, o estudante D conseguiu tomar decisões realizando uma jornada pelos diferentes mundos, em outras, contudo, dificuldades em transitar entre mundos possibilitaram que dúvidas de natureza conceitual (mundo simbólico-formal) fossem evidenciadas. As construções propostas (mundo corporificado) também se mostraram potenciadoras de discussões sobre conceitos e ideias (mundo formal).

Nesse sentido, seguindo (Sousa et al., 2020; Soares et al., 2022) os resultados da investigação também evidenciam potencialidades para o desenvolvimento do processo de visualização de objetos, a identificação de conceitos e a elaboração de conjecturas.

Ao final da atividade, as soluções, dificuldades e incongruências colocadas pelo estudante D foram discutidas coletivamente e permitiram que todo o grupo de estudantes avançasse na reflexão sobre os conceitos e ideias discutidos na atividade proposta.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio. Brasília: MEC.

Lecrer, O. P. V. G. y Pazuch, V. (2020). O ensino de Geometria Espacial: um panorama de pesquisas por meio de uma metassíntese. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 20(9), 38-61.

Santos, E. V. N., Vieira, W., Imafuku, R. S. & Pereira, E. F. M. (2021). O uso do GeoGebra 3D no estudo de poliedros e suas propriedades: uma investigação com professores de matemática em formação inicial. *Anais do 12º. Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia – CONICT – IFSP Cubatão*, 12.

Santos, E. V. N., Vieira, W., Imafuku, R. S. & Pereira, E. F. M. (2022). Uma investigação do uso do GeoGebra 3D no estudo de propriedades de poliedros. *Revista Ciência em Evidência*, 2, 3-16.

Soares, F. R., Santana, J. R. & Santos, M. J. C. (2022). A realidade aumentada na aprendizagem de Geometria Espacial e as contribuições da Sequência Fedathi. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(4), 1-25.

Sousa, R. C., Alves, F. R. V. & Fontenele, F. (2020). Aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial Referente às Questões do ENEM com Amparo do Software GeoGebra. *ALEXANDRIA: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 13(2), 123-142.

Tall, D. O. (2013). *How Humans Learns to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. 1. Ed. New York: Cambridge University Press.

Bitácora digital como herramienta para el desarrollo de escenarios de aprendizaje basados en una visión inquisitiva de resolución de problemas matemáticos

Daniel **Ortiz** May
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
daniel.ortiz@cinvestav.mx

Resumen

Se propone el concepto de bitácora digital como una forma de estructurar y registrar el trabajo de los estudiantes en actividades de resolución de problemas matemáticos que involucran el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en escenarios de aprendizaje en línea. La bitácora digital consiste en un repositorio en donde se evidencian los momentos clave en el proceso de resolver problemas por medio de diversos recursos digitales tales como texto, imágenes, videos, modelos dinámicos de GeoGebra, etc. En esta presentación, se expone el trabajo de estudiantes de un programa de posgrado en un taller de resolución de problemas totalmente llevado a cabo vía remota, con la intención de ilustrar la idea de una bitácora digital para regular y guiar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

Palabras clave: Educación superior; Resolución de problemas; Aula virtual; Investigación cualitativa; México.

El rol de las tecnologías digitales en la educación matemática

En la última década los avances en materia educativa han estado orientados a vislumbrar enfoques sobre el desarrollo de ideas matemáticas en escenarios remotos, ampliando la naturaleza de los espacios de aprendizaje. Particularmente, las matemáticas se conciben como una disciplina que implica grandes dificultades para llevarse a cabo en ambientes asíncronos; aún son relativamente inexplorados aspectos vinculados al desarrollo profesional de recursos tecnológicos en ambientes en línea, al modo de emplear e implementar soportes cognitivos y sociales para aprendices en ambientes en línea, las dinámicas relacionadas con la evaluación entre pares, alternativas de evaluación de cursos en línea y formas de brindar retroalimentación a los estudiantes (Johns & Mills, 2021; Martin et al., 2020; Trenholm et al., 2015). Diseñar e implementar modelos de enseñanza remotos implica repensar el tipo de escenarios donde sea explícito el papel de las tecnologías digitales en las formas de interacción entre los estudiantes y profesores en el estudio de los conceptos matemáticos (Laborde, 2002).

Santos Trigo et al., (2022) destacan que el uso de tecnologías digitales permite a los estudiantes extender el tipo de actividades que se realizan en ambientes presenciales de aprendizaje. Por ejemplo, pueden hacer consultas sobre explicaciones de conceptos en sitios web o foros de discusión, de modo que la búsqueda, discernimiento y comunicación de la información se convierten en competencias que forman parte de la metacognición de los estudiantes al momento de resolver problemas. Bajo este enfoque, la construcción de conocimiento matemático puede generarse a través del trabajo en línea cuando se basa fundamentalmente en la comunicación y compartición de recursos, herramientas e información (Engelbrecht et al., 2020). No obstante, una de las principales brechas que existen en la forma de desarrollar conocimiento matemático en aulas virtuales en comparación con salones de clases físicos, es el acceso limitado que tienen los profesores a ofrecer orientación o retroalimentación a través de indicativos sutiles sobre el nivel de entendimiento de los estudiantes, tales como momentos eureka o expresiones faciales (Mullen, et al., 2021). En este sentido, la noción de una *bitácora digital* emerge como una herramienta en la que se aprovechen los recursos digitales a su disposición de modo que permitan a los estudiantes registrar, comunicar y reflexionar sobre sus propias experiencias de aprendizaje, de modo que se expliciten los razonamientos que surgen a lo largo del trabajo en tareas matemáticas. A su vez, un registro sobre los procesos de resolución de problemas de los estudiantes ofrece la oportunidad de analizar y de retroalimentar las ideas expuestas por los estudiantes al incluir diferentes aproximaciones, exploraciones dinámicas, discusiones relacionadas con los conceptos involucrados en los problemas apoyadas en videos o plataformas línea (Santos-Trigo et al., 2022). De este modo, el presente trabajo pretende contribuir al problema de investigación planteado en la pregunta siguiente: ¿De qué manera puede coordinarse el uso de tecnologías digitales para promover y guiar a los estudiantes en la comprensión de conceptos y en el desarrollo de competencias de resolución de problemas matemáticos en un ambiente de aprendizaje virtual?

Marco conceptual

Santos Trigo y Reyes-Martínez (2019), describen la noción *de problematizar* los contenidos matemáticos como una concepción del quehacer matemático orientada a la conciliación de dilemas; se concibe el razonamiento matemático como la capacidad de llevar a cabo procesos cognitivos tales como la resolución de problemas, justificación de conjeturas, validación de hipótesis, comunicación y conexión entre conceptos y sus representaciones, es decir, habilidades necesarias en la práctica disciplinar. Los estudiantes se involucran en la problematización de los contenidos matemáticos justamente a medida que se enganchan en procesos de entendimiento y representación de conceptos al momento de trabajar en tareas matemáticas, así como en el proceso de generar diversas formas de comunicar y validar sus resultados. Bajo esta perspectiva, es fundamental que los propósitos de la enseñanza estén dirigidos a promover un enfoque inquisitivo de resolución de problemas: procurar que el trabajo de los estudiantes sobre las tareas matemáticas esté regido por el planteamiento y seguimiento de preguntas orientadas a interpretar, representar, explorar y encontrar diversos caminos de solución (Santos-Trigo & Camacho, 2013). Santos-Trigo et al. (2022) proponen una organización teórica que enmarca el trabajo de resolución de problemas bajo la construcción de una bitácora digital. Este concepto se basa principalmente en el marco RASE (Churchill et al., 2016) para el diseño de aprendizaje en escenarios virtuales, con la introducción de elementos que apuntan a la problematización de la disciplina. Estos se resumen en la Figura 1. La construcción de la bitácora digital se halla en el centro de las actividades de los estudiantes, pues es a partir de ella puede monitorearse y registrarse el aprendizaje de estos. ¿Cuáles son los elementos relevantes que constituyen el contenido de esta bitácora? Pues bien, la construcción de este registro se basa en tres elementos interrelacionados: una visión inquisitiva de resolución de problemas, el uso de recursos y el soporte en línea.

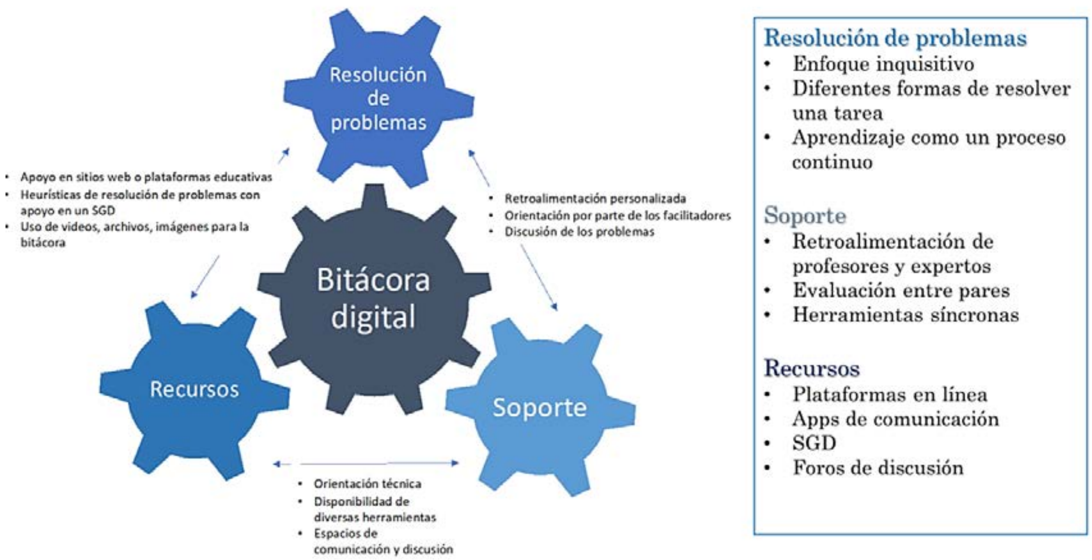


Figura 1. Elementos teóricos de la bitácora digital

Un enfoque inquisitivo de resolución de problemas

Las tareas matemáticas son el vehículo para que los estudiantes se enganchen en actividades de resolución de problemas. Plantear constantemente diferentes formas de resolverlas se vuelve una actividad importante para desarrollar su pensamiento (Santos-Trigo et al., 2022).

Una concepción ampliada de los recursos de los estudiantes

El concepto de recursos que Schoenfeld (2011) describe involucra considerar en el proceso de resolución de problemas aquello que el individuo conoce y, por lo tanto, contribuye a la construcción de metas y submetas de solución. La inmersión de los estudiantes en contextos virtuales difumina la línea entre lo que los estudiantes conocen a priori y el conocimiento al que tienen acceso: se considera relevante incluir el uso coordinado de tecnologías digitales que pueden utilizar para explorar, representar y dar sentido a los problemas matemáticos.

Soporte en línea

La forma en que los estudiantes comparten sus ideas, soluciones, inquietudes y propuestas puede ser a través de espacios de discusión de estilo foros, chats o por medio de aplicaciones de comunicación. La interacción que los estudiantes puedan tener entre ellos o con los profesores no se limita a las reuniones sincrónicas o vía email, sino que adquieren elementos atemporales: en contexto en línea, los horarios de trabajo son únicos para cada individuo y no necesariamente universales.

Metodología y diseño

Como parte de la profundización sobre los aspectos de implementación de la bitácora digital, se llevó a cabo un taller de resolución de problemas de manera remota con cinco estudiantes de un programa de maestría en ciencias en matemática educativa, coordinado por el autor del presente trabajo y por un investigador auxiliar. El curso se gestionó a través de la plataforma de *Microsoft Teams,* durante ocho semanas. Se llevaron a cabo sesiones semanales sincrónicas de dos horas por medio de videollamadas grupales, no obstante, las interacciones entre los participantes y los coordinadores del curso no estuvieron limitadas a las sesiones sincrónicas. El trabajo de los participantes se llevó a cabo a través de dos episodios: primero, se les envió por medio de un mensaje en Teams el problema que se discutiría durante la semana y que debían registrar en su bitácora digital; posteriormente, en la sesión semanal por Zoom, presentaron avances sobre la bitácora y recibían retroalimentación tanto por parte de los coordinadores del curso como por sus compañeros.

Formato de la bitácora digital

Si bien se ha descrito el concepto de la bitácora digital como una herramienta de aprendizaje, es importante definir en términos concretos cómo luce una bitácora digital. Para este trabajo, se decidió que el libro de GeoGebra podría ser un formato adecuado, pues es un recurso que permite incluir múltiples herramientas digitales para la comunicación de ideas en un formato similar al de un libro electrónico. Se estructura a través de capítulos, cada uno compuesto por unidades llamadas actividades constituidas por: secciones de texto, vínculos o ventanas de páginas web, videos incrustados, imágenes, archivos adjuntos y, lo más importante, applets de GeoGebra funcionales (ver Figura 2).

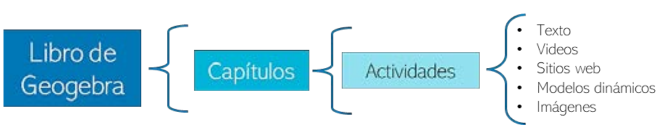


Figura 2. Estructura anidada del libro de GeoGebra

Un libro de GeoGebra no consiste en un archivo descargable, sino que se accede a él mediante un enlace permanente. Al modificar el libro, el enlace permanece invariante, de modo que es posible trabajar continuamente en él sin la necesidad de constituir versiones nuevas. Se exhortó a los participantes a estructurar los acercamientos a cada problema en 4 secciones, basadas en las fases de resolución de problemas (Santos-Trigo et al., 2016), enfatizando el uso de tecnologías digitales en cada una de las fases (Santos-Trigo, et al., 2022): comprensión del problema, es decir, concebir una idea general de lo que será la solución al problema e identificar las figuras o relaciones matemáticas que puedan ser interpretadas o reconstruidas; exploraciones basadas en el uso de herramientas de GeoGebra que lleven a la formulación de conjeturas a través de una construcción estructural; búsqueda y elaboración de argumentos que justifiquen las conjeturas halladas a través de exploraciones dinámicas; y, finalmente, una sección dedicada a una reflexión retrospectiva sobre las ideas matemáticas involucradas y extensiones al problema, con apoyo en el uso de diferentes herramientas dinámicas.

Resultados y conclusiones

Con el objetivo de ejemplificar los conceptos descritos anteriormente, se utilizará el trabajo de dos estudiantes, Iván y Paola, cuyas bitácoras pueden ser consultadas en su totalidad. No obstante, para este texto se expondrán aspectos particulares de las exploraciones de los estudiantes sobre el siguiente problema:

> *Sea ABCD un cuadrado. El segmento DE conecta un vértice del cuadrado (D) con el punto medio de uno de los lados opuestos al vértice (AB). Construir el cuadrado tomando como punto de partida el segmento DE.*

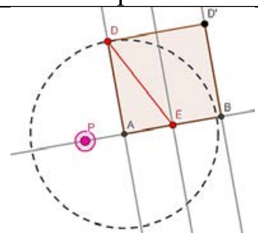
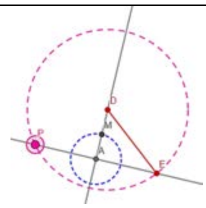
La comprensión del problema es un momento importante en la resolución de problemas, pues es donde se plantean preguntas que permitan entender la forma en que los estudiantes dan sentido al enunciado del problema, a la solución y el tipo de recursos necesarios para alcanzarla. Estas preguntas reflejan la forma en que los estudiantes organizan sus recursos para la elaboración de estrategias. La Tabla 1 resume las preguntas planteadas por los estudiantes, las cuales son reflejadas en la bitácora de cada estudiante.

Tabla 1
Preguntas planteadas en la comprensión del problema.

Iván	Paola
• ¿Qué relación hay entre el segmento DE y el cuadrado • ¿Qué figuras *ocultas* arrojan información del problema? • ¿De qué manera *ayuda* que E sea un punto medio?	• ¿Cómo puedo usar GeoGebra para explorar el problema?

A partir de la fase de comprensión, se define tipo de exploraciones que cada estudiante realiza: Iván tiene la intención de plantear un acercamiento ordenado similar a la forma axiomática de resolver una tarea matemática, Paola prefiere familiarizarse con el problema mediante exploraciones espontáneas en GeoGebra. A continuación, se describirán brevemente las exploraciones que cada uno propone. En primera instancia se muestran dos exploraciones que Iván realizó, resumidas en la Tabla 2. Iván construyó un segmento DE inicial y trazó la recta PE, siendo P un punto libre en el plano. El resto de la construcción es tal que ABD'D es un rectángulo y E siempre es el punto medio del segmento AB. La solución se obtiene de manera visual al mover y situar P y de tal manera que el cuadrilátero ABD'D se *transforma* en un cuadrado. En términos de los elementos de GeoGebra, esto significa que el punto B sea el punto de tangencia de la recta BD' con la circunferencia con centro en A y radio AD. Una simplificación de este problema surge al notar que el problema equivale a construir un triángulo rectángulo cuyos catetos estén en razón 2:1. Adicionalmente, restringe el movimiento del punto P a una circunferencia con centro en D y radio DE. Se traza la recta PE y la perpendicular que pasa por D. El punto de intersección A será el centro de una circunferencia con radio AD. En esta exploración, la solución empírica se encuentra cuando E es un punto sobre la circunferencia con centro en A.

Tabla 2
Exploraciones de Iván al problema.

Exploración	Preguntas planteadas
 [Primer intento]	• ¿Qué elementos son suficientes de conocer para construir el cuadrado? • ¿Cómo la simetría del cuadrado permite encontrar la solución? • ¿Qué condiciones de P garantizan que el cuadrilátero ABD'D es un cuadrado? • ¿De qué elementos puede prescindirse para la construcción?
 [Segundo intento]	• ¿Cómo *atar* el movimiento del punto P a un objeto definido? • ¿Cuándo se forma un triángulo rectángulo ADE cuyos catetos están en razón 2:1?

Durante la sesión de Zoom, Iván compartió su aproximación, y notó que el punto A describe una semicircunferencia de diámetro DE. Así, Iván propuso una tercera aproximación de naturaleza analítica: construyó una semicircunferencia de diámetro DE y colocó un punto C sobre ella. A continuación, definió un punto E $\left(\frac{|AC|}{2}, |CB|\right)$ y definió el lugar geométrico del punto E a medida que C se mueve sobre la semicircunferencia (Figura 3); es decir, Iván transformó este problema geométrico en uno de naturaleza analítica al preguntarse ¿en qué posición situar el punto C tal que el triángulo ABC tenga catetos en razón 2:1? La posición solución del punto E se encuentra en el punto de intersección de su lugar geométrico con la recta y = x.

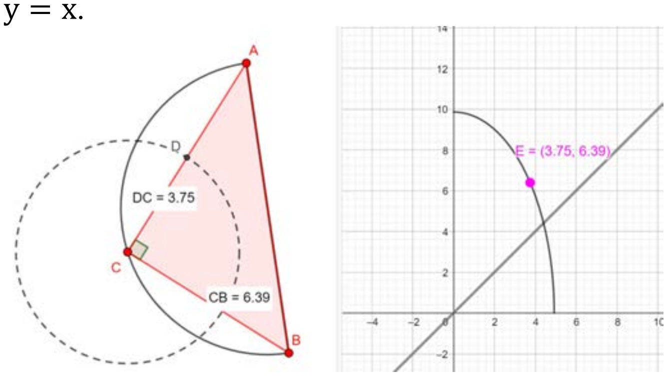
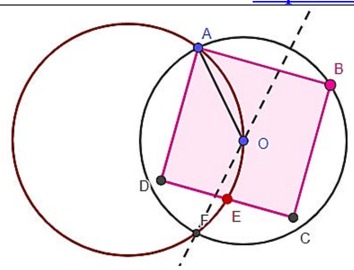
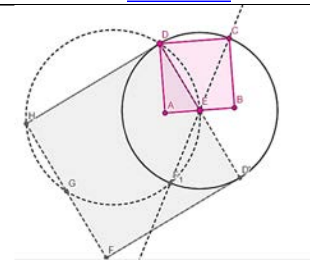


Figura 3. [Exploración analítica de Iván]

Por su parte, Paola pudo obtener una solución derivada de su exploración, resumidas en la Tabla 3. La exploración de Paola comenzó construyendo el segmento AO inicial, y una circunferencia con centro O que pase por A.

Tabla 3
Exploración y solución de Paola al problema.

Exploración	Solución
	
• ¿Cómo simplificar las condiciones del problema? • ¿Cómo usar el lugar geométrico para estudiar el movimiento del punto medio E • ¿Cuándo el cuadrado ABCD es tal que E coincide con el punto O?	• ¿Cómo construir la segunda circunferencia de modo que solo dependa del segmento DE inicial?

Sobre esta, colocó un punto B móvil y trazó el cuadrado ABCD, con lado AB. El punto medio del lado DC, E, no necesariamente coincide con O, la solución se encuentra cuando estos puntos coinciden. Para ello, se traza el lugar geométrico de E, que resulta ser una circunferencia que pasa por los puntos A, O y E. Cuando el punto E coincide con F, se obtiene una solución visual. Al situar E en esta ubicación, los puntos B y F parecen colineales con E, por lo que trazó la recta que pasa por la intersección F de ambas circunferencias y el punto O, esta recta corta a la primera circunferencia de tal forma que, al colocar B en esa intersección, se obtiene la solución empírica. Para obtener una construcción estructural (que no se *deshace*), es necesario que el lugar geométrico del punto E se construya como un objeto geométrico a partir de elementos bien definidos. En la solución, este lugar geométrico se obtiene al construir un cuadrado con lado DD', donde D' es el reflejo de D respecto a E. El punto medio G del lado opuesto, junto con D y E, son tres puntos por los que pasa la circunferencia buscada. Una vez que se obtiene esta circunferencia, el resto de la construcción es similar al de la exploración.

Conclusiones

La relevancia de considerar una bitácora digital yace en la necesidad de acortar las brechas que existen entre profesores y estudiantes en escenarios virtuales de aprendizaje, por ejemplo, la escasa interacción personal y retroalimentación instantánea en comparación con ambientes presenciales. La bitácora digital se plantea como una alternativa para organizar ambientes virtuales de aprendizaje, con miras a aprovechar los elementos tecnológicos al alcance de modo que los estudiantes puedan presentar y discutir los contenidos y problemas matemáticos de modo que exista un espacio para organizar, monitorear y controlar el trabajo de los estudiantes. El desafío yace en la importancia de que los profesores y los estudiantes conceptualicen las herramientas digitales como medios para engancharse en discusiones matemáticas donde el centro de atención es la comunicación y contraste de ideas y soluciones de problemas en ambientes virtuales, donde la interacción en persona puede no ser una posibilidad. Con el fin de contrastar el trabajo de estos dos estudiantes, conviene notar que todos los participantes resolvieron el problema de manera algebraica: Si a es la magnitud del segmento DE, entonces la longitud x del lado del cuadrado satisface la ecuación $x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2$, que al resolverse se sigue que $5x^2 = 4a^2$, o bien, $x = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. Entonces, ¿De qué manera puede coordinarse el uso de tecnologías digitales para promover y guiar a los estudiantes en la comprensión de conceptos y en el desarrollo de competencias de resolución de problemas matemáticos en un ambiente de aprendizaje virtual? Al emplear la bitácora digital como un eje rector para la implementación de estrategias de resolución de problemas basadas en el uso de tecnologías digitales se destacan dos elementos clave:

1. El planteamiento de preguntas

Cuando un estudiante describe su proceso de razonamiento en ambientes sincrónicos o presenciales, lo hace generalmente apuntando a justificar y exponer su solución. En la medida en que esta forma dialéctica de comunicación se lleva a cabo, el profesor puede plantear preguntas para indagar en las conexiones matemáticas realizadas por el estudiante. En el trabajo de la bitácora digital, los estudiantes se ven orientados a plantear sus razonamientos de manera escrita y ordenada, dando lugar a la explicitación de preguntas que reflejan el tipo de exploraciones que deben hacerse. Estas preguntas pueden dar pauta al tipo de entendimientos que los estudiantes exhiben al momento de enfrentarse a problemas matemáticos: Iván planteó preguntas orientadas a definir las relaciones matemáticas que surgen al momento de explorar el problema, mientras que Paola demostró que su principal foco de atención fue obtener una solución estructural al problema.

2. La comprensión y exploración de conceptos de manera dinámica

Aunado a lo anterior, Iván mostró diferentes tipos de recursos matemáticos: la circunferencia como un elemento de equidistancia fue clave en todas sus exploraciones, así como la forma de reducir las condiciones necesarias para explorar un problema de manera ordenada. Adicionalmente, Iván transformó un problema de naturaleza Euclidiana (construir una figura) en un problema de análisis funcional al definir un punto dinámico en términos de magnitudes relacionadas; es decir, estudió la forma en que los segmentos DC y CB covarían para obtener un resultado empírico. Conviene destacar que por cuestiones de espacio, no se incluye la exploración completa que se llevó a cabo en la sesión de Zoom, donde Iván y sus compañeros obtuvieron una expresión algebraica asociada al lugar geométrico del punto E. Por su parte, Paola aprovechó el uso del movimiento y la simplificación de las condiciones del problema para obtener conjeturas que la condujeron a la solución del problema. El uso de circunferencias como objetos sobre los cuales colocar puntos móviles fue esencial para llevar a cabo exploraciones que le permitieron obtener un resultado satisfactorio. Obtener una construcción estructural en el trabajo de Paola significó realizar una serie de trazos que constituyan una construcción basada en propiedades geométricas. Desde el punto de vista de GeoGebra, esto significa que la construcción se mantenga, mas desde el punto de vista matemático, la tarea posterior de Paola consistió en demostrar que el lugar geométrico del punto E es una circunferencia (¿cuál es su centro? ¿cuál es su radio?) y, además, ¿qué justifica que la intersección de la recta FO y la circunferencia con centro en O y radio AO es el vértice del cuadrado que satisface las condiciones?

Es decir, a través del planteamiento de preguntas y del uso de elementos dinámicos de tecnologías como GeoGebra, se emplea el trabajo de una bitácora digital como un punto de partida hacia discusiones orientadas a estudiar la forma en que conceptos matemáticos entran en juego en resolver problemas que, de hacerlo en ambientes estáticos, no sería posible.

Referencias y bibliografía

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, J. Lu, T. K. F. Chiu, & B. Fox (Eds.), *Mobile Learning Design: Theories and Application* (pp. 3–25). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-0027-0_1

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM - Mathematics Education*, *0123456789*. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4

Johns, C., & Mills, M. (2021). Online Mathematics Tutoring During the COVID-19 Pandemic: Recommendations for Best Practices. *PRIMUS*, *31*(1), 99–117. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1818336

Laborde, C. (2002). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-31. Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283–317.

Martin, F., Sun, T., & Westine, C. D. (2020). A systematic review of research on online teaching and learning from 2009 to 2018. *Computers and Education*, *159*(April), https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.104009

Mullen, C.; Pettigrew, J.; Cronin, A.; Rylands, L. & Shearman, D. (2021). The rapid move to online mathematics support: changes in pedagogy and social interaction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(1), 64-91. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1962555

Santos-Trigo, M., & Camacho, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *Mathematics Enthusiast*, *10*, 279–302.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 182–201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies. *Int. J. Learning Technology*, *17*(1), 27-52. https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686

Schoenfeld, A. (2011). How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications. https://doi.org/10.4324/9780203843000

Trenholm, S., Alcock, L., & Robinson, C. (2015). An investigation of assessment and feedback practices in fully asynchronous online undergraduate mathematics courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1197–1221. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036946

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Configuraciones didácticas en libros Geogebra como resultados de procesos de investigación

Yetza Ximena Díaz Pinzón
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Colombia
yetza.diaz@uptc.edu.co
Marcos Chacon Castro
Fundación Universitaria Internacional de la Rioja
Colombia
marcos.chacon@unir.net

Resumen

Se presenta la configuración de tres dispositivos didácticos, resultados de trabajo de investigación para titularse como Magister en Didáctica de la Matemática. La experiencia consistió en asesorar a los estudiantes sobre como estructurar sus propuestas, considerando marcos teóricos y metodologías apropiadas, incluyendo aspectos históricos, epistemológicos, didácticos y disciplinares para llevar a cabo el diseño, pilotaje, validación, aplicación y análisis de instrumentos, cuyos resultados permitieran definir las actividades finales, y organizarlas en libros digitales, aprovechando los recursos, herramientas y bondades del software Geogebra. En los dos primeros casos se abordó el componente geométrico: el estudio de las isometrías y la construcción de sólidos respectivamente, en las dos propuestas se dinamizaron los aspectos instructivo y descriptivo del modelo de Van Hiele. En el tercer caso se estudió el componente aleatorio, proponiendo tareas apropiadas para iniciar la alfabetización estadística desde la identificación de errores en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos.

Palabras clave: Dispositivos didácticos; Libros Geogebra; Geometría; Alfabetización estadística

Procesos comunes de las Asesorías

Cuando un tesista comienza la construcción de su trabajo de grado, normalmente está alejado de la realidad que implica sumergirse en el proceso de investigación, generalmente tiene una idea y busca proponer actividades relacionadas a ella, sin embargo enfrenta otra realidad cuando la asesoría empieza a estructurar el trabajo, el estudiante se da cuenta que el diseño de sus actividades no es una tarea de improvisación y que el éxito de la propuesta dependerá de los aspectos científicos que la fundamenten, entonces se enfrenta a estudiar teorías , metodologías, modelos didácticos, aspectos histórico, epistemológicos , disciplinares y otros, que deben ser coherentes con el problema que haya planteado y los objetivos que quiera alcanzar.

Comienza entonces la tarea del asesor, ubicando al estudiante y orientándolo para que todos los aspectos mencionados se sinteticen y logren un trabajo que impacte por lo menos a la población a la que está dirigido. Esto implica que el asesor también deba conocer y estudiar a la par con los tesistas, para complementar su trayectoria y ser oportuno al recomendar bibliografía e instrumentos de investigación adecuados, esto implica el surgimiento de un aprendizaje continuo y mutuo.

En esta propuesta se presentarán las características teóricas y metodológicas que se consideraron oportunas desde el papel de asesores y validadores de instrumentos, para dirigir la configuración de tres trabajos de investigación con los cuales los tesistas obtuvieron su título de Magister en Didáctica de la matemática. También se hará referencia a los resultados generales y estructura de cada uno de los libros digitales resultantes y se darán recomendaciones y consideraciones surgidas de la experiencia, que pueden ser retomadas en otros trabajos.

La construcción de un dispositivo didáctico va más allá de la creación de actividades desde el criterio disciplinar, en cada caso amerita una serie de consideraciones asociadas a la población, a los recursos, a los intereses, a los aprendizajes, esto hace la diferencia con una actividad cotidiana. En los tres casos los estudiantes no solamente se enfrentaron a la parte teórica y metodológica sino a la necesidad de aprender y mejorar sus habilidades en el manejo del software, realizar ejercicios de búsqueda de bibliografía, manejo de fuentes, bases de datos y redacción, lo cual al finalizar cada trabajo se ve reflejado en el avance intelectual y profesional de cada uno de ellos, su lenguaje, su fluidez, su seguridad al defender sus productos es notable.

Por su parte los libros Geogebra ofrecen un espacio dinámico dentro del cual es posible configurar actividades vinculadas a recursos bidimensionales y tridimensionales. Debido a que las actividades que presentan los libros deben ser el resultado de un estudio de investigación, las tareas que se han planteado en estos trabajos han sido diseñados considerando su pertinencia didáctica y disciplinar. Los libros como tal solamente son mediadores, y tienen el importante papel de recopilar las actividades que se han considerado pertinentes para la enseñanza, o el refuerzo de cada uno de los temas que propusieron los tesistas.

Tabla 1
Aspectos generales que constituyen los trabajos orientados

	Fundamentación Teórica	Metodología	Ejes temáticos
CASO 1	Teoría de los Campos Conceptuales, TCC - Modelo Van Hiele	Investigación Mixta- Paradigma emergente.	Geometría - Isometría
CASO 2	Teoría Antropológica de lo didáctico TAD	Enfoque mixto con preponderancia cualitativa – Investigación acción – Paradigma Socio crítico	Geometría – Sólidos geométricos
CASO 3	Modelo Van Hiele Transposición didáctica Niveles de interpretación de gráficos estadísticos.	30 36	Sistema de datos – Gráficos estadísticos

Fuente: Datos recopilados de los informes.

Caso 1. Isometrías

Para lograr el trabajo de (Farías, 2022) se orientó al tesista para determinar las características que debe tener un dispositivo didáctico para la enseñanza de las isometrías. Teniendo en cuenta el interés practico del conocimiento se sugirió realizar el trabajo desde la investigación mixta, con un paradigma emergente, de esta manera aplicar como instrumento de recolección de información una prueba diagnóstica a la población involucrada, los resultados de esta permitieron proyectar la construcción de un libro en Geogebra que permitió dinamizar los aspectos instructivo y descriptivo del modelo de Van Hiele para enseñar isometrías, La fundamentación teórica se soportó en elementos de la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) y de los Registros de Representaciones Semióticas (TRRS). En este caso el estudiante tenía conocimiento, habilidad y experiencia en la creación de actividades en Geogebra, pero no conocía la posibilidad de configurar las actividades en un libro dinámico.

Caso 2. Sólidos Geométricos

Para llevar a cabo esta investigación se recomendó a la tesista (Parada, 2022) aplicar una encuesta de caracterización para estudiantes y una para docentes de educación básica, los resultados evidenciaron que las dificultades de los estudiantes provenían de la falta de conocimiento de los docentes sobre la enseñanza de la geometría, en cuanto a los conceptos formales, el uso del lenguaje y el manejo de herramientas análogas o digitales para dinamizar las clases. Tales resultados promovieron el diseño de una configuración didáctica de carácter tanto instructivo (para los docentes) como descriptivo (para los estudiantes) basada en los niveles y las fases del modelo Van Hiele. También se recomendó realizar la fundamentación teórica tomando la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), atendiendo en particular a las tareas y género de tareas. El resultado fue una secuencia didáctica digital en GeoGebra que contiene ejercicios sobre sólidos geométricos con construcciones recopiladas y diseñadas de acuerdo con los aprendizajes priorizados de los derechos básicos de aprendizaje (DBA), estándares básicos de competencia (EBC). La estudiante conocía algunas opciones del Geogebra, pero no tenía mucho conocimiento sobre la realización de actividades, fue necesario acercarla al software vinculándola a talleres y tutoriales y darle instrucciones particulares.

Caso 3. Lectura de gráficos estadísticos

En el trabajo desarrollado por (Alvarado P. P., 2022) se definieron tareas apropiadas para iniciar la alfabetización estadística, la tesista logró identificar los conceptos erróneos de los estudiantes en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos, los describió y basándose en esa caracterización diseñó e implementó una secuencia de actividades apta para la iniciación a la alfabetización estadística desde la lectura e interpretación de gráficos. El recurso está disponible en (Alvarado P. A., 2022).

Para estructurar el marco teórico de este trabajo se recomendó trabajar la Teoría de la Transposición Didáctica de (Chevallard, 1998) y desarrollar actividades fundamentadas en los niveles de lectura de gráficos (leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos, leer dentro de los datos) propuestos por (Cursio, 1989) y estudiados en propuestas de (Díaz Levicoy, Arteaga, & Batanero, 2015)

Referencias y bibliografía

Alvarado, P. A. (2022). Introducción a la alfabetización estadística. Obtenido de https://www.geogebra.org/m/aqkrqksu

Alvarado, P. P. (2022). *Introducción a la alfabetización estadística a partir de la lectura e interpretación de gráficos estadísticos.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado* (3 ed.). Obtenido de https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf

Cursio, F. (1989). *Developing graph comprehension* .

Díaz Levicoy, D., Arteaga, P., & Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos de Educación matemática. 229 - 238.

Farías, M. A. (2022). *Dinamización en Geogebra del modelo de Van Hiele para la comprensión de las transformaciones isométricas.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación.

Parada, M. (2022). *Praxeologías para la enseñanza y aprendizaje de cuerpos geométricos mediante geometría dinámica.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Construcción de Superficies Acotadas y Sólidos no Convencionales en GeoGebra AR

Alejandro Isaías **Flores** Osorio
Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Perú
pcmaaflo@upc.edu.pe
Dennis Alberto **Espejo** Peña
Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Perú
pccedesp@upc.edu.pe
Lenin Rolando **Cabracancha** Montesinos
Ciencias, Universidad Tecnológica del Perú
Perú
c19009@utp.edu.pe

Resumen

El presente taller tiene por objetivo de capacitar a los docentes en el uso de GeoGebra y establecer el uso de esta herramienta en la construcción y diseño de superficies acotadas y de sólidos no convencionales que se presentan el curso de cálculo multivariable. Realizar el esbozo de las gráficas de superficies y sólidos no convencionales conlleva una gran dificultad para ser graficadas mediante la forma tradicional, es decir a lápiz y papel, usando GeoGebra AR permite acoplar los conceptos matemáticos en su vista gráfica 3D y extenderlas a un entorno de realidad aumentada. El uso de la geometría dinámica permite que el estudiante pueda obtener una comprensión de los conceptos teóricos y plasmar sus aplicaciones en forma interactiva en un entorno visual espacial de las superficies y sólidos; dicha interacción se convierta en una herramienta potencial de aprendizaje significativo.

Palabras clave: GeoGebra AR, Superficies Acotadas, Sólidos no Convencionales, Parametrización.

Introducción

Realizar la construcción del esbozo de gráficas en el espacio tridimensional concierne una dificultad mayor si nos limitamos solamente a efectuarlas en una superficie plana, es decir, a lápiz y papel (Flores et al., 2022) el desarrollar estas gráficas conlleva a tener un buen criterio de abstracción y de experiencia basada en el ensayo y error hasta establecer un criterio óptimo para graficar en forma aceptable superficies acotadas y sólidos no convencionales en R^3. Esta dificultad se presenta los estudiantes de ingeniería en el curso de cálculo de varias variables, en el cual tienen que representar superficies acotadas y sólidos no convencionales en R^3. Según Flores y Espejo (2022) la aplicación de GeoGebra AR permite establecer la conexión entre el objeto matemático y el entorno virtual y de esta manera se obtiene una inmejorable visualización, percepción, manipulación y comprensión del esbozo de superficies y de sólidos no convencionales y que a su vez hacen posible proyectar estos sólidos sobre un proyección sobre un plano coordenado y realizar una descripción ordenada para luego calcular el volumen o masa de dicho sólido, mediante una integral iterada (Espejo y Flores, 2022)

Ante esta situación Massa (2015) menciona que la creación de ambientes enriquecidos con TIC puede propiciar ambientes más flexibles para el aprendizaje, eliminan barreras de espacio y tiempo para la interacción entre el profesor y los estudiantes, incrementen la comunicación y el aprendizaje autónomo.

También, Ortiz (2012) y Scaglia (2008) coinciden que hay muy poco énfasis en preparar a los futuros docentes a utilizar en forma eficaz el software GeoGebra en una clase real. Y es bajo las recomendaciones y reflexiones de estos investigadores que presentamos el taller: Construcción de superficies acotadas y sólidos no convencionales mediante GeoGebra AR, en donde el objetivo principal es de capacitar al docente en el manejo de las herramientas comandos y sintaxis que el software GeoGebra presenta en su plataforma web.

Fundamento Matemático

Para realizar las construcciones de las superficies y de los sólidos no convencionales, establecemos los siguientes conceptos del cálculo multivariable y que se va a enlazar con la vista gráfica 3D de GeoGebra mediante los comandos curva y superficie.

Curva Paramétrica

Según Payá (2008), un conjunto $\Gamma = \{\gamma(t)/a \leq t \leq b\}$ en $\mathbb{R}^3$ es una curva paramétrica, o simplemente una curva en $\mathbb{R}^3$ y que el camino γ recorre o parametriza Γ. Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son, respectivamente, el origen y el extremo del camino γ. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es un camino cerrado.

Si $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es un camino en el espacio, entonces se puede escribir de la forma siguiente:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (1)$$

Donde x, y, z son funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Decimos entonces que la curva C establecida por el camino γ tiene ecuaciones paramétricas de la forma.

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2}$$

Superficie Paramétrica

Según Larson (2010) sean las funciones x, y y z de variables u y v, continuas en un dominio D del plano uv. Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \tag{3}$$

Se le denomina superficie paramétrica. Además, las ecuaciones

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{4}$$

Son las ecuaciones paramétricas de la superficie. Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial $\mathbf{r}$, entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D.

Conjunto Convexo

Según Besada (2001), un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A,\ tx + (1 - t)y \in A$, para todo $t \in [0, 1]$.

Coordenadas Cilíndricas

Según Larson (2010), un punto $P(x, y, z)$ en el espacio es representado por la terna ordenada (r, θ, z), donde (r, θ) es una representación en coordenadas polares de la proyección del punto en el plano coordenado XY y z es la distancia dirigida de (r, θ) al punto P, tal como se muestra en la figura

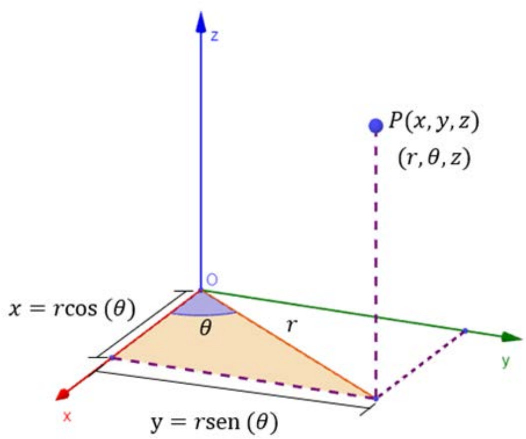


Figura 1. Coordenadas cilíndricas.

Para la conversión de coordenadas, de rectangulares a cilíndricas y viceversa y se utiliza la siguiente relación.

De coordenadas cilíndricas a rectangulares

$$\begin{cases} x \ = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sen(\theta)\,, \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \vee -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \tag{5}$$

De coordenadas rectangulares a cilíndricas.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x}\,, \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \vee -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \tag{6}$$

Coordenadas Esféricas

Según Larson (2010), Las coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \emptyset)$ de un punto P en el espacio, donde $\rho = |OP|$ es la distancia desde el origen al punto P, θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas ($0 \leq \theta \leq 2\pi$ o $-\pi \leq \theta \leq \pi$), y $\emptyset$ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Observe que, $\rho \geq 0$, $0 \leq \emptyset \leq \pi$

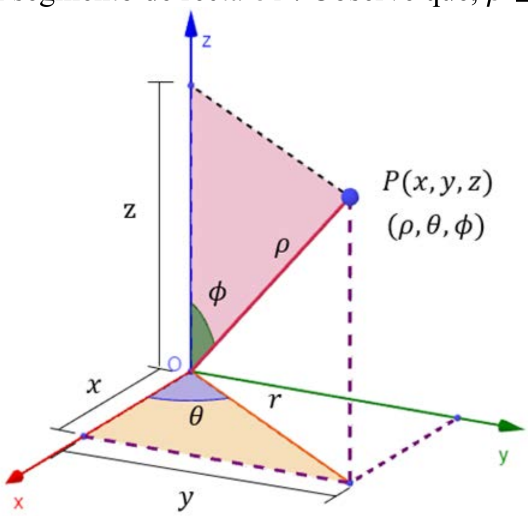


Figura 2. Coordenadas esféricas

Para la conversión de coordenadas, de rectangulares a cilíndricas y viceversa y se utiliza la siguiente relación.

De coordenadas esféricas a rectangulares.

$$\begin{cases} x \ = \ \rho \ \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ z = \rho \ \cos(\phi) \end{cases} \tag{7}$$

De coordenadas rectangulares a esféricas.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan(\phi) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{8}$$

Las definiciones matemáticas que se han presentado permiten la construcción y diseño de superficies en el espacio y que se enlazan al entorno de GeoGebra mediante los siguientes comandos.

Comandos de GeoGebra

A continuación, presentamos la sintaxis de dos comandos de GeoGebra que van a permitir enlazar y visualizar las definiciones matemáticas presentadas con la vista gráfica 3D de GeoGebra y extenderlas a un entorno de realidad aumentada. Estos comandos de acuerdo a la Wiki de GeoGebra tienen la siguiente sintaxis.

Comando Curva

$Curva(< Expresión >, < Expresión >, < Expresión >, < Parámetro >, < Valor\ inicial >, < Valor\ final >)$

Da por resultado la curva paramétrica correspondiente determinada por las expresiones x (primera <Expresión>), y (segunda <Expresión>) y z (tercera <Expresión>) definidas en función del parámetro, dentro del intervalo definido por [Valor inicial, Valor final]

Comando Superficie

$Superficie(< Expresión >, < Expresión >, < Expresión >, < Parámetro\ 1 >, < Valor\ inicial\ 1 >,$
$< Valor\ final\ 1 >, < Parámetro\ 2 >, < Valor\ inicial\ 2 >, < Valor\ final\ 2 >)$

Da por resultado la superficie cartesiana paramétrica 3D correspondiente a las expresiones x (primera <Expresión>), y (segunda <Expresión>) y z (tercera <Expresión>) indicadas, utilizando los dos <Parámetros> en sus correspondientes intervalos [Valor inicial, Valor final].

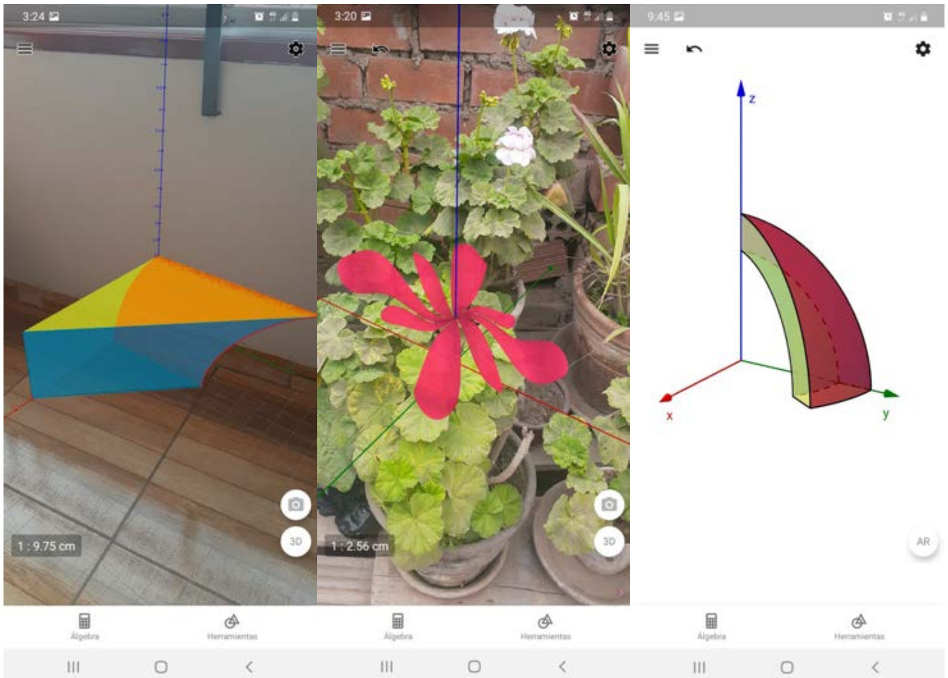


Figura 3. Superficies desarrolladas en GeoGebra AR.

Metodología

La metodología que se estableció con los estudiantes es de investigación-acción, en el cual los expositores hicieron una indagación y aplicación de los comandos, propiedades y sintaxis que involucran el esbozo de curvas, superficies y sólidos en la vista gráfica 3D del GeoGebra, este conocimiento fue transmitida y aplicada por los estudiantes en el cual lograron ejecutar los comandos que relacionan la parametrización de superficies, su respectiva gráfica, y finalmente establecer una descripción de los sólidos sobre un plano coordenado, este conocimiento ha permitido desarrollar sesiones de clases dinámicas y con un aprendizaje significativo en el estudiante.

Conclusiones

La aplicación de GeoGebra en dispositivos móviles permite visualizar superficies acotadas y sólidos no convencionales en forma dinámica e interactiva, estas construcciones dependen de la parametrización de las superficies, en donde se observa la relación entre los conceptos matemáticos y la sintaxis de GeoGebra, que permiten visualizarlas en su vista gráfica 3D y al extender estas construcciones mediante su herramienta de realidad aumentada a nuestro entorno real permiten que los objetos matemáticos sean manipulables.

Referencias y bibliografía

Besada, M., García, F., Mirás, M., Vásquez, C.: Cálculo de varias variables. Cuestiones y ejercicios resueltos, 1st edn, pp. 154–156. Prentice Hall, Madrid (2006)

Comando Curva. (s. f.). Geogebra.org. Recuperado 28 de octubre de 2022, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Curva

Comando Superficie. (s. f.). Geogebra.org. Recuperado 28 de octubre de 2022, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Superficie

Espejo-Peña, D.A., Flores-Osorio, A.I. (2023). Modeling Bounded Surfaces Using Cylindrical Coordinates Using GeoGebra AR. In: Cheng, LY. (eds) ICGG 2022 - Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2022. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 146. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13588-0_76

Flores-Osorio, A.I., Espejo-Peña, D.A. (2023). Design of Surfaces in Cylindrical Coordinates Using GeoGebra AR. In: Cheng, LY. (eds) ICGG 2022 - Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2022. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 146. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13588-0_58

Flores-Osorio, A.I., Lobo-da-Costa, N.M., Espejo-Peña, D.A., Cabracancha-Montesinos, L.R. (2022). Convexity in the Design of Bounded Surfaces and Unconventional Solids Using GeoGebra AR. In: Mesquita, A., Abreu, A., Carvalho, J.V. (eds) Perspectives and Trends in Education and Technology. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 256. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-5063-5_28

Larson, R., Edwards, B.: Cálculo 2 de varias variables, 9th edn, pp. 825, 1102. McGraw Hill, México, D.F. (2010)

Massa, S. y Pirro, A. (2015). *Formación docente universitaria en competencias para la incorporación de las TICs: dimensiones de análisis*. Recuperado de: http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/4148/1/VE14.315.pdf.

Payá, R.: Lección 3: Curvas en el plano o en el espacio. Homepage https://www.ugr.es/~rpaya (2008). Last accessed 20 Oct 2022

Ortiz, A. y Arias, R. (2012). Geogebra como herramienta para la enseñanza de la matemática: resultados de un curso de capacitación. VIII Festival Internacional de Matemática. Costa Rica. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Andres-Ortiz.pdf

Scaglia, S. y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. REIEC. Argentina. Recuperado de: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662008000100004

Criação de Atividades para o Ensino de Matemática por meio do Pensamento Computacional com Apoio do *Scratch*

Bruno Marx de Aquino **Braga**
Instituto Federal de Brasília
Brasil
bruno.braga@ifb.edu.br
Wembesom Mendes **Soares**
Instituto Federal de Brasília
Brasil
wembesom.mendes@ifb.edu.br
Adriana Barbosa de **Souza**
Instituto Federal de Brasília
Brasil
adriana.souza@ifb.edu.br
Evelyn Helena Nunes **Silva**
Instituto Federal de Brasília
Brasil
Evely.silva@ifb.edu.br
Carla Lima **Santos**
Instituto Federal de Brasília
Brasil
carla.santos@estudante.ifb.edu.br

Resumo

Esta oficina pretende instrumentalizar, com o uso da linguagem de programação em blocos *Scratch*, seus(suas) participantes para a aplicação de atividades didáticas que associem conceitos matemáticos com elementos de pensamento computacional (PC), de modo que possam ser feitas as conexões entre as duas áreas apontando quais habilidades matemáticas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental 2 estão ligadas a cada conceito do PC com base nas diretrizes elaboradas pela Sociedade Brasileira de Computação (SBC) de modo que para cada habilidade presente sejam propostas atividades com o objetivo de nortear o trabalho do professor em sala de aula ao inserir o PC em sua didática. As atividades a serem

desenvolvidas serão classificadas com relação ao seu nível cognitivo, de acordo com os níveis preconizados pela Taxonomia de Bloom Revisada.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Primário; Ensino Híbrido;Formação continuada de professores; Ferramentas tecnológicas;Scrach;Pesquisa educacional; Pensamento Computacional; Álgebra.

Pensamento Computacional

Com a popularização da internet, dos *smartphones, tablets* e demais dispositivos tecnológicos na primeira década do século XXI, é de fácil observação queos jovens têm vasta experiência e bastante familiaridade na interação com novas tecnologias, todavia, têm pouca experiência para criar algo com novas tecnologias e expressarem-se com as mesmas. Analogamente com o processo de letramento, seriacomo se conseguissem ler, mas não escrever com as tecnologias disponíveis, o que leva a um desafio educacional: Como fazer os jovens fluentes escreverem com novastecnologias? Isso quer dizer que eles precisam saber interagir com estas tecnologiassob um diferente prisma, desde o desenvolvimento da capacidade de pensar computacionalmente como o de aprender a programar.

Neste ínterim, com a compreensão de que o ensino de computação não pode ficar restrito à aprendizagem de uma linguagem computacional pois a mesma poderáser um meio, mas não o fim, surge o conceito de pensamento computacional (PC), visando a resolução de problemas

No ano de 2006, Jeanette Wing, diretora em pesquisas computacionais do *National Science Foundation* (NSF), popularizou o termo “Pensamento Computacional” (PC) através de um artigo publicado onde argumentou que a maneiraque os cientistas da computação pensam sobre o mundo é útil para outros contextos.Wing não cunhou o termo, mas definiu o que os cientistas da computação fazem e descreveu o que a ciência da computação poderia oferecer para as outras áreas leigasno assunto. No citado artigo, Wing afirma que o PC é um conjunto de habilidades intelectuais do ser humano vinculadas à ciência da computação para solucionar problemas.

No ano seguinte Wing (2007) descreve a abrangência do Pensamento Computacional, associado e integrado à maneira de pensar na Matemática e Engenharia apontando que de um lado o PC “está apoiado nos fundamentos da Matemática, contudo está limitado pela física do equipamento, porém através da baseda Engenharia é possível construir espaços virtuais superando as limitações físicas”.Já em 2010, Wing define o termo como “processos de pensamento envolvidos na formulação de problemas e as suas soluções, de modo que as mesmas são representadas de uma forma que pode ser eficazmente executada por um agente de processamento de informações” (2010, p. 1).

Dada a diversidade de definições do PC e com a necessidade de uma boa caracterização, pesquisadores da *Computer Science Teachers Association* (CSTA) e*International Society for Tecnology in Education* (ISTE), com o apoio da *National Science Foundation* (NSF), criaram em 2011 o *Computational Thinking in K-12Education - Leadership Toolkit (CT-Toolkit)* no qual descrevem as principais habilidades a serem desenvolvidas com a introdução do PC na educação básica, definindo-o como um processo de resolução de problemas que possui um conjunto de habilidades específicas, a destacar:

1. Formular problemas de uma forma que nos permita usar um computador outras ferramentas para ajudar a resolvê-los;
2. Organizar e analisar logicamente os dados;
3. Representar dados através de abstrações como modelos e simulações;
4. Automatizar soluções por meio de pensamento algorítmico (uma série de etapas ordenadas);
5. Identificar, analisar e implementar possíveis soluções com o objetivo de alcançar a combinação mais eficiente e eficaz de etapas e recursos;
6. Generalizar e transferir este processo de resolução de problemas para umaampla variedade de problemas. (ISTE/CSTA, 2011 apud BARBOSA, 2019, p.39).

Em 2015, Liukas, coautora do currículo de Computação da Finlândia, faz uma abordagem bem acessível, definindo como "pensar nos problemas de forma que um computador consiga solucioná-los". Liukas ainda complementa: "O Pensamento Computacional é executado por pessoas e não por computadores. Ela inclui opensamento lógico, a habilidade de reconhecimento de padrões, raciocinar através dealgoritmos, decompor e abstrair um problema".

Em suma PC é a habilidade intelectual de solucionar problemas, o que está presente no cotidiano do ser humano, desde o início do processo do desenvolvimentocognitivo, todavia pensando de forma computacional. Por esse motivo, Wing (2006)afirma que o PC deveria ser incorporado à matriz curricular desde os primeiros anos escolares.

No contexto escolar brasileiro, a Sociedade Brasileira de Computação (SBC) considera fundamental e necessário um currículo para a formação em conhecimentoscomputacionais básicos, elaborando a proposta denominada Referenciais de Formação em Computação: Educação Básica (RF-EB-17), com o objetivo de apresentar as habilidades do Pensamento Computacional, desde o Ensino Infantil atéo Ensino Médio, apontando em quais níveis escolares elas podem ser trabalhadas.

O Pensamento Computacional divide-se em três pilares: abstração, automaçãoe a análise (SBC, 2017, p. 4):

7. A abstração é a capacidade de utilizar representações adequadas para fornecer informações e processos, assim como fazer uso de técnicas para a elaboração de soluções algorítmicas.
8. A automação, refere-se à competência de criar soluções através de algoritmosde tal maneira que máquinas possam executá-lo por inteiro ou em partes menores.
9. E a análise compreende a habilidade de analisar um problema ou uma soluçãoe identificar se existe solução, e ainda se a mesma pode ser automatizada e qual a sua eficiência.

O RF-EB-17 aponta quais habilidades computacionais os estudantes da educação devem adquirir ao longo de sua vida escolar. Posteriormente, no ano de 2018, a SBC através do documento Diretrizes para ensino de Computação naEducação Básica, expõe os objetos de conhecimento ligados ao PC, especificando o ano escolar em que cada objeto de conhecimento deve ser inserido e as respectivas habilidades contempladas pelos mesmos.

Base Nacional Comum Curricular

A BNCC é um "documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (Brasil, 2017, p. 07).

Historicamente, a parte referente ao EF foi homologado pelo Conselho Nacional de Educação(CNE) ao final de 2017, após ser concebido no Plano Nacional de Educação de 2014. Em linhas gerais, a BNCC estabelece os objetivos que se espera que os estudantes venham a atingir, sem interferir na autonomia das redes de ensino para elaborar/adequar seus currículos de acordo com o estabelecido no documento.

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem garantir aos estudantes o desenvolvimento de 10 Competências Gerais da Educação Básica, capacidades que se inter-relacionam e "desdobram-se no tratamento didático proposto para as 3 etapas da Educação Básica, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores" (Brasil, 2017, pp.8-9). Para orientar o cumprimento dessas Competências Gerais no EF, a BNCC se estrutura em 5 áreas de Conhecimento.

Na área de Matemática, são estabelecidas 8 Competências Específicas (Brasil, 2017, p. 267) para viabilizar o alcance do que lhe cabe nas Competências Gerais. Tais Competências Específicas perpassam por 5 unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometría, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística – a última delas é Probabilidade e Estatística. Cada unidade temática tem, em cada ano, seus objetos de conhecimento e seu corpo de habilidades.

O PC foi inserido explicitamente no texto da BNCC, e, como este consiste numdocumento normativo, espera-se que seja observado durante a construção doscurrículos pelos diversos sistemas de ensino.

O contexto em que este termo é inserido sugere o desenvolvimento do PC como um dos objetivos relacionados à área de Matemática desde os Anos Finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Essa expressão não aparece nem nas competências nem nas habilidades, mas é mencionada diversas vezes ao longo das discussões propostas no documento, sempre nas seções sobre Matemática, consistindo numa competência e/ou habilidade a ser desenvolvida durante processosde ensino de conteúdos da matemática.

Relacionado a estes conteúdos, a BNCC afirma que ao se trabalhar determinadas estratégias de aprendizagem da matemática como resolução de problemas, investigação e modelagem matemática, cria-se um ambiente rico para sedesenvolver competências relacionadas ao letramento matemático e também ao pensamento computacional.

Da mesma forma, outro trecho afirma que aprender Álgebra contribui para o desenvolvimento do PC nos alunos. Já no Ensino Médio, o PC é retomado como um dos elementos cuja aprendizagem deve ser iniciada no nível anterior, mas ampliado econsolidado nesse nível, buscando ampliar "o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração" (BRASIL, 2018). Sua importância é ainda reforçada ao ser incluído como uma das dimensões educacionais que contemplam conhecimentos, atitudes e valores a serem desenvolvidos durante os três anos desse ciclo.

Portanto, entende-se que, assim como as competências gerais deverão ser desenvolvidas durante o processo de ensino das aprendizagens essenciais (conhecimentos, habilidades, atitudes, valores), o mesmo se aplica ao PC, desde queeste também seja concebido de forma articulada a tais aprendizagens.

Taxonomia de Bloom

A Taxonomia de Bloom (TB) é um sistema para classificar hierarquicamente objetivos educacionais, aqui entendidos como as capacidades que devem ser desenvolvidas/adquiridas pelo aprendente ao final do processo de ensino e aprendizagem num período pedagógico específico. Nas linhas de Monteiro et al (2012), a TB surge, na metade do século XX, para classificar e ordenar os objetivos educacionais de acordo com os resultados desejados na Educação.

A TB se estruturou a partir de 3 domínios: Cognitivo, Afetivo e Psicomotor. O domínio Cognitivo, o que mais chamou atenção de educadores, se organiza em 6 categorias/níveis crescentes de complexidade: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação. Cada categoria emprega verbos adequados na construção dos objetivos de aprendizagem, como exemplifica o Quadro 1, a seguir.

Quadro 1
Descrição do primeiro nível da Taxonomia de Bloom

Nível	**Desempenho**	**Amostra de Verbos**
Conhecimento	O aluno irá recordar informações, ideias, e princípios na forma (aproximada) em que foram aprendidos.	Escreva, liste, rotule, nomeie, identifique, cite e defina.

Fonte: autores, adaptado de Lima (2009)

Essa taxonomia influenciou significativamente a sistemática de planejamento pedagógico, na medida em que criou uma linguagem comum e padronizada para identificar e classificar os objetivos educacionais.

Em 2001, foi proposta uma revisão da TB. A Taxonomia de Bloom Revisada (TBR) foi estruturada em duas dimensões, a dimensão conhecimento (o que ensinar) e a dimensão do processo cognitivo (a atividade cognitiva envolvida), conforme ilustra a Figura 1. Nas células, formadas pela intersecção das dimensões, são inseridos os objetivos educacionais, como será ilustrado, nas páginas seguintes, no rol de contribuições do presente artigo. A TBR também introduziu mudanças terminológicas nas categorias (substantivos passaram a ser verbos) e passou a ter um público-alvo mais amplo (qualquer indivíduo interessado em ensino e aprendizagem).

Dimensão do conhecimento	Dimensões dos processos cognitivos					
	1. Lembrar	2. Entender	3. Aplicar	4. Analisar	5. Avaliar	6. Criar
Conhecimento efetivo / factual						
Conhecimento conceitual / princípios						
Conhecimento procedural						
Conhecimento metacognitivo						

Figura 1. Tabela bidimensional da TBR. Adaptado de Ferraz e Belhot (2010)

Nas linhas de Santos (2016), resumimos assim as categorias da Dimensão Conhecimento: o *factual* está relacionado aos elementos básicos que os educandos devem saber para se familiarizar com a disciplina para solucionar problemas nela; já o *conceitual* consiste em conhecer as inter-relações entre elementos básicos de uma estrutura maior que permite-os funcionar juntos; o *procedural* é o conhecimento de como fazer algo, métodos de questionamentos, critérios para utilização de habilidades, algoritmos, técnicas e métodos; o *metacognitivo* está relacionado ao reconhecimento da cognição em geral e da consciência da amplitude e profundidade de conhecimento adquirido de um determinado conteúdo.

Quadro 2
Alguns níveis de aprendizagem e processos cognitivos (verbos)

NÍVEIS DE APRENDIZAGEM	PROCESSOS COGNITIVOS (VERBOS)
3. **Aplicar**: Refere-se ao uso de procedimento em uma situação específica e à solução de problema, com base no conhecimento adquirido, estratégias, técnicas etc.	Aplicar, executar, construir, escolher, classificar, construir, experimentar, identificar, ilustrar, executar, entrevistar, fazer uso, organizar, planejar, praticar, selecionar etc.
5. **Avaliar**: Associado à realização de julgamentos baseados em critérios e padrões qualitativos e quantitativos ou de eficiência e eficácia. Implica apresentar e defender opiniões, ideias e conceitos.	Concordar, apreciar, avaliar, conferir, escolher, comparar, concluir, criticar, decidir, deduzir, defender, determinar, refutar, discutir, calcular, avaliar, explicar, interpretar, julgar, justificar, medir, monitorar, priorizar, provar, ranquear etc.
6. **Criar**: Significa compilar informações ou elementos, com a intenção de criar visão, solução, estrutura ou modelo, utilizando conhecimentos e habilidades previamente adquiridos. Envolve ideias novas e originais.	Adaptar, construir, mudar, escolher, combinar, compilar, compor, construir, criar, projetar, desenvolver, debater, elaborar, calcular, formular, generalizar, supor, modificar, planejar, produzir, propor, solucionar etc.

Fonte: os autores, adaptado de Liska e Ribeiro (2017).

O uso da tabela bidimensional possibilita verificar qual a extensão e a profundidade dos objetivos analisados. Pensando nisso, nas habilidades da BNCC e diretrizes da SBC, que sempre se iniciam com um verbo, posicionaremos as habilidades algébricas e do PC na tabela da Figura 1.

Estrutura da oficina

Esta proposta de oficina pretende capacitar seus(suas) participantes com o uso da linguagem de programação em blocos *Scratch*, seus(suas) participantes para a aplicação de atividades didáticas que associem conceitos matemáticos com elementos de pensamento computacional (PC). Nesse sentido, serão buscados os seguintes objetivos específicos: relacionar conceitos do pensamento algébrico do ensino fundamental ao pensamento computancional; produzir atividades didáticas com o uso da plataforma *scratch*; experimentar as atividades apresentadas pelo grupo.

Todo o processo formativo se dará em 110 minutos. O local adequado é uma sala munida de computadores, os quais deverão ser conectadas à internet.

A seguir, estão a descrição e a duração estimada de cada fase da oficina.

a) Apresentação e Introdução (30 minutos): apresentação dos(as) ministrantes da oficina; contextualização da oficina e apresentação das habilidades constantes na BNCC e diretrizes da SBC; apresentação do *scratch* e discussão sobre elementos básicos em um objetivo de aprendizagem.
b) Desenvolvimento das habilidades (40 minutos): momento em que são apresentadas as atividades e sua classificação de acordo com a taxonomia de Bloom;
c) Experimentação (40 minutos): os (as) cursistas poderão experimentar as atividades no *scratch* e adaptá-las à sua realidade escolar.

A formação inicial e continuada de docentes pode ser decisiva nos processos de ensino-aprendizado da Matemática. A instrumentalização proposta nesta oficina é mais um meio de empoderamento docente diante dos clássicos desafios do ato de ensinar num mundo cada dia mais dinâmico e, também, disperso. Logo, a relevância de propostas como essa permanece atual e atividades que se utilizam de imersões investigativas possuem uma potencialidade importante a mencionar aqui: são oportunidades de engendramento de uma discussão, dentro da turma de aprendentes, a partir da atividade e não sobre a atividade.

Referências

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 28 de outubro de 2022.

Ferraz, A. P. C. M., Belhot, R. V. (2010). Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. *Gestão & Produção, Vol. 17, No. 2*, 421-431.

Monteiro, I. G., Teixeira, K. R. M., Porto, R. G. (2012). Os níveis cognitivos da taxonomia de Bloom: existe necessariamente uma subordinação hierárquica entre eles. *Anais: Encontro 47 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração, Vol. 36*, 1-16.

Moreira, D. G. (2019). *Teorias de aprendizagem: Revisão da literatura e aplicações no ensino de Física. (Trabalho de Conclusão de Curso não publicado)*. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

Santos, R. S. F. D. (2016). *Inserindo a Taxonomia Revisada de Bloom em um MOOC (Tese de doutorado não publicada).* Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, Brasil.

Silva, L. A. (2022). *BNCC e Taxonomia de Bloom: como as habilidades progridem ao longo do Ensino Fundamental*. *(Monografia não publicada)* - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Estrutural, Brasília, Brasil.

Sociedade brasileira de computação. Referenciais de formação emComputação: educação básica. Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://www.sbc.org.br/files/Computação Educação Básica-versão final-julho2017.pdf. Acesso em: 17 setembro de 2022.

Sociedade brasileira de computação. Diretrizes para o ensino deComputação na educação básica. Porto Alegre, 2018. Disponível em: https://www.sbc.org.br/documentos-da-sbc/send/131-curriculos-de-referencia/1177-diretrizes-para-ensino-de-computacao-na-educacao-basica. Acesso em: 17 setembro de 2022.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Communications of the ACM, v.49, n.3, p.33-35. Disponível em: https://doi.org/10.1145/1118178.1118215 . Acesso em: 17 setembro de 2022.

Wing, J. M. (2007). Computational thinking. [Pittsburgh]. Arquivo disponível no diretório da School of Computer Science/Carnegie Mellon University: http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/wing/www/Computational_Thinking.pdf . Acesso em: 17 setembro de 2022.

Wing, J. M. (2010). Computational thinking: what and why?. Disponível em: http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf .Acesso em: 17 setembro de 2022.

Wing, J. M. (2014). Computational Thinking Benefits Society. Social Issuesin Computing. Disponível em: http://socialissues.cs.toronto.edu/2014/01/computational-thinking/ . Acesso em: 17 setembro de 2022.

¿Cuál es el trabajo matemático a partir de modificaciones en las variables didácticos de las tareas propuestas?

Jorge **Gaona**
Departamento de Pedagogía, Universidad de Playa Ancha
Chile
jorge.gaona@upla.cl

Resumen

En esta contribución, presentaremos algunos resultados de tres casos de diseño de tareas en contextos virtuales, donde se ha estudiado el trabajo matemático personal de los estudiantes. El trabajo matemático se analiza a partir de la variación de algunas variables didácticas de las tareas. Se muestra cómo los registros de representación, la apertura de las tareas, los objetos matemáticos y los números que los definen afectan al trabajo matemático.

Palabras clave: diseño de tareas, tecnología, evaluación automática, retroalimentación, argumentación.

Problemática

Hay diferentes definiciones de lo que es una tarea matemática. Sierpinska (2014) define una tarea matemática como cualquier tipo de problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formulados, que se sabe que los alumnos pueden resolver en un tiempo predecible. Por otra parte, Chevallard (1999, p. 224) lo define como una acción que se puede definir mediante un verbo y está asociada a un objeto específico. En ambos casos, quien resuelve esa tarea está llamado a realizar una actividad matemática (Vandebrouck, 2013). En el marco del Espacio de Trabajo Matemático o ETM hay otras distinciones que sirven para estudiar el ETM Idóneo como lo son las tareas emblemáticas (Kuzniak et al., 2022) o el proceso de idoneidad (Flores et al., 2022).

Para el diseño de una tarea, en Gaona (2018, p. 85) se propuso una descomposición en tres elementos: tipo de tarea, objetos o herramientas matemáticas y contexto de la tarea. A las posibilidades de cada uno de estos elementos las denominamos variables didácticas. También denominamos variables didácticas a los elementos de la implementación de las tareas que son decididas por quien implementa.. Si, además, se considera un artefacto digital para diseñar una tarea - en particular, acá se trabaja con un sistema de evaluación en línea - se deben tomar en cuenta algunas restricciones instrumentales a la hora de diseñar. A partir de diferentes trabajos desarrollados (Gaona, Hernández, et al., 2021; Gaona, López, et al., 2021; Gaona & Menares, 2021), en esta contribución se propone la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo afectan las variables didácticas en el diseño de tareas con tecnologías en el ETM personal de los estudiantes?

Marco teórico

El objetivo de la teoría ETM es describir, analizar, diseñar y comprender el trabajo matemático propuesto a un individuo en una institución y realizado por éste. Para caracterizar el trabajo matemático, la teoría considera aspectos epistemológicos y cognitivos. En cada uno de estos planos se consideran tres dimensiones: génesis semiótica, instrumental y discursiva. Estas tres dimensiones están interrelacionadas. Se necesitan conocimientos para poder visualizar los signos matemáticos o utilizar eficazmente un artefacto; la demostración utiliza representaciones semióticas de los objetos matemáticos; la construcción crea nuevos signos matemáticos, etc. La teoría del ETM pretende comprender el papel de cada una de estas génesis y componentes en un sistema integrado que da lugar al trabajo matemático.

Por otra parte, en Gaona (2018, p. 85) se consideran tres componentes didácticas de una tarea: tipo de tarea, objetos o herramientas involucradas y contexto. Luego, en Gaona (2020) se hace una descomposición de un artefacto tarea en un sistema de evaluación en línea en cuatro componentes: enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de feedback, que están ligados al artefacto digital involucrado. Al complementar estas dos descomposiciones más el sujeto que responde una tarea, quien a partir de ella tarea realiza un trabajo matemático específico (sección anterior), se pueden articular para poder estudiar como interactúan estos componentes.

A partir de esta tarea, hay un sujeto que realiza un trabajo matemático. Este trabajo puede realizarse en interacción con la tarea, como también fuera de ella. La descomposición conceptual de este trabajo es el que se realiza en el punto 2.1.

Luego, el sujeto ingresa una respuesta mediante el sistema entrada de la tarea. Una vez ingresada la respuesta, el sistema realiza el proceso de validación. Salvo el caso de selección múltiple, los sistemas de evaluación en línea usados en matemáticas, deben contar con sistemas de cálculo simbólico o geométrico si las respuestas ingresadas son expresiones simbólicas o son gráficas en un entorno geométrico. Estos sistemas, junto a la configuración propia de la plataforma permiten establecer si las respuestas son correctas o no. Una vez que el sistema valida, puede entregar un feedback a los estudiantes que, según Hattie (2008) son variados. En los sistemas de evaluación en línea se han observado sistemas de feedback que le informa al estudiante si la respuesta es correcta, parcialmente correcta o no; dar algún comentario de tipo socioemocional, dar una solución paso a paso del problema planteado o dar un feedback en función de la respuesta del estudiante. El primero, junto con los dos últimos son de particular interés, porque pueden ayudar o dificultar la creación de significados matemáticos.

Metodología

Se proponen tres casos de análisis. El primer caso, es una tarea que se implementó con un grupo de 15 profesores de matemáticas en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas. La tarea propuesta es: escribir una de las raíces complejas de la ecuación z^3=2. Además de la ecuación, se presenta un gráfico con las tres raíces y en rojo está marcada la que se pide.

El segundo caso es una tarea que se implementó con 12 profesores de matemáticas en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas. La tarea propuesta fue: escribir una fracción que esté entre 1/4 y 1/2. Además de las representaciones en fracción de ambos números, se presenta una recta real y en esta se ubican las fracciones.

Finalmente, el tercer caso, es una tarea que se implementó con 87 estudiantes de ingeniería. En la tarea se pide estimar la imagen de un valor a partir del gráfico de una función. Hay dos versiones de la tarea, en la primera los coeficientes son enteros y en la segunda son decimales.

Las tres tareas se presentan en una plataforma Moodle/Wiris. Esto permite parametrizar algunos elementos de los enunciados, aunque para los dos primeros casos, los parámetros son fijos. También, cada tarea tiene un feedback automático que da una respuesta paso a paso o que indica por qué la respuesta ingresada es correcta o incorrecta.

Todas las tareas fueron implementadas en clases virtuales, los estudiantes se conectaban a la plataforma y luego se establecían discusiones para conocer las estrategias que utilizaron.

Resultados y conclusión

La primera tarea, la ecuación z^3=-2 se propone a los estudiantes resolverla utilizando distintos CAS, como el de GeoGebra, Symbolab, Photomath y Wolfram Alpha. para resolverla. En este trabajo emergen dificultades y potencialidades.

En las potencialidades, se observó que, al querer ingresar una raíz no cuadrada, al no haber un botón para hacerlo directamente, los estudiantes tuvieron que relacionar las raíces y las potencias para poder escribirlas, lo que reforzó el referencial teórico sobre las propiedades de potencias. También se observó que los estudiantes, al articular más de un artefacto digital, uno con información algebraica y el otro con información gráfica, trabajando en un plano semiótico-instrumental, pudieron darles sentido a los objetos involucrados. Por último, los artefactos digitales fueron usados por algunos estudiantes para guiar el trabajo de argumentación, en este caso se articula el plano semiótico discursivo.

En todo lo observado, como la información necesaria para resolver la tarea está en dos registros semióticos distintos, los estudiantes tuvieron que movilizar un trabajo matemático diverso.

En el segundo caso, la pregunta es abierta, lo que implica, que el estudiante puede elegir distintas respuestas y estrategias. Después de trabajar en la plataforma de forma individual, el profesor comenzó un diálogo con los estudiantes pidiendo la explicitación de las estrategias y preguntar sobre la posibilidad de generalizarlas, explicitar conjeturas y argumentar sobre ellas. En este trabajo, se observó que la tarea tuvo el rol de activar el trabajo matemático que fue inicialmente instrumental y a partir de las discusiones con el profesor los estudiantes transitaron hacia la génesis discursiva. También, en algunas tareas que aparecieron posteriormente, a partir de las conjeturas, donde se pidió una secuencia de infinitas fracciones entre 1/4 y 1/2, los estudiantes instrumentalizaron el trabajo discursivo de uno de sus compañeros, es decir, la argumentación la transformaron en un artefacto simbólico para poder responder a la tarea.

Finalmente, en la tercer caso, la tarea pedía visualizar la imagen de un valor en una función afín. Se hizo una versión en la cual los coeficientes de la función graficada eran números enteros y otra en la que eran decimales. En el primer caso un 45% de los estudiantes declaró que la estrategia utilizada fue estimar directamente del gráfico y otro 45% calculó la ecuación de la recta, el resto utilizó otras estrategias o no recordaba cómo lo hizo. En cambio, en la versión con decimales, el 66% utilizó la estimación como estrategia y solo un 17% calculó la ecuación de la recta, el resto no recordaba o utilizó otras estrategias. La estimación es una estrategia semiótica, en cambio, calcular la ecuación de la recta es semiótica-instrumental, donde las fórmulas para calcular la ecuación es un artefacto simbólico. En esta tarea se observa que la elección de una variable implícita es determinante para activar un tipo de trabajo matemático en vez de otro.

En estos tres casos se puede observar cómo algunas de las variables, como los objetos matemáticos involucrados, las representaciones semióticas utilizadas y otras componentes como los números que definen los objetos afectan el trabajo matemático. También se observa el rol fundamental del profesor, porque permite, mediante la discusión, que los estudiantes circulen por distintas génesis y planos, enriqueciendo el trabajo matemático de los estudiantes.

Referencias

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19(2), 221–266.

Flores, J., Gaona, J., & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), Mathematical work in educational context - the Mathematical Working Space Theory perspective. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Gaona, J. (2018). Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946/

Gaona, J., Hernández, R., & Bravo, F. G. y V. (2021). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. Arxiv. https://arxiv.org/pdf/2107.11448.pdf

Gaona, J., López, S., & Montoya-Delgadillo, E. (2021). prendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. Arxiv.

Gaona, J., & Menares, R. (2021). Argumentación de futuros profesores de matemáticas en tareas sobre fracciones mediadas por un sistema de evaluación en línea con feedback automático. Arxiv, 1–28. http://arxiv.org/abs/2108.12496

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). Mathematical Work in Educational Context. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Sierpinska, A. (2014). Research in mathematics keyhole : education through a task. For the Learning of Mathematics, 24(2), 7–15.

Vandebrouck, F. (2013). Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Desenvolvendo o Pensamento Computacional no Ensino Fundamental

Joseane Marques **Flores**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
joseanemarques_flores@hotmail.com
Agostinho Iaqchan Ryokiti **Homa**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
iaqchan@hotmail.com

Resumo

Esse artigo apresenta atividades plugadas e desplugadas para o desenvolvimento do Pensamento Computacional explorando os pilares da decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos e aprendizagem da Matemática. A pesquisa foi de caráter qualitativo e investigou atividades que farão parte de uma sequência didática para o desenvolvimento das habilidades associadas ao Pensamento Computacional. As atividades foram aplicadas em uma escola pública municipal, com dezoito alunos do 6° e 7° anos do Ensino Fundamental em três oficinas extraclasse. Concluiu-se que as atividades plugadas e desplugadas investigadas são adequadas para comporem a sequência didática para o desenvolvimento das habilidades associadas ao Pensamento Computacional e aprendizagem da Matemática. As atividades plugadas que os alunos tiveram maior dificuldade requerem ajustes ou atividades intermediarias para aplicação em conjunto.

Palavras-chave: Matemática; Pensamento Computacional; Raciocínio Lógico; Ensino Fundamental.

Introdução

As tecnologias modificam cada dia mais o modo como vivemos em sociedade, nosso dia a dia influenciam no modo em que nos relacionamos, trabalhamos e nos comunicamos.

Concretizando-se uma sociedade tecnológica e de inovações, se faz necessário além de estarmos acompanhando as mudanças, buscando novos meios de aprendizagem para preparar os jovens às transformações, seja se adequando ou aperfeiçoando a essa realidade, como no uso dos computadores ou da robótica.

Uma das formas para isso é, desenvolver um ambiente para observar o Pensamento Computacional (PC), e realizar experimentos que são importantes para a compreensão da aprendizagem matemática, com ênfase às situações e representações de diferentes abordagens, podemos pensar em propor diversas atividades para explorar as questões, que trabalham a investigação, a resolução de problemas e o protagonismo do aluno na sua aprendizagem.

Com uma sociedade inovadora a demanda de mão de obra especializada pelas áreas da tecnologia tende a aumentar, sendo necessário trabalhadores com habilidades e conhecimentos em tecnologias, desta forma é importante a qualificação dos jovens nas tecnologias.

O PISA (Programme for International Student Assessment) é um estudo mundial realizado pela OCDE (Organization for Economic Co-operation and Development) e, de acordo com PISA (2018), os alunos "devem possuir e ser capazes de demonstrar habilidades de pensamento computacional como eles se aplicam à Matemática como parte de sua prática de resolução de problemas." No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular BNCC, aponta o PC em seu no eixo da Matemática, afirmando que:

> outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens[...] Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. [...] Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (Brasil, 2018, p.271)

Pensamento Computacional

Identifica-se a relevância do Pensamento Computacional como parte integradora de diversas competências a serem desenvolvidas nos alunos para a resolução de problemas. Para Wing (2010) o termo Pensamento Computacional é definido como os "processos de pensamento envolvidos na formulação de problemas e as suas soluções de modo que as mesmas são representadas de uma forma que pode ser eficazmente executada por um agente de processamento de informações".

Antes de ser utilizado por Wing, o Pensamento Computacional já havia sido mencionado pelo matemático Seymour Papert que pesquisou, desde a década de 60, sobre as contribuições das tecnologias na construção do conhecimento, tendo desenvolvido a linguagem de programação LOGO destinada a crianças, que foi a precursora do Scratch. No construcionismo de Papert o conhecimento decorre da realização de uma ação, como a programação, que resulta em uma interação com um objeto digital, ou não.

Liukas (2015) apresenta que o “Pensamento Computacional é executado por pessoas e não por computadores. Ele inclui o pensamento lógico, a habilidade de reconhecimento de padrões, raciocinar através de algoritmos, decompor e abstrair um problema”, considerando inclusive o pensar estratégias para utilizar diferentes métodos para compreensão assim como a validação das soluções são parte do PC. Para Brackmann (2017) “Pensamento Computacional é uma habilidade que qualquer pessoa deveria saber, independentemente da área de conhecimento ou atividade profissional, assim como ler, escrever e calcular”.

O PC é dividido em quatro etapas que são: a decomposição, o reconhecimento de padrões, a abstração e algoritmo e cada uma destas partes fornece um significado ao desenvolvimento do PC e para a resolução de problemas. A decomposição é a quebra de um problema maior em partes menores, ou seja, esmiuçar e simplificar as informações que esse problema possui. O reconhecimento de padrões é a habilidade de identificar as caraterísticas semelhantes que possui o problema para que se consiga a ordenação das atividades. A abstração requer mais que o reconhecimento de padrões, pois é onde permanece o foco e os elementos essenciais do problema, com as informações de menores relevância sendo descartadas.

Para Wing (2006) a abstração é o conceito mais importante do PC, pois o processo de abstrair é utilizado em diversos momentos. Liukas (2015) define a abstração como um processo de separação de detalhes que não são necessários para poder se concentrar nas coisas que são importantes. Por fim, temos o algoritmo que é a junção de todas as etapas anteriores para que o problema seja resolvido ou seja, é a definição do conjunto de instruções a serem executadas para alcançar o objetivo final.

Desta forma o Pensamento Computacional, vai além de uma simples habilidade de resolução de problemas, mas algo que busca auxiliar os jovens no desenvolvimento de raciocínio lógico e as habilidades correlatadas. Para alguns professores pode ser algo novo ou de pouco conhecimento, mas ele já está no meio educacional há algum tempo e tem uma influência na aprendizagem do aluno e no desenvolvimento de competências.

A pesquisa investigou atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional em ambientes de aprendizagem atuais, mas que podem ser inspiradas nos micromundos de Célia Hoyles (1993) que “envolvem uma intenção de desenvolver uma postura exploradora para investigação matemática, na qual a aprendizagem é uma consequência de incidentes em que resultados previstos não são experimentados”. Nesses micromundos os experimentos são para testar teorias do comportamento que estão ligamos à Matemática e a resolução de problemas, sendo estes ambientes adequados para a pesquisa de caráter qualitativo realizada. Apresenta-se aqui os resultados parciais da pesquisa tendo como foco quatro atividades desenvolvidas.

Atividades desplugadas e plugadas

Atividades que envolvem o Pensamento Computacional e o seu desenvolvimento, são do tipo alquimétricos (alquimia = transformação + métrico = medida), desplugados (off line), plugados (online). Os alquimétricos são estruturas que podem ser montadas utilizando dos mais diversos materiais, inclusive sucata, contribuindo para a compreensão espacial e geométrica; as atividades desplugadas são aquelas realizadas sem computador; as atividades plugadas, requerem acesso à informação e tecnologias como computadores, estando associadas à programação.

As atividades pesquisadas foram elaboradas para trabalhar os pilares do pensamento computacional, sendo decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e o algoritmo, assim como explorar outros conceitos e o raciocínio lógico que é desenvolvido em conjunto com elas. A primeira atividade desplugada proposta foi a "eu robô" que tem por objetivo fazer o aluno compreender a importância da definição dos comandos e sua ordenação para que o objetivo seja alcançado. A atividade é realizada em dupla, um aluno fica responsável por ser o robô, ou seja, ele será aquele que executará os comandos recebidos e o outro aluno fica encarregado de dar os comandos em detalhes para seu colega robô, sendo recomendado a alternância dos papéis entre a dupla. Como proposta de problema, estabelece-se objetivos como andar pela sala de aula, apagar o quadro, entregar um material para outro colega da sala e até explorar os ambientes da escola.

Esta atividade emprega o desenvolvimento de habilidades ligadas a Matemática e ao PC, pois apresenta a possibilidade de explorar a organização do PC de forma simples trabalhando a lógica sequencial dos comandos assim como as questões de lateralidade e a questão de direção e sentido. Verifica-se durante a atividade a evolução do pensamento lógico à medida que os comandos se tornam mais objetivos e os alunos começam a otimizar na quantidade deles, tornando-se mais eficiente em encontrar soluções para os problemas por meio de comandos mais objetivos.

A segunda atividade explorada foi a de resolução de labirintos. Em atividades desse tipo se exige que aluno defina o conjunto de regras a ser seguido. Para isso o estudante terá que decompor o labirinto identificando os caminhos possíveis, reconhecer algum padrão para se guiar, abstrair sobre os caminhos possíveis verificando qual melhor escolher e por fim estipular o algoritmo para resolução do problema. A atividade foi realizada com a projeção de labirintos na parede (Figura 1), e os alunos descreviam o passo a passo das ações para a solução, ou seja, um algoritmo. Esta atividade também pode ser apresentada com o labirinto e os personagens impressos em papel, como em um jogo.

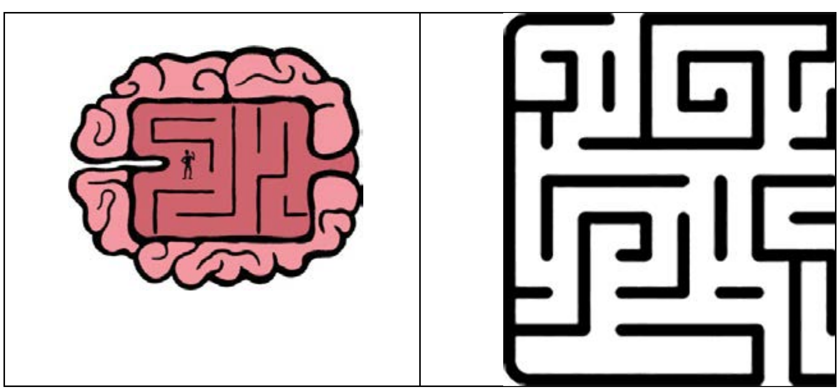


Figura 1. Labirintos (a pesquisa)

As atividades plugadas investigadas fazem o uso do computador que combinam funções comunicativas e cognitivas fazendo a mediação entre os usuários, ao mesmo tempo em que fornece um meio para externalizar processos (Hoyles, 1993). Os instrumentos exploratórios digitais são uma maneira de mediação entre conceito e prática, potencializando o processo de aprendizagem.

Foram investigadas as atividades “O artista” e “Anna e Frozen” da Code.org, que é uma organização sem fins lucrativos que visa incentivar as pessoas, principalmente estudantes de escolas a aprender ciência da computação. Dentre as iniciativas, a “Hora do código” possui tutoriais e desafios com programação em blocos, essas atividades possuem alguns personagens conhecidos de desenhos e filmes de animação.

As atividades “O artista” e “Anna e Frozen” foram realizadas individualmente fazendo uso dos computadores do laboratório de informática da escola. Os alunos foram cadastrados na plataforma do Code.org e após foram indicadas as atividades que deveriam ser realizadas para que explorassem os conceitos e conteúdos propostos. Os desafios selecionados possuem sequências classificadas em dez níveis, do fácil ao difícil. Por meio da plataforma o professor consegue visualizar o progresso do aluno, verificando quais são as dificuldades e o quais as atividades realizadas.

A atividade denominada “O artista” é representada por um menino que tem por objetivo fazer com que os alunos reconheçam estruturas de programação como sequências, ciclos e condições a partir da produção de figuras geométricas, além de sequência de instruções, conceitos de ponto e grau. Essa atividade explora estruturas de programação como condicional, estruturas de repetição e sistema de posicionamento e deslocamento. Como apresenta-se na Figura 2, o personagem solicita que seja realizado o desenho de um quadrado com apenas três blocos de programação, o aluno então terá que utilizar dos conhecimentos matemáticos para compreensão das características de um quadrado, utilizando do conceito de repetição, abstraindo o que se repete na construção da figura, transformando em um comando que será repetido.

Figura 2. Fase três da lição o artista (Code.org)

A atividade “Anna e Frozen” também tem trabalha com figuras geométricas, mas a abordagem é a da interpretação do algoritmo utilizando dos conceitos matemáticos de ângulo e medidas de distâncias, como apresenta-se na figura 3. Nesta atividade o desenho a ser formado são paralelogramos que formarão um floco de neve. A atividade faz uso dos laços de repetição que o aluno já deve ter compreendido na atividade anterior.

Figura 3. Atividade programação com Anna e Elsa (Code.org)

As atividades apresentadas do Code.org além de explorarem os pilares do pensamento computacional da decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo, trabalham conceitos matemáticos como as medidas de ângulos de uma forma visual. Essas atividades remetem a aprendizagem semelhante às propostas de Papert com o LOGO, nas quais os alunos criavam suas sequencias de códigos para desenhar figuras geométricas, mas o ambiente *Code* se diferencia pois explora os laços de repetição e união de códigos para um mesmo objetivo.

As atividades foram aplicadas com alunos do 6° e 7° ano do ensino fundamental de uma escola municipal da São Sebastião do Caí em oficinas extraclasse. Verificou-se como ocorreu o desenvolvimento das habilidades relativas ao Pensamento Computacional e ao raciocínio lógico.

As atividades trabalhadas, plugadas (online) e desplugadas (off line), permitiram explorar a programação em blocos com uso de plataformas digitais como o *Code*. Pelos relatos e a observação dos pesquisadores, identificou-se o engajamento dos alunos nas atividades desplugadas por eles associarem como ações de entretenimento, e as plugadas por trabalharem com os computadores e a programação real. Percebemos que em algumas atividades plugadas os alunos “pularam” desafios da sequência, pelas dificuldades que não superaram.

Conclusão

Há diversas atividades para explorar o Pensamento Computacional em conjunto com a lógica matemática, os dados apontam que as atividades selecionadas possibilitam o desenvolvimento das habilidades associadas ao PC.

Na atividade desplugada “Eu robô” um dos pontos de maior destaque foi sequenciamento de comandos e a atomização das ações, com os alunos mudando os comandos mais complexos e abstratos, mudando comandos como “caminhe até a porta da sala” para comandos menores e objetivos, como “afaste a cadeira; levante-se; vire à direita; ande dois passos; vire à esquerda; ande cinco passos”. Em relação a Matemática verificou-se a consolidação os conceitos de ângulos complementares e suplementares.

Nas atividades de labirintos consolidou-se o que foi iniciado na atividade “Eu robô”, trabalhando questões de lateralidade relativa à posição do personagem dentro do labirinto, que muda o pensamento do aluno acostumado apensar a lateralidade como observador. Além do pensamento lógico para encontrar o menor caminho, a organização e o planejamento para execução da atividade.

As atividades plugadas selecionadas do Code.org abordam o desenvolvimento dos conceitos de ângulos, lateralidade e deslocamento e a programação em blocos com destaque aos laços de repetição por meio de desafios e lições. Essas atividades requerem a capacidade de abstração e no experimento verificou-se que nem todos os alunos atingiram o grau esperado, e associa-se as dificuldades a aplicação dos conceitos matemáticos na resolução dos problemas.

