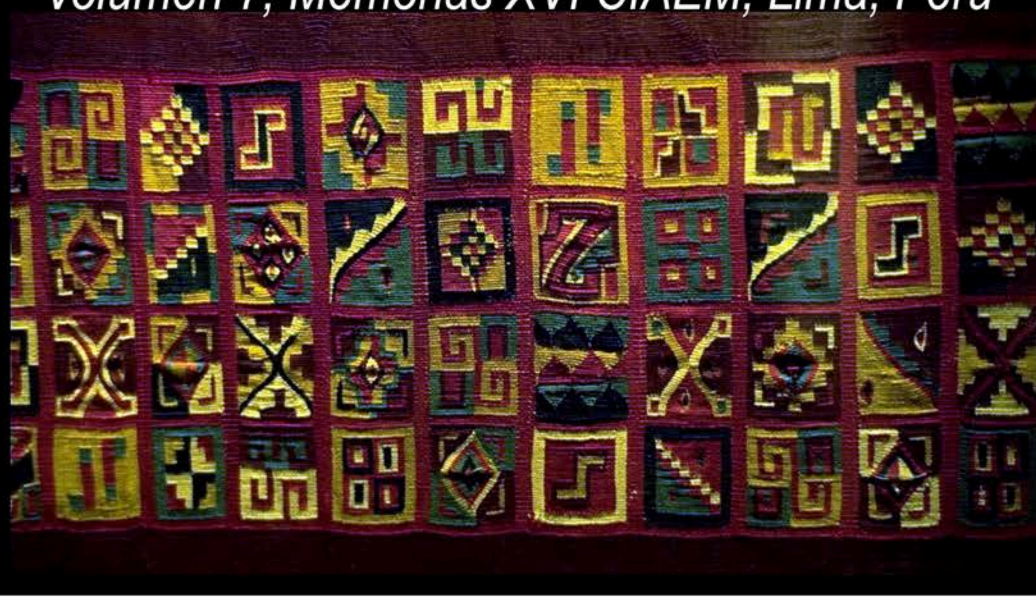
EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Historia y Epistemología

Volumen 7, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú



Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores

CIAEM IACME
desde - since 1961

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2023
Historia y Epistemología
[Volumen 7, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-791-5
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática*** **(XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: “un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas” (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con "sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo". Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional.*

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Los trabajos incluidos en esta colección digital de volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Análisis de libro didáctico de matemática en El Salvador: uso de la historia de la matemática en los libros de texto oficiales de Educación Media

Jeser **Candray**
Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación. Universidad Francisco Gavidia
El Salvador
jcandray@ufg.edu.sv / jeser.candray@unesp.br

Resumen

En este estudio se presentan los avances de una investigación que tiene como objetivo analizar y categorizar el uso de la historia de la matemática en los libros didácticos oficiales de El Salvador para el Tercer Ciclo de Educación Básica y Educación Media del año 2019; sin embargo, esta comunicación se limita a discutir los resultados preliminares del estudio de los libros didácticos de la Educación Media. Para alcanzar tal objetivo, se estableció una investigación de tipo cualitativa y documental. Para el análisis de los libros la investigación se inspiró en los presupuestos metodológicos de Charalambous et al. (2010) y para la categorización de las historias de matemática se hace uso de las categorías de historias en los libros didácticos propuestos por Vianna (1995). Los resultados muestran un uso motivacional y de información complementaria en los libros analizados y poca profundización en las potencialidades del uso de la historia de la matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; Historia de la matemática; Educación secundaria; Investigación cualitativa; Libros didácticos; El Salvador.

Ideas iniciales

El interés del autor por analizar libros didácticos surge en el año 2018 cuando el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de El Salvador (Mineducyt) introdujo una propuesta curricular y metodológica de la enseñanza de la matemática en la Educación Básica y Media a través del proyecto Esmate. Este proyecto, que inició en el año 2015 y fue financiado por la Agencia de Cooperación Internacional de Japón (JICA), además de brindar recursos financieros, aportó al país recursos humanos quienes apoyaron con asesoría técnica en la revisión curricular y metodológica al personal del Mineducyt para la revisión de las Programas de Estudio, elaboración e impresión de Libros de Texto, Guías Metodológicas para la asignatura de matemática y formación para los profesores (JICA, 2020). Estos libros son el material didáctico obligatorio en las aulas de matemática de los cerca de seis mil centros escolares públicos de El Salvador. Ante la nueva propuesta presentada y la prescriptividad del uso de los libros se decidió hacer un estudio que problematizara la colección desde distintas facetas. Sin embargo, dimensionando la cantidad de material disponible (11 libros de texto y 11 guías metodológicas), fue necesario hacer una delimitación. Por ello, se decidió trazar un estudio inicial a partir de los libros de Educación Media.

Luego de una primera revisión de los libros de texto mencionados surgieron distintas preguntas que van desde lo estructural a lo metodológico, de los problemas y ejercicios al tipo de matemática se presenta en los libros; no obstante, a pesar de lo interesante que podría ser analizar los libros en esas variables, una pregunta llamó la atención: ¿cuál es el uso de la historia de la matemática en esta colección? Es ante este escenario y ante tales preguntas que planteo el objetivo de esta investigación: analizar y categorizar el uso de la historia de la matemática en los libros de texto oficiales emitidos por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de El Salvador para el primer y segundo año de bachillerato (Educación Media).

Sobre el estudio de libros didácticos

La importancia del estudio de los libros didácticos (LD) en matemática como objeto de investigación en educación matemática es relativamente reciente (Choppin, 2004), (Fan, 2013) y (Schubring, 2018). Para Choppin (2004), ese tardío interés académico por los LD se debe, entre otras cosas, a la dificultad de definir qué es un libro didáctico (libro de texto, material didáctico, etc.). Según el autor, hacer a un lado esa definición pudo ayudar a su constitución como campo de estudio. Por otro lado, se debe considerar que las potencialidades de su estudio tienen una diversidad de justificaciones y dependerá mucho de los objetivos y del papel que juega en el aula.

Por ejemplo, Choppin (2004) destaca cuatro funciones del LD en el contexto escolar: el libro de texto como referencia, (curricular); instrumental, (didáctica o docente); cultural, ideológico (político y social) y; documental, (histórico). Por su parte, Valente (2008) al realizar una investigación histórica sobre el rol de los libros didácticos en el aula de matemática de Brasil establece una relación casi desde la constitución de la matemática como disciplina escolar y el uso de los LD a tal punto que “tal vez sea posible decir que la matemática se constituye en la disciplina que más tiene su trayectoria entrelazada a los libros didácticos” (Valente, 2008, p. 141, traducción nuestra). Es decir, partiendo de Valente (2008) podría decirse que es posible hacer un análisis histórico de las disciplinas escolar a partir de los LD.

Por otro lado, Schubring (2018) afirma el estudio de los LD ofrece un panorama acerca de la cultura escolar y social de la sociedad para la cual son elaborados. Schubring también trajo a la discusión otros elementos sobre el análisis de los LD tales como el rol y la autonomía del maestro, las metodologías utilizadas en los libros de texto y el rol de las instituciones en la definición de los materiales en sí. A partir de Schubring, se puede decir que un estudio de los LD puede permitir levantar hipótesis y comprensiones sobre la enseñanza, aprendizaje, las concepciones filosóficas y didácticas de la matemática y las relaciones estudiante-docente en el aula.

Acerca de los libros didácticos en El Salvador

En El Salvador no existe en la legislación una obligatoriedad de la entrega de libros didácticos ni tampoco una política de libro didáctico. Al tratarse de libros oficiales los controles sobre la calidad de los materiales dependen de la autoría (Mineducyt) y de las agencias de financiamiento puesto que, históricamente, la entrega de libros en los centros escolares públicos ha sido a partir de programas puntuales a lo largo del tiempo y que han contado con el apoyo de alguna agencia de financiamiento. Desde la década de los noventa la agencia JICA ha financiado la colección de libros didácticos en el país con la colección Cipotes[1] (1991), Cipotas y Cipotes[2] (2006) y la colección Esmate (2018) que es objeto de esta investigación.

El uso de la historia de la matemática en el currículo salvadoreño

Dos son los documentos que orientan el currículo de matemática para el bachillerato en El Salvador: los Fundamentos Curriculares de la Educación Nacional (FCEN) (El Salvador, 1997) y el Programa de Estudios de Matemática para Educación Media (PEMEM) (El Salvador, 2018). Los FCEN describen "los objetivos, los principios que la orientan, las fuentes que la nutren y los aspectos técnicos considerados en el diseño curricular" (El Salvador, 1997, p. 5), estos elementos son desarrollados en los Programas de Estudio por nivel educativo y por disciplina escolar.

En el caso del PEMEM, este describe la propuesta curricular para el nivel y en ella se especifican las competencias de la disciplina; las unidades y bloques de estudio; los lineamientos metodológicos; los lineamientos de evaluación y; los componentes curriculares para cada unidad didáctica: nombre y número de unidad, competencia de unidad, tiempo asignado, contenidos conceptuales, contenidos procedimentales, contenidos actitudinales, indicadores de logro. No obstante, a pesar de hacer un análisis de los FCEN y de los PEMEM, no existe una referencia o indicación de incluir la Historia de la matemática ni cómo desarrollar curricular y metodológicamente la Historia de la Matemática en la disciplina. En el caso de los libros didácticos, en El Salvador no cuenta con una política o reglamentos que orienten el diseño y elaboración de materiales didácticos.

El uso de la historia de la matemática en libros didácticos

El uso de la historia de la matemática (HdM) como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática ha estado en debate generando argumentos a favor y en contra de su inclusión en el currículo escolar. Dentro de los argumentos en contra están que: 1. El pasado de la matemática no es significativo para la comprensión de la matemática actual; 2. No hay literatura disponible para uso de los profesores de educación básica y media; 3. Los pocos textos existentes destacan los resultados, pero no revelan nada sobre la forma de cómo se llegó a ese resultado; 4. El camino histórico es más arduo para los estudiantes que el camino lógico y; 5. El tiempo utilizado

[1] Concepto popular que significa "niños"
[2] Niñas y niños

para en el estudio de la historia de la matemática debería ser utilizado para aprender más matemática (Vianna, 1995).

Para Vianna (1995) y Alencar (2014) muchos de estos argumentos pueden tener su asidero en la institucionalización del Movimiento Matemática Moderna y su influencia en las reformas curriculares en muchos países a partir de la década de 1950. Para Alencar (1995, p. 33, traducción nuestra) este movimiento “al supervalorizar el carácter axiomático y subestimar la intuición en la aprehensión de los conceptos matemáticos, algunos recursos como el uso de figuras geométricas, la contextualización y el uso de la historia podría haber sido negligenciados”. Vianna (1995), por su parte, considera que muchos de los argumentos contra el uso de la HdM en la enseñanza de la matemática pueden ser contrariados precisamente a partir de los argumentos a favor de su inclusión.

Son muchos los autores que destacan la importancia del uso de la HdM en la enseñanza de la matemática. Para el caso, D´Ambrosio (1996, p. 3) argumenta, entre otras cosas, que su uso puede “situar la matemática como manifestación cultural de todos los pueblos en todos los tiempos, como lengua, costumbres, valores, creencias y hábitos, y como tal diversificada en sus orígenes y en su evolución”. En esta misma línea, Miguel et al. (2009, p. 9), citando a Fauvel (1991), consideran que es importante el uso de la HdM porque: 1. La historia aumenta la motivación para el aprendizaje de la matemática; 2. Humaniza la matemática; 3. Muestra su desarrollo histórico por medio del orden y la presentación de tópicos en el currículo; 4. Los alumnos comprenden como los conceptos matemáticos se desarrollaron; 5. Contribuye para los cambios de percepciones de los alumnos con relación a la Matemática y; 6. Ofrece oportunidades para la investigación en Matemática. A pesar de estos argumentos a favor del uso de la HdM en la enseñanza de la matemática, Miguel et al. (2009, p. 10) puntualizan que existen algunas dificultades para su implementación, entre ellas la falta de la HdM en los procesos de formación de los profesores de matemática, la falta de tiempo en las planificaciones escolares, la ineficacia de los datos en los LD que se limitan a una citación de nombres y hechos históricos, la inexactitud de los materiales bibliográficos.

Para cerrar este debate en este texto sobre el uso o no de la HdM en la enseñanza de la matemática se considera importante tomar en cuenta dos adendas sobre el asunto. La primera es que el mero uso de la historia no es fuente de inspiración o motivación para los estudiantes, si fuera el caso, las clases de historia en general evidenciarían ese hecho y al parecer eso no es así (Miguel; Miorim, 2011) y el segundo es que el uso de la HdM requiere un cuidado didáctico y pedagógico y una postura desde la Educación Matemática, es decir, “para que (la HdM) sean pedagógicamente útiles, es necesario que las historias de la matemática sean escritas sobre el punto de vista del educador matemático” (Miguel, 1993, apud, MIGUEL et al., 2009, p. 10).

Por otro lado, sobre la forma de utilizar la HdM en la enseñanza de la matemática Font et al. (2017, p. 17), considerando los aportes de organizaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), establecen que hay tres niveles para su implementación: el nivel cronológico que se interesa por el recorrido histórico de un concepto o noción matemático; el nivel lógico que detallar como la historia aporta al desarrollo de la intuición lógica y a la comprensión de los métodos de los matemáticos en sus contribuciones y; el nivel pedagógico que es fuente de ideas y estrategias pedagógicas para los profesores.

Metodología

Como posición metodológica de esta investigación se considera que un abordaje cualitativo es la mejor forma de alcanzarlo (Bogdan y Biklen, 1994) y considerando que el objeto de la investigación son los libros didácticos, esta investigación es de tipo documental. Sin embargo, asumir una investigación de tipo cualitativa no implica renunciar al uso de datos estadísticos, como se pretende hacer en la categorización del uso de la HdM en los LD, sino que el uso de estos datos adquiere otra dimensión de interpretación y pueden ser revestidos de otras interpretaciones a la luz de datos cualitativos y de las posturas del investigador (Bogdan y Biklen, 1994).

Ahora bien, como procedimientos de análisis de los libros didácticos, esta investigación se inspiró en la propuesta de análisis de libros de Charalambous et al. (2010) que consiste en dos etapas principales denominadas análisis horizontal y análisis vertical. La etapa “análisis horizontal” pretende observar las características estructurales del material, así como sus principales estructuras textuales y distribuciones organizativas, páginas, etc., (Charalambous et al., 2010). Para efectos de esta investigación esta etapa corresponderá al análisis general del libro en el que describiré los principales elementos de la obra: autores, división curricular, número de páginas y tipo de secciones por capítulo. Por otro lado, el análisis vertical busca identificar elementos en los que el libro didáctico aporta significado a quienes lo utilizan, puntualizando en elementos específicos de interés del autor. Así, esta etapa consistirá en la caracterización de las historias de matemática utilizadas en ambos libros didácticos a partir de los aportes teóricos de Vianna (1995), quien caracterizó el uso de HdM en los LD en cuatro categorías: 1. Historia de la Matemática como motivación; 2. Historia de la Matemática como información; 3. Historia de la Matemática como estrategia didáctica y; 4. Historia de la Matemática como parte integrante del desarrollo del contenido.

Algunos de los procedimientos seguidos para el análisis horizontal fueron: recopilación y resguardo de los LD de matemática de primer y segundo año, versión del estudiante, disponibles en el sitio oficial del Mineducyt; para cada libro describo: descripción de la edición analizada; autores; número de páginas: división curricular utilizada; páginas por cada unidad; y estructura de cada unidad. Para el análisis vertical los procedimientos seguidos para cada libro fueron: inmersión y lectura inicial de cada sección buscando menciones a la HdM; detalle de la ubicación de las menciones de la HdM; unión de todas las menciones a la HdM; lectura crítica y análisis de cada HdM según Vianna (1995) y; categorización de la HdM según el referencial teórico. Para esta comunicación se discutirá solo el análisis vertical en la siguiente sección.

Resultados

Fueron 25 menciones históricas en los dos libros de matemática. Trece en el libro de primer año y doce en el de segundo año. La categorización según Vianna (1995) de estas veinticinco menciones se presentan en la tabla 1, a continuación:

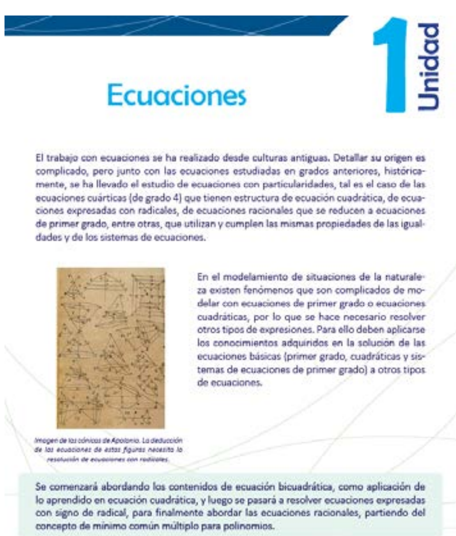
Tabla 1
Categorizaciones del uso de la Historia de la Matemática en los libros oficiales de matemática de bachillerato.

N°	Categoría	Menciones
1	Historia de la Matemática como motivación	16
2	Historia de la Matemática como información	9
3	Historia de la Matemática como estrategia didáctica	0
4	Historia de la Matemática como parte integrante del desarrollo del contenido	0
	Total	25

Nota: Elaboración propia.

Luego del análisis crítico de los libros se detectaron 16 menciones de la HdM como motivación, es decir, casi dos de cada tres menciones históricas son de este tipo y el resto corresponden al uso de la HdM como información. Para un mejor acompañamiento a continuación se presenta un ejemplo de cada una de ellas.

Las menciones de la HdM como motivación, como estableció Vianna (1995), se encuentran principalmente al inicio de cada unidad y dado que hay ocho unidades en cada libro didáctico, se entiende el número total asignado. Generalmente estas historias se les asigna una página entera y tienen como título el nombre y número de la unidad a la que pertenecen, luego hacen una descripción histórica del origen del contenido citando culturas, algún matemático relevante en el desarrollo del contenido, acompañado de alguna representación gráfica o expresión matemática. Al final de esta mención histórica, la página presenta el objetivo de la unidad y describe las temáticas que serán presentadas en el texto. Como ejemplo de este tipo de uso de la HdM (ver Figura 1), a continuación:


Ecuaciones

1 Unidad

El trabajo con ecuaciones se ha realizado desde culturas antiguas. Detallar su origen es complicado, pero junto con las ecuaciones estudiadas en grados anteriores, históricamente, se ha llevado el estudio de ecuaciones con particularidades, tal es el caso de las ecuaciones cuárticas (de grado 4) que tienen estructura de ecuación cuadrática, de ecuaciones expresadas con radicales, de ecuaciones racionales que se reducen a ecuaciones de primer grado, entre otras, que utilizan y cumplen las mismas propiedades de las igualdades y de los sistemas de ecuaciones.