Concluiu-se que as atividades plugadas e desplugadas investigadas são adequadas para comporem a sequência didática para o desenvolvimento das habilidades associadas ao Pensamento Computacional e aprendizagem da Matemática. As atividades plugadas que os alunos tiveram maior dificuldade requerem ajustes ou atividades intermediarias para aplicação em conjunto.

Referências

Brackmann, C. P. (2017). Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica. Porto Alegre.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/Schoolworlds: The Transformation of an Innovation. In K. Keitel, C., Ruthven (Ed.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 1–17). Springer, Berlim, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78542-9_1

Liukas, L. (2015). *Hello Ruby: adventures in code* (1ª). New York: Feiwel & Friends. PISA. (2018). *Pisa 2022 - Mathematics Framework*.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2010). Computational Thinking: What and Why? Thelink - The Magaizne of the Varnegie Mellon University School of Computer Science, (March 2006), 1–6.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Desenvolvimento de estratégias de contagem mediadas por Tecnologias Assistivas e materiais adaptados em classes inclusivas

Ana Paula de Souza **Colling**
Prefeitura Municipal de Tupandi-RS
Brasil
apcolling1@gmail.com
Maria Adelina Raupp **Sganzerla**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
masganzerla@gmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte de duas teses de Doutorado que investigam a aprendizagem de conceitos matemáticos em alunos com deficiência em classes inclusivas da educação básica. Trabalhar com a diferença dentro de nossas escolas exige, entre outros fatores, metodologias que estimulem o desenvolvimento de diferentes habilidades, proporcionando a aprendizagem de todos e respeitando as individualidades dos estudantes, levando em consideração as potencialidades dos alunos com deficiência. Buscamos refletir sobre o uso das Tecnologias Assistivas e materiais adaptados como um instrumento facilitador na construção dos conceitos matemáticos para alunos com deficiências, sendo abordado neste caso estratégias de contagem, a partir das intervenções realizadas com uma aluna com Síndrome de Jacobsen e alunos com deficiência visual, objetos de pesquisa das teses abordadas neste artigo. Concluímos que as Tecnologias Assistivas e os materiais adaptados auxiliam na aprendizagem fortalecendo o uso de diferentes estratégias de contagem para os alunos com deficiência. Apresentamos a discussão dos resultados referentes às teses concluídas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Tecnologia Assistiva; Inclusão Escolar; Educação Básica; Síndrome de Jacobsen; Deficiência Visual.

Introdução

A inclusão de alunos com deficiência em classes regulares de ensino, oriunda da Declaração de Salamanca (Unesco, 1994) e da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), promove uma mudança no cenário educacional brasileiro e exige práticas pedagógicas que possibilitem, com respeito às individualidades de cada estudante, o desenvolvimento da aprendizagem.

O ensino de Matemática tem como objetivo a compreensão do mundo que nos cerca, pois, as diferentes habilidades desenvolvidas estão presentes em nossa vida de diversas maneiras, sendo a contagem, de acordo com Gelman e Gallistel (1978) uma das noções fundamentais dentro do processo de alfabetização matemática.

O recorte aqui abordado origina-se de duas teses de Doutorado “Olhares da inclusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen” (Colling, 2018) e “Deficiência visual e a educação matemática: estudo sobre a implementação de Tecnologia Assistiva” (Sganzerla, 2020), ambas realizadas dentro do LEI - Laboratório de Estudos da Inclusão do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, localizada no município de Canoas/RS/Brasil. O recorte tem por finalidade discutir a utilização de Tecnologias Assistivas como potencializadoras no desenvolvimento da contagem de alunos com deficiências, neste caso com Síndrome de Jacobsen e Deficiência Visual, todos matriculados em classes inclusivas na educação básica.

Todos somos capazes de aprender e a escola inclusiva propõe a reflexão sobre os diferentes tempos de aprendizagem, apontando para a necessidade de mudança nas práticas pedagógicas e, entre as possibilidades, as Tecnologias Assistivas são trazidas neste texto como uma metodologia capaz de proporcionar liberdade de aprendizagem individual para os alunos com deficiência, considerando a complexidade do processo de ensino e aprendizagem, com respeito ao tempo e limitações de cada indivíduo.

Dificuldades de aprendizagem Matemática dos alunos com deficiência

A inclusão escolar trouxe para dentro das salas de aula regulares os alunos com deficiência e, com isso, o surgimento de reflexões sobre a aprendizagem dos mesmos. O processo de inclusão sugere mudanças nas práticas pedagógicas propondo novos métodos que favoreçam a inserção dos alunos com deficiência no cotidiano escolar, levando em consideração sua aprendizagem vinculada às potencialidades e particularidades apresentadas por cada estudante. Cabe a toda comunidade escolar, em especial aos professores, criar tempos, espaços e metodologias que impulsionem dentro das instituições de ensino o processo de inclusão (Colling & Geller, 2015).

Habilidades matemáticas, segundo Soares (2009), compõe um instrumento semelhante à alfabetização na formação para a vida em sociedade e, assim, o processo de construção do número e desenvolvimento de estratégias de contagem são importantes ao pensarmos na inclusão escolar dos alunos com deficiência. Todo aluno é capaz de aprender e o professor necessita promover ações educativas que promovam a aprendizagem.

Todos podemos aprender mas para isso precisamos levar em consideração nossas diferenças e, no caso dos alunos com deficiência, compreender que a formação dos conceitos matemáticos precisa estar relacionada a vivência de cada um, sendo que os alunos precisam utilizar seus sentidos, como ver, sentir, tocar, observar, agrupar, modificar objetos para desenvolver o conceito de número e as estratégias de contagem.

A Organização Mundial de Saúde (OMS, 2019) considera a deficiência visual como a privação em parte ou total da capacidade de enxergar. O artigo 5º do Decreto 5.296/04 apresenta a deficiência visual como:

> Cegueira, na qual a acuidade visual é igual ou menor que 0,05 no melhor olho, com a melhor correção óptica; a baixa visão, que significa acuidade visual entre 0,3 e 0,05 no melhor olho, com a melhor correção óptica; os casos nos quais a somatória da medida do campo visual em ambos os olhos for igual ou menor que 60°; ou a ocorrência simultânea de quaisquer das condições anteriores (Brasil, 2004, p.2).

O processo de aprendizagem dos estudantes com deficiência visual, nas escolas inclusivas, se constitui a partir dos sentidos remanescentes: tato, audição, olfato e paladar. Faz-se necessário, assim, o uso de materiais que facilitem a discriminação e/ou identificação do tamanho, textura, volume, peso, além da necessidade de sons variados, podendo despertar a curiosidade e o interesse de aprender (Sganzerla & Geller, 2020). As autoras Geller e Sganzerla (2014, p.124) ainda indicam que os educadores possuem um grande desafio, "principalmente na questão dos materiais, visto que com a ausência da visão, os recursos educacionais devem ser táteis e simples". A Tecnologia Assistiva é uma das alternativas para suprir algumas das restrições visuais.

Tecnologias Assistivas e o desenvolvimento de estratégias de contagem

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica, (Brasil, 2001), apontam como competência da escola realizar flexibilizações e adaptações curriculares que considerem o significado prático instrumental dos conteúdos básicos, utilizando-se de metodologias de ensino e recursos didáticos diferenciados, com objetivo de proporcionar o desenvolvimento dos alunos com deficiência nas escolas regulares. Sendo assim, faz-se necessário o uso de diferentes formas de ensino e estratégias diversificadas, estando entre elas o uso das Tecnologias Assistivas.

O conceito de Tecnologia Assistiva no Brasil foi criado oficialmente em 1988, pelo CAT (Comitê de Ajudas Técnicas). Bersch e Toniolli (2008) apresentam a TA como sendo "o acesso a todo o arsenal de recursos que necessitam e que venham favorecer uma vida mais independente, produtiva e inclusiva no contexto social geral".

Chalon-Blanc (2008) apresenta uma compilação da pesquisa, realizada por Gelman e Gallistel em 1978, sobre a contagem, identificando cinco princípios: 1 - Da ordem estável: as palavras-números devem constituir uma sequência estável; 2 - Correspondência termo a termo: cada elemento contado corresponde a uma e só uma palavra-número; 3 - Cardinal: a última palavra-número utilizada em uma sequência de contagem representa o número de elementos do conjunto contado; 4 - Abstração: o conjunto de objetos heterogêneos contados são vistos como unidades; 5 - Não pertinência da ordem: a contagem dos elementos pode ser realizada em qualquer ordem.

Kamii (1994) alerta que o fato de uma criança não contar duas vezes o mesmo objeto ou não saltar nenhum, não significa que ela possui o domínio da contagem. É necessário estimular o pensamento lógico-matemático, pois "o pensamento da criança se torna mais flexível à medida que é estimulado, criando uma reversibilidade" (Piaget, 1979, p.102).

Outro aspecto que deve ser considerado é que as crianças apresentam conhecimentos informais, que se dão nas relações sociais do dia a dia. Mesmo antes de entrarem para a escola, elas vivem em um ambiente rico em informações matemáticas, que podem oportunizar a estas, junto ao seu grupo social, construir importantes experiências. As crianças cegas apresentam um conhecimento informal na maioria das vezes muito parecido com as crianças videntes, pois as pessoas de seu convívio oportunizam a contagem na forma verbal e também com o tato (Amiralian, 1997). Do mesmo modo, no caso da Síndrome de Jacobsen, uma síndrome rara causada pela deleção ou duplicação do terminal do braço longo do cromossomo 11 que, além de anomalias congênitas múltiplas, também apresenta diagnóstico de atraso mental, o desenvolvimento deve oportunizar a construção da contagem observando-se dificuldades de aprendizagem e buscando superá-las (Grossfeld; Mattina; Perotta, 2009).

Piaget (1952) relatou em seus estudos que as crianças têm capacidade de raciocinar logicamente sobre quantidades, com o intuito de compreender o sistema numérico, porém não contempla como a criança aprende a contar. Já os estudos de Gelman e Gallistel (1978), foram concentrados em como as crianças aprendem a contar, iniciando com objetos e evoluindo para a compreensão das relações sobre as quantidades. Comprova-se assim que os números são importantes porque permitem representar quantidades e dar sentido às relações quantitativas.

Metodologia

O recorte das pesquisas, apresentadas neste artigo, tem caráter qualitativo com o objetivo de investigar o uso de Tecnologia Assistiva nas estratégias de contagem a alunos com deficiência visual e síndrome de Jacobsen.

Partindo de uma exploração direta a técnica de observação dos participantes, que segundo Marconi e Lakatos (2010) consiste em uma participação real do pesquisador junto aos seus sujeitos, onde o mesmo vivencia sua realidade e propõe alternativas. Nesse caso, ao longo das pesquisas, as pesquisadoras vivenciaram na prática junto aos sujeitos de pesquisa, inferindo sobre as necessidades dos estudantes e propondo atividades com o uso de TA para a contagem do número.

Justifica-se a pesquisa qualitativa, como sendo a opção mais adequada, pois explora "as características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente" de Moreira e Caleffe (2006, p.75), ainda discorrem que os dados são coletados verbalmente pela observação, descrição e gravação. Lüdke e André (1986, p.12) citam que "o material obtido é rico em descrições pessoais, situações e acontecimentos", ainda apontam que a preocupação "com o processo é muito maior do que com o produto".

A pesquisa de Sganzerla (2020), ocorreu ao longo de 3 anos em uma escola municipal inclusiva pertencente à região metropolitana de Porto Alegre e envolveu cinco professoras que ensinam matemática, três relacionadas ao Atendimento Educacional Especializado. Além das professoras participantes, a pesquisa envolveu os cinco estudantes com deficiência visual matriculados na escola, todos com atendimento no AEE no contraturno da aula

A pesquisa de Colling (2018) iniciou-se em 2014 quando a aluna frequentava o 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola inclusiva, sendo um estudo de caso que acompanhou essa aluna em seu processo escolar passando da escola inclusiva para escola especial e retornando para escola inclusiva, envolvendo ainda os pais, professores e psicóloga de uma das escolas observadas.

Análise e discussão dos dados

O fato de um estudante recitar os valores em uma ordem sequencial não indica que o mesmo adquiriu o conceito de número. Piaget e Szeminska (1971, p.15) refletem que "não basta de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente 'um, dois, três, etc.' para achar-se na posse do número". Afirmam ainda que a construção é parte do desenvolvimento da própria lógica, que está associada à construção do período pré-numérico.

> [...] o número se organiza, etapa após etapa, em solidariedade estreita com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia das classes lógicas) e das relações assimétricas (seriações qualitativas), com a sucessão dos números, constituindo-se, assim, em síntese operatória da classificação e seriação (Piaget & Szeminska, 1971, p.12).

Em uma das atividades propostas para aluna com Síndrome de Jacobsen, com objetivo de verificar a quantificação e contagem, solicitou-se que fossem colocados botões em um vidro com uma pequena abertura, conforme a Figura 1.

Figura 1. Contagem com material concreto

Pudemos observar que a aluna não realizava a contagem e apresentava muitas dificuldades relacionadas à motricidade fina o que, de acordo com a comorbidade apresentada.

Uma atividade simples foi desenvolvida para identificar se os estudantes com deficiência visual sabiam ou não contar. Verificou-se que após a recitação da ordem sequencial os mesmos quantificavam os valores, as quantidades. A Figura 2 apresenta a contagem dos círculos (rodinhas). Observa-se que o estudante faz uso da estratégia de juntar os objetos em seu dedo indicador, dessa forma é assegurado que já foi contado.

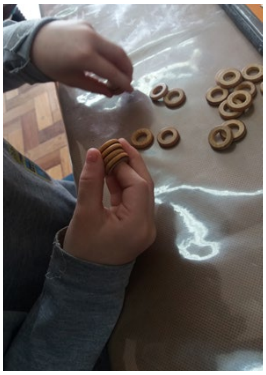


Figura 2. Estudante contando círculos

Os cegos desenvolvem imagens mentais, conceitos de objetos e quantidades relativas às suas experiências com o mundo tátil e com a forma de linguagem que usam (Fernandes, et. al, 2006). A autora ainda complementa que a formação do conceito de número não ocorre por meio de repetição mecânica dos numerais e sim pela construção progressiva dos estágios vivenciados no dia a dia, tanto na vida social como na escolar.

Assim, para a atividade de contar, não basta que os estudantes recitem oralmente a sequência numérica. É necessário que eles compreendam a lógica das relações entre seriação, classificação e correspondência biunívoca envolvidas nesse ato. Além disso, torna-se relevante a compreensão de cinco importantes princípios de contagem, descritos inicialmente por Gelman e Gallistel (1978).

Em uma outra atividade de contagem, fez-se uso de tampas (Figura 3a) como objetos de contagem, solicitando que o estudante recitasse em voz alta os numerais, objetivando acompanhar a quantificação. A mesma atividade foi replicada com o uso do material dourado (Figura 3b). Nas duas atividades foram entregues 12 unidades para um dos estudantes

Figura 3. Contagem de objetos

É importante ressaltar que os cegos e/ou baixa visão necessitam de um delimitador, pois sentem maior segurança quando os objetos estão ao seu alcance. Como seus “olhos” estão na mão, no tato, seu campo de atuação deve ser limitado, principalmente quando estão realizando tarefas de contagem ou agrupamento. Sganzerla e Geller (2018, p.51) explicam: “estes são espaços fechados, normalmente utilizam-se tampas de caixas, com a finalidade de agrupar as peças em um único local”.

Falcão (2015, p.5) apresenta que a contagem é importante e ainda expõe o porquê de se aprender a contar: “tudo começa com a necessidade que as crianças sentem quando lidam com objetos e aprendem a fazer comparações ou determinar quantidades”. Uma adaptação construída foi uma espécie de ábaco tátil (Figura 4a e 4b) para auxiliar nas atividades de contagem. A ideia era oferecer uma experiência com material concreto, sendo construído em uma prancha de isopor forrada na cor preta (contraste com as demais cores), com as hastes e a representação do número em tinta e em Braille, que representam as quantidades.

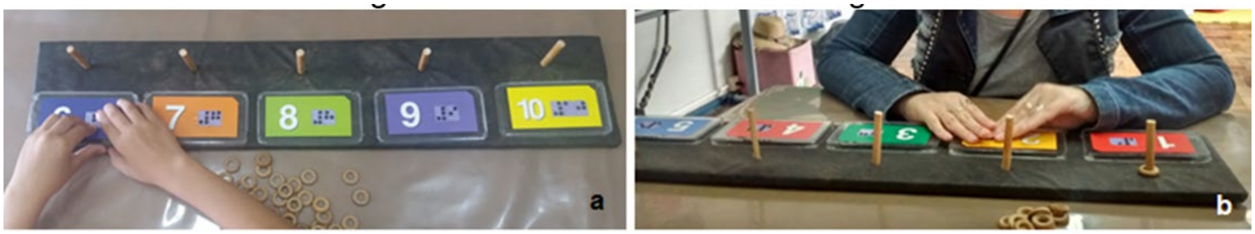


Figura 4. Adaptação: ábaco tátil

Foi solicitado a um aluno cego que identificasse o valor escrito na tampa em tinta e em Braille e inserisse nas hastes as argolas referentes a quantidade relacionada (Figura 4a). Durante a interação, foi percebido que o estudante identificou que os valores estavam em ordem crescente, assim, ele não visualizava/tateava mais os números escritos e, por consequência, ia inserindo as argolas na ordem crescente. Fato importante porque, pelas observações, percebeu-se que a ordem instável estava abstraída por ele (Sganzerla; Geller, 2019).

Considerações Finais

Desenvolver adaptações, elaborando novos recursos de TA, com materiais diversificados, comprova que é viável desenvolver TA para o ensino de conceitos matemáticos.

Com relação a construção do conceito de número pela criança com deficiência visual, é possível relatar que ela tem os mesmos potenciais de uma criança vidente. Entretanto, é necessária a utilização de TA e materiais adaptados para que efetive esse conceito.

A aluna com Síndrome de Jacobsen, pelo atraso mental e diagnóstico de TDAH decorrente da síndrome, possui enormes dificuldades relacionadas ao desenvolvimento da aprendizagem matemática, não tendo formado o conceito de número. Para tanto, o uso de TA como ferramenta de apoio, em consonância com a adaptação curricular, proporciona métodos mais eficazes na construção da aprendizagem e levando em consideração as dificuldades e potencialidades observadas.

Por fim, sabendo da importância do processo de contagem no desenvolvimento da aprendizagem matemática, acreditamos que o uso de TA vem a ser uma importante ferramenta dentro do processo de inclusão escolar dos alunos com deficiência e, aliadas a adaptação curricular e formação de professores para sua utilização, proporciona ambientes capazes de incentivar a construção do conceito de número por aqueles com maiores dificuldades, com respeito às suas individualidades.

Referências e bibliografia

Amiralian, M.L.T.M. (1997). *Compreendendo o cego: uma visão psicanalítica da cegueira por meio de desenhos-estórias*. São Paulo: Caso do Psicólogo.

Bersch, R.; Toniolli, D. (2008*). Introdução à Tecnologia Assistiva. CEDI – Centro Especializado em desenvolvimento Infantil*. http://proeja.com/portal/images/semanaquimica/2011-10-19/tec-assistiva.pdf

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. MEC: Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso em: 10 nov. 2022

Brasil. (2004*). Decreto nº 5.296 de 2 de dezembro de 2004*. Brasília, 2004. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/decreto/d5296.htm. Acesso em: 20 nov. 2022.

Chalon-Blanc, A. (2008). *Inventar, contar e classificar: de Piaget aos debates actuais*. Lisboa: Instituto Piaget.

Colling, A. P. de S. (2018). *Olhares da Inclusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen*. Tese de Doutorado. PPGECIM/Ulbra: Canoas.

Colling, A. P. S.; Geller, M. Intervenções no Ensino de Matemática com uma aluna com Síndrome de Jacobsen. In: *XIV CIAEM-IACME – XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 2015, Chiapas, México.

Falcão, F. P. (2015). *Será que os pais sabem como os filhos contam? Avaliação da contagem numa turma do 1º ano e a sua relação com as percepções parentais*. Mestrado Integrado em Psicologia. Universidade de Lisboa.

Fernandes, C. T. et al. (2006). *A construção do conceito de número e o pré-soroban*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial.

Geller, M.; Sganzerla, M.A.R. (2014). Reflexões de professores sobre Tecnologias Assistivas e o processo de ensino e aprendizagem de matemática. *Acta Scientiae*. Canoas, 16(4 Ed. Especial), 116-137.

Gelman, R.; Gallistel, C.R. (1978). *The child´s understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Grossfeld, P.; Mattina, T.; Perrotta, C. S. (2009). *Síndrome de Jacobsen*. Disponível em: http://www.orpha.net/consor/cgi-bin/OC_Exp.php?lng=pt&Expert=2308. Acesso em: 15 mar. 2022

Kamii, C. (1994). *A criança e o número implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos*. 18 ed. Campinas: Papirus.

Lüdke, M; André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Marconi, M.A.; Lakatos, E. M. (2010). *Fundamentos da metodologia científica*. 7 ed. São Paulo: Atlas.

Moreira, H.; Caleffe, L. G. (2006*). Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. Rio de Janeiro: DP&A Editora.

OMS. Organização Mundial da Saúde. *Deficiência visual*. Disponível em: https://www.who.int/eportuguese/countries/bra/pt/. Acesso em: 20 nov. 2022

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1971). *A epistemologia genética*. Petrópolis: Vozes.

Piaget, J.; Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Sganzerla, M. A. R. (2020). *Deficiência Visual e a educação matemática: estudo sobre a implementação de Tecnologia Assistiva*. Tese de Doutorado. PPGECIM/Ulbra: Canoas.

Sganzerla, M. A. R.; Geller, M. (2018). Tecnologias Assistivas e educação matemática: um estudo envolvendo alunos com deficiência visual no AEE. *Revista Acta* Scientiae, v. v.20, p. 36-55, Canoas.

Sganzerla, M. A. R; Geller, M. (2020). Tecnologia Assistiva na Construção do Conceito de Número: Um Estudo Envolvendo Ações de Estudantes com Deficiência Visual e Professores. *Acta Sci*. (Canoas), 22(4), 155-179.

Soares, E. S. *Ensinar matemática – desafios e possibilidades*. Belo Horizonte: Dimensão, 2009.

UNESCO. Declaração de Salamanca, Salamanca, 1994. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf. Acesso em: 10 nov. 2022

Diseño de actividades para Álgebra Lineal mediante un sistema de aprendizaje abierto

Rita **Vázquez** Padilla
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
México
rita.vazquez@uacm.edu.mx
Osiel **Ramírez** Sandoval
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
México
osiel.ramirez@uacj.mx
Miriam **Torres** Flores
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
México
miriam.torres@uacm.edu.mx

Resumen

En esta propuesta se presentan los resultados de una investigación cuyo objetivo es diseñar actividades de construcción de conceptos de Álgebra Lineal para ser implementadas en un entorno digital específico (Grasple, una plataforma de aprendizaje abierto). La investigación se desarrolló en condiciones de enseñanza virtual en un contexto de formación matemática de futuros ingenieros. Los resultados de la etapa de diseño de tareas y de una implementación piloto muestran que el uso de Grasple como herramienta de aprendizaje impactó positivamente en los estudiantes, promoviendo el trabajo autónomo. Se discuten también las posibilidades que brinda un entorno digital como el mencionado para diseñar evaluaciones diferenciadas, en una modalidad en línea.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Superior; Enseñanza híbrida; Evaluación en línea; Investigación exploratoria; OLS (*Open Learning System*); Álgebra Lineal; México, Ciudad de México.

Introducción

El Álgebra Lineal es una de las materias fundamentales en la formación de ingenieros y matemáticos aplicados. Para que los estudiantes logren un manejo adecuado de los conceptos del Álgebra Lineal, es necesario que desarrollen una base conceptual sólida de conceptos como transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones y valores y vectores propios, más allá de los algoritmos o técnicas relacionadas con ellos. Promover la reflexión conceptual en los estudiantes es algo que suele ser un punto complicado en la enseñanza de esta materia. Diversos resultados de investigación se refieren a las dificultades que presentan los alumnos para comprender los conceptos del Álgebra Lineal, mismas que muchas veces, se ocultan tras un aparente manejo adecuado de las técnicas algorítmicas (Dorier, J.-L., & Sierpinska, A. (2001); Oktaç, A., & Trigyero, M. (2010); Villabona, et al (2020); Kawazoe, M (2022), etc)

Al diseñar tareas enfocadas no sólo en el manejo algorítmico sino también en la construcción de conceptos matemáticos, es posible lograr que los estudiantes puedan utilizar estos conocimientos de manera más efectiva en las materias de ciclo superior (disciplinas específicas) y en la práctica profesional, como se ha señalado “crear un ambiente con el propósito de presenciar la construcción de conocimiento” Oktaç (2019)

Después de más de dos años (2020 y 2021) haber estado en confinamiento, a consecuencia de contingencia sanitaria provocada por el COVID 19 (SRAS-CoV-2); el sistema educativo en su totalidad se vio afectado por el confinamiento derivado de la crisis sanitaria y emergió la necesidad de poner en marcha nuevas formas de enseñar y evaluar el aprendizaje en condiciones de virtualidad. En particular, la problemática señalada en torno a la enseñanza del Álgebra Lineal hizo evidente la necesidad de plantear formas nuevas de diseñar tareas que promovieran una adecuada construcción de conceptos en una situación en la que los estudiantes y los profesores ya no estaban frente a frente. También las formas de evaluación debieron ajustarse a una rápida curva de aprendizaje por parte de profesores e instituciones educativas. El manejo algorítmico de objetos como matrices, vectores y sistemas de ecuaciones fue rápidamente reemplazado por una multitud de herramientas digitales disponibles para los estudiantes, lo que, consecuentemente puso en entredicho la pertinencia de evaluaciones basadas únicamente en procedimientos algorítmicos.

En la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), institución de educación superior donde se llevó a cabo el experimento, se propone un modelo educativo centrado en el estudiante y que promueva el desarrollo de su autonomía. Apoyados en este principio, resulta necesario proponer a los estudiantes herramientas que apoyen su aprendizaje fuera de las horas de clase. Derivado de la crisis de COVID, la autonomía referida tomó una nueva dimensión, porque el estudiante no sólo tomaba un papel protagónico en su aprendizaje, sino que carecía de los espacios de consulta y asesoría con los profesores con los que contaba en la modalidad presencial.

Fue entonces que la tecnología ocupó un lugar fundamental para hacer frente a las actividades académicas. El software especializado para realizar cálculos matemáticos y particularmente para construir situaciones didácticas que permitieran un tratamiento en el ambiente virtual fueron ineludibles. Los recursos existentes en internet desde antes de la crisis sanitaria fueron una tabla de salvación para estudiantes y profesores; entre ellos, podemos mencionar cursos completos en videos de Youtube, aplicaciones en línea para hacer cálculos, o plataformas como Khan Academy. Si bien los videos disponibles son recursos útiles para ejemplificar ciertas técnicas o procedimientos, resultan muy limitados para que los estudiantes desarrollen conocimiento de manera estructurada. Por otro lado, la retroalimentación que ofrecen plataformas como las mencionadas anteriormente, se restringe en la mayoría de los casos a devolver al estudiante un resultado binario (correcto/incorrecto). Asimismo, la dificultad de escribir símbolos matemáticos limita el tipo de interacciones que pueden establecerse entre el estudiante y el contenido que se les presenta. La interacción entre los estudiantes y la plataforma está limitada a la interfaz, siendo complicado que por ejemplo, escriban símbolos matemáticos para expresar sus respuestas. La evaluación sumativa de aprendizajes también se volvió un problema importante, porque en cuestión de días, cambiaron las condiciones tradicionales para evaluar en el aula y bajo supervisión.

Con base en la experiencia del equipo de investigación en el tema de construcción de conceptos en Álgebra Lineal (Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010); Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra, S. E. (2011); Dogan, H. (2018), etc) nos propusimos integrar una plataforma de aprendizaje para desarrollar ejercicios y problemas en los que los estudiantes pudieran trabajar de manera autónoma, tanto de forma asincrónica como sincrónica durante las clases en línea durante el año 2021, que promovieran un mejor entendimiento de los conceptos del álgebra lineal, más allá de lo puramente algorítmico y que pudieran ser evaluadas a distancia. A continuación, describiremos las características de la plataforma y los resultados de utilizarla en dos cursos de Álgebra Lineal.

Una plataforma de aprendizaje enfocada en matemáticas

Para desarrollar esta investigación se utilizó la plataforma *Grasple* (Grasple, 2022) que es una plataforma de tipo Sistema de aprendizaje abierto (*Open Learning System).* El usuario tiene a su disposición una colección de ejercicios de matemáticas, organizados en repositorios; es importante notar que la plataforma aparece en dos idiomas: inglés y neerlandés. Cubre varias disciplinas de matemáticas, con una mayor preponderancia de ejercicios en Estadística y Álgebra Lineal. Los ejercicios disponibles en la plataforma fueron desarrollados y compartidos por una comunidad de profesores, y son accesibles sin costo para cualquier usuario con acceso a internet. El repositorio de Álgebra Lineal cuenta con 582 ejercicios que cubren la mayoría de los temas que se abordan en los cursos universitarios. La plataforma se organiza en módulos, y en estos, es posible agregar lecciones (a manera de diapositivas), ejercicios de repaso, en los cuales el estudiante al responder recibe retroalimentación inmediata que se elabora a la par que se diseña un ejercicio. Es posible también seleccionar ejercicios del repositorio para conformar un test o evaluación, y controlar la ponderación e cada ejercicio de modo que luego de finalizarlo, el estudiante obtiene de inmediato una calificación sobre su desempeño.

Resaltamos las siguientes características de la plataforma: está basada en un sistema de álgebra computacional, lo que permite en particular, que el sistema califique como correctas o incorrectas dos respuestas que sean algebraicamente equivalentes, con varias posibilidades (por ejemplo, equivalencia algebraica, numérica con un error determinado; independencia lineal, entre otras), aunque no se escriban de manera idéntica. Su interfaz permite a los usuarios ingresar notación matemática; -incluido código en LaTeX y la tercera característica es, que es posible, usando una cuenta de profesor, programar una retroalimentación inmediata de acuerdo a la respuesta correcta o incorrecta del usuario. También es posible diseñar nuevos ejercicios utilizando variables y parámetros, de modo que se pueden generar muchas versiones diferentes de un mismo tipo de ejercicio. El sistema tiene, además, un soporte estadístico con el registro de la actividad y el avance de los estudiantes, y genera estadísticas individuales de su desempeño evaluado de un 0 a un 100%.

Metodología y Resultados

Durante el semestre 2021-1 la plataforma se usó como un recurso complementario a las clases impartidas vía remota. El curso fue impartido por una de los miembros del equipo de investigación; en las sesiones sincrónicas por videoconferencia, la profesora incluía preguntas, actividades y ejercicios que habían ya sido desarrollados previamente en el marco de la teoría APOE (Dubinsky, 2014) y probadas en el entorno tradicional. Estas actividades se asignaban a los estudiantes y ellos las subían a un aula virtual, de una manera muy parecida a lo que se hacía en la modalidad presencial. En este sentido, el trabajo con Grasple funcionó sobre todo para adentrarse en el uso de la plataforma, y ejemplificar a través de los ejercicios en línea y su correspondiente retroalimentación, las técnicas vistas en clase. Se destinó para ello media hora semanal, dentro de las cuatro sesiones de 90 minutos que comprende el curso. Para ello, se seleccionaron ejercicios y lecciones de los repositorios disponibles que se correspondieran con el programa de la materia. Aunque los ejercicios en Grasple no fueron adaptados específicamente al curso, es de notar que en los repositorios ya existían ejercicios dirigidos a promover la reflexión conceptual, a través de preguntas de falso o verdadero, o de opción múltiple, además de aquellas más de tipo algorítmico, en las que los estudiantes respondían con un número, una matriz o una expresión algebraica, entre otros tipos de objetos. Como resultado de esta etapa se registraron las características generales observadas en el uso de la plataforma, particularmente las dificultades de los estudiantes para utilizarla. Una de las más importantes, fue el idioma y los errores de sintaxis al escribir las respuestas.

Con base en los resultados de la primera etapa, se planteó para el semestre 2021-2 una nueva versión del curso con una mayor importancia al trabajo en la plataforma. Además, se contó con el apoyo de un profesor de inglés para que los estudiantes reconocieran términos y expresiones comunes en matemáticas y su respectiva traducción. El trabajo en la plataforma, evaluado mediante el sistema propio de Grasple, se contó como parte de la calificación del curso. En esta etapa, incluimos el diseño de ejercicios nuevos, en español, que se agregaron a los repositorios.

La retroalimentación, diseñada por nosotros, permitió acercar más el material en la plataforma al enfoque constructivista del curso. Los ejercicios nuevos se refirieron, sobre todo, a aplicaciones de los sistemas lineales. Una de las grandes ventajas que ofrece esta herramienta es la posibilidad de diseñar ejercicios usando parámetros, como el que se muestra en la Figura 1.

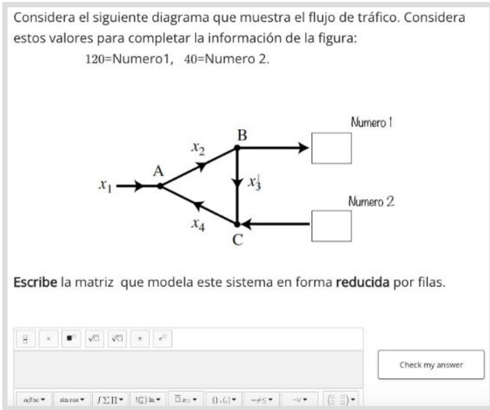


Figura 1. Ejercicio de aplicación de sistemas de ecuaciones diseñado para Grasple.

Los datos que aparecen como parámetros (en la figura, etiquetados como Número 1 y Número 2) son distintos cuando el ejercicio se abre en dos sesiones distintas, es decir, cada estudiante ve un ejercicio con valores diferentes; la calificación del ejercicio y la retroalimentación toma en cuenta estos valores. De este modo, pudimos contar con una colección de ejercicios que, aunque similares, no tenían respuestas idénticas y esto fue un gran facilitador cuando estos ejercicios se eligieron para conformar evaluaciones. A los estudiantes se les pedía respaldar sus respuestas en Grasple con un procedimiento escrito, de modo que los eventuales errores debidos a la sintaxis pudieran corregirse. Al finalizar el semestre 2021-2, los estudiantes respondieron una encuesta sobre el uso de Grasple. Los resultados muestran una percepción positiva del uso de la plataforma no solo para resolver ejercicios, sino también para aprender la teoría y realizar exámenes. Asimismo, se señaló el problema del idioma como una de las principales dificultades para usarla.

Fue posible analizar la correlación entre la percepción de los estudiantes sobre su desempeño en temas específicos y el progreso medido por la plataforma, tanto de manera individual como grupal. En particular, se pudo observar un mejor desempeño en la resolución de problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones en comparación al usual, sin el uso de la plataforma. En la presentación en la conferencia se presentarán algunos de estos resultados.

La tercera etapa se desarrolló ya en modalidad presencial. Esta etapa se caracterizó por un diseño de actividades enfocadas a la construcción del concepto de Espacio vectorial, uno de los que se han reportado como más difíciles en el aprendizaje del Álgebra Lineal. Se tomó como base la descomposición genética (DG) propuesta por Parraguez y Oktaç (2010), y se diseñó un cuestionario con el objetivo de identificar las construcciones mentales propuestas en la DG para ejercicios en los que aparecieran operaciones no usuales, y espacios vectoriales distintos de R2. Luego de la implementación del cuestionario en un grupo de 35 estudiantes, se analizaron los resultados y se identificaron problemas específicos asociados a la construcción objeto de los elementos del espacio vectorial, así como los mecanismos de coordinación necesarios para verificar los axiomas de suma y producto por escalar. Con base en lo anterior, se diseñaron nuevos ejercicios en Grasple, que actualmente están siendo implementados. Los resultados de las investigaciones se reportarán próximamente.

Conclusiones

El uso de una plataforma como Grasple puede promover una mejor comprensión de los conceptos abstractos del Álgebra Lineal, al permitir al estudiante obtener retroalimentación sobre sus respuestas, en un formato que incluye no solo números sino otro tipo de objetos matemáticos. En términos de evaluación, permite al profesor generar reactivos diferenciados, lo que facilita la evaluación en condiciones de virtualidad. Los estudiantes que usaron la plataforma durante la época de pandemia muestran una percepción positiva de su uso en relación a su aprendizaje y al trabajo autónomo. Permitió poner en relieve también las dificultades asociadas al idioma en la comprensión de lectura en matemáticas y el uso de tecnología. Desde el diseño de tareas, la posibilidad de incluir distintos tipos de respuestas y parámetros en los ejercicios facilita la elaboración de ejercicios variados que permitan a los estudiantes interiorizar propiedades de los objetos matemáticos.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS theory—*A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Cham: Springer

Dogan, H. (2018). Mental schemes of linear algebra visual constructs. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Eds.), Challenges and strategies in teaching linear algebra (pp. 219–239). Cham: Springer.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85–124). Springer. https://doi.org/ 10.1007/0-306-47224-4_2

Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 255-273). Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47231-7_24

Grasple. (2022, 1 de octubre). Grasple. Open interactive Math & Stats exercises. https://www.grasple.com/

Kawazoe, M. (2022). Relation between understandings of linear algebra concepts in the embodied world and in the symbolic world. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2020/hal-03113855v1

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? Revista Latinoamericana de Investigacion En Matemática Educativa, 13(4), 373–385. https://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-ii/499-201021d

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2112–2124. https://doi.org/ 10.1016/J.LAA.2009.06.034

Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra, S. E. (2011). El Concepto de Transformación Lineal: una Aproximación Basada en la Conversión Gráfico-Algebraica , con Apoyo de GeoGebra. *Formation à La Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 38–49.

Villabona, D., Camacho, G., Vázquez, R., Ramírez, O., & Oktaç, A. (2020, September). Process conception of linear transformation from a functional perspective. In INDRUM 2020. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03113850

Diseños didácticos en el Aula Virtual de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión

Cristian Fabián **Ariza** Pérez
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
cfap159@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación en desarrollo consistente en el diseño e implementación de una secuencia didáctica en al Aula Virtual de GeoGebra, para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y favorecer la inclusión en estudiantes de grado séptimo. Para el diseño de las tareas se hizo una adecuación del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) a los procesos matemáticos de resolución de problemas, comunicación, representación, procedimientos y razonamiento y demostración, en donde se plantearon 4 tareas con diferentes niveles de profundidad, según las capacidades matemáticas y las necesidades educativas especiales. Los resultados muestran como los diseños mediados por la tecnología ayudan a la generalización de patrones.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Educación para población con necesidades especiales; Aula virtual de GeoGebra; Investigación cualitativa; Pensamiento algebraico; Universidad Industrial de Santander; Colombia.

Marco de referencia

Las investigaciones en educación matemática de los últimos años sobre desarrollo del pensamiento algebraico en los niños se han centrado en el proceso de transición entre la educación primaria y secundaria, donde el estudiante pasa de la aritmética básica al álgebra. En esta última etapa, el desarrollo del pensamiento matemático es más compleja, debido a que el concepto de variable, las nuevas representaciones de las operaciones matemáticas, como la multiplicación y/o la división, y la concatenación entre números y letras son un cambio brusco, en comparación con las formas en que se venían desarrollando estos conceptos y operaciones en los grados anteriores (Kieran, 1989). Asimismo, estos obstáculos en el aprendizaje del álgebra se agudizan en estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE), debido a la poca preparación que tiene el personal docente en los colegios colombianos, como menciona Pineda (2018). En consecuencia, y en vista de promover una educación básica secundaria que permita a los estudiantes conseguir las habilidades necesarias en álgebra, los Estándares Básicos en Competencia en Matemáticas establecen el estudio de patrones como uno de los principales promotores del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraico.

Con base en las anteriores problemáticas e ideas, concretamos la siguiente pregunta: ¿Cómo promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en estudiantes de grado séptimo mediante el uso de patrones y la tecnología?

Por otra parte, esta investigación se comprende de una serie de conceptos teóricos relevantes para contextualizar el diseño de este trabajo. El Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) es definido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017) como "una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes" (p.5) y establece los siguientes tres principios. (Figura 1)

Figura 1. Principios del DUA.

Por otra parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) estipuló en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas los procesos que se deben fomentar en la actividad matemática del estudiante.

Figura 2. Procesos a desarrollar actividad matemática del estudiante

La concepción de pensamiento algebraico será entendida bajo el sustento del MEN (2006), que es el “reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (p.66).

Dentro de este trabajo investigativo el término “patrón” toma un papel principal, donde se entenderá como “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse”. Según Zapatera (2018), los patrones se pueden separar en dos grupos, de repetición o de recurrencia. En los *patrones de repetición* los elementos se presentan de forma periódica y características como el tamaño, color o posición son elementos importantes de la regla que determina el patrón; en cambio, en los *patrones de recurrencia* los términos de la sucesión aumentan o disminuyen de forma progresiva según la regla que lo determina y cada término se expresa en función de los anteriores.

Este último tipo de patrones son los que se utilizaron en esta investigación, los cuales están divididos en dos categorías: *patrones numéricos*, son listas de números que “siguen una cierta secuencia. En ellos se alcanza a determinar de cuánto en cuánto está cambiando, pero no se hace evidente lo variable y lo invariante” (Pulgarín, 2015, p.33). Los *patrones geométricos*, son “una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales” (Arbona et al., 2017).

Según Ramírez et al. (2013) la identificación de un patrón se puede describir como la “generalización de un fenómeno”. Kaput (citado por Ramírez et al. 2013), dice que el proceso de generalizar dentro de la actividad matemática requiere del desarrollo de tres actividades básicas:

- Identificar similitudes en un conjunto de casos.
- Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó.
- Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Estos procesos mencionados por Kaput son los que sustentan el diseño de actividades propuesto y las preguntas que se formularon para acompañar los patrones presentados, además, de ser los procesos que se busca identificar en las acciones que se realicen los estudiantes.

La identificación de un patrón involucra las tres componentes del pensamiento algebraico, debido a que según Radford (2011) la indeterminancia y la analiticidad están ligadas a la regla que usa el estudiante para tratar con cualquier figura del patrón y la forma en la que expresa la regla ya sea de manera oral u escrita alude a la componente de la expresión simbólica. La forma en que el estudiante demuestra cómo interactúa con ellas permitirá clasificarlo en uno de los siguientes tipos de pensamiento propuestos por Radford (2010):

- Factual: La indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación por parte del estudiante, por lo que usa gestos, movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras, para expresarla.
- Contextual: La indeterminancia alcanza el nivel de enunciación y es explícita por parte del estudiante, los gestos y las palabras son sustituidos por frases "clave" como "la fila de arriba por 2 y al resultado le resto 1".
- Algebraico simbólico: Las frases clave utilizadas en el pensamiento anterior, son expresadas a través de símbolos alfanuméricos. Por ejemplo: n (n+1).

Metodología

La metodología de este trabajo está en concordancia con las ideas expuestas por Díaz-Barriga, et al (1990), quienes definen al diseño curricular como la organización y estructuración sistemática del currículo. La metodología de esta investigación se compone de cuatro fases: Revisión de los documentos curriculares y las orientaciones pedagógicas; Diseño de la malla curricular; Planteamiento del diseño didáctico y finalmente, Implementación y valoración del diseño didáctico.

Para el planteamiento del diseño didáctico se tuvo en cuenta la estructura de los diseños didácticos proporcionada por el proyecto de investigación 70783 "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores", financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología e Innovación de Colombia. Establece que todo diseño didáctico se divide en cuatro niveles de profundidad y las actividades están dirigidas a estudiantes con:

- Nivel de profundidad 1: mayores dificultades, a nivel físico, intelectual o psicosocial. Estos estudiantes son muy visuales y su principal medio de comunicación es la oralidad, por lo que las actividades deben utilizar recursos visuales o concretos, además, de contar con un apoyo constante del docente.
- Nivel de profundidad 2: dificultades moderadas en las categorías mencionadas en el nivel anterior. Por otra parte, este grupo de estudiantes posee mejores habilidades de

comunicación escrita y oral que el nivel anterior, sin embargo, las actividades deberán tener un enfoque similar en el uso de materiales y la atención prestada por el profesor.

- Nivel de profundidad 3: dificultades leves, por lo que se puede utilizar un lenguaje matemático más preciso y una menor guía y supervisión por parte del profesor.
- Nivel de profundidad 4: capacidades excepcionales en matemáticas, por lo que es necesario diseñar actividades que promuevan la curiosidad, la demostración y la formulación de nuevas preguntas e ideas.

Además, cada uno de esos diseños está compuesto por cuatro momentos que servirán a los estudiantes para conceptualizar el objeto matemático de estudio, presentados a continuación:

- Momento 1: Es el inicio de la clase, aquí se desarrollan las actividades que permitirán introducir el objeto de estudio. Dentro de este momento se recomienda utilizar materiales lúdicos o notas históricas para la valoración de los presaberes.
- Momento 2: Es el espacio donde se posibilita la matematización del objeto de estudio. El profesor tendrá un papel de mediador donde promoverá la construcción de saberes por parte del estudiante.
- Momento 3: Es la parte de la clase donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos hasta el momento. Las actividades están enfocadas a la ejercitación, aplicación, problematización del objeto de estudio.
- Momento 4: Es el momento para valorar el desempeño de los estudiantes a través de tareas retadoras. Se proponen actividades retadoras, dinámicas, problemas que permitan valorar los aprendizajes.

También, se cuenta con formato de caracterización, que pretende conocer si el estudiante tiene alguna discapacidad y el rendimiento escolar que ha mostrado a lo largo del periodo escolar, lo cual, permitirá determinar en qué nivel se encuentra el estudiante.

El aula virtual de GeoGebra es un recurso tecnológico que ofrece una variedad de opciones para el diseño de actividades en matemáticas, dentro esta, se encuentra el formato libro, que permite diseñar lecciones divididas en capítulos, en cada capítulo se pueden introducir videos, audios, preguntas, imágenes, entre otros.

En los primeros dos capítulos, el estudiante encontrará el siguiente applet en el que se le relata la situación problema.

Es importante resaltar que el applet le presenta la cantidad de discos que destruye Jenny de las tres primeras semanas y a partir de la semana cuatro hasta la diez, el estudiante debe hallar la cantidad, en caso de que conteste mal, el applet tiene una retroacción, primero le muestra la cantidad total de discos en color rojo y un texto con una sugerencia. Si el estudiante contesta bien saldrá un enunciado felicitándolo (Figura 3).

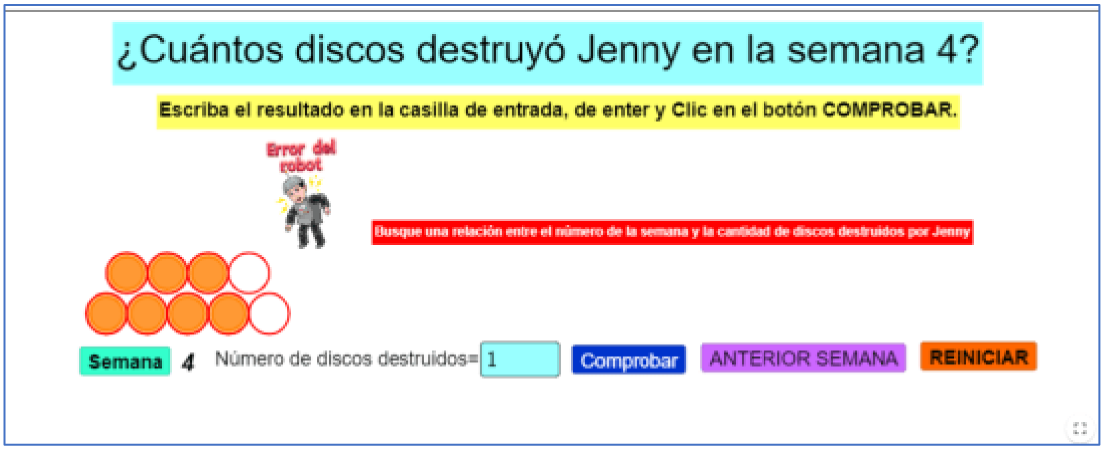


Figura 3. Patrón del tercer momento.

Luego de trabajar con el applet, el estudiante debe responder preguntas, donde se fomenta el proceso de comunicación y de razonamiento y demostración, a través de pedirle explicaciones del proceso empleado (Figura 4).

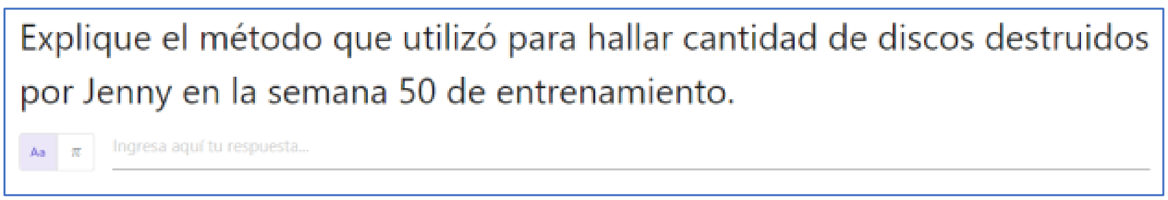


Figura 4. Preguntas que acompañan al applet.

Algunos Resultados

La implementación de los cuatro niveles de profundidad fue llevada a cabo en un colegio público del área metropolitana de Bucaramanga, con un total de cuatro estudiantes del grado séptimo, se realizaron dos sesiones de dos horas, en la primera sesión se trabajó con los cuatro estudiantes y la segunda solo con los estudiantes del segundo y tercer nivel de profundidad (ahora en adelante primer y segundo nivel). El estudiante de primer nivel tiene Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDH), hiperactividad, trastorno opositor desafiante, psicosis de origen orgánico y trastorno de ansiedad. El estudiante de segundo nivel cuenta con TDH, y los otros dos estudiantes no cuentan con ningún diagnóstico clínico y tampoco mostraron signos de tener alguna condición de discapacidad.

En la primera sesión, se esperaba que los applets presentes en cada capítulo de los libros fueran una guía para la comprensión de la actividad. En los primeros tres niveles de profundidad, el applet del primer momento proporcionó las instrucciones y ayudas necesarias para que el estudiante pudiera identificar el patrón, pero en el primer nivel, el applet no tuvo la misma eficacia, debido a que el estudiante tiene un bajo nivel de lectura, por lo que fue necesario que el investigador le ayudara con la lectura de las instrucciones.

Otro problema que se presentó con el estudiante del primer nivel fue que posee una memoria a muy corto plazo, debido a que no recordaba las cantidades de discos de la semana anterior, esto dificultó el desarrollo de la actividad. El estudiante trabajó toda la sesión, pero en ningún momento mostró acciones acordes a los procesos de generalización de Kaput.

El estudiante de segundo nivel pudo desarrollar satisfactoriamente la actividad, los applets diseñados le proveyeron una guía que le permitió identificar el patrón en cuestión. En todos los casos encontró el patrón de la siguiente forma: "semana anterior más 2" y "semana anterior más 3", acciones que dan evidencia de que él pudo captar la característica común de los términos y diseñar una regla eficaz, pero no práctica. Para la construcción de una regla más eficiente, el investigador aprovechó las múltiples representaciones del objeto matemático y junto al estudiante establecieron relaciones entre las figuras presentadas en los applets y número del término, además, se resalta el uso de la calculadora como un recurso muy importante para centrar la actividad en la comprobación de ideas, debido a que él presentaba un bajo manejo de las operaciones aritméticas básicas.

El estudiante de tercer nivel logró realizar todas las actividades de manera satisfactoria, debido a que en todas situaciones problemas logró identificar la característica común entre los términos del patrón, asimismo, diseño reglas aritméticas eficaces y prácticas, las cuales posteriormente se convirtieron en formulas generales, estas acciones son evidencia que logró derivar sus resultados más allá de casos particulares, como se evidencia en la siguiente (Figura 5).

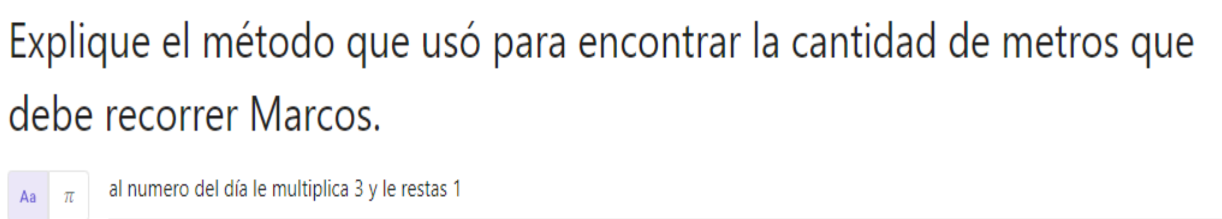


Figura 5. Respuesta del estudiante de tercer nivel.

El estudiante de cuarto nivel también realizó de manera satisfactoria todas las actividades; logró identificar la característica común entre los términos del patrón y construyó reglas eficaces para calcular cualquier término del patrón en cuestión. Respecto a los procesos de Kaput, se puede afirmar que pudo derivar en casos más amplios que los particulares. También, se destaca la forma en la que el estudiante manipuló la indeterminancia en las actividades, que nos da indicios de que el posee un pensamiento algebraico simbólico "primitivo".

Por último, es importante destacar que, en el tercer y cuarto momento de todos los niveles, había preguntas que consultaban por la semana *n* de entrenamiento. El investigador realizó con cada estudiante una discusión de manera individual sobre que significaba la *n* y como se calculaba la cantidad de discos. En general se consiguió formar de manera muy intuitiva el concepto de que *n* representa un número desconocido.

Conclusiones

Con base a los resultados y objetivos del estudio, se puede afirmar que los diseños didácticos de los tres últimos niveles cumplieron con el objetivo, que era ayudar a desarrollar el pensamiento algebraico a través del análisis de patrones geométricos y numéricos, asimismo, se logra introducir el concepto de variable a través del análisis de la semana n de entrenamiento y que n representa un número desconocido.

Por otra parte, el objetivo era proveer diseños didácticos en cuatro niveles de profundidad, que permitieran la atención y el desarrollo de ideas en matemáticas en estudiantes con NEE, se puede afirmar que, aunque se diseñe actividades con un nivel de complejidad bajo, habrá estudiantes que por sus condiciones y el proceso académico que han llevado les sea imposible desarrollar la actividad, como fue el caso del estudiante de primer nivel de esta investigación. Con base a esta situación y conociendo de antemano que en el aula de clase posiblemente habrá más estudiantes con estas mismas condiciones, se decidió crear una actividad adicional, la cual representaría como el nivel de profundidad 0, está contará con la misma estructura y se mantendrán los cuatro momentos y las preguntas planteadas en ellos.

Los applets diseñados fueron un medio importante en la comprobación de ideas e hipótesis sobre las reglas para calcular el patrón, asimismo, la calculadora ayudó a centrar la actividad matemática en la comprobación de ideas y la disminución del estrés que provocaba la realización de tantos cálculos. No obstante, los applets para los dos primeros niveles deben ser modificados para que presenten las tres semanas al tiempo y no una a la vez, debido a que los estudiantes de estos niveles presentan una memoria muy corta, de esta manera se les podría facilitar el análisis de los términos y pueden apreciar con mayor facilidad el aumento entre cada término. También, incluir colores puede ser una buena estrategia que ayude a la identificación del patrón.

Agradecimientos: La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Referencias y bibliografía

Arbona, E., Beltrán, M. J., Jaime, A. & Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, 86, 39–46.

Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Agosto 29 de 2017.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas.* Imprenta Nacional de Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad.* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Project 70783. (2021). Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores [Didactic designs for inclusion in mathematics with the mediation of technologies: training and reflection processes with teachers]. Ministerio de Ciencia y Tecnología e Innovación de Colombia.

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 – 12 años* (tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. 303-322. Berlin: Springer-Verlag.

Ramírez, M., Pineda, M., & Roa, S. (2013). Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria. *Revista Científica*, 345-348. http://funes.uniandes.edu.co/6653/

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números Revista de Didáctica de las matemáticas*, 97, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/97/Articulos_04.pdf

Diseño y Validación de Aplicación con Realidad Aumentada para la Enseñanza-Aprendizaje de los Cuerpos Geométricos

Héctor Andrés **Magdaleno** Tapia
Unidad Académica de Ciencias básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Nayarit
México
18016701@uan.edu.mx
Ana Luisa **Estrada** Esquivel
Unidad Académica de Ciencias básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Nayarit
México
ana.estrada@uan.edu.mx
Maria Inês **Ortega** Arcega
Unidad Académica de Ciencias básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Nayarit
maria.arcega@uan.edu.mx
México

Resumen

El problema que se abordó en esta investigación fue la falta de recursos didácticos con uso de la tecnología en el tema de cuerpos geométricos con el objetivo de diseñar y validar una aplicación móvil con el uso de la tecnología de Realidad Aumentada (RA) para la Enseñanza-Aprendizaje (E-A) de los cuerpos geométricos en matemáticas de primer grado de secundaria. Se presentó un estudio mixto, dado que se recolectaron datos cuantitativos y cualitativos. Para la validación se utilizó el coeficiente de cronbach y la validación por expertos, encontrado que la aplicación es viable para crear situaciones didácticas en el tema de los cuerpos

Palabras clave: Tecnología educativa, enseñanza, aprendizaje, geometría, hibrida, realidad aumentada, diseño, validación, educación secundaria

Introducción

El problema de investigación es la falta de recursos didácticos con uso de la tecnología en el tema de cuerpos geométricos, tema que se aborda de primer grado de secundaria, en el eje temático de formas, espacio y medida, de acuerdo con el plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (2017).

Gómez (2021) refiere

> Durante el proceso de enseñanza pueden aparecer dificultades en el logro de algunas competencias en los educandos, esto debido a distintos factores, no ellos la falta de metodología y didácticas motivadoras que generen aprendizajes activos y útiles para la vida. Es el caso de la asignatura de geometría, donde los estudiantes deben encontrar aplicabilidad a los conceptos aprendidos y esto solo se logra si el docente encuentra las herramientas idóneas para ello (p.17).

En encuesta a docentes de una secundaria de México refieren que debido al corto tiempo disponibles deben de avanzar en los temas propuestos a impartirse en el ciclo escolar, generalmente lo abordan de una manera tradicional sin el uso de la tecnología, por lo cual el criterio de la construcción de un cuerpo es difícil de apreciar ya que se inicia haciendo representaciones en un plano de dos dimensione cuando un cuerpo geométrico se necesita hacer la representación en un plano de tres dimensiones, ya que te permite visualizar los cuerpos geométricos de una manera adecuada para el análisis y comprensión de ellos.

A nivel nacional se genera una controversia sobre las estrategias que se siguen utilizando en la enseñanza de la geometría, ya que se notan las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de adquirir el conocimiento. Lo anterior indica la necesidad de cambiar la metodología en la cual involucre la Realidad aumentada, para generar una enseñanza con ambiente de Realidad Aumentada, donde los estudiantes construyan sus propios conocimientos (Fabres, 2016)

Para Zatarain, *et al* (2018) argumenta

> La enseñanza de las Matemáticas, particularmente el área de Geometría causa dificultades a los estudiantes debido al esfuerzo de abstracción que deben realizar para imaginar cuerpos en el espacio tridimensional cuando las explicaciones se realizan en pizarrón, un espacio bidimensional. La posibilidad que la tecnología de RA brinda de poder interactuar en tiempo real con elementos digitales tridimensionales, brinda potencialmente dos posibilidades (p.205).

Objetivo general

Diseñar y validar una aplicación móvil con el uso de la tecnología de Realidad Aumentada (RA) para la Enseñanza-Aprendizaje (E-A) de los cuerpos geométricos en matemáticas de primer grado de secundaria.

Objetivo específicos

Diseñar una aplicación móvil con el uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos en primer grado de secundaria.

Validar una aplicación móvil con el uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos en primer grado de secundaria.

Realidad aumentada en la enseñanza de la geometría

Gómez (2021) en España, implementó durante la pandemia el uso de la Realidad Aumentada (RA) como un insumo para la enseñanza a distancia de los conceptos de geometría en el grado 8º de básica, en México segundo de secundaria. La autora diseñó una secuencia didáctica con el uso de RA, para fortalecer la didáctica de la geometría, particularmente en los conceptos: radio, diámetro, área y volumen; con el propósito de diagnosticar el desempeño de los estudiantes de grado 8º en sus competencias de geometría relacionadas con el aprendizaje del volumen, así como evaluar el funcionamiento de la estrategia en la práctica, para ello utilizó material de RA con la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Concluye que el uso de la RA fue útil en la enseñanza a distancia y permitió conocer su utilidad para el regreso al aula presencial.

Carrillo-Villalobos y Cortes (2016) en Chile, partieron de la necesidad de conocer si la Realidad Virtual (RV) es mejor apoyo para la enseñanza que la Realidad Aumentada (RA). Con la intención de analizar la efectividad de secuencias de aprendizaje con base en los programas educativos para cuatros grupos de primaria, con un promedio de 28 alumnos por grupo y un rango de edad de 9 a 10 años. Utilizando la metodología de la tecno-competencia pudieron diseñar una secuencia con el apoyo del instrumento Oculus Rift, el cual consiste en visualizar los cuerpos geométricos y sus componentes. Concluyeron que la RV facilita la enseñanza pero cuenta con muchas limitaciones ya que el equipo no es tan accesible para todos y por el lado de la RA solo se necesita un Smartphone.

Chavarro y Penagos (2021) en España, analizaron cómo influye la estrategia didáctica apoyada por Realidad Aumentada (RA) en el mejoramiento de las competencias matemáticas mediante el desarrollo del pensamiento espacial. El propósito del estudio fue mejorar las competencias matemáticas mediante el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos a través de una estrategia didáctica apoyada en RA; usaron la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) con un ambiente de RA con lo que generaron una propuesta pedagógica, dicha propuesta se integró por 5 unidades implementadas durante 5 semanas. Entre los resultados reportaron que es favorable continuar usando la propuesta en los siguientes años.

Moreno, Leiva y López (2016) en España, con el propósito de identificar las competencias y actitudes hacia la Realidad Aumentada (RA) por los estudiantes universitarios del máster en la formación del profesorado en educación, así como las ventajas que dicha tecnología podía tener en el ámbito educativo en los diferentes niveles y materias; la intención fue desarrollar la conciencia del futuro profesorado de secundaria respecto a la aplicabilidad de la RA como recurso didáctico para favorecer los procesos de enseñanza y que les permitió conocer las posibilidades de la RA en contextos formativos. Los autores sustentaron su trabajo por la teoría del conocimiento constructivista, mediante diferentes actividades con el uso del Software Survey y la aplicación de encuestas Pre-test y Pos-test. Determinaron que al utilizar aplicaciones relacionadas con las tecnologías emergentes constituyen una práctica adecuada y útil para que los estudiantes puedan desempeñar un papel activo en su proceso formativo.

Gaitán, Moreno y Yopasá (2021) en Colombia, con el propósito de buscar mediante aplicaciones de modelado 3D y Realidad Aumentada (RA) se promuevan nuevos desarrollos técnicos que potencien el conocimiento didáctico de la geometría, generando aprendizajes significativos frente al desarrollo del pensamiento geométrico; para diseñar una estrategia didáctica que constó de una serie de pasos detallados, en los cuales, teniendo en cuenta la población objetivo, se generaron diversas actividades, instrucciones y procesos que apoyaron en el desarrollo de modelos en tres dimensiones, buscando generar nuevas perspectivas frente al reconocimiento de las características de los sólidos. Además, para validar, se utilizó el modelo de pensamiento desarrollado por Van Hiele. Para, posteriormente, generar aportes frente al desarrollo tradicional del aprendizaje de sólidos geométricos y brindar nuevas alternativas de aprovechamiento de recursos tecnológicos en el aula.

Zatarain, Barrón, Ibáñez y Uriarte (2018) en México, desde la visión que la Realidad Aumentada (RA) facilita el aprendizaje de los cuerpos geométricos y aumenta la motivación del aprendizaje. Realizaron un estudio con el propósito de contribuir con la enseñanza de cuerpos y planos geométricos para facilitar el aprendizaje con el uso de RA, basándose en los postulados del constructivismo respaldado por Lev Vygotsky y utilizando material didáctico para la enseñanza elaboraron la herramienta de RA y computación afectiva, que mostraron a docentes de secundaria para la enseñanza de cuerpo y planos geométricos.

Metodología

En este documento se presenta una investigación mixta, dado que se recolectaron datos cuantitativos y cualitativos; los datos cualitativos se recolectaron a partir de los expertos acerca de la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza de los cuerpos geométricos y los datos cuantitativos se recolectaron en la prueba piloto para validar el instrumento por el alfa de cronbach.

Los participantes de la investigación fueron 10 expertos para recabar la opinión sobre la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos, considerando como experto a aquel cuya formación estaba relacionada con la educación matemática y tenía cinco años de experiencia impartiendo el tema de los cuerpos geométricos, requisitos importantes, dado que se utilizó el método Delphi, referido a la validación por expertos

Instrumentos

Los instrumentos elaborados para esta investigación fueron tres: la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos, cuestionario con escala tipo Likert y una entrevista no estructurada.

Diseño de la aplicación. Se diseñó una aplicación móvil con el uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos en primer grado de secundaria. Para el diseñó de la aplicación móvil con realidad aumentada fue desarrollada a partir del software Unity para compilar la información de la realidad aumentada por Vuforia y Blender para diseñar los modelos que se usaron en la aplicación. Para el diseño se consideró los Colores, Imagen y Contenido y se construyeron 14 marcadores de distintos cuerpos geométricos: cubo, prisma rectangular, pentagonal, hexagonal, octagonal y pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, octagonal, cilindro, cono y esfera. Esta aplicación está desarrollada para ser utilizada a partir del sistema operativo android 7.1. Considerando para el futuro ser desarrollada para el sistema operativo iOS.En la figura 1 se presentan 3 modelos y la visualización a través de la aplicación con realidad aumentada.

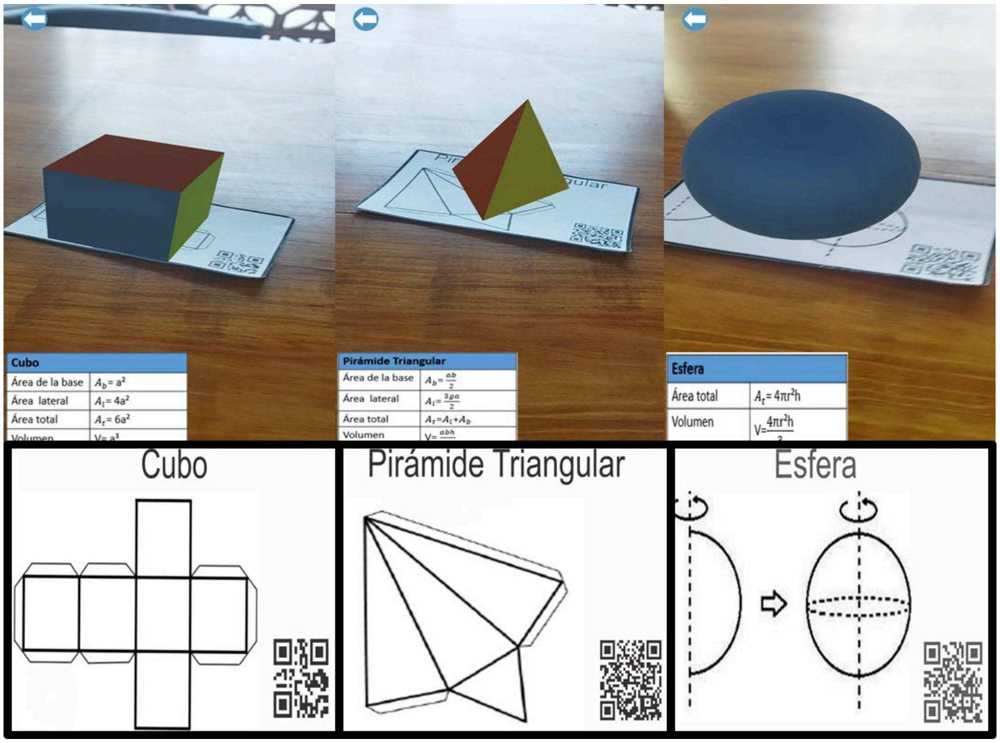


Figura 1. Marcadores y figura generada con la aplicación

Diseño de cuestionario con escala tipo likert. Se diseñó un cuestionario con escala tipo Likert para evaluar la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos, se propusieron cinco indicadores: Colores, Imagen, Motivación, Interfaz y Contenido. Las opciones de respuesta de las preguntas fueron: nada, muy poco, poco, bastante y demasiado; el cual fue validado por alfa de cronbach.

Entrevista no estructurada. Se realizó una entrevista no estructurada a los 10 expertos para presentar la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos.

Resultados y Conclusiones

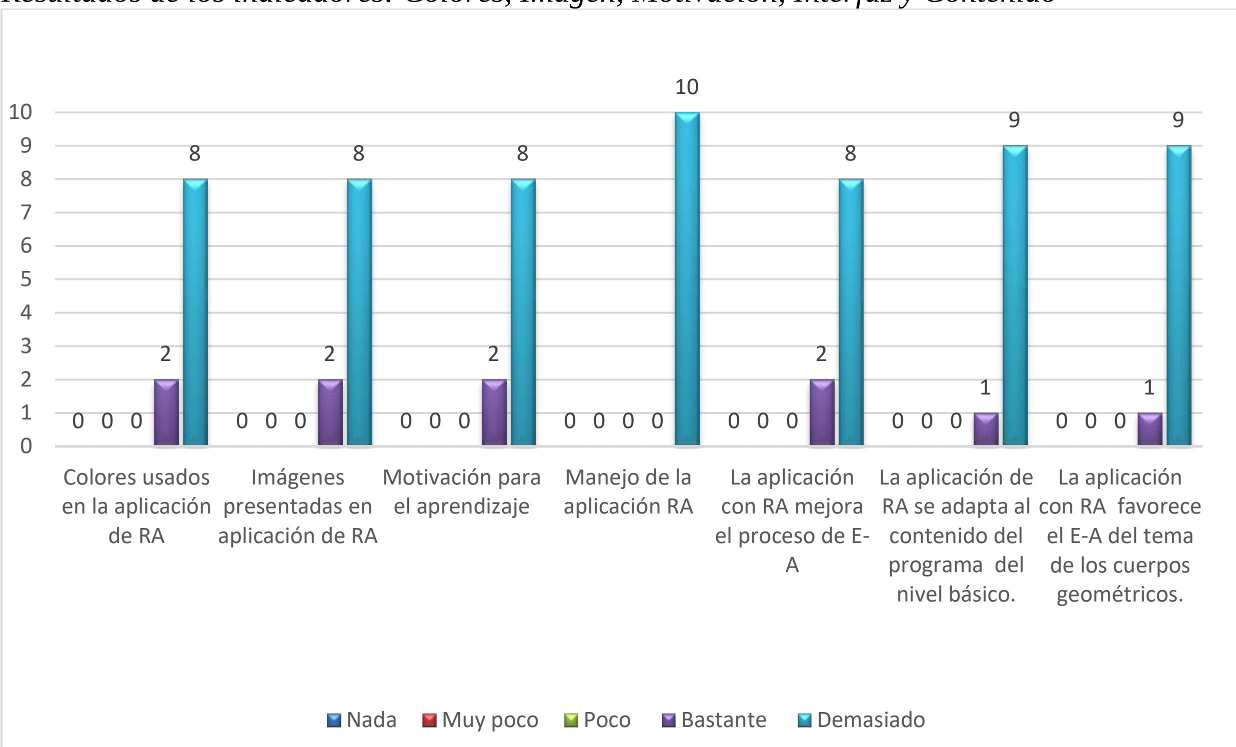
En este apartado se presentan los resultados en base a los objetivos planteados. Referidos al diseño y validación de una aplicación móvil con el uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos en primer grado de secundaria. Para la validación de la aplicación móvil se utilizó un cuestionario con escala tipo Likert para evaluar la aplicación, se evaluaron cinco indicadores: Colores, Imagen, Motivación, Interfaz y Contenido. Las opciones de respuesta de las preguntas fueron: nada, muy poco, poco, bastante y demasiado; el cual fue validado por alfa de cronbach,

Para validar el cuestionario utilizado para evaluar la "aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos", se utilizó el alfa cronbach para su validación, de acuerdo Suarez, *et al* (2022), alfa cronbach indica la consistencia interna de un instrumento al correlacionar las covarianzas de los ítems, mencionan cuando el rango de confiabilidad se encuentra entre el 0.61 a 0.80 contará con una confiabilidad alta. El instrumento obtuvo un coeficiente de confiabilidad de 0.76, por lo anterior significa que los datos que se recolectaron con este instrumento son confiables.

Para validar la aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos se realizó una entrevista no estructurada a los 10 expertos para presentar la "aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos y posteriormente se les solicitó completar el cuestionario previamente validado. Se encontró que los colores e imágenes utilizados motivan demasiado el aprendizaje por parte de los estudiantes; así mismo con el menú y la manera de manejar, mencionan que la interfaz será mucho más sencilla de utilizar para todos los estudiantes y respecto al contenido señalan que tiene mucha relación en los planes y programas de estudio y que su uso favorecerá el aprendizaje de los cuerpos geométricos. En la gráfica 1 se presenta gráficamente los resultados de la encuesta.

Grafica 1

Resultados de los indicadores: Colores, Imagen, Motivación, Interfaz y Contenido



Fuente: elaboración propia a partir de los datos.

Con la presenta investigación se concluye que la "aplicación de realidad aumentada para la enseñanza-aprendizaje del tema de cuerpos geométricos", es viable para crear situaciones didácticas para el tema de los cuerpos geométricos, ya que cuenta con un menú fácil de utilizar y basta con contar con un equipo móvil con un sistema operativo superior al android 7.1.

Referencias y bibliografía

Carrillo-Villalobos, J.L. y Cortés, J.A. (2016). Secuencias didácticas con realidad virtual: En el área de geometría en educación básica. *F@ro. Revista teórica del Departamento de Ciencias de la Comunicación.* 1 (23). 279-304. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5612412.pdf

Chavarro, L. y Penagos, L. (2021). E*strategia Didáctica para Mejorar las Competencias Matemáticas Mediante el Desarrollo del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos Apoyada por Realidad Aumentada (GeoGebra AR) en Grado* Décimo[tesis de maestría]. Biblioteca de la universidad de Santander. https://repositorio.udes.edu.co/handle/001/6657

Fabres, F.R.. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *42*(1), 87-105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-7052016000100006

Gaitán, J.C., Moreno, C.D. y Yopasá, M. (2021). Modelado 3D y realidad aumentada para la enseñanza de los sólidos geométricos [tesis de maestría]. Universidad La Gran Colombia. Recuperado de: http://hdl.handle.net/11396/6946.

Gómez, D.A. (2021). Propuesta de Implementación Medida por la Realidad Aumentada Para la Enseñanza de Geometría en los Estudiantes de Grado 8º de la Institución Educativa Leningrado [tesis de maestría]. Biblioteca de la universidad de Santander. https://repositorio.udes.edu.co/handle/001/6935

Moreno, N.M., Leiva, J.J. y López, E. (2016). Escenarios de aprendizaje basados en TIC. En Rosabel Roig-Vila (Ed.), Tecnología, innovación e investigación en los procesos de enseñanza-aprendizaje. (1ª ed;pp. 2733-2763). Ediciones Octaedro. https://rua.ua.es/dspace/handle/10045/61787

Secretaría de Educación Pública (2017). Aprendizaje clave para la educación integral. Plan y programa de estudio para la educación básica. SEP.

Suárez I., Varguillas C. y Roncero C. (2022). Técnicas e Instrumentos de Investigación. Diseño y Validación desde la Perspectiva Cuantitativa. Doi: https://doi.org/10.46498/upelipb.lib.0013

Zatarain, R., Barrón, M.L., Ibáñez, M.B. y Uriarte, A. (2018). Cuerpos y planos geométricos usando realidad aumentada y computación afectiva. *Research in Computing Science.147* (8). 203-213. https://www.rcs.cic.ipn.mx/2018_147_8/

Dispositivos móviles en el aula de Estadística

María Cristina **Kanobel**
Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Argentina
mckanobel@gmail.com

Resumen

El taller se desarrolla en torno a una propuesta de inclusión de aplicaciones para dispositivos móviles en el aula de Probabilidad y Estadística del nivel universitario a partir de la experiencia desarrollada desde 2018 con estudiantes de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda. La mediación de estos recursos permite reducir los tiempos que el estudiantado dedica a la algoritmia, en favor de espacios de reflexión, discusión y análisis. Además, estas herramientas brindan innumerables posibilidades para generar actividades que propicien la motivación del estudiantado y la innovación en la enseñanza. En el taller se brindarán algunos ejemplos para trabajar con algunas aplicaciones gratuitas como Probability distributions.

Palabras clave: Educación Matemática; Estadística; dispositivos móviles; resolución de problemas; universidad; Probabilidad

Introducción

En la actualidad, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) permiten otras formas de enseñar y de aprender (Fernández Lamarra et al., 2015). En ese sentido, la inclusión de TIC en las aulas puede convertirse en un apoyo o complemento para la enseñanza (Hernández, 2017). En el área Matemática, en particular, posibilita acortar el tiempo dedicado a la algoritmia fomentando espacios para la reflexión, la discusión y el análisis para la resolución de problemas. Las apps para dispositivos móviles en las prácticas pedagógicas pueden brindar innumerables posibilidades para la motivación del estudiantado y la innovación en la enseñanza.

De esta forma se busca que el alumnado desarrolle competencias digitales que les permita utilizar de forma eficiente recursos y herramientas para propiciar el pensamiento reflexivo, la creatividad y la innovación. Así, se espera también que mejoren la flexibilidad y la capacidad de reacción y anticipación.

La adquisición de estas competencias posibilita hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente, así como evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas, a medida que van apareciendo, en función de su utilidad para resolver tareas o cumplir objetivos específicos. Por otra parte, el desarrollo de competencias digitales implica la participación y el trabajo colaborativo, promueve la motivación y la curiosidad por el aprendizaje y la mejora en el uso de las tecnologías.

En este trabajo se proponen ejemplos sobre el uso de aplicaciones móviles para la enseñanza de distintos contenidos de la asignatura Probabilidad y Estadística a partir de algunas actividades desarrolladas en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda (Argentina) en dos modalidades de cursado: presencial durante 2018 y 2019 y remota, en 2020 y 2021.

Marco teórico

Vaill (1996) enfatiza que “el aprendizaje debe constituir una forma de ser, un conjunto permanente de actitudes y acciones que los individuos y grupos emplean para tratar de mantenerse al corriente de eventos sorpresivos, novedosos, caóticos, inevitables, recurrentes” (p.42). Por otro lado, según explican Tobon et al. (2010), el modelo de competencias posibilita otras maneras de mediar el aprendizaje del estudiantado, para que logre identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas dentro de un contexto. Así, argumentan Tobón, Pimienta Prieto et al. (2010) que este modelo guarda relación con el constructivismo.

Además, apoya el acercamiento y entrelazamiento de las instituciones educativas con la sociedad y sus dinámicas de cambio, con el fin de que estén en condiciones de contribuir tanto al desarrollo social y económico como al equilibrio ambiental y ecológico.

En este sentido, el trabajo por competencias exige que se produzcan cambios en la manera de enseñar y aprender (Zabala y Arnau, 2014) esto incluye la mediación genuina de TIC (Maggio, 2012) en las prácticas pedagógicas, ya sea presenciales o remotas, que permite que el alumnado adquiera competencias haciendo uso de la tecnología (Maggio, 2012).

Por otro lado, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2013) afirma que el aprovechamiento del potencial de las tecnologías móviles en el nivel universitario favorece el desarrollo del pensamiento crítico alcanzando madurez en el proceso de consumo de la información, a la cual se puede acceder muy fácilmente en la actualidad. En particular, sobre la competencia digital, se hace necesario generar cambios que incluyen, entre ellos, el uso de dispositivos móviles en las actividades del aula. Así, el alumnado, al resolver actividades y problemas, adquiere el dominio de diversos recursos tecnológicos y desarrolla nuevas habilidades (Zabala y Arnaud, 2014).

Según afirma Duval (2004), aprender matemática propicia la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Estas actividades requieren del uso de distintos registros de representación y de expresión. Dichos registros potencian la comprensión del objeto matemático que es vital para la actividad cognitiva del pensamiento debido a que la alternancia entre ellos exige conocimiento, tratamiento y conversión. Bajo este enfoque, Gruszycki et al. (2014) destacan además que, actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas.

En el área de Probabilidad y Estadística, el uso de algunas herramientas digitales para mediar las prácticas pedagógicas permite trabajar con diversos registros de representación semiótica: gráfico, algebraico o analítico y tabular. Aun así, el solo manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros es insuficiente para obtener una comprensión integral: es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

Particularmente, algunas aplicaciones como Excel, Geogebra, iStat y Probability Distributions, permiten el trabajo simultáneo con distintos registros de representación para facilitar la comprensión de los conceptos. Incluso, para que estas herramientas representen un verdadero aporte en la formación de quienes serán profesionales de la ingeniería en un futuro, se hace necesario implementar modificaciones en la metodología de enseñanza a partir de una reflexión y planificación previa del diseño didáctico.

Cabe destacar que, si bien Excel no es un software propiamente estadístico, cuenta con funciones y módulos estadísticos de uso más sencillo que los programas diseñados para el tratamiento de datos. Además, posibilita realizar simulaciones sencillas de experimentos aleatorios (Gruzynski et al., 2015). De este modo, es posible abordar una introducción al análisis exploratorio de datos y a la modelización estadística.

Metodología

Se trabajará con las personas participantes a modo de aula taller a partir de ejemplos para resolver con la mediación de aplicaciones para dispositivos móviles. A continuación, se resumen algunas de las actividades que se desarrollarán y discutirán:

Ejemplo 1: Estadística con Excel

Si bien no se trata de un programa estadístico, es útil para una primera aproximación al procesamiento de grandes cantidades de datos, el cálculo rápido de distintas medidas de análisis y la visualización y comparación del comportamiento de distintas muestras. También, para el estudio de ciertas pruebas de hipótesis que son relevantes para la formación del alumnado.

Aunque este software no es de acceso libre, puede resultar un recurso interesante para trabajar en el aula por ser utilizado por el estudiantado en otros ámbitos no académicos.

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra un análisis realizado sobre una muestra de 11961 datos en la que se desea poner a prueba si existe o no una relación entre competitividad y género. Por la magnitud de los datos, este estudio requiere forzosamente el tratamiento con alguna aplicación tecnológica.

Ho:	No existe relación causal entre la competitividad y el género (la competitividad no depende del género).
H1:	Existe relación causal entre la competitividad y el género.

Nivel de significancia	0,01
Grados de libertad	2

Referencias	
Género = 1	Mujer
Género = 2	Hombre

Frecuencias observadas

Tercil	Género					
	Mujer		Hombre		Total	
	fo	%	fo	%	fo	%
1	2378,00	38%	1609,00	28%	3987,00	33,33%
2	2132,00	34%	1855,00	32%	3987,00	33,33%
3	1715,00	28%	2272,00	40%	3987,00	33,33%
Total	6225	100%	5736	100%	11961	100,00%
Porcentajes	52,04%		47,96%			

Frecuencias esperadas

Tercil	Género					
	Mujer		Hombre		Total	
	fe	%	fe	%	fe	%
1	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
2	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
3	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
Total	6225,00	100,00%	5736,00	100,00%	11961	100,00%

Cálculo fórmula

	fo	fe	(fo-fe)^2/fe	
Tercil 1 Mujer	2378,00	2075,00	44,2453012	
Tercil 2 Mujer	2132,00	2075,00	1,565783133	
Tercil 3 Mujer	1715,00	2075,00	62,45783133	
Tercil 1 Hombre	1609,00	1912,00	48,01725941	
Tercil 2 Hombre	1855,00	1912,00	1,699267782	
Tercil 3 Hombre	2272,00	1912,00	67,78242678	
Totales	11961,00	11961,00	225,76787	chi cuadrado

Chi cuadrado teórico	9,21034037

*Figura 1.*Actividad sobre Test de hipótesis con datos procesados en EXCEL.

Ejemplo 2: InfoStat en las computadoras o iStat para dispositivos móviles

Este programa permite analizar los resultados de las medidas descriptivas que devuelve el programa al ingresar los datos de la muestra. Además es posible realizar un análisis a partir de la lectura e interpretación de la información de salida de los distintos registros obtenidos de un gran conjunto de datos.

En la figura 2 se observa un registro gráfico de salida obtenido con Infostat en una actividad realizada a partir de un conjunto de 1607 datos para analizar el comportamiento de los perímetros y pesos de cierto tipo de ajos cuyo relevamiento fue realizado en 2016 y 2017. En este caso, se trabajó con dos boxplot para comparar el comportamiento de la variable peso en los años del estudio.

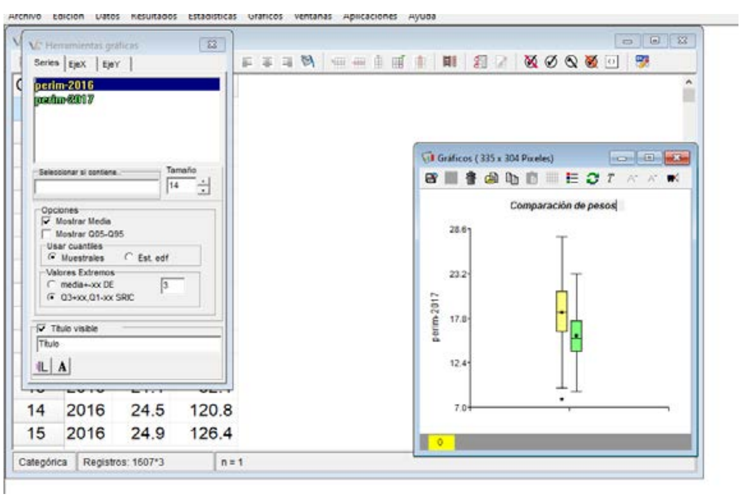


Figura 2. Salida de Infostat para una actividad sobre visualización de datos

La figura 3 resume información de las dos variables observadas, aprovechando la posibilidad de particionar y de clasificar los datos según los años del relevamiento.

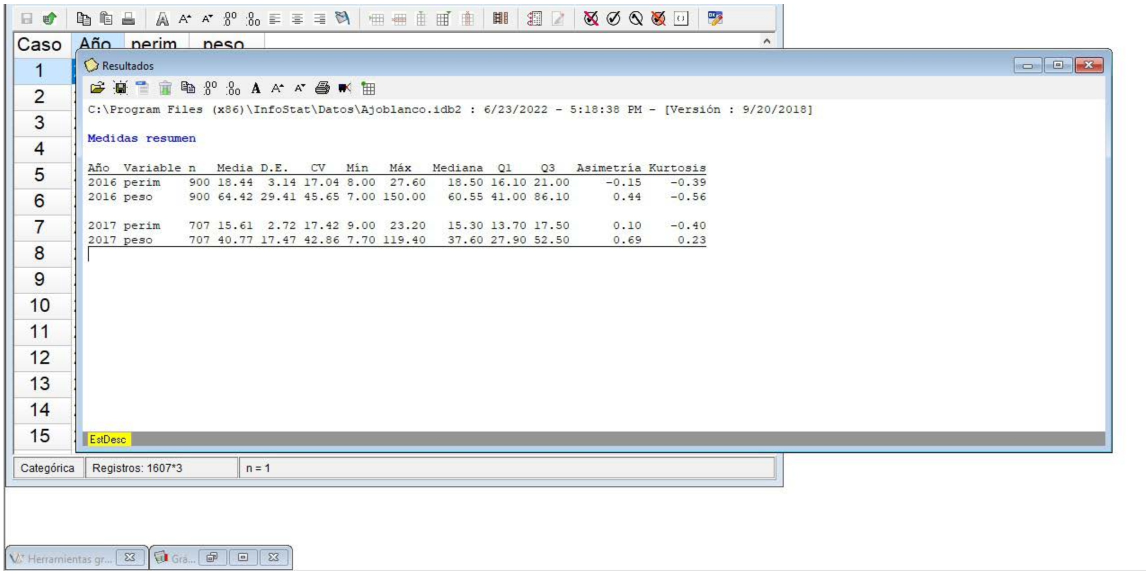


Figura 3. Salida de Infostat para una actividad sobre comparación de datos de dos variables

El trabajo con los distintos registros permite hacer un primer estudio descriptivo y un posterior análisis exploratorio del conjunto de datos que están dados dentro de un contexto y se complementa luego al momento de la enseñanza de estadística inferencial.

Para la construcción del concepto de variable aleatoria se trabaja con diversos modelos probabilísticos especiales como son las distribuciones discretas binomial, hipergeométrica, y Poisson, entre otras, y las distribuciones uniformes, exponencial negativa y normal entre los modelos continuos. Para la resolución de actividades se sugirió al alumnado el uso de una aplicación gratuita para dispositivos móviles iOS y Android, PROBABILITY DISTRIBUTIONS (PD) desarrollada por la Universidad de Iowa en 2018. Esta aplicación permite calcular probabilidades y momentos de distintas variables aleatorias al seleccionar el modelo e ingresar sus parámetros. Además, PD calcula probabilidades acumuladas y muestra un registro gráfico de la respuesta resaltado sobre la imagen de la distribución de probabilidades. El uso de PD posibilita reducir tiempos de cálculo y, a la vez, pensar actividades que habiliten espacios para la discusión, el análisis, la estimación de resultados y la interpretación de las respuestas posibles a las situaciones problemáticas propuestas.

PD es una aplicación que permite no sólo realizar cálculos de probabilidades, sino también conocer el valor de la variable al ingresar una probabilidad o encontrar las medidas de posición al incorporar los parámetros de la distribución, tal como se muestra en la figura 4:

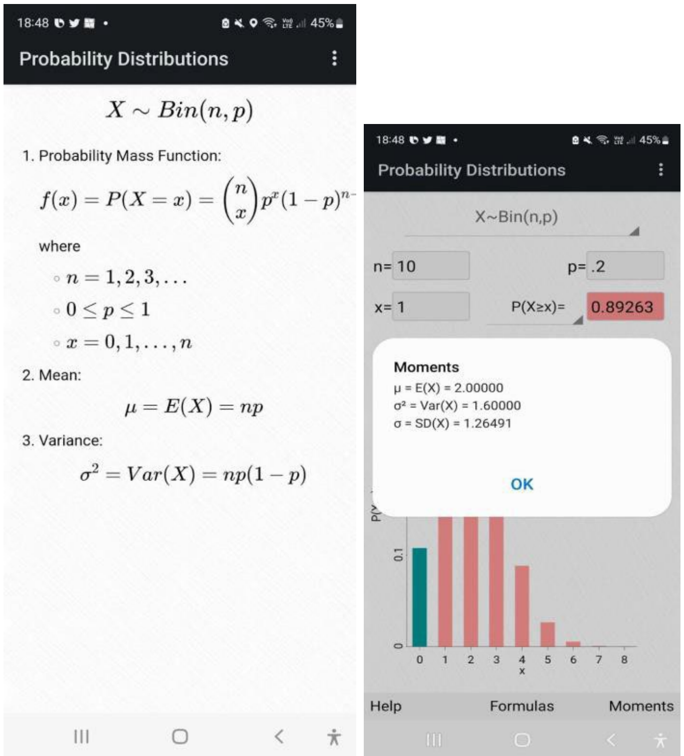


Figura 4. Fórmulas y Momentos en la app Probability distributions.

También, PD posibilita la resolución de problemas por iteración de parámetros. Así, permite abordar situaciones complejas como la siguiente:

> En una localidad se sabe que el 5% de los habitantes tienen sangre 0 negativo. ¿De qué tamaño se debería tomar una muestra para encontrar al menos dos personas con ese tipo de sangre con probabilidad mayor al 90%?

En este ejercicio la variable X = "cantidad de personas que tienen sangre 0 negativo entre n elegidas al azar" tiene una distribución binomial de parámetro p = 0,05 y n desconocido. Por lo cual, para encontrar el n que satisfaga que la P(X≥2) sea superior a 0,90, sería necesario resolver la inecuación que está a continuación (1):

$$1 - 0{,}95^n - n\,0{,}05\,.\,0{,}95^{n-1} > 0{,}90 \qquad (1)$$

PD permite fácilmente variar el valor de este parámetro hasta alcanzar la solución buscada. Así, cada estudiante puede, a partir de una herramienta accesible, encontrar los valores de n que cumplen la condición planteada.

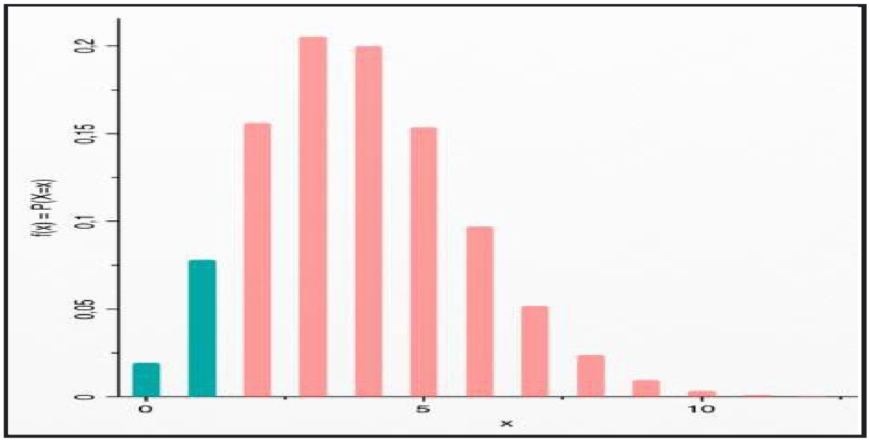


Figura 4. Estimación del tamaño de una muestra

Esta aplicación se utiliza también para abordar el contraste de hipótesis cuando la información está resumida. De esta manera se puede trabajar tanto con el concepto de p-value como con el valor crítico y el nivel de significación de una prueba.

Los ejemplos anteriores son algunas de las actividades que forman parte de un diseño pedagógico que busca promover "un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante y definir un enfoque basado en competencias y descriptores de conocimiento" tal como refiere el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de Argentina (CONFEDI, 2018).