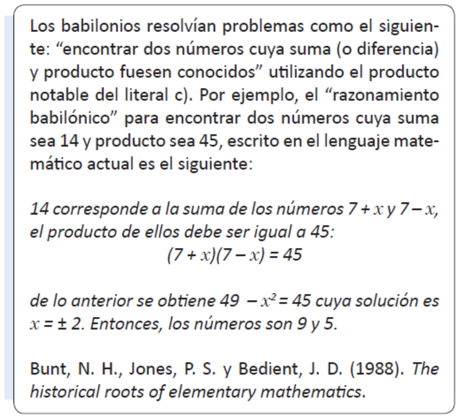
En el modelamiento de situaciones de la naturaleza existen fenómenos que son complicados de modelar con ecuaciones de primer grado o ecuaciones cuadráticas, por lo que se hace necesario resolver otros tipos de expresiones. Para ello deben aplicarse los conocimientos adquiridos en la solución de las ecuaciones básicas (primer grado, cuadráticas y sistemas de ecuaciones de primer grado) a otros tipos de ecuaciones.

Imagen de las cónicas de Apolonio. La deducción de las ecuaciones de estas figuras necesita la resolución de ecuaciones con radicales.

Se comenzará abordando los contenidos de ecuación bicuadrática, como aplicación de lo aprendido en ecuación cuadrática, y luego se pasará a resolver ecuaciones expresadas con signo de radical, para finalmente abordar las ecuaciones racionales, partiendo del concepto de mínimo común múltiplo para polinomios.

Figura 1. Ejemplo de Historia de la Matemática como motivación. Tema: Ecuaciones. Segundo año de bachillerato. *Fuente*: El Salvador (2019b, p. 9).

Una característica de las menciones de este tipo de categoría es que ninguna es retomada en el resto de la unidad. Por otro lado, el resto de las menciones históricas son del tipo historia de la matemática como información (ver figura 2).


Los babilonios resolvían problemas como el siguiente: "encontrar dos números cuya suma (o diferencia) y producto fuesen conocidos" utilizando el producto notable del literal c). Por ejemplo, el "razonamiento babilónico" para encontrar dos números cuya suma sea 14 y producto sea 45, escrito en el lenguaje matemático actual es el siguiente:

14 corresponde a la suma de los números $7 + x$ y $7 - x$, el producto de ellos debe ser igual a 45:

$$(7 + x)(7 - x) = 45$$

de lo anterior se obtiene $49 - x^2 = 45$ cuya solución es $x = \pm 2$. Entonces, los números son 9 y 5.

Bunt, N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics.*

Figura 2 - Ejemplo de Historia de la Matemática como información. Razonamiento babilónico. Primer año de bachillerato. Fuente: El Salvador (2019a, p. 25).

Al igual que las caracterizara Vianna (1995), estas aparecen durante el desarrollo de un contenido ofreciendo alguna información relacionada al contenido estudiado o ampliando algún concepto matemático estudiado. Como puede observarse, este tipo de mención histórica busca ofrecer una información adicional a un concepto planteado en la unidad. De hecho, "información adicional" es una de las subsecciones que reconoce el libro que forman parte de su propuesta didáctica. Otro tipo de información adicional encontrada en los libros es la que remite a los datos biográficos de matemáticos relacionados al tema estudiado en la unidad.

Conclusiones

Haciendo un pequeño análisis general de los resultados a la luz de la propuesta didáctica planteada en el currículo de matemática, la metodología de trabajo de los LD de la colección analizada y de los referenciales teóricos presentados podría decir que la concepción de la HdM y su rol en el proceso educativo es de tipo motivacional y de información complementar. Este tipo de uso de la historia, a pesar de esas características, no muestra una intencionalidad clara sobre su uso, es decir, no se evidencia una comprensión de las potencialidades de la HdM como recurso didáctico para el aprendizaje de un contenido o como una actividad matemática. Aquí se retoma lo dicho por Miguel (1993 apud Miguel et al., 2009), que para que las historias de la matemática sean pedagógicamente útiles, estas deben ser diseñadas desde el punto de vista de la educación matemática. En el caso del uso de la HdM en la colección Esmate, claramente, no es así. No hay una intencionalidad didáctica para su uso.

Ahora bien, ¿por qué no es así? Algunas razones pueden encontrarse desde la política curricular salvadoreña que no han llegado al punto de reflexionar sobre cómo puede ser incluida la HdM o incluso si debe serlo; otra razón puede ser la falta de filtros, controles y seguimientos a la calidad de la producción de los materiales de los autores y de los autores mismos en lo referente a sus posiciones delante de la EM; entre otros que el autor considera importante explorar.

De esta forma, se considera que el tipo de menciones históricas cumplen limitadamente algunas de las funciones de la HdM establecidas por Fauvel (1991), es decir, a partir de estas menciones un estudiante difícilmente un estudiante encontrará motivación para el aprendizaje de la matemática; al presentar la HdM a partir de experiencias excepcionales de matemáticos distinguidos es difícil que se pueda humanizar el origen de la matemática; este tipo de menciones no ofrecen comprensiones sobre el desarrollo histórico de la matemática y ofrece limitados aportes para cambiar percepciones acerca de la matemática de los estudiantes para aventurarlos a la investigación matemática.

Se espera en la presentación incluir los avances del análisis de los libros de Tercer Ciclo de Educación Básica a la discusión.

Referencias y bibliografía

Alencar, A. C. (2014). História da Matemática no livro didático de Matemática: Práticas discursivas. Tesis de maestria. Universidade Estadual do Paraíba: Campina Grande. Disponible en: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2094?mode=simple.

Bogan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação.* Porto Editora.

Charalambous, Y. et. al. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in *Textbooks from Three Countries, Mathematical Thinking and Learning*, 12:2, 117-151.

Choppin, A. (2004) *História dos livros e as edições didáticas: sobre o estado de arte. Educação e Pesquisa*, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez.

D'Ambrosio, U. (1996). *História da Matemática e Educação*. Caderno Cedes, n.40. Campinas: UNICAMP.

El Salvador (1997). Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Fundamentos Curriculares de la Educación Nacional, San Salvador: MINED.

El Salvador (2019a). *Matemática: Primer Año de bachillerato.* [Libro de texto, 1ra Edición]. San Salvador: Mineducyt.

El Salvador (2019b). *Matemática: Segundo Año de bachillerato.* [Libro de texto, 1ra Edición]. San Salvador: Mineducyt.

Fan, L. (2013). Texbook research as scientific research: towards a common ground on issues of methods of research on mathematics texbooks. *ZDM Mathematics Education* 45, p. 765–777.

Font, V., Sala, G., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 10, n. 3.

JICA. Japan International Cooperation Agency (2020). Proyecto de mejoramiento de los aprendizajes en matemática en educación básica y educación media (Esmate). Disponível em: https://www.jica.go.jp/project/spanish/elsalvador/004/outline/index.html#hd.

Miguel, A. et al. (2009). *História da matemática em atividades didáticas*, 2da Edición. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Miguel, A. y Miorim, M.A. (2011). *História na Educação Matemática: proposta e desafios*, 2da Edición. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Valente, W. (2008). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *ZETETIKÉ*, v. 16.

Vianna, C. R. (1995). *Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas.* [Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, USP].

Schubring, G. (2018). *Análise histórica de livros de matemática*. [Livro eletrônico. Notas de aula / Gert Schubring, traduzido do inglês por Maria Laura Magalhães Gomes]. Campinas, SP: Autores Associados. 2 Mb, e-PUB.

¿Cómo tejemos la matemática guna con la cosmovisión del pueblo guna? Una propuesta curricular intercultural

Violorio **Ayarza** Díaz
Universidad Especializada de las Américas (UDELAS)
Panamá
violorio@gmail.com

Resumen

Este estudio tiene la finalidad de recoger la experiencia, sistematización y recopilación de la propuesta curricular de Educación Bilingüe Intercultural Guna de Panamá realizado por los dos congresos generales gunas. Es producto de los talleres realizados donde participaron los docentes, estudiantes, padres de familia y los congresos locales. Sumado con la experiencia del autor en aula clase e investigación en el campo. El contenido esta dividido en tres partes: la primera una vista general de la realidad educativa en matemática y la pérdida gradual de las practicas matemáticas del pueblo guna, el segundo presenta la propuesta curricular, conceptos y la malla curricular de primero hasta tercer grado y por ultimo damos nuestras reflexiones finales, hacia dónde va la enseñanza de las matemáticas en los territorios guna.

Palabras clave: Etnomatemática; interculturalidad; cultura; pueblos indígenas, educación; revalorización; curricular.

Marco teórico

El pueblo guna se ubican a lo largo de la costa caribeña de Panamá. Actualmente están divididos en tres comarcas, la Comarca Gunayala, Comarca Guna de Madungandí y la Comarca Guna de Wargandi y las comunidades guna de Púcuro y Paya, localizadas cerca de la frontera con Colombia.

Después de 100 años de implantación de un sistema educativo impuesto, las poblaciones indígenas les preocupa que el currículo de matemática occidental implantado en sus comunidades está totalmente alejado de la realidad y deshumanizado y mucho menos se contextualiza su contenido. Esto no contribuye con el desarrollo de nuestra cultura, más bien discrimina.

Antecedentes

Desde hace casi tres décadas se han organizado y llevado a cabo iniciativas de una educación propia llamado Educación Bilingüe cultural(EBI) con el fin de rescatar, revitalizar los conocimientos matemáticos de los pueblos indígenas. Con la imposición de una educación monocultural y monolingüe donde se ha impuesto la idea de una matemática universal, con el detrimento de la perdida de la diversidad del conocimiento matemática.