La experiencia sobre la inclusión de aplicaciones de sencillo uso como Probability Distribution indica que posibilita un mayor feedback entre docentes y estudiantes y entre pares. A la vez, se hace necesario replantear el tipo de actividades y tareas académicas propuestas para desarrollar el pensamiento crítico y promover otras habilidades asociadas.

Conclusiones

Si bien el estudiantado se relaciona cotidianamente con distintas aplicaciones y tecnologías, no suelen utilizarlas con un fin pedagógico. Al implementarlas como parte de la metodología de enseñanza permite ampliar las instancias de análisis y discusión de resultados traspasando la fase puramente algebraica y operacional dedicando ese tiempo a la interpretación de la información en su contexto.

La inclusión de PD requiere pensar actividades áulicas que promuevan en el estudiantado el desarrollo del pensamiento crítico y diversas habilidades que posibiliten espacios de retroalimentación entre pares. La simultaneidad de registros semióticos que presentan las apps posibilita que cada estudiante relacione la distribución con su representación gráfica y los significados de parámetros asociados. También, que reconozca posibles errores al ingresar datos, que compare distribuciones y que pueda realizar estimaciones al variar parámetros.

Así, las actividades deben plantearse teniendo en cuenta los cambios que producen las nuevas tecnologías: a partir de la actualización continua y de la inclusión genuina de nuevas herramientas, incorporamos el uso de aplicaciones móviles para mejorar la enseñanza.

Por otro lado, cabe destacar que el uso de este tipo de actividades con aplicaciones debe enfocarse en reducir los tiempos de cálculo dirigiendo los esfuerzos al análisis e interpretación de resultados para una toma de decisiones justificada sin dejar de lado el contexto de la situación, ya que es tan relevante en la toma de decisiones como el problema que provocó el inicio del estudio.

Consideramos que este tipo de tareas académicas promueven la motivación del alumnado y el desarrollo de competencias, no solamente relacionadas con el área disciplinar sino también con otras habilidades blandas necesarias para desenvolverse en el futuro campo profesional. Además, facilitan la interacción entre estudiantes, generando un ambiente de trabajo más grato y colaborativo.

Referencias

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (2018). Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina *Libro Rojo de CONFEDI*. Universidad FASTA Ediciones.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Faulin, M.; Juan, A. (2005). Simulación de Monte Carlo con Excel, *MECD Técnica Administrativa*, 5 (1) http://www.cyta.com.ar

Fernández Lamarra, N. (comp.) Aiello, M.; Álvarez, M.; Fernández, L.; García, P.; Grandoli, M. E.; Ickowicz, M.; Paoloni, P.; Perez Centeno, C. (2015). *La innovación en las Universidades Nacionales. Aspectos endógenos que inciden en su surgimiento y desarrollo.* Universidad Nacional de Tres de Febrero

Gruszycki, A.; Oteiza, L.; Maras, P.; Gruszycki, L.; Ballés, H. (2014). Geogebra y los sistemas de representación semióticos. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 2169-2176. http://funes.uniandes.edu.co/6186/

Hernández, R.M. (2017*). Impacto de las TIC en la educación: Retos y Perspectivas. Propósitos y Representaciones. 5(1), 325 – 347*. http://dx.doi.org/10.20511/pyr2017.v5n1.149

Maggio, M. (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Ediciones Paidós.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013). *Directrices para las políticas de aprendizaje móvil.* UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000219662

Tobón, M.; Arbeláez, M.; Falcón, M. y Bedoya, R. (2010). *La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje*. Universidad Tecnológica de Pereira.

Tobón, S.; Pimenta Prieto, J. y García Fraile, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. Pearson.

Vaill, P. B. (1996). *Learning as a Way of Being*. Jossey-Blass Inc.

Zabala, A.; Arnau, L. (2014). *Métodos para la enseñanza de las competencias*. Graó.

Docente realista-semiótico-tecnológico: Cuatro grandes tecnologías para el aula de Matemática

Zenón Eulogio **Morales** Martínez
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, UPC.
Perú
pcmazmor@upc.edu.pe

Resumen

El taller tiene como objetivo presentar aportes de la Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR y de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, TRRS y la integración de la Tecnología a través del TPACK (Technological Pedagogical and Content Knowledge). Participan docentes de Educación Escolar y educación superior. Aplicaremos las cuatro herramientas tecnológicas más utilizadas: GeoGebra, Graspable, Desmos y Mathigon que permiten facilitar los aprendizajes de Matemáticas. Como estrategias metodológicas se empleará una Guía de Laboratorio de Recursos Tecnológicos Matemáticos, Trabajo directo de las tecnologías en su propio ordenador y Retroalimentación oportuna y continua. Esperamos que los participantes logren experiencias innovadoras de enseñanza de matemáticas con un formato realista-semiótico-tecnológico. Tenemos en cuenta que, si hasta Dios empleó la nueva tecnología, no podemos los maestros de matemática dejar de emplear la tecnología para que sus alumnos hagan cosas nuevas, de nuevas maneras a través de la tecnología. (D´Ambrosio, 2012)

Palabras clave: Educación Matemática Realista; Registros semióticos; Integración de la tecnología; Recursos tecnológicos matemáticos.

Justificación del Taller

En año 2011, Raymond Duval ofrece su conferencia “Ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas” en el XIII-CIAEM, Conferencia del Comité Interamericano de Educación Matemática en la Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil. El enfoque cognitivo de Duval parte de que los problemas de comprensión en matemáticas no tienen que ver con los diversos contenidos matemáticos, sino con la naturaleza cognitiva del conocimiento y la actividad matemática. Esta reflexión se enfoca en dos puntos:

(1) No es posible acceder de forma empírica a los objetos matemáticos como ocurre con los objetos físicos, sólo es posible utilizando representaciones semióticas.
(2) La actividad matemática consiste en realizar transformaciones de unas representaciones semióticas (que permitan resolver un problema) en otras representaciones semióticas.

Estos dos aportes de Duval serán considerados en las actividades que desarrollaremos en nuestro taller logrando la manipulación de registros semióticos a través de la tecnología y la realización de transformaciones semióticas como los tratamientos tecnológicos y las conversiones tecnológicas, para facilitar los aprendizajes de las matemáticas. El logro será la formación de maestros semióticos tecnológicos.

En año 2020, Paul Drijvers ofrece su conferencia "una visión realista de la educación matemática realista" en el X-CIEM, Congreso Internacional de Educación Matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. El enfoque realista de esta teoría ha sido divulgado en diversos países del mundo. Heuvel-Panhuizen (2019) en su obra nos describe sobre los alcances de la EMR en distintos países del mundo: En Inglaterra, durante los últimos diez años se han realizado una serie de proyectos en el aula basados en la EMR en más de 40 escuelas, con 80 profesores y 2000 alumnos. En Indonesia, se establecieron proyectos para una adaptación indonesia del enfoque RME para la enseñanza de las matemáticas. En Argentina, la implementación de la EMR tiene un alto grado de implementación docente, agrupados en el Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas (GPDM). Se dedicaron a los procesos de diseño, ensayos, reflexión, logrando la reinvención de la EMR. En Puerto Rico, a través del uso de situaciones paradigmáticas, para encontrar formas de integrar los nuevos materiales en el currículo general y en la cultura puertorriqueña. En los Estados Unidos, la puesta en práctica de la EMR considera crucial la participación activa de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y el diseño de materiales didácticos, se centra la atención en reconsiderar cómo los estudiantes aprenden matemáticas. En Sudáfrica, los docentes son los actores principales para el desarrollo de teorías educativas locales, alineando el currículo operativo de matemática en la escuela. En China, primero hubo mucho intercambio entre representantes de la EMR y profesores de matemáticas chinos a través de conferencias. Al inicio no se encuentra entre la conexión entre el nivel teórico y lo que ocurría en la práctica en el aula. Luego se enfatiza en la importancia de la orientación del maestro durante el proceso de matematización, esta idea fue rápidamente aceptada y apoyada por los chinos. En Corea, se sugiere a los profesores de matemáticas se centren más en el pensamiento matemático que en el contenido matemático en sí mismo y tomando como guía la fenomenología didáctica de Freudenthal.

De esta teoría EMR tomaremos tres aspectos relevantes para nuestro taller, que divulgaremos con el propósito de lograr maestros realistas tecnológicos cuando enseñan matemáticas:

(1) La naturaleza del principio realista a través de dos fuentes:

Realista R1: del mundo real: de los cuerpos materiales. Es realista en el sentido de que está relacionado con la vida real (del mundo real o de la vida cotidiana).
Realista R2: del mundo de los conocimientos: de lo que aprende. Es realista en el sentido de logrado a través de los aprendizajes en la práctica educativa (los conocimientos logrados que suelen llamarse conocimientos previos).

(2) El esquema de la Metáfora del Iceberg:

Drijvers (2020a) nos ilustra esta actividad humana mediante la Metáfora del Iceberg, según se muestra en la figura 01, si lo queremos que el alumno aprenda que: 5 + 2 = 7, esto es lo que se puede observar como un aprendizaje logrado, esto puede evaluarse, pero sólo es la parte superior del iceberg. ¿Cómo el alumno ha logrado este aprendizaje?, según el principio realista de la EMR, sabemos que la habilidad para realizar esta suma depende de los procesos previos y de los conocimientos previos de los alumnos, como a) tirar a los dados y sumar sus caras superiores, b) contar con los dedos para realizar sumas, c) usar ábacos para practicar sumas, d) usar las rectas numéricas para sumar números enteros; y todas estas experiencias son como los cimientos de la habilidad observable. Haciendo la comparación con el iceberg, sólo ves la parte superior del iceberg sobre el nivel del agua (el top del iceberg), pero si quiero eliminar lo que hay debajo del nivel del mar, estaríamos eliminando las experiencias que son los cimientos de los procesos que sostienen el aprendizaje logrado, es decir si cortas la parte inferior del iceberg, se hundirá un poco, perdiéndose la habilidad del proceso.

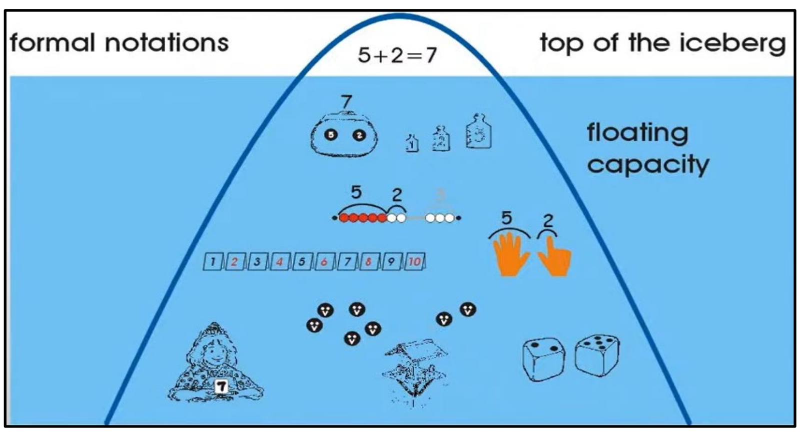


Figura 1. Metáfora del iceberg
Nota. Tomado de Drijvers (2020a)

Metodología del Taller Docente realista-semiótico-tecnológico

En el presente taller, los participantes desarrollarán las siguientes actividades:
Presentación del Fundamento Teórico……………………………………..……. 20 minutos
Instalación y descarga de los diversos Recursos Tecnológicos Matemáticos….15 minutos
Desarrollo de las Actividades Innovadoras empleando la Tecnología………… 45 minutos
Retroalimentación final y atención de consultas………………………………. 15 minutos

(1) Presentación del fundamento teórico

Se hará una presentación resumida de las teorías EMR, TRRS y TPACK.

El participante desarrolla un iceberg a un tema específico de su área de enseñanza. Los participantes presentan los productos obtenidos en un Jamboard (de Google) que cuyo enlace se compartirá en el desarrollo del taller

.

(2) Instalación y descarga de los Recursos Tecnológicos Matemáticos

Los participantes abren o descargan los cuatro instrumentos tecnológicos que se indican:

Instrumento-1: Software GEOGEBRA.
Link: Ingrese al simulador a través de: https://www.geogebra.org/download?lang=es
Descargar GeoGebra Clásico 5
Para aprender GeoGebra, ingrese a la PLATAFORMA oficial www.geogebra.org para acceder a un gran número de tutoriales de GeoGebra como: Libro Aprende GeoGebra Classroom, Libro Aprende Suite Calculadora GeoGebra, Actividad Comparación entre las Aplicaciones y otros.

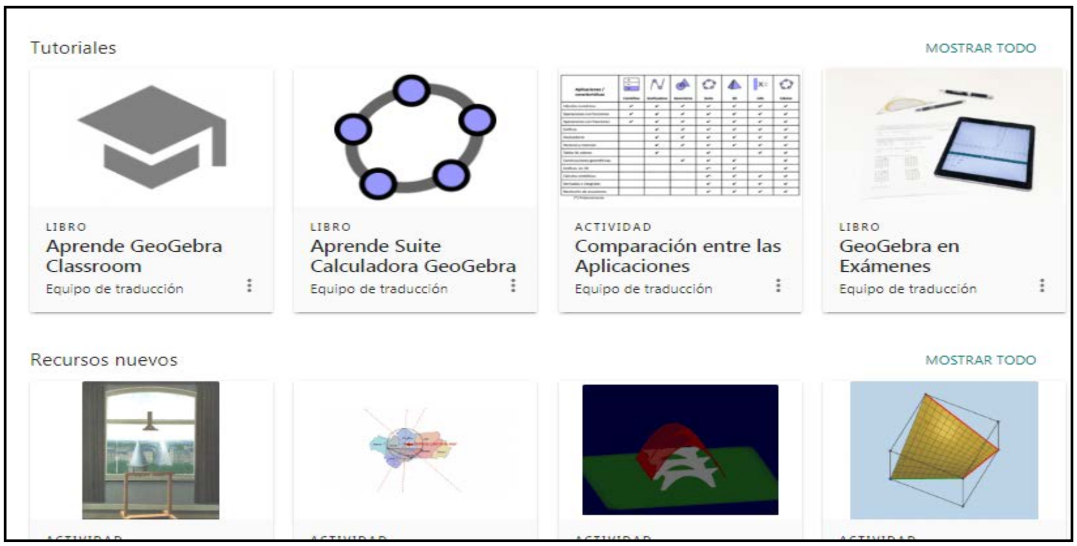


Figura 2. Plataforma de GeoGebra

Instrumento-2: Aplicación GRASPABLE MATH.
Link: Ingrese al simulador en línea a través de: https://graspablemath.com/canvas
Los participantes realizan tratamientos sobre ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas en el recurso tecnológico Graspable Math

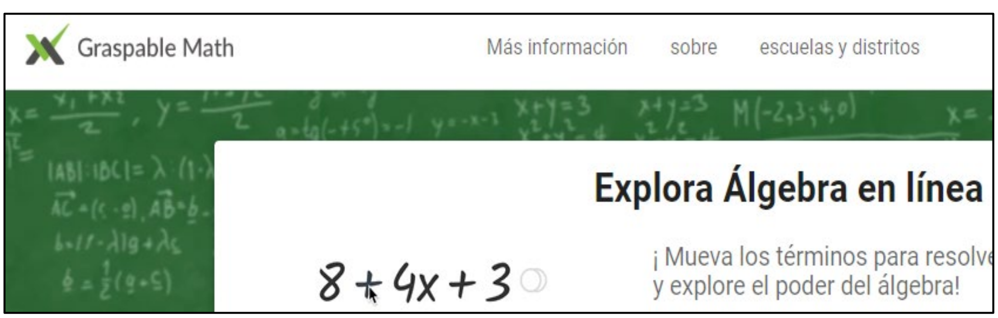


Figura 3. Home de Graspable Math

Instrumento-3: Aplicación DESMOS MATH.
Link: Ingrese al simulador en línea a través de:
https://www.desmos.com/calculator?lang=es

Figura 4. Home de Desmos Math

Desmos es una calculadora gráfica implementada como una aplicación de navegador y una aplicación móvil. Hasta septiembre de 2012, ha recibido alrededor de 1 millón de dólares estadounidenses de los fondos de Kapor Capital, Learn Capital, Kindler Capital, Elm Street Ventures y Google Ventures. Wikipedia

Instrumento-4: Aplicación MATHIGON.
Link: Ingrese al simulador en línea a través de: https://es.mathigon.org/

Figura 5. Home de Mathigon

En su plataforma nos menciona que Mathigon es una plataforma de aprendizaje interactiva para las matemáticas. Un formato de contenido completamente nuevo, combinado con un nuevo plan de estudios innovador, hace que el aprendizaje sea más personalizado y divertido.

(3) Desarrollo de las Actividades Innovadoras empleando la Tecnología

Los participantes podrán utilizar ambos recursos tecnológicos para resolver ecuaciones algebraicas, comparando limitaciones y ventajas de cada aplicación.

Actividad_1: Aplicación de GeoGebra

Mediante el uso del GeoGebra, probar la actividad.

1) En la ventana de entrada de GeoGebra, ingrese: y = x^2
2) Crear un deslizador "b"; mín=-3; máx=10; incremento=0,01
3) En la ventana de entrada de GeoGebra, ingrese: y = x + b
4) Trace los puntos de intersección de la recta y la parábola.
5) Trace el punto medio de los puntos de intersección.
6) Activar trazo de los puntos medios y activa animación del deslizador.
7) Verificar si se cumple que: El punto medio de los puntos de intersección se mueve sobre una línea vertical.

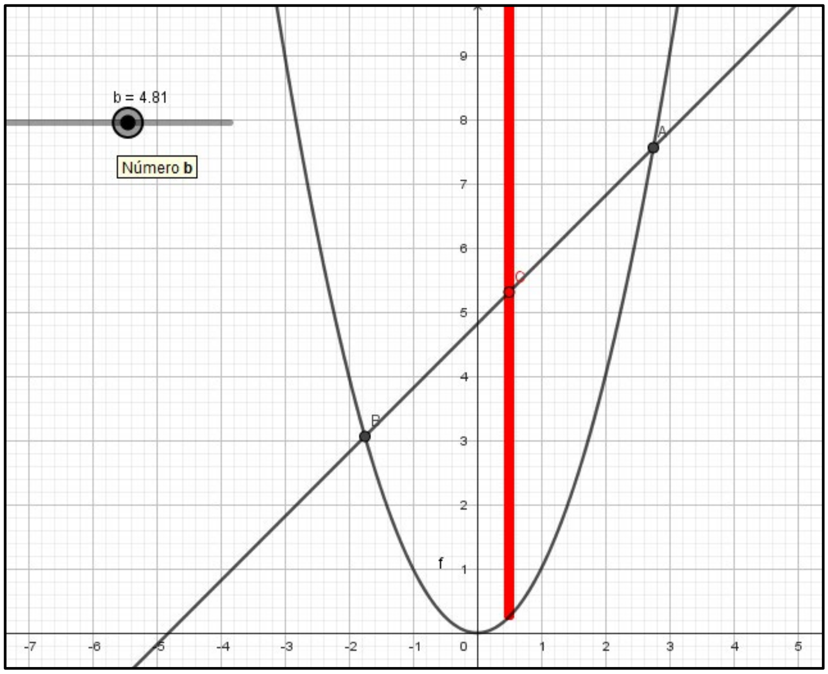


Figura 6. Actividad en GeoGebra

Actividad_2: Aplicación del GRASPABLE MATH

Resuelva la ecuación con GRASPABLE MATH mostrando paso a paso la resolución de dicha ecuación.

Halle el valor de "x" en:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x+3}{3x+2}+5$$

Conclusión: El participante obtendrá la solución como se indica.

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+3+(3x+2)5}{3x+2}$$

$$x = \frac{-9+\sqrt{9^2 - -56 \cdot 15}}{2 \cdot -14} \qquad x = \frac{-9-\sqrt{81 - -840}}{2 \cdot -14}$$

$$x = \frac{21.348\ldots}{-28} \qquad x = \frac{-39.348\ldots}{-28}$$

$$x = -0.762\ldots \qquad x = 1.405\ldots$$

Figura 7. Actividad en Graspable Math

Conclusiones y Recomendaciones

1) Los docentes, siendo de la vieja generación (D´Ambrosio, 2012) aplican las principales herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adoptando, por ejemplo, una matemática interactiva y dinámica a través de estos recursos gratuitos.
2) Los alumnos, siendo de la nueva generación (D´Ambrosio, 2012) logran aprendizajes más entretenidos y lúdicos, en entornos tecnológicos, que los motivan por aprender contenidos abstractos que se hacen realistas mediante el logro de los aprendizajes.
3) Los planes curriculares deben incluir los aportes de las teorías EMR y TRRS para logran aprendizajes más innovadores y con más sentido para su mundo real.

Referencias bibliográficas

D´Ambrosio, U. (2012). O estado do mundo e la educação matemática: Reflexões sobre o futuro. Conferencia. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-26, RELME-26*. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Drijvers, P. (2020b). Una visión realista de la educación matemática realista (EMR). *Conferencia en el Congreso Internacional de Educación Matemática*, 19 de febrero de 2020. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Lima, Perú.

Duval, R. (2011). Ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task. Dordrecht, the Netherlands*. Reidel Publishing Company.

Heuvel-Panhuizen, M. (2019). *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics*. Utrecht University Utrecht, the Netherlands. Springer Nature Switzerland AG. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1

Educação Matemática com a Modelagem Matemática Ambiental na Cultura Digital

Arlindo José de **Souza Júnior**
Universidade Federal de Uberlândia
Brasil
arlindoufu@gmail.com
Deive Barbosa **Alves**
Universidade Federal do Norte do Tocantins
Brasil
deive@uft.edu.br

Resumo

Neste artigo, analisamos o desenvolvimento de um projeto de Educação Ambiental relacionado a práticas de preservação da água. Este trabalho coletivo foi implantado com um grupo de alunos do 2º ano do Curso Técnico de Meio Ambiente no Brasil. O objetivo do projeto foi incentivar estudantes a produzir ciência e tecnologia na criação de protótipos digitais. A pesquisa prosseguiu de duas maneiras: levantamento sobre os dispositivos utilizados em um modelo comum de banheiro brasileiro e a construção de um protótipo com componentes digitais para o controle do volume de saída de água. Compreendemos que, além dos benefícios da busca pela preservação dos recursos naturais, este projeto contribuiu para a constituição do conhecimento derivado da Modelagem Matemática Ambiental e seu vínculo com a Cultura Digital na educação, permitindo superar os obstáculos inerentes ao processo de construção desse conhecimento, bem como acelerar o processo de apropriação desses conhecimentos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Curso Técnico de Meio Ambiente; Ensino de Matemática; Ensino Médio Regular; Tecnologia da Informação e Comunicação; Educação Pública; Brasil.

Introdução

Uma escola pública da rede federal, no município de Uberlândia/MG, abriu espaço para a organização e desenvolvimento de um trabalho coletivo com educadores interessados na implantação de uma prática educativa que possibilitasse um diálogo com a matemática e as questões relacionadas ao meio ambiente.

A escola oferece o curso técnico em meio ambiente desde o ano de 2002. Mas, a partir do ano de 2013, o curso passou a ser ofertado na modalidade integrada ao Ensino Médio, destinado a alunos que concluíram o 9º ano do ensino fundamental. Ela tem uma boa infraestrutura para o atendimento das necessidades técnicas e pedagógicas do curso técnico em meio ambiente: dispõe de laboratórios de microbiologia e de análise físico-química de água e de efluentes, além de estação climatológica, estação de tratamento de efluentes e viveiro de mudas nativas do cerrado (Iftm, 2015).

Neste artigo, a Modelagem Matemática foi desenvolvida com a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC. Segundo Skovsmose (2015, p. 16), "criar uma harmonia entre o trabalho de projecto e as actividades da sala de aula tem sido o grande desafio para a educação matemática baseada em projectos". Ainda segundo esse pesquisador, "os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação" (Skovsmose, 2015, p. 17).

Esse processo de interação, modelagem e TIC, é o que O'Sullivan e Igoe (2004) chamam de *Physical Computing* (Computação Física, em uma tradução literal). Ainda para esses autores, os sujeitos que trabalham com a Computação Física precisam, inicialmente, assistir as pessoas no cotidiano para detectar e interpretar suas interações. Interações que na Educação Ambiental para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 100), o "[...] confere à aprendizagem e ao ensino a urgência do dia de hoje, da educação para o presente". Caldeira e Meyer (2001), ao analisarem uma proposta de formação continuada de professores, destacam a importância da formulação de questões envolvendo a educação ambiental no processo de Modelagem Matemática.

> Embora haja muitas definições da dinâmica a que se dá o nome de modelagem matemática, praticamente todas elas incluem a formulação da questão, em que a postura crítica se revela no instante em que se selecionam os aspectos essenciais de cada problema, para incluí-los no modelo matemático (tendo-se em mente que a tal escolha dos aspectos poderá, ou deverá ser alterada...). Esta formulação inclui tanto o estabelecer a questão em si quanto apresentar sua expressão numa linguagem do universo matemático, isto é, o problema matemático (Caldeira; Meyer, 2001, p. 157).

Nesta investigação discutimos o desafio coletivo de implantar uma prática educativa nas aulas de matemática relacionadas à formulação de problemas da Educação Ambiental no contexto da Cultura Digital. Entendemos que o trabalho coletivo, além de possibilitar a produção de saberes necessários para o desenvolvimento do ensino com pesquisa, possibilita também o desenvolvimento de um ambiente favorável ao enfrentamento de diferentes tipos de desafios presentes no cotidiano escolar.

O processo de produção da Descarga Digital

Esse momento remete-nos à discussão sobre a ligação entre a 'Modelagem Matemática' e a 'Cultura Digital' na Educação Matemática. Compreendemos essa ligação como uma intersecção de quatro modos de produzir práticas e saberes: a Matemática, a Matemática Aplicada, Educação Matemática e a Cultura Digital, a qual é compreendida, neste artigo, como um conjunto emergente de valores, práticas e expectativas em relação à forma como as pessoas agem e interagem em uma sociedade contemporânea em rede. Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 35), o que nós chamamos de Matemática é o "conhecimento matemático produzido nas academias visando exclusivamente ao desenvolvimento da Matemática".

A matemática aplicada, no entanto, "estuda e aprende Matemática para resolver algo" (Para Meyer, Caldeira e Malheiros, 2011, p. 39). Já na Educação Matemática, há o acréscimo do estudante, variável que não se apresenta nos dois anteriores. Por conseguinte, faz-se necessário agir e refletir no sentido de educar matematicamente um interlocutor. Mas a afirmativa especifica que esse, o interlocutor, se produz e produz em uma Cultura Digital, a qual o conhecimento nessa cultura, segundo Deuze (2006), dá-se pelo entrelaçamento remixado entre tecnologias antigas e novas com uma contínua, personalizada e mais ou menos autônoma montagem, desmontagem e remontagem da realidade mediada. Esse contexto é intrinsecamente ligado ao questionamento: qual a utilidade da Matemática para os alunos?

> [...] a Matemática serve para que a gente possa fazer uso dela, e, a partir desse uso, compreender mais da realidade, compreender mais das situações da vida. E acreditarmos que, para os alunos...Desta maneira, quando deslocamos essa ideia da Matemática Aplicada, sustentada pela Matemática Pura, para as questões educacionais, deve sempre existir a consciência de que há ali **alunos que precisam aprender Matemática para viver**, e é necessário saber o que esse aluno precisa saber de Matemática, para que precisará dela e como essa Matemática vai chegar até ele (Meyer; Caldeira; Malheiros, 2011, p. 39, grifos nossos).

Por esses dizeres se busca, então, o aprendizado matemático crítico e comprometido com os problemas do mundo real, com a Matemática e com o social. Esse aprender se procede pela Modelagem Matemática, por ter como característica quatro passos, três tradicionais dela e um advindo da Cultura Digital: "o da *formulação*, o do estudo de *resolução* (ou, em muitos casos – aliás a maioria – o de resolução aproximada), o de *avaliação*" (Meyer; Caldeira; Malheiros, 2011, p. 17, grifos do autor), e o remix que, aqui, podemos chamar de protótipo, pois esse representa um primeiro modelo (produto) modificado por outra pessoa ou pelo próprio produtor, emaranhado por tecnologias antigas e novas. Contudo, segundo Biembengut (2014) é necessário, nesse processo, que é investigativo, discutir e refletir tanto da avaliação ou validação do modelo matemático encontrado quanto da aprendizagem que processo proporcionou ao grupo. Sobre modelo matemático Stewart (2015, p. 22) ressalta que:

> Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

A partir desse referencial teórico o grupo "Natureza Blue" adaptou, dos escritos de Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), Biembengut (2014) e Deuze (2006), propondo fases cíclicas do processo de Modelagem Matemática: na primeira fase formulamos um problema; na segunda buscamos informações, planejamos e executamos prováveis soluções, construção do modelo matemático; na terceira criamos protótipos, jogo ou robô, é o remix; na quarta etapa discutimos sobre a relação entre o produto e o real; por fim, na quinta fase refletimos sobre o que aprendemos durante o processo.

Essas etapas foram aplicadas a turma de 2015 do ensino técnico em Meio Ambiente do IFTM que tinha 35 alunos. Educandos que no processo de produção de trabalho com projetos foram divididos em grupos de três a cinco sujeitos. Para este trabalho foi escolhido a produção de um grupo que se intitulou de "Natureza Blue", esforços de três alunas que queriam participar da 12ª edição da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), a qual em 2015 teve como tema "Luz, ciência e vida". Esse tema foi baseado em decisão da Assembleia Geral das Nações Unidas, que proclamou o referido ano como "Ano Internacional da Luz, com o objetivo de celebrar a luz como matéria da ciência e do desenvolvimento tecnológico" (Mctic, 2015, p. 1). Elas almejavam criar um dispositivo tecnológico que com pouca energia elétrica que evitasse o desperdício de água em residências. As estudantes narram a formação desse grupo, da seguinte forma:

> Somos três amigas ambientalistas que já se conhecem desde o início da vida no IF e juntamente com os professores iremos desenvolver o tema "Economia de Água" [...] formamos o grupo "Natureza Azul". Somos estudantes (e amigas!) do 2º ano do Curso Técnico em Meio Ambiente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro (IFTM) [...] (Documento produzido na pesquisa).

Esse grupo iniciou o desenvolvimento do projeto pela **familiarização da situação-problema**. Uma estudante apresentou a todos nós informações do jornal Gazeta *on-line* do Espírito Santo, as quais discorriam sobre o desperdício de água em casa: "o banheiro é o campeão em desperdício nas residências, já que representa 60% de todo consumo de água" (Gazeta, 2010, p. 1). E o "grande" culpado é o vaso sanitário. Assim, ficou decidido que o grupo "Natureza Blue" investigaria possibilidades de economia de água no vaso sanitário.

O reconhecimento dessa situação-problema teve, também, a leitura da norma brasileira (NBR) 15.097/04 estabelecida pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a qual estabelece que qualquer descarga – independente do modelo ou tipo – deve consumir no máximo 6 litros de água (Abnt, 2004; Gazeta, 2010). Outra informação foi obtida do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), o mesmo afirma que há "3 (três) principais mecanismos de sistemas de descarga disponíveis no mercado de consumo, a saber, válvulas de descarga, caixa de descarga não acoplada e caixa de descarga acoplada" (Inmetro, 2014, p. 4). Assim, para simplificar a situação-problema o grupo escolheu trabalhar com caixa de descarga acoplada, nesse sistema de vaso sanitário "a caixa é acoplada à parte traseira da bacia, o que requer uma bacia específica. As caixas e bacias, neste caso, são comercializadas em conjunto" (Inmetro, 2014, p. 4).

Depois dessa familiarização o grupo, no processo dialógico de investigações, propôs o seguinte problema: *"será que a produção de uma tecnologia (uma descarga digital), que possibilita digitar a quantidade de litros d'água a ser usada no vaso sanitário, favorece a economia de água em uma residência?"* A partir do problema formulado o grupo optou por fazer uma caixa acoplada de vidro com o "Reparo Completo Universal Acionador Superior Caixa

Acoplada". Esse reparo foi acionado por teclado em que se digitava quantos de litros de água seria usado para limpar o vaso sanitário. Então, clicava-se no botão de acionamento no teclado que acionava um motor de passos, que levantava uma válvula para a água passar e fazer o serviço de limpeza, Figura 1.

Esse protótipo é um remixe dos saberes que os alunos adquiriram pela *internet*, eles tiveram discussões e reflexões provocados por esse ambiente sociocultural digital entrelaçado ao analógico que gerou interações dos sujeitos com sujeitos e mediado por objetos, criando cenários investigativos de possibilidades de construção material e de saberes matemáticos, em que a práxis criadora (imaginação criadora mais ação criadora) impulsionaram a criação que penetra "com sua criação a vida pessoal e social, especulativa e prática em todas as suas formas" (Vigotski, 2009, p. 59). Essa práxis criadora só foi possível, pois no processo de produção do protótipo o grupo "Natureza Azul" construiu uma rede de informação e comunicação de diversos tipos, neste artigo apresentamos a informações do modelo matemático que eles criaram para comunicar se havia o protótipo economizava ou não água, para limpeza dos dejetos sólidos e líquidos do vaso sanitário.

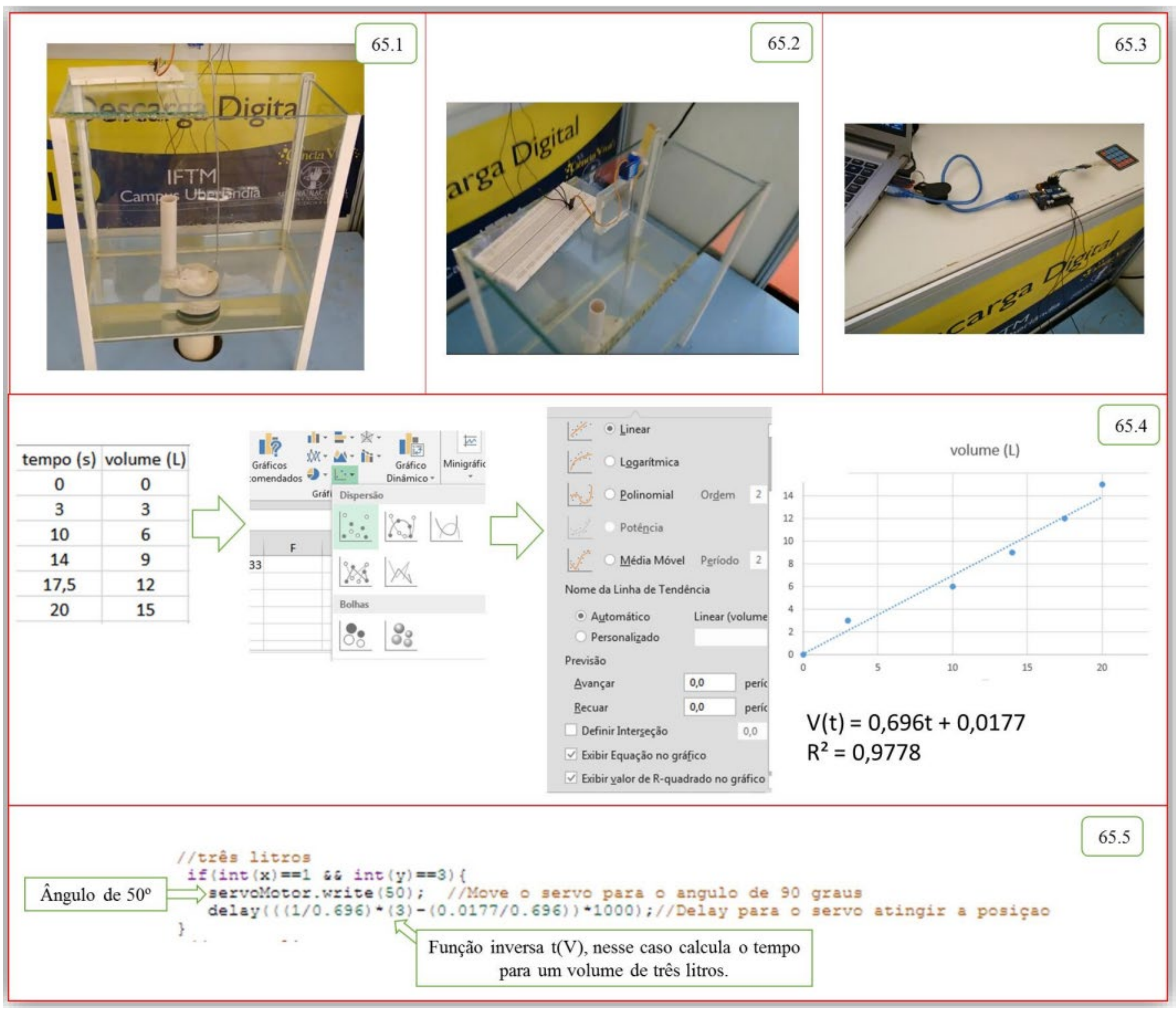


Figura 1. Protótipo da Descarga Digital de Alves (2017, p. 225).

Para isso os estudantes coletaram de seis pessoas o uso diário, no mês de abril de 2015, dos dejetos sólidos e líquidos depositados no vaso sanitário. Em primeira atividade que pode ser analisada em Alves (2017) esses estudantes calcularam o volume de água que um vaso sanitário usava para sua limpeza. Foi considerado que os disparos dos vasos sanitários eram simples sem nenhum mecanismo de economia de água. Dessa forma descobriu-se que o volume de água por descarga era igual a nove litros, $V_{água}$= 9 l, quanto ao uso dela, em média, por dia, os dejetos sólidos ($\bar{x}_S$) foi uma vez e o dejeto líquido ($\bar{x}_L$) foram seis vezes, ou seja, $\bar{x}_S = 1$ e $\bar{x}_L = 6$. A partir daí foi possível estabelecer o consumo médio diário de água usada para limpar a bacia sanitária, bem como a função de economia de água, considerando duas hipóteses: (a) Em dejetos sólidos se consome todo o volume de água da caixa acoplada e (b) em dejetos líquidos reduzir o consumo do volume de água a um valor maior que zero e menor que o volume de água da caixa acoplada. Mas, uma vez escolhido o valor ficaria inalterado por trinta dias.

Pelas referidas hipóteses simplificadoras, criamos uma constante de economia (e) que representa a quantidade litros economizados quando se limpa os dejetos líquidos. Por exemplo se o usuário digitou para gastar oito litros de água para a limpeza da bacia sanitária, então $e = 9 - 8 = 1\ l$, ou seja, houve economia de um litro de água para retirada do dejeto líquido. Assim, criamos um modelo matemático para o consumo de água para limpeza da bacia sanitária ($y(x)$), medidos em litros, pelos dias de uso (x):

$$y(x) = \left(V_{água} * \bar{x}_S + \left(V_{água} - e\right) * \bar{x}_L\right) * x$$

Nesse modelo, que expressa a economia de água ao limpar os dejetos de uma bacia sanitária, estabelecemos que o número e pertence ao conjunto dos números reais tal que e seja um número qualquer entre zero e o volume de água armazenado na caixa acoplada ($e \in \mathcal{R} |\ 0 \leq e < \ V_{água}$). Quando $e = 0$ estamos considerando volumes de água iguais para limpar ambos os dejetos, já quando $e \neq 0$ há a distinção entre volume de água consumida para limpar dejetos sólidos e líquidos. Essa distinção se deve ao fato de quando que a construção de uma Descarga Digital permitisse digitar o volume de água para limpeza de dejetos líquidos da bacia sanitária. Além disso, o grupo “Natureza Blue” comparou os referidos resultados com o valor do volume de água que a norma 15.097/04 da ABNT estabelece para descarga de aparelhos sanitários com caixa acoplada, nesse caso, $V_{água} = 6\ l$. É importante ressaltar que nessa normativa não há distinção entre o volume de água consumido para limpar dejetos sólidos de dejetos líquidos, assim, $e = 0$. Dessa forma, pela pesquisa dos estudantes sobre a quantidade de tais dejetos sabemos que: $\bar{x}_S = 1$ e $\bar{x}_L = 6$, logo:

$$y(x) = \left(V_{água} * \bar{x}_S + \left(V_{água} - e\right) * \bar{x}_L\right) * x$$
$$y(x) = (6 * 1 + (6 - 0) * 6) * x$$
$$y(x) = 42 * x$$

Por esse modelo matemático, ou seja, se os fabricantes de vasos sanitários respeitassem a 15.097/04 da ABNT, sem fazer nenhuma mudança na caixa acoplada do vaso, o usuário gastaria normalmente uma 630 litros de água em 30 dias, mesmo com e = 0. Mas o vaso sanitário dos estudantes estava gastando nove litros em vez de seis, assim eles construíram o Quadro 1 para verificar quanto teríamos que economizar (e) para se ter um valor igual ou próximo do estabelecido pela norma 15.097/04 da ABNT.

Quadro 1
Variação do Consumo de água para limpar os dejetos sólidos e líquidos para economia de agua.

$V_{\text{água}}$	$\bar{x}_S$	$\bar{x}_L$	e	$y(x)$	Modelos
9	1	6	0	$y(x) = (9*1 + (9-0)*6)*x$	$y(x) = 63 * x$ Não economizando nada em trinta dias se gasta 1890 litros
			1	$y(x) = (9*1 + (9-1)*6)*x$	$y(x) = 57 * x$ Economizando um litro em trinta dias se gasta 1710 litros
			2	$y(x) = (9*1 + (9-2)*6)*x$	$y(x) = 51 * x$ Ao economizar dois litros, em trinta dias, gasta-se 1530 litros
			3	$y(x) = (9*1 + (9-3)*6)*x$	$y(x) = 45 * x$ Ao economizar três litros em, trinta dias, se gasta 1350 litros
			4	$y(x) = (9*1 + (9-4)*6)*x$	$y(x) = 39 * x$ Ao economizar quatro litros em, trinta dias, gasta-se 1170 litros
			5	$y(x) = (9*1 + (9-5)*6)*x$	$y(x) = 33 * x$ Ao economizar cinco litros em, trinta dias, gasta-se 990 litros
			6	$y(x) = (9*1 + (9-6)*6)*x$	$y(x) = 27 * x$ Ao economizar seis litros em, trinta dias, gasta-se 810 litros
			7	$y(x) = (9*1 + (9-7)*6)*x$	$y(x) = 21 * x$ Ao economizar sete litros em, trinta dias, gasta-se 630 litros
			8	$y(x) = (9*1 + (9-8)*6)*x$	$y(x) = 15 * x$ Ao economizar oito litros em, trinta dias, gasta-se 450 litros

Fonte: Alves (2017).

A partir desse quadro foi possível concluir que ao reduzir o consumo de água para limpeza dos dejetos líquidos além da economia de água, é possível alcançar os valores de consumo de água estabelecidos pela norma 15.097/04 da ABNT. Mostrando, assim que o protótipo construído por eles teria eficiência normativa toda vez que o usuário digitasse dois litros para limpeza da bacia sanitária, justificando sua criação.

Considerações Finais

De acordo com dados da Ana (2019), compreendemos que a relevância do tema se mostrou capaz de fazer com que as pessoas envolvidas nessas ações buscassem soluções para o problema, por meio da Modelagem Matemática e de sua ligação com a Cultura Digital na Educação

Matemática. Com este trabalho, além dos objetivos da pesquisa, estamos convictos de que o desenvolvimento de projetos com a Modelagem Matemática oferece importantes benefícios ao processo de ensino e aprendizagem. Porém, isso não nos deixa acreditar que a Modelagem Matemática, por si só, resolva os problemas e sane as dificuldades vivenciadas pela educação brasileira.

Educar, com a Matemática, estudantes da educação básica na realidade de um curso técnico em Meio Ambiente com tecnologias digitais da informação e comunicação, mostrou-se um desafio criativo e muito produtivo para esta pesquisa. O trabalho do grupo "Natureza Blue" abriu um campo de possibilidades educativas e de pesquisa na área da Educação Matemática com a Modelagem Matemática Ambiental na Cultura Digital.

As experiências educativas com a Modelagem Matemática Ambiental que lê e modifica o mundo com a plataforma Arduino, para criar tecnologias de economia de água, foi cansativo, envolvente, divertido e recompensador. Uma implantação que entrelaçou Modelagem Matemática e Tecnologia em um processo de tornar o sujeito autor de conhecimento e tecnologia. Isso vai além de afetar nossa forma de ver as coisas do mundo, ela abre possibilidades para se criar desde máquinas automatizadas aos robôs, de acordo com nossa motivação e vontade. É contribuiu para a constituição de saberes oriundos da Modelagem Matemática e de sua ligação com a Cultura Digital na Educação Matemática. Ligação essa que nos propiciou superar os obstáculos inerentes ao próprio processo de construção dos saberes matemáticos, bem como acelerar o processo de apropriação desses saberes.

Referências e bibliografia

Abnt (Associação Brasileira de Normas Técnicas). (2004). *NBR 15097: aparelho sanitário de material cerâmico: Requisitos e métodos de ensaio*. Target Normas. https://goo.gl/WkHWMC.

Alves, D. B. (2017). Foi retirada para não identificação dos autores. Será colocada na versão final.

Ana. (12/03/2019). *Uso eficiente da água traz ganho econômico e ambiental*. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). Recuperado em 25/11/2022 de https://www.ana.gov.br/noticias-antigas/uso-eficiente-da-a-gua-traz-ganho-economico-e.2019-03-15.5033019754.

Biembengut, M. S. (2014). *Modelagem Matemática no Ensino Fundamental.* Edifurb.

Caldeira, A. D.; Meyer, J. F. da C. de A. (jan./dez 2001). Educação Matemática e Ambiental: uma proposta de formação continuada – e de mudanças. *Zetetiké – CEMPEM – FE/UNICAMP, v. 9* (1° ed), 155 – 170. https://doi.org/10.20396/zet.v9i15-16.8646937.

Deuze, M. (dez/2005). Participation, Remediation, Bricolage: Considering Principal Components of a Digital Culture. *The Information Society*. V. 22 (1° ed), p. 63-75. https://doi.org/10.1080/01972240600567170.

Gazeta. (05/06/2010). *Água: banheiro é o campeão de gasto*. Gazeta Online. Recuperado em 04/03/2015 de https://goo.gl/e4N8hJ.

Iftm. (10/03/2015). *Projeto pedagógico do curso técnico em meio ambiente integrado ao ensino médio*. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro (IFTM). Recuperado em 25/11/2022 de http://goo.gl/zxh4KE.

Inmetro. (01/03/2014). *Sistema de Descarga: Relatório Final*. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO). 2014. Recuperado em 17/11/2022 de https://goo.gl/iEiWtU.

Mctic. (08/10/2015). *Semana Nacional de Ciência e Tecnologia - SNCT*. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação do Brasil. Recuperado em21/11/2022 de http://goo.gl/uvzNac.

Meyer, J. F. da C. de A.; Caldeira, A. D.; Malheiros, A. P. dos S. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Autêntica.

O'sullivan, D.; Igoe, T. (2004). *Pysical Computing: sensing and controlling the physical word with computers*. Thomson Course Technology.

Skovsmose, O. (fev/2015). Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 1 (1° ed), 1 – 22. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635.

Stewart, J. (2015). *Cálculo*. Cengage Learning.

Vigotski, L. S. (2009). *Imaginação e criação na infância*. Ática.

El b-learning en la enseñanza universitaria

Ana E. **Gruszycki**
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
Argentina
ana@uncaus.edu.ar
Patricia M. **Maras**
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
Argentina
pmaras@uncaus.edu.ar
Clara Y. **Orellana**
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
Argentina
claraorellana@uncaus.edu.ar
Marina B. **Bloeck**
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
Argentina
marina@uncaus.edu.ar
Emmanuel I. **Chávez**
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
Argentina
emmaignacio.chavez@gmail.com

Introducción

El presente trabajo, se encuentra en el marco del proyecto de investigación PI 114/2020 Implementación del modelo b-learning como refuerzo del proceso de aprendizaje, llevado a cabo en la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS), Argentina.

Se propuso como objetivo analizar, implementar y evaluar la estrategia de b-learning (blended learning) en el estudio de las asignaturas que abarcan contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería y Profesorado que se dictan en la UNCAUS.

Fundamento teórico

El marco teórico del presente trabajo se basa en las teorías de Ausubel (1983), Vygotsky (2012) y Duval (2004), en las que se busca introducir el modelo didáctico b-learning, respondiendo de este modo a los problemas de aprendizaje detectados. Para la implementación se emplea la plataforma Moodle.

El uso de las TIC en educación se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos. Es por esto que, desde la Universidad Nacional del Chaco Austral, con el propósito de intervenir alrededor de los problemas detectados se plantea abordarlos con esta nueva línea de investigación.

Metodología

El diseño de esta investigación es de carácter cuasi experimental explicativo. De acuerdo al objetivo planteado, se propone como hipótesis: La implementación de la metodología de trabajo b-learning, en el estudio de las asignaturas que abarcan contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería y Profesorado que se dictan en la UNCAUS, contribuye a mejorar el rendimiento académico de los alumnos.

En este sentido, se define conceptualmente a la variable independiente, aplicación de la modalidad b-learning, como una modalidad de enseñanza, a través del cual el docente hace uso de sus metodologías de clases presenciales y al mismo tiempo refuerza el desarrollo de los contenidos a través del aula virtual; y a la variable dependiente, rendimiento académico, desde el punto de vista de la investigación, se lo define como el producto de asimilación del contenido de los programas de estudio, expresado en calificaciones dentro de una escala de 0-10 de acuerdo a la Resol. N° 80/12 C.S. UNCAUS.

La población seleccionada, está formada por alumnos de la UNCAUS, que cursan en 2022, primer año, primer cuatrimestre, la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de las carreras de Profesorado en Física y Profesorado en Ciencias Químicas y del Ambiente, y en el segundo cuatrimestre, alumnos de las carreras de Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Industrial e Ingeniería Química que cursan la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica y del Profesorado en Matemática que cursan la asignatura Álgebra Lineal y Geometría.

Durante el desarrollo de la asignatura en el ciclo 2022, se aplican los mismos instrumentos de evaluación que fueran suministrados en el ciclo 2019. Con toda la información recabada se procederá a realizar la tabulación de datos, realizar el análisis e interpretación, así como la comprobación de la hipótesis, a fin de obtener las conclusiones y proponer las recomendaciones pertinentes.

Conclusiones

Esta investigación, una vez concluida, consideramos que resultará relevante, ya que sumará al campo educativo un modelo, que contribuirá al proceso de enseñanza aprendizaje bajo la modalidad b-learning, incorporando estrategias didácticas presenciales y virtuales que mejorarían el aprendizaje de los contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica.

Además, la interrelación con otros equipos de investigación de la UNCAUS y de otras Universidades que se encuentran trabajando en relación con el tema propuesto, permitirá crear un ámbito de intercambio, lo que redundará en el crecimiento y la consolidación del grupo de investigadores en líneas futuras de investigación.

Referencias

Ausubel, D. (1983) Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, Vol. 1 No. 1-10, pp. 1–10.

Duval, R. (2004) *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Vygotsky, L. S. (2012) *Thought and language*. (Ed): MIT Press
.

El uso pertinente de softwares matemáticos en la resolución de problemas de cálculo diferencial

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM PUCP
Perú
eadvincula@pucp.edu.pe
Nancy **Saravia** Molina
Pontificia Universidad Católica del Perú. IREM PUCP
Perú
nsaraviam@pucp.edu.pe

Resumen

Los profesores en formación presentan diversas estrategias al resolver problemas de cálculo diferencial que requieren la aplicación de teoremas, como el teorema del cero. Sin embargo, algunas funciones resultan complicadas de analizar y se recurren al uso de softwares matemáticos como recurso de apoyo para obtener representaciones gráficas rápidas. El objetivo de este trabajo es reflexionar sobre el uso pertinente de los diferentes softwares matemáticos, mostrando sus alcances y limitaciones en la resolución de problemas de cálculo diferencial. La metodología es cualitativa pues nos interesa describir el conocimiento matemático que movilizan los profesores en formación que cursan estudios de maestría cuando analizan el comportamiento de determinadas funciones. Entre los resultados se espera que los profesores promuevan el uso coherente de los softwares matemáticos en la justificación de sus resultados, respaldados con argumentaciones matemáticas.

Palabras clave: Softwares matemáticos; resolución de problemas; cálculo diferencial; profesores en formación.

Introducción

La resolución de problemas de cálculo diferencial requiere del uso correcto de teoremas que justifiquen los resultados obtenidos. Actualmente, se considera importante el uso de las tecnologías para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades y competencias que se alineen con las demandas del entorno (Woya, 2019; Pedraja-Rejas, et al., 2020). En ese sentido, Cuicas, Debel, Casadei y Álvarez (2007) mencionan que los softwares matemáticos son herramientas que promueven el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería civil, mediante el uso de estrategias instruccionales.

Por su lado, Pizarro (2019) señala que el uso de un software matemático incide favorablemente en el aprendizaje del algebra elemental con estudiantes de primer año en la carrera de ingeniería, y ofrece ventajas para su formación personal, intelectual y tecnológico.

Sin embargo, es importante tener criterios de selección de recursos que permitan valorar la parte técnica, la interfaz y uso, y las funcionalidades matemáticas para fortalecer las competencias matemáticas y los conceptos adquiridos en cálculo (Mosquera y Vivas, 2017). Asimismo, Mendoza et al. (2019) consideran importante tener en cuenta diversos factores al introducir el uso de un software en las clases de Matemática. También, Williner (2014) menciona que la incorporación de estos recursos no se debe hacer en forma improvisada, sino de manera organizada por parte del docente, con orientaciones claras para los estudiantes.

En este trabajo nos interesa mostrar el uso que hacen de los softwares matemáticos profesores en formación cuando resuelven problemas relacionados con la aplicación del teorema del cero, a fin de generar un espacio de reflexión acerca del uso coherente de los recursos tecnológicos y la aplicación de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas.

Referente teórico

Tomamos como referente teórico el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) propuesto por Carrillo et al. (2018) para aproximarnos a conocer el conocimiento matemático que movilizan los profesores de educación superior cuando resuelven problemas de cálculo diferencial. Cabe resaltar que estos autores consideran lo especializado como aquel conocimiento del que hace uso un profesor cuando enseña matemática.

En la figura 1 mostramos el modelo MTSK con sus dominios y subdominios, con las siglas correspondientes en inglés:

MK: *Mathematical Knowledge*;
KoT: *Knowledge of Topics*;
KSM: *Knowledge of the Mathematical Structure*;
KPM: *Knowledge of Practices in Mathematics*;
PCK: *Pedagogical Content Knowledge*;
KMT: *Knowledge of Mathematics Teaching*;
KFLM: *Knowledge of Features of Learning Mathematics*;
KMLS: *Knowledge of Mathematics Learning Standards*).

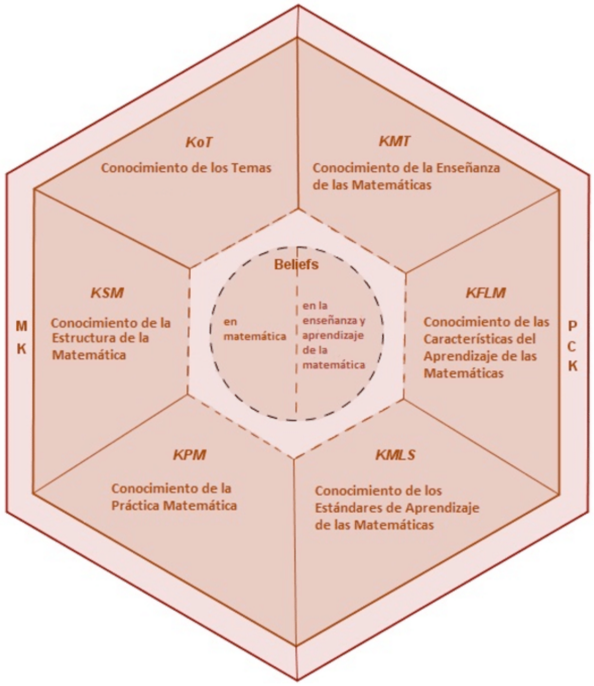


Figura 1. Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018).

De acuerdo con nuestro foco de interés, nos centraremos en los subdominios del MK. El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics* – KoT) incluye el conocimiento de los procedimientos, definiciones, propiedades, registros de representación y aspectos fenomenológicos, que incluyen el conocimiento de los distintos significados del tema y de ejemplos específicos en aspectos concretos de un contenido matemático. El conocimiento de la estructura de la matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM), que encierra una visión de conjunto de la matemática, considerando la idea de conexiones de complejización, simplificación, conexiones transversales y auxiliares del contenido matemático, las conexiones son interconceptuales y temporales. El conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of the Practice of Mathematics* – KPM) implica el modo de proceder en la disciplina; incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemática (conocimiento sintáctico sobre la lógica matemática), el razonamiento y la demostración; saber definir y usar definiciones; elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar aspectos de la comunicación matemática (Carrillo et al., 2018).

En nuestro trabajo hemos asumido el MTSK como un referente que nos permitirá identificar los componentes deseables en el conocimiento especializado de un docente de matemática, en relación con el uso de los teoremas de cálculo diferencial.

Tareas propuestas

En esta parte se presentan las soluciones propuestas por profesores en formación que estudian una maestría en enseñanza de las matemáticas, cuando resuelven problemas que involucran el análisis de funciones. Los profesores tienen por lo menos dos años de experiencia como docentes de educación secundaria o superior.

A continuación, mostramos la primera tarea propuesta a los docentes con la solución presentada por un profesor.

Tarea 1
Analice la veracidad o falsedad de la siguiente proposición. Justifique su respuesta.
Existe un número real x para el cual se cumple $e^{-x} + ln\ (x + 3\pi) = cos\ (x)$.

Solución propuesta por un profesor a la tarea 1

Se construye la función $f(x) = e^{-x} + ln\ (x + 3\pi) - cos\ (x)$.
Se gráfica la función f usando el software GeoGebra y se obtiene lo siguiente:

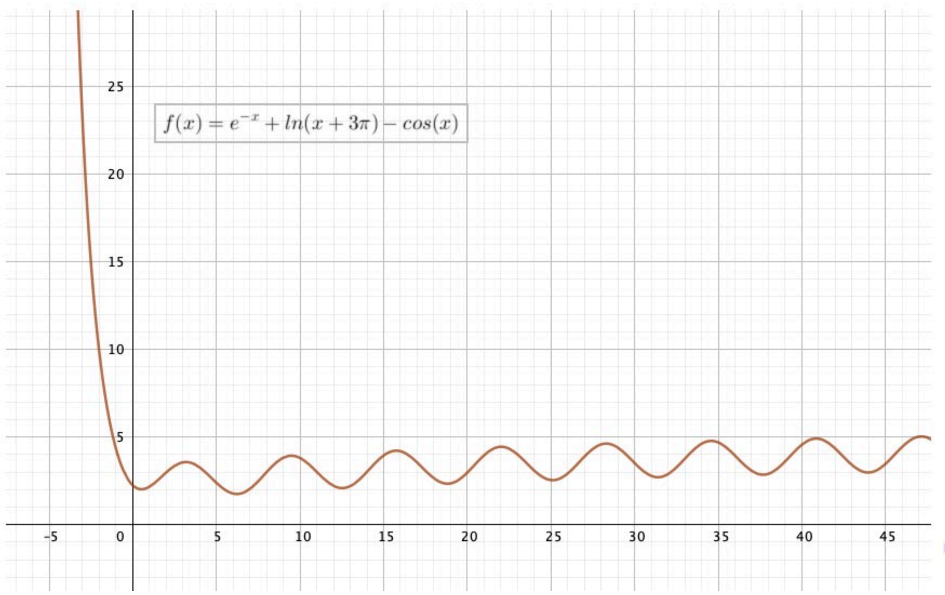


Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = e^{-x} + ln\ (x + 3\pi) - cos\ (x)$ obtenida con GeoGebra.

Luego, la proposición es falsa.

Como se puede observar el profesor sustenta su respuesta en la gráfica que obtiene con el software GeoGebra. Sorprende que no verifique lo que observa usando los conocimientos matemáticos necesarios.

A continuación, se presenta la solución esperada usando los conocimientos matemáticos correspondientes.

Solución esperada (solución experta)

Consideramos la función f definida por $f(x) = e^{-x} + ln\ (x + 3\pi) - cos\ (x)$, $x \in\ ]-3\pi; +\infty[$.
Notemos que:

- $f(0) = 1 + \ln(3\pi) - 1 = \ln\ (3\pi) > 0$

- $\lim_{x \to -3\pi^+} f(x) = -\infty$. *Por ello, existe un* $d > -3\pi$ *cercano a* -3π *tal que* $f(d) < 0$.
- f *es continua en* $[d; 0]$.

Por el teorema del cero intermedio, existe $c \in]d; 0[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Se observa que la solución dada por el profesor difiere de la solución correcta. Sorprende que el docente solo haya usado la gráfica obtenida por GeoGebra para justificar su respuesta. Esta situación pone en evidencia la necesidad de que los profesores tengan conocimientos matemáticos sólidos que les permitan verificar o comprobar resultados que muestran los softwares, que les permita argumentar correctamente sus respuestas.

Es importante alertar sobre las limitaciones de los softwares al graficar determinadas funciones, relacionadas con la programación de los comandos o capacidad para realizar representaciones de funciones complejas, entre otras.

Mostramos una segunda tarea propuesta a los docentes, en la cual se pide realizar una demostración.

Tarea 2
Demuestre que existe $x > 0$ *para el cual* $5x^3 + cos(x) = 2$.

Solución propuesta por un profesor a la tarea 2

Se gráfica la función $f(x) = 5x^3 + cos(x) - 2$ usando el software GeoGebra y se obtiene lo siguiente:

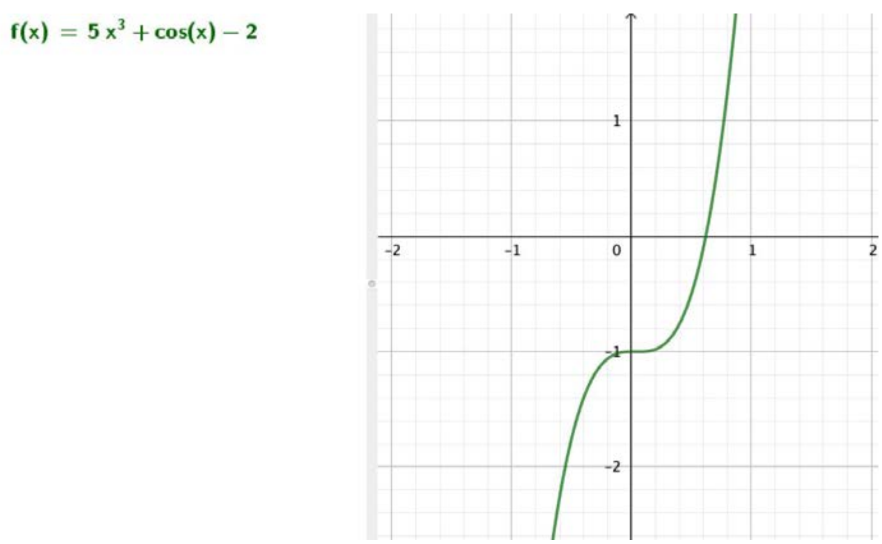


Figura 3. Gráfica de la función $f(x) = 5x^3 + cos\ (x) - 2$ *obtenida con GeoGebra.*

Por tanto, existe $x > 0$ *tal que* $5x^3 + cos(x) = 2$.

Solución esperada (solución experta)

Sea $f(x) = 5x^3 + cos(x) - 2$*, donde*
$f(0) = -1 < 0$ *y* $f(1) = 3 + \cos(1) > 0$
Como f *es continua en* $[0; 1]$ *y* $f(0) \cdot f(1) < 0$*, por el teorema del cero, existe* $c \in]0; 1[$ *tal que* $f(c) = 0$*. Es decir,* $5c^3 + cos(x) = 2$*.*

En esta oportunidad el profesor que muestra su respuesta usa un software matemático para representar la función involucrada y concluye que existe un valor de positivo de x que cumple la condición dada. Sin embargo, se evidencia nuevamente que el docente no justifica su respuesta usando los conocimientos matemáticos necesarios, es decir, no presenta una demostración. Solo muestra de manera gráfica la existencia de un valor para x.

Conclusiones

En la resolución de problemas matemáticos, las representaciones geométricas o gráficas son importantes y ayudan a encontrar resultados interesantes, pero estos deben ser corroborados algebraicamente a través de la aplicación de axiomas, definiciones, teoremas, etc.

Resaltamos la importancia de que los profesores tengan dominio de los conocimientos matemáticos que se requieren para abordar los contenidos de los cursos que tienen a su cargo. También, es necesario que los docentes evidencien un conocimiento didáctico para tratar los contenidos matemáticos a enseñar, evidenciando, por ejemplo, el uso pertinente de softwares matemáticos, conociendo sus ventajas y limitaciones, y teniendo presente que los resultados obtenidos deben ser justificados haciendo uso de conocimientos matemáticos.

Referencias y bibliografía

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Cuicas, M., Debel, E. y Casadei, L. y Álvarez, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *7*(2), 1-34.

Mendoza, H. H., Burbano, V. M., & Valdivieso, M. A. (2019). El rol del docente de matemáticas en educación virtual universitaria. Un estudio en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. *Formación universitaria*, *12*(5), 51-60.

Mosquera, M. y Vivas, S. (2017). Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. *Plumilla educativa*, 98-113.

Pedraja-Rejas, L. M., Marchioni-Choque, I. A., Espinoza-Marchant, C. J., & Muñoz-Fritis, C. P. (2020). Liderazgo y cultura organizacional como factores de influencia en la calidad universitaria: un análisis conceptual. *Formación Universitaria*, *13*(5), 3-14.

Pizarro, L. (2019). Uso de un software matemático y su incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental. *Spécificités*, *13*, 204-219.

Williner, B. (2014). Fortalezas y debilidades en el uso de la computadora en el aula de matemática de la universidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 2105-2114. http://funes.uniandes.edu.co/6178/1/WillinerFortalezasALME2014.pdf

Woya, A. A. (2019). Employability among Statistics Graduates: Graduates' Attributes, Competence, and Quality of Education. *Education Research International*, 1-7.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Elaboración de materiales con recursos digitales como apoyo al aprendizaje de las Matemáticas

Román **Serrano** Clemente
Bachillerato Cadete Juan Escutia, SEP
México
clemente1008@gmail.com

Resumen

Los sistemas educativos, en las condiciones actuales en donde se converge el aprendizaje a distancia, presencial y autónomo, tienen más que nunca la necesidad de apoyarse en medios tecnológicos y contribuir en la mejora del proceso educativo, por tanto, los materiales y actividades creados a partir de recursos multimedia lo apoyan y facilitan. Su incorporación en el aprendizaje de las Matemáticas resulta de gran apoyo, ya que se favorece la construcción de ambientes de aprendizaje más interesantes, dinámicos, activos y creativos. Existen diversos recursos y plataformas para ese fin, que no solo posibilitan la implementación de materiales en línea sino también imprimibles para ser trabajados en el aula, por tanto, se pretende que los docentes creen sus materiales usando la tecnología, apoyándose del m – learning y la gamificación como sustento metodológico, desarrollando con ello su creatividad, sus habilidades, capacidades y competencias tecnológicas.

Palabras clave: Competencia digital; Recursos multimedia; Matemáticas lúdicas, Matemáticas dinámicas; Docente prosumidor

La inclusión de actividades multimedia en el proceso de aprendizaje no es una práctica nueva, sin embargo, dadas las condiciones actuales y los cambios vertiginosos en los modelos de enseñanza (línea, distancia, mixta o híbrida), han hecho que su incorporación en las clases cotidianas haya crecido exponencialmente. El estudiante aprende de diversas maneras y es por ello, que se les debe ofrecer distintas opciones de aprendizaje, recursos y herramientas que apoyen a su aprendizaje individual y que combinen éste con un aprendizaje en grupo, de esa manera, se les permitirá experimentar, discutir, construir, compartir, controlar y apropiarse de su proceso de aprendizaje. Un recurso educativo multimedia es un material compuesto por medios digitales producidos con el de fin de facilitar el desarrollo de las actividades de aprendizaje y tienen como función, según García (2008), informar sobre un tema, ayudar en la adquisición de un conocimiento, reforzar un aprendizaje, remediar una situación desfavorable, favorecer el desarrollo de una determinada competencia y evaluar conocimientos. Del mismo modo, Marqués (1996) indica "que los materiales multimedia deben tener cinco características esenciales: deben tener una finalidad didáctica, utilizar un ordenador, ser interactivos, individualizar el trabajo y ser fáciles de usar" (p. 120). De esta forma un recurso educativo multimedia es un material compuesto por medios digitales y producidos con el fin de facilitar el desarrollo de las actividades de aprendizaje y tienen como función, según García, 2010:

- informar sobre un tema,
- ayudar en la adquisición de un conocimiento,
- reforzar un aprendizaje,
- remediar una situación desfavorable,
- favorecer el desarrollo de una determinada competencia y
- evaluar conocimientos.

Los materiales multimedia tienen cinco características esenciales según Marqués (2013):

- Finalidad didáctica: Son elaborados con el propósito educativo como se desprende de su definición.
- Utilizan un ordenador: Como soporte en el que los alumnos realizan las actividades que ellos proponen.
- Son interactivos: Contestan inmediatamente las acciones de los estudiantes y permiten un diálogo y un intercambio de informaciones entre el ordenador y los alumnos.
- Individualizan el trabajo: de los estudiantes, ya que se adaptan al ritmo de trabajo de cada uno y pueden adaptar sus actividades según las actuaciones de los alumnos.
- Son fáciles de usar: Los conocimientos informáticos necesarios para utilizar estos programas son mínimos y similar a otros programas, aunque cada uno de ellos tenga sus propias reglas de funcionamiento que es necesario conocer.

La educación debe estar basada en los contextos y entornos de los estudiantes por lo que es necesario que cada recurso o material que se construya no esté alejado de ello. Además, en su construcción debe estar inmersa la creatividad del docente y hacerlos más interesantes y atractivos para los alumnos, por ello es necesario ofertar una capacitación formal a los profesores para su manejo eficiente. Lamentablemente nuestra sociedad con un sistema de educación decadente y permisivo al cual le preocupa más la cobertura, la gratuidad que el hecho de que los jóvenes adquieran conocimientos para la vida, situación que ha generado en los mismos estudiantes la desmotivación y el facilismo, situación que pone al docente a valerse de los medios tecnológicos existentes con el ánimo de acercar el conocimiento a un buen número de estudiantes qué aunque motivados por los componentes tecnológicos hacen un mal uso de los mismos. (Jiménez, 2019)

En Matemáticas, existe el falso mito que el docente solo puede apoyarse de los recursos tradicionales como plumón y pizarrón o a veces elaborar presentaciones e impartir las clases a través de un proyector o en su caso, grabar algún tutorial y compartirlo. Sin embargo, existe un gran número de recursos tecnológicos que pueden apoyar a la elaboración de materiales multimedia que pueden hacer más atractivos la adquisición de conceptos, la práctica de ejercicios, la colaboración en la construcción de temas, etc., convirtiendo al docente, como lo menciona

González (2013), en prosumidor (p.89). Es importante que cada recurso o material que se construya tome en cuenta las necesidades, interés y recursos de los estudiantes, además, de que en su construcción debe estar inmersa la creatividad del docente y hacerlos más interesantes y atractivos para los alumnos, por ello, es necesario ofertar una capacitación formal a los profesores para su manejo eficiente y que a su vez desarrollen habilidades y competencias digitales para convertirse en prosumidores de actividades, tal como lo menciona Sarmiento (2007).

El presente taller está orientado a conocer y usar algunas herramientas digitales, y qué, aunque son generales, se pueden emplear para facilitar, fortalecer y hacer más dinámica, didáctica y lúdica la clase de Matemáticas, favoreciendo con ello, la construcción de mejores ambientes de aprendizaje. Se pretende que, como parte de los resultados de las sesiones, los participantes construyan algunos materiales para que puedan usarlos en sus clases actuales ya sea en la modalidad a distancia (línea), presencial y lo más importante, que beneficien el trabajo autónomo. Las herramientas digitales serán de software libre, entre las que destacan, Mobbyt, GoConqr, Jigsaw, WordArt, WordWall, Wheel of names y Spreaker studio.

Se espera que el participante tenga un desarrollo pleno generando ambientes de confianza y desarrollo de habilidades básicas digitales lo que dará como resultado la construcción y elaboración actividades rápidas y de uso a corto plazo como son: **ruletas de nombres y preguntas** (figura 1), que sirven para dar apertura a un conocimiento matemático nuevo, repasar algún tema visto o dar un cierre o retroalimentación de la clase; **imágenes interactivas**, que pueden mostrar relaciones entre el concepto y una parte de la imagen de tal manera que al relacionar ambas, la adquisición del concepto sea más amigable; **rompecabezas** (figura 2), cuyo objetivo es que al armarlo, el estudiante vaya dando cuenta del concepto que se pretende que aprendan; **nubes de palabras**, que servirán para realizar lluvias de ideas o retroalimentación de algún tema matemático identificando palabras clave; **fichas interactivas de conceptos** (figura 3), que funcionan muy bien en forma de cuestionarios, relación de fórmulas matemáticas o símbolos con su significado o uso; **mapas conceptuales y mentales interactivos**, que hacen que el estudiante de manera visual pueda reiterar lo aprendido a partir de la manipulación de elementos emergentes y la relación entre lo simbólico y conceptual sea más evidente; **videojuegos básicos** (figura 4), que siempre resultan ser atractivos para los estudiantes harán que al mismo tiempo que realiza ejercicios, aprende un concepto nuevo, etc., desarrolla destrezas, motivación y habilidades digitales. Todas los recursos y actividades descritas son adaptables cumpliendo otro de los resultados que se pretenden alcanzar que es, el que los participantes puedan incorporarlas de manera efectiva en su planeación, secuencia, guía didáctica o plan de clase, ya que se pueden usar en cualquier momento del desarrollo de ésta.

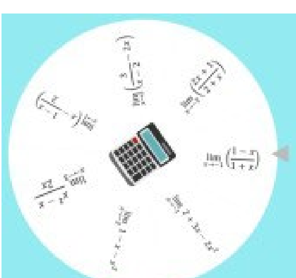


Figura 1. Ruleta de nombres y preguntas

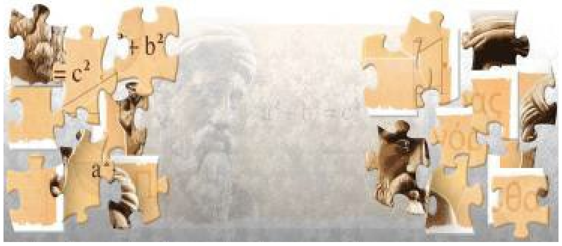


Figura 2. Rompecabezas

Figura 3. Fichas interactivas

Figura 4. Videojuego básico

Estas creaciones serán el resultado de su participación durante el taller y con ellas se sentarán las bases para profundizar, interactuar y construir otros materiales de utilidad en su práctica cotidiana de clase, a mediano y largo plazo que requieran el desarrollo de competencias digitales más específicas y que puedan adaptarlas a su contexto de trabajo. Para la elaboración de materiales se propone la estrategia de trabajo cooperativo, en donde el ponente orientará y acompañará en el paso a paso la elaboración de los materiales, teniendo la ventaja que, al ser herramientas de uso sencillo y materiales de creación inmediata, se pueden retroalimentar y con ello mejorar las producciones hechas durante las sesiones, por tanto se requiere de un aula con acceso a internet y computadoras o en caso dado, un lugar con acceso internet ya que los docentes participantes deben llevar su computadora personal. Los materiales creados se pondrán en práctica en las clases cotidianas de los docentes ya que se apoyan en los principios de las estrategias de aprendizaje basada en juegos y trabajo colaborativo, ya sea presencial o a distancia. Del mismo modo, forman puntos clave de las Metodologías de Flipped classroom, gamificación, Microlearning y M - learning, las cuales aportan a la contextualización del conocimiento. Este taller no tiene restricción a algún nivel educativo, ya que pueden construirse materiales para estudiantes de cualquier edad, género y contenido matemático.

Referencias y bibliografía

Cabero Almenara, J. (2006): "Bases pedagógicas del e-learning", *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, *3(1),* 3-4, http://www.academia.edu/4023389/Bases_pedagogicas_del_e-learning#

Esquivel, I. (2014): Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI. *Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje: origen, sustento e implicaciones* (pp.143-160)

García, M., González, G., García, A. (2008). Modalidad de curso semipresencial. Aplicación en la asignatura Procesos tecnológicos. *Ingeniería Mecánica, 11*(3). 47 – 52. https://www.redalyc.org/pdf/2251/225115162007.pdf

González G. Karolina, Rincón C. Diego A. (2013). El docente-prosumidor y el uso crítico de la web 2.0 en la educación superior. *Sophia*, *9*, 86 – 101. https://www.redalyc.org/pdf/4137/413740750006.pdf

Perdomo, M. (2008). El rol y el perfil del docente en la educación a distancia. www.salvador.edu.ar/vrid/publicaciones/PErdomo.doc.

Sarmiento, M. (2007). La enseñanza de las matemáticas y las NTIC. Una estrategia de formación permanente. Universitat Rovira i Virgili. https://www.tdx.cat/handle/10803/8927#page=1

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Enseñanza de la transformación de simetría con tecnologías digitales desde una perspectiva sociocultural

Jessica Lineth **Ortiz** Rivera
Universidad del Valle
Colombia
jessica.lineth.ortiz@correounivalle.edu.co
Darlyn Victoria **Peña** Ramírez
Universidad del Valle
Colombia
darlyn.pena@correounivalle.edu.co

Palabras clave: Transformaciones geométricas; elementos socioculturales; tecnologías digitales; experimento de enseñanza; simetría.

Planteamiento y justificación del problema

Investigaciones en Educación Geométrica señalan que el aprendizaje de las transformaciones geométricas es un elemento fundamental en la enseñanza de la geometría en la secundaria (Camargo & Acosta, 2012). En ese mismo sentido, autores como Moreno (1998) señalan posibles beneficios que puede llegar a desarrollar un estudiante a través de su aprendizaje de las transformaciones geométricas, por ejemplo, el "reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico" y la "confianza en las propias capacidades para percibir el espacio y resolver problemas geométricos". Por otro lado, Robayo (2021) considera que el aprendizaje de las transformaciones geométricas como la traslación y simetría axial, desde una perspectiva cultural, puede aportar a los estudiantes una mejor comprensión de los efectos de las transformaciones geométricas sobre las figuras, además, permite que los estudiantes exploren diferentes tipos de figuras, diferentes a las que acostumbran rutinariamente en clase, con un significado cultural.

Así pues, la enseñanza de las transformaciones geométricas, también incluye una reflexión respecto al papel que juegan las herramientas, incluidas las tecnologías digitales, en la actividad geométrica. En ese sentido, Palmas (2018) plantea algunos aportes de las TD a la educación matemática desde una perspectiva cultural, señalando que las TD posibilitan oportunidades de crear un vínculo entre los elementos matemáticos de la cultura con las ideas matemáticas socialmente reconocidas que se movilizan en la computadora, a través de nuevas maneras de hacer matemáticas, y, por ende, nuevas maneras de actuar sobre ellas.

Considerando lo anterior, en este proyecto de trabajo de grado se problematiza la enseñanza de las transformaciones geométricas, considerando el papel de las tecnologías digitales y elementos socioculturales, para ello se propone una intervención en el aula a través de un experimento de enseñanza (Molina et al, 2011), entendido como una modalidad de investigación de diseño, en la cual se estudian las características de la intervención didáctica y se valida a través del análisis retrospectivo de su implementación.

Así pues, el objetivo de este trabajo es: Fundamentar el diseño, implementación y análisis retrospectivo de un experimento de enseñanza de las transformaciones geométricas a partir de elementos socioculturales y el uso de geometría dinámica con estudiantes de séptimo grado.

Marco teórico

Para el desarrollo del marco teórico se toman en consideración algunos elementos importantes como el aprendizaje de las transformaciones geométricas, en ese sentido las dificultades están relacionadas con la comprensión de los conceptos como ángulos, equidistancia y de los objetos como vector, entre otros, lo cual juega un papel importante para la interpretación de las representaciones gráficas. Adicional a ello, el tipo de recurso empleado para la visualización de las transformaciones puede generar cierto grado de dificultad o distracción para los estudiantes, pues deben hacer un esfuerzo mayor para comprender una transformación.

Por otro lado, se reconocen elementos geométricos importantes para las transformaciones geométricas, en este caso transformaciones de isometría, las cuales conservan la congruencia como propiedad invariante, la cual permite evidenciar que los elementos de una figura geométrica no se deforman y conservan sus distancias entre puntos.

Finalmente, se toman en consideración algunos elementos curriculares las cuales establecen aspectos y conceptos que se deben tener en cuenta en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, como los movimientos, la orientación, entre otros aspectos. adicionalmente brinda elementos a considerar para el desarrollo del diseño de un experimento de enseñanza.

Metodología

En el presente trabajo se aborda la investigación de diseño como enfoque metodológico, entendido como un modelo de investigación principalmente de naturaleza cualitativa, descriptiva e interpretativa sumamente usando en la investigación internacional en Educación Matemática (Molina, et al. 2011). Adicionalmente, siguiendo las percepciones de Molina et. al (2011) con los experimentos de enseñanza se espera que los estudiantes construyan conocimiento y así mismo que los investigadores/profesores construyan conocimiento a partir de la intervención. Finalmente, la ejecución de los experimentos de enseñanza está dividida en tres fases: i.) la preparación del experimento, ii.) experimentación para promover el aprendizaje, es aquí donde se llevan a cabo las intervenciones en el aula, y iii.) la ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

Referencias y bibliografía

Acosta, M., & Camargo, L. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (N° 32), pp. 4-8.

Molina, M et al. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, vol. 29, No. 1, pp. 75-88, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824

Moreno-Carretero, M. (1998). Didáctica de la matemática en la educación secundaria. Manual para la formación inicial del profesorado de secundaria. Universidad de Almería, servicio de publicaciones.

Palmas-Pérez, S. (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. Revista Colombiana de Educación, (74), 109-132.

Robayo, L. (2021). Transformaciones geométricas en el plano, con proyección cultural y aporte a la paz. Bogotá, DC.: Universidad Pedagógica Nacional.

EOS, la fotografía, Tracker y GeoGebra en la rectificación de curvas

Rafael **Pantoja** Rangel
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
México
rafael.prangel@academicos.udg.mx
Marithé **Rodríguez** Vieyra
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
México
maritherv@gmail.com
María Teresa **Dávila** Araiza
Universidad de Sonora
México
tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen

La propuesta tiene que ver con la aproximación de la longitud de arco de líneas curvas de situaciones problema de la vida real, como el juego de pasamanos de un parque urbano, el plano del centro universitario CUCEI de la Universidad de Guadalajara y el arco de un puente peatonal de una carretera, que se fotografían a fin de modelar la línea curva seleccionada para rectificar. Se manipula la fotografía con el software Tracker para obtener datos de la línea seleccionada, mismos que se exportan a GeoGebra para ajustar una función a la trayectoria y obtener un acercamiento a la magnitud de la longitud de arco. Las actividades se realizaron en trabajo individual y colaborativo Los alumnos logran aproximar la longitud de arco con un margen de error muy pequeño, además de que se motivan por relacionar la matemática escolar con el contexto de la vida cotidiana.

Palabras clave: Rectificación de curvas; Longitud de arco; Situación problema; Tracker; GeoGebra, Fotografía.

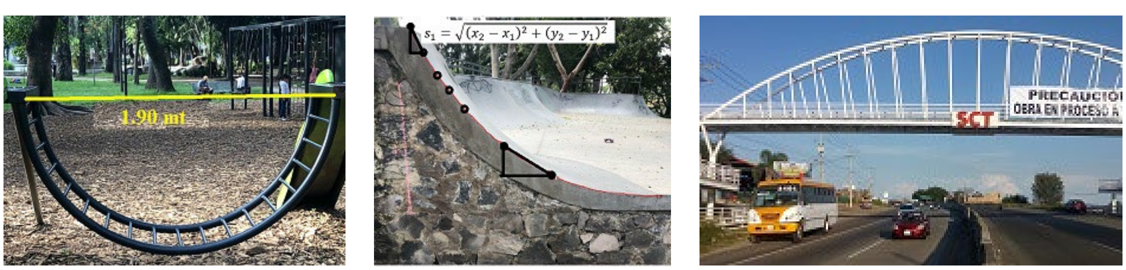
Introducción

En los libros de texto, los ejercicios y problemas del tema longitud de arco o rectificación de curvas como se le llamaba en la antigüedad, se centran en la aplicación de la integral $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$, dada la función y en algunas ocasiones los límites de integración, para luego aplicar alguno de los métodos de integración vistos en clase, desprovisto en su mayoría, de un contexto relacionado con la vida cotidiana, lo que se contrapone a lo mencionado por Hitt (2003), quien afirma que sí la enseñanza del cálculo se restringe solo a los aspectos algebraicos sin poner atención a las distintas representaciones semióticas, los alumnos no comprenderán el cálculo.

A partir de la revisión de textos de cálculo sobre la rectificación de curvas (Stewart, 2012; Purcell, Varbeg y Rigdon, 2007; Larson y Edwards, 2016) se encontró que todos incluyen el procedimiento de aproximar la magnitud de la longitud de una curva con un polígono y sumar los segmentos rectilíneos que lo forman, como una acción para comprender el tema y de ahí se pasan de manera directa a emplear el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para solucionar ejercicios, en los que se dota al estudiante de la función $f(x)$ continua en $x \in [a,b]$ y diferenciable en $x \in (a,b)$ y aplicar la fórmula $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$ para rectificar la curva.

En otro libro se pide calcular la distancia recorrida por una pulga sobre la línea definida por una función en un intervalo dado, lo cual dista mucho de ser un problema de un contexto de la vida cotidiana, que es interesante en principio, que se puede solucionar, pero es difícil concebir que un alumno lo comprenda sin haberlo visualizado y preguntarse si en la realidad la pulga logra caminar sobre la línea definida por la función, lo que conduce a que es un problema ficticio ligado a la construcción de conceptos del cálculo.

En la investigación se desarrollaron actividades para lograr aprendizaje, que hacen referencia al método geométrico para llegar al concepto de longitud de arco y que consiste en tomar un determinado número de puntos sobre la línea curva, construir una poligonal y sumar las longitudes de los segmentos (Guada y Güichal, 1993, p. 29). En el caso que se trata en este artículo, se fotografiaron algunos juegos de una unidad deportiva, como el pasamanos (Figura 1a) y una rampa para patineta (Figura 1b) y el arco soporte de un puente de paso desnivel (Figura 1c) y se seleccionaron algunas líneas a rectificar sobre estos objetos, mediante el apoyo del Tracker, software cuyas rutinas permiten marcar las coordenadas sobre la curva a rectificar. Una vez que se han obtenido las coordenadas, se exportan al software GeoGebra para aproximar la longitud de arco de las líneas elegidas sobre los objetos.



1a 1b 1c

Figura 1. Objetos cotidianos empleados para conceptualizar la rectificación de curvas.

Metodología

El objetivo del proyecto fue evaluar el aprendizaje y comprensión del concepto longitud de arco en estudiantes de nivel superior y su relación con la aplicación a situaciones problema (Hitt y Cortés, 2009) de la vida cotidiana (Oliver, et al, 2013; Pantoja, et al, 2020, 2021, 2022) mediante la rectificación de líneas curvas seleccionadas sobre objetos seleccionados en el contexto del estudiante, con el empleo de la fotografía, los programas computacionales Tracker y GeoGebra y una secuencia didáctica integrada de prácticas matemáticas sustentadas en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).

Las prácticas matemáticas integradas en la secuencia didáctica (Díaz Barriga, 2009), se diseñaron de acuerdo a lo planteado por Godino y Batanero (1994, p. 334), quienes consideran una práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, tabular, analítica, escrita, entre otras), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas, pues estos autores perciben a la matemática como una actividad integradas a la resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Los seis tipos de objetos matemáticos primarios, Situaciones problema, Lenguaje, Conceptos, Proposiciones, Procedimientos y Argumentos, que intervienen en las prácticas matemáticas, son representados (Figura 2) en la forma que sugieren Godino, et al, (2007, p. 130).

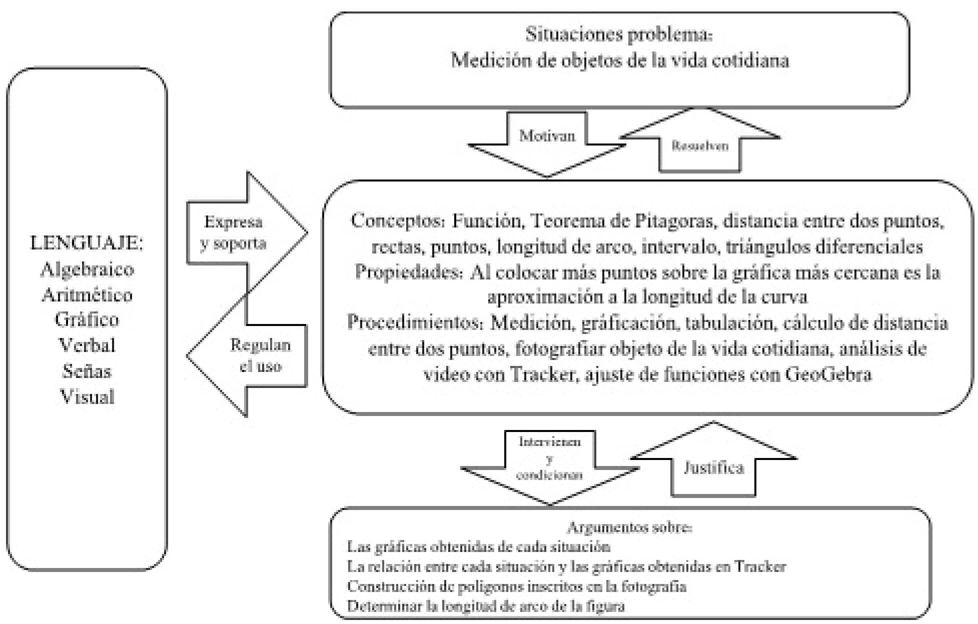
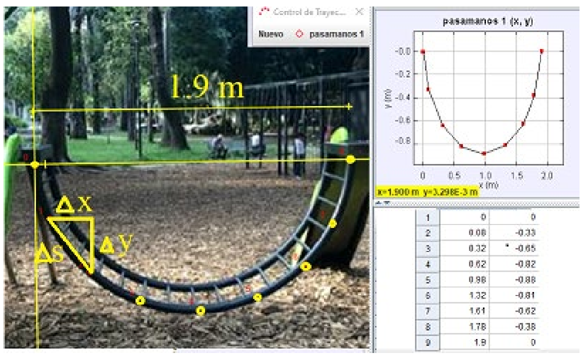


Figura 2. La interpretación en el estudio de los seis tipos de objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas. Tomado de Godino, Batanero y Font (2007) y adaptado para el estudio.

Resultados

Previo a la fase experimental se impartieron dos talleres piloto, para poner en práctica los medios y materiales para el aprendizaje y comprensión de la rectificación de curvas e indagar sobre los aciertos o irregularidades que hubiera que corregir en las hojas de trabajo, la redacción, las gráficas, los tiempos, los manuales de software, entre otros aspectos que pudieran influir en su desarrollo y resultados de la investigación y que se requiere mejorar, incluir o eliminar.

La actividad de apertura fue de preparación para la manipulación del Tracker por clase guiada, apoyado por un video explicativo de las rutinas que se emplean en el análisis de la fotografía del pasamanos, para marcar las coordenadas y exportarlas a GeoGebra y calcular las hipotenusas de los triángulos rectángulos diferenciales construidos (Figura 3), aplicar el teorema de Pitágoras $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ y sumarlas para aproximar la longitud de arco, en este caso con siete segmentos se aproxima a S = 2.50527. Durante el desarrollo de la señalización sobre la línea curva del pasamanos, los estudiantes argumentaron que entre más pequeña sea la medida de los segmentos del polígono.



x_i	y_i	S_i
0.08242	-0.32605	0.39718
0.31828	-0.64562	0.34869
0.61807	-0.82369	0.36239
0.97536	-0.88428	0.35474
1.32219	-0.80983	0.34365
1.61181	-0.62286	0.29806
1.78.19	-0.37892	0.40057
1.90007	0.0033	2.50527

Figura 3. Representaciones semióticas del pasamanos obtenidas con el Tracker.

Se ajustó un polinomio a estos datos y se aproximó la rectificación con el GeoGebra con un valor más preciso, ie, $S = \int_0^{1.9} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2.4803\, m,$ donde $f(x) = 1.52965x^6 - 8.84391x^5 + 20.09042x^4 - 22.59781x^3 + 13.58861x^2 - 4.65181x - 0.00775,$ con lo que culmina las pruebas piloto.

Con la inclusión de los resultados obtenidos en los talleres piloto, actualización de las hojas de trabajo, la redacción, las gráficas, una lectura sobre historia de la rectificación de curvas, los tiempos, la elaboración de videos explicativos y manuales de Tracker y GeoGebra, además de la contingencia sanitaria propiciada por el COVID-19, la fase experimental fue virtual y se ubicó el curso “Longitud de Arco” en el sitio web *Schoology*, en el cual se inscribieron 32 alumnos del segundo semestre de Ingeniería en Mecánica. Las actividades se guiaron con una secuencia didáctica elaborada con el formato de Díaz Barriga (2003) y que se integra tres actividades: apertura, desarrollo y cierre.

La actividad de apertura inició con una discusión sobre la historia de la rectificación de curvas con el empleo de un polígono y la conexión con el procedimiento actual impartido en el aula, como una aplicación de la integral definida. Luego se pide a los estudiantes que rectifiquen la línea curva de una rampa para patineta (Figura 4) que se les entregó en fotografía. Un alumno presentó dos métodos de aproximación para rectificar. El primero consistió en usar la regla graduada e inscribir una línea poligonal de 5 lados en la que consiguió un resultado de 2.5 metros; en el segundo aplicó el teorema de Pitágoras, ya que formó un triángulo rectángulo para encontrar la longitud de la rampa que fungió como hipotenusa y con la medida de referencia y una línea imaginaria como los catetos, así como se muestra en la figura 8 con una mejor aproximación de 2.45 metros.