En la Constitución Política de Colombia art. 7 y 8 (1991), se establece el reconocimiento de la diversidad cultural. Conforme a la Ley General de Educación colombiana (1994) art. 55, 58,73, 76 y 77 define la educación para Grupos Étnicos, la formación de educadores para grupos étnicos y estable el concepto de currículo, con autonomía escolar. En 1998, Ministerio de Educación Nacional de Colombia establece bases curriculares temáticas establecido en el art. 76 que trata sobre planes de estudio, programas, metodologías y la formación integral. Fueron consultadas ampliamente a los docentes e investigadores en educación matemática de los pueblos indígenas de Colombia que sirvieron como base de las distintas propuestas curriculares de los pueblos indígena de Colombia.

El caso de Bolivia y Ecuador, nos muestra Villavicencio (2001) las bases del aprendizaje de las matemáticas, se diseñaron y establecieron alternativas didácticas-metodologías que sirvieron como una propuesta curricular para ambos países que gestaron del proyecto Experimental de Educación Bilingüe de Puno (1978-1988) que se ejecutó en áreas rurales quechuas y aimaras y el Proyecto de Educación Bilingüe del Ecuador (1986-1987) que se ejecutó en la región hablante quichuas. En ambos proyectos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática le denominaron AMACOS (Aprendizaje de matemáticas a partir de contextos culturales). A estos programas se vienen sumando iniciativas de formación e investigación y creación de currículo por menciona en Brasil, el texto de Gesteira e Matos (2011) nos presenta la experiencia de EIB en Brasil, que en 1995 en documento Prosposta Preliminar de Curriculo Bilingüe Intercultural para a Formacao de Professores Índios do Acre Sudeste do Amazonas, en relación a la educación matemática establece bases para el desarrollo de esta disciplina.

En Panamá, la propuesta curricular de una Educación Bilingüe Intercultural, se fundamenta en los fines de la educación panameña, Ley Orgánica de Educación (1946) art. 9, así como en el art.10 de la mencionada Ley que señala; "la educación para las comunidades indígenas se fundamenta en el derecho de éstas de preservar, desarrollar y respetar su identidad y patrimonio cultural". De igual forma, el artículo 11 describe que "la educación de las comunidades indígenas se enmarca dentro de los principios y objetivos generales de la educación nacional y se desarrolla conforme a las características, objetivos y metodología de la educación bilingüe intercultural**".**

Los dos Congresos Generales Guna, Administrativa y Cultural preocupado por la pérdida acelerado de la cultura y del conocimiento matemáticos ancestrales propone recoger y sistematizar los insumos que servirían como contenidos de las asignaturas, especialmente la matemática guna, que luego serviría como base curricular del pueblo guna, que fue cristalizado, en el libro llamado, propuesta curricular de Educación Bilingüe Intercultural Guna. Para el desarrollo del proyecto se realizó un convenio de cooperación entre los Congresos generales Gunas, la Agencia Española de Cooperación Internacional para el desarrollo (AECID) y el gobierno panameño. Oficialmente empezó en el año 2004 y culminó en el 2018.

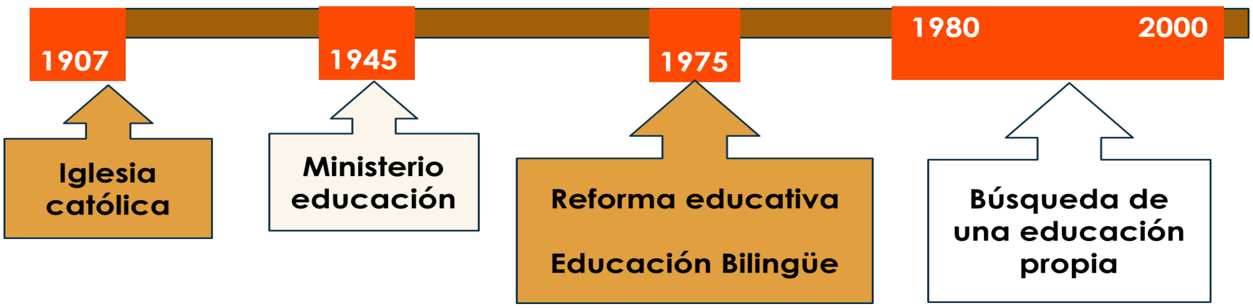


Figura 1: Proceso histórico de la educación escolar en la comarca Gunayala.

Metodología y resultados

Para la presentación de la propuesta curricular específicamente de la matemática guna se realizó una revisión documental. Por ello fue necesario el método de investigación etnografía, que permitió la observación sistemática, comprensión e interpretación, de las cuales se obtuvieron contenidos mínimos de la asignatura en el contexto escolar para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas desde la epistemología de la matemática guna.

La propuesta curricular matemática del pueblo guna

De los archivos de los Congresos Generales Gunas, los debates en los congresos locales y consultas a los padres de familia y docentes de la demanda actual de la comunidad hacia el mundo escolar la propuesta curricular, recopilado y sistematizado en proyecto EBI Guna (2011) se establece la división en cinco grandes vertientes: laboral/productiva y autosuficiencia alimentaria, cultural/religiosa, ecológica, científica y tecnológica, autonómica integral (relaciones entre sociedades).

La enseñanza y la práctica de la matemática desde nuestra cosmovisión está centrada en la madre tierra. Los principios matemáticos se basan en la complementariedad, el multiverso que fue creado por Baba y Nana y que esta simbolizada en nega(casa). En el 2011, EBI guna destaca que el eje curricular debe centrarse en tres aspectos principales: **madre tierra, identidad** y **diversidad cultural** con la finalidad de aprender, aceptar y respetar las distintas culturas y apreciar las otras matemáticas de otras culturas, refuerza la identidad personal pero también la pertenencia cultural. Se diseñó esta propuesta curricular con el acompañamiento de los sabios y conocedores del conocimiento tradicional, junto con los docentes que han tenido experiencia en el aula de clases a nivel primario y los profesores de matemática. Después de varios talleres realizados y consultas al congreso general de la cultura guna se llega a un acuerdo técnico, la propuesta curricular debe contener los siguientes aspectos matemáticos que fueron sintetizados en EBI Guna (2011):

- Patrones geométricos en la mola (tejido) como una manera de valorizar el arte guna
- Construcción de nega (casa) como eje de la familia y símbolo gobernanza
- Lenguaje para el uso correcto de la lexicografía matemática
- Bag igala para reforzar la espiritualidad del pueblo guna y la transmisión a la siguiente generación.

Después de realizar las observaciones y reflexiones que nos dieron pistas para algunos temas que bien nos pueden servir en los contenidos como en la construcción de nega, patrones geométricos aplicadas y lengua como se destaca en el libro que nos sirve como guía de estos contenidos temáticos y que se deberá enseñar en las aulas de clases:

- Sistema vigesimal guna.
- Clasificadores numéricos y sus símbolos.
- Sistema de valores monetarios.
- Seriación y formación de conjuntos lógicos con base a los clasificadores.
- Operaciones elementales y su aplicabilidad en la vida.

Tomando en cuenta estos aspectos matemáticos, se llega a la conclusión sobre los contenidos matemáticos para el que pensamiento matemático se vaya estructurando en los niños, desde los primeros años de vida, gradual y sistemáticamente. Los niños llegan a las aulas de clase con esquemas mentales ya suficientemente estructurados con contenidos de su entorno social. Desde el plano matemático, ya trae consigo, entre otros aspectos de la numeración y sus respectivos clasificadores, maneras originales de seriación y formación lógica de conjuntos de acuerdo a las formas, al estado, a la ubicación de distintos objetos. Eso lo va a ayudar para una comprensión más integral, humana y funcional de otra cara de la matemática.

(Área) Wala	I°	II°	III°
Soggwen	Ebised Igar (Sistema vigesimal)	Ebised Igar (Sistema vigesimal)	Ebised Igar (Sistema vigesimal)
Sogbo	Ilemagged daglegedba – yarburba igar (Clasificadores de formas y geometría)	Ilemagged – unsaed (Clasificadores y medidas)	Yarburba igar (Geometría)
Sogbaa	Ilemagged soggwenmalad (Clasificadores específicos)	Iddoged igar (Operaciones básicas)	Iddoged igar (operaciones básicas)
Sogbagge	Iddoged igar (Operaciones básicas)	Maniburba igar (Valores monetarios)	Maniburba igar (Valores monetarios)

Figura 2: Propuesta curricular para el programa de estudio de matemática guna desde I° a III° elaborado en el 2019. Congresos Generales Gunas

El sistema de numeración guna implica una nueva definición por carácter vigesimal y el uso de clasificadores numéricos, los niños de grados iniciales deben aprender el uso correcto de clasificadores que implica un trato interdisciplinario con la lengua materna. Actualmente está en uso el sistema de valores monetarios gunas que fue necesario sistematizar para la enseñanza didáctica en aula de clases. Y se investigo sobre el uso de sistema de medidas gunas y su aplicación para enseñanza.

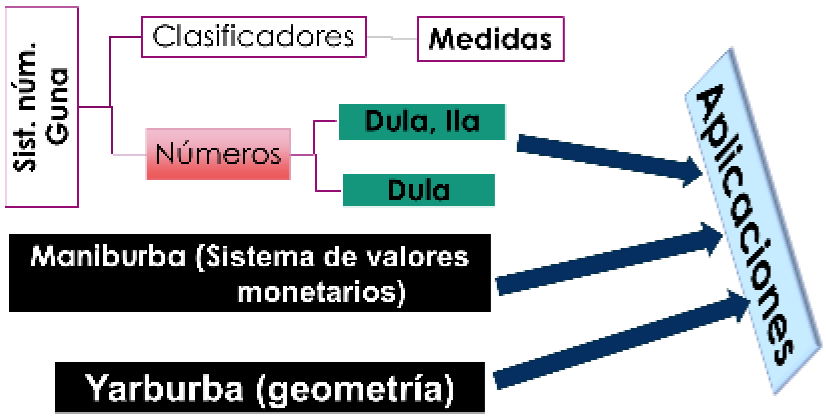


Figura 3: Esquema de contenido matemático desde la cosmovisión del pueblo guna.

Reflexiones finales

Muchos Estados han reconocido la existencia de naciones indígenas con cultura y lengua propias. "Esta heterogeneidad es claramente indicativo de que no hay una vía regia ni estrategia única válida para afrontar los problemas que plantea la enseñanza de la matemática. En cada país es necesario analizar la situación concreta y formular estrategias viables para cada contexto específico" (Gustavo Zapata y Alfonso L. Pluricultural y Aprendizaje de la Matemática en América Latina, 2001, Pág. 43). En consecuencia, el Pueblo Guna y los Congresos Generales creen en la Educación Bilingüe Intercultural (EBI), que plantea el respeto a las culturas, la convivencia armoniosa en igualdad, el intercambio de conocimientos entre culturas sin imposiciones para mantener así la identidad de los pueblos. En este escenario, en los últimos cuatro decenios las poblaciones indígenas del mundo han retomado la educación de su población haciendo cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas. Con la ayuda de algunas universidades y expertos en didáctica siguen buscando modelos apropiados que correspondan a las necesidades de una nación indígena, que le permita practicar las matemáticas de sus ancestros y pueda disfrutar al mismo tiempo de los avances de la matemática moderna.

La integración que se haga de esas actividades al plan escolar debe conducir a consolidar el nexo entre la escuela y las actividades normales del pueblo. Aquí el papel de las madres y padres de familia deberá ser decisivo, como también el involucramiento total de los sabios y sabias, conocedores y expertos en el conocimiento tradicional, que conjuntamente irán definiendo los contenidos didácticos para el aula de clases. Estos contenidos deben constituir un puente entre lo teórico-práctico y el quehacer de la comunidad y la escuela; entre el aprendizaje y la praxis; entre el laboratorio escolar y la realidad sociocultural guna; entre el pensar en la comunidad y construir, efectivamente, la comunidad en equidad y basada en la interculturalidad. El impacto que reciben los niños y las niñas de su entorno y de las actividades que sacuden a toda la población en determinados momentos del año deben constituirse en elementos que justifiquen los juegos matemáticos y las aplicaciones para diferentes aspectos diarias.

Referencias y bibliografía

Ayarza, Violorio. (2010). Anmar Ebised. Cartillas de Matemática Guna. Ediciones SGP Asociados.

EBI Guna (2005). Los gunas entre dos sistemas educativos. Propuesta educativa de los Congresos Generales Kunas y rasgos de la Educación Bilingüe intercultural. Ed. EBI Guna/AECID. Editorial Sibauste.

Congreso Nacional de Colombia. (1991). Constitución Política de Colombia de 1991. Disponible en: https://www.teveandina.gov.co/normatividad/constitucion-politica-de-colombia/

EBI Guna (2009). Matemática kuna y su metodología de enseñanza (taller). Congresos Generales Kunas. Gardi Sugdub, Kuna Yala

EBI Guna (2011).La escuela y las demandas de la comunidad*. Nan Garburba Oduloged Igar. Propuesta Curricular de la EBI guna* Propuesta de los dos Congresos Generales Gunas *(pp*.35-83) Editorial Zabuiste S.A.

De Guzmán, M. Tendencia innovadoras en educación de matemática. http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/tendencias-innovadoras-en-educacion-matematica/

Gesteira e Matos, K. (2011). Nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática y la formación de profesores indígenas. En Lizarzaburu, A y Zapata, G(Eds). Experiencias y desafíos en el aprendizaje de la matemática en América Latina. *Pluricultural y aprendizaje de la matemática en América Latina*. (pp.108). Ediciones Morata.

Lizarzaburu, A y Zapata, G.(2011). Experiencias y desafíos en el aprendizaje de la matemática en América Latina. *Pluricultural y aprendizaje de la matemática en América Latina*. (pp. 43). Ediciones Morata

Ley Orgánica de Educación (1946). Ley N° 47 (6, julio, 1996). Con adiciones y modificaciones introducidas por la ley 34 de 1995. Gaceta Oficial N° 22,989

Ley General de Educación (1994). Ley 115(8, febrero,1994). Diario Oficial N°41.214

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998). Lineamientos curriculares: matemáticas. Bogotá: Creamos Alternativas.

Villavicencio, M. (2011). El aprendizaje de las matemáticas en el Proyecto de Educación Bilingüe Intercultural de Puno y en Proyecto de Educación Bilingüe del Ecuador: reflexiones sobre la práctica y experiencias relacionadas. En Lizarzaburu, A y Zapata, G(Eds). Experiencias y desafíos en el aprendizaje de la matemática en América Latina. *Pluricultural y aprendizaje de la matemática en América Latina*. (pp. 167-169). Ediciones Morata

Dedekind y Bourbaki: práctica matemática, números y estructuras

Maribel Patricia **Anacona**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
maribel.anacona@correounivalle.edu.co
Edgar Fernando **Gálvez**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
edgar.f.galvez@correounivalle.edu.co
Guillermo **Ortiz** Rico
Facultad de Ciencias, Universidad del Valle
Colombia
guillermo.ortiz@correounivalle.edu.co

Resumen

En este taller se ponen en discusión algunos elementos de orden histórico y teórico en torno a las nociones de número (natural y real) y estructura matemática a la luz del concepto filosófico de práctica matemática, con el propósito de ofrecer elementos que permitan re-significar la actividad profesional de un docente de matemáticas. Para tal efecto, nos centramos en los trabajos de Dedekind y Bourbaki como representantes -primero y último- del estructuralismo conjuntista. En la primera parte del taller se abordan los aspectos de orden teórico para luego ponerlos en consideración por parte de los asistentes, con el propósito de reconocer conjuntamente aspectos de impacto educativo en cada uno de los referentes teóricos tratados.

Palabras clave: práctica matemática; números naturales; números reales; estructuralismo matemático; historia y filosofía de las matemáticas; educación matemática; enseñanza universitaria.

Introducción

La actividad que proponemos en el marco de este evento concibe tres ejes o perspectivas de análisis principales que pueden ser de utilidad a la hora de evaluar la actividad profesional de un docente, en un contexto específico o tópico educativo. Se trata en primer lugar de una perspectiva histórica de las matemáticas, a partir de la cual identificamos un período crucial del desarrollo de las matemáticas modernas y contemporáneas; en particular, desde esta perspectiva priorizamos los trabajos de Richard Dedekind y del grupo Bourbaki, los cuales abarcan el período comprendido entre finales del siglo XIX y primera mitad del siglo XX; en segundo lugar, proponemos una perspectiva filosófica que tiene como horizonte una reflexión sobre la práctica matemática, es decir, un enfoque filosófico que pone en relieve la actividad del matemático; y, por último, una perspectiva teórico-conceptual en virtud de la cual situamos las dos perspectivas anteriores en el horizonte de unos referentes o productos matemáticos que juzgamos altamente sensibles en el contexto de la Educación Matemática: las nociones de número (natural y real) y de estructura matemática.

Contextualización histórica del estructuralismo en Matemáticas

La tradición tomada de Aristóteles y Euclides ha dejado marcadas trazas sobre las matemáticas, muy particularmente en la presentación del cálculo y el análisis de los siglos XVIII y XIX. Esta herencia hace énfasis en lo ontológico fundado en la noción de objeto-cantidad (geométrico-continuo y aritmético-discreto). Sin embargo, a finales del siglo XIX y fuertemente a inicios del XX, surge una nueva concepción con énfasis en lo simbólico y operacional que rivaliza con la tradición griega. La emergencia de esta última se caracteriza por la idea de colocar el álgebra como fundamento del análisis (Lagrange). La imagen de las matemáticas, vista en la tradición griega como "ciencia de la cantidad" cambia profundamente a finales del siglo XIX.

Los trabajos de Simón Stevin (1548-1620) constituyen, a nuestro juicio, el principio del fin de la tradición griega de las matemáticas. Stevin introduce en occidente la notación decimal para los números fraccionarios y define número como aquello por lo cual se expresa la cantidad de una cosa, lo que posibilita una noción de número asociado tanto a magnitudes discretas como a magnitudes continuas. Esto marca una diferencia sustancial con las prácticas euclidiano-aristotélicas[1]. La visión de número en Stevin fue dominante hasta mediados del siglo XIX, cuando surgen las primeras construcciones de los números reales por Cantor, Weierstrass, Heine y Dedekind en 1872.

Es claro que esta noción de cantidad muta hacia la estructuración a través de las teorías de conjuntos y las definiciones de número real. En líneas generales, cualquier intento de organizar lleva intrínsecamente una noción de estructura. En las teorías del conocimiento estos intentos dan lugar a la emergencia del estructuralismo. Los avances en los fundamentos de las matemáticas de los últimos 150 años muestran que las matemáticas se han desarrollado a la luz del paradigma estructuralista; por tanto, resulta natural considerarlo como un punto de partida esencial en la

[1] El concepto de número para los griegos se construye a partir de la oposición entre lo discreto y lo continuo. Para Stevin la cantidad corresponde a una abstracción sobre un contexto empírico mientras el número vive en un nivel estrictamente simbólico.

comprensión de las matemáticas[2]. Esta visión en las matemáticas es anticipada tempranamente por Dedekind en 1870's y puesta ampliamente en escena por el grupo Bourbaki en 1950's.

Dedekind, paradigma de la historia moderna de las matemáticas

La visión estructuralista de Richard Dedekind impactó de manera decidida el desarrollo de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Sus profundas reflexiones, su creatividad y sus nuevos métodos incidieron de manera significativa en las prácticas matemáticas de la época. Sus aportaciones en los distintos campos del conocimiento, se constituyeron en el motor que impulsó esta nueva forma de concebir las matemáticas. La obra de Dedekind ha sido pródigamente estudiada por matemáticos, historiadores y filósofos, sobre la base de un claro reconocimiento de la importancia de su aporte al desarrollo de las matemáticas modernas.