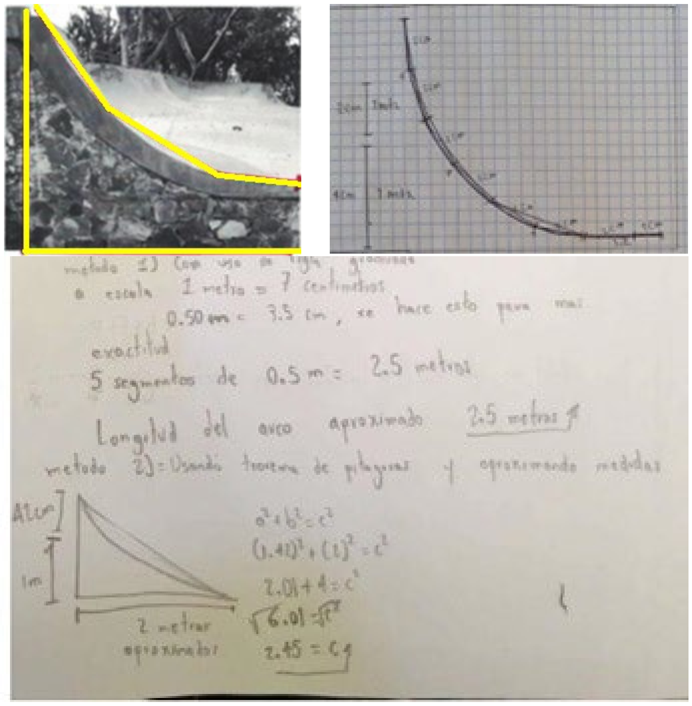
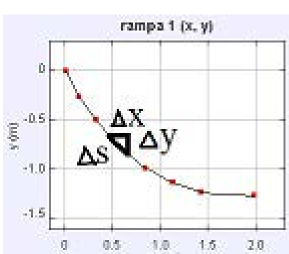


Figura 4. Rampa de patinetas y rectificación de la línea con segmentos rectos.

La tercera forma que se identificó para rectificar la línea sobre la rampa (Figura 5), fue el empleo del Tracker y GeoGebra. Los alumnos aproximaron la longitud de la línea curva de la rampa mediante la suma de los segmentos rectos que unen los puntos marcados con el Tracker sobre la fotografía, para ello se auxiliaron con la hoja de cálculo de GeoGebra y la fórmula de distancia entre dos puntos $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, logrando una aproximación de 2.4996 cm.



x	y	
0.01038	-0.00346020	S1=0.29557
0.14533	-0.26643598	S2=0.29621
0.32526	-0.50173010	S3=0.22558
0.47405	-0.67128027	S4=0.24976
0.65744	-0.84083044	S5=0.24157
0.84775	-0.98961937	S6=0.31265
1.12457	-1.13494809	S7=0.31732
1.42561	-1.23529411	S8=0.55796
1.98279	-1.26643598	

Longitud=2.4966

Figura 5. Trabajo de un estudiante realizado en computadora.

En el proceso se cuestionó a los alumnos si la variación de puntos marcados sobre la fotografía modificaba el valor de la magnitud y un alumno responde:

> … lo que observé es que al hacer más pequeño cada segmento de la recta, "**x**" y "**y**" cambiaron sus valores, por ejemplo, el valor de "**x**" comenzó hacerse más pequeño, comenzó a disminuir, en cambio el valor de "**y**" comenzó a crecer, aumentó de tamaño. Porque al hacer más pequeños los segmentos, estamos recorriendo los puntos en la gráfica, esto hace que en "**x**" se recorran mas cerca de 0, entonces pos eso sus valores se van haciendo más pequeños, y en "**y**" los puntos se van recorriendo hacia arriba, entonce se van alejando de 0 y por lo tanto la cantidad se hace mas grande.

A estas mismas coordenadas se ajustó el polinomio $f(x) = -0.1256x^3 + 0.8227x^2 - 1.7762x - 0.0022$ y se procedió a integrar con resultado ***Integral[sqrt(1 + f´(x)²), 0.01, 1.98]*** =2.48026 m.

La opinión de los alumnos respecto del trabajo desarrollado fue muy puntual e indica que identificaron plenamente el propósito que jugaron el Tracker y GeoGebra en la propuesta didáctica:

> En el método y los programas utilizados me parece que los dos son buenos (Tracker y GeoGebra) porque en uno podemos sacar las coordenadas y en el otro podemos ajustarla para que nos dé un número de aproximación.

Con estos antecedentes se llevó a cabo la actividad de cierre, se organizó a los alumnos de manera aleatoria y se agruparon en equipos de 3 a 4 personas y se eligieron a los que expusieron sus procedimientos, resultados y opiniones del taller. Puesto que fueron 3 grupos de Ingeniería en Mecánica, se seleccionaron 3 fotografías en las que se mostraban diferentes líneas curvas (Figura 6) a rectificar.

Figura 6. Fotografías de objetos de forma curva utilizados.

Los estudiantes escribieron un reporte por equipo sobre el desarrollo de la actividad de cierre, en el que incluyeron una introducción del tema longitud de arco, así como los procedimientos que utilizaron en Tracker y GeoGebra para lograr la aproximación y escribieron sus resultados y conclusiones sobre el taller:

> Al momento de que nosotros realizamos esa práctica nos dimos cuenta la gran ventaja que podemos obtener del cálculo integral, ya que con él nos facilitamos más las cosas, en caso de las ingenierías, porque como podemos ver para todas las cosas hay solución, esto es, que cualquier problema de la vida cotidiana que se nos presente será fácil de resolver, también pudimos observar como a nosotros los alumnos nos funciona la tecnología para todo, no solo para estar conversando, sino que también tenemos softwares que nos podrán ayudar para dichas resoluciones de los problemas de la vida cotidiana.

Estos comentarios vertidos por un equipo son acertados, pues evidencian que se propició una relación intrínseca entre la matemática escolar, las situaciones problema y las TIC, que motivaron al aprendizaje de las matemáticas y su aplicación en áreas de la ingeniería, como son las unidades deportivas y los invernaderos.

En el aspecto de la valoración del curso, opinaron que

> Era una manera muy agradable y no tan enfadosa de aprender, pues la disposición de la asesora para solucionar dudas en todo momento fue atenta y muy bueno porque nos apoyaba en todo.

En la presentación de los reportes, los alumnos explicaron de manera verbal lo realizado en el taller y al terminar, se les hizo algunas preguntas sobre el trabajo en equipo. La mayoría de los equipos mencionó que, a causa de la distancia, se dividieron el trabajo para realizar un trabajo cooperativo, para al final unir y entregar un solo producto; también comentaron que el reparto de tareas la realizaron considerando las cualidades de sus compañeros, pues observaron y reconocieron en su equipo al que tuvo la facilidad al usar los programas como Tracker y GeoGebra e identificaron al que poseía la habilidad de redacción.

Los resultados son prometedores para una alternativa didáctica para el tema, porque en un curso tradicional de matemáticas, sólo se consideran las actividades de solución de problemas y exámenes para valorar el trabajo de los alumnos, salvo que en ocasiones se les deja un trabajo de investigación, pero rara vez se les pide un informe sobre lo desarrollado en clase y que lo expongan, con una presentación elaborada ante todo el grupo.

Los estudiantes comentaron sobre la importancia de la tecnología en sus clases e hicieron hincapié en la inclusión de diferentes materiales en la clase de matemáticas, pues mostraron su inconformidad hacía las clases tradicionales, también comentaron que lograron entender conceptos matemáticos, como el empleo del Teorema de Pitágoras en las actividades, así como el tema de longitud de arco el cual afirmaron que encontraron interesante, puesto que sólo lo habían estudiado una vez sin profundizar en el tema.

Conclusiones

La rectificación de curvas es un tema que motivó a los estudiantes a aprender como una forma complementaria a la tradicional, porque sustentado en el análisis de las evidencias, manifestaron interés por relacionar el trabajo a lápiz y papel con las TIC, en la búsqueda de lograr un aprendizaje significativo, pues fue sorprendente la forma en cómo rectificaron las líneas curvas sobre los objetos cotidianos que se les plantearon, con métodos que no ponen en práctica en sus clases los profesores, optando por la enseñanza expositiva que no siempre favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Los conocimientos previos que posee el estudiante para el tema son importantes y se debe desarrollar alguna estrategia para averiguarlos, porque permitirá al profesor identificar las limitaciones y las ventajas con las que cuenta para iniciar con el proceso de aprendizaje, tal y como se planteo en las dimensiones de la idoneidad didáctica.

Antes de la pandemia del COVID-19 se habían diseñado para un ambiente colaborativo, pero por la pandemia el tema fue tratado a distancia y no existe evidencia determinante que nos permita afirmar si hubo trabajo colaborativo, pues solo se dispone de los comentarios de que se distribuyeron las actividades y al final las reunieron para entregar un producto, tal y como lo propone el trabajo cooperativo.

Las actitudes, valores y emociones de los actores fueron un agregado que emergieron y apoyaron el desarrollo de las actividades, porque es de todos sabido los obstacúlos que se generaron por la pandemia del COVID-19, pero que por mucho fueron superados y se logró que los alumnos se motivaran para aprender la recificación de curvas en la modalidad a distancia, logrando relacionar la matemática escolar con situaciones problema de la vida cotidiana.

La selección de medios y materiales adecuado son una parte importante de una propuesta didáctica, que para este proyecto fueron la cámara fotográfica, el Tracker y el GeoGebra y son considerados por los alumnos como indispensables para realizar la secuencia y obtener los resultados esperados en la investigación. Es relevante mencionar que se elaboraron manuales de operación para el Tracker y GeoGebra para el tema de longitud de arco.

Referencias Bibliográficas

Díaz Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *Comunidad de conocimiento.* UNAM: México. Recuperado en junio 2019 de www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20primera%20Evaluacion/Factores%20de%20Evaluacion/Práctica%20Profesiona/Guia-secuencias-didacticas_Angel%20Díaz.pdf .

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8 (11)*, p. 111-132.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), p. 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39 (1),* p. 127-135.

Guala, G. y Güichal, E. (2021). Longitud de arco de cicloide. *Revista de Educación Matemática, 8*(2), p. 29-42. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11079.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *11º Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia.

Hitt, F. y Cortés J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de la calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital matemática, educación e internet. 10(1).* pp. 1-30.

Larson, R. y Edwards, B. (2016). *Cálculo, Tomo I. Décima Edición*. México: Cengage Learning Editores.

Oliver, E., Aguilar, M., Pizano, I., Carapia, L., y Jiménez, M. (2018). El uso de GeoGebra para solución numérica de integrales como una aplicación para el cálculo de la longitud de arco. *Pistas Educativas*, *33*(104), p. 125-140.

Pantoja, R. (2020). La fotografía de hojas de árbol aplanadas como mediador para propiciar aprendizaje del cálculo de áreas. *Brazilian Journal of Development,* (6) 3: 9923-9940. DOI:10.34117/bjdv6n3-028.

Pantoja, R., Arciga, M., Yakhno, A. y Puga, K. L. (2022). Mathematical Understanding of How a Car Engine Cooling System Works. *Pure and Applied Mathematics Journal*. 11(5): 78-83. doi: 10.11648/j.pamj.20221105.11. ISSN: 2326-9812 (Online).

Pantoja, R., Sánchéz, M. T., López, M. E. y Pantoja.G, R. (2021). Examples to relate school mathematics to everyday life mediated by video, Tracker and GeoGebra. South Florida Journal of Development, Miami, 2 (3), 4417-4434. DOI: 10.46932/sfjdv2n3-046. ISSN 2675-5459

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Examinando el proceso de abstracción sobre el concepto de combinación lineal, bajo el modelo RBC

Sandra Milena **Rojas-Tolosa**
Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia
srojasto@poligran.edu.co
William Alfredo **Jiménez** Gómez
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
wjimenez@pedagogica.edu.co

Resumen

Las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal se aluden a su alto nivel formal y abstracto. Reconociendo la importancia del proceso de abstracción y su papel en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo del pensamiento matemático, surge el interés por analizar este proceso en la construcción de conocimientos del álgebra lineal, en particular del concepto de combinación lineal a través de la interacción con un recurso de GeoGebra. A través de las tres acciones epistémicas de reconocer, construir con y construir, que configuran el modelo RBC, se describen las construcciones de conocimiento abstracto, evidenciadas en el trabajo de los estudiantes al abordar una situación de combinación de colores diseñada en un recurso digital. El carácter dinámico e interactivo del recurso permite generar ejemplos aleatorios posibilita identificar regularidades y relaciones entre diferentes representaciones para establecer conexiones con conocimientos previos y verificar conjeturas.

Palabras clave: Combinación lineal; abstracción; modelo RGB; GeoGebra.

Introducción

El álgebra lineal es uno de los cursos presentes en los planes de estudio de carreras como ingeniería, economía, estadística, matemáticas y física. Su importancia radica en ser una de las áreas con mayor aplicabilidad en diversas situaciones problema de la vida real y de las ciencias que pueden ser abordados desde los conceptos que la componen (Mutambara, Bansilal, 2018; Álvarez-Macea, Costa, 2019). Por lo general, un curso de algebra lineal aborda temáticas como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, vectores, espacios vectoriales, transformaciones lineales y, valores y vectores propios, de las cuales, por lo general, los estudiantes de educación superior sólo han tenido un acercamiento previo con la primera temática.

Para los docentes es evidente que este curso constituye un gran desafió para los estudiantes dado su carácter formal y abstracto (Dorier, 2000; Penagos, Mariño, & Hernández, 2017; Trigueros, 2018; Mutambara & Bansilal, 2018), considerándola como tediosa, de gran complejidad (Álvarez-Macea, Costa, 2019), generando diversas dificultades y errores en el proceso de aprendizaje y por tal razón los estudiantes suelen reducir esta área al campo de lo procedimental (Álvarez-Macea, Costa, 2019), en especial cuando se empieza a abordar conceptos de un nivel superior como lo es de espacio vectorial y transformaciones lineales. El estudio de las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra lineal ha sido de gran interés para la comunidad de educadores matemáticos (Oktaç y Trigueros, 2010; Mutambara & Bansilal, 2018).

Mutambara y Bansilal (2018) a partir de la revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal encuentra que las principales dificultades en el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal radican en: la identificación y construcción de casos concretos vs genéricos; el desarrollo de pruebas formales; dificultad para reconocer lo que se debe demostrar para determinados axiomas; falta de conexión con los conocimientos previos; comprensión y uso de lenguaje y notación matemática; falta de comprensión y producción de contraejemplos para construir justificaciones; falta de habilidad para producir ejemplos correctos; dificultades en la aplicación de algoritmos; interpretación de los resultados en un contexto dado; problemas relacionados con la comprensión de los conceptos subyacentes de las operaciones binarias y conjuntos.

Oktaç y Trigueros (2010) y Penagos, Mariño, & Hernández (2017) afirman que existe la necesidad de realizar investigaciones que no sólo se queden en el análisis de las dificultades, sino en la formulación de propuestas que ayuden a atenderlas. Este es el propósito de nuestro trabajo, diseñar una propuesta de aprendizaje mediado por un recurso de GeoGebra para la comprensión del concepto de combinación lineal y el desarrollo del proceso de abstracción, en un contexto diferente al geométrico que es el que se suele emplear para su introducción. El trabajo se centra en el tema de combinación lineal dado que este es uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal, al estar estrechamente relacionado con conceptos como dependencia e independencia lineal y espacio generado (Harel, 2018; Mutambara & Bansilal, 2018).

La capacidad lógico-interpretativa y abstractiva, es un elemento clave en el desarrollo de la inteligencia matemática y contribuye positivamente al entendimiento de conceptos de otras áreas, necesarios en la resolución de un problema que implique procesos como modelación, simulación, validación, entre otros claves en el quehacer un profesional en ingeniería (Edgar & Antonio,2014; Jaramillo Naranjo & Puga Peña, 2016). El desarrollo de esta capacidad podría ser el único y más importante objetivo en la enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado (Penagos, Mariño, & Hernández, 2017), es por tal razón que han surgido marcos teóricos y metodológicos para reconocer los procesos de construcción de conocimiento matemático bajo el análisis del nivel de abstracción del estudiante.

Modelo RBC

De acuerdo con Hazzan y Zazkis (2005), no existe un consenso frente a un significado único, pero si es posible examinarlo desde diversas perspectivas. En la presente propuesta se usa el modelo abstracción en contexto (AiC) al ser un marco teórico que integra el enfoque cognitivo y situado con elementos teóricos de la actividad y el constructivismo (Dreyfus y Kidron, 2014), y al ser un modelo fácilmente replicable y adaptable en diversos contextos de construcción de conocimiento abstracto, en este caso, el álgebra lineal. Es un marco teórico metodológico para un análisis cognitivo del proceso de abstracción de los estudiantes al construir conocimiento matemático. Este modelo se fundamenta en tres conceptos: i) la matematización matemática (teoría propuesta por Freudental, 1999), entendida como "reorganización de construcciones matemáticas previas dentro de las matemáticas y por medios matemáticos, mediante los cuales los estudiantes construyen una nueva construcción abstracta" (Dreyfus, 2015, p.2); ii) teoría de la actividad (propuesta por Davyvod, 1990), en la que se plantea que las acciones ocurren en un contexto y sólo tienen sentido dentro de la actividad en la que tienen lugar, tiene en cuenta tanto procesos cognitivos como el contexto social y curricular determinado, la abstracción parte de una manera simple, no desarrollada y vaga; ii) el contexto, el cual integra cualquier pieza del entorno presente y pasado que pueda influir en los procesos individuales de construcción del conocimiento, dentro de ellos se encuentran aspectos históricos (experiencias previas en el aprendizaje de las matemáticas), aprendizaje (factores curriculares, normas socio-matemáticas), social (compañeros, familia, profesor), las tareas (Dreyfus y Kidron, 2014).

Los procesos de construcción de conocimiento bajo este modelo se observan a través de tres acciones epistémicas observables (Dreyfus, 2015): *reconocer,* el alumno se da cuenta de que un determinado constructo de conocimiento es relevante en la situación que se presenta; *construir- con*, combinación de los constructos reconocidos con el fin de lograr un objetivo localizado y actualización de una estrategia, una justificación o solución de un problema; *construir*, acción central de la abstracción: Ensamblar e integrar construcciones anteriores mediante la matematización vertical para producir una nueva construcción, usa o expresa una nueva construcción. Una ampliación de este modelo es el RBC+C que involucra el proceso de consolidación, cuyos criterios de inmediatez, autoevidencia, confianza, flexibilidad y conciencia como indicadores de que un conocimiento se ha consolidado, para lo que se requiere de la toma de datos de diferentes actividades, surge después de la construcción y es empleado en la construcción de otro nuevo conocimiento (Hazzan y Zazkis, 2005).

Método

En el marco de interés de la propuesta, se desarrolló una investigación cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). En primer lugar, consulta de fuentes primarias y secundarias sobre las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra lineal y el proceso de abstracción para identificar relaciones entre estos dos aspectos, así como identificar los conceptos clave que es necesario centrar la atención por ser claves para la comprensión de otros, encontrándose que el concepto de combinación lineal es uno de ellos y sobre los cuales poco que han desarrollado propuestas didácticas para su abordaje. Los resultados de esta fase conllevaron a la siguiente constituida por el diseño de un recurso educativo digital interactivo en el software matemático GeoGebra, en el que se encuentra presente este concepto en un contexto de combinación de colores en el modelo RGB, en el que los colores se consiguen mezclando diferentes proporciones de rojo, verde y azul y se identifica cada color resultante con un vector de $\mathbb{R}^3$, donde cada componente representa la intensidad de los colores rojo (R), verde (G) y azul (B), cuyos valores varían en una escala de 0 a 255. El uso del recurso estuvo orientado por una serie de tareas que conllevan al estudiante a explicar y validar sus descubrimientos. En una tercera fase, recoger y analizar las respuestas de los estudiantes a la luz del proceso de abstracción teniendo en cuenta la propuesta teórica y metodológica de Dreyfus.

Esta propuesta se desarrolló con estudiantes de programas de ingeniería de software, ingeniería industrial y tecnología en logística de la institución universitaria Politécnico Grancolombiano (Colombia), de la modalidad virtual, que cursaban la asignatura Álgebra Lineal. Cabe mencionar que los cursos de la modalidad virtual cuentan con una estructura de desarrollo de ocho 8 semanas compuesto por 150 estudiantes y con estrategia de trabajo independiente y colaborativo. Dentro del módulo, los estudiantes cuentan con foros en los que se pueden registrar sus inquietudes, propuesta de soluciones a ejercicios o problemas propuestos por el tutor, así como dos espacios de encuentro sincrónico semanales con el docente para aclarar inquietudes sobre lo estudiado o profundizar en las temáticas.

Una de las actividades evaluativas es un trabajo colaborativo para el cual se conforman aleatoriamente grupos de 5 estudiantes. La actividad se desarrolla durante las semanas 3, 4 y 5, a través de un foro de debate. El tutor plantea una actividad en la que los estudiantes aplican lo aprendido durante las primeras semanas del módulo. Toda comunicación y aportes se debe registrar directamente en el foro creado para cada grupo. Los encuentros sincrónicos de estas tres semanas tienen como propósito realimentar las soluciones propuestas por los estudiantes, previa revisión de los foros por parte del tutor así, como dar orientaciones para la actividad a desarrollar en la siguiente semana. La muestra fue seleccionada por conveniencia teniendo como indicador el número de publicaciones registradas en los foros durante las tres semanas. De los 30 grupos formados en el curso, se revisaron 15, siendo los grupos que tuvieron un número mayor a 20 participaciones. Los instrumentos de recolección de información fue la observación de la respuesta dada por los estudiantes a las preguntas que involucran el concepto de combinación lineal, cuyas variables de análisis fueron las tres acciones epistémicas del modelo RBC: reconocer, construir-con y construir, teniendo en cuenta que es una propuesta teórica y metodológica para describir y proporcionar una visión de los procesos de abstracción (Dreyfus, 2015).

Resultados

Las participaciones en el foro permiten evidenciar las tres acciones epistémicas observables relacionadas con el proceso de abstracción, iniciando en la acción de reconocimiento, a través de la Construcción-con y terminado en construcción, el siguiente esquema muestra este proceso con algunos ejemplos tomado de los foros y la producción de los estudiantes, como ejemplificación.

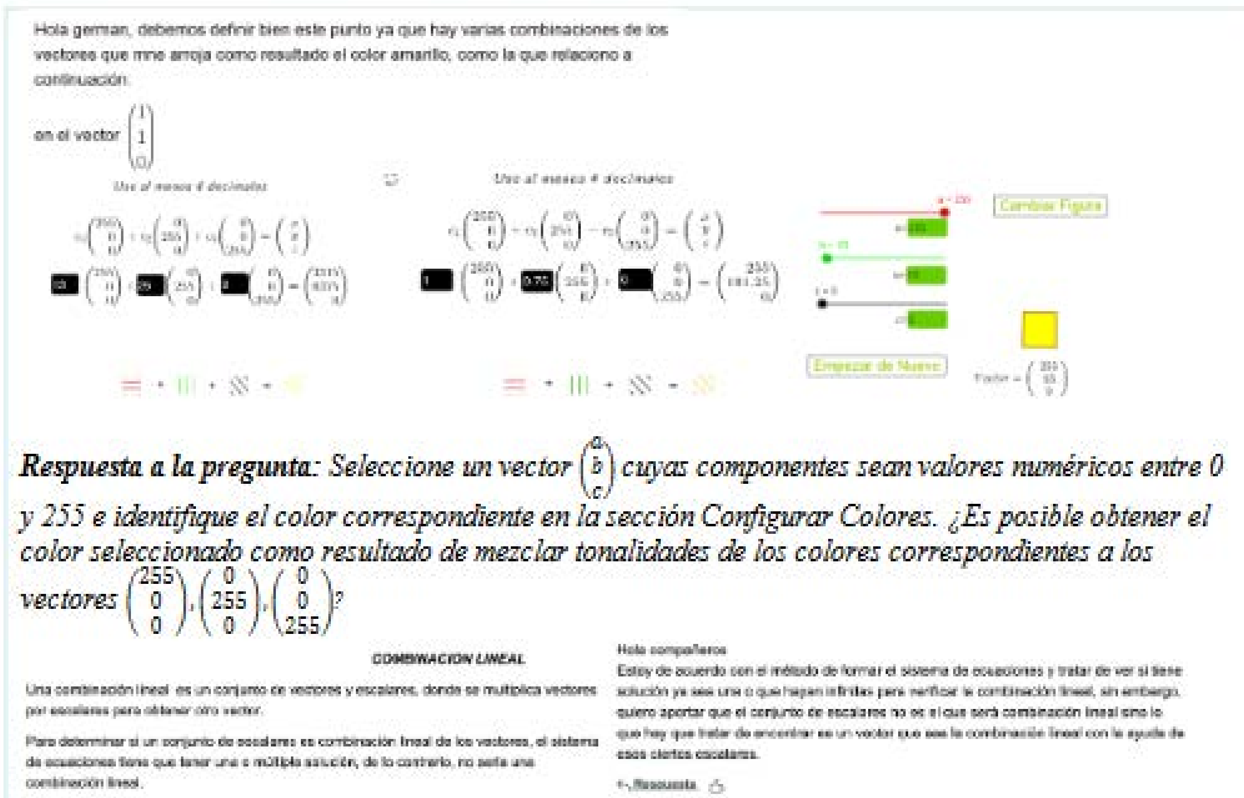
Tabla 1

Acción epistémica observable: reconocer.

Acción epistémica observable	***Reconocer***	*Concepto o proceso*	*Combinación lineal y sistemas de ecuaciones.*

Evidencia

Respuestas a la pregunta: *¿Cuál es el vector que representa el color amarillo?*



Al responder la primera pregunta, los estudiantes reconocen implícitamente la necesidad de verificar por qué se obtiene un color amarillo para diferentes vectores, de lo cual se dan cuenta que son diferentes tonalidades. Posteriormente, los estudiantes encuentran sentido a los diferentes resultados obtenidos al responder la pregunta *¿Qué cambios en el color produce la multiplicación de un vector por un escalar?*

El cambio que produce un vector por un escalar hace referencia a la tonalidad que toma al cambiar el valor que se asigna. Como se muestra en la imagen 1 es la tonalidad natural del vector, en este caso el verde; si se cambia el valor por un escalar de decimales 0,756 como se ve en la imagen 2 el tono del verde se oscurece.
Por eso se concluye que entre más cerca del 1 es más vivo el color; y entre más cerca del 0 su tonalidad oscurece.

Al responder la segunda pregunta los estudiantes reconocen que deben emplear el concepto de combinación lineal; sin embargo, al momento de definirlo con sus propias palabras sólo reconoce la multiplicación escalar dando cuenta de una de una de las dificultades mencionadas por Mutambara y Bansilal (2018) (problemas relacionados con la comprensión de los conceptos subyacentes de las operaciones binarias y conjuntos). Por otra parte, se reconoce el proceso matemático que se debe emplear para verificar si un vector se puede expresar como combinación lineal de un conjunto de vectores dados.

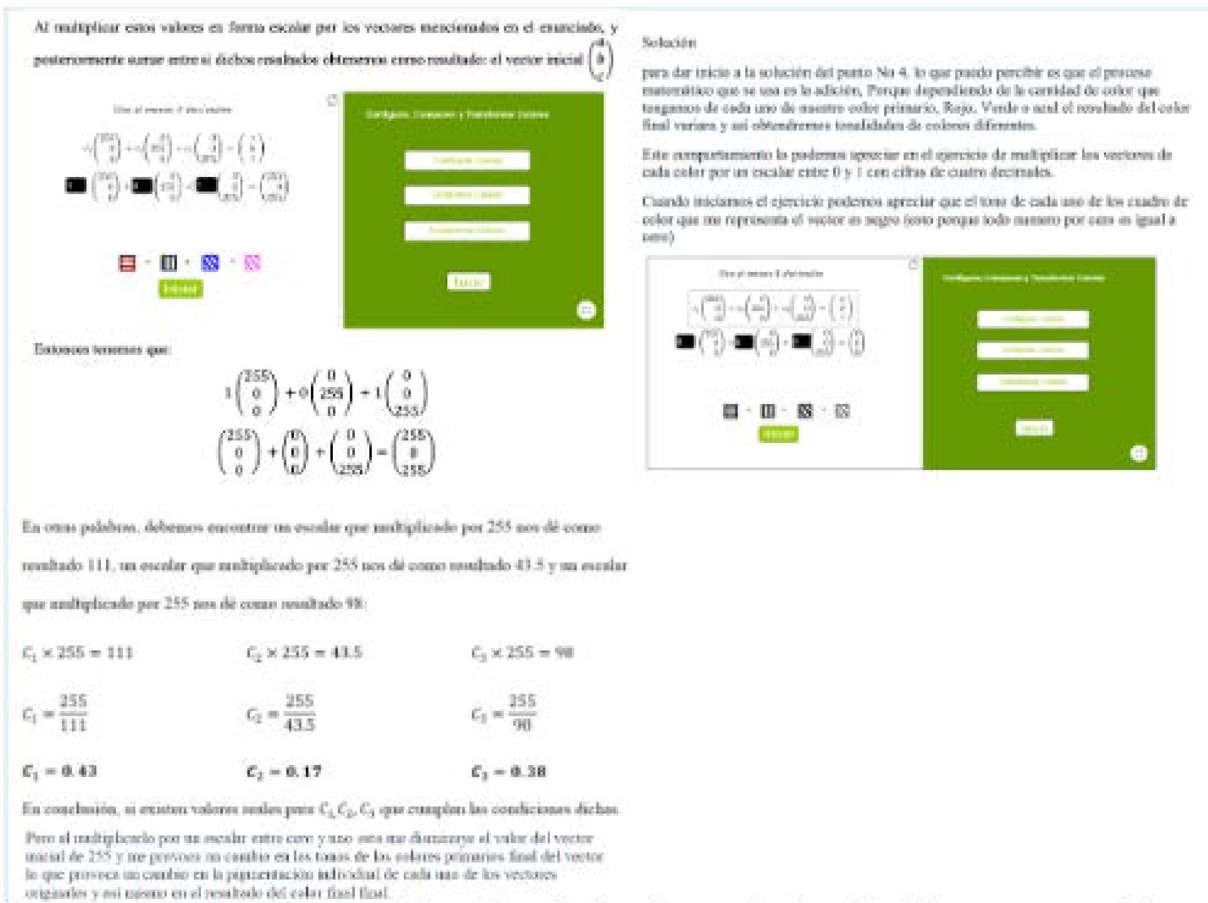
Fuente: elaboración propia. 2022.

Tabla 2. *Acción epistémica observable: construir-con*

ión epistémica observable	***Construir-con***	*Concepto o proceso*	*Construciion de vectores particulares usado el concreto y la combinacion lineal.*

Evidencia

Junto a la segunda pregunta de la acción anterior, se solicitó a los estudiantes describir el proceso matemático que se usa para obtener cualquier color a partir de los vectores dados y luego, verificar por medio de un proceso matemático, los resultados obtenidos en la exploración con el recurso. Algunas respuestas fueron:


Al multiplicar estos valores en forma escalar por los vectores mencionados en el enunciado, y posteriormente sumar entre si dichos resultados obtenemos como resultado: el vector inicial

Entonces tenemos que:

$$1\begin{pmatrix}255\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\255\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\255\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}255\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\255\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}255\\0\\255\end{pmatrix}$$

En otras palabras, debemos encontrar un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 111, un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 43.5 y un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 98:

$C_1 \times 255 = 111$ $\quad C_2 \times 255 = 43.5$ $\quad C_3 \times 255 = 98$

$C_1 = \frac{255}{111}$ $\quad C_2 = \frac{255}{43.5}$ $\quad C_3 = \frac{255}{98}$

$C_1 = 0.43$ $\quad C_2 = 0.17$ $\quad C_3 = 0.38$

En conclusión, si existen valores reales para C_1, C_2, C_3 que cumplen las condiciones dichas.

Pero al multiplicarlo por un escalar entre cero y uno esto me disminuye el valor del vector inicial de 255 y me provoca un cambio en los tonos de los colores primarios final del vector lo que provoca un cambio en la pigmentación individual de cada uno de los vectores originales y así mismo en el resultado del color final final.

Solución

para dar inicio a la solución del punto No 4, lo que puedo percibir es que el proceso matemático que se usa es la adición, Porque dependiendo de la cantidad de color que tengamos de cada uno de nuestro color primario, Rojo, Verde o azul el resultado del color final variara y así obtendremos tonalidades de colores diferentes.

Este comportamiento lo podemos apreciar en el ejercicio de multiplicar los vectores de cada color por un escalar entre 0 y 1 con cifras de cuatro decimales.

Cuando iniciamos el ejercicio podemos apreciar que el tono de cada uno de los cuadro de color que me representa el vector es negro (esto porque todo numero por cero es igual a cero)

Los estudiantes usan el concepto de combinacion lineal para solucionar el problema y generar colores y vectores particulares. Obtienen un sistema de ecuaciones lineales del desarrollo de la combinación lineal y con su solución encuentran los valores escales, que posteriormente verifican con el recurso.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Tabla 3. *Acción epistémica observable: construir*

Acción epistémica observable	***Construir***	*Concepto o proceso*	*Conjunto generador*
Evidencia			

A partir de las actividades desarrolladas en las acciones anteriores, se encuentran algunas evidencias de la construcción del concepto de combinación lineal al integrarlo en la construcción de otro concepto de orden superior.

Para obtener cualquier color se deben multiplicar los escalares (C_1, C_2 y C_3) por los vectores básicos y luego sumar los resultados formando un vector final que será el que da el color final, de la siguiente forma:

$$C_1\begin{pmatrix}255\\0\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\255\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\0\\255\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}C_1(255)\\C_1(0)\\C_1(0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C_2(0)\\C_2(255)\\C_2(0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C_3(0)\\C_3(0)\\C_3(255)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1(255)+C_2(0)+C_3(0)\\C_1(0)+C_2(255)+C_3(0)\\C_1(0)+C_2(0)+C_3(255)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}C_1(255)\\C_2(255)\\C_3(255)\end{pmatrix}$$

El conjunto de números que deben tomar C_1, C_2 y C_3, debe estar dado entre 0 y 1 para que la ecuación dada se cumpla, debido a que 1*255=255, y 255 es el máximo valor que pueden tener a, b y c.

Los estudiantes reconocen un conjunto generador y lo usan para general cualquier vector del conjunto empleando el proceso de combinación lineal y caracterizando los valores escalares en el contexto concreto, integrando los resultados obtenidos en las dos acciones anteriores.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Discusión y Conclusiones

De acuerdo con Hershkowitz et al. (2007b), Dreyfus (2015) y Kidron et al. (2014), la abstracción suele darse en grupos de estudiantes que interactúan entre sí, al tenerse en cuenta las construcciones individuales y los conocimientos compartidos para construir conocimientos base que les permite avanzar. Este aspecto se vio parcialmente reflejado en el trabajo de los grupos puesto que en la modalidad virtual persiste la pasividad, poca participación e interacción de los estudiantes, lo cual se refleja en los pocos aportes frente a la revisión a los aportes de compañeros y comparación frente a los propios. El avance se dio en los encuentros sincrónicos, en los que el papel del tutor es de gran relevancia al plantear preguntas intercaladas y orientadoras que le permitía reconocer en profundidad lo que los estudiantes querían expresar, identificar los errores y las interpretaciones incorrectas que se presentaban y así avanzar en la construcción de su conocimiento.

Aunque el propósito del presente trabajo era dar cuenta de las acciones epistémicas evidenciadas en los aportes de los estudiantes, de los resultados obtenidos y de la experiencias vivida durante el desarrollo de la propuesta de trabajo colaborativo, tanto en el foro como en los encuentros sincrónicos se alcanzó a reconocer lo indicado por Dreyfus y Kidron (2014) al establecer que factores contextuales como la tarea, la historia personal de los estudiantes, el software de computadora, el maestro y metas de aprendizaje influyen en la construcción del conocimiento.

En el caso de la tarea, generó motivación hacia la exploración y describir lo observado, a lo cual no suelen estar acostumbrados los estudiantes y suele ser difícil, lo que se relaciona con su historia personal frente a sus experiencias previas con las matemáticas (Kidron et al., 2014). En cuanto al recurso de GeoGebra, la interacción con él, al permitir variar cantidades y observar los cambios de color y sus mezclas, permitió dar un sentido a multiplicación por escalar y la combinación lineal en el proceso de mezcla de colores y hacer inicialmente una verificación con el recurso y luego validarla matemáticamente. Respecto al maestro, se puede ver en lo descrito en el párrafo anterior.

De acuerdo con lo anterior y que este documento sólo se analizó la actividad de los estudiantes en una actividad asincrónica, se abre la posibilidad a un campo no aún explorado frente al análisis de la construcción del conocimiento matemático bajo el modelo de abstracción contemplando tanto los factores contextuales descritos por Kidron et al. (2014) como los espacios de interacción sincrónica y asincrónica en una modalidad virtual.

Referencias bibliográficas

Álvarez-Macea, F. Costa, V.A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático, 10* (2), 65-78

Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers (pp. 6-11).

Dreyfus, T. (2015). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. In: Cho S. (eds) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_7

Dreyfus T., Kidron I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (eds) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_6

Edgar, S. M., & Antonio, P. J. (2014). Lógica y abstracción en la formación de ingenieros: una relación necesaria. *Ingeniería, Investigación y Tecnología, 15*(2), 299-310. https://doi.org/10.1016/s1405-7743(14)72218-8

Harel G. (2018) The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual Need and Epistemological Justification and Their Constituents. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3- 319-66811-6_1

Hazzan, O., & Zazkis, R. (2005). Reducing Abstraction: The Case of School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 101-119. https://doi.org/10.1007/s10649-005-3335-x

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación. México: McGraw-Hill.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2007b). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 41–68. https://doi.org/10.1007/bf03217455

Jaramillo Naranjo, L. M., & Puga Peña, L. A. (2016). El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophía, 2*(21), 31. https://doi.org/10.17163/soph.n21.2016.01

Kidron I., Artigue M., Bosch M., Dreyfus T., Haspekian M. (2014). Context, Milieu, and Media- Milieus Dialectic: A Case Study on Networking of AiC, TDS, and ATD. In: Bikner- Ahsbahs A., Prediger S. (eds) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*.

Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_10

Mutambara L.H. & Bansilal S. (2018). Dealing with the Abstraction of Vector Space Concepts. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_7

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal?.*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 373-385.

Penagos, M., Mariño, L. & Hernández, R. (2017). Mejoramiento de la competencia escritural en la educación básica primaria a través de la mediación instruccional y pedagógica del video. *Perspectivas*, *2*(1). 105-116.

Trigueros, M. (2018) Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_2

Exclusão/Inclusão de Estudantes com Diferentes Características: Um Olhar sobre Atividade- Matemáticas-Não-Exclusivas-Com-Tecnologias- Digitais

Evelyn dos **Santos** Catarina
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil
profevelynmat@gmail.com
Maurício **Rosa**
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil
mauriciomatematica@gmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva analisar a visão de uma professora/pesquisadora em educação matemática e inclusão sobre como professoras/professories/professores podem desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com- TD de forma não-exclusiva nos espaços educativos. Para tanto, este trabalho discute por meio da entrevista com essa professora/pesquisadora da área da educação matemática e inclusão as possibilidades de desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com-Tecnologias-Digitais-não-exclusivas. Nesse contexto, o presente trabalho traz como aporte teórico estudos que relacionam a questão da exclusão/inclusão, o ensino de matemática, as Tecnologias Digitais e o Design Universal da Aprendizagem (DUA). A seleção de três excertos da entrevista com a pesquisadora expõe que a experiência com as TD é válida e necessária nos espaços educacionais para abordagem de atividades-matemáticas-com-TD, mas ao mesmo tempo para que as atividades sejam de forma não-exclusivas pensar nos recursos de materiais manipuláveis se torna indispensável.

Palavras-chave: Exclusão/Inclusão; Educação Matemática; Tecnologias Digitais; DUA; Estudantes.

Introdução/Justificativa

Ao olharmos para contexto escolar e a questão de estudantes com limitações e especificidades, observamos em termos de legislação que a educação especial sinaliza que diferentes grupos de indivíduos independentes de suas limitações devem estar inseridos no contexto educacional regular. Nesse sentido, enquanto docentes, consideramos que todas/todes/todos estudantes pertencentes às nossas salas de aula possuem especificidades e limitações. Essas, no entanto, são diferentes e precisam ser observadas com particularidade. Dessa forma, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Brasil, 1996) destaca em seu Artigo 58 que "Entende-se por educação especial, para os efeitos desta lei, a modalidade de educação escolar oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para educandos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação". (Brasil, 1996).

No entanto, a educação especial não é uma educação em paralelo, ou que ocorra de modo excludente, embora em um mesmo espaço físico (a escola, por exemplo). Logo, ao pensarmos em atividades diferenciadas para determinados grupos dentro dos espaços educacionais, podemos estar cometendo exclusões ao invés de inclusões. Podemos estar excluindo aquelas/aquelus/aqueles estudantes que possuem diferentes características em relação ao grupo como um todo, ao invés de respeitarmos de fato a legislação que indica o direito dessas/dessus/desses em ter a oportunidade de ter a educação que todas/todes/todos tem. Assim,

> [...] A sociedade exclui para incluir e esta transmutação, é condição da ordem social desigual, o que implica o caráter ilusório da inclusão. Todos estamos inseridos de algum modo, nem sempre decente e digno, no circuito reprodutivo das atividades econômicas, sendo a grande maioria da humanidade inserida através da insuficiência e das privações, que se desdobram para fora do econômico. (Sawaia, 2001, p. 8.)

Desta forma, não podemos pensar que incluir estudantes com diferentes características nas classes regulares é somente inserir essas/essus/esses estudantes neste espaço, é preciso que elas/elus/eles pertençam a todo o contexto educacional, desde o acesso aos espaços educacionais em si até o acesso às atividades promovidas nesses espaços.

Assim, pensando nessas atividades, no contexto escolar, nas/nus/nos estudantes com diferentes características, no ensino de matemática e nas Tecnologias Digitais (TD), há questões que nos chamam atenção: como professoras/professories/professores podem desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com-TD de forma não-exclusiva nos espaços educativos? O que precisa ser observado? Como essas atividades podem ser produzidas? Visto que atividades-matemáticas-com-TD são pensadas na perspectiva de Rosa e Mussato (2015) e Mussato e Rosa (2019), no qual as TD não são concebidas como auxiliares, mas como partícipes da constituição do conhecimento matemático, assim como, indo além e focando na questão dessas atividades serem não-exclusivas, ou seja, são atividades pensadas para atender todos/todas/todes estudantes pertencentes aquele espaço educativo e não somente um grupo de estudantes ditos com deficiência, ou ditos sem deficiência.

Logo, pensando nas questões levantadas, temos como objetivo neste trabalho analisar qual a visão de uma pesquisadora em educação matemática e inclusão sobre como professoras/professories/professores podem desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com-TD de forma não-exclusiva nos espaços educativos. Para isso evidenciaremos excertos dessa participante de nossa pesquisa a fim de cumprir com esse objetivo.

Fundamentação Teórica

Muitas são as diferenças que encontramos dentro dos espaços educacionais e com elas surgem as necessidades de um olhar atento sobre nossas práticas docentes, principalmente, quando falamos sobre a inclusão de estudantes com diferentes características. Nesse processo, então, é importante pensarmos na discussão da dialética exclusão/inclusão. Dessa maneira,

> A dialética inclusão/exclusão gesta subjetividades específicas que vão desde o sentir-se incluído até sentir-se discriminado ou revoltado. Essas subjetividades não podem ser explicadas unicamente pela determinação econômica, elas determinam e são determinadas por formas diferentes de legitimação social e individual, e manifestar-se no cotidiano como identidade, sociabilidade, afetividade, consciência e inconsciência. (Sawaia, 2001, p. 9.)

Isso nos leva a pensar que quando falamos de indivíduos com diferentes características em espaços educacionais, entre outros, o mesmo processo que se oficializa como inclusivo, se mostra como aquele que exclui. Ou seja, aceitamos pessoas com deficiência na escola, mas, muitas vezes, excluímos essas/essus/esses estudantes criando atividades exclusivas para essas/essus/esses estudantes. Essas atividades criadas muitas vezes não estão no mesmo nível que as atividades produzidas para as/ês/os demais, não se referem as mesmas questões ensinadas às/aes/aos demais e não se destinam aos mesmos objetivos pedagógicos que as ofertadas às/aes/aos demais estudantes. Isso se mostra como exclusão, embora exercida em um mesmo espaço educativo dito como inclusivo. Esse processo é denominado como microexclusão (Faustino et al., 2018).

Nesse sentido, ao olharmos para os espaços educacionais, notamos que neles existe uma mistura de indivíduos, cada indivíduo com suas excepcionalidades e limitações. Por isso, debater como lidar com as diferenças e quais recursos inserir nesses espaços de forma a contribuir para a diversidade de modos de aprender é de extrema importância. Assim, a atenção que atribuímos às TD como meios de revelação (Rosa, 2020), mostra-se como importante fator para tentar sanar muitas exclusões nas aulas de matemática.

Sendo assim, refletir sobre a experiência com TD em sala de aula também se mostra pertinente, principalmente para que possamos não excluir e ressaltar para as/es/os estudantes que ao inserir as TD nas aulas estamos pensando algo além do uso pelo uso, estamos dispostas/es/os a proporcionar que as/es/os estudantes possam ser-com, pensar-com e fazer-com-TD na perspectiva ressaltada por Rosa (2015, 2018, 2020). Nessa perspectiva, então, ao refletirmos sobre a experiência com TD na sala de aula, pensamos em todo contexto que esse ambiente envolve e em todas/todes/todos estudantes que a este espaço pertence, para que nossas práticas docentes não sejam vistas como exclusivas, no sentido de ser uma prática direcionada somente para um determinado grupo. Por isso, consideramos uma prática pensada para estudantes com diferentes características, uma prática pensada na perspectiva do Desenho Universal de Aprendizagem (DUA). Dessa forma,

> Na Educação Inclusiva é importante a perspectiva do Desenho Universal para Aprendizagem (DUA) que visa adequar estratégias e recursos de trabalho em sala de aula para a participação de todos os

> estudantes e não apenas iniciativas individuais, não removendo os desafios educacionais, mas removendo barreiras ao acesso dos estudantes à Educação (*apud* Fiatcoski; Góes, 2021, p. 4)

Consequentemente, com esse olhar reflexivo que devemos pensar a abordagem das atividades-matemáticas-com-TD no sentido não-exclusivo para que nossas práticas não sejam ações de exclusão, ações essas que levam estudantes a se sentirem excluídos das/des/dos outras/outres/outros colegas por realizarem tarefas diferenciadas, devido as suas limitações.

Metodologia de Pesquisa

A metodologia utilizada está baseada na pesquisa qualitativa, na qual prezamos pela qualidade e não pela quantidade de informações. A qualidade refere-se à experiência de pesquisadoras/pesquisadores/pesquisadores da área de educação matemática e inclusão como orientadora de professoras/professories/professores em sua produção de atividades não-exclusivas. Isto é, ouvir e dar voz a pessoas que trabalham em espaços educativos matemáticos e pesquisam sobre isso nos pareceu producente para entendermos como orientar a prática docente não-exclusiva. Assim, primeiramente selecionamos seis pesquisadoras/pesquisadories/ pesquisadores que atuam na área de educação matemática e inclusão. Essa seleção ocorreu observando sua participação no grupo de trabalho (GT) de nº 13 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), o qual tem como título "Diferença, Inclusão e Educação Matemática". As/Es/Os seis participantes, então, foram escolhidas/es/os por trabalharem em suas pesquisas diretamente (e a maior parte) com a questão de estudantes com deficiências, o que pode ser analisado através de seus Currículos Lattes. Após seleção, entramos em contato com as/es/os pesquisadoras/pesquisadories/pesquisadores a partir de seus e-mails encontrados em alguns trabalhos selecionados para pesquisa. Dando continuidade ao convite, obtivemos o aceite dessas/dessus/desses participantes por meio de termo livre e esclarecido, formalizamos as datas de entrevistas, juntamente com os respectivos links da plataforma Teams, pela qual as entrevistas foram realizadas e gravadas. A professora/pesquisadora selecionada para este artigo foi a primeira a ser entrevistada e é uma das colaboradoras para a criação e construção do GT 13 da SBEM.

Assim, para conseguirmos analisar o ponto de vista da professora/pesquisadora (que nesse caso identificamos como convidada nº1) sobre a abordagem/desenvolvimento das atividades-matemáticas-com-TD na perspectiva não-exclusiva, verificamos um trecho da entrevista semiestruturada que realizamos com essa.

Primeiramente selecionamos excertos que correspondem às respostas a uma das perguntas efetuadas na entrevista: "focando nas TD, concorda ou contesta que todos/todas/todes estudantes possuem as mesmas condições de utilização dessas tecnologias durante as aulas de matemática?" Em seguida realizamos a análise desses excertos com base em nosso referencial teórico a fim de alcançar nosso objetivo; analisar qual a visão de uma pesquisadora em educação matemática e inclusão sobre como professoras/professories/professores podem desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com-TD de forma não-exclusiva nos espaços educativos. Com isso, apresentamos nossos dados e análise desses na sequência.

Análise de dados

Como resposta à pergunta, a professora/pesquisadora (convidada nº1) foi dialogando com a pesquisadora (primeira autora deste artigo) e articulando os pontos que estavam ligados à temática. Assim, seguem alguns excertos relacionados a esse diálogo:

> *[*...] acho interessante é a possibilidade de que esse design universal tem em relação ao diálogo com o outro, porque o próximo posso produzir esses materiais com o outro? pensar nesse contexto mais universal, dar de você é produzir algo que dê para todos eles usarem todos, né? Em geral. Então, assim, na parte educacional. Não vou te falar que assim, quando máximo é eu, recursos do governo federal para as salas de recursos multifuncionais, chegava muita coisa pronta. E aí isso era interessante. Quando os professores sabiam como usar. Quando isso era divulgado aos professores. E quando o professor entra em contato com o, às vezes o professor especialista e aí às vezes o professor especialista não sabe usar, mas o professor especialista mostra como usar. Mas será que eu tenho interesse em fazer isso? Ou deixa o aluno ali no cantinho? Esses produtos que vêm geralmente são produtos que dá para usar num design, pensar no design universal, porque dá para todos eles. (Convidada nº1, 20/09/2022)

Quando a convidada nº 1 afirma que:

> [...] acho interessante é a possibilidade de que esse design universal tem em relação ao diálogo com o outro, porque o próximo posso produzir esses materiais com o outro? pensar nesse contexto mais universal, dar de você é produzir algo que dê para todos eles usarem todos, né? [...]"

Notamos que ela descreve como o *design* universal pode contribuir para atender todas/todes/todos pertencentes aos espaços educativos e como esse *design* pode direcionar professoras/professories/professores a pensarem na elaboração de atividades que possam ser executadas por estudantes com diferentes características dentro da sala de aula. Visto que o *design* universal se refere na possibilidade de ampliação no design de produtos e ambientes para que todas as pessoas possam utilizá-lo e, assim, não ter a necessidade de um desenho especializado ou adaptação (Santos, Fernandes, 2016).

Mas mesmo com design universal dando possibilidades para construção de tarefas que possam ser executadas por todas/todes/todos, a convidada nº 1 sinaliza que em alguns momentos, certas atividades e recursos são direcionados especificamente para determinados grupos de estudantes. Como percebemos em sua descrição a seguir:

> Agora tem outros que vem diretamente para cego, surdo, depende do aluno com deficiência que a escola colocou. Então, assim dá para fazer coisas dentro da sala de aula, no sentido da tecnologia assistiva. Assim é mais fácil. Eu, por exemplo, já aconteceu. Devo ter que fazer trabalhos. E com as tecnologias digitais é assim. E aí é usar Geogebra, usar outros materiais que às vezes a gente usava, principalmente uma professora que trabalhava com construção de sólidos geométricos. A gente usava alguns materiais do CDME (site da UFF que mostra softwares educacionais matemáticos) [...] Havia muitos jogos online, muitos, muitos, muitos. Eu falei, que maravilha. A gente não pega. Está falando tudo dessa adaptação para o cego. E aí chega um negócio, todo visual, jogos assim que faz, acontece. Falei, meu Deus, caiu tudo por Terra e aí? No próprio site, a gente começou a pensar em tudo. É como fazer com tecnologia assistiva. Porque para o surdo não tinha problema. A pessoa com autismo também não. E mais pro cego, como era muito visual, nós tínhamos que fazer algo no papel. Aí nós começamos a desenvolver algo no papel para fazer junto. É, e aí foi bem interessante, porque não deixa de ser uma tecnologia, né? Você usar o papel? (Convidada nº1, 20/09/2022)

Ao relatar que: *"[...] E aí chega um negócio, todo visual, jogos assim que faz, acontece. Falei, meu Deus, caiu tudo por Terra e aí? No próprio site, a gente começou a pensar em tudo. É como fazer com tecnologia assistiva. Porque para o surdo não tinha problema. A pessoa com autismo também não. E mais pro cego, como era muito visual, nós tínhamos que fazer algo no papel. [...]"*

Percebemos que a convidada nº 1 esclarece como realizar algumas atividades para que nenhuma/nenhume/nenhum estudante pertencente aquela turma/classe fique de fora da execução das tarefas. Assim, ela descreve como recorrer a outros recursos para que todas/todes/todos possam participar da tarefa, como no caso das tecnologias e os deficientes visuais, já que a experiência com alguns recursos tecnológicos dentro dos espaços educacionais não conseguem atender aos cegos. Então, a convidada nº 1 reforça que para alguns momentos a utilização das Tecnologias Assistivas (TA) se mostra necessária, visto que as mesmas estão ligadas à potencialização de habilidades funcionais de pessoas com deficiências a partir da experiência com equipamentos, recursos ou estratégias que podem abranger desde o desempenho de atividades profissionais até tarefas de básicas de autocuidado ligadas ao desempenho humano (Brasil, 2009).

Além disso, a convidada nº 1 sinaliza que além das TA como recursos para pessoas com deficiências, outros recursos podem ser utilizados, como no caso dos estudantes cegos que precisam de recursos táteis para realizar determinadas tarefas. Assim, algumas soluções se tornam necessárias como a utilização de papelão, cartolina, EVA entre outros recursos manipulativos, como a própria professora/pesquisadora (convidada nº 1) continua descrevendo:

> Lá, os materiais, a gente usa uma cartolina, tudo sucata, [...] cartolina emborrachada, enfim, tudo isso a gente conseguia trabalhar com aluno. E dessa forma, a gente conseguia trabalhar com todos. Se fosse só no papel, porque tem essa limitação da tecnologia. Infelizmente a tecnologia digital, né, tem essa ação. E na minha cabeça, por enquanto só consigo pensar na adaptação para o cego, mas pode ser que tenha para outras pessoas, porque por ser muito visual, muitas delas. É um problema para a gente. Mas já vamos fazer um joguinho? Maravilha segue, não está vendo? Então, é arriscado, tinha que fazer muita coisa no papel e aí, pensando na inclusão geral, às vezes a gente ia para algumas escolas que não tinham nem projetor. Não tinha computador, não tinha nada. Então, de qualquer jeito, a gente é. Queria incluir todo mundo, então aí nós tínhamos que fazer um papel também, então é nossa. Mas esse gancho dos céus para fazer para todo mundo no papel? (Convidada nº1, 20/09/2022)

Sendo assim, ao ressaltar "[...] *os materiais, a gente usa uma cartolina, tudo sucata, [...] cartolina emborrachada, enfim, tudo isso a gente conseguia trabalhar com aluno. E dessa forma, a gente conseguia trabalhar com todos. [...]"* a convidada nº 1 além de mostrar as alternativas que professoras/professories/professores podem utilizar em suas aulas para atender todas/todes/todos estudantes pertencentes a sua turma/classe, também traz uma reflexão da importância de estarmos atentas/atentus/atentos aos nossos planejamentos para que não ocorram ações de exclusões, mesmo que de forma sutil como no caso de abordar uma atividade diferenciada com estudantes com deficiências enquanto o grupo dos estudantes sem deficiências realizam outras tarefas podendo esse processo ser considerado como microexclusões, onde ao "isolar" um determinado grupo de outro mesmo que de forma inconsciente pode comprometer o desenvolvimento humano (Faustino et al., 2018).

Considerações Finais

Diante da visão de uma pesquisadora em educação matemática e inclusão sobre como professoras/professories/professores podem desenvolver/abordar/proporcionar atividades-matemáticas-com-TD de forma não-exclusiva nos espaços educativos consideramos que professoras/professories/professores necessitam de atenção para todas/todes/todos que pertencem a sua turma/classe. Assim, a experiência com as TD é válida e necessária nos espaços educacionais para abordagem de atividades-matemáticas-com-TD , mas ao mesmo tempo para que as atividades sejam de forma não-exclusivas pensar nos recursos de materiais manipuláveis se torna indispensável.

Assim, concluímos até o momento que para uma abordagem não-exclusiva das atividades-matemáticas-com-TD também há uma necessidade de se pensar em uma produção concreta para os estudantes que precisam de algo mais palpável possam executar a tarefa sem se sentirem excluídos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro do Estado do Rio Grande do Sul por intermédio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Edital 18/2020 - PDPG e pelo recurso financeiro disponibilizado para execução da pesquisa de mestrado no âmbito do Programa de Pós - Graduação em Ensino de Matemática. Processo CAPES número: 88887.636236/2021-00. À PROPG pelo auxílio para participação no evento e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq - Processo: 311858/20210.

Referências e bibliografia

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996.

Brasil. (2009). Subsecretaria Nacional de Promoção dos Direitos da Pessoa com Deficiência. Comitê de Ajudas Técnicas. Tecnologia Assistiva . – Brasília: CORDE, 138 p.

Faustino, A. C. et al. Macroinclusão e microexclusão no contexto educacional. DOI: http://dx.doi.org/10.14244/198271992212. Revista Eletrônica de Educação, v. 12, n. 3, p. 898-911, set./dez. 2018.

Fernandes, S. H. A. A. (2017). Educação Matemática Inclusiva: Adaptação x Construção. Revista Educação Inclusiva - REIN, Campina Grande, PB, v1.01, n.01, p.78-95, julho/dezembro.

Fernandes, S. H. A.; Healy, L. (2016). Rumo à Educação Matemática Inclusiva: Reflexões sobre nossa jornada. Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa), v. 7, p. 28-48.FIATCOSKI, D.

A. S.; Góes, A. R. T. (2021). Desenho Universal para Aprendizagem e Tecnologias Digitais na Educação Matemática Inclusiva. Revista Educação Especial, Santa Maria, v. 34.

Mussato, S.; Rosa, M. (2019). Cyberformação e o design de atividades-matemáticas: cultura, contextos e horizontes que se desvelam. REVEMAT, Florianópolis, SC, v. 14, p. 1-20.

Rosa, M.; Mussato, S. (2015). Atividade-Matemática-com-Tecnologias-Digitais-e-Contextos- Culturais: investigando o design como processo de Cyberformação com professores de matemática. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 8, p. 23-42.

Rosa, M.; Bicudo, M. A. V. (2018). Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. In: Rosa Monteiro Paulo, Ingrid Cordeiro Firme, Carolina Cordeiro Batista. (Org.). Ser professor com tecnologias. 1ed.São Paulo: Cultura Acadêmica, v. 1, p. 21-87.

Rosa, M. (2020) Mathematics Education in/with Cyberspace and Digital Technologies: What Has Been Scientifically Produced About It? In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Constitution and Production of Mathematics in the Cyberspace. 1ed.Londres: Springer, Cham, v. 1, p. 3-15.

Sawaia, B. (2001) O Sofrimento ético-político como categoria de análise da dialética exclusão/inclusão. In.: Sawaia, B. As Artimanhas da Exclusão: análise psicossocial e ética da desigualdade social. Petrópolis: Editora Vozes, p. 97-118.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education

Guía sobre el uso de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos: Una propuesta didáctica para estudiantes y docentes de Matemática

Ana Lucía **Arias** Balarezo
Universidad Central del Ecuador
Ecuador
alarias@uce.edu.ec
Jimmy Alexander **Muela** Pillajo
Universidad Central del Ecuador
Ecuador
jamuelap@uce.edu.ec

Resumen

El objetivo del taller es proporcionar a estudiantes para docentes y a docentes en ejercicio un guía que facilite el uso del software GeoGebra para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos, en particular la concepción dinámica del concepto de límite de una función. El taller se deriva de una investigación más amplia cuyo sustento teórico es la teoría APOE de Dubinsky y la descomposición genética del concepto de límite de una función. el enfoque de la investigación fue cualitativo de nivel exploratorio-descriptivo, para lo que se elaboró un instrumento compuesto por cinco tareas didácticas que incluye una parte teórica con conceptos previos y, además cinco preguntas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma Geogebra.org. Se determinó que GeoGebra ofrece recursos útiles para desarrollar un proceso enseñanza-aprendizaje con enfoque dinámico y participativo.

Palabras clave: Teoría APOE; Concepto de Límite; GeoGebra.

Introducción

Esta propuesta didáctica se basa en una investigación bibliográfica y de campo; es decir, combina los fundamentos teóricos necesarios y la experiencia obtenida al aplicar el instrumento entre estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU). Se trata de una Guía Docente que aspira contribuir a superar las dificultades que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una función, a través del uso del software matemático GeoGebra. La guía contiene una planificación en la que se organizan las sesiones, tareas, ejercicios y objetivos que van a ser tratados por los estudiantes de bachillerato. Además, se pone especial énfasis en las necesidades actuales de los estudiantes, ofreciéndoles la oportunidad de convertirse en los principales protagonistas del proceso enseñanza-aprendizaje. Se desea llevar a cabo este trabajo con el fin de encontrar un enfoque y estrategias dinámicas que sepan captar la atención del estudiante, se da importancia a esto último ya que para los autores "la motivación tiene una importancia considerable en la memoria prospectiva (acordarse de lo que uno tiene que hacer en el momento preciso)" (Blázquez et al., 2008, pág. 11), esto quiere decir que, si el docente aspira obtener buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la concepción de límites, previamente debe despertar la curiosidad, interés y motivación del estudiante, a través de distintos recursos didácticos o tecnológicos en función de las necesidades de los mismos.

Objetivo

Proporcionar a estudiantes para docentes y a docentes en ejercicio un guía que facilite el uso del software GeoGebra para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos, ejemplificando a través de la concepción dinámica del concepto de límite de una función en un punto.

Fundamentación Teórica Teoría APOE de Dubinsky

La principal razón por la que se escogió la Teoría APOE para esta investigación de entre muchas otras teorías de aprendizaje, se debe a que está enfocada totalmente en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, pues así lo afirman (Guerrero y Hernández, 2020) "Es una Teoría constructivista desarrollada por Dubinsky (1991) basada en el concepto de abstracción reflexiva, planteadso por Piaget, para describir la construcción de conceptos matemáticos específicos en la educación superior" (p.2), ya que como docentes somos conscientes de que la Matemática suele ser una de las ciencias que más dificultades presenta al estudiante debido a su naturaleza abstracta; es decir, se trabaja con conceptos que son muy difíciles de encontrar en la vida cotidiana y esto produce un efecto negativo en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. Es por ello por lo que esta teoría resulta de gran utilidad.

Las estructuras mentales

Uno de los objetivos de este trabajo es dejar atrás la metodología de enseñanza tradicional basada en transmitir un conocimiento que los estudiantes repitan en el futuro, sino que sean ellos quienes construyan el suyo propio, comprendiendo cada uno de los procesos que se llevan a cabo para poder asociarlos con aquello que ya dominan; es decir, sus conocimientos previos. Para ello, se requiere desarrollar estructuras o construcciones mentales en los estudiantes, (Chaves & Jaimes, 2014) citan a Bermúdez (2011) quien nombra "construcciones mentales a todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permita obtener significado de ellas" (p.21), estas construcciones son las modificaciones y adaptaciones que un estudiante realiza en su mente a un nuevo concepto que está tratando, con el fin de entenderlo. Para conocer un poco más sobre cada una de estas estructuras mentales, (Trigueros, 2005) añade que "Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. El paso por estas tres etapas no es

necesariamente secuencial" (p.7), hay que aclarar que no se trata de un proceso lineal, ya que muchas veces el estudiante tendrá que retroceder para abrir nuevos caminos. A continuación, se presentan las estructuras mentales que conforman la Teoría APOE:
Acción: para (Guerrero y Hernández, 2020) "es una transformación del objeto percibida por el individuo como algo externo a él. Es decir, la persona cuya comprensión se limita a una concepción de acción puede realizar dicha transformación solamente reaccionando a causas externas […]" (p.2), para que un estudiante alcance la comprensión de un concepto matemático debe iniciar con esta actividad mental o física, es por ello por lo que se le conoce como la construcción elemental.

Proceso: según (Preciado, 2014) "Cuando se da la repetición de una acción y el estudiante analiza y reflexiona sobre ella en un procedimiento autónomo, sin mediar ningún estímulo externo" (p.14), a esto se le conoce como interiorización; es la transición de acción a proceso. En esta etapa, el estudiante puede reflejar o visualizar mentalmente un proceso específico independientemente de si se cuenta o no con estímulos de carácter externo o interno.

Objeto: para (Guerrero y Hernández, 2020) "el sujeto reflexiona sobre operaciones que se aplican a un Proceso particular, toma conciencia del Proceso como una totalidad, realiza transformaciones (Acciones o Procesos) que puedan actuar sobre él y puede construir esas transformaciones" (p.2), esto se conoce como encapsulación del proceso y permite entender todo el conjunto de acciones o procesos desde un punto de vista más amplio.

Esquema: para (Trigueros, 2005) "se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente […]" (p.11), todo este conjunto es utilizado por el estudiante, relacionándolos y manipulándolos; es decir, contará con una forma de decidir qué estructura mental utilizar con el fin de resolver un problema matemático.

Descomposición Genética

Aquellas estructuras mentales determinadas que el estudiante necesita para comprender un concepto matemático específico se le conoce como Descomposición Genética, esta no es única y puede ser mejorada conforme se va poniendo en práctica con los estudiantes, en relación con esto (Preciado, 2014) toma como base la definición propuesta por Asiala et al. (1996) quienes la entienden como "un conjunto estructurado de construcciones mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo" (p.16), para poder trazar eficientemente este camino, es importante que el docente tenga claro y analice cuáles son las acciones, objetos, procesos y esquemas necesarias que el estudiante debe desarrollar por sí mismo y de esta manera alcanzar el aprendizaje significativo. Para este proyecto se tomó como base la siguiente Descomposición Genética:

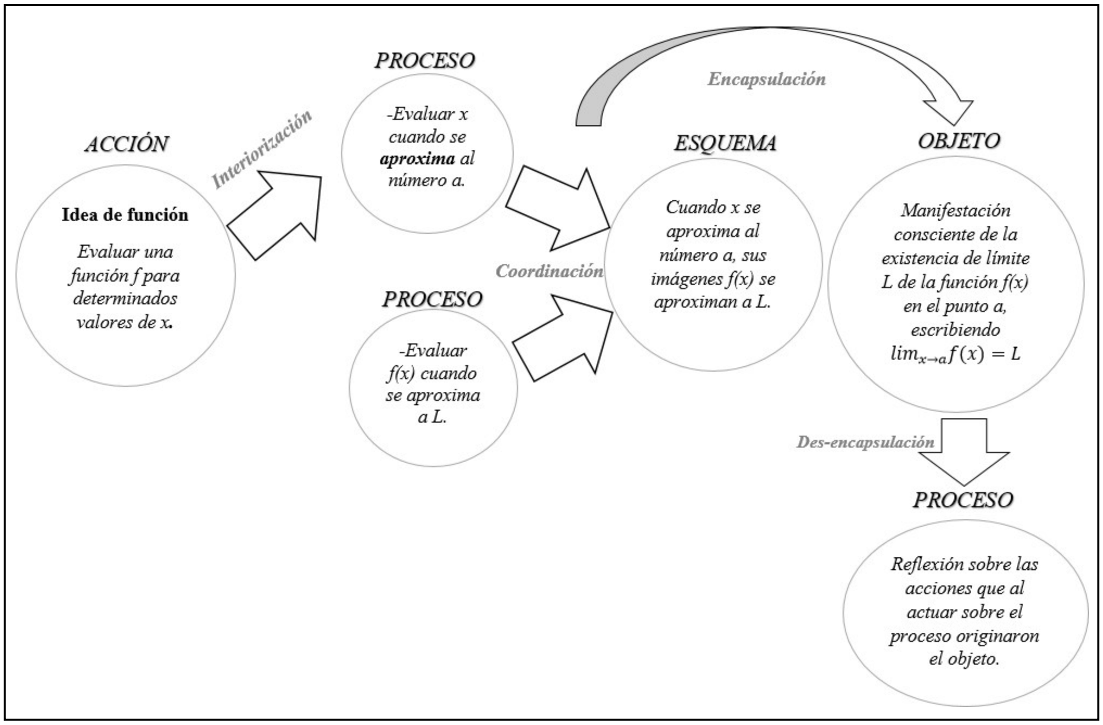


Figura 1. Organizador gráfico de Descomposición Genética.
Fuente: Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación (Arias A., 2019).

Concepción Dinámica de Límite

Tras su largo e histórico proceso evolutivo junto con el aporte de grandes matemáticos se presenta la definición de límite:

Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe: $lim_{x \to a} f(x) = L$.

En la última etapa evolutiva del concepto de límite, dicho concepto empezó a ser tratado desde distintas perspectivas, más o menos formal, más dinámico, de manera simbólica; entre otras. Por lo tanto, se tuvo que escoger un enfoque dinámico para lo cual los autores (Guerrero y Hernández, 2020) citan a Blázquez y del Rincón (2022) "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en un punto a y se debiera escribir $lim_{x \to a} f(x) = L$ si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes *f(x)* se acercan a *L* más que cualquier otra aproximación fijada" (p.4), esta definición es la que mejor se adapta a la propuesta didáctica y a los objetivos que se pretenden alcanzar.

GeoGebra como recurso didáctico

Es necesario recalcar la importancia que suponen los recursos didácticos en el proceso enseñanza-aprendizaje, sobre todo en la Matemática la cual trabaja con conceptos abstractos que muchas veces resultan difíciles de visualizar para el estudiante; con respecto a esto, (Díaz, 1996) afirma que "Los recursos y materiales didácticos son todo el conjunto de elementos, útiles o estrategias que el profesor utiliza, o puede utilizar como soporte, complemento o ayuda en su tarea docente" (p.42), estos recursos permiten definir y centrar mejor la actuación pedagógica del docente; a su vez que aprovechan al máximo las actividades planteadas por el mismo.

Los softwares didácticos son uno de los principales recursos que utilizan actualmente los docentes para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. Para (Fernández, Riveros, & Montiel, 2017) un software educativo "Comprende un conjunto de recursos interactivos informáticos diseñados con la intención de ser utilizados en el contexto educativo, de allí la necesidad que hay en cuanto a las tareas del docente en incentivar su uso." (p.12), aquellos softwares centrados y especializados en el campo de las ciencias exactas se les denomina softwares matemáticos.

Dentro de los softwares matemáticos destaca GeoGebra definido por (Rodríguez et al., 2020) "GeoGebra produce inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que se pueden realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones" (p.753), GeoGebra es un software matemático que destaca por tener la capacidad de diseñar modelos geométricos y algebraicos relacionados con situaciones de la vida real, para (Jiménez & Jiménez, 2017) "GeoGebra es un software gratuito y muy sencillo de operar, el cual puede presentar el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, pero es responsabilidad de cada docente hacer sus clases más interactivas, atractivas y entretenidas" (p.11). Las tareas, gráficas y conceptos que se pueden desarrollar con este software permiten al estudiante no sólo resolver los ejercicios planteados, sino también visualizar todos sus procesos y características, facilitando así la comprensión de un determinado concepto.

Algunas de las principales características que presenta GeoGebra según (Barahona et al., 2015, pág.123), son las siguientes:

- Presenta una interfaz intuitiva y fácil de usar para el estudiante; además, contiene un menú con una gran variedad de herramientas, comandos e íconos que buscan facilitar el trabajo.
- Ofrece una gran variedad de opciones a la hora de manipular y personalizar sus trabajos por medio de la interfaz de GeoGebra; es decir, pueden realizar etiquetas, cambiar el color o grosor de las curvas, el estilo; entre otras muchas variaciones.
- Muestra las relaciones matemáticas de forma dinámica al dar la posibilidad de que el estudiante manipule los objetos libres.
- Impulsa al estudiante a participar más en las clases, lo que le lleva a un descubrimiento experimental y de esta manera, facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje.

Metodología

Este trabajo se enmarca dentro del enfoque cualitativo, pues se centró en interpretar y entender las dificultades que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje para conceptos matemáticos, (Lerma, 2009) añade que "Los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones partiendo de los datos, y no recogiendo datos para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidas" (p.40), coincide con el desarrollo de esta investigación, pues en la misma se recogió información (sin medición numérica), que sirvieron de base y fundamento para el posterior desarrollo de la propuesta didáctica, en una interacción constante con los sujetos de estudio; es decir, los estudiantes.

El instrumento utilizado para recolectar información fueron cinco tareas didácticas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma GeoGebra.org. Antes de proceder con la aplicación del instrumento, el mismo fue analizado, revisado y corregido por dos expertos en docencia de conceptos matemáticos; por un lado, Milton Coronel, docente de Cálculo de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad Central del Ecuador y; por otro lado, Julia Valls, integrante del grupo de la investigación didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante.

Tras realizar las correcciones pertinentes del instrumento, se procedió con la recolección de datos en la que participaron un total de 46 estudiantes de tercer año de bachillerato del Colegio Municipal Juan Wisneth ubicado en el sector sur de la ciudad de Quito, el paralelo A con 25 estudiantes y el paralelo B con 21 alumnos, todos ellos comprendían una edad de entre 17 y 18 años. Este proceso se llevó a cabo en el primer quimestre del periodo lectivo 2020-2021. Se trabajó por sesiones, aplicando una a la semana en cada uno de los paralelos. Todas las reuniones, las cuales fueron ajustadas al horario escolar de los estudiantes, se realizaron por medio de la plataforma Zoom con una duración total de 80 minutos por sesión con cada paralelo. Una vez obtenida toda esta información, se analizaron e interpretaron los resultados con el fin de poder mejorar o modificar alguna de las actividades didácticas planteadas en la propuesta por medio de GeoGebra para el proceso enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos.

Conclusiones

1. El correcto uso del software matemático GeoGebra requiere de una previa revisión de todo lo que este software es capaz de ofrecer, junto con sus principales características y recursos. Las opciones que presentan mayor utilidad para los objetivos planteados en esta investigación son: capacidad de crear gráficos dinámicos, su personalización, su interactividad y la posibilidad de poder presentar todas estas tareas en *Geogebra.org*, que es su plataforma virtual.

2. El presente trabajo de investigación permitió identificar cuáles son las características idóneas y más adecuadas que debe conformar una propuesta didáctica para un correcto aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite en estudiantes de BGU. Es así que una propuesta debe estar compuesta, en primer lugar, por una revisión sobre los conocimientos previos necesarios que servirán de base y permitirán un adecuado proceso enseñanza-aprendizaje.

3. El uso del software matemático GeoGebra y de su plataforma virtual Geogebra.org hace posible diseñar una clase con un enfoque más dinámico e interactivo para los estudiantes, quienes se mostraron bastante participativos y activos durante las clases desarrolladas.

Referencias y bibliografía

Arias, A. (2019). Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación. Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, Departamento de innovación y formación didáctica, Alicante.

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., & Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su indidencia en el rendimiento académico estudiantil. Revista Tecnológica ESPOL Vol. 28, 121-132.

Blázquez, S., Nora, S., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. Contextos Educativos: Revista de Educación Vol. 11, 7-21.

Chaves, R., & Jaimes, L. (2014). Descomposición genética en la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Shwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1992). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme.

Díaz, J. (1996). Los recursos y materiales didácticos en educación física. Apunts: Educaciò Física i Esports Vo. 43, 42-52.

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. Omnia Vol. 23, 9-19.

Guerrero, J. Hernández, L. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la Teoría APOE. Innovación e Investigación en Matemática Educativa Vol. 5

Jiménez, J. G., & Jiménez, S. (2017). Geogebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad Vol.4, 17.

Lerma, H. (2009). Metodología de la investigación. Propuesta, anteproyecto y proyecto 4ª Edición. Bogotá: ECOE Ediciones.

Preciado, J. (2014). Propuesta para la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de la herramienta computacional Winplot (Tesis de Maestría). Universidad Sergio Arboleda, Bogotá.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática Vol. 17, núm. 1, 5-31.

Habilidades de visualización dinámica tridimensional: el caso de los lugares geométricos 3D

Edinsson **Fernández-Mosquera**
Universidad del Valle – Universidad de Nariño
Colombia
edinfer@udenar.edu.co
Marisol **Santacruz-Rodríguez**
Universidad del Valle
Colombia
marisol.santacruz@correounivalle.edu.co

Resumen

Estudiamos la adquisición de habilidades de visualización dinámica tridimensional de estudiantes universitarios cuando resuelven problemas de lugares geométricos en el espacio usando geometría dinámica. Para ello, presentamos resultados de la implementación de dos actividades, propuestas en el marco de una trayectoria hipotética de aprendizaje, fundamentadas en analogías entre objetos del plano y del espacio. Con estas actividades se buscó fomentar habilidades de visualización, tales como, control teórico, predicción geométrica y cristalización. De manera preliminar nuestros resultados muestran que los estudiantes presentan dificultades en imaginar lugares geométricos en el espacio que se van generando de manera dinámica. Sin embargo, el uso de la geometría dinámica se ha convertido en una ayuda para que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización en geometría 3D tales como la predicción y construcción geométrica en la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: Habilidades de Visualización, Aprendizaje; Lugares Geométricos 3D; Analogías del Plano y Espacio; Geometría Dinámica 3D; Educación superior.

Introducción

Investigaciones recientes en educación geométrica (Jones et al., 2019) señalan la atención creciente a la geometría tridimensional, promovida, en parte, por el estudio de los usos didácticos de la geometría dinámica y otros artefactos digitales 3D en el ámbito escolar (Sinclair et al., 2016). En particular, se ha resaltado el papel fundamental de las habilidades de visualización en el aprendizaje de la geometría 3D y la pertinencia de abordar el desarrollo de habilidades de visualización en todos los niveles escolares (Sinclair et al., 2016). Sin embargo, los resultados de investigación en visualización 3D a nivel universitario aún son pocos y parciales, y, por tanto, constituyen un foco de interés para la educación geométrica actual (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Jones et al., 2019).

Aunque Sabena et al. (2020) ratificaron que la visualización es un componente vital para la comprensión conceptual, el razonamiento y la resolución de problemas en matemáticas, la investigación ha exhibido que los profesores universitarios hacen poco uso de imágenes en sus clases de matemáticas, favoreciendo el desarrollo de pensamiento algorítmico por encima del pensamiento visual (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Hitt, 1998; Presmeg, 2020).

Adicionalmente, se sabe que el pensamiento visual y el aprendizaje de las geometría 3D se ven altamente beneficiadas por el uso de geometría dinámica ya que proporciona una variedad de riqueza visual de imágenes espaciales, que no se consigue en representaciones estáticas en el papel y, en algunos casos, ni en el espacio físico (Pittalis & Christou, 2010). Al respecto, la investigación recomienda fomentar tareas matemáticas que favorezcan las habilidades de visualización dinámica en la geometría tridimensional (Ferrara & Mammana, 2014; Gutiérrez & Jaime, 2015; Jones & Tzekaki, 2016; Ng & Ferrara, 2020).

Así pues, la revisión de literatura nos permitió encontrar que existe necesidad de investigaciones sobre cómo las personas visualizan lugares geométricos en geometría tridimensional. Por lo tanto, estamos interesados en investigar cómo se fomentan las habilidades de visualización dinámica tridimensional cuando se resuelven problemas de lugares geométricos en tres dimensiones por medio de combinar analogías entre lo que sucede en geometría plana y en geometría espacial usando geometría dinámica 3D.

Habilidades de Visualización

Son entendidas como un conjunto de productos cognitivos (Arcavi, 2003) que les permiten a las personas imaginar, manipular, representar, construir y reflexionar sobre imágenes 2D o 3D, sean estáticas o en movimiento. Adicionalmente, investigadores (Bruce et al., 2017; Jones & Tzekaki, 2016; Sinclair et al., 2016) han señalado la existencia de diversos tipos de habilidades de visualización (susceptibles a ser desarrolladas a cualquier edad). En ese sentido, Mariotti y Baccaglini-Frank (2018) identifican ocho habilidades de visualización: 1. identificación; 2. reconstrucción; 3. construcción; 4. conciencia parcial-total; 5. manipulación; 6. control teórico; 7. predicción geométrica, y, 8. cristalización.

La Visualización dinámica tridimensional. Corresponden a habilidades que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento. Muchos autores (Boz, 2005; Morrow, 1997) señalan que la visualización dinámica llega a constituirse en una herramienta poderosa para lograr una mayor comprensión de muchos conceptos matemáticos o como recurso para resolver problemas; sin embargo, los estudiantes universitarios solo logran aprender a crear imágenes mentales estáticas de objetos 3D (Vallo & Zahorska, 2016), sin lograr desarrollar habilidades para visualizar figuras tridimensionales de manera dinámica (García-Dominguez et al., 2012; (Kösa, 2016a). En ese sentido, la visualización dinámica que ofrece el computador estimula la capacidad para manipular mentalmente los objetos espaciales y mejoran sus procesos de visualización al construir imágenes visuales dinámicas de formas 3D (Boz, 2005; Gutiérrez & Jaime, 2015; Kepceoğlu, 2018; Kösa, 2016a; Kösa & Karakuş, 2010; Morrow, 1997; Pittalis & Christou, 2010).

Los Lugares geométricos. Desde un punto de vista curricular, los lugares geométricos constituyen una *idea matemática fundamental* (Schweiger, 2006), aunque poco investigada (Fernández-Mosquera, 2011; Jahn, 2000, 2002; Laborde et al., 2006; Nagy-Kondor, 2017), que despierta interés por el mismo potencial de fomentar la visualización (Gómez-Chacón et al., 2016). La enseñanza de los lugares geométricos usualmente va ligada o bien a las construcciones con regla y compás o acompañada del estudio de gráficas de relaciones funcionales cuando se trabaja como trayectorias de movimiento. Un tema principal de la geometría analítica es la descripción algebraica de curvas geométricas y la solución algebraica de los problemas geométricos. Tanto Schumann (2003) como Gómez-Chacón y Escribano (2014), afirman que los lugares geométricos tienen un carácter educativo general, que se vuelve más atractivo y las soluciones son más fáciles para los estudiantes y profesores cuando utilizan software de geometría dinámica.

Las Analogías. Nagy-Kondor (2017) recomienda fomentar analogías de lugares geométricos desde 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización dinámica tridimensional. Así pues, el uso de analogía resulta valioso porque representa un puente que crea un vínculo significativo entre 2D y 3D (Mammana et al., 2012). En esa perspectiva, se entiende una analogía como "*una especie de similitud entre objetos distintos. Objetos similares coinciden entre sí en algunos aspectos, objetos análogos coinciden en relaciones claramente definibles de sus respectivas partes*" (Polya, 1989). Para resolver un problema, puede usar la solución de un problema análogo más simple y usar su método, su resultado o ambos, método y resultado (Budai, 2013; Mammana, 2019; Mammana et al., 2012). En nuestro caso, usamos analogías entre objetos del plano y el espacio para estudiar algunas propiedades de los lugares geométricos 3D que se generan por movimiento de una recta o superficie.

Aspectos Metodológicos

Esta investigación está orientada por una ruta enmarcada en el paradigma *cualitativo*, *interpretativo* y *descriptivo* (Villarreal, 2003). Así, consideramos apropiado adoptar la metodología de *Investigación Basada en el Diseño* (Bakker, 2018; Bakker & van Eerde, 2015; Cobb et al., 2017). La brecha encontrada la revisión de la literatura nos condujo a considerar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como un constructo teórico y metodológico (Simon, 2020; Simon & Tzur, 2004) sobre el aprendizaje conceptual (lugar geométrico) y procedimental (habilidades de visualización), en esta investigación. Según Simon (1995) la THA tiene tres componentes: Una meta de aprendizaje; Un conjunto de actividades de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético. En esta ponencia hablaremos de estos tres aspectos más en detalle.

Las tareas diseñadas se aplicaron con tres grupos de estudiantes distintos. Las tareas serán presenciales y virtuales, usando salas de computadores y prácticas de uso del computador. Y según la IBD, se presentará los resultados de primer ciclo con un grupo de 15 estudiantes. En las dos actividades, se pondrán a prueba las hipótesis de aprendizaje formuladas. A manera de pilotaje, se constituirá en el primer ciclo del experimento.

El diseño de las Actividades de aprendizaje

Detrás del diseño, están las ideas de Nagy-Kondor (2017) quien caracterizó las habilidades de visualización espacial usando las potencialidades de la geometría dinámica 3D para expandir el círculo de problemas en la educación geométrica. En particular, ella recomienda realizar más estudios educativos en fomentar analogías de lugares geométricos desde 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización espacial.

Las dos actividades que se presentarán y analizarán son sobre lugares geométricos en 2D y luego en 3D. La idea general de las dos actividades es primero visualizar geométricamente en las mentes de los estudiantes las figuras geométricas solicitadas. Se parte de generar una figura geométrica a partir del movimiento. Primero de un punto para generar una recta. Luego, a partir de una recta, generar una superficie.

La primera actividad de aprendizaje propuesta integra geometría dinámica 3D con la intención de construir lugares geométricos. En este caso, la *mediatriz* a partir de sus propiedades de equidistancia para finalmente resolver el problema construyendo un *plano mediador* usando el arrastre, por medio de un lugar geométrico análogo y construido en primera instancia en 2D para luego construirlo en 3D. Ver Figura 1.

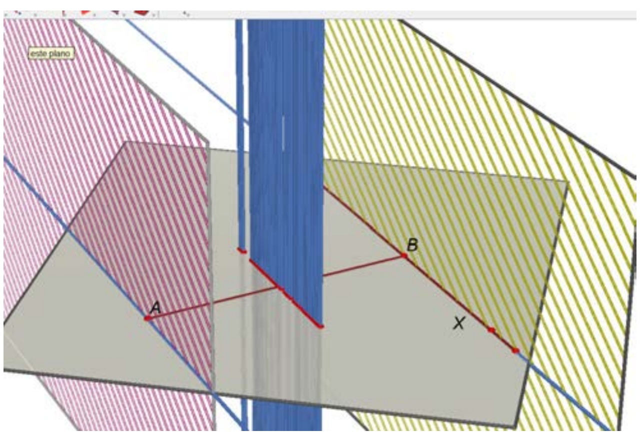


Figura 1. El plano mediador generado como el lugar geométrico de una recta perpendicular al lugar geométrico en 2D.

La segunda actividad busca encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos dados que se cortan. De igual forma que en la primera actividad, en ésta, por analogía, se trata de tener en cuenta la generación de una bisectriz de un ángulo, en el plano, y luego que los estudiantes universitarios puedan extender esta misma construcción de manera dinámica.

En ambas, se busca fomentar habilidades de visualización, tales como, control teórico, predicción geométrica y cristalización (Mariotti & Baccaglini-Frank, 2018) con el propósito de promover la transferencia por analogía, de hechos geométricos 2D al espacio tridimensional con el uso de Cabri 3D.

Algunas reflexiones finales

Nuestros resultados muestran que, en la educación geométrica a nivel universitario, existen muchas dificultades y obstáculos para visualizar figuras espaciales. Por ejemplo, para los estudiantes resulta particularmente difícil imaginar objetos, procesos y conceptos de temas de geometría analítica del espacio como los lugares geométricos 3D (Kösa, 2016b; Kösa & Karakuş, 2010; Nagy-Kondor, 2017).

Otra conclusión fue que el uso de la geometría dinámica se ha convertido en una herramienta pedagógica promisoria que apoya el desarrollo de habilidades de visualización en geometría 3D en los estudiantes, y, por ende, ayuda en la resolución de problemas geométricos (Budai, 2013; Jones & Tzekaki, 2016; Kösa, 2016b, 2016a; Kösa & Karakuş, 2010).

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bakker, A. (2018). What is design research in education? In *Design Research in Education. A practical guide for early career researchers* (1st ed., pp. 3–23). Routledge Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Bakker, A. & van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (Issue Chapter 16, pp. 429–466). Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Boz, N. (2005). Dynamic visualization and software environments. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *4*(1), 26–32. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1102654.pdf

Bruce, C., Davis, B., Sinclair, N., McGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W. & Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using "spatial reasoning" as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 143–161. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9743-2

Budai, L. (2013). Improving Problem-Solving Skills with the Help of Plane-Space Analogies. *Center for Educational Policy Studies Journal*, *3*(4), 79–98.

Cobb, P., Jackson, K. & Dunlap, C. (2017). Conducting Design Studies to Investigate and Support Mathematics Students' and Teachers' Learning. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 208–233). National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25–37). Mathematical Association of America Service Center. MAA Notes Number 19.

Fernández-Mosquera, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus [Universidad del Valle]. In *Tesis de Maestría*. http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3901

Ferrara, F. & Mammana, M. F. (2014). Seeing in space is dificult: an approach to 3D geometry through a DGE. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, *3*, 57–64. http://www.pme38.com/

García-Dominguez, M., Martin-Gutierrez, J., Roca-Gonzalez, C. & Mato-Corredeaguas, C. (2012). Methodologies and Tools to Improve Spatial Ability. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *51*, 736–744. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.08.233

Gómez-Chacón, I. M., Botana, F., Escribano, J. & Abánades, M. (2016). Concepto de lugar geométrico. Génesis de utilización personal y profesional con distintas herramientas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(54), 67–94. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04

Gómez-Chacón, I. M. & Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *17*(4–2), 361–383. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554784008

Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53–83. https://digibug.ugr.es/handle/10481/34155

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, *10*(2), 23–45. http://funes.uniandes.edu.co/10137/1/Visualizacion1998Hitt.pdf

Jahn, A. P. (2000). New tools, new attitudes to knowledge: the case of geometric loci and transformations in dynamic geometry environments. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan* (Vol. 1, pp. 91–102). Hiroshima University and PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf#page=126

Jahn, A. P. (2002). “Locus” and “Trace” in Cabri géomètre: Relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 78–84. https://doi.org/10.1007/BF02655710

Jones, K., Maschietto, M., Mithalal, J. & Papadaki, C. (2019). Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 11*, 1–4. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02402091/

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109–149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Kepceoğlu, İ. (2018). Effect of Dynamic Geometry Software on 3-Dimensional Geometric Shape Drawing Skills. *Journal of Education and Training Studies*, *6*(10), 98–106. https://doi.org/10.11114/jets.v6i10.3197

Kösa, T. (2016a). Effects of using dynamic mathematics software on pre-service mathematics teachers spatial visualization skills: The case of spatial analytic geometry. *Educational Research and Reviews*, *11*(7), 449–458. https://doi.org/10.5897/err2016.2686

Kösa, T. (2016b). The Effect of Using Dynamic Mathematics Software: Cross Section and Visualization. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(4), 121–128. https://doi.org/https://doi.org/10.1564/tme

Kösa, T. & Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 1385–1389. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.204

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (Vol. 1, pp. 275–304). Sense Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087901127_011

Mammana, M. F. (2019). The Modernity of the Meraner Lehrplan for Teaching Geometry Today in Grades 10–11: Exploiting the Power of Dynamic Geometry Systems. In H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand & G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein, ICME-13 Monographs* (1st ed., pp. 153–166). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7

Mammana, M. F., Micale, B. & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(6), 818–830. https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.662286

Mariotti, M. A. & Baccaglini-Frank, A. (2018). Developing the Mathematical Eye Through Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. In N. Amado, S. Carreira & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. A Focus on Technology, Creativity and Affect. Research in Mathematics Education Series.* (pp. 153–176). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_7

Morrow, J. (1997). What is Dynamic Visualization? In *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 47–54). The Mathematical Association of America.

Nagy-Kondor, R. (2017). Spatial Ability: Measurement and Development. In M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice* (pp. 35–58). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0

Ng, O. L. & Ferrara, F. (2020). Towards a Materialist Vision of 'Learning as Making': the Case of 3D Printing Pens in School Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(5), 925–944. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10000-9

Pittalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191–212. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8

Polya, G. (1989). Como plantear y resolver problemas. In J. Zugazagoitia (Trans.), *Serie de Matemáticas* (15th ed.). Trillas.

Presmeg, N. (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 900–904). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_161

Schumann, H. (2003). Computer aided treatment of 3dproblems in analytic geometry. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, *35*(1), 7–13. https://doi.org/10.1007/BF02652760

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas: A Bridge Between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 51–62). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087903510

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, *48*(5), 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Vallo, D. & Zahorska, J. (2016). Geometry software cabri 3D in teaching stereometry. *2016 IEEE 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT) Conference Proceedings*, 1–4. https://doi.org/10.1109/ICAICT.2016.7991805

Villarreal, M. (2003). La investigación en educación matemática: ¿qué ocurre en Argentina? *Premisa*, *16*(December), 4–12. http://funes.uniandes.edu.co/23155/

Jogos matemáticos físicos e digitais para o ensino e a aprendizagem dos números racionais: pesquisa e desenvolvimento

Érica Santana Silveira **Nery**
Universidade Federal de Sergipe
Brasil
ericaassilveira@gmail.com
Cristiano Alberto **Muniz**
Universidade de Brasília
Brasil
cristianoamuniz@gmail.com
Regina da Silva Pina **Neves**
Universidade de Brasília
Brasil
reginapina@gmail.com
Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Raimunda de **Oliveira**
Universidade de Brasília
Brasil
raioliveiramat@gmail.com

Resumo

O objetivo desta comunicação científica é descrever e refletir sobre o desenvolvimento de nove jogos matemáticos físicos e digitais, destinados ao ensino e à aprendizagem dos Números Racionais. A metodologia fundamenta-se na Engenharia Didática, compreendida como um esquema experimental que envolve quatro fases consecutivas, a saber: análise preliminar, concepção e análise a priori; experimentação e; como quarta fase, análise e avaliação a posteriori. Os jogos, destinam-se aos estudantes do 3º ao 7º ano do Ensino Fundamental e foram desenvolvidos em centros de formação de professores, divulgados em contextos de

formação continuada de professores de escolas públicas, bem como socializados com a comunidade por meio de uma plataforma digital e interativa. Tais recursos visam contribuir com os processos de aprendizagem dos Números Racionais, uma vez que este conteúdo tem se mostrado, nas avaliações em larga escala, como sendo um desafio para a educação brasileira.