Nos ubicamos en Dedekind (1888) con su trabajo titulado *Qué son y para qué sirven los números*, el cual constituye, desde muchos puntos de vista un paradigma en la historia moderna de las matemáticas. Específicamente constituye un paradigma del quehacer matemático. Este aspecto resulta altamente importante en la perspectiva de la actividad propuesta pues nos abre espacio a la pregunta inicial ¿qué hizo? En el marco de la correspondiente respuesta aparecen inevitablemente intrincados tres paradigmas teóricos, considerados patrimonio de las matemáticas modernas o decimonónicas: primero, una *teoría (intuitiva) de conjuntos* (extensamente discutida y analizada desde múltiples desarrollos en historia y filosofía de las matemáticas), a partir de la cual obtiene una *definición axiomática los números naturales* (constituida en modelo teórico dominante de presentación de los números naturales en los contextos de la educación superior) y, como resultado subyacente a los dos anteriores, una noción de *estructura matemática* (que ha devenido el referente por excelencia de los filósofos estructuralistas contemporáneos).

Sin embargo, el enfoque filosófico que proponemos a favor de una reflexión educativa toma este resultado del *qué* (¿qué hace?) como punto de partida para ingresar en el plano propiamente de la reflexión filosófica sobre la práctica matemática, es decir el plano del *cómo* (*¿cómo lo hace?*) Desde este punto de vista, proponemos evaluar algunas acciones y decisiones que caracterizan la práctica de Dedekind en la elaboración de sus teorías. En este sentido, vale la pena aclarar desde dónde nos ubicamos en esta reflexión sobre la práctica matemática en el contexto de los autores propuestos: esta actividad no parte de una toma de posición *a priori* a favor o en contra de un enfoque fundacionista, en particular no parte de una concepción conjuntista o estructuralista de las matemáticas.

La noción de conjunto y estructura en Dedekind

Proponemos aquí unas preguntas articuladoras ¿Cuál es el rol de la noción de conjunto y de una teoría de conjuntos en la perspectiva de la definición del número natural? Según Dedekind, ¿es el número natural esencialmente un conjunto? Esta última pregunta de orden ontológico tiene como motivación contrastar aquella interpretación dominante durante casi todo el siglo XX y aún

[2] El advenimiento generalizado de la teoría de categorías constituye un magistral representante del estructuralismo; sin embargo, su consideración escapa a los intereses del taller.

en nuestros días (siglo XXI), según la cual la noción de conjunto y el lenguaje de conjuntos se constituyeron de facto en una suerte de fundamento de las matemáticas. En otras palabras, aquello que subyace a una noción u objeto matemático es un conjunto.

En contravía con una interpretación conjuntista del trabajo de Dedekind, muchos autores contemporáneos afirman que lo que realmente se halla detrás de aquella articulación conjuntista es la caracterización de una estructura formal. En otras palabras, todo el entramado conjuntista que va del parágrafo 1 al 70 es subsidiario de una noción de estructura matemática, la cual se articula fundamentalmente desde el parágrafo 71 y alcanza su mayor vuelo teórico con los teoremas de categoricidad. Estos últimos demuestran la identidad (isomofismo) de todos los sistemas simplemente infinitos. En este sentido, Benacerraf (1965) (*What numbers could not be*), por ejemplo, plantea un análisis según el cual, puesto en términos abusivos, “los números naturales de Dedekind no pueden ser conjuntos”. Sin embargo, la pregunta que nosotros queremos planearnos es si una y otra postura son consecuencia legitima de un análisis del trabajo de Dedekind o de su práctica.

La noción de conjunto y estructura en Bourbaki

Los conjuntos y más específicamente la teoría de conjuntos constituye la base angular de la propuesta estructuralista de Bourbaki. Las estructuras son expuestas en el capítulo 4 del libro I de los *Éléments de Mathématique*, una vez ha presentado su sistema axiomático para la teoría de conjuntos, en términos de su teoría lógico y formal (Anacona et al, 2014).

Bourbaki exhibe con detalle los conceptos necesarios para llegar a una definición abstracta y general de la noción de estructura. Se trata de un esqueleto formal denominado *especie de estructura*, el cual se constituye en un dispositivo conjuntista, suficientemente amplio y flexible, que alberga las diversas estructuras matemáticas. Una *especie de estructura* en una teoría está conformada por conjuntos de base principal, conjuntos auxiliares, una tipificación que caracteriza el tipo de estructura y los axiomas que se satisfacen en dicha estructura. Una vez se supera el excesivo y pesado formalismo empleado por Bourbaki para llegar a esta definición, emergen de forma nítida las diversas estructuras como casos particulares.

Obviamente, este potente mecanismo de unificación y clasificación, no es suficiente para el desarrollo de una teoría. Es necesario deducir nuevas estructuras y establecer puentes de comunicación que posibiliten el avance conceptual. La comunicación entre estructuras se establece a través de *isomorfismo* y *morfismos*. La construcción de las nuevas estructuras se puede hacer a través de combinaciones de dos o más especies de estructuras, agregando o quitando axiomas a una estructura dada y a través de procesos de derivación, entre los que se destacan las *estructuras iniciales y finales* y las *aplicaciones universales*.

Para Bourbaki existen tres grandes tipos de estructuras: las *algebraicas*, las *de orden* y las *topológicas*. Estas son las *estructuras madres* y están en el centro del universo matemático. Más allá de este primer núcleo se pueden encontrar las estructuras *múltiples*, en las que intervienen a la vez dos o más estructuras madres; y más lejos del centro se encuentran las teorías particulares, donde los elementos de los conjuntos están más individualizados.

Perspectiva filosófica: una reflexión sobre la práctica matemática.

Estamos en una renovación de los estudios sobre la filosofía de las matemáticas a través de la denominada *Filosofía de la práctica matemática* (FPM) que nos brinda elementos esenciales para el mejoramiento de las prácticas educativas. Esta nueva forma de enfrentar la filosofía de las matemáticas liderada inicialmente por Paolo Mancosu (2008) clasifica la filosofía de las matemáticas en dos grandes tradiciones: *la fundamentalista* que se centra en los fundamentos de las matemáticas y específicamente en la lógica para estudiar la ontología de los objetos matemáticos; y *la inconformista* donde se ubican todos aquellos que parten de principios generales (antagónicos a la primera corriente). Desde esta segunda tradición no existe un fundamento asertivo para la matemática, la matemática es falible y la lógica es insuficiente para analizar adecuadamente la matemática, su desarrollo y en general todos los que se centren en la práctica matemática. Él propone incorporar los planteamientos de la tradición inconformista para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales a la ontología de los objetos matemáticos. En este marco general Mancosu en *Abstraction and Infinity* (2016) presenta un detallado seguimiento a las prácticas matemáticas de las definiciones por ab1stracción desde Euclides hasta los inicios del siglo XX con Frege, Peano y Russell entre otros. A esta visión de la FPM se han sumado un sinnúmero de importantes nombres como Jessica Carter, Colin McLarty y David Corfield.

De manera particular, Jessica Carter brinda ciertas precisiones sobre FPM, con una gran sobriedad que hemos considerado adecuada para el presente taller. Carter (2008) compara la afirmación “las matemáticas son el estudio de la estructura” con la práctica real de las matemáticas. Ella presenta dos ejemplos de la práctica matemática contemporánea donde la noción de estructura juega diferentes roles. En el primer caso, se define una estructura sobre un determinado conjunto. En primer lugar, se argumenta que este conjunto no puede considerarse como una estructura y, en segundo lugar, lo importante para la práctica matemática es la relación que existe entre la estructura y el conjunto. En el segundo caso, de la topología algebraica, un punto es que un objeto puede ser un lugar en diferentes estructuras. La estructura en la que se elige colocar el objeto depende de lo que se desee hacer con él. Nos precisa que las matemáticas ciertamente tratan con estructuras, pero que las estructuras pueden no ser todo lo que hay en las matemáticas. Para ella el estructuralismo es actualmente una de las filosofías matemáticas más prometedoras. La afirmación de que las matemáticas son el estudio de estructuras también parece estar respaldada por la práctica matemática. De hecho, los matemáticos suelen mencionar estructuras cuando hablan de su tema. Como ella refiere, en palabras de Eilenberg: “Entre las tendencias más notorias de las matemáticas modernas se encuentra el auge del álgebra moderna. Casi todas las teorías matemáticas actuales tienen una faceta algebraica. Las estructuras de las que se ocupa el álgebra moderna se han comparado con la sonrisa del gato de Cheshire en Alicia en el país de las maravillas, que permaneció visible después de que el propio gato se desvaneciera” (Eilenberg, 1969).

Carter se centra en diferentes nociones de estructura en matemáticas y se pregunta si se puede dar una noción uniforme de estructura que capture los usos de estructura en la práctica matemática. Es enfática en que la estructura que se tome para un determinado objeto depende de lo que se desee hacer con el objeto, destacando que la práctica matemática consta de actividades. Sostiene que el estructuralismo no refleja la práctica real de las matemáticas en la medida en que se afirma que las matemáticas solo se ocupan de la estructura. Para ella las matemáticas a veces estudian conjuntos, ya sea a través de las estructuras que tienen, o las estructuras que se les pueden dar o estructuras que se pueden definir sobre ellos. Con esto argumenta que el estructuralismo no refleja la práctica real de las matemáticas, en la medida en que se afirma que las matemáticas solo se ocupan de la estructura. En este sentido, ella precisa que "las matemáticas son el estudio de sistemas estructurados en lugar de estructuras".

Perspectiva teórico conceptual: las nociones de número natural y real.

En primera instancia se trata de poner en relieve el estatuto epistémico de la noción de número natural a la luz de los actos teóricos llevados a cabo por Dedekind (1888). A partir de estas consideraciones, buscaremos centrar la atención en la noción de número real y las principales nociones implicadas, a partir de los trabajos de Dedekind (1872) y Bourbaki (1950).

La noción de número natural en Dedekind

En su obra ¿*Qué son y para qué sirven los números naturales*?, Dedekind ofrece una fundamentación (lógica y deductiva) para una región de las matemáticas, la aritmética, a través de una definición de $\mathbb{N}$; este proceso inicia con la articulación teórica de un universo "conjuntista", cuya noción central es la de sistema, la cual, bajo ciertas consideraciones, se puede asimilar a la noción actual de conjunto. La formulación de este universo permite tejer una red teórico conceptual en la que se destacan nociones como: representación de sistemas (función entre conjuntos), sistemas similares (función biyectiva), cadena y comunidad de cadena (sistema o conjunto inductivo), sistema infinito, y, en particular, sistema simplemente infinito. La caracterización de este último tipo de sistemas es el objetivo principal de Dedekind: en el parágrafo 71 afirma que un sistema N es simplemente infinito si existe una función Φ sobre N (Φ: $N \longrightarrow N$) y un primer elemento 1, tal que cumple con las siguientes condiciones: i) la imagen de N bajo Φ es subconjunto de N ($\Phi(N) \subseteq N$), ii) a partir del elemento base "1" se tiene N, es decir la comunidad de cadenas (cumplen con la condición Φ: $A_i \longrightarrow A_i$) tienen a 1 como elemento común (la comunidad del elemento base 1), tomadas en su totalidad dan como resultado N; iii) el elemento base 1 no es elemento de la imagen de N bajo Φ ($1 \notin \Phi(N)$); y iv) Φ es una función uno a uno y sobre.

La anterior caracterización le permite a Dedekind en el parágrafo 73 tipificar los números naturales como un sistema simplemente infinito. Esta tipificación de los números naturales se da a través de un acto que él denomina de abstracción, el cual consiste en el acatamiento estricto y exclusivo de las cuatro condiciones expuestas en el parágrafo 71. Esto último le otorga a los números naturales el estatuto de creación libre del espíritu humano. Por todo lo anterior, a partir del parágrafo 71 se empieza a configurar entonces los que se puede denominar el núcleo estructuralista de la definición de Dedekind, y es allí donde nuestra actividad propone fijar inicialmente la atención los aspectos esenciales de este desarrollo.

La noción de número irracional en Dedekind

Dedekind en el artículo "Continuidad y números irracionales" publicado originalmente en 1872, introdujo su celebrado concepto de *cortadura*, con el propósito de construir los números irracionales. En términos generales el proceso es el siguiente: Dedekind define el concepto de *cortadura* (A_1, A_2) sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ como una partición de este conjunto en dos clases A_1 y A_2 con la propiedad de que para todo $a \in A_1$ y para todo $b \in A_2$ se cumple $a < b$. Un ejemplo de cortadura es (A_1, A_2) donde $A_1 = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq 3/2\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x > 3/2\}$. Para Dedekind esta cortadura es esencialmente igual a la cortadura (B_1, B_2) donde la clase $B_1 = \{x \in \mathbb{Q}: x < 3/2\}$ y $B_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 3/2\}$. Ambas cortaduras tienen la siguiente propiedad: existe un elemento mayor en la primera clase o un elemento menor en la segunda clase. Es decir existe un elemento separador de las dos clases que es $3/2$. Esta propiedad la satisfacen todas las cortaduras que son producidas por números racionales.

Sin embargo, Dedekind prueba que es posible separar el conjunto de los racionales en dos clases que verifican la propiedad de las cortaduras y sin embargo no cumplen con esta última propiedad. Es decir, no existe un máximo en la primera clase ni un mínimo en la segunda. Tal es el caso de la cortadura (A_1, A_2) donde $A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 > 2\}$. Esto pone en evidencia la discontinuidad de los racionales, la existencia de "huecos" en la recta racional. A estas cortaduras que no son producidas por números racionales, Dedekind las denomina "números irracionales". Dedekind *decide*, en virtud de su necesidad lógica, la existencia de unos nuevos números llamados irracionales. A esto es lo que Dedekind llama "libre" creación. Esta libertad es independiente y autónoma con respecto a los condicionamientos de la evidencia sensible. Sin embargo, el acto de creación debe cumplir con una condición fundamental: el nuevo dominio numérico debe conservar intactas las propiedades del dominio anterior[3]. Esta condición permite cerrar el proceso agrupando lo anterior y lo nuevo bajo una sola denominación: *número real*.

La noción de número real en Bourbaki

Bourbaki no construye de manera específica el conjunto de los números reales. Bourbaki demuestra un teorema a través del cual completa un espacio uniforme. La demostración del teorema constituye una generalización del proceso de completación de un espacio métrico, realizado por Hausdorff en 1914, que a su vez es una generalización de la construcción de los reales por Cantor en 1872. La adaptación del teorema al caso de los racionales como espacio uniforme, equivale a una construcción de los reales.

En la demostración se parte de $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme, donde la convergencia se estudia a través de filtros de Cauchy y filtros minimales de Cauchy. El filtro minimal de Cauchy "representa" a todos los filtros de Cauchy que tienen el mismo límite, independientemente de que el límite sea o no, un punto de $\mathbb{Q}$. De ahí que surja la consideración de formar el nuevo espacio con los filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, el cual se identifica con $\widehat{\mathbb{Q}}$. Lo que sigue es demostrar que $\widehat{\mathbb{Q}}$ así constituido es un espacio completo. Para tal efecto, se debe verificar que

---

[3] Esta condición se conoce como *extensión* o *extensión algebraica*. Es el acto de pasar de un dominio, bien definido estructuralmente, a otro más rico e igualmente bien definido que conserva intactas la estructura del primero.

todo filtro de Cauchy en $\widehat{\mathbb{Q}}$ converge en dicho espacio. En líneas muy generales y sin entrar en detalles técnicos, el proceso es el siguiente: se parte de un filtro de Cauchy sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$. Además, este filtro genera un filtro (extendido) sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$ que es más fino que el filtro inicial de Cauchy y también converge en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Pero si este nuevo filtro converge, el filtro inicial que es menos fino también converge. Por tanto, $\widehat{\mathbb{Q}}$ es completo.

Es importante señalar que las estructuras uniformes tienen un papel relevante en la demostración: a través de ellas se captura la noción de "entorno", condición esencial para el establecimiento de los filtros de Cauchy y para el estudio de la convergencia. Con esta construcción se tiene una versión de los números reales mucho más rica desde el punto de vista estructuralista, con la topología impregnada en su proceso de construcción y en la base de los desarrollos posteriores del análisis y de los espacios generales de convergencia.

A partir de éstas especificidades esperamos abrir una amplia discusión que aporte al análisis de uno de los aspectos más relevantes del fracaso en el primer año de universidad. Ese difícil paso de las matemáticas escolares (en buena medida algorítmicas) a las básicas universitarias (esencialmente estructuradas).

Referencias y bibliografía

Anacona, M., Arboleda, L.C., Pérez, J. (2014). On Bourbaki's axiomatic system for set theory. *Synthese* 191: 4069-4098.

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *The philosophical review.* Vol. 74, No. 1, pp. 47-73

Bourbaki, N. (1965). Topologie générale. *Éléments de Mathématique*. Livre III. Paris : Hermann.

Bourbaki, N. (1966). Structures. Chapitre 4. *Éléments de Mathématique*. Deuxième édition. Paris: Hermann.

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice. Motivations, themes and prospects. *Philosophia mathematica (III).* Vol 27, No.1, pp.1-32.

Carter, J. (2008). Structuralism as a philosophy of mathematical practice. *Synthese* 163: 119-131

Ferreirós, J. (1998). *Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática,* Edición e introducción a cargo de José Ferreirós, Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Gálvez, F. (2018). *Le débat sur les notions d'objet et structure mathématique au sein du structuralisme contemporaine : les travaux de Shapiro, Parsons et Hellman.* Tesis doctoral, Universidad de Paris 1, Francia.

Mancosu, P. (2008) *The philosophy of mathematical practice* (Ed). Oxford University Press, Oxford.

Mancosu, P (2016) *Abstraction and Infinity.* Oxford University Press, Oxford.

El infinito matemático:
el vaivén entre la intuición y la formalización

Liliana Aurora **Tabares** Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
ltabaress@cinvestav.mx
Luis Enrique **Moreno** Armella
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
lmorenoarmella@gmail.com
Isaías **Miranda** Viramontes
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria
México
imirandav@ipn.mx

Resumen

El desarrollo del concepto de infinito matemático dentro del laboratorio didáctico a través de las reflexiones que surgen de las nociones y percepciones personales y el análisis de algunas ideas de Galileo y Cantor respecto al infinito matemático nos invita a indagar en la relación de la intuición y la formalización para la comprensión del concepto. Por medio de la actividad de *El infinito en el espejo* buscamos observar y describir el vaivén de la intuición a formalización. Dicha actividad se aplicó a alumnos del primer semestre de la carrera de matemáticas aplicadas.

Palabras clave: Intuición; Formal; Laboratorio didáctico; sensorio-motriz.