Palavras-chave: Jogos digitais; Jogos físicos; Aprendizagem Ludomatemática; Números Racionais; Engenharia Didática.

Introdução

A construção do conceito de Número Racional revela-se como um desafio, sobretudo porque as aprendizagens realizadas na alfabetização matemática podem implicar em futuros dificultadores, uma vez que as lógicas conceituais e as novas representações se impõem ao processo de desenvolvimento e ampliação do conhecimento, requerendo rupturas no processo de conceitualização do número pela criança, direcionando-as para uma abstração crescente.

Diante disso, ensinar matemática deve ser assumido como a possibilidade de favorecer tais rupturas, por meio, por exemplo, dos jogos físicos e/ou digitais, apoiando a criança no avanço de suas construções conceituais. A ruptura implica, desejável e necessariamente, o engajamento do sujeito às experiências ofertadas, via recursos didáticos e/ou ludomatemáticos. Ademais, quando a criança, o adolescente e/ou o adulto, assumem a dimensão lúdica dos Jogos matemáticos físicos e digitais seu engajamento pode ser mais profundo e duradouro, permitindo maior chance de realização de aprendizagens significativas a partir da possibilidade de concepção de novos esquemas mentais que poderão ser transferidos para situações fora do jogo (Muniz, 2010).

Ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), entre o 3º e o 7º anos do Ensino Fundamental, observamos muitas habilidades que tratam da construção dos Números Racionais, tanto em sua forma decimal quanto em sua forma fracionária. Há um crescimento gradativo das habilidades em cada ano de escolaridade, assim como maior aprofundamento conceitual e procedimental, aspectos esses que podem contribuir para a construção do conceito de número racional e o desenvolvimento do pensamento matemático.

As habilidades ligadas ao objeto de conhecimento das frações apresentadas na BNCC (2018) trazem, predominantemente, uma visão da matemática pela matemática, sem apresentar uma articulação da aprendizagem da fração com contextos socioculturais que possam possibilitar ao aluno a produção de significado em sentido mais amplo, ligado, por exemplo, à prática em contextos cotidianos.

Acreditamos que as habilidades que tratam dos Números Racionais em sua representação decimal, além de permitir uma visão de expansão do Sistema de Numeração Decimal, amplia as estruturas e propriedades numéricas do campo dos números Naturais. É possível inferirmos que, em grande parte, as habilidades com os números decimais remetem aos contextos de grandezas e medidas, permitindo, uma vinculação da aprendizagem dos decimais ao letramento, com contextos de cidadania e ação sobre o mundo sociocultural. Destarte, constatamos o quanto à aprendizagem de Números Racionais se mostra tão importante e, ao mesmo tempo, tão desafiante. Por estes motivos desenvolvemos o presente estudo, tendo por objetivo descrever e refletir sobre o desenvolvimento de nove jogos matemáticos físicos e digitais, destinados ao ensino e à aprendizagem dos Números Racionais**.**

Os jogos como recursos para aprendizagem dos números racionais

Aprender Matemática implica em o sujeito ser capaz de compreender, explicar e esclarecer ao outro utilizando diferentes maneiras e possibilidades que articulam os conhecimentos matemáticos, contribuindo assim, com o desenvolvimento da aprendizagem em uma dimensão individual e social, pois na medida em que se aprende, se ensina ao outro (Freire, 2014), transformando-se assim, o conhecimento adquirido em um conhecimento articulado com outros saberes.

Perante isto, os jogos podem vir a contribuir com essa disseminação de saberes, na medida em que os compreendemos conforme Muniz (2010) "[...] como um dos instrumentos socioculturais de difusão e de validação de saberes matemáticos" (p. 62). Assim, os jogos matemáticos devem ter como atividades: a resolução de problemas e a construção de uma teoria (Muniz, 2010). Portanto, fomentam a aprendizagem de noções e conceitos matemáticos em cada sujeito e propiciam a formação de novos esquemas mentais.

Podemos afirmar que nas propostas de atividades lúdicas envolvendo números decimais, muitos dos jogos, já existentes, remetem a contextos que envolvem: valores monetários e realização de medidas com produção de registros; jogos em que se ganha ou se perde pontos, em números decimais ou que envolvem a compra e venda utilizando cédulas e moedas, para situações que se reportam a adição e subtração; no que se referem às porcentagens, dentre outras muitas possibilidades.

Já nas propostas de atividades lúdicas envolvendo números fracionários, os jogos mobilizam muitas das habilidades atreladas ao conceito, representação, equivalência, extração do inteiro em fração imprópria; a articulação representacional entre a fração e o número decimal e a reta numérica, ou ainda, a possibilidade de tratar de instrumento de medida com reta numérica e explorar a relação entre fração e decimal.

Diante disso, explicitaremos na próxima seção, a metodologia de desenvolvimento desta pesquisa, buscando aproximar o leitor do processo de planejamento, desenvolvimento e validação de jogos construídos de maneira física e digital. Ressaltamos ainda, que os jogos físicos são disponibilizados como encartes digitais que podem ser impressos, construídos e utilizados tanto nos contextos escolares quanto sociais.

Metodologia de desenvolvimento e de pesquisa

Assim, o presente estudo sobre o processo de desenvolvimento de jogos matemáticos físicos e digitais, bem como a elaboração de nove jogos educativos disponibilizados em uma plataforma interativa gratuita, destinados à aprendizagem dos Números Racionais enquanto recursos ludopedagógicos, junto a estudantes do 3º ao 7º ano do Ensino Fundamental, fundamentou-se na Engenharia Didática, a qual permite investigar as realizações didáticas, ou seções de ensino que são desenvolvidas em sala de aula (Almouloud, 2007).

A Engenharia Didática caracteriza-se como sendo um esquema experimental com quatro fundamentos básicos nas realizações didáticas desenvolvidas em sala de aula. O primeiro considera as concepções tanto do professor quanto do aluno e, nesse caso, o aluno enquanto primeiro protagonista dos processos de aprendizagem matemática e o professor, o organizador do ambiente, fornecedor de recursos pedagógicos, promotor das mediações e intervenções pedagógicas, assim como o responsável pela institucionalização dos conhecimentos mobilizados e localmente validados. O segundo fundamento é a realização, isto é, a execução do processo didático; o terceiro a observação, do professor/pesquisador sobre o objeto de estudo e, por fim, a análise da Sequência Didática (Artigue, 1995). A Sequência Didática que compõe o presente estudo é composta por jogos matemáticos físicos e/ou digitais, que permitem a construção de conceitos associados aos Números Racionais.

Destacamos que a Engenharia Didática, de acordo com Artigue (1995), envolve quatro fases consecutivas, a saber: 1) análise preliminar, a qual contempla um estudo epistemológico dos objetos de conhecimentos a serem mobilizados na sequência; 2) concepção e análise a priori da engenharia da situação didática; 3) experimentação e; 4) análise e avaliação a posteriori. No decorrer do processo de construção dos jogos físicos e digitais, foram vivenciadas todas as fases da Engenharia Didática de maneira cíclica (Figura 1), as quais ocorreram tanto internamente, no grupo de pesquisa, quanto externamente nos momentos de formação de professores e de validações que foram realizadas juntos aos estudantes, público-alvo do nosso estudo.

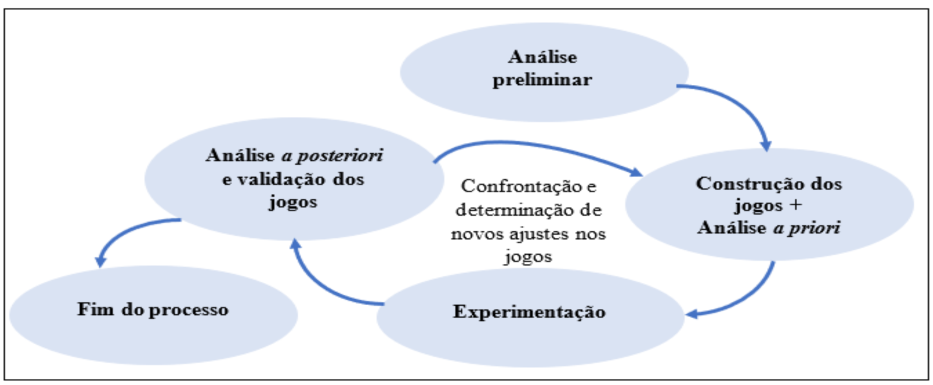


Figura 1. Engenharia Didática de construção dos jogos (Nossa produção, 2022).

Destacamos que a análise preliminar envolveu o estudo e levantamento sobre o objeto Matemático a ser trabalhado nos jogos, isto é, realizamos um estudo profundo dos Números Racionais e dos seus obstáculos didáticos e epistemológicos.

Na análise *a priori* dos jogos físicos, consideramos os elementos e recursos que seriam contemplados no jogo, isto é, objetos, cenários e personagens, além da definição da jogabilidade, momento em que foi demarcada a ilustração e foi feita a seleção dos objetos e materiais utilizados, criação dos *layouts*, impressão e construção dos jogos. Já a análise *a priori* dos jogos digitais, envolveu a criação do roteiro da história, a pesquisa de referências, a concepção dos elementos e recursos (objetos, cenários, personagens, sons), a definição da jogabilidade/mecânicas do jogo e a definição da engine de construção do jogo; desenvolvimento, no qual foram realizadas as ilustrações e/ou seleção dos personagens, objetos e cenários, além da criação dos *sprites* de animação, criação ou seleção dos recursos sonoros (diálogos, efeitos internos e externos, locuções, trilha sonora) e a programação e testagem para desktop e celular. No decorrer das construções dos jogos, vivenciamos a experimentação interna no grupo de pesquisa do projeto intitulado “Plataforma Interativa de Jogos Matemáticos", somente após esse momento, realizamos experimentações externas, com professores e estudantes do 3º aos 7º anos do Ensino Fundamental.

Ressaltamos que tanto os jogos físicos quanto digitais foram disponibilizados em uma plataforma interativa em sítio eletrônico, cujos objetivos principais são de: abrigar os jogos digitais (versão para desktop) e físicos (versão para impressão) produzidos no projeto; promover um ambiente de interação entre estudantes, educadores e outros interessados nos jogos; prover informações acerca do projeto.

Os espaços formativos criados nas vivências dos jogos físicos e digitais

Iniciamos o processo de validação dos jogos de maneira interna, isto é, junto aos pares (equipe multidisciplinar) do grupo de estudos e, na continuidade realizamos experimentações junto a estudantes da pós-graduação (mestrado profissional em rede) e professores da Educação Básica, buscando olhares mais aguçado do adulto que pensa o jogo, das dimensões lúdicas e matemáticas, a fim de que, ao chegar o momento de validar com crianças e adolescentes, os jogos estivessem mais instigantes e sem problemas de ordem conceitual e procedimental, visto que o caráter lúdico dado a partir da vivência de cada um dos partícipes da pesquisa.

Na primeira fase do projeto “Plataforma Interativa de Jogos Matemáticos”, além do desenvolvimento de uma plataforma interativa cuja função é ancorar os jogos desenvolvidos internamente e/ou submetidos por professores da Educação Básica e Licenciandos de Pedagogia e Matemática, realizamos a construção dos nove jogos. Ressaltamos que na plataforma os jogos físicos são apresentados para serem impressos e montados por professores, pais, crianças e adolescentes, interessados no jogo, além disso, disponibilizamos orientações didáticas que poderão auxiliar na vivência pedagógica do jogo. Já os três jogos digitais, que estão em fase de programação, são concebidos para utilização tanto em computadores quanto smartphones.

O primeiro jogo físico a ser descrito denomina-se “Comprando Pizza” e permite trabalhar no contexto fracionário a relação parte-todo, equivalência de frações e adições de quantidades fracionárias com denominadores iguais ou diferentes, mas com relação de multiplicidade evidente. Tem por objetivo pedagógico compor duas unidades adicionando partes fracionárias, assim como, compreender os números fracionários como quantidades de um todo.

Um jogo que pode ser utilizado na sequência do jogo “Comprando Pizza” é o jogo denominado “Junta Um”, cujo conteúdo matemático compreende os significados de dobro, metade, triplo e terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, além da comparação e ordenação de Números Racionais na representação decimal e na fracionária, utilizando a noção de equivalência (BNCC, 2018).

Outro jogo que permite trabalhar com os significados das frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100), é o "Jogo da Memória" que, além de trabalhar com tais significados, permite realizar comparação e ordenação de Números Racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência, além da possibilidade de compreender as operações de adição e subtração de números em sua forma fracionária.

Ainda no contexto dos jogos que permitem trabalhar com a comparação de frações na representação fracionária; frações maiores e frações menores que o inteiro; equivalência de frações, construção das ideias de numerador e denominador; todos esses assuntos atrelados a medidas de comprimento, foi construído o jogo denominado "Corrida das Frações". Neste mesmo contexto, o jogo denominado "Conecta Fração" tem o intuito de validar saberes já consolidados e trabalhar com o significado de fração (parte/todo) e equivalência. Este, foi construído a partir do jogo "Three-in-a-Row" (Barson, 1992, p. 34-35).

Além disso, o jogo "Fração de quantidade" permite construir os procedimentos de determinação de uma fração de uma quantidade dada, possibilitando o trabalho com fração própria e imprópria de quantidade. Tais aspectos, vão ao encontro, do desenvolvimento das habilidades de reconhecer as frações unitárias mais usuais, como unidades de medida menores que a unidade; identificar frações maiores e menores que a unidade e compreender as noções de múltiplo e divisor; além de comparar e ordenar frações relacionadas às ideias de partes de um inteiro; razão e divisão (Brasil, 2018).

Os jogos digitais, apesar de optarmos por apresentá-los neste estudo separado dos jogos físicos, estes integrarão partes das sequências didáticas apresentadas na plataforma digital. O primeiro jogo digital denomina-se "Snake das Frações", permite trabalhar com os fracionários e sua representação, além da comparação de frações; equivalência de fração; complemento entre frações; adição e subtração entre frações com denominadores /2, /4 e /8. Outro jogo que está em fase de desenvolvimento é o "Match das Frações", visando a compreensão do conceito e da representação da fração; comparação de fração; complemento de uma fração dada para formação do inteiro e as noções de adição e subtração de frações.

O terceiro e último jogo digital, coaduna com o jogo físico "Corrida das Frações", denomina-se "Jogo do Cerrado", no qual são tratados conteúdos relacionados às frações unitárias mais usuais e a comparação de frações na representação fracionária; frações maiores e frações menores que o inteiro; comparação de frações; equivalência de frações; construção das ideias de numerador e denominador; além das medidas de comprimento: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida não convencionais e convencionais.

Considerações finais

Os jogos descritos possuem o intuito comum de estimular o gosto dos alunos pela matemática, justamente nos conteúdos que tradicionalmente podem impor obstáculos didáticos para uma vivência lúdica e a superação de dificuldades que possam existir em diferentes aspectos, a saber: quanto à estrutura lúdica; a apresentação de regras cada vez mais complexa; quanto ao conhecimento matemático, de forma a fazer evoluir os conceitos e procedimentos a cada nível, tendo em vista que a medida que se avança no jogo uma nova classe de frações é inserida. O princípio primordial de todos os jogos é a permissibilidade da entrada livre do jogador em qualquer nível do jogo, mas o programa oferecerá orientações de sequências didáticas de forma a melhor explorar as potencialidades dos recursos para determinadas aprendizagens matemáticas, indicando quando um jogo permite a aprendizagem associada à um objeto de conhecimento que um segundo jogo vai requerer.

Assim, no contexto de sala de aula, o professor poderá definir para um aluno ou grupo de alunos uma sequência didática conforme os objetivos pedagógicos, isso poderá permitir a realização de articulações pedagógicas lógicas e contribuir para que os alunos possam vivenciar e autoavaliar as suas aprendizagens em diferentes níveis e/ou jogos.

Vale enfatizar que o presente projeto encontra-se em desenvolvimento, tendo como primeiro objeto de conhecimento os Números Racionais, mas que vem sendo ampliado e almeja o desdobramento de novas sequências didáticas com jogos para o estudo de outros objetos do campo Matemático, tendo sempre o intuito de elaborar, propor e disponibilizar em uma plataforma digital interativa atividades ludomatemáticas, que possam, por um lado, desafiar crianças, adolescentes e adultos e, por outro lado estimulá-los a vivenciarem os jogos, de forma a pôr em movimento cognitivo os conhecimentos conceituais e procedimentais associados à Matemática, que estão presentes nos referenciais curriculares nacionais e internacionais.

Referências e bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En ARTIGUE, M. et al. (Eds.), *Ingeniería didáctica em Educación Matemática*: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Barson, A. (1992). *Mathematics Games*: for Fun and Practice. Addison Wesley.

Base Nacional Comum Curricular (2018, 06 de março). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: a educação é a base. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Freire, P. (2014). *Pedagogia da Autonomia*. Saberes Necessários à Prática Educativa (48a. ed). Paz e Terra.

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e jogar*: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica.

La Calculadora en Educación Primaria. Una propuesta de enseñanza más allá de los algoritmos

Hilbert **Blanco-Álvarez**
Universidad de Nariño
Colombia
hilbla@udenar.edu.co
Edinsson **Fernández-Mosquera**
Universidad del Valle – Universidad de Nariño
Colombia
edinfer@udenar.edu.co
María-Fernanda **Mejía-Palomino**
Universidad del Valle
Colombia
maria.fernanda.mejia@correounivalle.edu.co

Resumen

El objetivo es reflexionar sobre el uso de la calculadora en el aula de educación primaria (estudiantes entre los 9 y 11 años). La tesis es que el problema de usar la calculadora, en primaria, no está en la calculadora misma sino en las actividades que se proponen con ella. Para argumentar esta tesis presentaremos una experiencia de formación de maestros de matemáticas en Colombia, algunos referentes teóricos como la génesis instrumental y una actividad promotora de competencias matemáticas. Finalmente, concluimos que es necesario invitar a los maestros al diseño de actividades para el aula, teniendo en cuenta el nivel de complejidad de la actividad, el tipo de cálculo a realizar y la resolución de problemas.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria; Calculadora; Pensamiento numérico; Actividades; Génesis Instrumental; Colombia.

Las calculadoras en las clases de matemáticas vistas por maestros en ejercicio de educación primaria que enseñan matemáticas en Colombia

La integración de las calculadoras elementales o de bolsillo, en las clases de matemáticas en primaria, ha sido un tema bastante discutido a nivel internacional en el campo de las

Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación Matemática (Castiblanco et al., 1999; Cedillo, 2006; Del Puerto & Minnaard, 2002; Kutzler, 2000; Ministerio de Educación Nacional, 2006; Udina, 1989), señalando que el uso de la calculadora en el aula de primaria, generalmente, se ha visto de una forma negativa.

En el ámbito nacional, en el marco de un programa de formación de maestros en ejercicio de la Educación Básica Primaria (niños entre los 6 y 12 años) en Colombia, al preguntarle a los maestros si dejarían a los niños utilizar la calculadora en el aula, la respuesta mayoritaria fue que no. Un profesor, con más de 20 años de experiencia, se levantó airadamente y dijo: “Yo nunca dejo que mis estudiantes saquen la calculadora. Les tengo prohibido, porque sino, no aprenderán a sumar, no aprenderán las tablas de multiplicar, ni a dividir por tres o más cifras (Profesor 1)”

Los demás colegas coincidían con esta postura del Profesor 1. Luego les preguntamos: ¿si permitieran el uso de la calculadora en el aula, qué actividades plantearían a los estudiantes? A lo que respondieron: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con varias cifras.

Rápidamente pudimos observar que los profesores estaban preocupados por el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones básicas, y su postura hacia la calculadora es que ésta no permitirá afianzar dichos algoritmos en los estudiantes. La calculadora es vista como un resolutor de operaciones que no permitirá memorizar a los niños los algoritmos de las cuatro operaciones básicas, y por supuesto, las tablas de multiplicar. Además, todos coinciden en que el uso de la calculadora no es bien visto por los padres de familia, por las mismas razones que exponen los profesores.

Desde esta mirada, se piensa que la calculadora es sólo para realizar algoritmos, ya sea para corroborar los resultados de las operaciones realizadas a lápiz y papel o cálculo mental o para resolver operaciones que pueden ser difíciles por estos métodos. Al respecto, desde hace más de dos décadas, ya se venía advirtiendo esta problemática en las aulas de matemáticas, en Colombia:

> Por desgracia, en la mayoría de colegios y escuelas de nuestro país se ignora este hecho y se sigue enseñando a los niños la mecánica de las cuatro operaciones resueltas sobre papel y lápiz según los algoritmos clásicos. Muchos profesores aún centran la enseñanza elemental en multitud de ejercicios de cálculo mecánico (Castiblanco et al., 1999).

Por ejemplo, Del Puerto y Minnaard (2002) considera que las calculadoras elementales se deben usar como un recurso que apoya la comprensión de las técnicas tradicionales (como las de lápiz y papel) que nos permiten realizar todas las operaciones con mayor facilidad y velocidad. En relación a lo anterior, Kutzler (2000) presenta una analogía entre del uso de la calculadora y los desplazamientos que una persona realiza en su vida cotidiana, que se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1
Movimiento vs Maneras de calcular un algoritmo

Movimiento	Método para realizar un algoritmo
Caminar	Cálculo mental
Ir en bicicleta	Cálculo de papel y lápiz
Conducir carro	Cálculo con calculadora
Usar silla de ruedas	Cálculo con calculadora, que permite compensar una debilidad

Fuente: elaboración propia.

Por lo general, usted decide caminar cuando los desplazamientos son cortos, en este sentido hay operaciones que son adecuadas a realizar por cálculo mental porque son simples, por ende, las operaciones más complejas o que tomen más tiempo se podrían realizar en lápiz y papel o calculadora. Sin embargo, algunos deciden usar la calculadora para operaciones como 7 por 9, de la misma manera que alguien decide ir en carro a un lugar a 250 metros de su casa, en ambos casos existe un uso inadecuado de la tecnología. En este caso, la calculadora inhibiría el desarrollo del cálculo mental, así como el uso del carro inhibiría el uso de la musculatura. Por lo cual, Kutzler (2000) menciona que, para evitar estos usos inadecuados de los artefactos, se debe generar consciencia de la importancia del ejercicio físico para la salud, así como el ejercicio intelectual para desarrollo de las competencias matemáticas.

En relación con lo anterior, el uso de la calculadora también requiere del reconocimiento de un valor estimado de las operaciones, en ocasiones los resultados de la calculadora no son los correctos, dado que al teclear a veces omitimos dígitos en las cifras o se oprimen teclas que no corresponden a las operaciones, generándose que el resultado no sea el correcto. Darse cuenta del error, conlleva a que el usuario de la calculadora tenga en mente un valor estimado o interprete el resultado en relación al contexto.

Ampliando el panorama de las posibilidades de cálculo aritmético de Kutzler (2000), Gómez (2008) menciona que el cálculo que se realiza en la mente puede ser exacto, estimado o aproximado. El cálculo exacto se conoce como cálculo mental, el cálculo estimado es aquel en donde se recurre al redondeo de las cifras (valores acabados en cero) y el cálculo aproximado corresponde a los datos que se obtienen por medición, que puede tener un margen de error en relación con el instrumento de medida. Respecto a las formas de cálculo aritmético, además de los mencionados, resalta otros con la ayuda de materiales o recursos didácticos como el ábaco.

Por otra parte, Mejía-Palomino (2011) considera que el usuario de las calculadoras requiere conocer las técnicas de lápiz y papel para comprender los resultados de la calculadora, dado que el uso de calculadora no es un tecleo sin sentido. De allí que se puedan plantear actividades matemáticas que complementen el uso de las técnicas de lápiz y papel y las técnicas de las calculadoras, en donde se fortalecen ambas técnicas. Por ejemplo, los estudiantes de primaria pueden hallar las reglas de cálculo aritmético de lápiz y papel por generalización, a partir del análisis de los resultados obtenidos en calculadora de diferentes casos particulares; es decir, pueden determinar lo común y obtener la regla. Además, conocer la sintaxis de la escritura en papel, los prepara para el reconocimiento de la sintaxis de la calculadora, aunque también es importante reconocer sus diferencias.

La calculadora, mucho más que un artefacto

Desde la postura de Trouche (2005), la calculadora como artefacto, puede convertirse en un instrumento, en la medida que el estudiante construye conocimiento matemático a partir de su actividad. Este proceso denominado génesis instrumental, considera dos momentos: la instrumentalización y la instrumentación.

El proceso de instrumentalización está dirigido hacia el artefacto como: selección, agrupación, descubrimiento, producción e institución de funciones, usos desviados, atribución de propiedades, personalización, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento. El proceso de instrumentación está relacionado con el sujeto, en donde se da la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación, y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos (Rabardel, 2011).

En relación con lo anterior, la instrumentalización se centra en el uso del artefacto, en este momento el sujeto aprende o reconoce sus utilidades y puede crear nuevos usos. En el caso de la calculadora, es importante reconocer la sintaxis de entrada, que en ocasiones es diferente a la de lápiz y papel.

Cuando se produce la instrumentación, el sujeto ha construido o evolucionado esquemas de utilización. Un esquema se considera como una organización invariante de la conducta humana para una clase de situaciones dadas (Vergnaud, 1990). En este momento, la calculadora puede usarse eficientemente en el desarrollo de las tareas propuestas para construir conocimiento matemático, porque se ha construido el instrumento que es la combinación del artefacto y los esquemas de utilización, en otras palabras se ha desarrollado tanto los aspectos técnicos y conceptuales matemáticos involucrados en el desarrollo de las tareas con el uso del artefacto (Cedillo, 2006).

Por otra parte, la calculadora y las actividades que se proponen con ella, se constituyen en recursos pedagógicos. Para Maschietto y Trouche (2010) un recurso pedagógico es un término que indica una diversidad de cosas: desde un problema matemático, hasta un libro de texto, pasando por un software, una hoja de trabajo del estudiante, hasta una discusión académica con un colega. En este sentido, estos mismos autores consideran un recurso pedagógico como un artefacto, que se convierte, a lo largo de un proceso complejo de apropiación, en un instrumento para un profesor cuando éste lo utiliza. Este proceso denominado génesis documental (Maschietto & Trouche, 2010), que es una génesis instrumental centrada en el docente cuando diseña actividades para sus estudiantes, en donde el recurso es el artefacto y el instrumento es el documento.

A partir de estas ideas, Pabón, Arce, Vega y Garzón (2011), proponen una reflexión interdisciplinaria sobre el desarrollo de recursos pedagógicos (Garzón et al., 2013) para el docente y se reconoce que una vez éstos estén dentro de una comunidad de práctica, se debe dar tiempo a los profesores, para que logren un clima de confianza que permita la adhesión de otros actores.

Actividades para el uso de la calculadora en la Educación Primaria

Las actividades fueron diseñadas al interior del Laboratorio de Matemáticas del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. El equipo de profesores fue dirigido y gestado por el profesor Jorge H. Arce Chaves (2004) y que luego continuó desarrollando sus colegas: Octavio A. Pabón Ramírez (Q.E.P.D.), Diego Garzón Castro y Edinsson Fernández Mosquera. Para más detalles del uso de estos recursos pedagógicos dentro del Laboratorio de Matemáticas, recomendamos revisar los documentos de Pabón et al. (2011) y Garzón et al. (2013). Los principales diseñadores de las actividades de la mesa de Mesa de Nuevas Tecnologías de dicho Laboratorio fueron los Profesores Pabón, Garzón y Fernández.

Estos últimos investigadores tomaron como principio básico, para el diseño de actividades con calculadora, investigaciones previas en educación matemática. Por ejemplo, realizaron adaptaciones de las actividades matemáticas de Udina (1989) y de Álvarez-Álvarez (1995). El propósito que se buscaba era que las actividades pudiesen evolucionar o constituirse en todo un reto para los estudiantes o cualquier usuario del laboratorio, en las cuales las personas se encontraran con actividades atractivas, no convencionales y verdaderos problemas matemáticos.

La experiencia donde se probó estas actividades fue en el marco del Laboratorio de Matemáticas de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali para formar futuros docentes de primaria y también se llevó a cabo experimentaciones con los estudiantes, futuros profesores de matemáticas del Programa de Formación en Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en Cali, en el Laboratorio de Matemáticas del Área de Educación Matemática de la misma Universidad.

Las expectativas siempre fueron que cualquier usuario de la mesa de nuevas tecnologías, al tomar una ficha de trabajo, se le proporcionaría el material necesario para que pudiese sentarse en la mesa y pensar con la calculadora y resolver el problema matemático planteado por sus propios medios.

A grandes rasgos, el Laboratorio de Matemáticas (Arce, 2004) de la Universidad del Valle, se configura en unidades académicas denominadas mesas, en las cuales se disponen de diversos recursos pedagógicos para que los usuarios enfrenten los retos y problemas. Tal y como lo afirmaron Pabón et al. (2011), los participantes deben asumir y familiarizarse con las fichas (actividades matemáticas) y con las calculadoras como recursos pedagógicos, que hacen parte de la mesa de Nuevas Tecnologías del Laboratorio de Matemáticas.

Las fichas están distribuidas en las mesas del Laboratorio de Matemáticas, tienen un diseño sencillo y práctico que permite su organización y manipulación tanto física como digitalmente. Cada ficha ha sido estudiada, previamente, por un grupo de profesores expertos y asesores del Laboratorio.

En esta última sección, nuestro objetivo es plantearles a los profesores, que enseñan matemáticas en primaria, ejemplos de actividades organizadas en fichas, que propenden por el desarrollo de diferentes procesos matemáticos, más allá de fomentar procesos algorítmicos o procedimentales básicos de la aritmética.

Desde nuestro punto de vista, el problema no es si los niños usan o no la calculadora en el aula. El problema radica en el tipo de actividad que propone el maestro. Por ejemplo, una actividad a la que no le encontramos sentido es: utiliza la calculadora para calcular la división de 3456930 por 7394. La mayor exigencia cognitiva que tiene esta actividad es reconocer los números, el símbolo división y el símbolo igual en el teclado de la calculadora. Es una actividad de reconocimiento del uso de la calculadora que no amplia los conocimientos matemáticos que ya poseen los estudiantes.

En lo que sigue, por cuestiones de espacio, solo se presenta una ficha de la Mesa de Nuevas Tecnologías, con actividades propuestas para resolver con el uso de la calculadora aritmética, seguido del objetivo de la actividad, el grado de escolaridad, el tipo de pensamiento matemático movilizado en la actividad planteada y las competencias matemáticas a la luz de los Estándares básicos de competencias en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006).

Actividad: Las teclas prohibidas

LAS TECLAS PROHIBIDAS
Aritmética
Pon en la pantalla de tú calculadora el número 312. Parece fácil, pero para hacerlo puedes utilizar cualquier tecla, excepto las teclas correspondientes a los números 1, 2 y 3. 

Objetivo: Jugar con las operaciones aritméticas básicas y adquirir estrategias de estimación

Unas preguntas que resultan interesantes explorar con los niños son: a) ¿cuál es la peor estrategia de solución? ¿Cuál es la mejor estrategia?

Objetivo: Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Grado de escolaridad: De cuarto a quinto grado de primaria (niños entre los 9 y 11 años)
Tipo de Pensamiento matemático movilizado: Pensamiento Numérico.
Competencias matemáticas:

- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Reflexiones finales

Para concluir queremos extender una invitación a profesores en ejercicio de la educación básica primaria, a diseñar y ejecutar actividades con calculadora. Tal y como recomienda Kutzler (2000), dependiendo del nivel de complejidad de la actividad, así mismo se debe de escoger el tipo de cálculo, por lo cual, las actividades para realizar en el ambiente de lápiz y papel no son las mismas a realizar con calculadora.

Por otra parte, es necesario tener en cuenta que, al introducir un nuevo artefacto al proceso de enseñanza, el profesor debe reconocer que se da un proceso de génesis instrumental. De allí que, en el proceso de instrumentalización, se centre en el uso del artefacto, para luego propiciar la construcción o evolución de esquemas de utilización. En el proceso de instrumentación, el estudiante al desarrollar las actividades construye su propio conocimiento matemático. De esta manera, se asume que el uso de la calculadora no es una cuestión de teclear sin sentido, pues existen unos conocimientos matemáticos requeridos para interpretar sus respuestas y para entender su sintaxis de entrada.

De acuerdo con la postura de Gómez (2008), es importante generar experiencias matemáticas que desarrollen los diferentes tipos de cálculo y siguiendo a Mejía-Palomino (2011) se pueden crear actividades que conjuguen diferentes artefactos, en este caso, el uso de la calculadora puede conllevar al mejoramiento de las técnicas de lápiz y papel y calculadora, porque se puede generar su complementariedad en desarrollo de las actividades.

Finalmente, las fichas del Laboratorio de Matemáticas de la mesa de Nuevas Tecnologías suministran un modelo para diseñar actividades matemáticas, que se va enriqueciendo con los resultados de experimentación. Una de las características de las actividades es que son sencillas, son preguntas claras que se amplían con gráficos o tablas y que de alguna manera se han validado a través de discusiones didácticas entre un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio o en formación. De allí que sea necesario la organización de comunidades de profesores, en donde se generen espacios para compartir experiencias y validar sus propios diseños.

Referencias y bibliografía

Álvarez Alvarez, A. (1995). *Uso de la calculadora en el aula*. Narcea Ediciones .

Arce, J. (2004). *El Laboratorio de Matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Castiblanco, A. C., Camargo, L., Villarraga, M. & Obando, G. (1999). *Nuevas tecnologias y currículo de Matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares* (A. C. Castiblanco (ed.)). Bogotá: Ministerio de Educacion Nacional.

Cedillo, T. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, RMIE*, *11*(28), 129–153.

Del Puerto, S. & Minnaard, C. (2002). La calculadora como recurso didáctico. In C. Barceló (Ed.), *Homenatge al professor Lluís Santaló i Sors* (pp. 166–175). Universidad de Girona. España.

Garzón, D., Pabón, O. & Vega, M. (2013). Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, I CEMACYC. Santo Domingo, República Dominicana. 6 Al 8 de Noviembre de 2013.*, 1–12.

Gómez, B. (2008). El cálculo flexible. In C. Luque (Ed.), *Memorias XVIII Encuentro de Geometria y VI encuentro de Aritmética* (pp. 1–9). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Kutzler, B. (2000). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *7*(1), 5–23.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: The productive notion of mathematics laboratories. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 33–47. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0215-3

Mejía-Palomino, M. F. (2011). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de lápiz/papel (L/P) y álgebra computacional*. Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. In *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Imprenta Nacional de Colombia.

Pabón, O.; Arce, J.; Vega, M.; Garzón, D. (2011). El Laboratorio de Matemáticas: una estrategia de producción y uso de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas. In 1. Comité Interamericano de Educacion Matematicas (Ed.), *Memorias de XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, XIII CIAEM 2011, 26 al 30 de Junio de 2011. Comité Interamericano de Educación Matemática.*

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las Tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (M. Acosta (trans.)). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137–162). New York, US: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7

Udina, F. (1989). *Aritmética y Calculadoras. Colección Matemática, Cultura y Aprendizaje.* Madrid, España: Síntesis.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches En Didáctique Des Mathématiques*, *10*(2, 3), 133–170.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

La educación a distancia: Desarrollo y rendimiento académico en Matemática de los estudiantes de pre-media

Vienbenida Igualada **Cortez**
Departamento de Matemática, Universidad de Panamá
Panamá
vienbenida27@gmail.com
Tatiana **Portugal**
Departamento de Matemática, Universidad de Universidad de Panamá /Meduca
Panamá
tatyportugal5@gmail.com
Narciso **Galastica**
Departamento de Matemática, Universidad de Universidad de Panamá
Panamá
ngalastica06@gmail.com
Olmedo **Aparicio** B.
Departamento de Didáctica, Universidad de Universidad de Panamá
Panamá
olmedoab2150@gmail.com

Resumen

La presente investigación tiene un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo de corte transversal aplicando un método de investigación descriptivo. La población de estudio en esta investigación está conformada por toda la población de estudiantes integrada por los 12 colegios de la región de Herrera. Cual representa el 100% de toda la población. En la investigación no se excluye a ningún estudiante, es decir participan todos los estudiantes con el fin de determinar cuál es el porcentaje de aprobado y reprobado en la asignatura de Matemática. Los resultados fueron buenos, sólo el 7,6% de los estudiantes de 7°, el 8,3% de los estudiantes de 8 ° y el 3% de los estudiantes de 9° respectivamente no aprobaron la asignatura de Matemática. La educación a distancia es una vía para seguir midiendo los aprendizajes de los estudiantes un medio para crear aprendizajes contribuyendo al desarrollo y formación en estas etapas.

Palabras clave: Educación a distancia, rendimiento académico, Matemática, premedia.

Introducción

La educación en Panamá ha dado un giro impredecible, generado por la pandemia, COVID-19, obligando a hacer cambios en el sistema educativo en todos sus niveles implementado la modalidad a distancia a nivel nacional, por lo que se inicia el programa de entrenamiento de docentes mediante seminarios de capacitación sobre herramientas digitales. Para Austudillo (2016):

> la inclusión de las TIC en el proceso educativo facilita la labor docente, pero en especial contribuye al fomento de conocimientos y habilidades que adquiere el estudiante para dar soluciones a problemas específicos de cada asignatura, permitiendo además realizar clases más interactivas, establecer un canal adicional de comunicación entre docente-estudiantes y promover el aprendizaje autónomo (p. 109).

Panamá afectado al igual que el resto del mundo y de América Latina y el Caribe por la pandemia del COVID-19, tomó la decisión de cerrar todos sus centros educativos públicos y privados el 12 de marzo de 2020 y luego de hacer un plan estratégico que conlleva desde la preparación de capacitación docente, metodologías, priorizar el currículo, preparar a las escuelas con materiales necesario para continuar el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes se presenta un Decreto Ejecutivo Nº 564 de 2 de julio de 2020 que establece el calendario escolar 2020 a distancia, no presencial, de manera transitoria, en los centros educativos oficiales y particulares del primer y segundo nivel de enseñanza, del subsistema regular y no regular, en la cual se inicia nuevamente las clases el 20 de julio de 2020, con la modalidad a distancia en todo el país. Por tal razón esta investigación pretende analizar la información suministrada por la Dirección Regional de Herrera, en cuanto a los datos estadísticos de los colegios oficiales (12), referente al rendimiento académico (aprobados y no aprobados) de los estudiantes de premedia (7°. 8° y 9°), y se hará énfasis también en las herramientas digitales utilizada en época de pandemia 2020.

Metodología

El estudio tiene un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo de corte transversal aplicando un método de investigación descriptivo. Para Hernández, Fernández y Baptista (2014) "el diseño transversal se caracteriza porque los datos se recolectan en un solo momento y tiempo único" (p.154). La población de estudio en esta investigación está conformada por los estudiantes de pre-media (7°, 8° y 9°), integrada por los 12 colegios de la región de Herrera el cual representa el 100% (4 593) de toda la población. Se utilizó el Excel y el SPSS26, para el análisis de datos.

Resultados

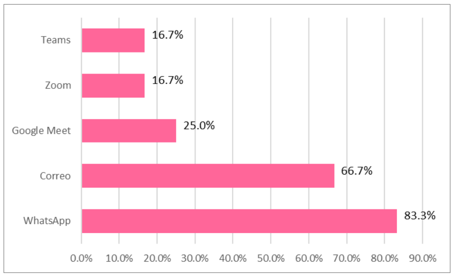


Figura 1. Herramientas digitales utilizadas para darle seguimiento a las actividades asignadas a los estudiantes
.

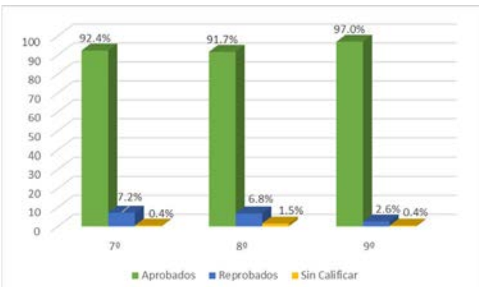


Figura 1. Rendimiento académico en matemática por grado de los estudiantes de pre-media

Conclusiones

La educación a distancia fue un factor importante para el aprendizaje de los estudiantes los resultados fueron buenos, sólo el 7,6% de los estudiantes de 7° no aprobaron la asignatura de Matemática, el 8,3% de los estudiantes de 8 ° no aprobaron la asignatura de Matemática y el 3% de los estudiantes de 9° no aprobaron la asignatura de Matemática. Estas razones pueden ser por deserción escolar y por no comprender los contenidos de la asignatura Entre las herramientas más utilizada fue el WhatsApp.

Referencias y bibliografía

Astudillo, M. (2016). La configuración didáctica de las estrategias de enseñanza con Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en las prácticas pedagógicas de las ingenierías. Education in The Knowledge Society (EKS), 17(2), 109-131. doi:10.14201/eks2016172109131.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill

MEDUCA (2020). Decreto ejecutivo N° 564 “Establece el calendario a distancia no presencial”. Panamá.

Límite de funciones desde la teoría de puntos de acumulación y criterio ε-δ. Propuesta didáctica usando GeoGebra.

Hamlet H. **Castillo** Alvino
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
hcastillo@pucmm.edu.do
Antonio **Alexanderson** Rivero
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
arivero@pucmm.edu.do

Resumen

El proceso de enseñanza-aprendizaje (EA) para abordar el concepto de límite de funciones en variables reales conlleva a una trascendencia desde la abstracción en los procesos cognitivos del análisis matemático hasta una forma de EA práctica. Este reto obliga complementar el proceso EA con recursos que faciliten la comprensión de los conceptos, sin dejar vacíos cognitivos en los estudiantes (cuadrado Baez,2021) Es por esto por lo que la utilización de recursos tecnológicos nos lleva a crear estrategias EA tipo talleres para la construcción de recursos que permitan a los estudiantes integrar conceptos mediante otras representaciones, logrando un aprendizaje significativo. Este taller tiene como objetivo abordar el concepto de entorno, punto de acumulación, junto con la definición de intervalos Epsilon-delta en límites de funciones en variables reales utilizando Software libre GeoGebra como recurso tecnológico de este taller para la creación y exploración de objetos matemáticos de una manera dinámica.

Palabras clave: Entorno o vecindad; Punto de acumulación; Criterio Epsilon-delta; Representación gráfica; Limite de funciones; Aprendizaje significativo.

Introducción

Cuando abordamos el concepto de límite de funciones en nuestra planificación tomamos en cuentas variables categóricas como el tiempo, recursos, generalidad del estudiantado, entre otros, que podrían desviar el concepto matemático en su totalidad si no son tomadas apropiadamente en cuenta. En este sentido, en ocasiones partimos de una manera informal para explicar el concepto.

De ahí en caer a la igualdad del concepto ''Imagen de la función igual al límite de la función'', es decir, de no llegar a una interpretación correcta intuitivamente:

$$Dada\ una\ función\ f\ definida\ en\ un\ intervalo\ I, donde\ c\ \in I, salvo\ posiblemente\ en\ c.$$
$$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

Si bien es cierto, que hacer uso de la representación numérica y gráfica de las funciones en el pizarrón ayudan a construir parte del significado del concepto del concepto(Pecharromanm,2014), abordarlo solamente de esta forma, existen elementos teóricos que necesitan explicitarse para tener una construcción más completa y un significado más profundo del concepto de límite.

El taller en Límite de funciones, desde la teoría de puntos de acumulación y criterio ε-δ, es una propuesta didáctica que utilizar la herramienta tecnológica GeoGebra, tomando en cuenta un proceso sistemático que integra los conceptos iniciales de vecindad, puntos de acumulación y el criterio de ε-δ, para construir los recursos apropiados conectando dichos conceptos mediante el software libre GeoGebra.

De esta manera, esta actividad tiene los procesos de construcción siguientes mediante el uso de GeoGebra:

1- Definir el concepto vecindad o entorno y punto de acumulación.
2- Construir un recurso para presentar el concepto de puntos de acumulación.
3- Partir de la definición intuitiva del concepto de límite informalmente.
4- Representar de manera dinámica el concepto de límite de una función de manera numérica y grafica de manera exploratoria mediante la construcción de un recurso.
5- Construir un recurso didáctico que muestre un concepto integrado del criterio ε-δ, punto de acumulación y el uso de tecnología para la representación de límites de funciones en variables reales.

Objetivos

I. Aplicar el software GeoGebra para construir los conceptos de vecindad y entorno para la compresión de límite de función.
II. Conectar la definición informal y la definición formal matemática de límite de funciones.
III. Aplicar el software GeoGebra para construir los conceptos de límite de función y criterio ε-δ
IV. Comparar las respectivas definiciones que ayuden a contrastar tanto la definición formal como la informal de límite de funciones.

Marco teórico

El tema objeto de estudio está dirigido a la implementación del taller Límite de funciones desde la teoría de puntos de acumulación y criterio ε-δ. Propuesta didáctica usando GeoGebra.

Es importante señalar que desde la propia concepción del concepto de límite de funciones podemos iniciar mediante una recuperación de saberes desde la mera concepción de valor absoluto y sus propiedades, conceptos de distancias y los conceptos de espacios métricos desde una perspectiva práctica de radio r y centro a, es decir, bajo la notación $V_r(a)$ hasta retomar los conceptos de Supremo e ínfimo hasta (Castillo,2022). De este modo, construir el concepto de entorno $V_\varepsilon(a)$ definido en la recta real como la vecindad a no es más que el conjunto $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \mathcal{E}\}$, es decir, distancia y conceptos ligado al concepto de supremo e ínfimo. Así que la construcción del punto de acumulación definido en (Castillo,2022)] como:

Definición 1 (punto de acumulación): Sea A un subconjunto del conjunto de los reales $\mathbb{R}$ donde el conjunto A es acotado. Además, sea x que pertenece al conjunto de los reales es un punto de acumulación de A si para cualquier entorno reducido conjunto $V_\varepsilon{}'(x)$, contiene algún punto de A.

Bajo las nuevas tendencias de cálculo se plantea el concepto de límite de funciones desde una perspectiva intuitiva como lo resalta el autor (Larson, R. & Hostetler, R. P.,2010) y luego toma directamente la definición formal del criterio ε-δ. Acorde a lo expuesto es importante resaltar el concepto de acotación bajo la recuperación de saberes y la definición 1. En este sentido, mediante una reflexión para analizar una forma más trascendente sobre qué actividades o recursos serían importante poner en evidencia para crear un aprendizaje significativo, esto nos lleva a la intensión del uso de las TIC, ya que juega un papel preponderante para alcanzar dicho aprendizaje utilizando nuevas formas de enseñanza y hacer matemática. En este sentido, (Goudez Maita,2005) destaca la potencialidad de interacción entre los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje que conlleva a los estudiantes a crear situaciones de aprendizajes para conducirlo crear sus propios conocimientos. Para [8] otra ventaja de utilizar GeoGebra en las matemáticas es que genera la posibilidad de crear una estructura dinámica en la construcción, es decir, en un procedimiento geométrico en movimiento; así que la utilización de las TIC hace que exista una trascendencia más que plasmar un mero contenido a nuestros estudiantes.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto y en relación con la implementación de talleres como estrategia didáctica para promover un aprendizaje constructivo, dicha estrategia contiene características como promoción del dialogo, participación entre los protagonistas del proceso EA, aprendizaje funcional y significativo, a través de actividades lúdicas y sobre todo integrador propiciando de manera armónica una conexión entre el uso de las TIC y talleres como estrategia didáctica.

Metodología

Primer momento: ***(Construcción de los conocimientos previos)*** (20 Minutos)

En este primer momento los participantes del taller reciben la información inicial referente a los objetivos y la importancia de la actividad para aplicar el uso de GeoGebra trabajar de manera constructiva el tema de límite de funciones. Como parte inicial se abordará un conversatorio con la intención de lograr una retroalimentación de los saberes previos aplicando las estrategias para diagnósticas tanto de los conocimientos matemáticos como el uso de GeoGebra como base de la construcción dinámica en el software.

Partimos sobre los conceptos teóricos de valor absoluto, así como sus propiedades, para llegar al concepto de la definición de entorno o vecindad. De esta manera, conectar con los elementos de ínfimo y supremo. Finalmente, cerramos con el concepto de punto de acumulación de manera conceptual

Segundo momento: ***(Construcción del concepto de punto de acumulación)*** (20 minutos)

Los participantes realizarán una construcción guiada por parte del facilitador en el software GeoGebra iniciando con la adecuación del espacio en la recta real para construir el concepto de punto de acumulación colocando deslizadores dinámicos, rotulados visualizados en las pantallas con los controladores y modo gráfico. Una vez construido los parámetros y variables del concepto de punto de acumulación realizaremos la relación existente entre el punto de acumulación y el valor $\mathcal{E} > 0$, analizando varios ejemplos ilustrativos.

Tercer Momento: ***(Construcción intuitiva de la definición de límite)*** (40 minutos)

Los participantes analizarán la definición informal de límite de una función, dada por el facilitador, a modo que exploratorio, que ayude a construir el concepto de límite, tomando en cuenta la idea de aproximación para un valor del dominio de la función f en $x = c$. En esta fase, el facilitador orientará cada paso para la construcción intuitiva mediante el uso de GeoGebra.

En esta parte, queda plasmado el concepto de límite de una función, con el objetivo de integrar el concepto de acumulación y el criterio ε-δ. El facilitador hará énfasis en desarrollar actividades que permitan interactuar con el recurso tecnológico y profundizar en la integración de estos conceptos. (O alguna idea que hable un poco sobre cómo se logrará la innovación de conectar ambos conceptos)

Cuarto Momento: ***(El criterio ε-δ y comparación)*** (40 minutos)

Una vez los participantes hayan construido la definición en el tercer momento, el facilitador utilizará la función escogida del momento anterior para conectar el criterio ε-δ y puntos de acumulación, de tal manera, que ilustre una comparación entre los momentos (3) y (4).

Recursos y actividad en el aula

Cada momento del taller el facilitador proporciona una guía que incluye cada consigna de trabajo por cada momento, además de los recursos que deberán utilizarse.

El curso está diseñado para 18 participantes, distribuido grupalmente en tres estudiantes por grupo.

Cada grupo debe tener por lo menos una computadora estacionaria o portátil con el software libre GeoGebra instalado enlace https://www.geogebra.org/download , GeoGebra clásico 5 como mínimo para el desarrollo de la actividad.

Se proporcionará materiales como lápices, hojas de trabajo, folders, material físico por el facilitador.

Referencias y bibliografía

Bartle, R., Sherbert, D. (2010). Capítulo 4. Límite de funciones. En Introducción al análisis matemático de una variable (pp.124-132). Limusa Wiley. https://bit.ly/35beIQx

Castillo, H. (2022). Los números reales. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. https://bit.ly/3GWyUSQ

Castillo, H. (2022). Punto de acumulación y ejemplos [documento]. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. https://bit.ly/3Mmmk3t

Cuadrado Baez, L., Crespo García, R., (2021). Matemática en el aula de secundaria. La gaceta de la RSME, Volumen (24) Núm. 2, Págs. 383-398. http://bit.ly/3AUmXgx

Goudez Maita, M., (2005). El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA-Táchira. Acción pedagógica, Volumen 12, Núm. 1, pp. 38-49. http://bit.ly/3GWAqbq

Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Roa, M. D. C. H., López, E. F., Bernal, M. R., & Palacios, E. (2010). Límites y sus propiedades. Cálculo esencial. pp. 38-47. Cengage Learning.

Llopis, T. Q., & Zabala, J. G. (2016). Uso de GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, Volumen (71), pp. 4-6. http://bit.ly/3ERm4Gm

Pecharrománm C., (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. Educación matemática, Volumen (26) Núm. 2, Págs. 111-133. http://bit.ly/3XLE5yz

Los modos de pensar las superficies cuadráticas y el uso del GeoGebra

Felipe de Jesús **Jacobo** Alfaro
Universidad de Guadalajara
México
felipe.jacobo2948@alumnos.udg.mx
María Guadalupe **Vera-Soria**
Universidad de Guadalajara
México
guadalupe.vera@academicos.udg.mx
Marcela **Parraguez** González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Se presentan los primeros resultados de una investigación que indaga la comprensión de Superficies Cuadráticas (SC) en estudiantes de Ingeniería que realizan actividades didácticas que incluyen el uso del software *GeoGebra*. La fundamentación teórica son los modos de pensamiento Sintético – Geométrico (SG), Analítico – Aritmético (AA) y Analítico – Estructural (AE). Se trata de un estudio cualitativo–interpretativo que analiza evidencia extraída de seis entrevistas y cinco actividades, para mostrar la construcción del concepto a través de los elementos matemáticos articuladores que se involucran al transitar entre los elementos matemáticos diferentes modos de pensar. Los hallazgos que se muestran en este reporte, dan cuenta los elementos matemáticos que los estudiantes entrevistados involucraron para articular los tres modos de pensar las superficies cuadráticas SG-SC, AA-SC y AE-SC, como trazas, proyección, plano en el espacio y sustitución.

Palabras clave: Comprensión conceptual; Modos de pensamiento; Estudio interpretativo; Articuladores; Superficies Cuadráticas.

Introducción

En esta investigación que forma parte de un proyecto de maestría, se estudia la comprensión de superficies cuadráticas en estudiantes de Ingeniería que resuelven actividades didácticas en el entorno geométrico-algebraico del *GeoGebra*. Las superficies cuadráticas o cuádricas son gráficas en el espacio de ecuaciones de segundo grado en x, y y z, consideradas como análogos tridimensionales de las secciones cónicas, que bajo ciertas condiciones representan a las funciones de dos variables (Larson y Edwards, 2016; Thomas, 2015).

En las publicaciones sobre el aprendizaje de objetos de la geometría analítica del espacio, se advierte que la mayoría se enfocan en las funciones de dos variables, y que la documentación sobre el razonamiento de los estudiantes respecto a las superficies cuadráticas, prerrequisito curricular de dichas funciones, es limitada.

Lo que se sabe es que el aprendizaje de funciones de dos variables requiere la conversión entre representaciones gráficas y algebraicas de planos, funciones de una variable y sustitución de valores de variable, y que la transición a la comprensión de objetos en tres dimensiones a partir de los representados en dos dimensiones podría verse favorecido mediante el uso de tecnología.

Por ejemplo, varios estudios llevados a cabo por Martínez-Planell y Trigueros en Puerto Rico y México (2007, 2010, 2013 y 2019), indagan sobre las construcciones mentales y dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de funciones de dos variables. Los autores realizaron tres ciclos de investigación tomando como fundamento el marco teórico de las acciones, procesos, objetos y esquemas (APOE) (Arnon et al., 2014) y la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1999, 2006).

En su proyecto, acorde al ciclo de investigación determinado por el modelo de APOE, desarrollaron una descomposición genética que fueron refinando conforme avanzaban en el proyecto, poniendo en evidencia información relevante sobre los mecanismos mentales y los objetos matemáticos involucrados en la construcción conceptual de las funciones de dos variables.

En el primer ciclo de investigación, se condujeron entrevistas a estudiantes que habían asistido a un curso de cálculo de varias variables, con el fin de ahondar en sus respuestas de un cuestionario diseñado para probar las construcciones mentales previstas en la descomposición genética. Como resultado del análisis de las entrevistas, se encontró que las dificultades más comunes en la comprensión de funciones de dos variables fueron provocadas por deficiencias en la comprensión del esquema de R^3. Señalaron que los estudiantes deberían tener una noción de objeto de planos fundamentales (planos verticales y horizontales de la forma $x=c$, $y=c$ y $z=c$).

Para el segundo ciclo de investigación, se encontró que en la construcción de gráficas de funciones de dos variables es necesario reconocer transformaciones de funciones de una variable, obtenidas a partir de sustituir valores por una variable en $z=f(x,y)$, debido que es necesario reconocer los cambios que se van produciendo en las secciones transversales que se forman con funciones de una variable, obtenidas conforme se va cambiando sucesivamente el valor de la constante c de planos fundamentales paralelos entre sí.

Y en el tercer ciclo de investigación de este proyecto, se incluyó además una discusión respecto las transformaciones de funciones de una variable y sobre el proceso de intersecar la gráfica de funciones que tienen una variable ausente con planos fundamentales (Martínez-Planell y Trigueros, 2019). Los hallazgos mostraron que la mayoría de estudiantes que utilizaron las actividades diseñadas con base en la descomposición genética, trabajo colaborativo y discusiones grupales lograron demostrar una concepción de proceso de funciones de dos variables.

Por otra parte, Weber y Thompson (2014) realizaron una investigación en Estados Unidos, relacionada con la comprensión de gráficas de funciones de dos variables a partir del conocimiento de gráficas de funciones de una variable. El análisis de las respuestas a las tareas asignadas a dos estudiantes, concluyeron que “el razonamiento covariacional proporcionó un medio para que los estudiantes generalicen su comprensión de funciones y gráficas” (Weber y Thompson, 2014, p. 82).

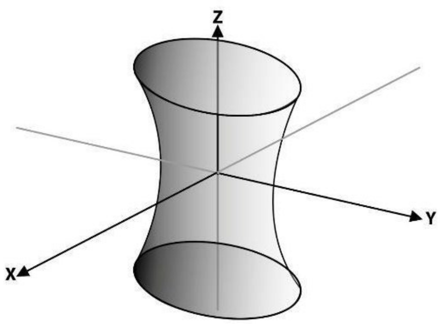
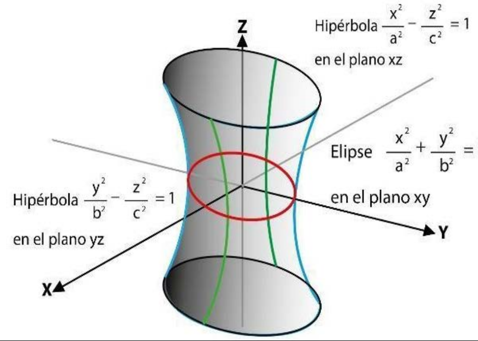
Y respecto a un trabajo identificado que indaga sobre la comprensión de superficies cuadráticas; en la tesis de López-Vega (2018) de la Pontificia Universidad Católica de Perú, se describe el análisis a priori y a posteriori de las respuestas a las actividades de un estudiante, en las que se explora el proceso de génesis instrumental del hiperboloide, cuando se desarrolla una secuencia didáctica mediada por el software *GeoGebra*. En este estudio se estableció que el uso del *GeoGebra* hizo posible el reconocimiento de propiedades del hiperboloide, como reconocer la relación entre la ecuación y la orientación de la superficie, la identificación de cómo afectan los parámetros de su ecuación a la superficie y a señalar las características del hiperboloide a partir de los cortes en secciones transversales.

Mediante los hallazgos que se presentan en este trabajo, se aporta al estado del conocimiento sobre la comprensión del concepto matemático de superficies cuadráticas. Desde una perspectiva teórica no reportada, se profundiza en el papel de los diferentes modos de pensar las superficies cuadráticas y la mediación de la tecnología en el proceso de construcción cognitiva del concepto. De manera específica, se tiene el propósito de describir los modos de pensar las superficies cuadráticas que estudiantes de ingeniería emplean usan en situaciones matemáticas propuestas y para tal fin, se determinan los tránsitos que ellos logran entre los diferentes modos de pensar las superficies, dando cuenta de los elementos matemáticos que involucran en el proceso.

El planteamiento desde el cual se examina la comprensión de las superficies cuadráticas son los modos de pensamiento Sintético–Geométrico (SG), Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE) (Sierpinska, 2000), cuya perspectiva propone que la comprensión de un concepto se logra al transitar articuladamente por estos tres modos de pensar.

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. En el modo de pensamiento SG los objetos son descritos directamente mediante visualización y se abstraen a través de sus características geométricas, mientras que en el modo de pensamiento AA los objetos se construyen de manera indirecta mediante la percepción de relaciones por medio de operaciones y procedimientos. Y en cuanto al modo de pensamiento AE, los objetos matemáticos se explican a partir de sus propiedades y características más generales. En la tabla 1, se caracterizan los modos de pensar las superficies cuadráticas, que se distinguen en la epistemología del concepto.

Tabla 1
Los modos de pensar las SC

Sintético-Geométrico (SG-SC)	***Analítico-Aritmético (AA-SC)***	***Analítico-Estructural (AE-SC)***
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

Nota. Elaboración propia.

En el modo de pensamiento SG-SC se reconocen formas o figuras en el espacio tridimensional, mientras que en el modo AA-SC, se identifica una ecuación que relaciona diferentes variables y parámetros. Y en el modo AE-SC, lo que se identifican son familias de curvas que conforman una superficie cuadrática y se diferencian los rasgos que caracterizan a las diferentes superficies cuadráticas.

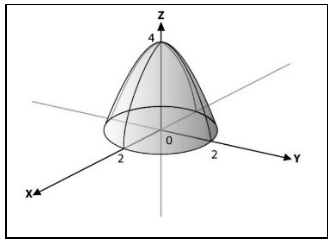
Metodología

El estudio es de corte cualitativo con la estrategia específica del método interpretativo básico (Martínez, 2006), que se desarrolla en tres etapas:

1. En la primera etapa se revisa la literatura del tema y se realiza un estudio epistemológico de las superficies cuadráticas para diseñar las actividades de exploración del concepto que incluyen el uso del software *GeoGebra*.
2. Posteriormente, en la segunda etapa del estudio se implementan las actividades diseñadas en un grupo de 38 estudiantes de ingeniería, de entre 19 a 21 años, inscritos en un curso de Cálculo de Varias Variables en una universidad pública estatal en México. Se eligen cinco de las actividades aplicadas, para evidenciar el trabajo de los estudiantes en los modos de pensar las superficies cuadráticas. La tabla 2 presenta una de las actividades que se describen en los resultados de este reporte.

Tabla 2

Actividad A3 de análisis

Actividad	**Pregunta**	**Modos de pensar y tránsitos a observar**
A3	Considera la superficie cuadrática de la siguiente figura:  Dibuja y describe verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática con el plano $z = 1$.	SG-SC → AE-SC

Nota. Elaboración propia.

También en esta etapa se condujeron entrevistas semiestructuradas (Kvale, 2011) a seis estudiantes (E1, E2, E3, E4, E5 y E6) que desarrollaron las actividades de exploración, elegidos de acuerdo a los diferentes modos de pensar las SC y elementos matemáticos que involucran en sus respuestas.

3. Y en la tercera etapa, se analizan los argumentos presentados por los estudiantes en 1) las respuestas de los estudiantes en las actividades elegidas para análisis y 2) en las transcripciones de las entrevistas para evidenciar los elementos matemáticos como curvas, planos o familias de curvas, entre otros, que los estudiantes involucraron en los tránsitos entre los modos de pensar SG-SC, AA-SC y/o AE-SC, en diferentes trayectorias o rutas cognitivas que se interpretaron desde el modelo de los modos de pensamiento.

Resultados

La evidencia muestra que los estudiantes que articularon los tres diferentes modos de pensar las superficies cuadráticas, llevaron a cabo en un proceso en el cual, se parte de la identificación de la forma de una superficie o de su ecuación, y mediante una transformación gráfica o algebraica se realiza una comparación para relacionarla con la fórmula de la ecuación estándar de una superficie cuadrática, luego se sustituyen en ésta valores de variable para obtener una ecuación de dos variables en la que se identifican los parámetros con los que establecen las simetrías de una curva que se proyecta en un plano de dos dimensiones, y que posteriormente se ubica en la intersección de la superficie con un plano en el espacio tridimensional; esta curva se percibe como el conjunto de puntos que configuran una de las trazas de una superficie cuadrática. Finalmente, es posible distinguir diferentes trazas situadas análogamente en el espacio con las que se genera la superficie cuadrática.

Lo anterior se pudo advertir al analizar se verifica al evaluar y comparar los argumentos que los estudiantes exponen al desarrollar las actividades y participar en las entrevistas. Por ejemplo, en la actividad A3 se solicitó a los estudiantes dibujar y describir verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática (paraboloide elíptico) que se da geométricamente, con el plano fundamental $z = 1$. Y para resolverla, E3 se sitúa en el modo SG-SC, ya que primero reconoce la forma de la superficie cuadrática como un paraboloide elíptico, luego, identifica el vértice de este paraboloide con coordenadas en el espacio $V(0,0,4)$, además, escribe la fórmula de la ecuación estándar de la superficie cuadrática $\left(-(z-j) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}\right)$, misma que comienza a analizar a partir de la forma gráfica del paraboloide, como se muestra en la figura 1.

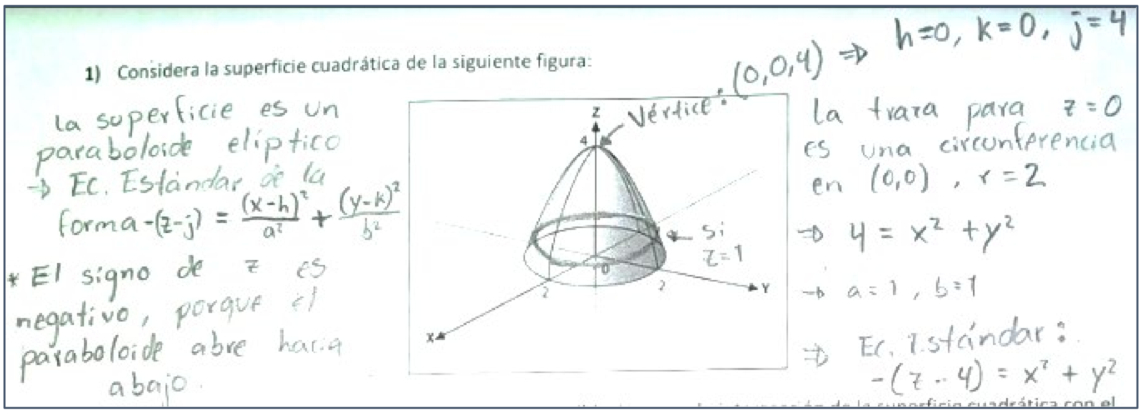


Figura 1. Respuesta del Estudiante E3 en la Actividad A2

Después, en el análisis que realiza el estudiante E3, logra articular al modo AA-SC por medio de transformaciones gráficas, pues, como se observa en la figura 1, E3 habla del signo negativo en z porque el paraboloide abre hacia abajo, además, de que identifica el punto en el espacio con coordenadas $(0,0,4)$ que es el vértice del paraboloide, y lo relaciona con los parámetros h, k y j de la ecuación estándar, de manera que, E3 sustituye los valores de h, k y j en la ecuación (figura 2), logrando obtener algunos parámetros de la ecuación estándar de la figura dada.

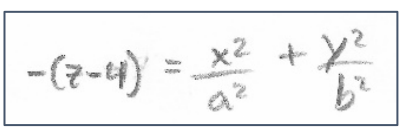


Figura 2. Ecuación Obtenida por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Luego, E3 transita al modo AE-SC al realizar la sustitución de $z = 0$ en la ecuación $-(z-4) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (figura 3).

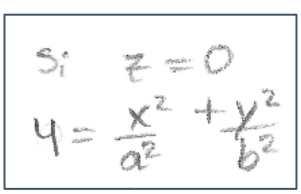
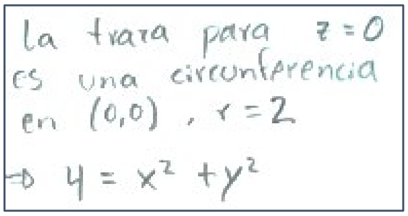


Figura 3. Sustitución Realizada por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Y señalar que con la sustitución se obtiene la traza en forma de circunferencia en el plano XY, con centro en el punto $(0,0)$ y radio $r = 2$ (figura 4).



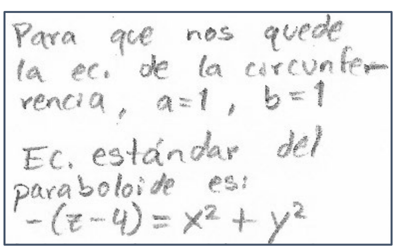
la traza para $z = 0$
es una circunferencia
en $(0,0)$, $r = 2$
$\Rightarrow 4 = x^2 + y^2$

Figura 4. Descripción del Resultado Obtenido en la Sustitución por parte del Estudiante E3 en la Actividad A3

Y a partir de este razonamiento, E3 compara la ecuación $4 = x^2 + y^2$ (figura 4), con la ecuación $4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (figura 2), para establecer que los parámetros faltantes son $a = b = 1$. Lo anterior se corrobora en el siguiente extracto de la entrevista de E3:

> **E3:** Entonces aquí… lo que se me ocurre es tomar el punto Z igual a cero, que es donde se forma esta circunferencia. (Señala la traza que se forma cuando $z = 0$).
> **Entrevistador:** Mjum.
> **E3:** Entonces… (Murmura)... sí Z es igual a cero, la ecuación nos queda cero igual a equis cuadrada más Y cuadrada, sobre algo también… Y… como esta ecuación debería de ser… (Murmura) … (Anota sí $z = 0, 4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$). Ahora, si nos vamos más bien al revés, ésta es una circunferencia, que su ecuación debería de ser equis cuadrada más Y cuadrada igual a cuatro, ¿no? (Señala la traza en el paraboloide).
> **Entrevistador:** Mjum.
> **E3:** Porque el radio es dos. Entonces… Ok, quiere decir entonces que aquí debería de ser menos ese cuatro (Murmura). Menos… algo así… Y entonces, ya queda el cuatro y quiere decir, para que esta sea la misma ecuación que esta, que a y b, pues es uno. (Anota $-(z-4) = x^2 + y^2$).

Así, al realizar la sustitución de los valores $a = 1$ y $b = 1$, E3 se ubica nuevamente en el modo AA-SC logrando obtener la ecuación estándar del paraboloide elíptico, como se muestra en la figura 5.



Para que nos quede
la ec. de la circunfe-
rencia, $a=1$, $b=1$
Ec. estándar del
paraboloide es:
$-(z-4) = x^2 + y^2$

Figura 5. Respuesta Escrita en la Entrevista por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Finalmente, E3 transita al modo AE-SC al sustituir el valor de $z = 1$ sobre la ecuación estándar obtenida en la figura 5, de manera que, E3 señala que la traza es una circunferencia con ecuación $3 = x^2 + y^2$, radio $r = \sqrt{3}$ y centro en $(0,0)$ en R^2 (plano XY) y $(0,0,1)$ en R^3. Como se puede observar en la figura 6.

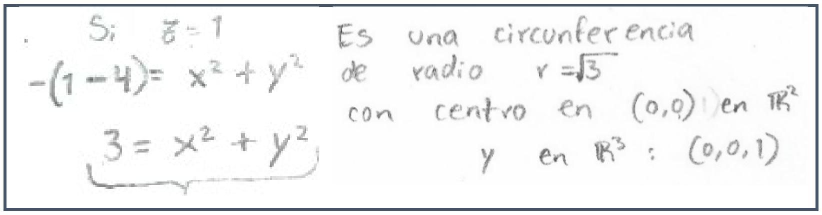


Figura 6. Sustitución Realizada en la Entrevista por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Asimismo, con el fin de establecer la traza o curva de intersección del paraboloide con el plano fundamental $z = 1$, E3 dibuja la proyección de la traza en el plano XY, para posteriormente, trazar la curva en el espacio tridimensional, como lo muestra la figura 7.

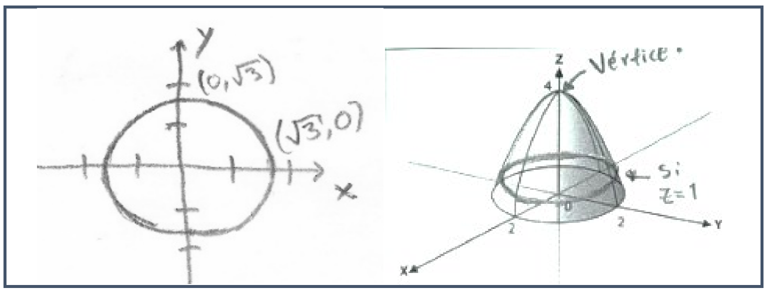


Figura 7. Respuesta en la Entrevista del Estudiante E3 en la Actividad A3

Conclusiones

Los primeros hallazgos de este estudio sobre la comprensión de superficies cuadráticas, que se fundamenta en el modelo de los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), indican que el tránsito entre los modos SG-SC, AA-SC y AE-SC, se logra cuando los estudiantes logran identificar elementos matemáticos como transformaciones gráficas/algebraicas, ecuación estándar, parámetros, sustitución, ecuación de dos variables, simetrías, proyección, plano en el espacio y trazas.

Actualmente, se trabaja en el análisis de las dificultades que algunos de los participantes experimentaron para lograr el tránsito hacia el modo de pensar AE-SC, por ejemplo, las que se originan por la tendencia a privilegiar exclusivamente alguno de los modos de pensar SG-SC o AA-SG, y que impiden llegar a la comprensión del concepto. Así mismo, se encuentra en revisión indagar el papel del software *GeoGebra* en la identificación por parte de los estudiantes de los elementos matemáticos articuladores de los modos de pensar las SC.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. Springer.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa.* Ediciones Morata.

Larson, R. y Edwards, B. (2016). *Cálculo. Tomo II. Décima edición.* Cengage Learning.

López-Vega, P. (2018). *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra.* [Tesis doctoral no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Segunda edición (reimpresión 2013). México: Trillas.

Martínez-Planell, R. & Trigueros, M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 663-672.

Martínez-Planell, R. & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior, 55,* 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. In: J.L. Dorier (ed) *On the Theaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

Thomas, G. (2015). *Cálculo varias variables. Treceava edición.* Pearson Education.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2007). Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables. In T. Lamberg &L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100-107.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Matemática com arte e Arte com Matemática

José **Vilani** de Farias
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Brasil
vilanif@yahoo.com.br

Resumo

A oficina tem por objetivo apresentar uma atividade que mostre aproximações entre a Matemática, a Arte e as tecnologias digitais. É nossa intensão convidar os participantes a reproduzir obras de arte utilizando conceitos matemáticos como se fossem “agulha e linha” e o software como se fosse o “tecido” a ser bordado. Os conceitos matemáticos mobilizados são aqueles que envolvem a função quadrática e sua representação gráfica. Quanto ao software, utilizaremos o Geogebra que se mostra potente para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem por tornar o processo dinâmico, interativo e participativo e por tornar alguns fenômenos passíveis de serem observados e reproduzidos e as hipóteses, de serem testadas. Esperamos que a atividade possa contribuir para a aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos matemáticos envolvidos, e com os professores no sentido de oferecer possibilidades de intervenção em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática; Função Quadrática; Ensino; Geogebra; Matemática e Arte; Ensino Médio; Brasil.

Introdução

Esta oficina pretende desenvolver uma atividade, que foi construída no âmbito de um projeto de pesquisa denominado *Matemática e Arte*. A atividade envolvendo a criação ou reprodução de obras artísticas utilizando o GeoGebra. Para a reprodução das obras mobilizamos os conhecimentos relacionados aos conceitos da função quadrática, assunto importante no primeiro ano do Ensino Médio. Procuramos com essa atividade apresentar as relações entre a Matemática e a Arte e mostrar como elas podem ser trabalhadas a partir de uma visão tanto interdisciplinar quanto numa visão, como definida por Faria e Maltempi (2019), intradisciplinar.

Esse trabalho justifica-se pelas dificuldades, apresentadas por alunos e professores, em relação à compreensão dos conceitos que envolve os conteúdos de Matemática do Ensino Médio, principalmente aqueles referentes a funções. Também se justifica pelo desejo de auxiliar futuros professores em relação a utilização da arte como um elemento motivador que pode contribuir para o ensino de matemática, por meio de atividades que possibilitem a compreensão dos conteúdos, nesse caso, de funções.

Fundamentação teórica

Quando se fala na melhoria do ensino, se reporta à formação do professor. Algumas pesquisas apontam que essa formação deve contemplar outros conhecimentos além do específico. De acordo com Shulman (2005, p. 5), é necessária uma formação que contemple outros saberes como "os fundamentos filosóficos e históricos", já para Moreira et. al. (2012, p. 12) a preparação do professor "precisa mobilizar, em tese, diferentes tipos de conhecimentos [...] em diferentes campos do saber", como os conhecimentos de didática, de sociologia, de filosofia, de psicologia, etc.

Entram no âmbito dessa discussão aspectos relacionados à metodologia aplicada em sala de aula, nesse sentido algumas pesquisas apontam diferentes recursos didático-metodológicos com o intuito de contribuir para a melhoria no ensino de Matemática: a História (Mendes, 2001), a Modelagem (Caldeira, 2011), a Arte (Filho, 2013), a Etnomatemática (D'Ambrósio, 2018), as novas tecnologias (Borba, 2018), os jogos (Grando, 1995), etc.

Mendonça e Ferreira (2013, p.92) defendem a importância da utilização do laboratório de Matemática como um espaço que proporciona uma relação positiva entre alunos, professores e o conteúdo, além de possibilitar "uma dinamização do ensino-aprendizagem por meio de um modo prazeroso, dinâmico e mais eficaz", contribuindo com o desenvolvimento do aluno no que diz respeito as práticas de autonomia e criatividade. É nosso intento, ao aliar Matemática e Arte, tornar o processo de ensino e aprendizagem estimulante e, dessa forma, abrir possibilidades para que os envolvidos nesse processo construam seu próprio conhecimento.

Sobre o uso do GeoGebra no ensino de funções, Feitoza et al, (2020, p.19) afirma ser uma "opção de ferramenta tecnológica capaz de tornar a aula de matemática mais atrativa, dinâmica, interativa, assíncrona, e capaz de atender de maneira eficiente a heterogeneidade presente na maioria das salas de aula".

As relações entre a Matemática e a Arte é tema de diversas pesquisas realizadas por alguns educadores. Um exemplo é um projeto citado por Nunes (2016), que desenvolve e analisa obras de arte com os alunos a partir das formas das figuras geométricas planas. A proposta do projeto de Nunes é trabalhar a matemática de maneira mais significativa e integrada. Também esclarece as possíveis relações que podem ser trabalhadas com estas duas disciplinas, alegando que elas sempre andaram juntas, aliando razão e sensibilidade. Para Flores (2016), a arte induz o pensamento matemático por meio de conceitos como proporção, paralelismo e simetria, que são empregados em diversas obras artísticas. Vilela e Dorta (2010), analisam a questão da lógica matemática por meio da obra de Lewis Carroll: Alice no país das Maravilhas.

A atividade que será desenvolvida nessa oficina tem por objetivo: facilitar a compreensão dos conceitos que envolvem a função quadrática relativos ao comportamento da função em relação aos coeficientes a, b e c na representação algébrica dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$; desenvolver no aluno a habilidade de identificar aspectos relativos a essa função, tanto por meio da lei de correspondência quanto por meio da representação gráfica. Buscamos, também, por meio do software, uma maneira de estimular no aluno a criatividade, a autonomia, a criticidade e a experimentação.

Nesse sentido, também gostaríamos de propor, com essa atividade, que os professores possam: ampliar os conhecimentos dos alunos em relação à Arte, a matemática e a relação ente as duas áreas.

Metodologia: o desenvolvimento da oficina

Inspirados no referencial teórico intentamos reproduzir figuras utilizando o software GeoGebra e os conceitos matemáticos envolvendo as funções, especificamente a função quadrática. Destacamos o caráter instrumental do software GeoGebra e dos conceitos matemáticos, como diz Farias (2021, p.5), "da mesma forma que os artistas utilizam seus instrumentos: pincel, tela, tintas, agulhas, tecidos, etc., e seus saberes, inclusive matemáticos, assim nós produzimos a nossa arte a partir de nossos conhecimentos de funções e dos nossos instrumentos tecnológicos". Optamos pelo GeoGebra por ser um software gratuito e, portanto, mais fácil de ser utilizado na sala de aula.

Para o desenvolvimento da atividade apresentaremos alguns comandos básicos do Geogebra - utilização da barra de ferramenta, a utilidade do botão direito do mouse, a janela de álgebra e alguns operadores matemáticos e suas atribuições – e aqueles específicos para essa oficina como a utilização do campo de entrada e como escrever seus comandos.

A atividade consiste em contornar figuras utilizando os gráficos que representam a função quadrática, as parábolas. Inicialmente colocamos a obra, que queremos reproduzir, como plano de fundo na janela de visualização do GeoGebra e marcamos pontos em seu contorno. Escolhemos pontos convenientes a fim de determinarmos os vértices das parábolas e em seguida escolhemos outros pontos por onde essas curvas devem passar. Ou seja, fazemos modificações na curva para que se adeque ao desenho. Todas as alterações na representação gráfica da função são realizadas a partir da função definida algebricamente por $f(x) = x^2$. Para fazermos os contornos seguimos quatro etapas:

Etapa 1: deslocamento horizontal. Para atingir um ponto $P = (x_0, 0)$, sobre o eixo x, deslocamos a parábola, definida algebricamente por $f(x) = x^2$, horizontalmente, para isso basta que façamos $g(x) = (x - x_0)^2$.

Etapa 2: deslocamento vertical. Para atingir um ponto $P = (0, y_0)$, sobre o eixo y, deslocamos a parábola verticalmente, fazendo $g(x) = (x)^2 + y_0$. Nos casos em que o ponto $P = (x_0, y_0)$ não pertença aos eixos, devemos combinar deslocamentos, verticais e horizontais, tomando a função $g(x) = (x - x_o)^2 + y_0$.

Etapa 3: alteração na concavidade (para cima ou para baixo): basta acrescentar o sinal negativo fazendo $g(x) = -(x - x_0)^2$ para a etapa 1. Para a etapa 2, tomamos $g(x) = -(x)^2 + y_0$. De modo geral, veja que necessitamos fazer $g(x) = -(x - x_0)^2 + y_0$, para atingir um ponto em qualquer localização, conforme o exemplo da Figura 1.

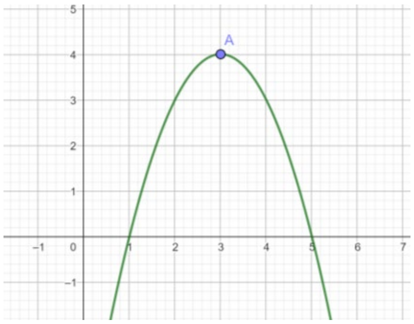


Figura 1: Gráfico da função quadrática passando pelo ponto $P = (3{,}4)$, em $g(x) = -(x-3)^2 + 4$

Etapa 4: mudança na abertura da concavidade para tornar a parábola mais côncava ou mais convexa. Para ampliar ou diminuir a abertura da parábola, diminuímos ou aumentamos o valor (absoluto) do coeficiente a em $f(x) = ax^2$. Isto é, modificamos o valor do módulo do coeficiente a.

Tomemos um ponto $P = (x_0, y_0)$ e suponha que $f(x_0) = (x_0)^2 = k$, e que $k \neq y_0$. Nossa intenção é que tenhamos $f(x_0) = y_0$. Para isso basta tomarmos $a = \frac{y_0}{k}$,

a função $g(x)$ fica definida por: $g(x) = \frac{y_0}{k}x^2 = \frac{y_0}{f(x_0)}x^2$.

Desse modo o gráfico da função $f(x) = ax^2$passa por P.

Nos casos em que temos dois pontos quaisquer $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, teremos de forma geral a função definida por:

$g(x) = \frac{|y_1 - y_0|}{f(x_1 - x_0)}(x - x_0\,)^2 + y_0$ com o vértice da função sobre o ponto A.

Para exemplificar, tomemos os pontos A e B cujas coordenadas são $A = (3{,}4)$ e $B = (7{,}2)$, faremos passar por eles uma representação gráfica da função quadrática (parábola). Tomando como base a função definida por $f(x) = x^2$, faremos inicialmente um deslocamento horizontal, de modo que o vértice da parábola passe pelo ponto $A = (3{,}4)$.

A partir da $f(x) = x^2$ fazemos alterações tomando a lei de formação $g(x) = (x-3)^2$, deslocando horizontalmente 3 unidades no sentido positivo do eixo x.

Precisamos, agora, deslocar verticalmente a parábola de quatro unidades no sentido positivo do eixo y. Para realizar esse deslocamento tomaremos a função definida algebricamente por: $g(x) = (x-3)^2 + 4$, conforme mostra a Figura 2, o vértice da parábola já coincide com o ponto *A*=(3,4).

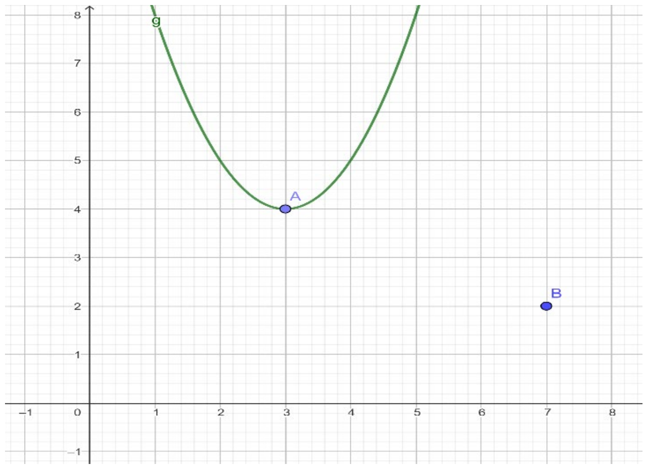


Figura 2: Gráfico da função quadrática passando pelo ponto $A = (3,4)$, em $g(x) = (x-3)^2 + 4$

Para atingir o ponto B precisamos, inicialmente, alterar a concavidade da função e para isso acrescentaremos o sinal negativo na lei de correspondência $g(x) = (x-3)^2 + 4$ fazendo o coeficiente a ficar negativo. Então teremos $g(x) = -(x-3)^2 + 4$.

Por fim faremos alterações no valor do módulo do coeficiente a, seguindo a regra de definição da lei de correspondência: $g(x) = -\frac{|y_1 - y_0|}{f(x_1 - x_0)}(x - x_0)^2 + y_0$.

Nesse caso teremos a função quadrática: $g(x) = -\frac{|2-4|}{f(7-3)}(x-3)^2 + 4$,

Então: $g(x) = -\frac{|2|}{f(4)}(x-3)^2 + 4$

Ficando $g(x) = -\frac{2}{16}(x-3)^2 + 4$ e, portanto, $g(x) = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 4$.

Veja o resultado na figura 3

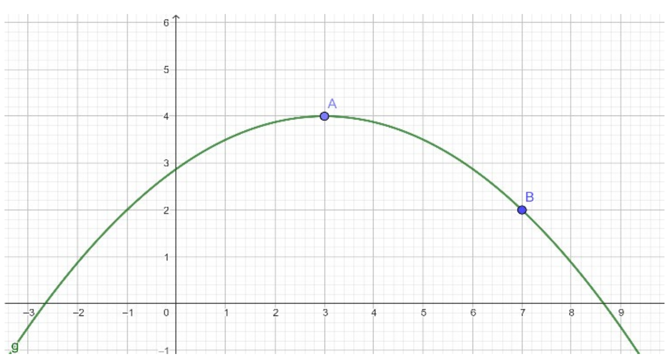


Figura 3: Gráfico da função quadrática passando por $A = (3,4)$e $B = (7,2)$ em $g(x) = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 4$

Após a realização dos quatro passos, quando as parábolas estão ajustadas ao desenho, passando pelos pontos definidos, trabalhamos com os intervalos da função quadrática, para darmos destaque somente ao intervalo da função que contorna a obra de arte. Os demais procedimentos consistem em: modificar a espessura e a cor da parábola; modificar a espessura e a cor dos intervalos, escolhemos as cores de acordo com aquelas próximas as originais dos desenhos, ou das obras de Arte, conforme pode ser visto nas Figuras 4, 5, 6 e 7.

Figura 4: obra original Antropofagia (1929), de Tarsila do Amaral

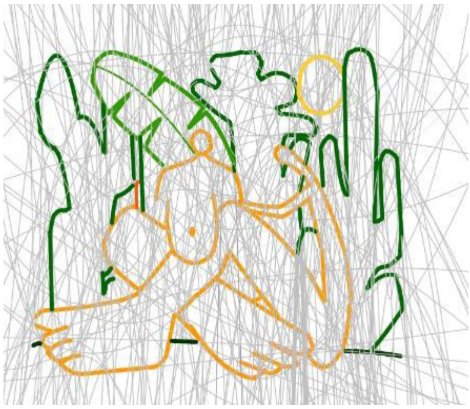


Figura 5: reprodução da obra original mostrando as 189 parábolas e os intervalos.

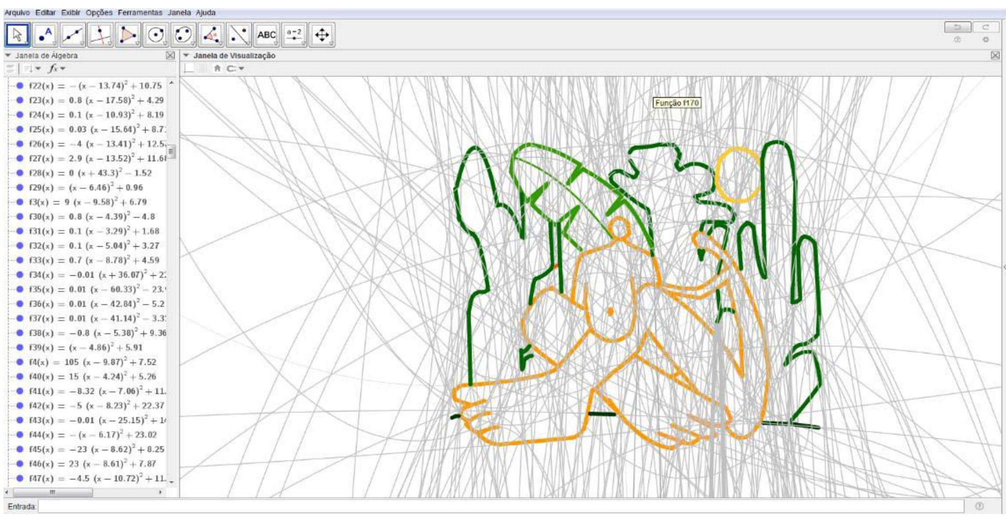


Figura 6: reprodução mostrando as expressões algébricas na janela do Geogebra

Figura 7: resultado final da reprodução da obra original

Conclusão

Acreditamos que atividades que contemplem criatividade, participação, autonomia e interação, pode ajudar os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, bem como desenvolver habilidades na utilização de ferramentas digitais como o software GeoGebra. Ao estabelecer relações interdisciplinares entre Arte e Matemática, cremos na potencialidade, para o processo de ensino e aprendizagem.

Ademais, não apenas analisamos a importância de um ensino interdisciplinar, mas, igualmente, enxergamos as prerrogativas de uma abordagem intradisciplinar proporcionada pelo GeoGebra, à medida em que lida com as representações aritmética, algébrica e geométrica. Observamos que a união dessas três ramificações da Matemática facilita o entendimento do conteúdo aplicado, poiscontextualiza as situações de aprendizagem dos alunos, fazendo-os "identificar harmonia, coerência e beleza nos padrões matemáticos" (Faria & Maltempi, 2019, p. 353).

Essa atividade procurou estimular professores e alunos no uso de diferentes metodologias e na utilização dos laboratórios de Matemática e informática como espaços de aprendizagem, nesse sentido, Mendonça e Ferreira (2013) fala da importância de um laboratório de Matemática na escola como um espaço para a construção do conhecimento de forma dinâmica, interativa, prazerosa e eficaz, e que favoreça uma maior interação entre professor e aluno. No entanto, para as escolas que não tem laboratório de Matemática, mas que tem a possibilidade de trabalhar com computadores, o GeoGebra pode se configurar como um laboratório virtual.

É importante considerar os aspectos cognitivos e afetivos no desenvolvimento de metodologias para um ensino, dos conteúdos de matemática, mais estimulante. Segundo Alro e Skovsmose (2010, p. 106) "aspectos emocionais constituem parte essencial do processo de aprendizagem [...]".

Ao contemplar a Arte no ensino da Matemática podemos contribuir com o desenvolvimento dos alunos nas suas habilidades visuais e matemáticas, segundo Flores (2016), "na busca por uma educação mais significativa e contextualizada, toma-se a arte/imagem como um objeto capaz de proporcionar um ensino de conceitos matemáticos [...]" (Flores, 2016, p.504). Nesse aspecto, destacamos o uso do software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que esse recurso nos permite uma visualidade das ações e, portanto, um exercício analítico dos aspectos matemáticos estudados. Por meio dessa metodologia, utilizando novas tecnologias, concluímos que o "uso do GeoGebra permite experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, explorar, argumentar e deduzir propriedades matemáticas" (Faria & Maltempi, 2019, p. 35).

Consideramos que trabalhos dessa natureza podem contribuir, de alguma forma, com a prática docente e a área da Educação Matemática. Esperamos que esse trabalho possa ser útil aos professores que ensinam matemática, seja pela utilização dessa atividade em sala de aula, seja por inspirar, nos professores, ideias com trabalho interdisciplinar.

Referências e bibliografia

Alro, H., Skovsmose, O. (2010). Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. de C, Silva, R. S. R., & Gadanidis, G.(2018). Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.

Belo Horizonte: Autêntica.

Caldeira, A. D, Meyer, J. F. da C de A., & Malheiros, A. P. dos S.(2011) Modelagem em Educação Matemática.

Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrósio, U. (2018). Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 5ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica. Faria, R. W. S. C., & Maltempi, M. V. (2019, April). Intradisciplinaridade matemática com GeoGebra na

Matemática Escolar. Bolema, Rio Claro v. 33, n. 63 p.348-367. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a17

Farias, J. V., Martins, G. J. D., & Santos, A. S. B. dos (2021). Matemática, arte e geogebra: fazendo arte com a função quadrática e com tecnologias digitais. Holos. 37(4), 1-19.

Feitoza W. G., Medeiros E. J. R., Medeiros S. R. R., Medeiros JR R. N., Lourenço E. G. (2020). GeoGebra: Recurso Visual e Cinestésico no Ensino de Funções. Holos.36(5), 1-23.

Flores, C. R. (2016, August). Descaminhos: potencialidades da Arte com a Educação Matemática. Bolema, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 502-514.

Grando, M R. (1995). O Jogo e suas possibilidades metodológicas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Capina.

Mendes, I. A. (2001). O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA.

Mendonça, S. R. P de, & Ferreira, J. P. (2013). Clementino. O laboratório de Matemática nas turmas de PROEJA: confecção e utilização de jogos. In: Mendoça, S. R. P de, Nóbrega, C. M. P. de S, & Rocha, R. de C. O PROEJA no IFRN: Refletindo sobre o fazer pedagógico. Santa Cruz: editora do IFRN, p. 91 – 105.

Moreira, P C; et al. (2012) Quem quer ser professor de matemática? Zeteyiké, Campinas, v. 20, n. 37, jan./jun. p. 11-34.

Nunes, K. R. A. (2016). Estela e o projeto fazendo arte com a Matemática. Boletim Gepem, p. 81-91.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado. v.9, 2, p. 1-30, 2005. http://www.ugr.es/~recfpro/?p=235

Vilela, D. S., Dorta, D. (2010) O que é "desenvolver o raciocínio lógico"? Considerações a partir do livro Alice no país das maravilhas. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v. 91, n, 229, p. 634 - 651, set./dez.

Filho, D. Z. (2013). Matemática e Arte. Belo Horizonte: Autêntica.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEMAT) no cenário do Ensino Remoto: percepções de futuros professores de matemática

Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Celine Vitória Cursino **Porto**
Universidade de Brasília
Brasil
190125390@aluno.UnB.br
Isabela Cristina de Paula **Walter**
Universidade de Brasília
Brasil
isaawalterr@gmail.com
Magno Ramos **Azevedo**
Universidade de Brasília
Brasil
magnozevedofilho@hotmail.com
Marcus Paulo Gonçalves Parente dos **Santos**
Universidade de Brasília
Brasil
marcus.gparent@gmail.com
Mikael Cristopher Souza De **Barros**
Universidade de Brasília
Brasil
mikaelcristopher1@gmail.com

Resumo

Com objetivo de compreender as percepções de futuros professores (FP) sobre o Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de Brasília, (LEMAT) vivenciado por eles no cenário de Ensino Remoto Emergencial (ERE), foi realizado um estudo de natureza qualitativa com 11 FP. Os dados foram construídos por meio de um questionário on-line a partir do *Google forms*, composto por perguntas fechadas e abertas. Posteriormente, eles foram tratados em aproximação aos pressupostos da análise de conteúdo Bardin (2016) e segundo as orientações de Chizzotti (1991), o que permitiu reunir suas percepções quanto às ações do LEMAT frente a realidade do ERE. Os resultados apontam que os FP vivenciaram condições favoráveis para realização de atividades pedagógicas para o ensino de matemática, assim como para sua própria formação, e que mediante o trabalho em equipe e a colaboração de cada membro as adversidades foram superadas.

Palavras-Chaves: Laboratório de Ensino de Matemática; Ensino Remoto Emergencial; Ensino de Matemática.

Introdução

Diante do contexto do Ensino Remoto Emergencial - ERE, decorrente da pandemia causada pelo vírus COVID19 em todo o mundo, os membros do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de Brasília - LEMAT, foram desafiados a atuar junto aos professores da educação básica com relação a solicitações que receberam de escolas do Distrito Federal (DF) – Brasil, em relação a formação de seus professores sobre o uso de tecnologias para o Ensino de Matemática. Sendo o LEMAT um espaço de formação para professores de Matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática da UnB, nesse espaço se aprende a importância de instigar o aluno a pensar e obter as respostas por meio da criatividade, mostrando que vários pensamentos podem levar ao mesmo caminho e que por intermédio de materiais concretos ou virtuais podemos aproximar a Matemática do aluno.Neste trabalho, descrevemos as diferentes ações que possibilitaram seu desenvolvimento tendo como objetivo compreender as percepções de futuros professores sobre o LEMAT vivenciado por eles no cenário do ERE. Em termos de organização textual, optamos por fazer uma discussão teórica sobre o ERE, o papel do LEMAT e suas singularidades didático-pedagógicas. Em seguida, apresentamos o desenvolvimento das atividades e o estudo em si por meio da descrição dos participantes, instrumentos e modos de organização dos dados. Por fim, discutimos as percepções dos futuros professores a respeito das ações LEMAT no ERE.

Discussão teórica

Num cenário ideal, as tecnologias seriam testadas e mapeadas, conteúdos adaptados para outros formatos, professores receberiam treinamento, alunos e famílias teriam tempo para se adaptar à nova rotina. O que não aconteceu na pandemia. Segundo Góis (2020, p. 107), "…é fato que escolas tiveram que interromper abruptamente as aulas presenciais e migraram, sem que tivessem tempo para se prepararem, para um modelo de aulas emergenciais remotas, mediadas pelas tecnologias disponíveis em cada contexto".

No caso do LEMAT, também foi desafiador. Foi preciso se preparar para atuar no contexto do ERE. Pensar o ensino de Matemática de uma perspectiva em que fosse possível oportunizar ao aluno "o seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor" (Moran, 2018, p. 3).

Os FP desejam no LEMAT a ação docente, o desenvolvimento do aluno, o pensar, o planejar e o fazer acontecer. Logo, trazem para sala de aula a forma colaborativa, a discussão, a comunicação e a troca do discente com o docente, tornando a comunicação mais horizontal e trazendo o conteúdo de forma investigativa. Diante do desafio de propor atividades para o ensino de matemática no ERE não poderíamos perder esse foco. Para Bertoni e Gaspar (2006, p. 137), "além de propiciar o conhecimento, a criação e o uso de materiais de apoio ao ensino e aprendizagem, o LEMAT era entendido como uma prática do FP, refletida e articulada à teoría". Diante disso, em decorrência da pandemia, os FP estenderam o laboratório ao modo remoto.

Processo de desenvolvimento das atividades

As atividades foram realizadas via plataformas virtuais, em sua maioria na plataforma *Zoom*. O público alvo foram os professores da escola básica e alunos da licenciatura em matemática. A organização, divulgação e realização das atividades foi de responsabilidade da professora coordenadora e demais membros do LEMAT. As atividades iniciaram-se no semestre 1/2020, quando os integrantes do LEMAT passaram por um período de preparação e/ou reformulação de materiais para o ERE. Em seguida, divididos em duas equipes criaram vídeos sobre materiais como o tangram e pentaminós. Também foram realizadas oficinas, minicursos, seminários e lives.

Nesse processo, percebeu-se a dificuldade de adaptação das aulas para o modo remoto, logo pensou-se em reunir algumas das plataformas on-line que tinham conhecimento para exemplificar atividades que pudessem ser elaboradas, de forma a deixar a aula mais atrativa aos alunos. No total foram produzidas 18 atividades disponíveis na playlist: https://youtube.com/playlist?list=PLTS39Y8Mok_Vah7OpUF0SKTTut6vLNMAd, e que atualmente tem entre 99 e 1.121 visualizações (constatadas em 25.10.2022). Dessa forma, o LEMAT continua proporcionando formação a partir do que produziu no cenário do ERE.

Desenvolvimento do estudo

O estudo pautou-se em pressupostos da abordagem qualitativa, escutando 11 FP, sendo seis do sexo feminino e cinco do sexo masculino, com idades entre 20 e 24 anos, no intuito de compreender suas percepções sobre o LEMAT vivenciado por eles no cenário do ERE.

Para coleta de dados optamos por um questionário on-line a partir do *google forms* composto de perguntas fechadas e abertas. Para analisar os dados, advindos das respostas às perguntas do questionários, optamos por fazê-lo da seguinte maneira: as respostas às questões fechadas, correspondendo à parte quantitativa, foram sistematizadas e analisadas segundo as orientações de Chizzotti (1991), a partir das quais faremos as possíveis inferências e, as respostas às questões abertas, relacionadas às justificativas e explicações, bem como as opiniões, foram categorizadas e organizadas para análise segundo as orientações de Bardin (2016). Neste artigo, trabalhamos com parte dessas respostas, extraindo delas elementos de significado, o que possibilitou organizá-las em: avaliação das atividades, as aprendizagens dos futuros professores e pontos positivos e negativos identificados na organização e realização das atividades.

Apresentação e análise dos dados

Percepções dos futuros professores quanto a avaliação das atividades

Em relação à questão apresentada na figura 1, foi questionado como eles classificavam em uma escala linear onde um (1) significava muito bom e quatro (4) ruim. As respostas mostram que a maioria optou pelos marcadores muito bom e bom. Indicando que as atividades, na avaliação dos FP proporcionaram temáticas pertinentes, mediação das discussões, participação dos estudantes e professores, interação com/entre os participantes e duração das atividades.

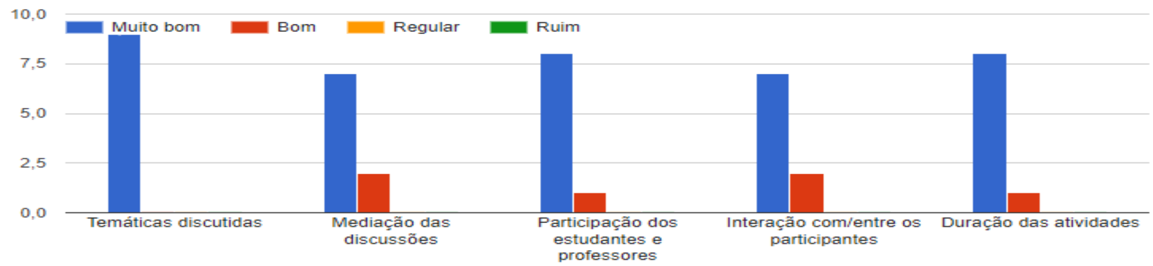


Figura 1. Gráfico de resposta da questão: Como você avalia as atividades que você organizou e/ou participou durante o ensino remoto em relação a:

Em relação à questão apresentada na figura 2, as respostas mostram que a maioria optou pelos marcadores quatro (4) e cinco (5). Indicando que as atividades desenvolvidas, na avaliação dos FP possibilitaram fomentar o compartilhamento de experiências sobre o ensino de matemática na educação básica, novos aprendizados, perspectiva de inclusão no ensino de matemática no ensino básico e aplicação dos conhecimentos adquiridos. Nota-se, assim, que os FP entenderam o momento de adversidade como oportunidade formativa singular, visto seu potencial para a criação de novos conhecimentos didáticos, especialmente, os relativos aos objetos digitais, como já assinalava Gois (2020).

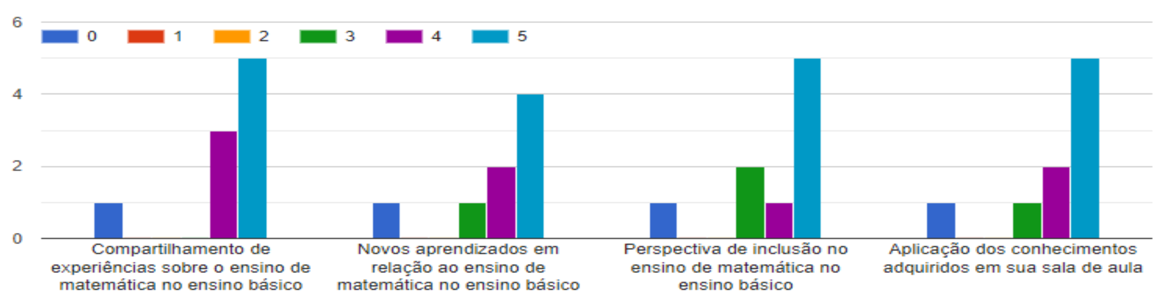


Figura 2. Gráfico de resposta da questão: Numa escala de 0 a 5 (sendo 0 a menor e 5 a maior), como você avalia as atividades desenvolvidas pelo LEMAT durante o ERE em relação a possibilidade de fomentar...?

As reflexões sobre as aprendizagens necessárias aos licenciandos e/ou professores de matemática

Com objetivo de compreender os aprendizados dos futuros professores na elaboração, organização e realização de atividades, foram feitas duas questões de complete a frase: 1) As atividades das quais participei durante o ensino remoto propiciaram reflexões sobre as aprendizagens necessárias aos licenciandos e/ou professores de matemática por quê...

Respostas obtidas:

> *Me ajudaram a potencializar o ensino da matemática em atividades on-line* (FP, 2); Me proporcionou novas formas de enxergar o ensino, de modo a priorizar o engajamento dos alunos com o conteúdo" (FP, 3); "Abordaram conteúdos importantes para a formação do profissional" (FP, 4); "Me permitem ter uma outra visão de metodologias e aplicações lúdicas que posso aplicar e aprender mais com isso" (FP, 6); "Trouxeram temas atuais e diversos sobre o ensino da matemática, propuseram novas ferramentas que podem auxiliar os professores no ensino e fomentar a aprendizagem dos alunos" (FP, 8); "Mostraram que é possível ter um ensino de qualidade no modo remoto, porém ele precisa ser bem planejado, levando em consideração todas as suas especificidades. …tem que ter as adaptações necessárias" (FP 11).

As respostas nos mostram que nas percepções dos FP, o LEMAT no cenário do ERE, proporcionou a eles: formação em relação a novas metodologias de ensino e aprendizagem, compreensão sobre a importância da atualização profissional, estar ciente de que o(a) professor(a) não pode ter resistência às inovações e adaptações, valorização do papel central do planejamento para a prática docente. De modo geral, entende-se que o grupo avançou no entendimento de que é possível construir oportunidade de ensino de qualidade em um cenário diferente e desafiador, seja ele pandêmico ou não. Tais entendimentos corroboram as afirmações de Góis (2020) quando afirma que diante da pandemia, a comunidade escolar teve que experimentar novas maneiras de interagir com seus alunos, nos cenários mais desafiadores.
2) Ao participar (como colaborador(a) ou organizador(a) de ações promovidas no período do ensino remoto emergencial aprendi...

Resposta obtidas:

> trabalhar em equipe de forma remota" (FP, 1); "Novas técnicas, atividades e ferramentas para serem trabalhados e facilitarem a aprendizagem" (FP, 4 e 6); Sobre diferentes maneiras de atuar no ensino remoto, através de oficinas e a utilização de plataformas online" (FP, 8); " Promover interações e adaptações" (FP, 9); "Que o tempo no ensino remoto é muito diferente do que no ensino presencial, pois podem ocorrer vários imprevistos, fazendo com que tenhamos que adaptar rapidamente o que foi planejado" (FP, 11).

As respostas nos mostram que os FP aprenderam: a trabalhar em equipe de forma remota, preparar recursos que auxiliam na aprendizagem dos alunos, identificar novas ferramentas para serem trabalhadas em sala de aula, interagir com alunos e público, novas ferramentas e diferentes maneiras para atuar no ERE e planejar na perspectiva de uma aprendizagem significativa. Aqui verificamos o que Bertoni e Gaspar (2006) orientam, quando afirmam que o LEMAT era entendido como uma prática do futuro professor, refletida e articulada à teoria. Ademais, avaliamos que as respostas acima auxila-nos, a repensar o futuro do LEMAT e de suas ações bem como construí-las de modo a não fomentar dicotomias (presencial e remoto).

Pontos positivos e negativos identificados na organização e realização das atividades

Com objetivo de identificar as potencialidades e dificuldades no desenvolvimento das atividades no ERE: quais os pontos positivos e negativos percebidos durante o ERE?

Respostas obtidas em relação aos pontos positivos:

> Atingir um número maior de telespectadores, organização e trabalho em equipe" (FP, 1); "A possibilidade de que ainda em um isolamento, o laboratório mostrou não estar fechado"(FP, 2); "Por

> ser gravado dar pra voltar e assistir mais uma vez" (FP, 6); "Possibilidade de ter maior alcance e conhecimento de recursos tecnológicos que auxiliam na aprendizagem" (FP, 9); "Muitas possibilidades de atividades interativas por meio de sites como Padlet, Wordwall, Kahoot, etc…"(FP, 11).

Respostas obtidas em relação aos pontos negativos (dificuldades):

> Os horários de algumas lives" (FP, 2); " ser online é ruim" (FP, 4); " não poder acompanhar a atividade de uma forma mais prática fazendo ela msm" (FP, 6); "Instabilidade das conexões" (FP, 9); "Aumento do tempo no planejamento das atividades e pouca interação dos alunos " (FP, 11).

Nos pontos positivos verificamos que os FP indicaram aspectos em relação ao ERE, como: a possibilidade de mesmo no isolamento o LEMAT propor formação, engajamento na organização e realização das propostas e um maior alcance de pessoas e de conhecimento em relação aos recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática. Assim, constatamos a importância de repensar o ensino de Matemática de uma perspectiva em que seja oportunizado ao aluno o seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, conforme orientação de Moran (2018). Já nos pontos negativos tivemos destaque para questões relacionadas ao aumento do tempo para planejamento e desenvolvimento das atividades, instabilidade das conexões e interação do público durante as atividades, aspectos que devem ser revistos e aprimorados para novas práticas.

Considerações finais

Na percepção dos futuros professores, o ERE trouxe diversos desafios para o LEMAT.

Devido à prática de realizarem as atividades do LEMAT de forma presencial, enfrentaram uma série de desafios durante a adaptação e o desenvolvimento das atividades de forma remota. Porém, por meio do trabalho em equipe e da colaboração de cada membro, as adversidades foram superadas e possibilitaram o desenvolvimento acadêmico não só dos futuros professores, mas também dos docentes que atuam no ensino básico que participaram das atividades. Assim, as percepções dos FP, construídas ao longo das atividades pedagógicas, na realidade do ERE, revelam que o LEMAT proporcionou aprendizagem matemática e formação para a prática docente. As ferramentas digitais disponíveis para o ERE evidenciou a necessidade de aprimoramento do grupo em relação ao seu uso no ensino de matemática, ampliando aspectos lúdicos e visuais.

Referências

Bardin, L. (2016). Análise de *Conteúdo*. Edições 70.

Bertoni, N. E.; Gaspar, M. T. de J. (2006) Laboratório de ensino de Matemática da Universidade de Brasília: uma trajetória de pesquisa em educação matemática, apoio à formação do professor e interação com a comunidade. In: Lorenzato, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (Org.) Autores Associados.

Chizzotti, A. (1991). *Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais*. Cortez.

Gois, A. (2020). Incertezas, possibilidades e o que haverá de sólido na educação depois da pandemia. In: Castro, J. R. (Org.). *O Mundo Pós-Pandemia:* reflexões sobre uma nova vida (pp. 107-112). Nova Fronteira, Moran, J. (2018). Metodologias ativas para aprendizagem mais profunda. In: Bacich, L.; Moran, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora* (pp. 1-16). Penso.

Opiniones de los profesores sobre un Recurso Educativo Digital (RED) para enseñar funciones en la escuela secundaria

María Paz **Gazzola**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar
María Rita **Otero**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar
Viviana Carolina **Llanos**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es relevar la opinión de un grupo de profesores de matemática en servicio y su interés en utilizar el Recurso Educativo Digital (RED) *Função Resgate*. Se trata de un juego para enseñar funciones matemáticas en la escuela secundaria, que puede utilizarse en dispositivos móviles con o sin internet. Primero, se diseñó un cuestionario para indagar sobre cuáles funciones enseñan estos profesores y cómo lo hacen. Luego, ellos jugaron todos los niveles del juego y a continuación se utilizó un segundo cuestionario para relevar su opinión sobre el RED y si lo usarían para enseñar y cómo lo harían. Se presentan de manera general los resultados de los dos cuestionarios entre los que se destaca la valoración positiva del RED como motivador y a la vez cierta reticencia de estos profesores para usarlo en sus clases como un recurso para enseñar.

Palabras clave: Educación Matemática; Recurso Educativo Digital; Profesores de matemática en servicio; Funciones matemáticas.

Introducción

El uso de los recursos didácticos es fundamental en el trabajo de profesor. Tradicionalmente se utilizan en clase libros, manuales escolares, pizarra, calculadoras, etc. El concepto de *recurso* adoptado en este trabajo es el propuesto Adler (2000), quien lo define como todo aquello que da sentido, apoya y proyecta el trabajo del profesor, sin circuncribirse a los objetos materiales y considerando también a los recursos simbólicos como nociones matemáticas, intercambios con colegas o las producciones de los estudiantes. En la actualidad los recursos educativos han ido evolucionando conforme a los avances de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): videos, libros digitales, realidad aumentada, pizarra digital, software, simulaciones, etc. Todos ellos reciben el nombre de Recursos Educativos Digitales (RED). Los RED son, entonces, cualquier material digital con fines educativos que necesitan de un soporte tecnológico para su reproducción.

Las nuevas generaciones están muy familiarizadas con tecnologías como computadoras, celulares, Tablet y videojuegos en línea (McGonigal, 2011). Algunos investigadores (Prensky, 2002) han adoptado el concepto de "nativos digitales" para referirse a la generación que crece inmersa en ambientes poblados de estos dispositivos que se vuelven habituales para ellos. Por otro lado, la integración y naturalización de las TIC en la sociedad actual, acelerada debido a la situación pandémica iniciada en 2020, ha conducido a la sustitución del término "nuevas tecnologías" por el de tecnologías digitales. Este incremento de la digitalización en todos los ámbitos de la vida cotidiana dio lugar al concepto de "sociedad digital" (Mossberger et al., 2007) como un producto del uso efectivo y regular del medio online para participar activamente de una ciudadanía digital. En este sentido, los desarrollos pioneros de la Teoría Antropológica de lo didáctico (Chevallard, 2013) que proponen la emergencia de un nuevo paradigma de enseñanza acorde con las características de la ciudadanía del siglo XXI, resultan de interés para analizar y promover nuevas formas de comunicar el conocimiento. En particular, durante la pandemia de Covid-19 el Ministerio de Educação do Brasil apoyó y financió el desarrollo de un nutrido conjunto de RED para sustentar inicialmente la enseñanza en el período de aislamiento. Dichos RED fueron concebidos desde una perspectiva lúdica cuya adopción en contextos digitales o no a conducido a la noción de gamificación (Deterding, et al., 2011), es decir a la aplicación de la lógica y las características de los juegos a cualquier otro ámbito (educativo, económico, labora, etc.). En especial, Seixas, Gomes, et al. (2014) evaluaron la eficacia del uso de la gamificación como estrategia de enseñanza, y resaltaron tanto el efecto positivo en los estudiantes como la importancia del papel del profesor en los procesos de enseñanza que involucran este tipo de recursos.

Este trabajo es producto de un proyecto de colaboración entre investigadores del NIECyT-UNICEN[1] y el V-Lab-UFPE[2], estos últimos encargados del desarrollo de los RED. Entre todos los RED disponibles creados el equipo V-Lab-UFPE, seleccionamos *Função Resgate* (Gomes, et al., 2021), propuesto para la enseñanza de las funciones matemáticas en la escuela secundaria. El estudio exploratorio que desarrollamos en este trabajo apunta a un objetivo más amplio, que pretende analizar los procesos de apropiación de este tipo de recursos por los docentes de matemática, en concordancia con un nuevo paradigma de enseñanza (Chevallard,

---

[1] https://niecyt.exa.unicen.edu.ar
[2] https://v-lab-ufpe.medium.com/

2013; Otero et al, 2022). Presentamos aquí los resultados parciales de las primeras interacciones con el RED de 36 profesores de matemática en servicio, que lo evalúan pensando en su uso.

Aproximación instrumental

El enfoque instrumental de Rabardel (1995) estudia cómo un sujeto en una situación de trabajo transforma un *artefacto* material o simbólico en un *instrumento*, construido a partir de ese artefacto. Los procesos involucrados en esa transformación progresiva determinan la *Génesis Instrumental* (ibíd., 1995). Un instrumento se define como una unidad mixta relacionada con el sujeto y el artefacto, es decir, tiene una componente material - el artefacto o una parte de él- y una componente cognitiva: los esquemas de uso de dicho artefacto. En la génesis de un instrumento, intervienen dos procesos interrelacionados pero diferenciables. La *instrumentalización* se refiere a cómo el sujeto asimila y personaliza el uso del artefacto en una situación de formación o de trabajo determinada, a partir de los esquemas que ya posee. La *instrumentación,* en cambio, ocurre cuando el sujeto reestructura su acción a partir del artefacto para realizar la tarea en cuestión, modificando sus esquemas (Vergnaud, 2013). De esta manera este marco teórico resulta propicio para analizar las interacciones entre los profesores y RED en el marco de su actividad profesional.

RED 'Função Resgate'

'Função Resgate' es un RED en formato de juego destinado a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones matemáticas en el nivel medio. Específicamente, aborda el concepto de funciones a través de sus representaciones gráficas y algebraicas a partir de la interacción del usuario con los parámetros de las funciones. El objetivo del juego es “salvar” vidas marinas que quedan atrapadas en desechos de la acción humana como redes de pesca, latas, etc. (Figura 1).

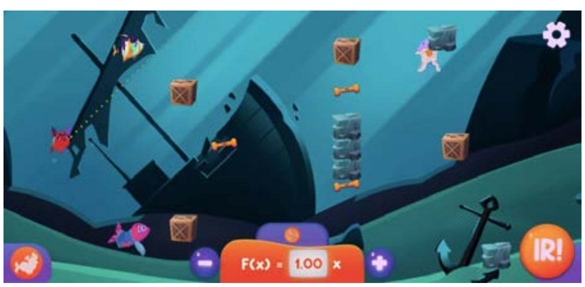


Figura 1. Escenario de juego. Nivel 1

Para “salvar” a estas especies en peligro se cuenta con un equipo de héroes llamados *peixorros*, cada uno de los cuales representa un tipo de función matemática determinada. El jugador elige una función a utilizar (Figura 2) e interactúa con los parámetros en la representación algebraica de dicha función y, en tiempo real, observa el comportamiento de la curva que indica la trayectoria que realizará el Peixorro. En esta acción, el jugador tiene la posibilidad de utilizar el plano cartesiano para ver las coordenadas $(x; y)$ en las que se encuentran las especies. Este RED posee una interfase de alumno y otra de profesor, en este último caso, se propone una guía didáctico-pedagógica (Gomes, et al., 2021) que propone otra variedad de recursos digitales de consulta alternativos. Este recurso, por el momento, se encuentra en idioma portugués y está alojado en la plataforma MEC-RED[3] siendo de libre descarga. Esta Plataforma permite a los docentes tener acceso a diversos recursos digitales y también colaborar, reportando sus experiencias de uso con los recursos disponibles.

Metodología

Se trata de un estudio exploratorio y cualitativo, donde participaron 36 profesores de matemática en servicio de diferentes provincias y regiones argentinas que evaluaron el RED *Função Resgate*, pensando en su uso en la enseñanza. El estudio se desarrolló en tres etapas:

(1) Los profesores respondieron un cuestionario on-line sobre variables atributivas y sobre las funciones que enseñan y con qué recursos lo hacen. (2) Los profesores jugaron el juego y respondieron un segundo cuestionario on-line sobre: el juego y sus características, las funciones involucradas, definición y tratamiento dentro del juego y si lo usarían para enseñar y cómo. Los cuestionarios (1) y (2) fueron diseñados y validados para esta investigación. Se componen de preguntas cerradas y preguntas tipo Likert (López-Roldán & Fachelli, 2015).

(3) A los efectos de una triangulación de los datos se realizaron entrevistas semi-estructuradas a cuatro profesores seleccionados al azar, que por razones de espacio, no se analizan en este trabajo.

Figura 2. Funciones involucradas en el juego y sus respectivos parámetros.

Resultados

A continuación, se presentan algunos resultados de los dos cuestionarios respondidos por los profesores. El objetivo del primer cuestionario era indagar sobre las funciones que enseñan los profesores, cómo y con qué recursos lo hacen. La figura 3 muestra que casi todos enseñan en general la noción de función y sus características (por medio de una definición conjuntista), para

[3] https://plataformaintegrada.mec.gov.br/usuario-publico/16408/

luego tratar ciertos tipos de funciones en particular. La más enseñada es la función afín y en segundo lugar la función polinómica de segundo grado. Con frecuencias similares aparecen la función exponencial y la logarítmica. Un número reducido de profesores enseñan funciones armónicas seno y coseno, y muy pocos tratan la función módulo.

Figura 3. Frecuencias de las funciones que enseñan los profesores.

La figura 4 sintetiza los recursos más y menos utilizados por los profesores para enseñar funciones. El más utilizado es el denominado *problema de contexto*. En segundo lugar destacamos el uso de *trabajos teórico-prácticos creados por el profesor* y de nociones que en este contexto asimilamos a recursos, en la medida en que son herramientas para analizar y describir una función, tales como *representación de tablas y gráficos realizados a mano*, *variables*, *escritura de la fórmula a partir de la gráfica*, *obtención de puntos notables*, *crecimiento / decrecimiento*, *conjunto de positividad* C^+ */ conjunto de negatividad* C^-.

Con relación a los recursos muy poco utilizados se destacan los vinculados a la sociedad digital, tales como *libros de texto digitales*, *planillas de cálculo*, *videos de YouTube*, *Juegos digitales*. Por otro lado, las nociones curriculares *sistemas mixtos* e *inecuaciones*, que serían herramientas pertinentes para resolver, por ejemplo, los problemas de contexto que mayoritariamente se declara utilizar, no son tratados.

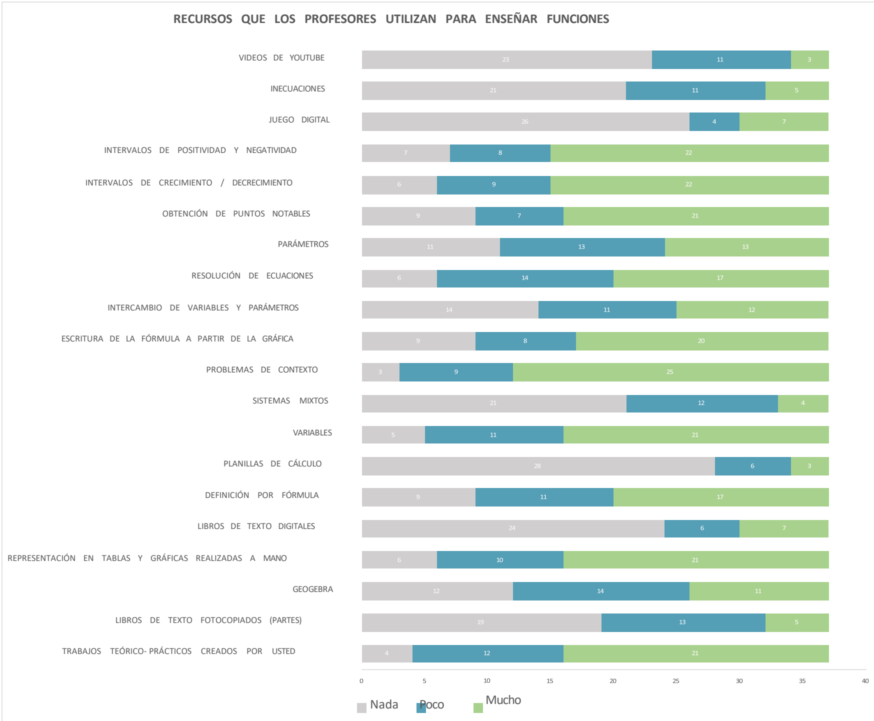


Figura 4. Frecuencias de los recursos que los profesores utilizan para enseñar funciones.

Con relación a las características didácticas de las clases sobre funciones, el 87% de las opciones elegidas corresponden a la enseñanza tradicional y se destaca que la mayoría comienza con un problema de contexto y luego utiliza un material de estudio. Las opciones vinculadas a el uso del GeoGebra y a la enseñanza por investigación son muy minoritarias, tal como se muestra en la figura 5.

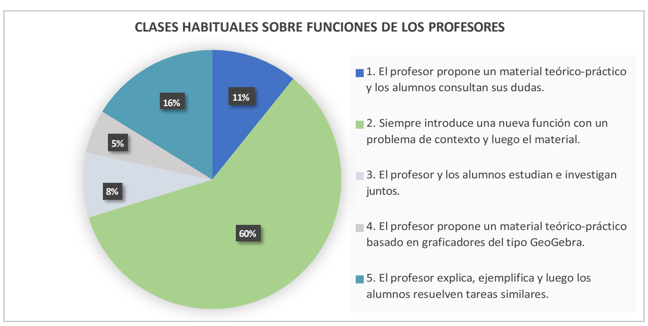


Figura 5. Clases de los profesores sobre funciones.

El objetivo del segundo cuestionario es relevar la opinión de los profesores acerca del juego y conocer si lo usarían como un recurso para enseñar funciones. En la tabla 1 se sintetizan los resultados relativos a la valoración del juego por parte de los profesores. Se observa que las valoraciones de la mayor parte de los ítems son intermedias.

Tabla 1.
Evaluación del juego en cuanto a su diseño y las funciones involucradas.

El Juego	
Tópico	**Respuestas**
Interés por las funciones	La mayoría de los profesores (0,58) considera que el interés que promueve el juego por las funciones es medio.
Interés si se juega más de una vez	Casi la mitad de los profesores (0,42) considera que jugar por segunda vez genera un interés medio.
Información para empezar a jugar	Los profesores en su mayoría (0,66) consideran que la información que ofrece el juego es suficiente para jugar.
Feed-back sobre las funciones	El feed-back en relación a las funciones es de nivel medio para más de la mitad de los profesores (0,53).
Dificultad para los estudiantes	Una amplia mayoría de los profesores (0,83) considera que el juego tiene dificultad media para los estudiantes.
Nuevos desafíos a ritmo adecuado	El ritmo en el cual se presentan los nuevos desafíos es adecuado para la mayoría de los profesores (0,56)
Aumento de los desafíos conforme al conocimiento	La mayoría de los profesores (0,53) considera que los desafíos aumentan conforme al conocimiento generado.
Función más difícil para jugar	Según los profesores, las funciones más difíciles para jugar y ganar el juego son las funciones armónicas (0,37) y la cuadrática (0,47).
Plano cartesiano	Más de la mitad de los profesores (0,53) considera que el plano cartesiano es útil para aprender.
Estética y diseño	Los profesores consideran que el diseño y la estética del juego son visualmente agradables (0,75).
Tratamiento de las funciones en el juego	
Definición	Para la mayoría de los profesores (0,61) las funciones que están bien definidas son la función afín y la cuadrática. Las funciones armónicas, la logarítmica, la exponencial y el módulo se consideran definidas en un nivel medio.
Representación algebraica (Fórmula, parámetros)	En lo tocante a los parámetros, los profesores (0,7) consideran que todas las funciones están bien definidas.
Importancia de los parámetros para ganar el juego	Las respuestas se repartieron en tercios: un grupo considera que no es importante conocer el papel de los parámetros para ganar el juego, otro le otorgó una valoración media y el tercero lo consideró importante.
Tratamiento de los puntos notables	La mayoría de los profesores consideró que el tratamiento de los puntos notables -en todas las funciones- no es suficientemente apropiado.
Cálculo algebraico	Los profesores consideran que el juego no promueve el cálculo algebraico, para ninguna función.

Con respecto a enseñar funciones utilizando el juego, la mayoría de los profesores enseñaría la función afín y la función cuadrática (Figura 6), en acuerdo con las que son efectivamente enseñadas por ellos, según se mostró antes en la Figura 3.

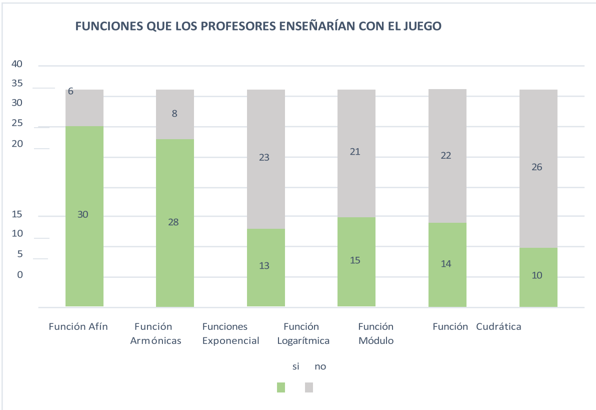


Figura 6. Tabla de frecuencias de las funciones que enseñarían los profesores.

En relación a la manera en que los profesores utilizarían el juego en sus clases (Figura 7), entre sus respuestas se destaca que el 50% de ellos realizaría una enseñanza claramente tradicional con el juego y desvinculada de los momentos de aprendizaje ya que lo usarían para repasar y practicar (opciones 2, 5 y 6). Un 39% de los profesores elige la opción de utilizarlo como parte de una enseñanza donde el profesor y el alumno investigan y estudian juntos.

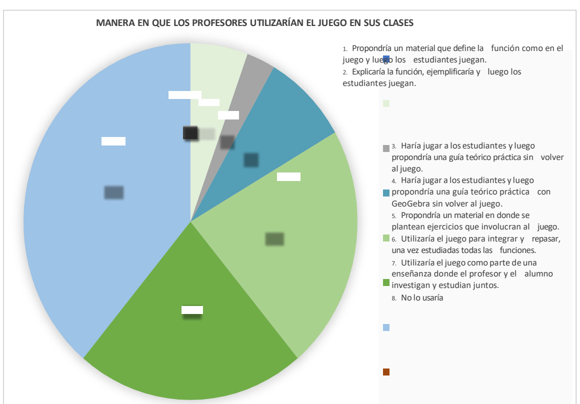


Figura 6. Gráfica circular de las funciones que enseñarían los profesores.

Consideraciones finales

Las respuestas a los cuestionarios permitieron relevar la opinión de estos profesores de matemática sobre el RED *Função Resgate*. Obtener información sobre como ellos enseñan funciones habitualmente resultó relevante para comprender el uso potencial que le podrían dar al RED. Es importante remarcar aquí que el idioma no fue un obstáculo, debido a que la principal actividad que realizaron los profesores fue jugar el juego y a que la representación matemática es compartida más allá de la lengua.

El cuestionario 1 agrega al hecho conocido de que mayoritariamente en la escuela secundaria se enseña función afín y cuadrática, y en mucho menor medida las demás, la prácticamente nula utilización de recursos digitales como parte de la enseñanza y el aprendizaje. Por ejemplo, a pesar de la difusión y gratuidad del software GeoGebra, los profesores no lo utilizan con los estudiantes en el aula. Por otro lado, si bien la mayoría inicia la enseñanza de una cierta función con un "problema de contexto", al parecer el juego no es percibido como tal.

Los resultados del segundo cuestionario evidencian una valoración neutra o media del juego y del tratamiento que hace de las funciones. Si bien el juego enfatiza el papel de los parámetros y requiere tomarlos en cuenta como estrategia ganadora, al menos en acto, los profesores no advierten esta posibilidad. Esto podría deberse a que un estudio apropiado de parámetros y de las familias de funciones no es parte de la enseñanza habitual. En ella, se suele analizar el coeficiente principal de la función cuadrática pero no los restantes parámetros de la forma polinómica. Además, se otorga excesiva importancia a descripciones ostensivas y específicas de las funciones a partir de una fórmula, con la cual se obtiene la gráfica, donde los parámetros son fijos y se pregunta por los puntos notables, la positividad/negatividad y el crecimiento/decrecimiento, restringidos al dominio. Estos aspectos no son el foco del juego. Sí podría criticarse al juego que sólo propone ciertas representaciones algebraicas de las funciones, por ejemplo, sólo la polinómica para los grados 1 y 2, y que faltan parámetros para las exponenciales, las logarítmicas y las armónicas. Sin embargo, los profesores mencionan que usarían el juego, pero mayoritariamente eligen las opciones relacionadas con una enseñanza tradicional y superficial de la noción de función. El hecho de que el juego sería usado por ellos a posteriori de la enseñanza revela que no conciben situaciones de enseñanza-aprendizaje con este RED. También, como confirman las entrevistas que no podemos presentar aquí, los profesores valoran el RED como recurso motivacional. Ellos consideran que el éxito de los "nativos digitales" con el juego, que se ocuparon de constatar con sus alumnos, con sus hijos, etc., se debe más al "ensayo y error" que a conocimiento matemático. Estas ideas se relacionan con una concepción que reduce la matemática a las definiciones y a las fórmulas y que ignora la forma operatoria del conocimiento. Por todo lo expuesto, la aproximación instrumental, inspirada en la noción de esquema de Vergnaud (2013), resulta un marco teórico apropiado para propiciar la génesis instrumental de los profesores a partir de los RED y de la gamificación como herramientas fundamentales de aprendizaje en la sociedad digital, cuyo uso resulta cada vez más inevitable e imprescindible.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3: 205-224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Alex Sandro Gomes, Ricardo Massa, Leandro Marques, Tiago Nogueira, Anny Margarett, Djalma Neto, Flávio Vinícius Viana, Wilson Pereira, Erik Zambom, Guilherme Melo, Henrique Mariz, Matheus Belfort, Tales Alves, Beatriz Luna, Laura Guedes, Olívia Queiroga, Amanda Gomes, Angélica Porto, Carlos José, Mariana Porto, Átila Malta, Leopoldo Teixeira. Plataforma Integrada do MEC: Governo do Brasil, 8 abr. 2021. Disponible en: https://plataformaintegrada.mec.gov.br/recurso/358857

McGonigal, J. *Reality Is Broken: Why Games Make Us Better and How They Can Change the World*. Penguin, London, 2011.

Mossberger, K., Tolbert, C. J., & McNeal, R. S. (2007). *Digital Citizenship: The Internet, Society, and Participation*. MIT Press.

López-Roldán, P.; Fachelli, S. (2015). La Encuesta. En P. López-Roldán y S. Fachelli, *Metodología de la Investigación Social Cuantitativa*. Bellaterra (Cerdanyola del Vallès): Dipòsit Digital de Documents, Universitat Autònoma de Barcelona. Capítulo II.3. 1ª ed., 1-33.

Prensky, M. (2002). The motivation of gameplay: The real twenty-first century learning revolution. *On the Horizon*, 10(1), 5-11.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

Seixas, L. R., Gomes, A. S., Melo Filho, I. J., Rodrigues, R. L. (2014). Gamificaçao como estratégia no engajamento de estudantes do ensino fundamental. En *Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE*, 25(1), 559-568.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje, 36*(2), 131-161. https://doi.org/10.1174/021037013806196283

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

PAT2Math, uma possiblidade de aplicação na aprendizagem da resolução de equações do 1º grau

Rosiméri Corrêa **França**
SEEDUC-RJ e SME-RJ
Brasil
rosicfranca@gmail.com
Edite Resende **Vieira**
Colégio Pedro II
Brasil
edite.resende@gmail.com

Resumo

O presente artigo apresenta algumas considerações sobre aplicações doPAT2Math, a partir dos estudos de Seffrin e Jaques, em uma turma do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro, com dificuldade na resolução de equações do 1º grau, sendo um recorte da pesquisa de Mestrado Profissional. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, cujo produto é um e-book com atividades envolvendo esse tipo equação. Para realizá-la foi elaborada uma sequência didática, segundo à concepção de Zabala. A aplicação das atividades e dedois questionáriosocorreram em um minicurso. Como resultados, observamos que após a utilização do PAT2Math, os alunos tiveram um novo olhar acerca o uso das tecnologias digitais como apoio para o estudo das equações do 1º grau, assim como minimizaram algumas dificuldades na resolução dessas equações.

Palavras-chave: PAT2Math;Equações do 1º Grau; Objetos Digitais de Aprendizagem; Campos Conceituais; Sequência Didática.

Introdução

Este artigo tem como objetivo reiterar o uso do aplicativo *PAT2math* na resolução de equações do 1º grau, conforme estudos de Seffrin (2015), Seffrin et al (2009) e Jacques et al (2013), auxiliando neste trabalho, especialmente os alunos que já iniciaram o estudo desse tópico algébrico.

Ao longo da nossa prática pedagógica, tem sido comum professores regentes de Matemática, Física e Química de um colégio de Ensino Médio da rede estadual do Rio de Janeiro, *lócu*s desta pesquisa, relatarem que apesar de seus alunos já terem aplicado a equação do 1º grau para solucionarem diversos problemas propostos, e mesmoconhecendo métodos de resolução, eles ainda não desenvolveram ou consolidaram a habilidade algébrica (EF07MA18) , descrita na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): "Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade (Brasil, 2018, p. 307).

Esse panorama vem se repetindo ao longo de vários anos letivos na referida unidade de ensino e tem sido motivo de constante reflexões sobre o que poderia ser feito para amenizar o problema.

A partir desse contexto, durante a pesquisa de Mestrado Profissional em Práticas em Educação Básica do Colégio Pedro II (MPPEB), buscou-se pesquisas acadêmicas nas quais o uso de recursos digitais pudessem ajudar os alunos em suas dificuldades de resolução de equações do 1º grau assim como despertar o pensamento reflexivo em relação às situações-problema propostas.

Para alcançarmos esse propósito, desenvolvemos um minicurso mediado pela professora pesquisadora para alunos do 3º ano do Ensino Médio, os quais participaram no contraturno escolar.

Nesse projeto, os estudantes tiveram oportunidade de conhecer, explorar e aplicar dois objetos digitais de aprendizagem (ODA), sendo o PAT2Math elencado para a presente comunicação.

Em seu estudo, Seffrin et al (2009) propuseram a 5 professores, os quais lecionavam álgebra elementar e com uma experiência de ensino do conteúdo de 10 a 20 anos, que avaliassem o objeto de aprendizagem. Os pesquisadores tinham como objetivo mostrar que o PAT2Math era um resolvedor de equações algébricas e seria um recurso para ajudar nas dificuldades dos alunos brasileiros em álgebra elementar, como por exemplo na resolução de equações do 1º grau, sendo a hipótese constada por todos os professores participantes.

Jaques et al (2013) mostrou que os estudantes melhoram a aprendizagem e a autoconfiança na realização das tarefas, após utilizarem o PAT2Math para auxiliar os alunos na resolução das equações do 1º, com uma abordagem baseada em níveis de abstração. Os estudantes do 7º ano foram submetidos à um pré-teste e à um pós-teste em papel, e interagiram com o sistema., apreciando as dicas de solução das equações oferecidas pelo sistema.

Essas pesquisas contribuíram para desenvolvermos nosso trabalho baseado na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 2010).

A teoria para o estudo das equações

Consideramos a Teoria dos Campos Conceituais como aporte teórico para a pesquisa em pauta. Foi elaborada, em 1977, por Gerard Vergnaud, a qual, também, foi definido como uma teoria cognitivista e neopiagetiana (Moreira, 2002).

Essa teoria, embora considerada simples por Vergnaud, requer várias etapas para que uma criança consolide o aprendizado, sendo, portanto, uma teoria de desenvolvimento a longo prazo (Vergnaud, 2010).

Vergnaud (2010), citado por França (2019, p. 38), entende que "o conhecimento está organizado em diferentes conjuntos de situações, isto é, tarefas, que são compostas por diversos conceitos. São essas situações que permitem os estudantes desenvolverem os invariantes operatórios; isto é, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, os quais constituem os esquemas para elaborarem e usarem os conceitos nas situações propostas".Na referida teoria, um conceito é formado por três conjuntos.

Esses 3 conjuntos (S, I, R) se inter-relacionam e podem ser caracterizados como: (S) que é composto por situações que dão sentido ao conceito. Diz-se que (S) é o referente do conceito; (I) se refere aos objetos, propriedades e relações; isto é, os invariantes operatórios. Esse conjunto de invariantes são necessários, para que os sujeitos possam analisar e dominar as situações e assim dar sentido ao conceito, sendo considerado o significado do conceito. Para isso, os sujeitos precisam reconhecer e analisar os invariantes. Esse conjunto está diretamente relacionado ao conjunto (R), o qual é formado pela linguagem natural, gráficos e diagramas e outras representações simbólicas dos invariantes; e consequentemente, representa as situações e os procedimentos para lidar com elas, sendo então o significante do conceito. (Vergnaud, 1993).

Sobre o campoconceitual da Álgebra, Vergnaud(2011) considera ese campo como ferramenta para solução de problemas, mas que não poderiam ser resolvidos sem a álgebra. A partir desse pensamento, podemos dar significado aos conceitos algébricos que não são familiares aos nossos alunos acostumados às operações aritméticas.

Assim, a introdução de novos objetos como as equações, podem causar problemas para os estudantes que precisam estar atentos às regras de operação. Muitos compreendem determinadas etapas para solucionar, criando seus algoritmos, mas logo percebem que esses algoritmos não se aplicam da mesma forma a toda as equações, ocasionando um novo problema.(Vergnaud, 2010).

Saber o que fazer com uma equação e equacionar o problema é desenvolver esquemas, entendendo que há algoritmos para tratar a equação, mas não há algoritmo para tratar o problema. (Vergnaud, 2010).

Para auxiliar os estudantes a desenvolver esquemas para resolver as equações do 1º grau, optamos pelo camino metodológico descrito a seguir.

Caminho Metodológico

O fato da professora pesquisadora lecionar há muitos anos no campo da pesquisa, a tornou muito próxima do problema do estudo e dos sujeitos, o que facilitou a escolha da abordagem qualitativa (Goddoy, 1995), com característica de pesquisa-ação, já que procuramos desenvolver uma ação para resolver um problema que era coletivo, em uma dinâmica cooperativa ou participativa por todos os envueltos, corroborando com Thiollent (1988).

A investigação foi desenvolvida em um colégio de Ensino Médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro com alunos do 3º ano do Ensino Médio

Coletamos os dados por meio de observações, dois questionários e atividades aplicadas em uma sequência de didática a partir da concepção de Zabala (1998).

Para Zabala, uma sequência didática é uma maneira de sistematizar as atividades que devem ser atenciosamente planejadas e voltadas para os objetivos que se deseja alcançar. Em cada unidade didática estão incutidas as três fases de intervenção reflexiva: planejamento, avaliação e reflexão.

Após a coleta das informações, consideramos o método da análise de conteúdo, segundo Bardin (1997), no qual técnicas são combinadas, destacando-se: a pré-análise, a exploração do material, o tratamento dos resultados e a interpretação.

A aplicação e análise ocorreu a partir de dois objetos de aprendizagem, sendo o PAT2Math descrito na próxima seção.

PAT2Math

O "PAT2Math" foi desenvolvido por estudantes em computação no Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), coordenado pela Profª Drª Patrícia Jaques e se encontra disponível *online* no site: http://pat2math.unisinos.br/index.html, inclusive para dispositivos móveis, podendo ser acessado gratuitamente após realização do cadastro, ou através da conta do facebook.

Esse ODA tem como foco inicial a resolução de equações do 1º grau, apresentando uma interface de fácil interatividade. As etapas de solução são realizadas passo-a-passo, trabalhando o erro que possa ser cometido e auxiliando na aprendizagem desse assunto.

Essas funcionalidades foram observadas a partir do estudo de Seffrin (2015), quepropôs um modelo de aluno algébrico para auxiliar os estudantes na resolução das equações, o qual simulava o passo a passo do aluno, incluindo suas falsas concepções, permitindo mapear as dificuldades e assim oferecer um recurso que atendesse às dificuldades individuais.

A pesquisa de Seffrin, Seffrin et al, assim como a de Jaques et al contribuíram para desenvolvermos nosso trabalho, incluindo uma sequência didática, dialogando com a teoria. Grande parte das situações propostas foram aplicadas em um minicurso e compuseram um e-book, dentre as quais compartilhamos uma delas.

Aplicação do PAT2Math

Por meio de uma sequência didática segundo a concepção de Zabala(1998), desenvolvemos aplicações do PAT2Math, exemplificado na figura 1.

Atividade 5: Resolução de equações	
Objetivo: Resolver as equações, considerando a leitura e a manipulação dos simbolos, com o apoio do PAT2Math.	a) PAT2Math $x + 12 = 27$ b) PAT2Math $-x + 14 = -29$

Figura. ○Atividade da fase inicial do PAT2Math

A atividade foi aplicada, durante o minicurso, após os sujeitos desse estudo já terem resolvidos questões com o outro ODA. Nessa etapa inicial do "PAT2Math", os estudantes exploraram a interface do aplicativo, manipularam equações, observando das etapas da solução.

Ao acompanharem a correção feita pelo aplicativo, os estudantes dialogaram com seus colegas sobre os possíveis métodos de solução, o porquê do erro e também elaboraram uma situação problema para equação da atividade.

Nesta etapa, os estudantes já estavam mais seguros quanto ao método de resolução. Como exemplo, temos a solução do aluno D, que optou pelo principio da igualdade. Mesmo com erros, o aluno realizou auto correção, após ajuda do aplicativo e reflexões com seus pares, mediados pela professora pesquisadora.

Ao término do minicurso, os alunos se mostraram favoráveis às tecnologias digitais como recurso pedagógico para resolver equações, inclusive os céticos como podemos observar no relato do aluno A: *No início do minicurso, eu tinha minha opinião que a tecnologia digital iria apenas atrapalhar o desenvolvimento do aluno porque é muito fácil se distrair com ela, ainda mais com internet. Pensava que se quisesse me focar, daí chegaria uma mensagem e ia me distrair. Mas vi que aprendemos melhor*.

Considerações Finais

Observamos que mesmo apresentando alguns pontos desfavoráveis, como ser direcionado à um só método de resolução, devido à sua programação,o "*PAT2Math*" despertou o interesse pela sua ludicidade sendo considerado um *game* divertido por parte dos estudantes.

O aplicativo também despertou segurança para solucionar equações do 1º grau, porém conscientes do objetivo maior que é resolver problemas.

Assim, nesse estudo analisamos que o PAT2Math como apoio à sequência desenvolvida contribuiu para resgatar a atenção dos alunos para as atividades, o interesse de resolver uma equação do 1º grau, e consequentemente, minimizar os erros recorrentes em relação às manipulações algébricas. Evidenciamos ainda, que ao interagirem com seus celulares no uso do "*PAT2Math*", eles pareciam ter contato direto com o objeto matemático em estudo, percebendo suas diferentes representações.

Desse modo, averiguamos, que as tecnologias digitais podem não resolver, mas minimizar as dificuldades na resolução das equações do 1º grau de alunos do 3º ano do Ensino Médio, como aconteceu com os alunos de um colégio estadual do Rio de Janeiro ao realizarmos a pesquisa em pauta.

Contudo, ressaltamos que esses recursos venham a ser utilizados com criticidade e conscientização e que estamos conscientes de que a tecnologia, seja ela qual for, não teria significado algum se não houver a proposta adequada e o protagonismo pedagógico e autônomo do professor.

Referências e bibliografia

Bardin, L.(1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Brasil.(2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica.

Goddoy, A. S (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. Revista de administração de empresas, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63. http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf

França, Rosiméri Corrêa. (2019*). Isolar o X, isolar o Y...... e agora? Recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau.* Rio de Janeiro. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Jaques, P. A. et al. (2013). Rule-based expert systems to support step-by-step guidance in algebraic problem solving: The case of the tutor PAT2Math. *Expert Systems with Applications*, [S.l], v. 40, n. 14, p. 5456-5465. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957417413002418

Moreira, M. A. (jan./mar. 2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. In*: Investigações em ensino de ciências*, Porto Alegre, v. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29, 2002. http://moreira.if.ufrgs.br/pesquisaemensino.pdf

Seffrin, H. et al.(2009). Um resolvedor de equações algébricas como ferramenta de apoio à sala de aula no ensino de equações algébricas. In: Workshop de Informática Na Escola – Wie, 15., 2009, Bento Gonçalves. *Anais,* Bento Gonçalves : Sociedade Brasileira De Computação (SBC). Ojs.sector3.com.br/index.php/wie/article/view/2164

Seffrin, H.(2015). *Avaliando o conhecimento algébrico do estudante através de redes bayesianas dinâmicas:* um estudo de caso com o sistema tutor inteligente PAT2Math2015. 130 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo (RS). http://www.repositorio.jesuita.org.br/bitstream/handle/UNISINOS/3793/Henrique%20Manfron%20Seffrin_.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Thiollent, M. (1988). *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez & Autores Associados.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In: Seminário Internacional de Educação Matemática Do Rio De Janeiro, 1., 1993, Rio de Janeiro. *Anais,* Rio de Janeiro: UFRJ PROJETO FUNDÃO, p. 1-26.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, Curitiba, n. 1, p. 15-27. https://www.redalyc.org/pdf/1550/155019936002.pdf

Zabala, A. (1998). *A Prática Educativa*: como ensinar. Tradução de Ernani F. da F. Rosa Porto Alegre: Artmed.

Perspectivas de exploração de propriedades da Geometria Plana em Construções no GeoGebra Discovery

Celina Aparecida Almeida Pereira **Abar**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
abarcaap@pucsp.br
Daniel Mendes Inácio de **Souza**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
daniel_mendes0802@hotmail.com
Alexandre Matias **Russo**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
alexandremrusso@gmail.com

Resumo

O programa de matemática dinâmica GeoGebra sempre ofereceu, como qualquer outro Sistema de Geometria Dinâmica, possibilidades notáveis para melhorar a construção e exploração visual de objetos geométricos, arrastando elementos em uma figura, possibilitando ao aluno perceber as mudanças resultantes e relações permanentes na construção. Mais recentemente, foi incorporado ao GeoGebra, uma versão experimental denominada GeoGebra Discovery, uma coleção de recursos e comandos, as chamadas Ferramentas Automatizadas de Raciocínio (ART), que permitem uma verificação matemática e a descoberta automática de proposições gerais sobre figuras da geometria euclidiana construídas pelo usuário. Estas ferramentas permitem automaticamente conjecturas, descobertas e provas sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica. O objetivo desse trabalho é apresentar, por meio de dois exemplos, perspectivas de exploração de teoremas geométricos que podem ser desenvolvidos no GeoGebra Discovery, permitindo ao usuário visualizar e interpretar os resultados da geometria plana obtidos nas construções realizadas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria plana, GeoGebra Discovery

Introdução

A digitalização traz à educação matemática novas ferramentas que requerem um novo currículo, um novo design de tarefas, e uma maior interação com outras disciplinas e neste contexto o protagonismo do aluno — com a ajuda de ferramentas digitais — é importante para seu próprio aprendizado.

Neste novo contexto educacional, os Sistemas de Geometria Dinâmica (DGS) podem ser considerados como ferramentas especificamente apropriadas e úteis pois fomentam a capacidade dos alunos sobre visualização geométrica e experimentação. Hoje em dia, alguns DGS incluem recursos para raciocínio automatizado que permitem a verificação automática e matematicamente rigorosa e a descoberta de teoremas geométricos (Kovács et al. 2018), permitindo um aprimoramento do ensino e seu aprendizado.

GeoGebra (https://www.geogebra.org/) é um conhecido programa de matemática dinâmica e sempre ofereceu, como qualquer outro DGS, algumas possibilidades notáveis para melhorar a construção e exploração visual de objetos geométricos por meio do movimento de seus elementos, permitindo a visualização das mudanças resultantes e das relações mantidas dos elementos em uma figura.

Mais recentemente foi incorporado no GeoGebra, uma versão experimental, denominada GeoGebra Discovery com uma coleção de recursos e comandos, as chamadas Ferramentas Automatizadas de Raciocínio (ART), que permitem uma verificação matemática ou a Prova Automática de Teorema (ATP) e, também, a descoberta de proposições gerais sobre figuras da geometria euclidiana construídas pelo usuário.

Estas ferramentas são acessíveis por um botão no Menu e por comandos que podem ser introduzidos na Janela de Entrada. Ao utilizar tais ferramentas o usuário tem a possibilidade de, automaticamente, fazer conjecturas, descobrir e provar declarações sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica. Tais ferramentas podem apoiar o ensino de teoremas de geometria plana permitindo a prova automática e descoberta de propriedades em figuras geométricas construídas com GeoGebra.

Os recursos básicos de raciocínio automatizado estão disponível no GeoGebra, versão 5. No entanto, certas melhorias das ART e avançadas características podem ser encontradas no GeoGebra Discovery, disponível em https://github.com/kovzol/geogebra-discovery; operando sobre o GeoGebra Classic 5, para computadores e laptops, nos sistemas operacionais Windows, Mac ou Linux e no GeoGebra Classic, versão 6, portanto, válido também em tablets e smartphones. Está acessível em http://autgeo.online/geogebra-discovery/ e os exemplos, descritos neste trabalho, foram desenvolvidos na versão online disponível em https://autgeo.online/

Procedimentos para a exploração e utilização GeoGebra Discovery

Esta seção introduz, descreve e exemplifica as características técnicas de algumas ferramentas implementadas (ART) no software de matemática dinâmica GeoGebra e possíveis procedimentos didáticos para sua utilização. Como mencionado acima, essas ferramentas permitem que o usuário automaticamente conjecture, descubra e prove declarações sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica.

Os exemplos, aqui apresentados, ilustram, por um lado, as funcionalidades de algumas ART e, por outro, mostram a interação necessária entre o raciocínio humano e a máquina, sintetizando o que é denominada por "inteligência aumentada" pois as informações obtidas, com as ferramentas, exigem do usuário uma interpretação matemática que configure o resultado procurado. De acordo com o Glossário Gartner:

> A inteligência aumentada é um padrão de *design* para um modelo de parceria, centrado no ser humano, de pessoas e inteligência artificial (IA) trabalhando em conjunto para melhorar o desempenho cognitivo, incluindo aprendizado, tomada de decisão e novas experiências (https://www.gartner.com/en/information-technology/glossary/augmented-intelligence)

O conjunto ART do GeoGebra Discovery, até o momento, é composto de ferramentas e comandos denominados de: *Relation, LocusEquation, Prove* e *ProveDetails, Discover* e *Compare.* Algumas delas serão desenvolvidas e apresentadas, nos dois exemplos desse trabalho, no contexto da Geometria Plana.

De acordo com os pesquisadores (Kovács et al., 2022) a ferramenta *Relation*, existente na versão oficial do GeoGebra, retorna com respostas numéricas, afirmando ou não, a possibilidade das relações ocorrerem. Na versão atual, o comando permite verificar, validar ou negar conjecturas geométricas, como também a descoberta de propriedades relacionadas a determinados objetos, pois carrega um botão adicional, chamado de "*More...*" na mensagem de verificação numérica que, de acordo com Kovács et al. (2022), ao clicá-lo é acionado o sistema ART que traduz o objeto geométrico selecionado em equações polinomiais.

O comando *LocusEquation*, conforme Kovács et al. (2022), permite, por meio das ferramentas ART, a descoberta de novos teoremas, mediante hipóteses complementares que apoia uma tese, como também, calcula a equação implícita de um ponto dada uma propriedade válida.

Conforme observado por Kovács et al. (2022) os comandos *Prove* e *ProveDetails*, disponíveis na versão oficial do GeoGebra, funcionam de maneira semelhante, ou seja, o usuário digita o comando e insere a conjectura, obtendo como resposta verdade (*True)* o falso (*False*) e o comando *Discover*, ainda exclusivo da versão experimental do GeoGebra Discovery, busca de forma automática e combinatória, possíveis relações geométricas envolvendo um determinado elemento à escolha do usuário. O comando *Compare* utiliza a comparação entre comprimentos de segmentos (desigualdades). (Kovács et al., 2021).

A seguir são apresentados dois exemplos desenvolvidos no GeoGebra Discovery e os respectivos procedimentos utilizados.

Exemplos da utilização do GeoGebra Discovery

Exemplo 1: Construa um quadrilátero qualquer ABCD e os pontos médios PQRS dos respectivos lados, como na Figura 01. Na Caixa de Entrada digite **Discover(P).** Leia as informações disponibilizadas na janela aberta. O que se pode afirmar sobre o quadrilátero PQRS? Quais informações na janela aberta permitem comprovar sua afirmação?

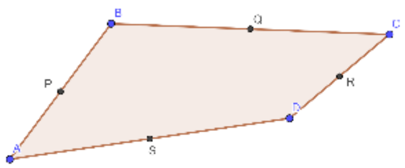


Figura 01. Screenshot do exemplo 1

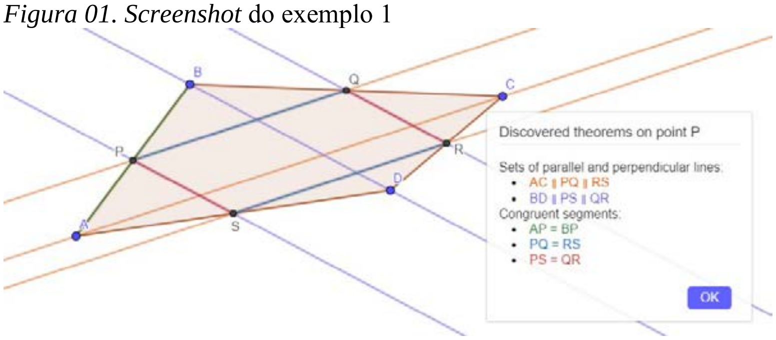


Figura 02. Screenshot dos resultados do exemplo 1 obtidos no GeoGebra Discovery

No exemplo 1, o usuário poderá concluir que PQRS é um paralelogramo ao interpretar as informações sobre paralelismo PQ||RS e PS||PQ e sobre a congruência dos segmentos PQ=RS e PS=QR (Figura 02)

Uma possível prova matemática formal pode ser desenvolvida como segue:

No quadrilátero ABCD sejam P,Q, R e S os pontos médios dos lados. Em um triângulo qualquer, se Q for o ponto médio de AB e P, o ponto médio de AD, então $\Delta ABD \sim \Delta APQ$. Então, como $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$, $\Delta APQ \sim \Delta ABD$ e, portanto, $\overline{PQ} \parallel \overline{DB}$ e $\overline{PQ} = \frac{\overline{BD}}{2}$. De forma análoga, $\overline{RS} \parallel \overline{BD}$ e $\overline{RS} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Assim, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ e $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Logo, PQRS é um paralelogramo.

No exemplo 2 indicamos os passos da construção no GeoGebra Discovery e as respectivas interpretações para conclusão do resultado.

Exemplo 2: Construa um triângulo qualquer ABC obtendo os segmentos a, b e c;

1. Usando a ferramenta Ponto Médio crie o ponto médio D de a;
2. Coloque um ponto E em b;
3. Crie a reta f que une D e E;
4. Pergunte ao GeoGebra sobre a exigência sobre o ponto E para ter f paralela a c digitando o comando **LocusEquation[c∥f,E]** na Entrada. Uma curva implícita d será computada e plotada (ver a janela de álgebra), e parece obter um único ponto. (Figura 03);
5. Movimente os objetos livres e conjecture sobre a posição do ponto E

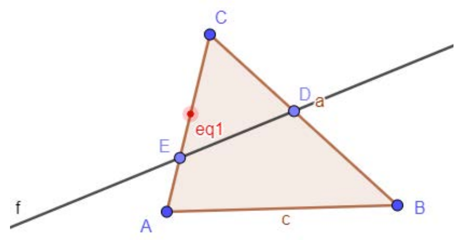


Figura 03. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

6. Esconda os objetos E, f e d;
7. Arraste os objetos livres novamente;
8. Para confirmar esta conjectura, crie o ponto médio F do segmento b;
9. Construa o segmento g por D e F;
10. Use a ferramenta *Relation* para comparar c e g, **Relation(c,g)**. Quais informações na janela pop-up resulta desse comando? (Figura 04);
11. Clique em **"*More* ..."** na janela pop-up. Quais informações resulta desse comando? (Figura 05).

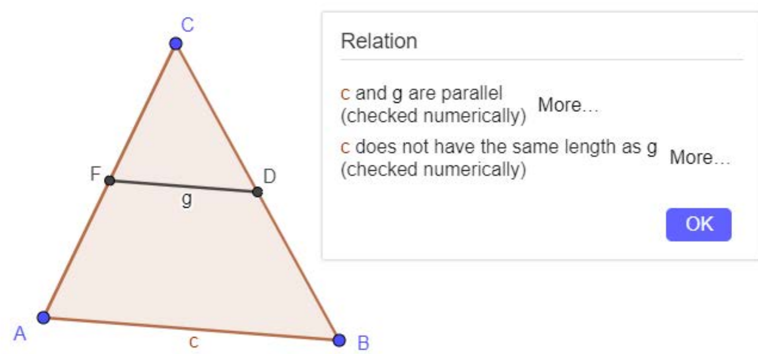


Figura 04. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

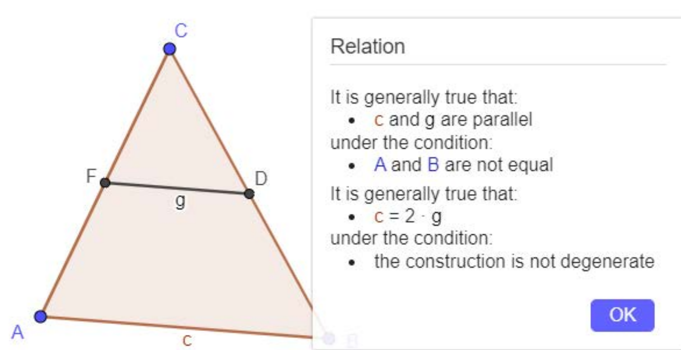


Figura 05. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

Assim, nesse exemplo 2, o usuário poderá concluir o teorema de Tales: *Em um triângulo, o segmento que une os pontos médios de quaisquer dois lados será paralelo ao terceiro lado e metade de seu comprimento.*

Também uma possível prova matemática formal pode ser desenvolvida como segue:

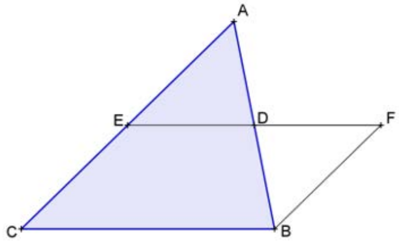


Figura 06. Screenshot da prova formal do exemplo 2

Sejam D e E os pontos médios de $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente (Figura 06). Seja F um ponto na semirreta $\overline{\mathrm{ED}}$, de modo que $\overline{\mathrm{DF}} = \overline{\mathrm{DE}}$. Como $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}}$ e $\mathrm{A}\hat{\mathrm{D}}\mathrm{E} = \mathrm{F}\hat{\mathrm{D}}\mathrm{B}$ (ângulo oposto pelo vértice), então ΔADE ~ ΔFDB pelo caso LAL. Segue que $\mathrm{D}\hat{\mathrm{F}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{D}$ e $\overline{\mathrm{FB}} = \overline{\mathrm{AE}}$. Como $\overline{\mathrm{FB}} = \overline{\mathrm{AE}}$ e $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{EC}}$, temos que $\overline{\mathrm{FB}} = \overline{\mathrm{EC}}$. Logo, $\overline{\mathrm{FB}}$ e $\overline{\mathrm{EC}}$ são paralelos, pois $\mathrm{D}\hat{\mathrm{F}}\mathrm{B}$ e $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{D}$ são ângulos alternos internos congruentes) e têm o mesmo comprimento. Como, todo quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo, concluímos que FBCE é um paralelogramo. Portanto, $\overline{\mathrm{DE}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$ e têm o mesmo comprimento. Como D é o ponto médio de $\overline{\mathrm{FE}}$, então $\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$.

Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho dois exemplos para explorar as perspectivas de descobertas de propriedades da geometria plana com as ferramentas da versão experimental do GeoGebra Discovery e argumentamos que, um estudo mais amplo possibilitará uma possível inclusão curricular destas mudanças metodológicas na prática escolar em relação aos recursos de raciocínio automatizado disponibilizados.

A descoberta por meio da visualização e interpretação dos resultados pelo usuário, ilustram as funcionalidades das ferramentas ART e mostram a interação necessária entre o raciocínio humano e a máquina, sintetizando o que é denominada por "inteligência aumentada".

É expressivo o número de usuários do GeoGebra, mais de 100 milhões em todo o mundo, e é um passo decisivo para tornar verdade a afirmação de Hohenwarter et al. (2019) de *que com calculadoras de bolso, as pessoas vão provavelmente começar a usar ART para verificar fatos geométricos sem o consenso da comunidade pedagógica em seu papel*, possibilitando, pelo avanço e disponibilidade de ferramentas digitais, o desenvolvimento de atividades matemáticas e o protagonismo do aluno.

Referências e bibliografia

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019). Using GeoGebra automated reasoning tools to explore geometric statements and conjectures. In G. Hanna, M. de Villiers, & D. Reid (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching,* series: Mathematics education in the digital era (Vol. 14, pp. 215–236). Cham: Springer.

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33–50.

Kovács, Z., Recio, T. & Vélez, M.P. (2021). GeoGebra Discovery in Context. *Proceedings of the 13th International Conference on Automated Deduction in Geometry,* EPTCS 352, 141-147.

Kovács, Z.; Recio, T.&Vélez, M.P. (2022) Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they good for? In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh (eds). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. Series: Mathematics Education in the Digital Era, 17, Springer.

Recio, T., Richard, P. R., & Vélez, M. P. (2019). Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills. *The International Journal for Technology in Mathematics Education,* 26(2), 81–89.

Práticas pedagógicas com vídeos e videoaulas de matemática

Andréa **Thees**
Departamento de Didática, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
andrea.thees@unirio.br

Resumo

Este minicurso tem por objetivo discutir algumas possibilidades de uso de vídeos e videoaulas de matemática nas práticas docentes. Como embasamento teórico, serão apresentadas duas teorias de aprendizagem, a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia – TCAM e a Teoria de Aprendizagem Colaborativa Online – TACO, que se complementam na medida em que a TCAM auxilia na seleção do material audiovisual e a TACO, que tem foco na colaboração entre os sujeitos envolvidos, em processos de ensino e aprendizagem remotos, presenciais ou híbridos. Pretende-se estimular o debate entre os participantes, assim como a reflexão sobre os desafios e as implicações pedagógicas do trabalho docente que envolve o consumo e a produção de material audiovisual. Esperamos que, ao final do minicurso, os participantes possam pensar em novas possibilidades de uso para os vídeos e videoaulas disponíveis online.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação superior; Aprendizagem; Cognitivismo; Redes sociais; Pesquisa Educacional; Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro; Brasil.

Introdução

A maioria dos sujeitos que frequentam a educação regular atualmente, pertence a uma geração que nunca viveu sem celulares, tablets ou computadores pessoais e, consequentemente, sem acesso à internet. Segundo Autor (2019), as chamadas Geração Millenium, Geração Z e Geração Linksters possuem hábitos peculiares e esse coletivo de nativos digitais, muito provavelmente, está tentando nos indicar que as instituições escolares precisam repensar suas estratégias de ensino e seus modos de atuar.

Nesse cenário, temos o Google e o YouTube como as duas páginas mais acessadas no Brasil e no mundo, dando origem à denominação Geração Google-YouTube (ASHRAF, 2009), que costuma acessar a internet em seus celulares e navegar em ambos, ao mesmo tempo em que assistem aulas. A premissa que pressupõem um rompimento com o antigo sistema de aprendizagem parece ser um dos desafios educacionais do século XXI. Tem-se presenciado a cada dia mais e mais professores ansiosos em integrar as tecnologias às práticas pedagógicas, buscando inovar o processo de ensino e aprendizagem, sem que essas tentativas de inovação se transformem em apenas mais um modismo.

Percebe-se nessa atitude um sinal da crescente necessidade de se considerar os processos de ensino e aprendizagem dentro de uma perspectiva dinâmica e interativa, que permita fazer perguntas e trabalhar com os colegas e os professores, de modo remoto, presencial ou híbrido. Sendo assim, passa a existir uma necessidade latente de ajuste nos ambientes de ensino e aprendizagem, permitindo uma combinação de materiais tradicionais como cadernos e livros, com recursos audiovisuais acessíveis online.

O YouTube é considerado uma ferramenta cultural, a qual pode ser entendida pelos professores como promotora da aprendizagem dos alunos em todos os níveis de escolaridade. Os vídeos e videoaulas disponíveis na plataforma poderiam ser incorporados em atividades pedagógicas, desde que se realizasse um bom planejamento da aula, considerando seus objetivos, de forma a não perder o foco do conteúdo a ser ensinado.

Sendo assim, esse minicurso irá abordar algumas questões relacionadas à produção e ao consumo de recursos audiovisuais, a partir da perspectiva de duas teorias do conhecimento: a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia – TCAM, de Richard Mayer, e a Teoria de Aprendizagem Colaborativa Online – TACO, de Linda Harasim. Serão, ainda, apresentados alguns modos de iniciar, complementar e finalizar aulas centrados tanto no professor, quanto nos estudantes, utilizando os vídeos e videoaulas de matemática disponíveis no YouTube em outras plataformas.

Teorias da Aprendizagem

As duas principais epistemologias das teorias de aprendizagem dos séculos XX e XXI são a epistemologia objetivista, refletida nas teorias da aprendizagem behaviorista e cognitivista, e a epistemologia construtivista, refletida nas teorias da aprendizagem construtivista e colaborativista. Para embasar teoricamente esse minicurso, a escolha recaiu sobre a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia – TCAM, de Richard Mayer (2009) e sobre a Teoria de Aprendizagem Colaborativa Online – TACO, de Linda Harasim (2012). No caso da Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia, sendo uma teoria cognitivista, a TCAM é guiada pela perspectiva epistemológica do objetivismo. No caso da Teoria da Aprendizagem Colaborativa Online, sendo uma teoria colaborativista, a TACO é guiada pela perspectiva epistemológica construtivista.

Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia

A TCAM tem como hipótese central a afirmação de que "pessoas aprendem melhor com palavras e imagens, do que somente com palavras" (MAYER, 2009, p. 1). A teoria trabalha com algumas premissas das ciências cognitivas como o canal-duplo, que são os canais separados que usamos para processar estímulos auditivos e visuais, a capacidade-limitada, pois nossos dois canais são limitados em termos de capacidade de processamento cognitivo, ou seja, podemos lidar apenas com certa quantidade de informação por vez, e o aprendizado-ativo, que visa o envolvimento do aprendiz, para que a aprendizagem ocorra.

O problema acontece quando existe uma sobrecarga no uso dos canais. Essa sobrecarga de informações ocorre quando palavras escritas são apresentadas simultaneamente às imagens, pois serão admitidas por meio dos olhos. A imagem da palavra escrita precisa ser transformada em seu equivalente sonoro para ser processada na memória de trabalho, que já está ocupada processando outros sons e/ou narrações.

Para evitar essa sobrecarga no processamento, Mayer (2009) elaborou doze princípios que devem ser observados na produção e consumo de material audiovisual. Esses princípios da TCAM buscam reduzir o processamento supérfluo, respeitando a premissa do canal-duplo, no uso adequado dos canais auditivo e visual, gerenciar as informações processadas na memória de trabalho, que tem uma capacidade-limitada, e promover o aprendizado-ativo, incentivando processamento criativo e a sua integração com o conhecimento prévio. De acordo com Autor (2019), a aplicação dos princípios da TCAM possibilita analisar se um determinado vídeo ou videoaula teria a capacidade de efetivar uma aprendizagem significativa.

Teoria de Aprendizagem Colaborativa Online

A teoria elaborada por Linda Harasim (2012), que foi denominada online collaborative learning (OCL) theory, ou teoria da aprendizagem colaborativa online, foi influenciada pelas premissas da teoria construtivista e está fundamentada na prática educacional contemporânea. Essa nova perspectiva teórica, também chamada de colaborativismo online, por sua vez, se baseia em propostas combinadas e totalmente interativas, com ênfase em atividades multimídia. Uma prática educativa a partir da TACO se propõe a ser realizada em diversos ambientes online, por aprendizes de todas as idades interatuando, de forma que o comportamento e as atitudes de cada indivíduo se tornem estímulos para outros que, em contínua interação, constituam um grupo de trabalho colaborativo.

Práticas Pedagógicas com vídeos e videoaulas

A incorporação de vídeos e videoaulas de matemática no planejamento das aulas, pode ser considerada uma proposta pedagógica que supõem um ensino mais atrativo e, talvez, mais potente também. Esses recursos audiovisuais podem ser utilizados para iniciar e/ou finalizar a apresentação de um conteúdo, ou mesmo exibidos durante as aulas, por meio de atividades que podem estar centradas no professor ou nos estudantes (AUTOR, 2019). Nesse sentido, existem potencialidades, mas também limitações, tanto na elaboração e seleção de vídeos e videoaulas para uso em práticas pedagógicas que devem ser examinadas.

A suposição de que o ensino poderia tornar-se mais atrativo e eficiente com o uso do audiovisual, pôde ser constatada por Bonk (2011) ao propor atividades pedagógicas que envolviam a incorporação de vídeos do YouTube. Para ele, “o vídeo online compartilhado é uma ferramenta fácil de usar e poderosa para o ensino”, além de servir “para estimular o interesse do aluno em um tópico” (IBIDEM, p. 17).

Ademais, para concretizar uma prática pedagógica significativa, o autor complementa que é necessário realizar o planejamento da aula, com seus objetivos, de forma a não perder o foco do conteúdo a ser ensinado. Com esse intuito, Bonk (2011, p. 18) relacionou alguns modos de iniciar e finalizar aulas centrados no professor e também centrados nos estudantes com vídeos do YouTube. Esses modos são denominados por atividade pedagógica e os processos descritos resumidamente no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1

Proposta para uso de vídeos pelos professores

Atividade Pedagógica	Descrição do processo
1. Vídeo de Introdução	Vídeos online são usados para introduzir ou organizar uma aula.
2. Vídeo de Finalização	Vídeos online são usados após a discussão da aula ou como uma atividade final.
3. Introduzir e Finalizar	Vídeos online são usados para iniciar a discussão, assim como outros são usados no final da aula, para que haja uma percepção de encerramento da discussão.
4. Pré-visualizar e Discutir online	O professor seleciona vídeos e os publica para os alunos assistirem antes ou depois da aula. Se os alunos participarem de uma discussão online com base nesses vídeos, deve-se ter clareza sobre as regras de postagem e quantos comentários de colegas devem responder.
5. Vídeo de Introdução e Discussão	Vídeos online são usados para introduzir ou organizar uma aula, seguido de discussão com os alunos organizados em pequenos grupos com determinadas tarefas atribuídas.
6. Pausar e Refletir	O professor reproduz uma parte de um vídeo do YouTube e faz uma pausa para reflexões e, em seguida, continua a reproduzir o vídeo.
7. Refletir sobre Conceitos-chave	Exibição de vídeo do YouTube para que os alunos reflitam sobre os conceitos incorporados nele. O vídeo pode ser repetido algumas vezes enquanto o professor assinala os principais conceitos-chave para a turma. Ele pode pedir aos alunos que digam "pausa" quando virem um determinado conceito-chave aparecer.
8. Vídeo de Introdução, Aula, e Avaliação (VIAA)	Vídeos online são usados para introduzir ou organizar uma aula, e, em seguida, o professor ministra uma aula sobre conteúdos relacionados aos conceitos desses vídeos. Ao término da aula, os mesmos vídeos do YouTube podem ser exibidos e os alunos, solicitados a refletir sobre os conceitos abordados neles. Tal atividade pode ser incorporada como processo de avaliação.

Fonte: Autor, (2019, p. 116).

Bonk (2011) observou ainda que os professores pesquisados não eram os únicos a incorporar vídeos do YouTube em atividades pedagógicas. Segundo o autor, outros sujeitos capazes de utilizá-los seriam os estudantes. Sendo assim, o Quadro 2 a seguir documenta dez maneiras pelas quais os alunos podem usar vídeos do YouTube. (IBIDEM, p. 18-19)

Quadro 2

Proposta para uso de vídeos pelos alunos

Atividade Pedagógica	Descrição do processo
1. Elaboração de Fichamentos	Alunos selecionam vídeos para exibir na aula e debatem sobre ele. Alunos designados como os provedores de recursos interessantes de cada semana devem criar um fichamento para os vídeos e os distribuem para a turma.
2. Pré-visualizar e Discutir	Alunos atuam como provedores de recursos, selecionando vídeos e compartilhando com a turma, que pré-visualiza seguido de discussão em aula.
3. Introdução Colaborativa	Um par de alunos e o professor selecionam alguns vídeos relevantes para a semana, compartilham entre si e decidem quais usar na aula.
4. Demonstrar e Introduzir	Cada aluno traz um vídeo para a aula, apresenta e explica como esse se relaciona com os conceitos do curso. Recomenda-se uma distribuição de fichas explicativas.

5. Criadores de Introdução	Os alunos criam seus próprios vídeos no YouTube para ilustrar os conceitos do curso.
6. Arquivos de Introdução	Um diretório com os vídeos dos anos anteriores é criado e os alunos são convidados a atualizá-los.
7. Competições de vídeo	Os alunos encontram vídeos relevantes e enviam a lista para o professor visualizar e selecionar. Os alunos cujos vídeos são selecionados podem receber reconhecimento especial ou pontuação extra.
8. Compartilhar e Classificar	Os alunos podem compartilhar vídeos do YouTube com alunos de outras turmas e instituições e, talvez, classificar os vídeos postados por seus colegas.

Fonte: Autor, (2019, p. 117).

Todas essas possibilidades parecem ater-se ao uso pedagógico de recursos audiovisuais, esquecendo-se que as possibilidades educacionais implícitas nesse tipo de mídia também dependem de uma avaliação prévia do conteúdo dos vídeos, ou mesmo, das videoaulas.

Com esse objetivo, Amaral (2013) sugeriu que o material audiovisual seja entendido como um caminho para a formação de um conceito, sendo, portanto, uma mídia formativa, ou como meio de informação, no caso de uma mídia informativa. A atuação de um mediador, por exemplo, um professor, interfere diretamente na forma como o material audiovisual será utilizado, podendo transformar uma ação informativa em um processo formativo. Em outras palavras,

> Não é fácil incluir o YouTube na sala de aula para que ele apresente resultados acadêmicos. Se engana quem pensa que esse método diminui a responsabilidade e a participação do professor no processo. Muito pelo contrário. Caberá ao profissional de ensino a indicação desse material. Isso vai exigir ainda mais domínio sobre o conteúdo, especialização, pesquisa mais ampla, experiência, já que a popularização da internet fez surgir na rede uma verdadeira enxurrada de conteúdo sobre qualquer tema, muitas vezes misturados com propagandas disfarçadas, crenças, boatos, achismos, manipulação. Tudo isso embalado numa moderna linguagem audiovisual aplicada para dar a impressão de credibilidade. Trabalho árduo, pois temos hoje muito mais lixo na internet do que conteúdo relevante. E essa escolha responsável, de separar "o joio do trigo", dá muito trabalho. (FERREIRA, 2017, p. 45)

Objetivos e metodologia do minicurso

A partir do exposto até aqui, elaborou-se essa proposta de minicurso buscando: a) iniciar com uma breve contextualização do cenário pandêmico, que originou aulas remotas em cumprimento às medidas de isolamento social; b) apresentar alguns princípios das duas teorias de aprendizagem – TCAM e TACO, e suas implicações pedagógicas; c) analisar algumas atividades com uso de vídeos e videoaulas; d) refletir sobre a importância e os desafios de articular as tecnologias digitais nas práticas pedagógicas.

Metodologia proposta

Para tal, o minicurso seguirá um roteiro desmembrado em três momentos complementares:

i) inicialmente, serão propostas reflexões a respeito das possibilidades de se trabalhar as implicações pedagógicas das abordagens cognitivista e construtivista das teorias de aprendizagem TCAM e TACO;

ii) a seguir, serão apresentadas atividades pedagógicas, de acordo com os Quadros 1 e 2 acima, que consideram o uso de vídeos e videoaulas com foco no professor e nos alunos;

iii) por fim, o minicurso permitirá uma experiência prática acessando um dos canais da Figura 2 abaixo, visando a aplicação da TCAM e da TACO.

Figura 2
Canais para seleção de vídeos e videoaulas

Fonte: Elaborada pela autora

Na experiência prática, os participantes serão convidados a acessar um dos canais da Figura 2, escolher um vídeo ou videoaula, indicar o tópico de matemática e o conteúdo abordado, analisar o material selecionado segundo a TCAM e criar uma atividade em sintonia com as premissas da TACO. Em seguida, será disponibilizado um momento para apresentação e discussão dos resultados, análises e debates.

Ao final, os cursistas serão convidados a responder um questionário online, que faz parte da coleta de dados do projeto de pesquisa V.E.M. – Vídeos e Educação Matemática, coordenado pela proponente do minicurso.

Referências e bibliografia

Amaral, R. B. (2013). Vídeo na sala de aula de matemática: que possibilidades? *Educação Matemática em Revista*, 18(40), 38-47. http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/298.

Ashraf, B. (2009). Teaching the Google-eyed YouTube generation. *Education + Training*, Reino Unido, 51(5/6), 343-352. https://doi.org/10.1108/00400910910987165.

Bonk, C. J.. (2008). YouTube anchors and enders: the use of shared online video content as a macrocontext for learning. *The American Educational Research Association* (AERA) Annual Meeting. Anais... New York, NY.

Ferreira, L. A. (2017). É preciso saber separar o joio do trigo. *Revista Appai Educar*. 104 (44-45)

Harasim, L. M. (2012). *Learning Theory and Online Technologies*. New York, NY: Routledge.

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning*. 2 ed. Nova Iorque: Cambridge.

[redacted] (2019). "Aprendi no YouTube": investigação sobre estudar matemática com videoaulas. Rio de Janeiro, 2019. 260 f. *Tese (Doutorado em Educação)* – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, RJ. https://url.gratis/DLBbpj.

Promoción de los aprendizajes a partir de los errores de los estudiantes mediante el uso de herramientas tecnológicas

Gabriela **Prieto**
Universidad del Zulia
Venezuela
gabrielacprietof@gmail.com
Hugo **Parra-Sandoval**
Universidad del Zulia
Venezuela
hugoparras@hdes.luz.edu.ve
Adelso **Perdomo**
Universidad Científica del Sur
Perú
aperdomo@cientifica.edu.pe

Resumen

En el trabajo que se presenta a continuación se muestra cómo el uso de herramientas tecnológicas. Nearpod y Quizizz, en una clase de matemáticas, moviliza los conocimientos del profesor de matemáticas y los enfrenta a la aparición de errores en los estudiantes, tomando una postura determinada ante estos. Para ello, se ha considerado el modelo del Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), especialmente el dominio referido al Conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y las reacciones del profesor ante un error de Pinzón y Gómez (2021). La intención es reconocer las potencialidades y limitaciones de estas dos herramientas tecnológicas en el desarrollo de una clase, tomando en cuenta lo antes mencionado.

Palabras clave: Didáctica de la matemática, Error como aprendizaje, Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, Educación primaria, Educación secundaria, Recursos Libres de Matemáticas, Herramientas tecnológicas

Introducción

Recientemente, la humanidad ha sido testigo del impacto que ha tenido el COVID -19 y los desafíos que ha traído consigo en el campo educativo. Con la integración de la tecnología para llevar a cabo las actividades escolares se evidencia la capacidad de adaptación e innovación del docente y del diseño curricular (Flores-Carrasquel, 2022), lo cual, repercute directamente en el proceso de enseñanza – aprendizaje que se da actualmente en las aulas de clases. En este sentido, tanto estudiantes como profesores se han visto en la necesidad de indagar y manipular diferentes herramientas tecnológicas que se convierten en guías o mediadoras en el logro de los contenidos que se abordan en las diferentes ciencias que se imparten y que hoy en la presencialidad se mantienen.

En ese contexto, la asignatura de Matemáticas es una de las que, por sus características, se pensaba que sería la que presentaría mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje; sin embargo, superó este conflicto, permitiendo a los docentes expandir su bagaje en el conocimiento didáctico del contenido. De acuerdo al modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo et al., 2018), mejor conocido como MTSK por sus siglas en inglés, éste contiene entre otros conocimientos, el referido al de la enseñanza de las matemáticas (MKT) y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), evidenciándose en el uso de aplicaciones y plataformas, que permiten diseñar tareas y/o actividades para crear provechosas situaciones de aprendizaje.

Para el diseño, de las tareas y actividades que se desarrollan en una clase, el docente considera diferentes aspectos que se encuentran dentro del conocimiento didáctico del contenido, como lo son los recursos materiales y virtuales, ejemplos y ayudas. De igual manera el profesor toma en cuenta las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las diferentes temáticas, siendo estas últimas (las dificultades) de gran relevancia, pues admite el surgimiento de errores que pueden ser una ventana para ahondar sobre lo que piensa el estudiante y cómo ha sido su forma de proceder. Esto permite convertir el acto de enseñanza en un proceso reflexivo que concluye con el esclarecimiento de lo acontecido.

En este orden de ideas, se proporcionan dos herramientas tecnológicas - Nearpod y Quizizz - empleadas en el desarrollo de las clases. Ambas han sido de gran ayuda para afianzar y profundizar en diferentes tópicos, tanto en virtualidad como presencialidad. Estas herramientas proponen diversidad de estrategias, en las cuales se da cabida a colocar planteamientos erróneos como distractores, permitiendo explorar las fallas o debilidades que ostentan los estudiantes; por tanto, su potencialidad radica en que estos errores pueden ser punto de partida para subsanar vacíos, esclarecer procedimientos o ideas contradictoras. El uso eficiente de estas herramientas a través del análisis de las respuestas incorrectas puede devenir en el aprovechamiento de los errores cometidos para la consolidación del tema abordado.

Referentes teóricos

El taller que se presenta se fundamenta en dos referentes teóricos: el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) y la gestión del error, desarrollada por Pinzón y Gómez (2021).

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Uno de los pioneros en el campo de la comprensión del conocimiento del profesor fue Shulman (1986), al establecer una categorización de los conocimientos que debería poseer un profesor, señalando la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia a enseñar como un aspecto inherente al docente.

Los fundamentos proporcionados por Shulman (1986), han constituido la base para la creación de diferentes modelos que pretenden diseccionar el conocimiento del docente. En este sentido, Ball et al. (2008) consideran la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas en su modelo denominado Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), modelo que plantea seis subdominios. Entre ellos hallamos dos subdominios, uno referido al Conocimiento Común del Contenido (CCK) que hace referencia al conocimiento que toda persona alfabetizada debe poseer y el segundo, denominado Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), que se entiende como aquel que va más allá del Conocimiento Común del Contenido (CCK). De acuerdo a Carrillo et al. (2013), es entre esos dos subdominios donde aparece una línea difusa que los separa, esta poca claridad en su diferenciación es debido a la dificultad que se presenta al analizar las actuaciones de los profesores y poder establecer el límite claro sobre cuándo un conocimiento deja de ser CCK y pasa a ser SCK o viceversa.

Esta poca claridad entre el SCK y CCK en el modelo MKT y, considerando también las ideas de Shulman, indujo la formulación de un modelo denominado Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2013). Este modelo es el resultado de la reflexión de la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas y de la exploración tanto de herramientas como fundamentos teóricos que permitieran analizar dichos conocimientos (Muñoz-Catalán et al., 2015).

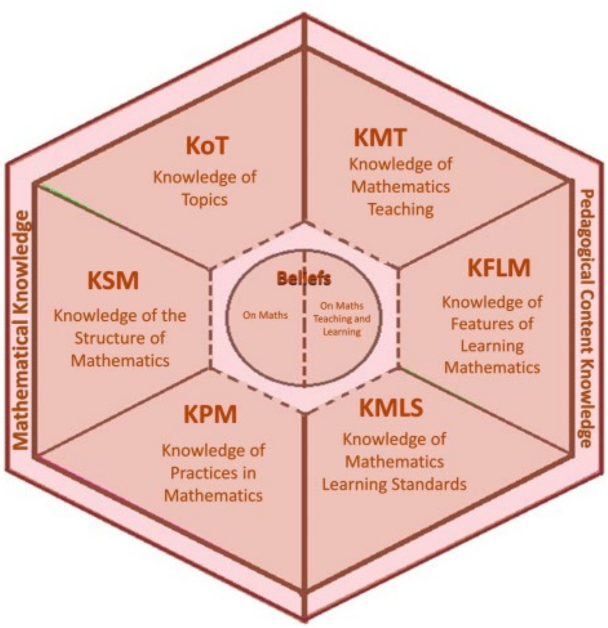


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018)

En este taller nos centramos en el dominio relacionado con el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (PCK), particularmente en los subdominios Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFML) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). El primer subdominio, hace referencia al conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, ostentando la capacidad de reconocer de concepciones, errores, obstáculos y dificultades que podrían tener los estudiantes en su pensamiento matemático (Escudero y Yánez, 2020). Por otra parte, el segundo subdominio incluye los de recursos materiales y/o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático particular.

El error

De acuerdo a National Council of Teacher of Mathematic (NCTM), existen coincidencias al asumir que los errores son inseparables a los procesos de aprendizaje (NCTM, 2000), así que cualquier situación de aprendizaje está sujeta a la posibilidad de que se presenten errores y estos deberán ser aprovechados para favorecer los aprendizajes.

En este orden de ideas, Pinzón y Gómez (2021) señalan que ante la aparición de un error las reacciones del profesor pueden ser de dos formas; una, que sean los mismos estudiantes quienes descubran el error y lo superen bajo la guía del profesor y otra, centrada en el profesor. Cuando se centra en el profesor, éste asume el papel de juez y dictamina qué y cuándo es un error lo planteado y da su propia solución. Pinzón y Gómez (2021) señalan que hay evidencias en su investigación que dos terceras partes de los profesores muestran una tendencia desacertada en el manejo del error en clase, ya que en lugar de dejar que sus estudiantes descubran su propio error mediante preguntas y contraejemplos formulados por el profesor, ellos mismos – los profesores - toman el protagonismo identificando el error y señalando la manera correcta de proceder.

Herramientas tecnológicas: Nearpod y Quizizz

Nearpod es una herramienta que permite crear presentaciones interactivas; éstas pueden incluir diversas actividades como cuestionarios, encuestas, preguntas y dibujos para que los estudiantes las ejecuten mientras el docente desarrolla su clase. Ofrece la ventaja que posibilita realizar una clase en vivo o paso a paso según las necesidades, interactuando en tiempo real con los estudiantes. (Pimbo, 2022)

Por otro lado, Quizizz permite crear cuestionarios online de manera lúdica, pudiendo ser respondido por lo estudiantes en directo o como tarea. Esta herramienta puede ser usada en todos los niveles educativos y en otros ámbitos. Como recurso educativo, Quizizz permite a los docentes promover espacios para la valoración del aprendizaje de los estudiantes (Ordoñez, 2020), brindando una retroalimentación rápida a las respuestas proporcionadas por ellos.

Hacer uso de estas dos herramientas tecnológicas permite a los profesores evaluar de manera formativa, los aprendizajes adquiridos por los estudiantes a lo largo del desarrollo en clase de un tópico.

A modo de cierre

Con estes taller se espera desarrollar entre los participantes el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas pertenecientes al dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido planteado en el MTSK (Carrillo et al., 2018). Para desarrollar estos dos tipos de conocimientos, se orientarán las actividades desde una de las dos perspectivas propuestas por Pinzón y Gómez (2021). Esta perspectiva que se asume propone que el profesor, mediante preguntas, ejemplos y contraejemplos, debe promover una reflexión alrededor los errores que surgen en clase, de manera tal que se logre superarlos y aprender de ellos.

Referencias y bibliografía

Aguilar, Álvaro; Carreño, Emma; Carrillo, José; Climent, Nuria; Contreras, Luis Carlos; Escudero, D; Flores, Pablo; Montes, Miguel; Rojas, Nielka (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 5063-5069). Uruguay.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á. M. R., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’ s specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 1–18. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Flores-Carrasquel, N. Y. (2022). Desafío de la praxis docente: su reinvención impulsada por la cultura tecnológica y la pandemia covid-19. Prohominum, 4(2), 330-348. https://doi.org/10.47606/ACVEN/PH0131

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., & Climent, N. (2015). Educación Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas Introducción. La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española, 18(3), 1801–1817. https://hdl.handle.net/11441/51501%0A

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Recuperado de http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principlesand-Standards/

Pimbo Tibán, A. G. (2022). Tecnologías del aprendizaje y el conocimiento en el Aprendizaje de números enteros en el octavo año de Educación General Básica (Bachelor's thesis, Universidad Técnica de Ambato-Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación-Maestría en enseñanza de la matemática).

Ordóñez, W. (2020). Quizizz: Una nueva plataforma para evaluar. Revista Runin. Vol. No. 9. Universidad de Nariño.

Pinzón, Andrés; Gómez, Pedro (2021). ¿Cómo reaccionan los profesores de matemáticas a los errores y estrategias no previstas de sus estudiantes? Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad. Bogotá. https://funes.uniandes.edu.co/23259/1/Pinzon2021Como.pdf

Razonamiento covariacional en el estudio de una función lineal mediante el uso de GeoGebra

Mihály **Martínez-Miraval**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
martinez.ma@pucp.edu.pe
Daysi **García-Cuéllar**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
garcia.daysi@pucp.pe

Resumen

El presente estudio tuvo por objetivo identificar las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al realizar una tarea que involucra una relación funcional con GeoGebra. Se consideraron aspectos teóricos del razonamiento covariacional, relacionado con la idea de acción mental. Se identificaron diversas acciones mentales al resolver una tarea que involucraba la relación entre las variables volumen de agua que ingresa a un recipiente y altura de agua dentro del recipiente, mediante el uso de un applet: expresar que al aumentar el volumen del agua, la altura se incrementa, o que construir un gráfico de puntos como un nuevo elemento que relaciona los valores individuales de ambas variables, o reconocer una covariación continua entre ellas. Se concluye que es factible identificar cómo un estudiante exterioriza sus acciones mentales con GeoGebra, lo que permite dar información de cómo un sujeto razona covariacionalmente a través de un software matemático.

Palabras clave: Acciones mentales; razonamiento covariacional, función lineal, GeoGebra, nivel universitario

Introducción

En la literatura el razonamiento covariacional se identifica como esencial para la comprensión de conceptos fundamentales de Cálculo (Carlson et al., 2002). En el tema de funciones, este tipo de razonamiento es importante para lograr una comprensión madura de este concepto (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008), que se da, al entender cómo se coordinan los cambios entre dos o más variables.

La coordinación simultánea de los cambios de una variable respecto de los cambios de otra variable, es factible analizarla desde una perspectiva del razonamiento covariacional. La comprensión del concepto de función desde esta perspectiva, involucra la habilidad de representar e interpretar las características de una función a partir de los cambios dinámicos entre sus variables (Mateus-Nieves y Moreno, 2021), lo que permitiría introducir su definición de una forma más cualitativa, como una covariación dinámica entre los cambios de los valores de dos variables (Antonini y Lisarelli, 2021), lo que no implica reemplazar su definición como una regla de correspondencia que asocia a un valor de entrada, un único valor de salida, se trata de complementar ambas ideas.

Por esta razón, se realizó esta investigación que tuvo como objetivo identificar las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al realizar una tarea de covariación que involucra una relación funcional con GeoGebra.

Aspectos teóricos

En el estudio se emplean aspectos de la aproximación teórica del razonamiento covariacional, centrado en la identificación de las acciones mentales que los estudiantes ponen en juego cuando desarrollan una tarea de covariación. Para ello, se identifican los comportamientos que exteriorizan los estudiantes que son asociados con el conjunto de acciones mentales identificadas por Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022), en el trabajo de los estudiantes sobre un tema de cálculo al mediar su aprendizaje con GeoGebra (Tabla 1).

Tabla 1
Acciones mentales y comportamientos al trabajar una tarea de covariación con GeoGebra.

Nivel	**Comportamientos**
Covariación continua suave	AM6: Extender la idea de coordinación simultánea entre la medida de la base de cada rectángulo y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos (S_L) cuando el valor de k tiende a infinito.
Covariación continua a trozos	AM5: Extender la idea de coordinación simultánea entre el número de rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con la intención de aproximar el área de la región R, al aumentar el valor de k.
Coordinación de valores	AM4: Imaginar que los valores individuales de las cantidades van juntos.
Coordinación gruesa de valores	AM3: Expresar verbalmente cómo coordinan los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de aumentos o disminuciones.
Pre-coordinación de valores	AM2: Establecer de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes, como el número de rectángulos y la suma de áreas de rectángulos; la cantidad de regiones no cubiertas (triángulos pequeños) y sus áreas.
Sin coordinación	AM1: Realizar operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados por el programa, como la suma de áreas de los rectángulos

Nota. Extraído de Autor (2022)

Aspectos Metodológicos

La investigación es de corte cualitativo. Denzin y Lincoln (2011) señalan que en este tipo de investigaciones, el foco se coloca en las interpretaciones y significados que los sujetos construyen relacionados con el fenómeno estudiado, y para ello, el investigador se basa en su análisis de información recolectada en videos, grabaciones, entrevistas, entre otras herramientas de recolección de datos.

Se trabajó con un estudiante al que llamaremos Pedro, de la facultad de Educación de una universidad privada de Lima-Perú, quien respondía a las preguntas que le hacía el investigador a medida que manipulaba herramientas de GeoGebra para dar su respuesta. El estudio se desarrolló en un formato de entrevista semiestructurada. Las tareas planteadas y su resolución se hicieron en una sola clase, en el lapso de hora y media. La figura 1 muestra el entorno de GeoGebra que se presentó al estudiante.

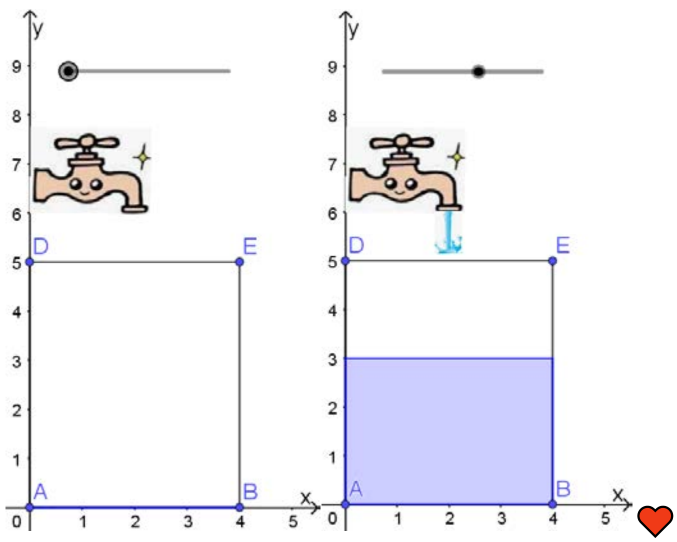


Figura 1. Applet en GeoGebra

En esta tarea, el estudiante debía identificar cómo variaba la altura del recipiente a medida que el volumen de agua ingresaba a velocidad constante, luego, debía representar gráficamente dicho comportamiento y reconocer una relación funcional entre ambas. Se indicó al estudiante que considerase que la profundidad del envase medía una unidad.

Análisis

El estudiante manipuló el deslizador y observó cómo se iba pintando de azul el recipiente. Al comienzo, el estudiante identificó diferentes variables: volumen del recipiente, altura del recipiente de la parte llena con agua y volumen del recipiente de la parte vacía. Al parecer, al inicio, no hubo una relación entre las variables que deseábamos monitorear, Pedro utilizó su conocimiento real de medidores de recipientes, asociando a la altura con la cantidad de litros o mililitros de agua, sin hacer los cálculos del volumen que había en el recipiente.

> 01 Investigador: Cuando mueve el deslizador, ¿qué variables identificas?
> 02: Pedro: En primer lugar, cuando veo el recipiente, me doy cuenta que ese sector azul cada vez que muevo el deslizador se empieza a incrementar, lo que sí queda estático es la base AB del recipiente, lo que sí se incrementa es el contenido del recipiente. Vemos que cuando está en 1 (altura), se puede pensar que es un litro, 2 litros, 3 litros, 4 (lo dice a medida que mueve el deslizador), y hasta el máximo tope.
> 03: Investigador: ¿Qué otra magnitud se incrementa, pero relacionado con el recipiente?
> 04 Pedro: La altura del agua en el recipiente.
> 05 Investigador: ¿Cómo cambia la altura del agua del recipiente a medida que el agua ingresa?
> 06 Pedro: En este caso se incrementaría más el agua y se disminuye la altura del recipiente de la parte vacía. Si se llena un litro, quedarían 4 litros por llenar. Por ejemplo, ya tengo 4 litros [movió su deslizador a 4, agregado por el investigador] y la altura del recipiente vacío es uno. La altura en general es de 0 a 5, pero mientras más agua, menos altura del recipiente en vacío.

Se observan comportamientos de una acción mental 1 (AM1) al identificar las variables volumen de agua del recipiente y altura del agua en el recipiente, pero no reconocer una relación numérica entre ellas; del mismo modo, se identifica una acción mental 3 (AM3), cuando Pedro relaciona los aumentos en la altura del agua del recipiente, expresada en cantidad de litros, con la disminución de la altura de la parte vacía del recipiente.

El investigador le consultó al estudiante si se podía saber el volumen del líquido dentro del recipiente y si había una relación con la altura del agua en recipiente, observado en el eje Y, producto de ello se dio el siguiente diálogo.

> 07 Investigador: ¿Qué relación hay entre la altura del agua en el recipiente y el volumen?
> 08 Pedro: Cuando la altura del recipiente es 2, tengo 2 por 4 igual a 8, 8 litros cúbicos de agua. Si coloco una altura de 3, el volumen es 12, la máxima cantidad es 20.
> 09 Investigador: Entonces, ¿el volumen de agua que ingresa al recipiente, depende de la altura de agua del recipiente?
> 10 Pedro: Bueno, así lo puedo ver, pero, también se puede decir que cuando el volumen es 4, la altura es 1, si el volumen es 8, la altura es 2, si el volumen es 12, la altura es 3, es decir, la altura va con una razón de 1 y mi volumen va incrementándose en razón a cuatro hasta legar a 20. Yo creo que es una relación lineal.

Se observa en la respuesta de Pedro, que reconoce que ha medida que el volumen de agua se incrementa, la altura del agua en el recipiente crece también, esto es una característica de una AM3. Además, reconocer un patrón en los incrementos y asociarlo con una relación lineal (aunque todavía no lo había comprobado), nos permite inferir que Pedro se ubica en un tránsito hacia una acción mental 4 (AM4), en la cual, se construye un nuevo elemento, que brinde atributos de ambas variables de forma simultánea, la cual se puede expresar mediante la construcción de un punto.

Al percatarse de la linealidad en la relación entre ambas variables, Pedro solicitó al investigador si podía habilitarle la vista algebraica, dado que quería realizar un gráfico que relacione ambos valores al variar el deslizador. Esto lo llevó a abrir una vista gráfica 2 de GeoGebra, escribir en la barra de entrada: ($c2$, a), donde $c2$ es el área de la región de color azul (que representaría para el estudiante el volumen del agua dentro del recipiente), y a representa la altura del recipiente, movilizado con el deslizador, activar el rastro del punto y mostrar una gráfica compuesta por un número finito de puntos (figura 2).

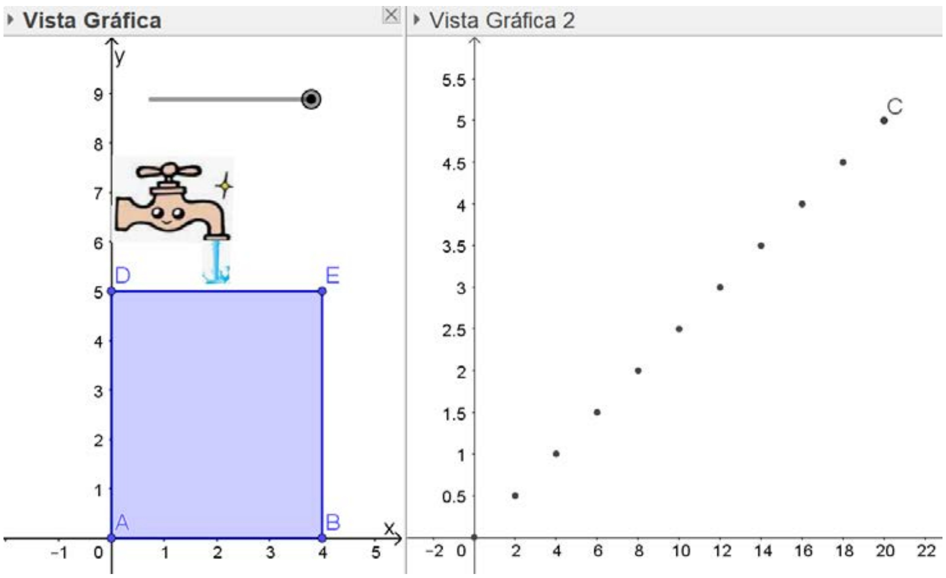


Figura 2. Representación gráfica de la relación entre el volumen y la altura del recipiente

La creación del punto C y su representación gráfica, es un comportamiento asociado con una AM4. Con la intención de reconocer acerca de lo que piensa el estudiante sobre la gráfica obtenida, se presentó el siguiente diálogo.

11 Investigador: ¿Qué representa la gráfica de puntos para ti?
12 Pedro: x es el volumen del recipiente, y y es la altura del recipiente. Por ejemplo, si x es 4, y es 1, es decir, si el volumen es igual a 4, la altura es igual a 1, y así con el resto de puntos.
13 Investigador: ¿Qué representan los espacios entre cada punto?
14 Pedro: Veo que el deslizador tiene incrementos de 0.5. Si lo cambio a 0.01 los puntos saldrán alineados y los huecos ya no existirán (figura 3).

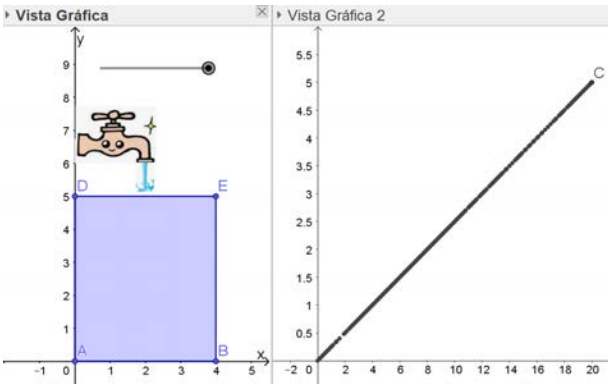


Figura 3. Cambio en el incremento del deslizador a 0.01

Esto se puede entender como extender la coordinación de los cambios en los valores del volumen de agua que ingresa al recipiente y la altura de agua del recipiente, para valores intermedios que puede tomar la altura del recipiente se mantiene, esto es, si aumentaba de 0,5 en 0,5 unidades, implicaba cambios en el volumen de agua de dos litros, ahora, con incrementos de 0,01 en 0,01, el volumen cambia a razón de 0,04 litros. Esto es una característica de una acción mental 5 (AM5).

Por último, Pedro se da cuenta que hay una relación funcional entre el volumen del agua que ingresa al recipiente y la altura de agua dentro del recipiente, que puede ser representada con una expresión matemática: $y = \frac{1}{4} x$.

Pedro indicó que es consciente que el volumen y la altura pueden tomar cualquier valor real, y que se puede determinar la ecuación de una recta que pasa por esos puntos, expresó lo siguiente luego de hacer algunos cálculos: *"La pendiente me sale 1/4, es decir, por cada 4 litros de volumen, la altura se incrementa en 1"*, y graficó la recta para corroborar que la relación entre ambas variables (figura 4), aparte de que los cambios entre ellas se dieron de forma simultánea al manipular el deslizador, al representar la gráfica continua, es una característica de una acción mental 6 (AM6), en la que un sujeto percibe que la covariación entre dos variables se da de forma continua y suave, considerando a todos los valores resales de ambas variables sujetas a sus respectivas restricciones.

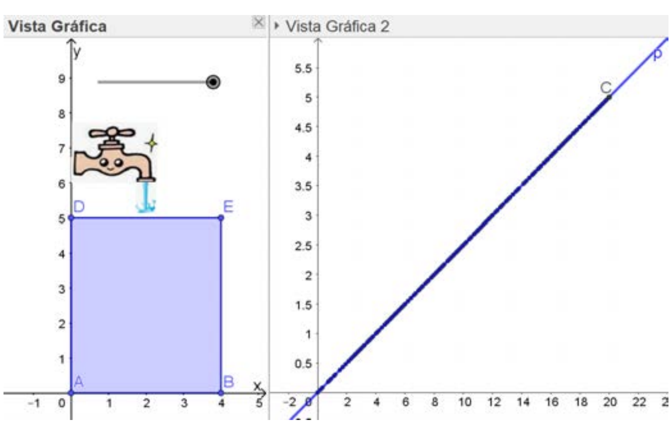


Figura 4. Relación funcional lineal entre el volumen de agua y la altura

Conclusiones

El uso de softwares de geometría dinámica, como lo es GeoGebra, permite a los estudiantes realizar manipulaciones sobre los conceptos que están aprendiendo, darse cuenta de los cambios simultáneos entre las diferentes variables involucradas al desarrollar una tarea, de realizar conjeturas y poder validarlas, tanto numérica, algebraica como gráficamente, y todas ella al mismo tiempo. Esto genera que el concepto enseñado pueda ser aprendido de una manera más completa. Se sugiere realizar modificaciones a las tareas, o al diseño del recipiente con el fin de analizar cómo el estudiante aborda esa nueva tarea, y si amplía sus conocimientos.

El estudio del razonamiento covariacional se vuelve relevante en el análisis de situaciones de cambio, ya sea que se trabaje con funciones, u otros temas de Cálculo como límites, derivadas e integrales. El razonamiento covariacional de los estudiantes puede estar involucrado en la comprensión de cómo se dan los cambios entre las variables, aspecto de mucha importancia, sobre todo en las definiciones de límites, derivadas e integrales. De modo que es factible identificar cómo un estudiante exterioriza sus acciones mentales con GeoGebra, lo que permite dar información de cómo un sujeto razona covariacionalmente a través de un software matemático.

Referencias y Bibliografía

Antonini, S., y Lisarelli, G. (2021). Designing Tasks for Introducing Functions and Graphs within Dynamic Interactive Environments, https://doi.org/10.3390/math9050572, Mathematics, 9, 572

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study, https://doi.org/10.2307/4149958, Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2011). *Sage Handbook of Qualitative Research*, ISBN: 1412974178, California, USA

Martínez-Miraval, M. y García-Rodríguez, M. (2022). Razonamiento Covariacional de Estudiantes Universitarios en un Acercamiento al Concepto de Integral Definida mediante Sumas de Riemann. *Formación Universitaria,* 15(4), 105-118. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Mateus-Nieves, E., y Moreno, E. (2021). Desarrollo del Pensamiento Variacional para la Enseñanza de Nociones Preliminares de Cálculo. Una Experiencia de Aula en la Educación Básica, https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716, *Acta Scientiae*, 3(2), 113-135

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*, MAA Notes (Vol. 73, pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Matemática, 23(3), 339–361. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p339-361

Razonamiento deductivo e interactividad digital

Marcela **Falsetti**
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mfalse@campus.ungs.edu.ar
Marisa **Álvarez**
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
malvarez@campus.ungs.edu.ar
Matías **Maidana**
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mmaidana@campus.ungs.edu.ar

Resumen

Presentamos aquí características de un dispositivo online multimedia diseñado para favorecer el desarrollo del razonamiento deductivo condicional desde una perspectiva semántica, con contenido matemático, para clases virtuales, presenciales o híbridas. El desarrollo se realizó en el marco de una investigación interpretativa sobre la enseñanza del razonamiento deductivo en la escuela secundaria y fue motivado por las condiciones de aislamiento social impuestas durante la pandemia COVID 19 en los años 2020 y 2021 en nuestro país. En este trabajo mostramos algunos avances sobre si una herramienta de esta naturaleza puede activar procesos de razonamiento deductivo.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación secundaria superior y preuniversitaria; Enseñanza virtual; Implementación curricular; Investigación exploratoria; Genially; Razonamiento deductivo; Buenos Aires; Argentina.

Introducción

En las clases de matemáticas, los razonamientos deductivos se ven favorecidos en los procesos de argumentación que se desarrollan en el intercambio con otros mediante el debate entre pares mediado por el docente (Arsac, Chapiron y Colonna, 1992), pero el aislamiento social de los años 2020 y 2021 en Argentina, obligó a docentes e investigadores en didáctica de la Matemática a pensar en cómo incorporar nuevos recursos, con nuevas maneras de interactuar. En el marco de una investigación sobre la enseñanza del razonamiento deductivo en clases de la escuela secundaria del conurbano bonaerense, la restricción mencionada obligó a pensar el diseño y desarrollo de una herramienta online multimedial para promover razonamientos y a preguntarnos si es posible activar procesos de razonamiento deductivo con este tipo de recurso.

Presentamos aquí características del dispositivo. Hacemos hincapié en las inferencias deductivas condicionales. El acercamiento a la estructura condicional que planteamos es mediante la contextualización con temas matemáticos y no mediante el enunciado de reglas a priori. Presentamos también el análisis de la producción de un estudiante a partir de una implementación piloto.

Marco teórico en relación con el razonamiento deductivo

Razonar deductivamente es un proceso mental que vincula información expresada en frases (premisas), referidas a conceptos, conectadas o afectadas por conectores lógico-lingüísticos (si…entonces, o, y, no), y da lugar a una conclusión que no introduce un concepto nuevo, sino una relación nueva entre los conceptos ya introducidos por las premisas, mediante predicados también introducidos en ellas. La importancia de este proceso radica en la organización de la información y en los indicios que la conclusión brinda para la acción, la decisión o la validación del conocimiento no experimental. Para precisar cómo se vincula la información y cómo se llega a la conclusión hay diferentes posturas; para algunos autores es en base a reglas lógicas formales (Ayalón y Even, 2007) y en cambio para otros es mediante modelos mentales de las interpretaciones ya sea del contenido de las premisas o de la forma en que se presentan esas premisas ligadas por sus conectores (Johnson-Laird, 2006). En la Teoría de Modelos Mentales (TMM) se sostiene que el individuo infiere deductivamente mediante modelos mentales.

Para la TMM la validez de un razonamiento deductivo consiste en asegurar que su conclusión vale en todas las posibilidades en que las premisas valen, y eso garantiza que la conclusión es verdadera cuando las premisas lo son y es inválido si hay un contraejemplo, es decir una posibilidad consistente con las premisas, pero no con la conclusión.

La Teoría de Modelos Mentales (TMM) sostiene algunos principios sobre el razonamiento (Johnson-Laird y Byrne, 1992)

- El individuo razona intentando eliminar información y sobre posibilidades que le resultan plausibles, es decir no razona sobre lo falso o imposible.
- Cuando un razonamiento incluye demasiada información o modelos de sus premisas en la memoria de trabajo, se dificulta obtener una conclusión o las conclusiones pueden presentar inconsistencias. Según Johnson-Laird “la memoria de trabajo [...] es donde mantenemos cosas en la mente mientras trabajamos con ellas” (2006, p. 65).
- La deducción es un proceso en estadios que son: interpretación y representación inicial de las premisas; combinación e integración de las interpretaciones en un modelo simplificado; formulación de una conclusión informativa; búsqueda de un modelo

alternativo (Johnson- Laird y Byrne, 1992). La veracidad de la conclusión inicial transitoria obtenida en el proceso anterior depende de encontrar, o no, modelos alternativos que la refuten, inspirados en las premisas y que hagan falsa la conclusión obtenida. En caso de que no haya modelo alternativo, el sujeto considera que su razonamiento es válido. En caso contrario, los sujetos retomarían algún estadio. Los modelos del condicional según la TMM son los de la Tabla 1:

Tabla 1
Modelos del condicional $p \rightarrow q$ según la TMM.

Modelo inicial	Modelo implícito	Modelo explícito
p q (o bien $p \wedge q$)	p q …	p q -p q -p -q

Fuente. Elaboración propia a partir del libro Deduction. Johnson-Laird,Ph, Byrne, R. (1992).

"p q" es el modelo inicial de una conjunción, valen p y q en forma simultánea. En el modelo implícito los puntos suspensivos "..." significan que el individuo sabe que no se concluyen las posibilidades con la conjunción p q aunque no explicita las posibilidades cuando la negación de p es verdadera. En el modelo explícito, cada línea es un modelo de conjunción que incluye casos en que p es falsa, o sea, su negación, -p es verdadera (Johnson-Laird et al., 1992).

En la cotidianidad, el razonamiento condicional se asimila, frecuentemente, al bicondicional o doble implicación: p si y sólo si q (O' Brien, 1973, Johnson-Laird et al. 1992), cuyo modelo es:

p q
-p -q

En relación con el uso de materiales tecnológicos y multimediales

Para el material hipermedial que diseñamos se han tenido en cuenta aportes de la Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedial (CTML, en inglés) (Mayer, 2005; Mayer, 2009) que sostiene que el hipermedia debe adecuarse a los procesos cognitivos, como el procesamiento esencial, por el cual se selecciona la nueva información representada en la memoria de trabajo, y el generativo, por el cual se organiza la información nueva, o los nuevos enfoques de tratamiento de una ya conocida, a un esquema mental anterior. La TCAM también nos orientó sobre qué tener en cuenta para la hipermedia y la interactividad. Para el primero: integrar imágenes, palabras, videos, distintos formatos de presentación y cumplir las condiciones de flexibilidad, adaptabilidad, estructura modular, orientación y ayuda para el uso de la herramienta. Para la interactividad: ofrecer al usuario la posibilidad de que responda y complete las actividades con el instrumento tecnológico y reciba orientaciones, ayudas y explicaciones sobre cómo realizar las tareas matemáticas propuestas.

El dispositivo y su diseño

El dispositivo se desarrolló en torno a un tema de las clases de matemáticas del cuarto y quinto año: función cuadrática. Si bien el desarrollo temático es autocontenido, para su mejor aprovechamiento supone cierto conocimiento básico de la función: su gráfico, su expresión polinómica, cómo calcular elementos constitutivos como las raíces, vértice, eje de simetría. El material se divide en tres bloques o módulos y se desarrolló con Genially que es un software en línea, de acceso libre y gratuito, para crear contenidos visuales e interactivos (https://es.wikipedia.org/wiki/Genially). En todos los bloques se incluyen una guía de navegación, un índice vinculado a páginas, videos explicativos de las cuestiones básicas mencionadas.

Mediante este recurso la enseñanza está orientada por actividades que se le proponen al usuario con hipervínculos que permiten retroalimentación. Del Genially hemos aprovechado, en todos los bloques, la posibilidad de: a) incorporar ventanas emergentes a requerimiento del usuario, b) incorporar etiquetas, c) incorporar juegos de decisión internos y externos al software, d) embeber formularios u otros tipo de documentos en los que el estudiante pueda responder online de manera más acabada, e) permitir dejar registro de la respuesta en la nube para que el profesor luego pueda acceder a ella, f) acceder a páginas del material de manera restringida para conducir al alumno a que realice la tarea antes de acceder a las respuestas. Podríamos decir entonces que se trata de un dispositivo de interactividad media, de tipo explorativa (Aceituno, 2022).

El Bloque 1 es introductorio, pone al estudiante en conocimiento de los significados de los símbolos, conceptos y procedimientos que se utilizarán en todos los bloques. Sus objetivos son: revisar temas y acordar vocabulario y escritura: simetría de la parábola: puntos simétricos - puntos que satisfacen la fórmula y su correlato gráfico - relacionar gráfico fórmula.

El Bloque 2 tiene por objetivos: extraer información de las premisas dadas en diferentes registros; familiarizarse con expresiones discursivas condicionales; estudiar validez de afirmaciones; construir contraejemplos. Se incorporan juegos de decisión.

En el Bloque 3 a los objetivos del Bloque 2 se le agrega particular hincapié en las inferencias condicionales básicas como el modus ponens, el modus tollens y sus falacias asociadas: afirmación del consecuente y negación del antecedente. Este bloque también incorpora gamificación.

Implementación y análisis de una producción

Reportamos una experiencia piloto que se realizó bajo la supervisión de un profesor quien de modo presencial presentó el material y cómo utilizarlo en un curso de quinto año de escuela pública del conurbano. Los estudiantes trabajaron por su cuenta con cada bloque en el aula. A continuación, analizamos las consignas de una de las tareas del bloque 2 (Fig 1), en diálogo con la producción de un estudiante del ciclo superior de la escuela secundaria.

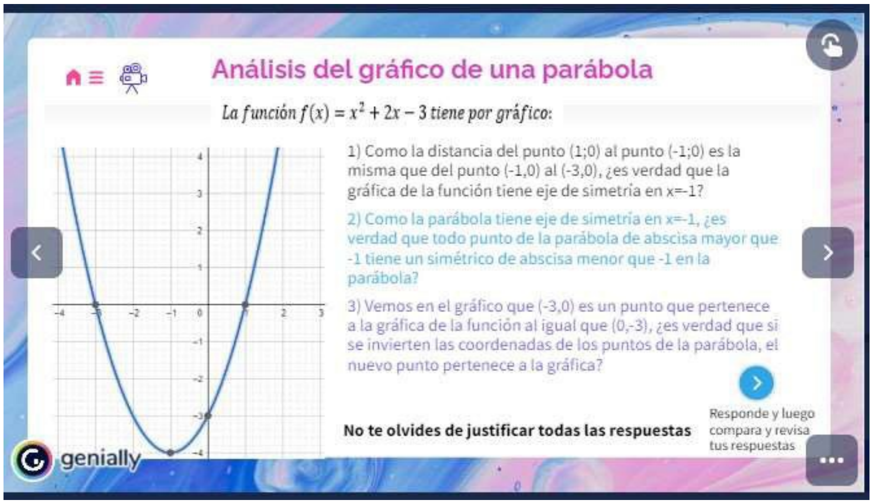


Figura 1. Bloque 2. La parábola se agranda clickeando sobre el gráfico. Se invita a registrar las respuestas para obtener un código y desbloquear la página de respuestas.

La pregunta 1) (Fig. 1) apunta a confirmar que x=-1 es el eje de simetría de la parábola y a recordar que la abscisa x=-1 es promedio, en este caso, de las dos raíces. El esquema condicional de su formulación es: “Si la función cuadrática f es la dada gráficamente, en el que (-3,0) y (1,0) son puntos del gráfico simétricos a (-1,0), entonces x=-1 es el eje”. El estudiante realiza un gráfico a mano alzada muy impreciso en el que el eje no “luce” en x=-1, por lo que su respuesta no se basa en los atributos de simetría de su dibujo, sino en la observación de que los puntos (-3,0) y (1,0) son confirmados de la gráfica y en lo trabajado numéricamente sobre puntos simétricos de una parábola en el bloque anterior (Fig. 2). Este tipo de consigna obliga al estudiante a “correrse” de la fórmula xv = -b/2a y a aprovechar la condición analítica de la simetría de una parábola.

La pregunta 2) (Fig. 1), tiene el esquema: “Si x=-1 es la ecuación del eje de simetría de la función del gráfico, entonces un punto de la gráfica en uno de los semiplanos determinados por el eje tiene su simétrico en el semiplano opuesto”. La información de que x=-1 es el eje es ahora el antecedente. Los semiplanos que la recta determina están presentados en términos de puntos de abscisa mayor o menor que x=-1 sin embargo el estudiante interpreta la simetría con un criterio espacial diciendo “a derecha” y “a izquierda” (Fig. 3).

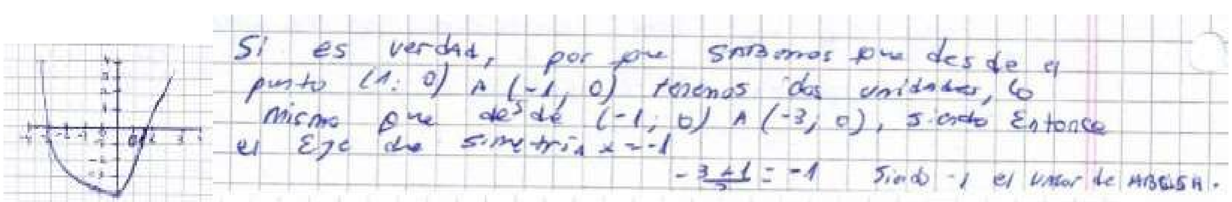


Figura 2. Respuesta a pregunta 1. Interpretación de la simetría de la parábola en términos numéricos.

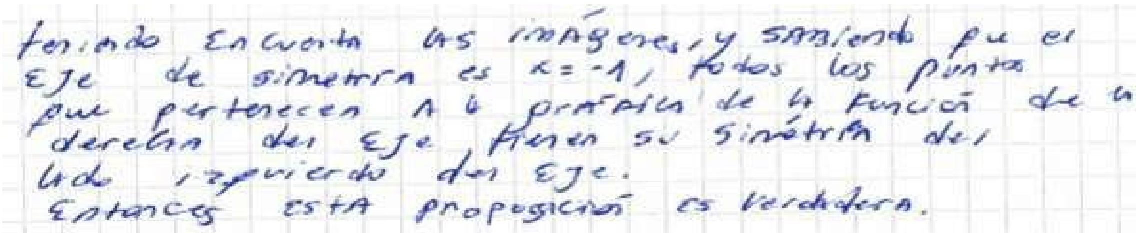

teniendo En cuenta las imagenes, y sabiendo que el
Eje de simetria es x=-1, todos los puntos
que pertenecen a la grafica de la funcion de la
derecha del Eje tienen su simetria del
lado izquierdo del Eje.
Entonces esta proposicion es verdadera.

Figura 3. Respuesta a pregunta 2. Interpretación de la simetría en términos espaciales.

La pregunta 3) (Fig. 1) apunta a descartar la relación de simetría entre puntos de una parábola con simetría de componentes del par ordenado; apunta también a poner atención a que la inducción no siempre lleva a una conclusión válida. El esquema del planteo es: “Si (-3,0) y (0,-3) son puntos de la parábola entonces (x,0) y (0, x) son puntos de la parábola, para todo x”. Para mostrar que el enunciado es falso, basta mostrar un par de puntos de la forma (x,0) y (0, x) y que no sean puntos de la parábola. Esta construcción consiste de dos partes, una consistente con encontrar el par de puntos (x,0) y (0, x) y la otra no consistente con que sean puntos de la parábola. Hemos observado que esta conjunción no es evidente para los estudiantes construirla, en el protocolo hay confusión al explicar en el primer párrafo (Fig. 4), pero se clarifica al final cuando expresa: “con encontrar al menos un punto”. El registro gráfico permite construir un contraejemplo mostrando concretamente cuáles puntos no pertenecen a la parábola.

Discusión final

El tipo de tareas propuestas en el dispositivo son enfocadas a la estructura y validez del razonamiento y a orientar al usuario a la construcción del modelo explícito del condicional desde el punto de vista semántico que da el contenido (Johnson-Laird et al., 1992).

Consideramos que un recurso de este tipo, aunque no reemplaza la riqueza del intercambio entre pares o del debate en la clase, tiene las ventajas señaladas por López (2010) y además se puede implementar con una población amplia y heterogénea, sirve para clases virtuales y presenciales, se consiguen variedad de producciones, combina fácilmente registros semióticos.

En la producción presentada del estudiante, advertimos que la fluidez en la transformación de registros mejora el acceso a pensar posibilidades de validez para el razonamiento y creatividad para elaborar contraejemplos.

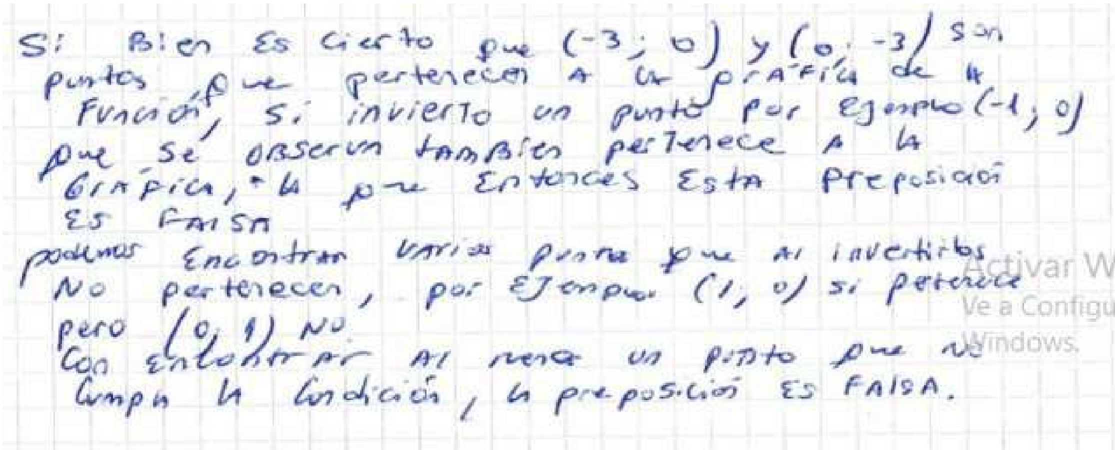


Figura 4. Respuesta a pregunta 3. Construcción de contraejemplo

Referencias

Aceituno, M.L. (28 de octubre 2022) Seminario de producción multimedia. http://libros.uvq.edu.ar/spm/525_niveles_de_interactividad.html

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y., Mante, M. (1992) Initiation au raisonnement déductif au collège. Presses universitaires de Lyon. IREM. https://books.google.com.ar/books?id=C5SR72GzzWgC&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Alain+Colonna%22&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Ayalon, M., Even, R. (2007) Mathematics learning and the development of general deductive reasoning. Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME). Larnaca, Cyprus.

Genially (28 de octubre 2022) Wikipedia. La enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Genially

Johnson-Laird, Ph (2006). How we reason. Oxford University Press.

Johnson-Laird,Ph, Byrne, R. (1992). Deduction. Lawrence Erlbaum Associates Ltd., Publishers.

López, E. C. (2010). Las TICs y la comprensión Matemática. En L. Vega Gil. (Ed.), El proceso de Bolonia y la Educación Comparada. Miradas Críticas (pp. 74-83). España: Ediciones Universidad de Salamanca.

Mayer, R. E. (2005). Cognitive Theory of Multimedia Learning. En The Cambridge Handbook of Multimedia Learning (pp. 31-48). Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (2009). Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press.

O'Brien, T. (1973) Logical thinking in college students. Educational Studies in Mathematics, 5, 71-79.

Recuperação Paralela usando Recursos Didáticos Digitais para superação das Aprendizagens Pós-pandemia

Rosana Soares **Pinheiro**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
pfrosana@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este trabalho apresenta um recorte de uma investigação desenvolvida com estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Canoas, R.S, Brasil, com dificuldades na temática Números e Operações. Apresenta-se como caminho para superação dessas dificuldades uma Recuperação Paralela usando recursos didáticos digitais. A recuperação paralela como um direito de todo estudante faz-se de extrema importante frente aos desafios trazidos pelo isolamento ocorrido pela epidemia da COVID-19 no Brasil. Um dos caminhos que serão apresentados dentro da Recuperação Paralela é o estudo das dificuldades referentes à temática Números e Operações usando Sequências Didáticas com tecnologias.

Palavras-chave: Recuperação Paralela; Números e Operações; Sequência Didática.

Introdução

O trabalho está vinculado à linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), que tem a intenção de investigar os resultados da implementação (desenvolvimento, aplicação e avaliação) de uma Recuperação Paralela usando Recursos Didáticos, em estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental (EF) de uma escola pública, com dificuldades de aprendizagem em relação à temática Números e Operações segundo a perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Salienta-se que a pesquisa está em fase de planejamento das sequências didáticas com o contato com a escola participantes.

O interesse pelo tema deu-se pelas reflexões e observações da pesquisadora, professora dos anos finais do EF, no retorno dos estudantes às aulas presenciais após o período de ensino remoto devido a Pandemia de 2020 e 2021. A pesquisadora, no decorrer do oferecimento das atividades remotas observou que a muitos estudantes tiveram pouco, ou nenhum acesso aos materiais oportunizados de forma física e, um número menor ainda, de estudantes participantes das aulas online, desenvolvidas durante os anos letivos referidos no período de Pandemia 2020 e 2021. No retorno presencial dos estudantes para a escola, a partir de mês junho de 2021, percebeu-se que os estudantes apresentavam dificuldades de aprendizagem nos conceitos relacionados a Números e Operações dos anos finais do EF, anos letivos que a pesquisadora leciona.

Percebe-se que estudantes que apresentam dificuldades de aprendizagem necessitam de um atendimento diferenciado, onde o professor possa oportunizar estratégias didáticas, utilizando recursos diferentes dos que usualmente são utilizados em sala de aula, buscando diminuir as dificuldades apresentadas. Desta forma surge o problema de investigação: Como desenvolver e implementar uma recuperação paralela onde possam-se oferecer caminhos e ritmos diferentes respeitando a individualidade dos estudantes participantes da pesquisa?

Objetivo Geral, Metodologia e Instrumentos da Pesquisa

A pesquisa tem como objetivo investigar a evolução das aprendizagens na implementação de uma proposta de Recuperação Paralela mediada pelas tecnologias digitais, envolvendo a temática de Números e Operações, na perspectiva da BNCC, com estudantes que apresentam dificuldades de aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal de Canoas, no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, no período pós-pandemia.

Considera-se que o enfoque qualitativo de um estudo de caso é o caminho metodológico mais adequado para o estudo em desenvolvimento. Segundo Silva e Menezes (2001):

> A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para a coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais da abordagem. (Silva; Menezes, 2001, p.20).

As ações de pesquisa são: 1. Entrevista com os professores de Matemática dos anos finais do turno diurno para identificação de possíveis dificuldades dos estudantes. 2. Coleta de dados e informações sobre quais são as dificuldades de estudantes do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade Canoas sobre a Temática Números e Operações. 3. Acompanhamento dos estudantes durante todo o processo de desenvolvimento do experimento através dos registros feitos pelos próprios estudantes. 4. Análise dos percursos pedagógicos realizados pelos estudantes. 5. Registro do desenvolvimento das atividades utilizando os Recursos Digitais dos estudantes através de fichas de avaliação, fotos e relatórios que representem a aplicação do experimento. 6. Elaboração de um diário de campo para registro de observações do processo de aprendizagem dos estudantes na aplicação das atividades de recuperação sobre a temática Números e Operações.

Reflexões sobre as Aprendizagens e a COVID-19

A pandemia da Covid-19, que apresentou seus primeiros sinais no ano de 2020, atingiu drasticamente a vida e a rotina de todas as pessoas. De um dia para o outro a circulação das pessoas foi restrita. Alguns segmentos fundamentais, como comércio e locais para atendimento à saúde, tiveram seus acessos regulamentados e a presencialidade só com extrema necessidade. Outros setores também tiveram suas atividades restritas ou suspensas, e consequentemente também as escolas se adaptaram as atividades remotas.

A pandemia da Covid-19 logo no início já demonstrou o seu grande potencial de contágio, contaminação e as inúmeras consequências pós-contágio. Desta forma, a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO), relatou que a crise de saúde causada pela Covid-19 resultou no fechamento de escolas e universidades, afetando mais de 90% de estudantes do mundo (UNESCO, 2020).

O Brasil observando as orientações da UNESCO, após o fechamento das unidades de ensino, recomendou a utilização de programas de ensino à distância, as plataformas digitais e a recursos educacionais, de forma que as escolas e os professores pudessem atingir os estudantes de forma remota, diminuindo o impacto nas aprendizagens (Groenwald, 2021). Silva et al (2021) ainda declarou:

> Com respeito à Educação, por exemplo, segundo a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), mais de 90% dos estudantes no mundo foram prejudicados pelo fechamento das escolas e universidades. Nesse cenário, várias instituições reformularam suas atividades para que pudessem ocorrer de modo remoto, tendo como objetivo "achatar a curva" de propagação do vírus.(Silva et al, p. 158, 2021).

Segundo Gomes (2020) com o contexto da pandemia configurou-se o processo de ensino e aprendizagem denominada Educação Remota, isto é, práticas pedagógicas mediadas por plataformas digitais, como aplicativos com os conteúdos, tarefas, notificações e/ou plataformas síncronas e assícronas como o *Teams (Microsoft), Google Class, Google Meet e Zoom*.

A suspensão das aulas presenciais ocasionou uma mudança radical na forma de ensinar e de aprender dentro das instituições escolares. O processo de ensino aprendizagem que se dava a partir das interações, das observações cotidianas, das comunicações feitas através de pequenos gestos e ações, e das relações afetivas estabelecidas entre estudantes e professores, passou a ser realizadas através de atividades remotas. Tais ações foram importantes para que houvesse o resguardo da saúde de toda a comunidade escolar durante o período pandêmico.

A pandemia da Covid-19 trouxe para as escolas o desafio de continuar desenvolvendo nos estudantes o raciocínio e as habilidades específicas de cada área de forma remota. Ao deparar-se com essa situação desafiadora percebeu-se um grande número de estudantes que não tiveram o acesso aos recursos tecnológicos para acompanhamento das atividades escolares. De acordo com os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, p. 86, 2021):

> Para a faixa etária de 15 a 17 anos, observa-se que, para estudantes frequentando a rede privada, havia praticamente universalização do acesso à Internet em casa (98,9%), sendo que 91,0% desses estudantes tinham computador ou notebook no domicílio em 2019.[...] Por sua vez, o elevado percentual de estudantes com idade entre 15 e 17 anos da rede pública com acesso à Internet em casa (85,3%) é contrabalanceado pelo relativamente baixo percentual com computador ou notebook em casa, 50,4%, fazendo com que a presença simultânea de Internet e computador ou notebook atinja menos da metade dos estudantes (48,6%) (IBGE, p. 86, 2021).

Verifica-se a partir dos dados expostos anteriormente que o período pandêmico foi de notável desafio às escolas, que mobilizaram todos seus esforços para que o ensino chegasse ao maior número de estudantes. As perdas em relação à aprendizagem apresentaram-se desde o início da organização não-presencial, onde nesse momento, percebeu-se a fragilidade ao acesso aos meios digitais, e estende-se até o momento atual, onde as escolas estão sofrendo os reflexos da falta de acesso das atividades remotas oferecidas anteriormente por parte dos estudantes. O retorno dos estudantes aos bancos escolares aconteceu de forma muita lenta, consequentemente os avanços cognitivos também estão a passos lentos.

A partir desses cenários percebe-se que é imprescindível repensar os processos de ensino e aprendizagem dentro da escola. Os estudantes necessitam de apoio e reforço escolar para que sanar as dificuldades advindas do período pandêmico.

Recuperação de Aprendizagens

Após o retorno dos estudantes á forma presencial nas escolas, depois do período da pandemia COVID-19, percebeu-se que o ritmo das aprendizagens estava mais lento devido a todo o contexto de falta de acesso as atividades disponibilizadas e as aulas online. Essas dificuldades revelaram as fragilidades do atendimento remoto dos estudantes. Os professores, na sua grande maioria, tiveram que reorganizar seus planejamentos e seus currículos, para atender as defasagens de aprendizagens apresentadas pelos estudantes.

Percebe-se que estudantes que apresentam dificuldades de aprendizagem necessitam de um atendimento diferenciado, onde o professor possa oportunizar estratégias didáticas, utilizando recursos diferentes dos que usualmente são utilizados em sala de aula, buscando diminuir as dificuldades apresentadas. A pesquisadora observou que esse atendimento diferenciado, fica prejudicado se oferecido na sala de aula com todos os estudantes, no mesmo espaço, onde há estudantes em ritmos diferenciados de aprendizagens. Entende-se que ao buscar desenvolver uma recuperação paralela coletiva, com todos os estudantes na sala de aula, não contribuirá para que os estudantes que necessitam deste atendimento possam avançar ou superar as dificuldades.

Observa-se que se faz necessário um ambiente propício, em horário extraclasse por exemplo, de maneira que o professor possa desenvolver um processo de ensino e aprendizagem que objetive diminuir as dificuldades específicas de cada estudante, de forma individualizada.

Desta forma, a reflexão que se coloca é que: “Se os estudantes tiverem oportunidade de estar em um ambiente diferente do coletivo da sala de aula revisando os conhecimentos que apresentam dificuldades, a recuperação das aprendizagens será mais significativa? Desta forma, estará sendo realizada e oportunizada uma Recuperação Paralela?”

Sequências Didáticas como um dos Recursos para Recuperação de Aprendizagens

De acordo com os estudos de Kaiber e Groenwald (2022, p.22) "é considerado recurso didático todo material utilizado como auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos que o professor tem por objetivo trabalhar com seus estudantes."

A BNCC (2018) aponta que os currículos devem apresentar caminhos e métodos para assegurar a aprendizagem dos estudantes. Salienta que os currículos necessitam tomar decisões que passam também pela utilização de recursos educacionais. Entre as ações uma delas seria:

> Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc. (Brasil, 2018, p.17).

A articulação dos recursos didáticos. além de serem elementos motivadores da sala aula, devem proporcionar subsídios para que os estudantes possam pensar sobre e com o conhecimento. A utilização desses recursos impulsionará na consolidação dos conhecimentos matemáticos. Desta forma, a pesquisa propõe a utilização de Sequências Didáticas como um dos caminhos a serem percorridos pelos estudantes para a realização da Recuperação Paralela envolvendo a temática de Números e Operações.

Apresenta-se, a seguir, um recorte de uma sequência didática envolvendo Números Decimais, que servirá como proposta para a recuperação das aprendizagens de Números e Operações. Observa-se que os recursos didáticos serão disponibilizados no *Classroon*. A sequência apresenta material de estudos, salvo vídeo (figura 1)*;* atividades em *JClic* que estão na figura 2 e jogos *Online* que estão na figura 3.

Figura 1. Apresentação Exemplos/Situações do Dia a Dia sobre a temática Números Decimais

Figura 2. Atividades no aplicativo JClic com a temática Números Decimais

Figura 3. Atividades *Online*
Fonte. Arquivos da autora.

Considerações Finais

A sala de aula é um espaço de múltiplas aprendizagens e para que esse processo ocorra de forma positiva o uso de materiais e recursos didáticos são propostas muito colaborativas. Os recursos devem contribuir para que os estudantes possam aprender da melhor forma, outros que lhes possibilitem avançar nos conhecimentos já adquiridos e ainda serem utilizados como instrumentos para recuperação de defasagens.

Entende-se que a implementação de uma Recuperação Paralela, utilizando recursos didáticos integrados as tecnologias, contribuirá para que estudantes de uma escola pública possam vivenciar um momento de avanços de seus conhecimentos, aumento do interesse pelos estudos, valorizando a autoestima e estimulando a autonomia dos estudantes.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília.

Groenwald**,** C. L. O**. (**2021). *Educação Matemática em tempos de pandemia: uma experiência em um curso de Licenciatura em Matemática*. Cuadernos de Investigación y Formación en E. M. Costa Rica, A 16, Nº 20.

IBGE (2021) *Síntese de indicadores sociais: uma análise das condições de vida da população brasileira: 2021*. Coordenação de População e Indicadores Sociais. Rio de Janeiro: IBGE,.

Kaiber, C. T; Groenwald, C. L. O. (2022). *Pesquisa e prática nos anos finais do ensino fundamental: um olhar a partir dos trabalhos apresentados no XIII ENEM no eixo Recursos Didáticos*. In: Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Maria Lucia Panossian. Brasília, DF: SBEM Nacional,.

Silva, E. L. da; Menezes, E. M. (2001). *Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação*. Florianópolis: Laboratório de Ensino à Distância da UFSC.

Silva, F.C. et al. (2021). *Educação matemática e pandemia. Revista Ensino da Matemática em Debate.* Revista PUC- São Paulo, v2.

UNESCO. (2020). *A Comissão Futuros da Educação da UNESCO apela ao planejamento antecipado contra o aumento das desigualdades após a COVID-19.* Paris: UNESCO, 16 abr.

Recursos Didáticos no GeoGebra para o Ensino de Cálculo

Jonata Souza dos **Santos**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
jonatasantos1995@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este artigo apresenta um recorte do mestrado sobre as potencialidades de uma Sequência Didática Digital (SDD) com diferentes recursos tecnológicos, dentre eles recursos disponíveis na biblioteca do GeoGebra que podem auxiliar no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo é investigar a potencialidades dos recursos didáticos disponíveis na biblioteca do GeoGebra para auxiliar os estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A metodologia aplicada é qualitativa, com o desenvolvimento de um experimento com a participação de 7 estudantes do Ensino Superior ao desenvolverem estudos de Cálculo com os objetos de aprendizagem. As SDD foram desenvolvidas em *sites* e disponibilizadas no Sistema Siena e as atividades eram compostas por material em PDF, vídeos explicativos, vídeos complementares do YouTube e objetos educacionais disponíveis no GeoGebra. Os participantes desta investigação consideraram que os materiais e recursos disponibilizados na SDD auxiliaram na visualização e compressão dos conceitos associados ao estudo de Cálculo.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; GeoGebra; Recursos Digitais; Ensino de Cálculo; Ensino Superior; Sequência Didática.

Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem um elevado índice de reprovação e na temática Derivadas, historicamente, os alunos demonstram dificuldades de compreensão e de aplicação em situações problemas. A necessidade de investigar estratégias de ensino e aprendizagem para o estudo da temática Derivada é o foco principal desta pesquisa, em que o aluno deve revisitar os conceitos e ampliar seu conhecimento de forma que consiga aplicá-los na resolução de problemas, não priorizando a memorização de fórmulas e algoritmos para resolução de atividades.

Com a utilização das Tecnologias Digitais, pretendeu-se proporcionar aos envolvidos nesta pesquisa a possibilidade de estudar conforme sua rotina diária, permitindo que os estudantes participem da pesquisa em seus horários livres e dentro do seu ritmo de aprendizagem. O uso das Tecnologias Digitais pode ser um recurso para a construção de conceitos matemáticos, visto que os recursos tecnológicos como *softwares* pedagógicos estão cada vez mais acessíveis nos ambientes de ensino e aprendizagem, assim, colaborando com o docente em seu planejamento didático com o uso das tecnologias (Cyrino & Baldino, 2012; Homa & Groenwald, 2016).

Assim, as SDD desenvolvidas nesta investigação utilizam recursos digitais, como: Material em *Power-Point* com vídeos explicativos para que o aluno possa ter o mesmo material em um formato escrito e em um formato de vídeo, podendo escolher a maneira que preferir para estudar, indicação de vídeos complementares de estudos, desenvolvimento de objetos de aprendizagem no *software* GeoGebra (nos conceitos Sistema de Equações, Matrizes, Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial e Função Logarítmica).

A pergunta de pesquisa foi: Como desenvolver uma Sequência Didática Digital, com a temática Derivadas, visando identificar as dificuldades e ampliar a compreensão dos conceitos e a aplicação dos mesmos em situações problemas para estudantes que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da área de Ciências Exatas?

Para este recorte do trabalho, o objetivo é investigar as potencialidades dos recursos disponíveis no *software* GeoGebra para o desenvolvimento de conceitos associados a temática Derivadas e verificar como a utilização deste *software* auxiliou os estudantes em suas dúvidas ao longo do estudo da SDD.

O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e a utilização das Tecnologias Digitais

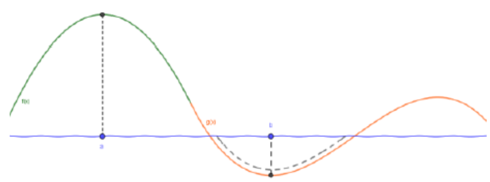
De acordo com Trevisan e Mendes (2018), Baldino e Fracalossi (2012), muitos conceitos do Cálculo são trabalhados em sala de aula de maneira tradicional, pautados em um formalismo imposto pela apresentação dos conteúdos, abordando o método explicação-exercício, por meio de definições, teoremas, demonstrações e propriedades, e, em seguida, o estudante deve resolver uma lista de exercícios. Assim, o ensino ocorre de forma fragmentada e dissociada da realidade, e o estudante não consegue aplicar os conceitos na resolução de situações problemas a partir dos conceitos desenvolvidos.

Reis (2009), Cabral e Baldino (2004) defendem, sem fazer uma crítica referente ao ensino tradicional de Cálculo, uma prática pedagógica pautada na abordagem de Cálculo sob uma perspectiva de aplicação referenciada na interpretação intuitiva das noções do conteúdo que está sendo trabalhado. Os autores abordam que quando se trabalha o objeto matemático Derivada, normalmente, após se trabalhar o conteúdo de limites, o conceito é apresentado a partir do

Cálculo de um limite e, a seguir, desenvolvem-se as regras de derivação, sem que haja um desenvolvimento contextualizado da aplicação da derivada das funções nas áreas dos futuros profissionais estudantes do Ensino Superior. Isso faz com em que os alunos, em geral, consigam calcular derivadas, contudo não faz com que produzam significados corretos do conceito e assim, não consigam estabelecerem relações com situações-problema.

Ribeiro e Paulin (2020) em consonância com Bressoud (2011) abordam que se torna indispensável ensinar os conceitos relacionados a temática Derivadas, de forma aplicada para que haja uma compreensão por parte do aluno da aplicação matemática da disciplina de Cálculo em sua área de formação, ou seja, o professor deve levar em consideração qual é a experiência e quais os conhecimentos que ficaram para os estudantes após cursarem tal disciplina e, com neste sentido o *software* GeoGebra possibilita diferentes tipos de simulações para que se faça uma conexão entre por exemplo o gráfico de uma função e o sentido da derivada desta função, conforme apresenta Homa (2019) na Figura 1.

A montanha russa projetada tem uma parte que é submersa em uma piscina artificial. Considerando o trajeto apresentado, sabe-se que o ponto mais baixo e mais alto tem as seguintes características.



Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	N° de Respostas
a)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) > 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) < 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	11
b)	$\begin{cases} f'(a) < 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) > 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	1
c)	$\begin{cases} \boldsymbol{f'(a) = 0; f''(a) < 0} \\ \boldsymbol{g'(b) = 0; g''(b) > 0} \end{cases}$	**Característica de ponto crítico**	**4**
d)	$\begin{cases} f'(a) > 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) < 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	7
e)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	1
f)	Não sei as características em a e b	Característica de ponto crítico	9
g)	Não sei o significado de $f''(x)$	Interpretação de derivada segunda	1

Figura 1. Questão relacionando a temática Derivadas e a projeção de um gráfico. Homa (2019).

Ao estudar o Cálculo Diferencial e Integral, o professor deve objetivar que seu estudante pense de forma organizada e com mobilidade e, aprender utilizar as ideias desse ramo de conhecimento para resolução de problemas em situações interdisciplinares e contextualizadas (Cantoral, 2013). Ao se trabalhar a temática Derivadas devem ser trabalhadas as aplicações de forma organizada e contextualizada para que o aluno compreenda a aplicabilidade do que está aprendendo. Assim sendo, não se busca apenas formar a estrutura de um conceito da Derivada, mas se deve estudar o fenômeno, modelar, medir, aproximar e calcular situações de variações para gerar a necessidade de uma ferramenta que explique e resolva as situações apresentadas (Cantoral, 2013).

Posto isto, a utilização das Tecnologias Digitais torna-se importante no processo do ensino e aprendizagem da temática derivadas, pois conforme Kripka et al. (2017) o uso de tecnologias digitais com estudantes, além de motivar e despertar o interesse deles, também permite explorar diversas formas de registro de representação, possibilitando, assim, a investigação de ideias e de objetos de matemática por meio da exploração e da experimentação, atividades que favorecem a interpretação dos problemas e a compreensão dos conceitos.

Na perspectiva de possibilitar aos estudantes um formato de estudo de acordo com o seu dia a dia, esta pesquisa utiliza o sistema SIENA como Ambiente Virtual de Aprendizagem com Testes Adaptativos e a Sequência Didática Digital. Kalinke (2014) aborda Ambiente Virtual de Aprendizagem como sendo novos espaços destinados à aprendizagem e nos quais ela pode ser favorecida. São espaços com características próprias e que permitem novas formas e encaminhamentos ao processo de ensino e aprendizagem.

Groenwald, Zoch e Homa (2009) trouxeram que, quando se pensa, a sociedade "atual" é altamente complexa, pois requer novas formas de pensar, sendo necessário desenvolver competências no indivíduo para lidar com as Tecnologias Digitais e a crescente informatização em todas as áreas do conhecimento e das relações humanas.

Percurso Metodológico

Esta investigação possui um enfoque qualitativo, pois permite a adoção de posturas e métodos, entre eles o uso de observações, entrevistas, questionários, e análises de documentos (Flick, 2008). A pesquisa qualitativa vem com um conjunto de diferentes categorias e títulos descritivos, os quais tendem a serem usados de forma intercambiável em diferentes pesquisas (Gray, 2012). Esta foi desenvolvida para ser de caráter qualitativo, que de acordo com Bicudo (2012) é "um modo de proceder que permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente".

O predomínio dos processos indutivos, dos dados descritivos, a ênfase ao processo em detrimento do produto, a necessidade de questões geradoras e regras bem definidas de ação para a análise dos dados coletados, critérios de avaliação públicos, discutidos e acordados pela comunidade, e a responsabilidade do pesquisador em relação à sua pesquisa – não deslocando tal responsabilidade para uma pretensa certeza do método –, são elementos reguladores centrais em uma pesquisa qualitativa (Garnica, 2001). Na pesquisa qualitativa, o papel do pesquisador é de atuar uma postura de sensibilidade teórica, o que significa ter visão, demonstrando a capacidade de entender e diferenciar o que é importante do que não é (Strauss & Corbin, 1990).

Esta pesquisa foi um desdobramento da pesquisa realizada por Silva (2019), no sistema SIENA, no qual foi desenvolvido o grafo, os bancos de questões dos Testes Adaptativos com a temática Derivadas e validado com um experimento com estudantes da disciplina de Cálculo I, no conteúdo de Derivadas, do Curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Luterano de Palmas, do estado de Tocantins (CEULP/ULBRA). Foi implementado (desenvolvido, aplicado e avaliado) uma SDD no sistema SIENA, com 7 estudantes que já tinham cursado a disciplina de Cálculo Diferencial a Integral I e que apresentavam dificuldades de compreensão dos conceitos, mostrando-se interessados em revisitarem tal temática. Importante salientar que a pesquisa foi desenvolvida no período de Pandemia do COVID-19, por isso apresenta-se a análise de apenas 7 estudantes.

A utilização do GeoGebra e a resolução das atividades

Como na pesquisa de Silva (2019), os alunos apresentam dificuldades na interpretação dos problemas, o que leva a dificuldades na sua resolução. Para isto, ao longo da SDD foram traçadas estratégias com o viés de manipulação algébrica e geométrica que auxiliassem na compreensão do problema. Na Figura 2 serão apresentados materiais disponíveis na biblioteca do *software* GeoGebra e que auxiliam na visualização e análise de situações.

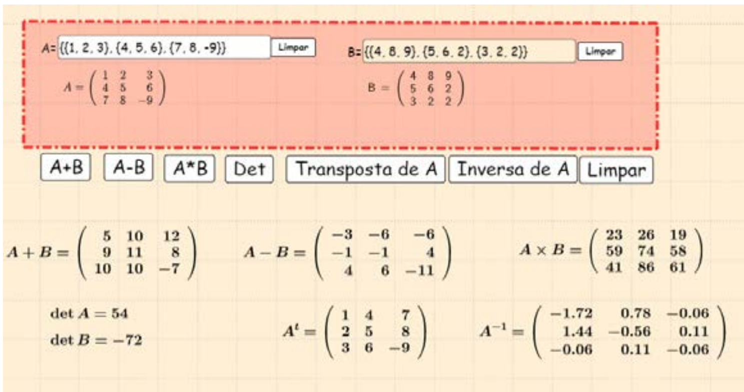
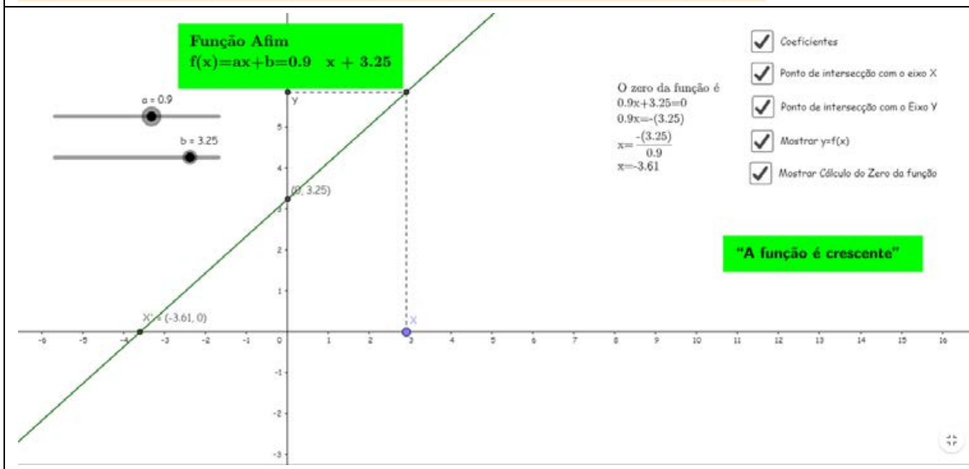
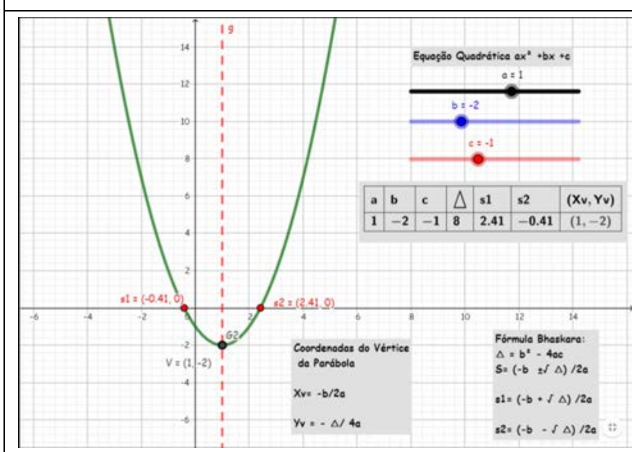
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nesta figura, apresenta-se um material disponível no GeoGebra para o estudo de operações com matrizes (adição, subtração e multiplicação), matriz transposta, inversa e o determinante de uma matriz.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nesta figura tem-se um material disponível no GeoGebra no qual os estudantes podem manipular os coeficientes da função e, assim estudar o ponto de intersecção com o eixo x, com o ponto y, o zero da função e analisar se a função é crescente, decrescente ou constante.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Nesta figura o estudante tem a possibilidade de estudar a variação dos coeficientes da Função Quadrática, o delta, as raízes, o vértice e o intervalo em que a função é crescente/decrescente, além de ponto máximo ou mínimo.</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Exemplos de atividades disponíveis no GeoGebra para auxiliar na compreensão das atividades. Santos (2021).

Recursos como estes possibilitam aos alunos interpretarem e analisarem situações problemas tais como a que será apresentada na Figura 3.

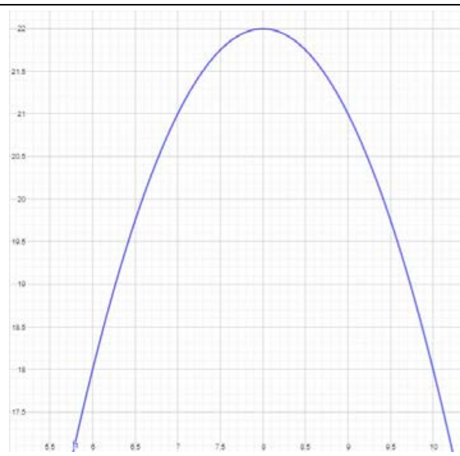
Uma empresa possui seu lucro descrito pela seguinte função $L(x) = -x^2 + 16x - 42$. Quantas peças devem ser vendidas por dia para que o lucro seja máximo? E qual é esse lucro máximo? a) 6 e lucro máximo de 18 b) 5 e lucro máximo de 13 c) 8 e lucro máximo de 22 XXX d) 16 e lucro máximo de 470 e) 10 e lucro máximo de 18	Questão disponível no sistema Siena e que está nos Testes Adaptativos respondidos pelos estudantes.
	Exemplo de gráfico que poderia ser construído a partir da função apresentada e do matéria disponibilizado para estudo com o *software* GeoGebra.

Figura 3. Exemplo de questão e atividade que pode ser resolvida no GeoGebra. Os autores.

A partir de recursos como estes, e de questões que envolvam a compreensão do problema, o material disponível no GeoGebra pode auxiliar na compreensão do problema e na resolução do mesmo de uma maneira com que o aluno consiga significar o que o problema esta trabalhando.

Considerações Finais

Apresentou-se a utilização das Tecnologias em um Ambiente Virtual de Aprendizagem, seguindo as ideias de Groenwald, Zoch e Homa (2009), objetivando potencializar a compreensão dos conceitos matemáticos, a partir de uma Sequência Didática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem e considera-se que o material desenvolvido potencializou a compreensão dos conceitos referente ao cálculo Diferencial e Integral.

Para o desenvolvimento do material didático utilizado nas Sequências Didáticas Digitais, considerou-se os aspectos, citados por Reis (2009) e Cabral e Baldino (2006), relativos à contextualização da compreensão e do conhecimento matemático para aplicação dentro da área de atuação dos estudantes. Também corroborando com Cantoral (2013), considerando as principais configurações destacadas pelos autores em relação as dificuldades dos alunos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I. Além do reconhecimento das dúvidas que são, costumeiramente, apresentadas pelos estudantes das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I.

Em relação aos objetos de aprendizagem disponíveis na biblioteca do *software* GeoGebra, os estudantes utilizaram de forma complementar ao seu estudo e pelos resultados obtidos entende-se que auxiliou na ampliação da compreensão das situações problemas, da visualização, levando ao desenvolvimento correto atividades propostas.

Referências e bibliografia

Baldino, R. R. y Fracalossi, A.S. (2012). A História da Derivada de Mariana: uma experiência didática.*Bolema, Rio Claro*, *26*, 393-407. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200001

Bicudo, M. A. V. (2012). pesquisa em Educação Matemática: a introduzindo o tema.. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, *5*, 15-26.

Bressoud (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *The American Mathematical Monthly*, *118*, 99-115.

Cabral, T. C. B. y Baldino, R.R. (2004). O ensino de matemática em um curso de engenharia em sistemas digitais. En H. N. Cury (Eds.), *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos e propostas* (pp. 139–186). Edipucrs.

Cantoral, R. R. (2013). Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento. 3ed. Barcelona, Espanha: Editorial Gedisa.

Cyrino, M. C. C. T. y Baldino, L. A. F. (2012). O software GeoGebra na formação de professores de matemática- uma visão a partir de dissertações e teses. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *1*, 42-61.

Flick, U. (2008). Uma introdução à pesquisa qualitativa. 3 ed. Porto Alegre: Bookman.

Garnica, A. V. M. (2001). Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. Mimesis, *22*, 35-48.

Gray, D. (2012). Pesquisa no mundo real. Porto Alegre: Penso.

Groenwald, C. L. O., Zoch, L., y Homa A. I. R. (2009). Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. Bolema, *22*, 27-56.

Homa, A. I. R. (2019) Avaliação diagnóstica auxiliada por computador: identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de engenharia na resolução de problemas com Derivadas. 214 p.

Homa, A. I. R. y Groenwald, C. L. O. (2016). Incluindo tecnologias no currículo de Matemática: planejando aulas com o recurso dos tablets. *Revista IberoAmericana de Educación Matemática*, *48*, 22-40.

Kalinke, M. A. (2014). Tecnologias no ensino: a linguagem matemática na web. Curitiba: CRV.

Kripka, R.M. L., Kripka, M., Pandolfo, P. C. N., Pereira, L. H. F., Viali, L., y Lahm, R. A. (2017). Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas .*Revista Acta Scientiae*, *19*, 544-562.

Reis, F. S. (2009). Intuição no Ensino de Cálculo e Análise. En L. Nasser, y M.C. Rezende-Frota (Eds.), *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates* (pp. 85–104).

Ribeiro, A y Paulin, J. (2020). A teaching experience through the use of tasks: limits and possibilities for learning mathematics in a university context, *Revista Acta Scientiae*, *22*, 67-85. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5411

Santos, J. S. (2021). Sequência Didática Digital com a temática Derivadas – um experimento no Ensino Superior. 2021. 255.

Silva, P. L. G. (2019). Testes Adaptativos envolvendo o conteúdo de Derivadas: um estudo de caso com alunos de Engenharia Civil. 2019. 211 p.

Strauss, A., Corbin, J. (1990). Basics of qualitative research. Thousand Lage Daks: Lage Publications, 1990.

Trevisan, A. L. y Mendes, M.T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *11*, 209-227.

Registros semióticos con el Genially

Marcela Falsetti
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mfalse@campus.ungs.edu.ar
Marisa Álvarez
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
malvarez@campus.ungs.edu.ar
Matías Maidana
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mmaidana@campus.ungs.edu.ar
Miguel Alejandro Rodríguez
Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
marodriguez@campus.ungs.edu.ar

Resumen

En Matemática se accede a los objetos matemáticos solamente por medio de sus representaciones semióticas (Duval, 1998). Es por esto que el tratamiento, la conversión y la coordinación de más de un registro de representación semiótica resulta fundamental para la comprensión del objeto matemático. En muchas ocasiones, resulta complejo para los docentes diseñar consignas que brinden al estudiante la posibilidad de desarrollar este tipo de trabajo cognitivo. Por esta razón en este taller nos proponemos: a) reflexionar sobre la riqueza del trabajo con los distintos registros de representación semiótica en la construcción del objeto matemático, b) brindar herramientas para la construcción de materiales por medio de un soporte tecnológico (Genially) que propicien la transformación y coordinación entre registros de representación semiótica.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación preuniversitaria; Enseñanza virtual; Implementación curricular; Herramientas tecnológicas; Matemáticas; Buenos Aires; Argentina.

Marco teorico

Para este taller nos basamos principalmente en los aportes de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1998), quien establece en sus investigaciones que los objetos matemáticos sólo son accesibles mediante sus respectivos registros de representación. Las actividades cognitivas que intervienen en los cambios de los registros son fundamentales para el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Soto, 2019), donde el objeto matemático cobra mayor significancia en las formas de poder visualizarlo.

> Las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias [...] la actividad cognitiva del pensamiento está ligada a la representación utilizada (Duval, 1998, p.1)

La coordinación entre diferentes registros de representación resulta fundamental para que el objeto matemático no sea confundido con su representación y sea identificado con cada una de ellas. Duval plantea que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas: a) la formación de una representación identificable, b) el tratamiento, que es la transformación dentro del mismo registro de representación y c) la conversión, entendiéndose como el pasaje de un registro a otro por medio de una transformación (1998).

En la construcción de una actividad significativa, el rol del docente es clave como mediador y guía hacia prácticas del estudiante que habiliten y profundicen el trabajo con los registros (Varettoni y Elichiribehety, 2010). Es así que hemos seleccionado actividades sobre contenidos matemáticos vinculados a funciones, porque el concepto de función está contemplado en los currículos como tema central del quehacer matemático y porque permiten la transformación de registros. En relación a las funciones, Duval (2006) explicita que se aprende cuando se establecen redes de características visuales distintivas mediante la conversión entre lo gráfico y la expresión algebraica de la función.

Consideramos que las herramientas multimedia son apropiadas para abordar los aspectos de las transformaciones de registros antes mencionadas siempre que el uso de las mismas acompañe los procesos cognitivos tal como lo sostiene la Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia (Mayer, 2005), como el procesamiento esencial, por el cual se selecciona la nueva información representada en la memoria de trabajo, y el generativo, por el cual se organiza la información nueva, o los nuevos enfoques de tratamiento de una ya conocida, a un esquema mental anterior. Para Mayer, el aprendizaje multimedial es aquel en el que el sujeto realiza construcciones de representaciones mentales de carácter significativo ante una presentación multimedia. Una herramienta que facilita la incorporación de materiales multimedia, que nos parece adecuada, es el Genially, por eso proponemos utilizarla en este taller. Genially permite incorporar textos, audios y elementos pictóricos mediante imágenes, recursos de la web, animaciones y videos. Otros aspectos relevantes son la interactividad amigable e intuitiva, la integración de recursos de otras plataformas, y la posibilidad de acceder desde cualquier dispositivo con conexión a internet.

Propuesta del taller

Diseñar un material didáctico que favorezca la relación entre dos o más registros es una tarea desafiante para los profesores. Este taller está destinado a docentes de la escuela secundaria y del nivel superior y se propone reflexionar sobre la riqueza del trabajo con los distintos registros de representación semiótica (Duval, 1998) y elaborar con los asistentes consignas que propicien la transformación y coordinación entre los registros con la herramienta Genially y aprender recursos del software para armar un material didáctico.

Mostraremos y analizaremos, por medio de esta plataforma online, un ejemplo de una consigna que propicia la transformación y la coordinación de registros de representación semiótica:

Consigna

El comportamiento de la demanda para la venta de una determinada marca de chocolate es de manera lineal. Si el precio unitario es de \$300 se espera que la demanda sea de 300 unidades; si es de \$100 se espera una demanda de 900 unidades.

La función Costo total será resultante del costo fijo de \$60.000 más \$40 por cada chocolate.

a) ¿En qué condiciones se obtienen ganancias?
b) ¿Cómo obtendrías la ganancia máxima?
c) ¿Puedes dar su valor?

El taller se dividirá en tres momentos. En el primer momento se presenta brevemente la Teoría de Registros Semióticos y la consigna a trabajar. Entre todos, pensaremos las diversas respuestas que podrían tener los estudiantes al resolver la situación planteada. Se espera que surjan respuestas sobre la realización de gráficos, el planteamiento de ecuaciones y fórmulas o expresiones algebraicas que permitan entender mejor la situación. Ese análisis evidenciará los dos tipos de transformaciones de representaciones: la conversión y el tratamiento. La conversión del registro verbal al registro simbólico y al registro gráfico y el tratamiento en el registro simbólico. Se explicitará que estas transformaciones surgen por la necesidad de resolver el problema y no a pedido de la consigna. Se destacará la importancia de favorecer la coordinación entre los registros semióticos en las clases de matemática ya que resulta necesario para lograr la conceptualización del objeto de estudio. En un segundo momento se hará la presentación del software Genially para mostrar su potencialidad para la propuesta de enseñanza. Mostraremos, a modo de ejemplo (Figura 1), diapositivas Genially en las que se desarrolla el problema analizado, implementando multimedia, mediante la incorporación de texto, animación, gráficos y audios e implementando interactividad, mediante el acceso a páginas por medio de contraseñas, hipervínculos, internos y externos, cuestionarios embebidos de google o archivos de google drive, mensajes emergentes, inclusión de juegos desde otra plataforma, entre otras.

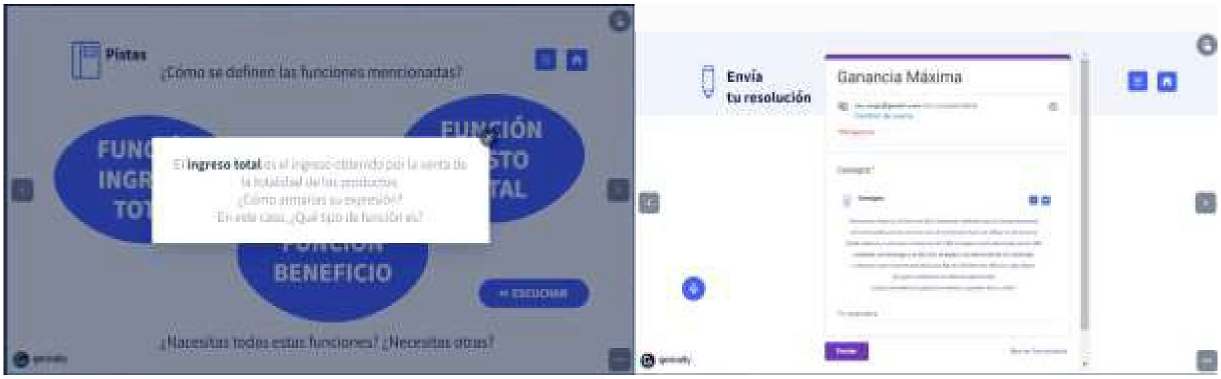


Figura 1. Imágenes del material multimedia en Genially

En otro momento, frente a una consigna propuesta por los talleristas, los asistentes tendrán que desarrollar un material didáctico con las herramientas del Genially y se los asistirá para que elaboren un material multimedial e interactivo a partir de la consigna.

El taller concluirá con un intercambio entre los participantes sobre la propuesta desarrollada, sus reflexiones y aportes. Se espera que las conclusiones abordadas permitan pensar sobre: a) la riqueza de incorporar más de un registro de representación en forma integrada, coordinada y dando a lugar, en forma intencional y sistemática, a las transformaciones correspondientes, b) analizar los alcances que cada registro ofrece, c) la potencialidad del software. También se reflexionará sobre el impacto en la metodología de la enseñanza de la matemática que provoca la incorporación de nuevos recursos, como los desarrollados con el Genially.

Por último, dejaremos un formulario a completar por los asistentes para continuar el contacto establecido, donde en un futuro, se puedan compartir las experiencias que pudieron llevar al aula con sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F.(Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201. *México. Cinvestav*.

Mayer, R. E. (2005). Cognitive theory of multimedia learning. *The Cambridge handbook of multimedia learning*, *41*, 31-48.

Soto, M., Herrera, C. G., & Pereyra, N. E. (2019). Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15(55).*

Varettoni, M., & Elichiribehety, I. (2010). Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 5(2), 44-51.

Resolución de problema que involucran Cónicas mediado por el GeoGebra

Maritza **Luna** Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
luna.m@pucp.edu.pe
Elton John **Barrantes** Requejo
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
ejbarran@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo aborda la aplicación de actividades en torno a la enseñanza de cónicas, realizadas de manera síncrona con estudiantes del primer semestre de una universidad peruana. El objetivo es presentar los avances del análisis de las respuestas obtenidas por los alumnos, donde se motivó el uso de la tecnología para la visualización, de manera dinámica, de la representación geométrica de la solución de problemas que involucran familias de cónicas. Para la metodología del análisis de dichas respuestas se utiliza herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Los resultados alcanzados nos permiten promover una reflexión didáctica sobre el estudio de las cónicas y la incorporación de la tecnología como apoyo de la representación.

Palabras clave: Resolución de problemas; Cónicas; GeoGebra; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Enseñanza virtual.

Introducción

Actualmente experimentamos un cambio de metodologías de la enseñanza, debido a la virtualización de los servicios educativos, por motivos de la coyuntura nacional e internacional a causa de la pandemia de Covid-19, según Ray y Srivastava (2020). En el caso particular del curso de Geometría Analítica y Algebra Matricial (AMGA), del área de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), se viene dictando de manera sincrónica, mediante la plataforma Moodle-Paideia proporcionada por la universidad. En este trabajo presentamos una experiencia didáctica sobre resolución de problemas de cónicas, donde se debe tener en cuenta la identificación de las ecuaciones y gráficas de las diversas cónicas, como la elipse, hipérbola, parábola o circunferencia. El objetivo es presentar los avances del análisis a las soluciones de los problemas presentados por los estudiantes, para lo cual se apoyaron de la tecnología que sirvió como ayuda para la visualización y representación geométrica de dichas soluciones. Para lograr el objetivo se plantean algunos problemas de cónicas en contextos vinculados a ecuaciones. El análisis de las soluciones presentadas por los alumnos se realiza a la luz de algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuyos resultados obtenidos nos permiten identificar y explicitar dificultades que los estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería presentan al describir la expresión matemática de las cónicas. Para así promover una reflexión didáctica sobre la resolución de problemas que involucran cónicas, en profesores de matemática de educación secundaria o superior en ejercicio, o en formación inicial.

El estudio de las cónicas es abordado desde la educación media, donde se percibe de alguna manera las dificultades en su aprendizaje, como sostienen Fernandes (2021), Lopes (2014), entre otros investigadores. Sin embargo, en el nivel universitario las dificultades del estudio de cónicas se atenúan, por ejemplo el estudio de la elipse como indica Leon (2014), se logra en parte mejorar con los procesos de instrumentalización de la elipse y sus propiedades que son abordadas mediante secuencias de actividades y aplicadas a un grupo de estudiantes de arquitectura, mientras que en la formación de profesores, ante esta dificultad o imprecisión, Benito (2019) propone un recorrido de estudio e investigación con base en la TAD para cónicas partiendo de un problema real, logrando resultados positivos en ese grupo de estudiantes. Además, las investigaciones de Benito (2019) y Fernandes (2021) presentan un estudio epistemológico y una revisión bibliográfica del objeto matemático cónicas, lo que permitió explicitar los modelos en que presenta el estudio de dicho objeto.

La resolución de problemas será analizada con la Teoría Antropológica de lo Didáctico por Yves Chevallard, que surgió a partir de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991). Según Chevallard (1999) toda actividad realizada está conformada por una triada: el objeto (O), las personas (X) y las instituciones (I), en nuestro caso el objeto son las cónicas, las personas son los alumnos de Álgebra Matricial y Geometría Analítica (AMGA) de una sección del primer ciclo en la institución PUCP. Además, la TAD está basada en la noción de organización praxeológica o praxeología. Para el autor, una praxeología, está formada por una teoría (Θ), que fundamenta las tecnologías (θ), que a su vez justifican las técnicas (τ) las cuales sirven para resolver tareas (t) de un determinado tipo de tareas (T). De modo que una praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$ está dividida en dos bloques, el bloque práctico-técnico, [T/τ], y el bloque tecnológico-teórico [θ /Θ].

Además, se tiene en cuenta que las praxeologías que incluyen un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM es la encargada del estudio de la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnologías y teoría. La OD observa el modo en que estas situaciones fueron constituidas, por medio de momentos de estudio. Según el grado de complejidad que se presentan en las componentes de las praxeologías se clasifican en: Organización Matemática Puntual (OMP), que considera un tipo de tarea; Organización Matemática Local (OML), que deriva de la integración de varias praxeologías puntuales que atienden a una misma tecnología; Organización Matemática Regional (OMR), obtenida de la articulación de praxeologías locales referentes a la misma teoría matemática; y Organización Matemática Global (OMG), que surge de la unión de diferentes praxeologías regionales, a partir de la integración de diversas teorías.

Método

Nuestra investigación envuelve la realización de un análisis de las actividades solicitadas siguiendo los procesos de las contribuciones de la TAD para analizar y determinar qué tareas, técnicas y tecnologías son aplicadas. Este análisis permitirá identificar una organización matemática y de qué tipo es, para identificar un modelo praxeológico y una organización didáctica para la enseñanza

Desarrollo de la experiencia

La experiencia didáctica se realizó con un grupo de 30 estudiantes ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería. Se desarrolló de manera virtual y por la plataforma Zoom. La sesión se divide en dos momentos, en un primer momento consideramos un trabajo individual, donde se propone un problema a los estudiantes y se les da un tiempo para que lean y resuelvan a mano; en un segundo momento, proponemos un trabajo mediado por el GeoGebra donde se le pide a cada estudiante que comente su proceso de solución o lo escriba en el chat. A modo de ejemplo, mostramos un problema propuesto.

A continuación, presentamos la tarea (t_1) que consiste en un problema sobre cónicas, que tiene por objetivo que los estudiantes para resolver, debe tener en cuenta tecnologías como, por ejemplo: la definición de cónica, elementos característicos de cada tipo de cónica y la identificación de sus ecuaciones que las representan.

(t_1) **Problema 1**

Considere la familia de cónicas:

$$\mathcal{C}_k: \frac{x^2}{9+k} + \frac{y^2}{4+k} = 1,$$

donde $k \neq -9$ y $k \neq -4$.

A) (t_{11}) Halle las condiciones que debe cumplir k para que la cónica $\mathcal{C}_k$ no sea el conjunto vacío.
B) (t_{12}) Halle los valores de k para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una elipse.
C) (t_{13}) Halle los valores de k para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una hipérbola.
D) (t_{14}) Reflexione acerca de los vértices y focos de las cónicas.

En la figura 1 se muestra la solución propuesta por el estudiante 1.

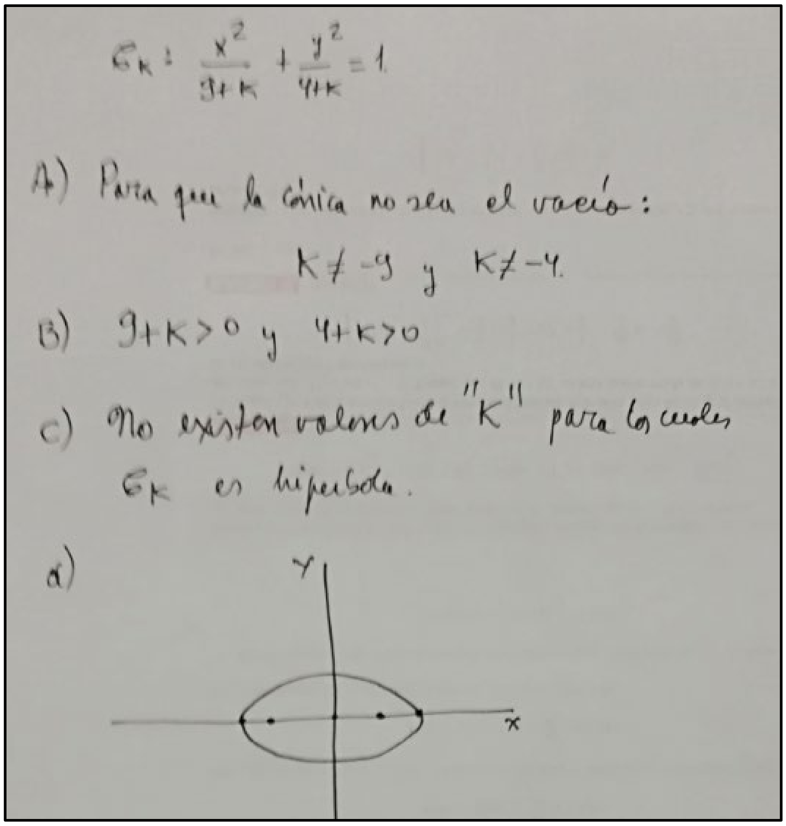


Figura 1. Solución del alumno 1

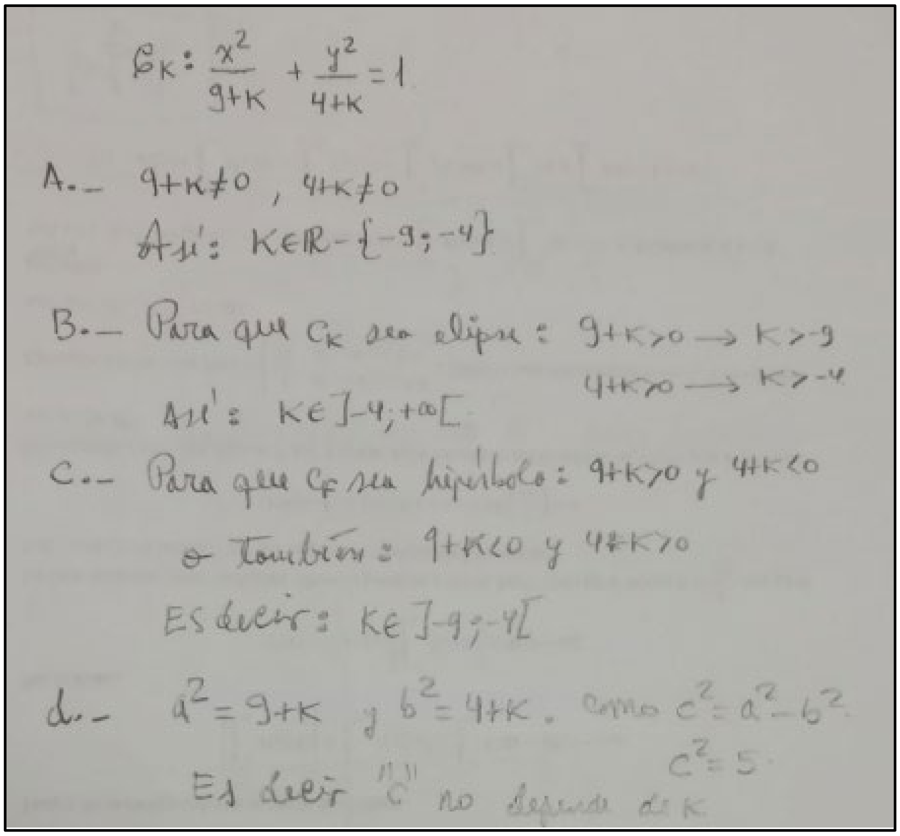
En la solución del estudiante se aprecia lo siguiente:

Para el item A (t_{11}) al estudiante le faltó analizar la existencia de la ecuación, es decir si k<-9, cuando la ecuación no tiene sentido. El estudiante no muestra ningún esbozo de gráficas ni justificación a su respuesta. Por tanto, la técnica τ que utiliza se restringe solo conocer θ la ecuación de la elipse.

En el item B (t_{12}) , el estudiante analiza de manera independiente los denominadores. Lo que evidencia un error en la resolución del problema, es decir nuevamente la tecnología θ es la ecuación de la elipse. Faltó tener en cuenta la hipérbola y le conduce a dar incorrectamente el item C (t_{13}).

En el item D (t_{14}) falta analizar los elementos de las cónicas. Podemos ver que solo representa la elipse, entonces faltó analizar los valores que toma k y no hay justifica con propiedad alguna la técnica τ para representar la elipse.

Seguidamente tenemos la solución de propuesta por el estudiante 2 que se muestra en la figura 2.



$C_K: \frac{x^2}{9+K} + \frac{y^2}{4+K} = 1$

A.- $9+K \neq 0$, $4+K \neq 0$

Así: $K \in \mathbb{R} - \{-9; -4\}$

B.- Para que C_K sea elipse: $9+K>0 \longrightarrow K>-9$

$4+K>0 \longrightarrow K>-4$

Así: $K \in]-4; +\infty[$

C.- Para que C_F sea hipérbola: $9+K>0$ y $4+K<0$

o también: $9+K<0$ y $4+K>0$

Es decir: $K \in]-9; -4[$

d.- $a^2 = 9+K$ y $b^2 = 4+K$. Como $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 5$

Es decir "c" no depende de K

Figura 2. Solución del alumno 2

La solución del estudiante 2 notamos lo siguiente:

En A (t_{11}) de modo similar al estudiante 1 le faltó analizar la existencia de la ecuación y la técnica que utiliza es restringir el dominio y faltó analizar para cada valor de $k\epsilon\{-9, -4\}$.

En B (t_{12}) el estudiante responde correctamente.

En C (t_{13}) el estudiante responde correctamente.

En D (t_{14}) el estudiante intento para determinar los valores de c, pero no concluye el proceso y solo se limita a indicar que depende de k. Faltó concluir y determinar las coordenadas de vértices y foco.

Luego de analizar las soluciones propuesta por los estudiantes, se entrega a los estudiantes dos applets para que exploren de manera dinámica la solución del problema. En la figura 3 se muestra la elipse cuando el contador es k=-1.5.

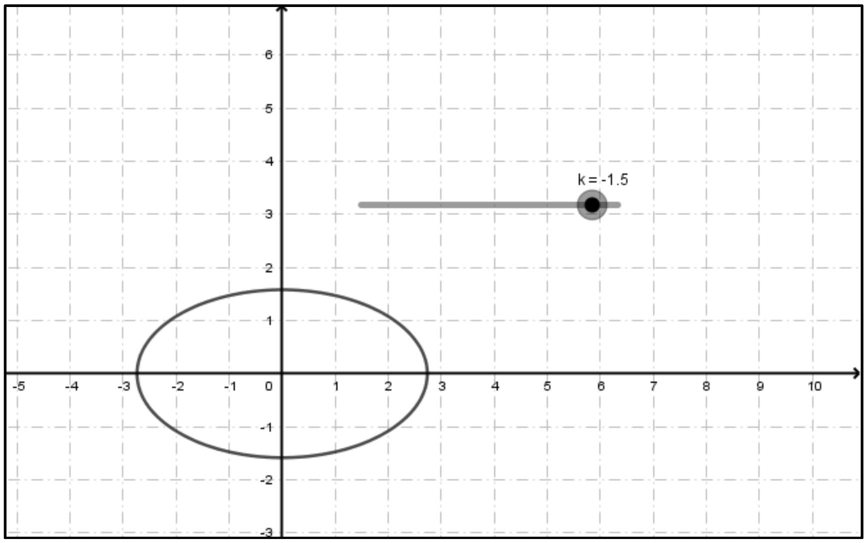


Figura 3. Applet dinámico para explorar la solución del problema cuando k=-1.5.

Mientras si k= -6.6 la cónica obtenida es la hipérbola como se puede ver en la figura 4.

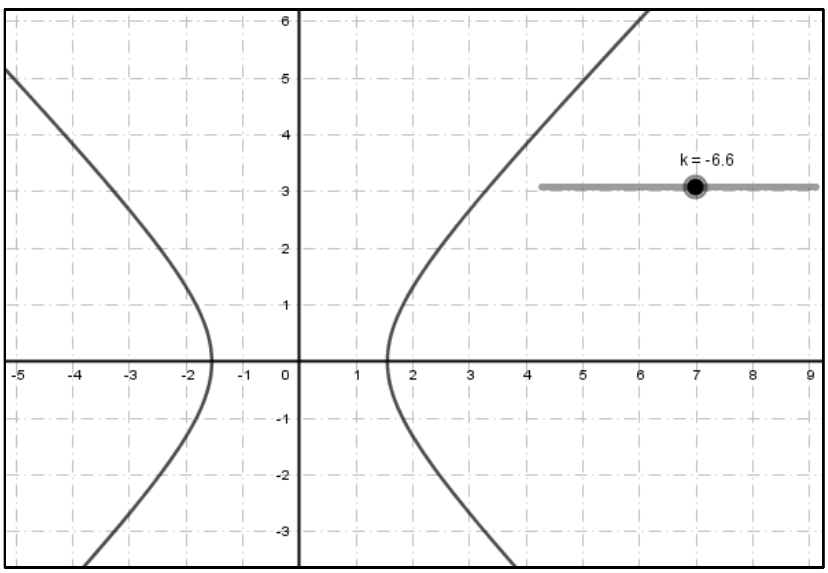


Figura 4. Applet dinámico para explorar la solución del problema cuando k=6.6.

Luego de que los estudiantes manipularon el applet y observar la solución de manera dinámica y geométrica del problema, se les solicita que nuevamente resuelva el problema y observamos que las respuestas a cada una de las preguntas planteadas empezaron a mejorar y generar discusión. Algunas de las respuestas de los estudiantes fueron:

- K no puede tomar valores menores a -9.
- Los focos de las familias de elipses e hipérbolas son los mismos.
- El eje focal de las familias de cónicas es el eje X.

En el siguiente Cuadro 1 se describen las técnicas y tecnologías que podían seguir los estudiantes.

Cuadro 1
Análisis de técnicas y tecnologías para la Tarea 1.

Subtareas	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**
(t_{11}) Halle las condiciones que debe cumplir k para que la cónica $\mathcal{C}_k$ no sea el conjunto vacío.	τ'_{11}: Determinar las condiciones para el valor de k como expresión algebraica, luego analizar que k< -9	Ecuaciones de cónicas
	τ'_{11} : Reemplazar algunos valores hasta identificar las expresiones matemáticas de cónicas, como en la figura 2.	Represente de la ecuación grafica de la cónica.
(t_{12}) Halle los valores de k para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una elipse.	τ_{12}: Considera valores k>-4 para asegurar que el denominador es siempre positivo.	Ecuaciones de cónicas
	τ'_{12}: La manipulación considerando la representación gráfica permite obtener la condición que k> -4	Represente de la ecuación grafica de la cónica.
(t_{13}) Halle los valores de k para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una hipérbola.	τ_{13}: Considera $9+k>0$ y $4+k<0$ y obtiene $k\in]-4,-9[$	Ecuaciones de cónicas
(t_{14}) Reflexione acerca de los vértices y focos de las cónicas.	τ_{14}: Considerando las formas particulares de las ecuaciones de cónicas debe hallar el foco y vértice para caso de cónica.	Condiciones de vértices y focos de cónicas

Fuente. Los autores.

Luego de este análisis tenemos los siguientes resultados.

Resultados

Trabajar con parámetros incluidos en la ecuación de una cónica es complicado para los estudiantes de los primeros ciclos de la universidad peruana. Esto se debe a que conforme cambian los valores del parámetro la forma de la cónica también cambia. Es decir, puede pasar de una elipse a una hipérbola o al conjunto vacío, dependiendo del parámetro. El análisis de las soluciones con la TAD evidencia la falta de técnica para resolver y analizar cada caso de cónica que puede surgir. El auxilio del applet ayuda en la visualización y permite alertar que faltó analizar los valores de k para responder la tarea.

Conclusiones

Consideramos que la actividad de determinar condiciones para un cierto parámetro que forma parte de una ecuación de una cónica permite identificar el tipo de cónica, las características que distinguen a cada tipo de cónica complementan el análisis y apreciar las bondades de la tecnología para inferir soluciones y aplicar conceptos y propiedades relacionados al tema tratado.

Finalmente, esta experiencia permite a los docentes de educación superior a reflexionar, promover e incorporar el uso de tecnología en nuestra actividad académica.

La tarea mostrada, la solución permitió identificar dos procesos o técnicas, una que toma elementos de la Geometría Analítica y sustentado por las propiedades o tecnologías de dicha teoría. Por lo tanto, se tiene que la tarea puede ser resuelta por dos técnicas, una identificando la forma algebraica de la expresión matemática y la otra con apoyo de software observado la representación gráfica de cada cónica es decir se trata de una OML.

La modalidad virtual, con clases remotas mediante el Zoom y al ser realizadas a través de un computador, laptop o teléfono celular, donde se podía utilizar el GeoGebra, ayudó a comprobar sus soluciones realizadas a mano en papel y a la representación de las funciones tanto en la forma algebraica como gráfica. Las soluciones presentadas nos permiten reflexionar que no basta con tener un software sino hay que tener cuidado con la formalidad de la definición y propiedades para así obtener la respuesta correcta. El intercambio de ideas realizadas de manera grupal, compartiendo pantalla, contribuyó a la discusión, formular preguntas y a la vez a responder las dudas. Por último, la dificultad del trabajo virtual permitió el uso de las nuevas herramientas tecnológicas adecuados para el registro de su información en la plataforma virtual del curso.

Referencias y bibliografía

Benito, R. (2019). Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: o Ensino de Cônicas [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique : du savoir appris au savoir enseigné. Grenoble: la pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Math é Matiques, 19 (2), 221-265.

Fernandes, C. (2021). *Um Modelo Didático de Referência baseado em Atividades de Estudo e Investigação para o ensino de cônicas an Escola Básica* [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Leon, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú]

Lopes, S. (2014) Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico [Disertación de maestria, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Ray, S. y Srivastava, S. (2020). Virtualización de la educación científica: una lección de la pandemia de COVID-19. *Proteínas J Proteom* **11,** 77–80 https://doi.org/10.1007/s42485-020-00038-7

Sistemas tecnológicos de interconectividad para el aprendizaje colaborativo de las Matemáticas

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Sebastian J. **Cruz** Ortiz
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
sebastian.cruz3@upr.edu
Paola L. **Vargas** Baldassari
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
paola.vargas5@upr.edu
Dilibet **Salazar** Rojas
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
dilibet.salazar@upr.edu
Keyshla **Ortiz** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
keyshla.ortiz6@upr.edu

Resumen

En este taller describiremos las funcionalidades más sobresalientes del sistema tecnológico de interconectividad conocido como *Desmos Classroom*. En específico, los asistentes aprenderán a utilizar las funciones básicas del *Teacher Desmos Activity Builder* para diseñar lecciones que permitan la construcción autónoma del conocimiento del estudiante con diferentes representaciones de objetos matemáticos y, a la vez, la construcción colaborativa del conocimiento mediante la interacción con sus compañeros y el maestro. Incluye la implementación de los cinco movimientos para orquestar discusiones productivas descritos por Smith y Stein (2018): anticipar, monitorear, seleccionar, secuenciar y conectar.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria y secundaria; Enseñanza virtual; Plataformas tecnológicas; Mediación pedagógica; Matemática escolar; Puerto Rico

Introducción

Los sistemas tecnológicos de interconectividad (STI) fueron introducidos a los salones de clases hace aproximadamente tres décadas. Inicialmente se componían de equipos que permitían a las maestras[1] recopilar las respuestas de los estudiantes a preguntas estructuradas y tenían el propósito de ajustar la instrucción a los resultados de las encuestas (Roschelle, Penuel, & Abrahamson, 2004). Los STI fueron evolucionando para transformarse en una red inalámbrica de calculadoras que permitía el trabajo autónomo y colaborativo en el salón de clases. Con los equipos adecuados, las maestras creaban un ambiente que permitía, además de hacer encuestas, presentar en la pantalla pública el trabajo de un estudiante o de todos simultáneamente, agregar las respuestas en una sola gráfica, presentar la pantalla de la calculadora de cualquier estudiante, crear una base de datos con el resultado de los trabajos de los estudiantes, entre otras. Hoy día, la interconectividad en el aula -presencial o virtual- se puede alcanzar a través de una red de computadoras, calculadoras, teléfonos celulares, tabletas u otros dispositivos tecnológicos. Las opciones para el trabajo colaborativo se han enriquecido con los adelantos recientes de las herramientas tecnológicas.

Los STI de hoy día también incluyen muchas opciones para facilitar la mediación pedagógica. Las maestras pueden diseñar estrategias para la interacción de los estudiantes con los objetos matemáticos de tal forma que puedan transitar de la manipulación del objeto virtual a la abstracción. Las STI incluyen sistemas de auto avalúo más sofisticadas que permiten al estudiante reflexionar sobre su propio aprendizaje y determinar el logro de los objetivos. Además, las STI permiten a los estudiantes trabajar simultáneamente con varias representaciones (gráficas, tablas o formulas) y a los maestros proveer retroalimentación individual o grupal y seleccionar las respuestas para desplegar en varios formatos.

Aprender a utilizar los STI requiere un plan orquestado que incorpore teoría y práctica que proporcione a las maestras el conocimiento para implementarlos en las clases de matemáticas. Por ejemplo, el cuestionamiento es un movimiento clave de los maestros para promover el discurso en el aula que ha sido ampliamente documentado (DeJarnette, et al., 2020; DeJarnette y Hord, 2020; Rasmussen y otros, 2009). Sin embargo, hoy día, se necesita más que hacer preguntas para promover la participación y más aún en ambientes virtuales. Es necesario implementar otros movimientos para orquestar la participación de todos los estudiantes, para atender a la diversidad de estudiantes y proveer una retroalimentación adecuada a todos.

En este taller los asistentes aprenderán a utilizar el *Teacher Desmos Actividy Builder (TDAB)* para promover y mantener discusiones matemáticas productivas que fomenten el uso de un discurso matemático (Smith & Stein, 2018).

---

[1] Conscientes de la importancia del lenguaje inclusivo utilizamos **las maestras** para referirnos a los y las docentes y **los estudiantes** para referirnos a los y las estudiantes.

¿Por qué el TDAB?

El TDAB es una herramienta digital gratuita en línea para el diseño de lecciones interactivas que incluye varias herramientas como calculadora con las cuatro operaciones básicas, calculadora científica, representación visual de expresiones algebraicas, aplicación de geometría dinámica y examen de práctica. En el salón de clases es ideal para trabajar con proyector o pizarra digital la representación gráfica de diversas funciones, por lo que, de una forma sencilla y precisa, podemos mostrar a los alumnos la representación de cualquier tipo de relación o función. De igual forma, permite la construcción de gráficas a partir de una tabla de datos y el uso de parámetros y controles deslizantes. Por ejemplo: podemos modificar valores e investigar las características básicas de las funciones y fomentar un ambiente de diálogo y reflexión en las aulas de clase. Nos permite visualizar inecuaciones, explorar transformaciones, hacer regresiones e insertar imágenes para darle vida a los gráficos. Permite almacenar las gráficas para ser utilizadas en otros programas de procesadores de palabras o programas de presentaciones. TDAB tiene en cuenta la personas con diversidad funcional y provee asistencia tecnológica, por ejemplo, permite describir las gráficas para que los estudiantes con limitación visual puedan realizar la actividad o descargar las ecuaciones en Braille, entre otros.

Una vez diseñada la lección, los estudiantes pueden trabajar de manera individual o grupal. Los estudiantes pueden enviar la información en múltiples direcciones, ya sea desde la computadora de la maestra a los dispositivos de los estudiantes o entre los dispositivos de los estudiantes. El trabajo de un estudiante se puede mostrar a los demás, más aún, las respuestas de los estudiantes se pueden agregar en una gráfica y desplegar en una pantalla pública para facilitar la comunicación con o entre los estudiantes (Trouche y Drijvers, 2010). De esta manera, la maestra y los estudiantes pueden capturar, organizar, analizar y mostrar las contribuciones de toda la clase o de un estudiante en particular.

Clark-Wilson (2010), Roschelle et al. (2004) y Trouche & Drijvers (2010) han investigado la interconectividad en los salones de clases de matemáticas. Entre los resultados se encuentran que los usos adecuados de los sistemas de interconectividad proporcionaron a los maestros más información sobre los procesos de creación de sus estudiantes lo que conducía a intervenciones de los maestros más reflexivas; promovían un discurso matemático más significativo, impulsado por respuestas y pantallas compartidas; y promovían una autoevaluación intencional de los estudiantes y de sus compañeros. Por su parte, Tolboom (2012) investigó el potencial de las redes en los salones de clases para mejorar la retroalimentación de las maestras en la enseñanza de estadísticas. Además, los investigadores han hecho hincapié en la importancia de un diseño cuidadoso para cumplir con objetivos de aprendizaje específicos (Castrillón Velandia, 2017; Hernández Rodríguez & Catrillón Velandia, 2019; Tolboom, 2012).

Temática del taller

Con el advenimiento de la pandemia se hizo más patente la necesidad de capacitar a las maestras en los técnicas y estrategias para promover y acompañar el aprendizaje de los estudiantes. Algunos países crearon política pública para promover la mediación pedagógica tanto presencial como virtualmente. Un elemento importante es promover discusiones productivas en el salón de clases. Smith y Stein (2018) propusieron cinco actividades para promover discusiones productivas en el salón de clases: anticipar, monitorear, seleccionar, secuenciar y conectar.

Al momento de planificar la lección con el TDAB, las maestras deben **anticipar** las posibles interacciones que se dan entre los estudiantes con las situaciones que se plantean y los objetos matemáticos involucrados. Deben preparar las preguntas que hagan evidente el pensamiento de sus estudiantes. También deben predecir las posibles respuestas y planificar sus reacciones. Esta preparación es muy útil y, a pesar de la previsión, es posible que cuando esté enseñando la clase, la maestra, deba improvisar para clarificar, por medio de preguntas, lo que sus estudiantes están tratando de comunicar. En este caso utilizaremos la situación de los registros del primer puesto en las competencias de 100 metros de hombres y mujeres en los Juegos Olímpicos para determinar si existe alguna relación entre los datos y discutir la viabilidad de modelos lineales para describir la tendencia en los datos.

La situación que se plantea puede ser de mucho interés para algunos estudiantes y es posible que no para todos, por tanto, se debe planificar para acercar a los estudiantes al tema. Por ejemplo, se puede preguntar por algún deporte que esté de moda y haya sido incluido recientemente a los Juegos Olímpicos como el escalamiento de muros o el *skateboarding*. Una vez se llegue al tema se puede presentar una descripción o video de la competencia de los 100 metros para ejemplificar el contexto. Cuando se presente la tabla de los datos se puede pedir a los estudiantes que hagan observaciones sobre los datos, por ejemplo, por qué al principio sólo se presentan los datos en unidades, luego en unidades y décimas, en qué año en que empezaron las mujeres a participar en esta competencia, si observan algún patrón en los datos, entre otras (Tabla 1).

Tabla 1
Registro de los tiempos para los ganadores de la competencia de 100 metros en los Juegos Olímpicos

Año	Hombres (segundos)	Mujeres (Segundos)	Año	Hombres (segundos)	Mujeres (Segundos)
1896	12	N/A	1964	10.00	11.40
1900	11	N/A	1968	9.90	11.00
1904	11	N/A	1972	10.14	11.07
1908	10.8	N/A	1976	10.06	11.08
1912	10.8	N/A	1980	10.25	11.06
1920	10.8	N/A	1984	9.99	10.97
1924	10.6	N/A	1988	9.92	10.54
1928	10.8	12.2	1992	9.96	10.82
1932	10.3	11.9	1996	9.84	10.94
1936	10.3	11.5	2000	9.87	11.12
1948	10.3	11.9	2004	9.85	10.93
1952	10.4	11.5	2008	9.69	10.78
1956	10.5	11.5	2012	9.63	10.75
1960	10.2	11.00	2016	9.81	10.71

El TDAB provee para que la maestra integre fotografías, animaciones y vídeos para ilustrar los contextos seleccionados. También le permite incluir tablas, gráficas y texto matemático para describir matemáticamente las situaciones. Además de proveer opciones para presentar información a los estudiantes, el TDAB provee espacio para que la maestra tome notas sobre el desarrollo de la lección y haga observaciones. Las notas están al alcance de la maestra y no las pueden ver los estudiantes. Otra funcionalidad interesante es que la lección puede ser creada de forma colaborativa con otros colegas. Una vez la lección o actividad es creada, se asigna a los estudiantes para que la ejecuten ya sea de forma presencial o virtual.

Las maestras pueden **monitorear** las respuestas de los estudiantes y estar muy pendiente de aquellas que revelen las construcciones que hacen los estudiantes o las que contemplan formas creativas o divergentes de resolver los problemas. La maestra puede proveer retroalimentación individual o grupal al trabajo de los estudiantes. Las diferentes opciones para interactuar con el programa ofrecen muchas alternativas de interacción entre los estudiantes o entre la maestra y los estudiantes. El monitoreo se hace a través de un panel de control que muestra los nombres de los estudiantes y la página de la lección en la que están trabajando (Figura 1). También muestra las respuestas que han dado los estudiantes a las interacciones propuestas por la maestra (Figura 2 – izquierda).

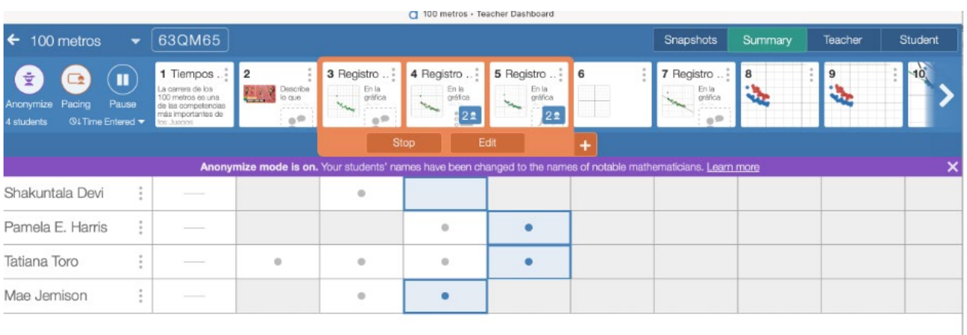


Figura 1. Panel de control

La maestra puede **seleccionar** el trabajo de los estudiantes y registrarlo por medio de una captura de pantalla. Debido a la naturaleza dinámica de los trabajos en ambientes virtuales, son importantes los criterios para la selección de esos momentos que pueden provocar una discusión profunda de las ideas matemáticas. Por ejemplo, al momento de discutir una gráfica, se puede presentar el trabajo colectivo de todos los estudiantes y así visualizar respuestas divergentes e interesantes (Figura 2 - derecha).

Figura 2. Respuestas de los estudiantes

También es importante que la futura maestra aprenda criterios para la **secuenciación** de las respuestas de las estudiantes de tal forma que puedan ser útiles para generar reflexiones con toda la clase. Durante la socialización y discusión de los trabajos de los estudiantes, la maestra ayuda a hacer patentes las conexiones entre las diversas representaciones o entre las ideas matemáticas que se están discutiendo. La meta es crear una cultura en donde las estudiantes escuchen a sus pares, contrasten diferentes acercamientos, puedan hacer conexiones y aprendan a discutir ideas matemáticas.

Conclusión

El sistema tecnológico de interconectividad *Desmos Classroom* es una herramienta que todos los docentes de matemáticas deben explorar. No sólo es de fácil acceso, sino que permite que cualquier persona, desde cualquier escenario, pueda manipular objetos matemáticos y construir conocimientos matemáticos, de una forma interactiva y colectiva. Esto podría representar una gran ventaja, pues se establece una interacción entre el participante y la máquina, y entre los participantes mismos que sienta las bases para el establecimiento de nuevas conjeturas o el interés en querer investigar las razones de lo que se está apreciando. Desde la perspectiva de la mediación pedagógica podría resultar ser muy útil, sobre todo, para llegar a esa población de alumnos que confrontan problemas al trabajar con modelos matemáticos que poseen un alto nivel de abstracción. Finalmente, se deja en consideración de que el uso de la tecnología deja de ser un objetivo y se convierta en un instrumento para para a la exploración de contextos relacionados a las temáticas matemáticas.

Referencias y bibliografía

Castrillón Velandia, O. (2017). *Análisis de las interacciones que promueven la construcción social del conocimiento en el salón de clases utilizando materiales didácticos mediados por tecnologías digitales.* (Unpublished doctoral dissertation). San Juan, PR: University of Puerto Rico, Río Piedras Campus.

Clark-Wilson, A. (2010). Emergent pedagogies and the changing role of the teacher in the handheld mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education, 42*(7), 747-761. doi:10.1007/s11858-010-0279-0

DeJarnette, A. F., & Hord, C. (2020). Pre-service teachers' patterns of questioning while tutoring students with learning disabilities in algebra. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 1590-1594. Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

DeJarnette, A. F., Wilke, E., & Hord, C. (2020). Categorizing mathematics teachers' questioning: The demands and contributions of teachers' questions. *International Journal of Educational Research*, *104*, 101690.

Hernández Rodríguez, O., & Catrillón Velandia, O. (2019). Classroom connectivity technology to enhance the social construction of mathematical knowledge. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 26,* 4, 161-176.

Rasmussen, C., Kwon, O. N., & Marrongelle, K. (2009). A framework for interpreting inquiry-oriented teaching: Opportunities for student and teacher learning. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA*.

Roschelle, J., Penuel, W. R., & Abrahamson, L. (2004). The networked classroom. *Educational Leadership, 61*(5), 50-54.

Smith, M., & Stein, M. K. (2018). Five practices for orchestrating productive mathematics discussions. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

Tolboom, J. L. J. (2012). *The potential of a classroom network to support teacher feedback: a study in statistics education*. Groningen, The Netherlands: University of Groningen. Available at https://research.rug.nl/en/publications/the-potential-of-a-classroom-network-to-support-teacher-feedback-

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM Mathematics Education*, *42*(7), 667-681.

Soluções gráficas e numéricas de equações diferenciais ordinárias com o *Powersim*

Odair José Teixeira da **Fonseca**
Universidade Federal de Rondônia
Brasil
odairfonseca@unir.br
Maria Madalena **Dullius**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
madalena@univates.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta de ensino de equações diferenciais ordinárias (EDO) com abordagem gráfica e numérica por meio do software Powersim, priorizando o estudo de caráter qualitativo e interpretativo. Foi desenvolvida atividade relacionada às engenharias de processos ou de alimentos. A pesquisa de cunho qualitativo, teve como objetivo explorar os aspectos qualitativos da solução gráfica de uma EDO com a utilização de recursos computacionais. A atividade foi impressa e distribuída aos participantes. Para coleta de dados utilizou-se anotações e observação do pesquisador durante o desenvolvimento da atividade, bem como resolução da atividade pelos estudantes e os arquivos construídos com o Powersim.

Palavras-chave: Soluções Gráficas; Soluções Numéricas; Equações Diferenciais Ordinárias; *Powersim*; Taxa de Variação; Dados Experimentais.

Introdução

A teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO) muitas vezes é utilizada para descrever problemas relacionados à física, biologia, química e engenharias, dentre outras áreas do conhecimento. Por definição, EDO é uma equação que envolve uma variável dependente, suas derivadas e uma variável independente, a ordem de uma EDO é dada pela ordem da maior derivada que aparecer na equação (Oliveira & Tygel, 2010). Neste trabalho, abordaremos atividades envolvendo equações de primeira ordem, isto é, equações da forma $y' = f(x, y)$.

Equações desse tipo podem ser utilizadas para representar dinâmicas de crescimentos ou de decrescimentos. Muitas vezes, discute-se a solução analítica de uma EDO, priorizando o foco nessas técnicas de soluções, porém nesse trabalho, buscamos apresentar atividades com ênfase nas soluções gráficas e numéricas explorando situações envolvendo problemas de engenharia.

Neste trabalho o objetivo principal é discutir atividades com foco em soluções gráficas e numéricas de EDO com utilização de recurso computacional. Assim, com o intuito de aproximar os conceitos da teoria das EDO com a área de formação dos estudantes do curso de engenharia de alimentos, elaboramos duas atividades utilizando dados experimentais sobre desenvolvimento de fermento biológico, (conforme delineamos brevemente na próxima seção).

Como recurso computacional, foi utilizada a versão livre (*Free Powersim Studio 10 Express*) do *software* Powersim[1]. A versão livre do Powersim pode ser obtida por meio de um cadastro simples na página oficial do programa que fornecerá um código de acesso pessoal para validação do *software* durante a instalação. No trabalho de Dullius (2009) o leitor encontrará maiores detalhes sobre o funcionamento do Powersim.

Ensino e aprendizagem de EDO com recurso computacional

As atividades desenvolvidas foram motivadas a partir dos trabalhos de Dullius (2009) e Dullius, Araújo e Veit (2011).

A pesquisa de Dullius (2009), discute uma forma alternativa diferenciada para o ensino de EDO, a pesquisadora propõe uma abordagem cuja ênfase maior é dedicada aos aspectos qualitativos da solução de uma EDO. Para isso a autora propõe um estudo interpretativo a partir da análise das soluções gráfica e numérica com utilização do Powersim, bem como de planilha eletrônica.

Dullius (2009), busca apresentar uma proposta de ensino que transite entre as técnicas de soluções analíticas, soluções gráficas e numéricas. Por priorizar a abordagem interpretativa com foco em soluções gráfica e numérica, a autora defende a utilização de recursos computacionais como uma ferramenta importante para auxiliar na compreensão de conceitos e realização de simulações. Porém a autora ressalta que "El ordenador es considerado importante para los alumnos que ya tienen experiencia en el asunto tratado. En este caso los alumnos pueden utilizarlo para trabajar con tareas más complicadas o que tardan más en ser realizadas a mano" (Dullius, 2009, p. 95).

Uma das vantagens de se trabalhar com atividades envolvendo simulações computacionais é que normalmente motivam os estudantes, pois permitem investigar vários cenários por meio da variação dos parâmetros de forma que o modelo se ajuste adequadamente ao fenômeno estudado.

Dullius, Araújo e Veit (2011), também discutem a potencialidade de aprendizado significativo a partir de uma abordagem com ênfase interpretativa por meio de soluções gráficas e

[1] https://powersim.com/downloads/

numéricas de EDO. A inovação consiste no fato de que propõem situações-problema com questões em que os alunos são instigados a compreenderem a diferença entre o conceito de taxa de variação de uma concentração e a quantidade dessa concentração ao longo do tempo. Esse fato fica evidente no problema relacionado à meia vida do iodo-131. Após breve explanação sobre o assunto os autores pedem aos alunos para investigar “[...] 2. O gráfico do número de átomos contra o tempo, medido em anos. 3. O gráfico da taxa de variação do número de átomos em relação ao número de átomos. 4. O gráfico da taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo. [...]” (Dullius, Araújo & Veit, 2011, p. 28).

A partir dessas concepções, propôs-se o desenvolvimento de duas atividades com ênfase interpretativa por meio de soluções gráficas e numéricas de uma EDO utilizando o Powersim. A seguir, apresentamos o contexto no qual as atividades foram elaboradas.

Contextualizando a atividade

Na pesquisa desenvolvida por Alves (2008) encontramos dados experimentais relacionados ao crescimento de leveduras cultivadas em caldo de vagem de algaroba. A pesquisa também investigou o consumo de açúcares redutores totais (ART).

A partir dos dados experimentais obtidos por Alves (2008) é possível concluir que a variação da concentração percentual de ART para o cultivo em condição natural pode ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha C \tag{1}$$

em que, $C(t)$ é a concentração percentual de ART no instante de tempo t, e α é uma constante positiva, denominada de constante de proporcionalidade. O sinal negativo no lado direito da equação (1) indica que a concentração de ART diminui com o tempo.

Por outro lado, a análise dos dados experimentais da pesquisa de Alves (2008) sobre o crescimento da população microbiana de leveduras cultivadas em caldo de algaroba (N° de céls x 10^{-9}/litro), sugere um crescimento exponencial com fator de inibição, ou crescimento exponencial assintótico. De fato, como a concentração de ART diminui com o tempo, o crescimento da levedura tende a se estabilizar. Assim, é razoável supor que o crescimento de leveduras tenha comportamento logístico e possa ser descrito pela equação

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C - \frac{\alpha}{k} C^2 \tag{2}$$

em que, $C(t)$ é a quantidade de leveduras no instante de tempo t, α é uma constante positiva conhecida como constante de proporcionalidade e k é uma constante positiva denominada capacidade suporte. No Quadro 1, apresentamos uma atividade que foi desenvolvida pelos estudantes.

Atividade
Considere a EDO dada pela igualdade (1), para desenvolver cada um dos itens a seguir.
a) Construa o diagrama no *Powersim*
b) Como será o gráfico da concentração de ART ao longo do tempo?
c) Como será o gráfico da taxa de variação da concentração de ART ao longo do tempo?
d) A taxa de variação aumenta, diminui ou permanece sempre igual?
e) Considerando uma quantidade percentual inicial de 2,75, determine o valor de α de forma que a concentração percentual de ART após 12h seja aproximadamente 0,52.
f) Com o Powersim, construa gráficos para quantidade percentual de ART e para taxa de variação em função do tempo.

Quadro 1. Atividade desenvolvida com os estudantes.

Procedimentos metodológicos

A atividade foi desenvolvida em uma turma de cálculo diferencial e integral III de um curso de engenharia de alimentos de uma Universidade Federal brasileira. A turma era composta por quatro estudantes. As tarefas foram realizadas em duplas. Neste trabalho, o objetivo consiste em discutir os aspectos qualitativos da solução gráfica de uma EDO. Para isso utilizou-se como recurso computacional o *software* Powersim.

A presente pesquisa é de cunho qualitativo. Nesse tipo de pesquisa trabalha-se "com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis" (Minayo, 2002, p. 21-22). É salutar esclarecer que o significado de análise qualitativa da solução de uma EDO é diferente do significado atribuído à pesquisa de caráter qualitativa.

Cada estudante recebeu uma versão impressa das atividades, nas quais deveriam registrar as soluções e entregar ao professor/pesquisador no final da aula.

Como instrumentos de coleta de dados foram utilizadas as anotações/observações do pesquisador durante o desenvolvimento das atividades, bem como a entrega das atividades com as respectivas resoluções elaboradas pelos estudantes e os arquivos gerados pelo Powersim (enviados por e-mail).

Resultados e discussões

Inicialmente, o professor entregou uma cópia impressa das atividades aos estudantes e, em seguida, houve uma breve explanação sobre os objetivos propostos e a contextualização dos modelos matemáticos apresentados relacionando-os com a área de formação dos alunos.

Apresentaremos a análise da atividade. Para manter o anonimato dos participantes utilizaremos os termos dupla1 e dupla2 para diferenciar as duplas formadas para o desenvolvimento da atividade.

No item (a), os alunos demonstraram dificuldades por não conhecerem o funcionamento do Powersim. Dessa forma, o professor/pesquisador precisou intervir e construir junto com eles o diagrama para a EDO (1). Como o modelo em questão estava relacionado com decrescimento, no diagrama do Powersim, poderia ser considerado apenas uma torneira de saída, assim, criou-se um tanque para representar a quantidade inicial de ART. A torneira cujo ponto inicial foi fixado no tanque indica a saída, criou-se um parâmetro para a constante α para facilitar o trabalho com as simulações. A taxa de saída tinha dependência da concentração de ART, essa relação foi representada pela seta com início no tanque e fim na variável da torneira. Também foi utilizado o recurso ‘variável’ auxiliar para definir a taxa de variação.

Uma vez construído o diagrama (veja Figura 6), as informações foram inseridas para que as simulações pudessem ser executadas. Na torneira que representa a saída, devemos observar que o *software* já ‘entende’ como uma subtração, de forma que não é preciso inserir o sinal de negativo que aparece na equação (1).

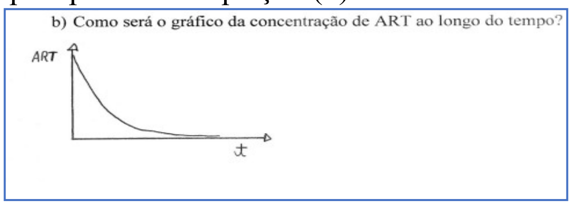


Figura 1. Resolução da atividade 1(b) pela dupla1.

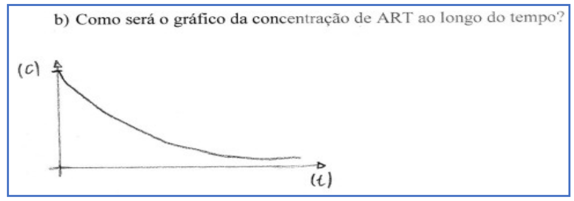


Figura 2. Resolução da atividade 1(b) pela dupla2.

Nos itens (b) e (c), foi solicitado aos participantes que fizessem o esboço do gráfico para a concentração de ART e para taxa de variação, em função do tempo. O objetivo era que eles construíssem os gráficos a partir da análise do modelo considerando as características do fenômeno biológico do problema, sem utilizar o recurso de solução analítica nem solução computacional. No item (b), as duas duplas esboçaram o gráfico da concentração de ART em função do tempo de forma coerente, conforme pode ser observado na Figura1 e na Figura 2.

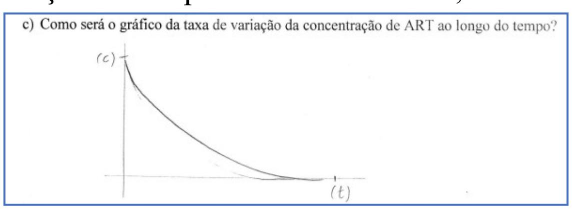


Figura 3. Resolução da atividade 1(c) pela dupla2.

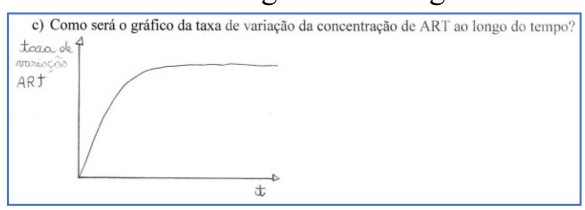


Figura 4. Resolução da atividade 1(c) pela dupla1.

Por outro lado, para o gráfico da taxa de variação em função do tempo, a dupla2 apresentou um esboço equivocado e a dupla1 construiu um gráfico parcialmente coerente. Parcialmente coerente, pois descreveram um gráfico com crescimento assintótico, porém com valores positivos, quando na verdade a taxa de variação é crescente com valores negativos tendendo a zero. Na Figura 3 e na Figura 4 apresentamos os esboços dos gráficos apresentados pelas duas duplas para a taxa de variação em função do tempo.

Essa dificuldade com a interpretação gráfica da taxa de variação em função do tempo também foi evidenciada na pesquisa realizada por Dullius (2009), na ocasião a autora propõe uma situação-problema sobre esvaziamento de água em um tanque com vazão de 10% da quantidade de água por minuto. Nesta atividade a pesquisadora apresenta cinco opções de gráficos e questiona qual deles melhor descreve a variação da água no tanque em função do tempo.

Ao analisar as respostas dos alunos a pesquisadora afirma que todos os alunos participantes entrevistados escolheram a alternativa equivocada, e de forma imediata, quatro alunos eliminaram as opções cujos gráficos estavam abaixo do eixo das abscissas, pois como a curva "estaba en parte negativa del eje vertical, justificaron que no era posible trabajar com cantidades negativas. Eso demuestra la confusión de los alumnos entre la cantidad y la tasa de variación de cantidad" (Dullius, 2009, p. 154)
.

A constatação desse tipo de dificuldade evidencia que a concepção conceitual sobre taxa de variação e quantidade da concentração encontra-se fragilizada, indicando que o professor deve dar atenção especial na parte interpretativa das EDO com o intuito de proporcionar ao aluno a capacidade de conseguir diferenciar o significado de taxa de variação de uma concentração e a própria concentração.

No item (d), a questão tinha por objetivo exercitar a escrita dos alunos provocando-os a dissertar sobre os pensamentos utilizados para esboçar o gráfico no item anterior da atividade. Observa-se que o esperado seria haver coerência entre a resposta dada e o gráfico elaborado anteriormente. Ao analisar as respostas dos estudantes percebe-se que a resposta é condizente com o gráfico esboçado anteriormente, por exemplo, a dupla1 respondeu que "*a taxa de variação aumenta, pois, a taxa da concentração tem uma queda e logo após se mantém constante*". A dupla2 justificou que "*a taxa de variação diminui, por causa do sinal negativo do (α) alfa*".

Observe que a dupla1 considerou que a taxa de variação aumentaria, mas não ficou claro que essa variação seria negativa, isto é, que a taxa de variação seria crescente e tenderia a zero. Outro ponto que chamou a atenção na resposta da dupla1 é que confundiram o comportamento assintótico com constante. A dupla2 cometeu o equívoco de inferir que o sinal negativo implicaria na diminuição da taxa de variação.

No item (e) os alunos realizaram simulações até determinar o valor de α para que após 12 horas a concentração de ART fosse de 0,52. O professor/pesquisador esclareceu que o objetivo desse item seria obter o valor da constante de proporção que fornecesse o valor observado por Alves (2008) em sua pesquisa experimental. O desenvolvimento dessa atividade proporcionou aos alunos a oportunidade de observar o quanto a constante α interfere na dinâmica, e perceberam que valores maiores para α implicavam no decrescimento mais rápido, da mesma forma que ao tomarem valores menores a concentração de ART decrescia mais lentamente. Após várias simulações as duas duplas encontraram o valor $\alpha = 0{,}13$. Após todos determinarem o valor solicitado o professor enfatiza que eles, de certa forma, haviam determinado um valor do parâmetro que ajustaria o modelo (1) aos dados experimentais.

O item (f) foi muito interessante pois os estudantes puderam confrontar o gráfico da solução apresentado pelo Powersim com os gráficos que haviam esboçado nos itens (b) e (c).

Nesse momento os alunos foram provocados a reavaliarem a construção dos gráficos buscando compreender porque seu esboço inicial estava equivocado, ou reforçar o raciocínio que os levaram ao esboço certo. Como os gráficos das duas duplas ficaram semelhantes, apresentamos o gráfico construído pela dupla2 na Figura 5.

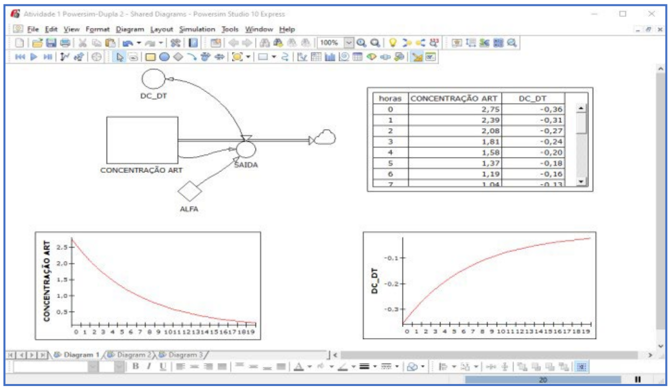


Figura 5. Diagrama para o modelo *(2)* e gráficos da atividade 1(f) realizado pela dupla2.

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino de EDO com foco na solução gráfica e numérica com uma abordagem interpretativa. Para isso, foram elaboradas duas atividades envolvendo problemas da área de formação dos estudantes. As atividades foram estruturadas com o intuito de incorporar a utilização do Powersim.

Os estudantes se mostraram favoráveis ao uso do Porwersim nas aulas de EDO, pois o programa permite a realização de simulações de diferentes cenários para solução. As atividades foram organizadas de forma que a solução computacional seria construída após a solução interpretativa do aluno, e esse movimento de esboçar a solução e confrontar com o resultado do Powersim pode provocar o aluno a refletir sobre seus erros e acertos de forma que o conhecimento matemático seja consolidado de maneira mais efetiva.

O desenvolvimento de atividades com recursos tecnológicos implica em muitos desafios, pois os alunos, e muitas vezes o professor, estão acostumados com aulas convencionais, utilizando apenas quadro e pincel, sem contar as dificuldades técnicas inerentes ao funcionamento do *software* escolhido. Porém, é preciso ressaltar que esse tipo de atividade tem o potencial de motivar os estudantes, pois são desafiados a pensarem no mesmo assunto sob outra perspectiva e isso pode proporcionar momentos importantes de ensino e aprendizagem.

Referências e bibliografia

Alves, M. F. (2008). *Potencialidades biotecnológicas da algaroba (Prosopis juliflora Sw, DC) para produção de fermento biológico.* (Tese de Doutorado, Universidade Federal de Campina Grande). Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFCG. http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/1718.

Dullius, M. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. (Tese de Doutorado, Universidad de Burgos). Repositorio Institucional da Universidad de Burgos. https://riubu.ubu.es/handle/10259/110.

Dullius, M. M., Araújo, I. S., & Veit, E. A. (2011) Ensino e aprendizagem de equações diferenciais com abordagem gráfica, numérica e analítica: uma experiência em cursos de engenharia. *Bolema*, 24 (38), p. 17-42.

Minayo, M. C. de S. (2002). Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In Minayo, M. C. de S. (Org). *Pesquisa social: teoría, método e criatividade*. (21 ed, pp. 9-29). Petrópolis, RJ: Vozes.

Oliveira, E. C. & Tygel, M. (2010). *Métodos matemáticos para engenharia*. (2ª ed). Rio de Janeiro. SBM.

Una secuencia de situaciones mediada por GeoGebra para el aprendizaje de la traslación

Diana Ximena **Ortiz** Collazos
Universidad del Valle
Colombia
diana.ximena.ortiz@correounivalle.edu.co
Blanca Ligia **Castañeda**
Institución Educativa Jorge Robledo
Colombia
profeblancacastaneda@gmail.com
Marlli **Rodriguez**
Institución Educativa Jorge Robledo
Colombia
marllyje@hotmail.com
Luis Fernando **Espinosa** Sanclemente
Universidad del Valle
Colombia
luis.espinosa@correounivalle.edu.co

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta una propuesta de aprendizaje focalizado en la traslación, se consideran algunos elementos de la TSD de Gay Brousseau (1986) como lo son; la noción de situación, contrato, medio y tipologías de situaciones, los cuales permiten configurar e implementación una secuencia de situaciones didácticas integra el Software GeoGebra, este artefacto permite reconocer los elementos abstractos de matemático, integrando diferentes tipos de representaciones. Desde lo metodológico se integró el análisis cualitativo y el estudio de casos, este último permitió observar a un grupo de estudiantes de grado tercero de educación básica primaria.

El interés de trabajar con los primeros grados de escolaridad radica en las falencias que se observan en los resultados de las pruebas saber de grado tercero en la institución educativa Jorge Robledo de Vijes, en relación al pensamiento espacial particularmente en lo relacionado a la traslación, este análisis surge de las últimas pruebas realizadas.

Palabras claves: Educación primaria, generalización de patrones, GeoGebra, aprendizaje, secuencia didáctica, algebra.

Referentes teóricos

Para la configuración de la secuencia de situaciones se tuvo en cuenta el referente matemático, curricular, cognitivo y didáctico. En relación al matemático se reconoció la traslación y los elementos que lo componen como lo son; la magnitud, el vector, la dirección entre otros aspectos que son propios de la matemática. También se consideró el referente curricular, el MEN plantea unas directrices que giran alrededor de conocimientos básicos, procesos y contextos dentro de la educación. Desde los conocimientos básicos el foco del trabajo esta direccionado a partir del Pensamiento espacial y sistemas geométricos; en relación a los procesos se abordarán desde el razonamiento y la comunicación, y en relación al contexto se definió un contexto meramente matemático.

Ahora en lo cognitivo se tomó en consideración los parámetros que generó Rabardel (1995) en relación con la génesis instrumental y los procesos de mediación; donde intervienen aspectos importantes como artefacto, instrumento, Instrumentalización e Instrumentación que median el proceso cognitivo en los estudiantes y que permitirá observar la funcionalidad y aportes que estos generan alrededor de la traslación.

Estos referentes, permitieron pensarse en la configuración de una Secuencia Didáctica, sin dejar de lado que también se debía integran una teoría didáctica como lo es; la secuencia de situaciones de Guy Brousseau la cual integra aspectos como; situación didáctica, medio y contrato didáctico y tipología de situaciones, que fueron pertinentes en la fase de diseño y configuración.

Metodología

Para este trabajo se utilizará el paradigma de indagación cualitativo con un acercamiento a un estudio de caso, lo cual implica un tratamiento descriptivo e interpretativo del fenómeno desde un estudio. El método de investigación cualitativa consiste en la observación, recolección e interpretación de información referente a los fenómenos estudiados y poder darle un significado. “Enfoque cualitativo Utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación”. En relación al caso interesa mencionar que se tomara una muestra de estudiantes de grado tercero de educación básica para abordar interrogantes sobre en relación a la problemática de estudio, su naturaleza, porque es importante el estudio del fenómeno y como se puede solucionar.

Resultados

Frente a los aportes que genera la secuencia didáctica al aprendizaje de la translación, se pudo evidenciar que el uso de GeoGebra, permite contemplar diferentes tipos de representaciones, generar una mayor visualización del objeto y evaluar diferentes tipos de casos, lo que provee al estudiante de la construcción de estrategias de solución en las cuales se articulan sus conocimientos previos, adicionalmente se busca que en la interacción entre pares el estudiante genere argumentos sólidos que lo acerquen a la conceptualización del objeto matemático y esto se evidencio en la puesta en acto.

Discusión y conclusiones

Uno de los objetivos de este trabajo era reconocer las mediaciones instrumentales que surgían en la puesta en acto de la secuencia didáctica y se encontró que el profesor en la etapa de configuración puede predecir desarrollos instrumentales por parte de los estudiantes, esto nos lleva a considerar que la actividad mediada del sujeto está relacionada con la apertura del campo de las acciones posibles del artefacto. Esta idea, abre las posibilidades de continuación de este trabajo, evaluando ahora los procesos de enseñanza en relación con la traslación o extender el análisis a una comunidad de maestros de matemáticas interesados en la integración de la tecnología en el aula.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (1998). Visite de l’atelier <<Thèorie des situations>>, et, rèponses aux questions des participant de I’ U.E, en Noirfalise. France: Actes de I’Universitè d’ètè, La Rochelle- Charente- Maritime.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Fernández, A., Nécula, I., Martín, J., Garrido, M., & Navarro, M. ((s.f)). Transformaciones geométricas. Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

Gutiérrez, M. al et; (2006); Modulo 4 Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos; Editorial Artes y Letras Ltda.; Medellín, Colombia.

Hernández, R. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. En (6° edición) metodología de investigación. (pp. 1-22). México: Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D. C: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, D. C: Magisterio. recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá, D. C: Magisterio.

Moreno, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. México. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas. Santa Fe de Bogotá.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales

Vladimir Alexander **Pechene** Montenegro
Universidad del Valle
Colombia
vladimir.pechene@correounivalle.edu.co
Diego **Garzón** Castro
Universidad del Valle
Colombia
diego.garzon@correounivalle.edu.co

Resumen

El propósito de la comunicación consiste en describir los elementos que configuran la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que se utiliza como lente teórico para analizar las decisiones de acción de los profesores en formación al adaptar y aplicar una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. Para el diseño de la THA se consideró, la heurística de los modelos emergentes y estudios relacionados sobre la enseñanza y aprendizaje de la semejanza. La THA se encuentra estructurada en cuatro niveles y la conforman doce tareas, se caracteriza porque incorpora el uso del ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Palabras clave: Trayectoria hipotética de aprendizaje; Heurística de los modelos emergentes; Investigación basada en el diseño; Mirada profesional; Formación de profesores.

Introducción

El proyecto de investigación análisis de las decisiones de acción del profesor de matemáticas en formación en la enseñanza del razonamiento y construcción de sentido geométrico el caso de la semejanza, surge como necesidad de indagar y reflexionar entorno a la formación de profesores, específicamente, respecto a la práctica pedagógica cuando esta es eje central de la formación profesional. Para ello, se estudiará los conocimientos profesionales del profesor de matemáticas, haciendo énfasis en las habilidades situadas que configuran la mirada profesional del profesor de matemáticas.

La pregunta problematizadora que orienta y delimita la investigación es ¿qué caracteriza la mirada profesional de los profesores en formación al diseñar y aplicar una secuencia de situaciones en la que utilizan una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales?

Para responder a la pregunta problematizadora se define, como propósito general, caracterizar las decisiones de acción de los profesores en formación cuando adaptan y aplican una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. Como objetivos específicos se establece: a) adaptar y aplicar una THA que se utiliza para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales, b) describir la mirada profesional de los profesores en formación cuando utilizan una THA para la enseñanza de la semejanza, y c) reconocer las decisiones de acción de los profesores en formación al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza centradas en la comprensión del estudiante.

Fundamentación teórica

Para esta investigación se consideran los constructos teóricos: mirar profesionalmente, la trayectoria hipotética de aprendizaje y la heurística de los modelos emergentes.

Mirar profesionalmente según Jacobs et al., (2010) corresponde a un conjunto de tres habilidades articuladas entre sí: identificar, interpretar y decidir, en particular, se hace referencia a las decisiones de acción como la respuesta en acto del profesor respecto a la comprensión del estudiante cuando se enfrenta a situaciones de enseñanza (Fortuny & Rodríguez, 2012).

Según Fernández & Choy (2020) las THA son un lente tórico que posibilita a los profesores estructurar la atención hacia el pensamiento matemático del estudiante, permitiendo identificar los objetivos de aprendizaje, interpretar el pensamiento matemático del estudiante y decidir cómo responder con una instrucción adecuada. Un punto de acuerdo entre los investigadores, es la eficacia de su uso para la práctica de los profesores, puesto que permite comprender el pensamiento matemático de los estudiantes y planificar respuestas de instrucción con base en la comprensión de los estudiantes (Fernández & Choy, 2020)(Wickstrom & Langrall, 2018)(Ivars et al., 2020).

La heurística de los modelos emergentes tiene por objetivo crear una secuencia de tareas que permita que los estudiantes transiten de un modelo-de actividad matemática informal a un modelo-para el razonamiento matemático más sofisticado (Gravemeijer, 1999). En esta investigación, la heurística de los modelos emergentes, provee una estructura para la elaboración de las tareas de aprendizaje que componen la THA.

Metodología

Al comprender el estudio sistemático de diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas, se definió usar la Investigación Basada en el Diseño, puesto que converge en cerrar la brecha existente entre la práctica y la teoría en educación (Bakker, 2018). La estrategia investigativa corresponde al experimento de enseñanza con sus tres fases: diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza.

La trayectoria hipotética de aprendizaje (THA)

La THA sirve a los profesores en formación para identificar los objetivos de aprendizaje, interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y responder con una instrucción adecuada, en otras palabras, proporciona a los profesores en formación un leguaje matemático específico para describir el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández & Choy, 2020). La ruta hipotética que siguen los estudiantes en el aprendizaje de la semejanza se fundamentó en investigaciones relacionadas con este concepto.

Diseño y adaptación de la THA

La meta de aprendizaje conjeturar respecto a las propiedades de la semejanza entre figuras bidimensionales en contextos de resolución de problemas se definió conforme a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (MEN, 2016) para estudiantes de grado 9º.

Las tareas se diseñaron considerando aspectos curriculares, matemáticos y didácticos del concepto de semejanza. La articulación de las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje se fundamentó en el trabajo de investigación doctoral de Gualdrón (2011), que analizó y caracterizó la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas a estudiantes de noveno grado de la enseñanza básica secundaria colombiana.

En esta investigación la secuencia de las tareas se guío por la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999), ya que posibilita que los estudiantes desarrollen modelos-de actividad matemática informal que posteriormente evolucionan en modelos-para un razonamiento matemático más sofisticado. La progresión de un modelo-de al modelo-para se define en términos de cuatro niveles: situacional, referencial, general y formal (Gravemeijer, 1999).

El nivel situacional involucra que los estudiantes trabajen en dirección a los objetivos matemáticos a partir de experiencias reales para ellos. Para este nivel, el propósito de la tarea consiste en reconocer rasgos de figuras que están relacionadas por una transformación de homotecia a partir de su visualización.

Así, por ejemplo, la tarea 1A diseñada para este nivel y que tiene por consigna: la figura inicial y la figura final que corresponden respectivamente a la composición geométrica 1 y composición geométrica 2, están relacionadas por medio de una transformación geométrica. En cada una de las composiciones activa el botón iniciar para observar el movimiento. Esta tarea posibilita reconocer características visuales de la semejanza al considerar para cada composición el aumento y disminución en el tamaño de la figura final respecto a la inicial, es decir, considera factor de semejanza mayor a uno ($k>1$), y factor de semejanza entre cero y uno ($0<k<1$). Otro rasgo de la tarea consiste en que, corresponde a una tarea de contexto real que favorece reconocer a partir del movimiento de las figuras, la conservación de la forma, cambio en el tamaño y paralelismo entre los lados.

En relación con el proceso hipotético de aprendizaje, los estudiantes: (a) comparan la figura inicial con la figura final, (b) observan y reconocen a partir del movimiento de figuras relacionadas a través de una transformación de homotecia, el cambio en el tamaño, la conservación de la forma y el paralelismo entre los lados homólogos.

El nivel referencial abarca modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que refieren al problema de la actividad situacional. El propósito de las tareas propuestas para este nivel, consiste en que los estudiantes reconozcan características visuales como la conservación de la forma, cambio en el tamaño y colinealidad de los puntos correspondientes entre figuras planas que están relacionadas por medio de una trasformación de homotecia.

Por ejemplo, la tarea 2B que corresponde a un esquema, presenta ilustraciones que van desde la uno hasta la seis, destacándose la figura inicial y la figura final. Se pide arrastrar la figura inicial de tal manera que se superponga con la figura final, haciendo coincidir todos sus puntos. Esta tarea posibilita reconocer características visuales de la semejanza al proponer ilustraciones como la tres y cuatro, cuyo factor de semejanza es mayor a uno ($k>1$), que permite reconocer el aumento en el tamaño y la conservación de la forma; la ilustración uno, cuyo factor de semejanza esta entre cero y uno ($0<k<1$), permite reconocer la disminución en el tamaño y la conservación de la forma.

Asimismo, se proponen las ilustraciones dos y cinco de contraste, que corresponden a figuras relacionadas por medio de una transformación de rotación y traslación, destacándose porque si bien, al aplicar las transformaciones las figuras conservan la forma, el tamaño no varía, y en el caso de la rotación los puntos correspondientes no son colineales. Finalmente, en la ilustración seis, se presenta una figura inicial y una figura final que no guardan ninguna relación, puesto que al ser figuras planas diferentes al arrastrar en línea recta la figura inicial, no es posible hacer coincidir sus puntos con los puntos de la figura final.

En cuanto al arrastre, la tarea privilegia un arrastre guiado[1] ya que, al superponer la figura inicial sobre la figura final a través de un deslizamiento en línea recta, los estudiantes reconocen la forma, el tamaño y la colinealidad, como factores fundamentales para establecer una relación de semejanza entre figuras planas.

Por lo que se refiere al proceso hipotético de aprendizaje, los estudiantes: a) observan la trayectoria que sigue la figura inicial al ser arrastrada hasta la figura final, y b) reconocen características visuales de la transformación de homotecia (conservación de la forma, cambio en el tamaño y colinealidad de los puntos correspondientes) al superponer la figura inicial con la figura final.

[1] Arzarello et al., (2002) establecen diferentes tipos de arrastre: a) *arrastre libre* consiste en mover puntos de una representación por la pantalla de forma aleatoria, para descubrir configuraciones o regularidades interesantes, b) *arrastre guiado* consiste en mover puntos de una representación para darle una forma particular a esta, con el fin de lograr identificar alguna propiedad, c) *arrastre vinculado* consiste en mover un punto sobre el objeto al que pertenece, y d) *arrastre de lugar ficticio* consiste en mover un punto de una representación procurando que ésta conserve una propiedad. El punto arrastrado se mueve siguiendo un camino que quizá el usuario no conoce inicialmente, pero que debería descubrir.

El nivel general supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo obtenido en el nivel referencial. El propósito de las tareas en este nivel corresponde a reconocer, comprender y justificar las relaciones de la semejanza entre figuras planas.

Así, por ejemplo, la tarea 3D que corresponde a un esquema, presenta las ilustraciones uno, dos y tres, en las que se destacan la figura inicial y final. Se pide arrastrar en línea recta la figura inicial desde uno de sus vértices hasta superponerla con la figura final, de tal manera que coincidan todos sus puntos. En esta tarea, el factor de semejanza de la ilustración uno, está entre cero y uno ($0<k<1$) posibilitando reconocer la disminución en el tamaño y la conservación de la forma, en la ilustración dos, el factor de semejanza es mayor a uno ($k>1$) posibilitando reconocer el aumento en el tamaño y la conservación de la forma, sin embargo, la ilustración tres, se destaca porque se presenta como ilustración de contraste, puesto que la figura inicial y final se encuentran relacionadas a través de una transformación de traslación, en la que no es posible evidenciar el cambio en el tamaño.

En relación con el arrastre, la tarea privilegia un arrastre guiado ya que permite reconocer regularidades e identificar propiedades. Asimismo, hay que hacer notar, el uso de la herramienta *Rastro* en la tarea, ya que es fundamental para observar la "huella" que deja cada punto de la figura al cambiar de posición, siendo importante para establecer la colinealidad como una de las características centrales entre figuras que se relacionan por medio de una transformación de homotecia.

Con respecto al proceso hipotético de aprendizaje, los estudiantes: a) observan el rastro que deja la figura inicial al ser arrastrada para superponerla con la figura final, y b) determinan correctamente algunas propiedades de la semejanza como la colinealidad entre puntos correspondientes, el cambio de tamaño y la conservación de la forma entre figura planas.

El nivel formal conduce a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que le otorgaron su significado inicial. En este nivel, el propósito de la tarea consiste en inferir que los lados homólogos de la figura inicial y la figura final son paralelos.

Por ejemplo, la tarea 4B que corresponde a un esquema, se presentan dos ilustraciones. En la ilustración uno se destaca la figura inicial, el triángulo ABC, la figura final, el triángulo A´B´C´, el centro de homotecia y el botón "ver homotecia"; en la ilustración dos, se destacan las parejas de segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{A'B'}$; $\overline{CB}\ y\ \overline{C'B'}$; $\overline{CA}\ y\ \overline{C'A'}$ y el botón "ver segmentos". Se pide activar los botones en el orden que corresponde a cada ilustración con el fin de observar el movimiento. Esta tarea para el caso de la ilustración uno, permite reconocer a partir del movimiento, el paralelismo entre los lados que se corresponden de la figura inicial y final, asimismo, la correspondencia entre los lados homólogos. Para el caso de la ilustración dos, posibilita inferir que, en figuras que se encuentran relacionadas por una transformación de homotecia, como es el caso de la ilustración uno, los lados homólogos AB y A´B´; CB y C´B´; CA y C´A´ son paralelos y proporcionales, concretándose en las preguntas: 1) ¿qué relación se puede establecer entre los lados homólogos de la figura inicial y la figura final que se muestran en la ilustración 2? , y 2) ¿cuál es el valor que se usó para reducir la figura final de la ilustración 1? Justifica tu respuesta.

En cuanto al proceso hipotético de aprendizaje, los estudiantes: a) observan el movimiento de la figura inicial y el rastro que dejan los vértices de la figura inicial hasta que se superpone con la figura final, (b) reconocen que las semirrectas que contienen los vértices de la figura inicial y la figura final convergen en un punto llamado centro de homotecia, e c) infieren como característica central de la semejanza, el paralelismo entre los lados homólogos y la proporcionalidad entre la longitud de sus lados.

Resultados y discusiones

En este estudio se presenta una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. La meta consiste en posibilitar a los estudiantes conjeturar respecto a las propiedades de la semejanza entre figuras bidimensionales en contextos de resolución de problemas.

La estructura de la THA se fundamentó en la heurística de los modelos emergentes. Las tareas del nivel situacional, se encaminaron a que los estudiantes reconocieran la conservación de la forma y el cambio en el tamaño entre figuras semejantes, a partir de experiencias reales para ellos. En el nivel referencial, las tareas se orientaron a reconocer y comprender condiciones necesarias y suficientes en la determinación de figuras semejantes. Las tareas del nivel general, se encaminaron utilizar la ideas aprendidas en las actividades previas, con el fin de justificar la semejanza de figuras planas, y en el nivel formal, las tareas se orientaron a inferir características centrales de la semejanza como: paralelismo entre lados homólogos, colinealidad entre puntos correspondientes y el factor de semejanza.

Por lo que se refiere al proceso hipotético de aprendizaje, en el nivel situacional, los estudiantes reconocen a partir del movimiento, figuras que se encuentran relacionadas por medio de una semejanza. En cuanto al nivel referencial, los estudiantes reconocen características visuales de la transformación de homotecia a partir de la superposición de figuras. Respecto al nivel general, los estudiantes determinan propiedades de la semejanza a partir de la superposición y el rastro que dejan las figuras al superponerlas, por último, en relación al nivel formal, los estudiantes infieren la relación de paralelismo que se establece entre lados homólogos de las figuras.

La THA se destaca porque posibilita promover la comprensión del concepto de semejanza, ya que el diseño y la secuenciación de las tareas facilita transitar de concepciones e ideas previas hacia el tratamiento y comprensión formal del concepto.

Finalmente, la THA además de actuar como recurso, se espera que posibilite teorizar en relación con lo que ocurre en esa interacción de los profesores en formación con la THA.

Agradecimientos

Esta publicación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, quien financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852-70767. A través del Patrimonio Autónomo Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación Francisco José de Caldas.

Referencias y bibliografía

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66.

Bakker, A. (2018). Design Research in Education. In *Design Research in Education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Fernández, C., & Choy, B. H. (2020). Theoretical Lenses to Develop Mathematics Teacher Noticing. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 337–360). https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fortuny, J. M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *1*, 23– 32.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gualdrón, É. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas* [Universidad de Valencia]. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=23803&info=resumen&idioma=SPA

Ivars, P., Fernández-Verdú, C., & Llinares, S. (2020). *Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción*. *3*, 105–124.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

MEN. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46-95). Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Versión 2*. Bogotá, Colombia.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective.
Journal for Research in Mathematics Education, *26*(2), 114. https://doi.org/10.2307/749205

Wickstrom, M. H., & Langrall, C. W. (2018). The case of Mrs. Purl: Using a learning trajectory as a tool for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(1), 97–125. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9412-8

Vídeos e videoaulas de matemática: um estudo a partir da Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia

Andréa **Thees**
Departamento de Didática, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
andrea.thees@unirio.br

Resumo

Este trabalho apresenta resultados da pesquisa de doutorado “Aprendi no YouTube!: investigação sobre estudar matemática com videoaulas”. Buscou-se responder em que medida assistir às videoaulas de matemática do YouTube, pode contribuir para o estudo efetivo de conteúdos matemáticos. As videoaulas selecionadas foram assistidas e analisadas aplicando princípios da Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia (TCAM) para avaliação de produtos audiovisuais. A netnografia foi escolhida como metodologia de pesquisa, cujos dados foram coletados diretamente na internet. Elaborou-se um critério para pontuar as características das videoaulas, que permitiu refletir acerca da crescente projeção do YouTube para fins educacionais. Conforme os resultados encontrados, assistir videoaulas de matemática disponíveis na plataforma tornou-se uma prática recorrente. Todavia, o estudo de conteúdos de matemática dependerá do grau de aderência da videoaula aos princípios da TCAM. Ou seja, quanto mais atraente e apelativa, menores as chances de a videoaula contribuir para o estudo efetivo de conteúdos de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação superior; Aprendizagem; Cognitivismo; Redes sociais; Pesquisa Educacional; Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro; Brasil.

Introdução

A plataforma de compartilhamento de vídeos YouTube possui certas peculiaridades desde sua estreia na rede mundial em 2005. Entender a ascensão do YouTube.com, como um fenômeno da internet, tem sido o foco principal de diversos pesquisadores (Allocca, 2018; Burguess e Green, 2018; Christensen, 2007; Crick, 2016; Lange, 2014).

A premissa que pressupõem um rompimento com o antigo sistema de aprendizagem parece ser um dos desafios educacionais do século XXI. Tem-se presenciado a cada dia mais e mais professores ansiosos em integrar as tecnologias às práticas pedagógicas, buscando inovar o processo de ensino e aprendizagem, sem que essas tentativas de inovação se transformem em apenas mais um modismo.

Em contrapartida, a maioria dos sujeitos que frequentam a educação regular atualmente, pertence a uma geração que nunca viveu sem celulares, tablets ou computadores pessoais e, consequentemente, sem acesso à internet. Segundo Thees (2019), as chamadas Geração Millenium, Geração Z e Geração Linksters possuem hábitos peculiares e esse coletivo de nativos digitais, muito provavelmente, está tentando nos indicar que as instituições escolares precisam repensar suas estratégias de ensino e seus modos de atuar.

Nessa direção, Pretto (2011) indica que as Tecnologias Digitais (TD), em especial as baseadas no audiovisual, se encaixam em planejamentos que consideram central o sujeito da aprendizagem. A revisão de literatura realizada indicou que as pesquisas envolvendo as TD, com foco no uso do audiovisual, videoaulas e YouTube, começaram a ser publicadas somente a partir de 2010, reforçando que existe um descompasso entre o que acontece dentro das salas de aula e o que acontece fora delas (Borba, 2016). Por outro lado, observou-se propostas pedagógicas supondo um ensino mais atrativo e eficiente, envolvendo a incorporação de vídeos do YouTube para iniciar e/ou finalizar, ou mesmo durante as aulas, sejam eles centrados no professor ou nos estudantes. Segundo Bonk (2011), "o vídeo online compartilhado é uma ferramenta fácil de usar e poderosa para o ensino", além de servir "para estimular o interesse do aluno em um tópico" (p. 17). Nesse sentido, a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia – TCAM, de Mayer (2009) apontou potencialidades, mas também limitações, tanto na produção de videoaulas de matemática, quanto na seleção de videoaulas para consumo em práticas pedagógicas e na ação individual de estudar-matemática-com-videoaula.

A questão que se coloca, então, para pensar as particularidades da prática de estudar matemática com videoaulas no YouTube, se refere a existência de novas relações de aprender e ensinar, de outras formas de comunicação inusitadas, de coletivos nunca pensados antes, de conexões que se estabelecem independente da distância e do momento (LANGE, 2014). É também considerar que as tecnologias digitais deveriam estar cada dia mais e mais presentes nos processos de ensinar e de aprender matemática.

Princípios de Mayer aplicados à análise de videoaulas

Embora o objeto de estudo da Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia de Mayer (2009) tenham sido as apresentações multimídia, seus conceitos, definições e proposições podem ser aplicadas a outras instruções multimídia, como seria o caso de vídeos ou videoaulas. O autor indica também, em vários trechos de sua obra que nenhuma teoria é definitiva e que, apesar de todos os testes realizados por ele e seus colegas, mais pesquisas necessitam ser desenvolvidas para esclarecer como a aprendizagem multimídia acontece.

Na questão da análise de videoaulas, também se pode aplicar os três objetivos que Mayer (2009) indicou como sendo de fundamental importância para os materiais multimídias voltados para a aprendizagem, e que devem ser observados durante a sua elaboração. Esses objetivos, que visam à redução do processamento de conteúdo supérfluo, ao gerenciamento do entendimento essencial e à promoção do processamento criativo, inspiraram os doze princípios da TCAM, sistematizados em três grupos distintos, sendo: *Princípios para reduzir o processamento supérfluo*: coerência (1), sinalização (2), redundância (3), proximidade espacial (4) e proximidade temporal (5); *Princípios para gerenciar o processamento essencial*: segmentação (6), conhecimento prévio (7) e modalidade (8); *Princípios para promover o processamento criador*: multimídia (9), personalização (10), voz (11) e imagem (12).

Metodologia e desenvolvimento da pesquisa

A abordagem netnográfica (Cruz, 2016; Kozinets, 2014) foi escolhida para orientar essa investigação, posto que agrega novas perspectivas às pesquisas que têm a internet como cenário e são desenvolvidas em uma rede social virtual, no que se refere a observar as maneiras como se experimenta e vivencia o uso das tecnologias digitais, detalhadamente. A netnografia, segundo Kozinets (2014), se apresen3ta como "uma forma especializada de etnografia adaptada às contingências específicas dos mundos sociais de hoje mediados por computadores" (IBIDEM, p. 9). Segundo o autor, as plataformas virtuais se constituem não apenas como um lócus virtual de interação dos indivíduos, mas como um lócus de pesquisa para entender o comportamento desses indivíduos.

> A abordagem netnográfica é adaptada para ajudar o professor a estudar não apenas fóruns, bate-papos e grupos de notícias, como também blogs, comunidades audiovisuais, fotográficas e de podcasting, mundos virtuais, jogadores em rede, comunidades móveis e websites de redes sociais. (Kozinets, 2014, p. 11)

Na visão de Cruz (2016), a netnografia sistematizou, através de um método robusto, o procedimento ético e científico dos estudos conduzidos em ambientes online, respeitando os pressupostos da pesquisa acadêmica. Além disso, o autor ressalta que o método

> pode ser usado não somente na análise do comportamento tribal ou cultural de jovens e consumidores na Internet por meio de fóruns e chats, sendo possível considerar também blogs, material audiovisual (como os vídeos disponibilizados no YouTube), fotografias, podcastings e plataformas digitais disponíveis para smartphones. (Cruz, 2016, p. 186-187)

Algumas particularidades do YouTube, como o número de curtidas, de visualizações, a quantidade de compartilhamentos, a comunidade de seguidores, entre outros, interferem de modo considerável na dinâmica do canal e na produção de videoaulas. Esses dados eletrônicos constituem um conjunto de informações importantes que podem auxiliar na interpretação do fenômeno estudado.

Sendo assim, para encontrar respostas para a pergunta norteadora, a saber, *em que medida assistir às videoaulas de matemática do YouTube pode contribuir para o estudo efetivo de conteúdos matemáticos*, foi selecionado um canal de videoaulas de matemática no YouTube, que conta com, aproximadamente, um milhão e quatrocentos mil inscritos e com um acervo de quase dois mil videoaulas. Na etapa seguinte, sistematizamos a pesquisa, conforme sugere Cruz (2016), utilizando a ordenação por índice de popularidade próprio YouTube. Esse ranking considera as duzentas videoaulas visualizadas por mais tempo, e que representavam 11% do total de videoaulas do canal. Para a análise foram selecionadas as vinte primeiras do ranking de duzentas videoaulas, ou seja, com um tipo de amostragem não aleatória de 10% do total de videoaulas mais populares. As escolhas, tanto desse campo de pesquisa – o Canal MatemáticaRio no YouTube, quanto desses objetos para a coleta de dados – as vinte videoaulas de matemática, se originaram em uma hipótese que, de certa forma, originou esse trabalho.

Essa hipótese se refere ao fato de que diversos usuários afirmam, principalmente nos comentários postados no canal, ter *aprendido algum conteúdo de matemática assistindo às videoaulas*. Sendo assim, presumi que a afirmação "Aprendi no YouTube!" só poderia ser possível se os princípios da TCAM houvessem sido respeitados nas videoaulas. Para isso, esses materiais multimídia deveriam ter pontuação inicial máxima em todos os princípios, o que equivaleria a uma média final de dez pontos, segundo os critérios utilizados aqui nesse trabalho. Todavia, conforme deixava de atender um ou outro princípio, no todo ou em parte, o grau de aderência da videoaula ao princípio se alterava, variando a quantidade de pontos perdidos, tendo sido essa ideia que originou o conceito de pontuação negativa na tabela de conversão.

A planilha de controle das pontuações, com a discriminação dos pontos obtidos em cada princípio pelas videoaulas analisadas, facilitava uma visão geral do comportamento das videoaulas quando submetidas aos doze princípios da Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia, de Richard Mayer (2009). Além dos valores absolutos de aderência a certo princípio e dos valores médios por grupo de princípios, a planilha calculava a média geral das vinte videoaulas. Esses valores foram comparados através da seguinte tabela:

Princípios da TCAM	**Média**
A. Princípios para Reduzir o Processamento Superflúo	**9,32**
1. Princípio da Coerência	7,45
2. Princípio da Sinalização	9,25
3. Princípio da Redundância	9,75
4. Princípio da Proximidade Espacial	10,00
5. Princípio da Proximidade Temporal	9,88
B. Princípios para Gerenciar o Processamento Essencial	**8,03**
6. Princípio da Segmentação	6,70
7. Princípio do Conhecimento Prévio	7,20
8. Princípio da Modalidade	10,00
C. Princípios para a Promoção do Processamento Criativo	**9,71**
9. Princípio Multimídia	10,00
10. Princípio da Personalização	10,00
11. Princípio da Voz	10,00
12. Princípio da Imagem	5,38
Nível Total de Aderência da Videoaula aos Princípios:	**9,11**

Síntese Comparativa das Médias de Aderência à TCAM
Fonte: Elaborado pela autora

Em relação às médias, cinco princípios obtiveram pontuação máxima. No caso do princípio da *proximidade espacial*, no qual a proximidade de palavras e imagens facilitaria a memória de trabalho e evitaria o esforço de retenção da imagem, existia total sincronicidade entre a narração e as imagens que iam aparecendo ao longo da videoaula.

Similarmente, o *princípio da voz* infere que existem maiores chances de aprendizagem quando o material multimídia exposto é narrado em uma voz humana amigável, e não por uma voz computadorizada, e o *princípio da personalização*, que diz que as pessoas aprendem melhor a partir de apresentações multimídia quando as palavras são apresentadas de maneira informal, em tom de conversa, ao invés de uma apresentação formal, foram totalmente atendidos nas videoaulas analisadas. Em outras palavras, a voz utilizada nas videoaulas é do próprio narrador, e não uma voz mecanizada ou robotizada. Também o modo de narração empregado é informal, adotando um tom de conversa coloquial.

De modo equivalente, o *princípio da modalidade* manteve a pontuação máxima, o que pode ser compreendido facilmente, a partir do estilo das videoaulas de matemática do Canal MatemáticaRio. Nelas, as imagens são acompanhadas exclusivamente de palavras narradas, ou seja, em formato sonoro, descarregando assim as informações do canal visual para o canal auditivo, liberando o sistema visual para processar com muito mais eficiência o que está sendo transmitido. Complementa esse princípio, o *princípio multimídia*, que afirma que *as pessoas aprendem melhor a partir de palavras e imagens do que apenas a partir de palavras*, possibilitando a construção de um modelo mental visual rico em conexões com o modelo mental sonoro e integrados entre si.

Em seguida, percebi que o *princípio da proximidade temporal* manteve a pontuação alta, provavelmente devido à simultaneidade na apresentação de palavras e figuras correspondentes, presente em praticamente todas as vinte videoaulas. Outro princípio que manteve sua pontuação alta foi o *princípio da redundância*. Uma explicação para justificar esse resultado poderia estar embasada na premissa assumida no início dessa análise, de que as fórmulas, símbolos e conectores usados na matemática foram considerados como imagens e somente quando havia uma palavra ou expressão escrita, esse registro era considerado como texto impresso. Assim também, a boa pontuação auferida ao *princípio da sinalização* pode estar significando que o material multimídia analisado era bem organizado no que se refere à inserção de dicas e indicações ao longo das videoaulas.

Não tão bem pontuados assim estavam os *princípios da coerência* e do *conhecimento prévio*. Ambos não obtiveram o grau de aderência desejado, tendo em vista que, na maioria das videoaulas, são adicionadas informações irrelevantes à aprendizagem do tema principal em si. Em geral, as videoaulas iniciam com uma chamada, informação sobre o canal, pedido de inscrição ou de curtidas, propaganda da plataforma MatemáticaRio, ou mesmo brincadeiras ou piadinhas. Embora esse estilo seja a marca registrada do canal, ele não se limita aos momentos iniciais da videoaula. Além disso, também foram encontrados materiais supérfluos ao longo das videoaulas analisadas. Por outro lado, em algumas videoaulas, notei que era deixada uma lacuna em relação a realizar um treinamento prévio tal que o usuário se familiarizasse com os nomes e as características dos principais elementos a serem ensinados. Mais abaixo em termos de aderência das videoaulas, está o *princípio da segmentação*, revelando a necessidade de existirem alternativas para que sejam feitas pausas na videoaula de acordo com o ritmo de cada um.

Por fim, mas tão importante quanto os princípios discutidos acima, está o *princípio da imagem*. Ele afere à imagem do narrador a motivação para aprender com o material multimídia, no caso, com as videoaulas de matemática. A pontuação baixa se refere à existência de praticamente a metade das videoaulas analisadas gravadas sem a imagem do narrador, em formato de quadro-negro, ou apenas exibindo suas mãos. Essas videoaulas, em que eram visualizadas somente as mãos do narrador, tiveram diminuídas as pontuações referentes ao princípio da coerência, pois os gestos das mãos em cima das explicações do conteúdo causavam bastante distração.

Outras observações que podem ser retiradas da tabela anterior, dizem respeito aos grupos de princípios, sendo que a menor média ficou com o grupo dos princípios para *gerenciar o processamento essencial*, que são aqueles que mais influenciaram na média final das videoaulas. Talvez, a alta aderência das videoaulas aos princípios para *promover o processamento criativo*, seja a principal responsável pelo sucesso do canal. Essa suposição pode indicar o quanto é importante, para o sucesso de uma videoaula, respeitar os princípios da personalização, da voz e da imagem, além do próprio princípio multimídia, obviamente. No caso do Canal MatemáticaRio, nesse grupo de princípios, apenas o princípio da imagem não obteve pontuação máxima.

Essa análise parece ser bastante significativa se for levado em conta que pontuações acima de 7,5 foram consideradas como tendo uma alta aderência ao princípio, pelos valores para conversão de grau em pontuação. No caso das treze primeiras videoaulas, que estão entre nove pontos e o máximo de dez pontos, os valores médios conquistados encontram-se na faixa de aderência alta, bem como as sete videoaulas restantes, apesar de terem obtido pontuação entre 7,5 e 9,0, também foram classificadas com um alto grau de aderência.

Considerei, então, ser possível afirmar que, quanto mais adequados estiverem os materiais multimídia utilizados como mediadores de processos educativos, mais chances de uma aprendizagem significativa ser efetivada. Lembrando, porém que, assim como Mayer (2009) alerta, os materiais multimídia podem ser apenas facilitadores da aprendizagem. Apenas por atender aos princípios da TCAM, não se pode afirmar que a aprendizagem se efetive de forma significativa, pois existem muitas outras variáveis envolvidas nesse processo.

Considerações Finais

A análise realizada acerca das videoaulas de matemática selecionadas, demonstrou um alto grau de aderência aos princípios da TCAM. De fato, foram identificadas as premissas dessa teoria, que se baseiam na afirmação de que o fluxo de informação deve ser oferecido de modo a possibilitar sua adequada absorção pelos canais auditivo e visual, de maneira integrada e coesa. Portanto, quando isso ocorria nas videoaulas, era possível verificar que as redundâncias eram evitadas e que eram regidas por um ritmo totalmente controlado pelo usuário, que tinha a liberdade de controlar a maneira como o conteúdo lhe é exposto, tanto a velocidade da reprodução, quanto a possibilidade de pausar o vídeo sempre que desejar.

O fato de serem gratuitas e possuírem uma interface amigável e intuitiva, as videoaulas acabam se tornando iscas atrativas. Especialmente para aqueles que pertencem à geração dos chamados nativos digitais, seu consumo até pode parecer confortável e familiar. Dessa forma, a opção de usar videoaulas para se estudar conteúdos de matemática, em um primeiro momento, surge como poderosa e eficiente. Contudo, por estarem hospedadas na rede social YouTube, sua utilização pode apresentar desvantagens.

O YouTube é uma plataforma tem seus próprios critérios de difusão dos seus conteúdos, com parâmetros definidos a partir de seu algoritmo e sua dinâmica. Pude reparar que esses processos métricos nada tinham a ver com a eficiência de uma videoaula na efetivação da aprendizagem instrução multimídia. Ou seja, descobri que a dinâmica, característica de redes sociais como o YouTube, comprometia a qualidade instrucional ao sugerir videoaulas com maior popularidade, em prol de videoaulas com mais qualidade. Além disso, verifiquei que a necessidade de atratividade estética, títulos apelativos, abordagem de conteúdos através de assuntos polêmicos, paródias, utilização de caixa alta e emojis para chamar a atenção, citando alguns exemplos, não significava que uma determinada videoaula obteria melhores avaliações a partir da TCAM.

As práticas daqueles usuários que atuam na produção de conteúdo mostraram estar sob a influência de tais aspectos. Ao se tornar um youtuber, professores proprietários de canal no YouTube e outros profissionais, passam a ser empreendedores si mesmos. A partir desse instante, passam a se preocupar com a autopromoção, com o crescimento do canal, com monetização, propagandas entre outras ações de vendas e marketing de produtos, no caso de videoaulas. Possivelmente, a qualidade pedagógica do material por ele produzido, poderá diminuir.

Enfim, reforço que o nível de aderência das videoaulas aos princípios da TCAM foi avaliado, exclusivamente, a partir da videoaula em si, desde o momento que ela se inicia até o momento em que ela termina. Desse modo, não considerei outros elementos presentes no YouTube, que podem impactar de maneira significativa a eficiência do emprego dessa plataforma como principal ferramenta de estudo. O caminho feito pelo usuário até a seleção de uma videoaula coloca em cena outros fatores. Afinal, como qualquer rede social virtual, o YouTube oferece uma verdadeira profusão de possíveis fontes de distração e conteúdos supérfluos, colocando o usuário a um clique de uma gama quase infinita de vídeos de puro entretenimento, sem nenhum valor educacional.

Os resultados da presente pesquisa me ajudaram a defender a tese de que estudar-matemática-com-videoaulas dependerá do grau de aderência aos princípios da TCAM para se concretizar. Todavia, evidenciei que quanto maior e mais óbvios são os esforços na produção de uma videoaula com o objetivo de torná-la mais interessante e mais popular entre os internautas, mais os princípios da TCAM parecem ser desrespeitados. Para Mayer (2009), essa atitude diminui as chances de que aquela instrução multimídia promova aprendizagem para o aluno. Ou seja, segundo a TCAM, quanto mais atraente e apelativa for a videoaula para os internautas, menor pode ser sua eficácia na instrução multimídia.

Entendo que essa investigação possa servir de inspiração para outras pesquisas sobre a produção e o consumo de videoaulas de matemática no YouTube ou, ainda, para contribuir teoricamente com os estudos acerca da aprendizagem multimídia. Pode, sobretudo, reconhecer que existem novas práticas sociais incentivadas pelas tecnologias digitais e que originaram a prática de estudar-matemática-com-videoaulas. Para mim, a conclusão dessa tese é como um marco para iniciar outras pesquisas que podem continuar aprofundando os debates e buscando compreender a afirmação "Aprendi no YouTube!". Afinal, sou apenas uma imigrante digital analisando um material multimídia que a maioria dos nativos digitais utiliza e aprova, afirmando que é possível aprender com ele.

Por fim, pontuo que conectar-se tecnologicamente agora, passa a ser uma necessidade social tanto quanto uma demanda educacional. Independentemente da situação que se impôs, ou dos resultados dessa pesquisa sobre videoaulas de matemática, a exclusão de uma parcela da população do acesso às tecnologias digitais, aumentará ainda mais o abismo social.

Referências e bibliografia

Allocca, K. (2018). Videocracy: how youtube is changing the world. Londres: Bloomsbury.

Bonk, C. J.. (2008). YouTube anchors and enders: the use of shared online video content as a macrocontext for learning. *The American Educational Research Association* (AERA) Annual Meeting. Anais... New York, NY.

Borba, M. C. (2016) Fases das tecnologias digitais e a reinvenção da sala de aula. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 12., 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM.

Burguess, J.; Green, J. (2018). Youtube: digital media and society series. 2 ed. Cambridge: Polity Press.

Christensen, C. (2007). Youtube: the evolution of media?. In: Screen Education – New Literacies, 45, 36-40. https://search.informit.com.au/documentsummary;dn=805148727785584;res=IELHSS.

Crick, M. (2016). Learning in youtube: what else is happening in the online universe of pets and pop stars? In: *Power, Surveillance, and Culture in youtube's Digital Sphere*. Nova Jersey: William Paterson University, 9, 243-269.

Cruz, B. P. Andrade. (2016) Netnografia: sim, é possível fazer pesquisa científica na internet! In: _____. *Curtir comentar compartilhar*: redes sociais virtuais e TV no Brasil. Curitiba: CRV. 9, 181-202.

Kozinets, R. V. (2014). *Netnografia*: realizando pesquisa etnográfica online. Porto Alegre: Penso.

Lange, P. G. (2014). *Kids on youtube*: Technical identities and digital literacies. São Francisco: Left Coast. Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning*. 2 ed. Nova Iorque: Cambridge.

Pretto, N. L. (2011). O desafio de educar na era digital. *Revista Portuguesa de Educação*, 24(1), 95-118.

Thees, A. (2019). "Aprendi no YouTube": investigação sobre estudar matemática com videoaulas. Rio de Janeiro, 2019. 260 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, RJ.

Índice alfabético de autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Uso de Tecnologías Digitales

Volumen 9, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

ISBN: 978-9945-18-793-9

9 789945 187939

https://ciaem-iacme.org