Introducción

Si se tiene una colección de 2200 elementos y le quitamos un elemento, la que queda es obviamente menor que la original, aunque es una diferencia insignificante. Si el conjunto original tiene 22000 elementos, al quitarle uno, prácticamente no apreciaríamos la diferencia, aunque, en sentido estricto, disminuye el número de elementos. A medida que el conjunto considerado tiene más y más elementos, va revelando una cierta insensibilidad a la pérdida de pocos elementos, esto es, de un número pequeño con respecto al tamaño original del conjunto. Sin embargo, si el conjunto original es pequeño, digamos que tiene 5 elementos, perder uno es una pérdida sensible. Describimos así un experimento mental, sin embargo, al leerlo, sentimos cierta familiaridad con su línea argumental. Hemos interiorizado nuestras experiencias con el número y las hemos transformado en un modelo simbólico, mental, que podemos manipular como si se tratase de algo material.

En su libro, A mind so rare: The evolution of human consciousness, M. Donald (2001) explica cómo la cognición humana, aparte de su naturaleza analógica u holística, que compartimos con las demás especies, ha adquirido, evolutivamente, una capacidad de representación simbólica que duplica, en cierto sentido, el mundo de sus experiencias en el mundo material. Desde luego, esa capacidad simbólica adquiere gradualmente una autonomía (relativa) que se refleja, hoy en día, tanto en el mundo del arte como en el mundo de la ciencia. Y desde luego de las matemáticas.

La experiencia mental que venimos de narrar está vinculada al encuentro que tenemos a temprana edad con la sucesión de los números naturales. Contamos 1,2, 3..., y en algún momento presentimos que no vamos a acabar de contarlos todos por mucho que nos esforcemos. He ahí un lugar de encuentro entre lo inacabable y lo infinito —como una acción que no termina. Nuestra capacidad simbólica, aparte de permitirnos recodificar el mundo de nuestras experiencias, nos permite por ese camino, el acceso a una realidad que no experimenta ninguna otra especie: el mundo de lo abstracto. Nuestra capacidad cognitiva es híbrida: conocemos el mundo material a nuestro alrededor y podemos conocer y desarrollar un mundo cuya materia prima son los símbolos. Como si las estructuras simbólicas fuesen la versión externa de un mundo de experiencias que vive en nuestro interior. Hay un vaivén entre estos dos mundos cada vez que nos disponemos a entrar en contacto con un fragmento de conocimiento matemático, por ejemplo, que nos era desconocido: Intuición y formalismo. Inducción, generalización y deducción. Y allí está el infinito. Como una danza interminable, así es el acto cognitivo. Ha sido intentando ver desde esta mirada como hemos acercado a nuestros estudiantes a la noción del infinito matemático.

Continuemos ahora con nuestra discusión introductoria del infinito. Para ello, vayamos con nuestros estudiantes a leer un breve pasaje del libro de Galileo *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* (Galilei, 1638, pp. 31-33). Allí los personajes de Galileo discuten sobre que a cada número natural le podemos asociar su cuadrado. Entonces puede hacerse una lista de los cuadrados: 1, 4, 9, 16...etc. Galileo concluye que tal lista es inacabable, es decir, no termina. Pero entonces, debe aceptar que es infinita puesto que puede contar los miembros de esa lista: primero, segundo, tercero, cuarto,...y esto exige la utilización de *todos* los números naturales. Sin embargo, Galileo se enfrenta a una paradoja: necesita todos los naturales para *contar* los cuadrados...sin embargo, para él es claro que hay considerablemente más naturales que cuadrados. Los cuadrados son *una parte* de los naturales. Entonces concluye que no se puede aplicar, en estas circunstancias que el todo sea mayor que una parte propia. Así, logra eludir la situación paradójica.

Galileo estuvo cerca de abrir en aquel momento una nueva perspectiva para las matemáticas. No lo logró, aunque avanzó tanto como la *episteme* de su tiempo se lo permitió.

Uno vive en una atmósfera rodeado de cultura y modos de pensar que abren perspectivas sobre unas ideas y prácticamente hacen imposible la consideración de otras. Hasta que se produce lo que podríamos llamar la *zona de desarrollo potencial en una cultura* y surge un Cantor que la hace realidad.

Galileo miró la correspondencia de un natural m a su cuadrado m^2 no como una forma de comparar tamaños de conjuntos sino como una manera de contar cuántos cuadrados podía producir: uno, dos, tres... etc.

El matemático norteamericano J. Pierpont (1899) escribió, al respecto de la tensión entre nuestro *conocer* intuitivo, sensorio-motriz y la formalización del conocimiento matemático lo siguiente:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: la total separación del mundo de los sentidos. (1899, p. 406)

Después de la lectura con nuestros estudiantes del pasaje de Galileo que comentamos antes, les formulamos la pregunta:

Qué ocurre si de la lista de los naturales borrásemos todos los números impares?

Como Galileo lo expresa, podemos *contar* los números pares y para ello tendremos que emplear *todos* los números naturales. Hasta aquí, estaban siguiendo el razonamiewnto de Galileo para contar los cuadrados. Pero ahora, estaba presente una noción matemática de la que carecía Galileo. La noción de conjunto, que permite concebir holísticamente la lista de los números pares. Es decir, concebirla como un todo, como un infinito completo, un infinito *actual*, como suele decirse, para distinguirlo de lo que ocurre con los procesos infinitos, como pretender *contar* la lista de los pares. La obstrcción que emergió aquí en los diálogos corresponde a lo que R. Duval (1983) ha denominado *la transparencia obscura*: mientras percibimos un conjunto como subconjunto propio de otro, se torna casi inaceptable ver al subconjunto como uno que tiene igual número de elementos (i.e.: equinumeroso) que el conjunto que lo contiene. Gravita en este hecho el que *el todo es mayor que cualquier parte propia*.

Sin pretender concluir que la situación presentada por los estudiantes y la situación paradójica que vivió Galileo son *la misma* en términos cognitivos, si podemos afirmar que hay una raíz común debido a lo que hemos percibido como un rasgo de la cognición y que tiene su explicación en las teorías corporizadas de la inteligencia humana. Siguiendo de cerca a M. Donald (p. 155, obra citada) lo explicamos, en palabras nuestras así: *en el mundo natural los sistemas nerviosos funcionan holísticamente, es decir, elaborando y almacenando las impresiones que se reciben. Pero la capacidad simbólica que hemos desarrollado (evolutivamente) permite crear un universo abstracto con un alto grado de independencia relativa*. Sin embargo, estos dos universos, el interior y el simbólico permanecen girando uno alrededor del otro. En ese sentido afirmamos que nuestra capacidad cognitiva es *híbrida*. El universo simbólico, desde luego, se desarrolla en una atmósfera cultural que además va reelaborando el mundo natural y tornándolo un mundo a su vez, condicionado por esa cultura.

Percibimos, aún lo más elemental del mundo material, eventualmente, desde un marco de interpretación desarrollado en nuestra atmósfera cultural. Por ello, la sentencia el todo es mayor que cada una de sus partes no solo se decodifica desde la lógica que desarrollamos culturalmente sino, al mismo tiempo, desde *lo que nos dice el cuerpo*. Es así que encontramos una sintonía plena con la afirmación de Pierpont: es demasiado alto el precio cognitivo que pagaríamos si pretendemos erigir una *frontera infranqueable* entre nuestra intuición y las versiones formalizadas de las matemáticas, en particular, las referidas al infinito.

De la reflexión cognitiva al laboratorio didáctico.

Esta será la característica esencial de un conjunto *actualmente* infinito en manos de G. Cantor: un conjunto es infinito si tiene subconjuntos propios con los que puede establecerse una *correspondencia* biunívoca. La idea de correspondencia biunivoca es un instrumento conceptual que ya estaba al alcance de Cantor. No de Galileo. En el ejemplo previo, aún quitándole una parte infinita al conjunto de los naturales, la parte que queda, o sea el subconjunto de los pares, es del "mismo tamaño" que el conjunto completo de los naturales ya que se pueden poner en correspondencia biunívoca, como las parejas en un baile: si ningún caballero se queda sentado, solo, sabremos de qué tamaño es el conjunto de caballeros: igual que el conjunto de sus parejas. Esta idea del establecimiento de una correspondencia biunívoca es la clave para *comparar* ya no solo *contar*, la lista de elementos de un conjunto. puede parecer un tanto artificial pero vemos que no es así: tantos obsequios para tantas personas allegadas. No necesitamos *contar* para saber que ambos conjuntos son de igual tamaño. Ahí estuvo el "error" de Galileo: contar lo llevó a aceptar que la lista de los cuadrados era infinita pero no pudo *ver* que era del mismo tamaño que la lista completa de los naturales. Pues no poseía un criterio para pensar en el tamaño de una colección.

La idea de correspondencia biunívoca que en realidad captura una fuerte intuición cognitiva, sirvió de base a Cantor para identificar la noción adecuada de conjunto infinito — como hemos comentado anteriormente. Una idea traída de nuestra experiencia y llevada al mundo virtual de las matemáticas. Esta discusión generó un interés pronunciado entre los participantes del laboratorio cuyos conocimientos y reflexiones previas no habían estado orientadas a tomar conciencia de cómo una idea tan (aparentemente) simple como es la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos traía *encerrada* la llave para acceder al infinito actual que existe en esa realidad virtual llamada matemáticas.

Era el momento de reflexionar sobre cómo las intuiciones originales, que ellos tenían sobre el número de elementos de un conjunto, que se obtenía contando, debían ser "olvidadas" cuando se trataba de conjuntos infinitos. *Lo veo pero no lo creo* escribió G. Cantor en una carta a R. Dedekind frente a este fenómeno de los conjuntos infinitos (Zimmerman, 2013, p. 452). Los participantes, como le había ocurrido a Cantor, lo veían pero se sentían forzados a aceptar (aunque no lo creyeran) este comportamiento de los conjuntos infinitos, que rompía con la añeja intuición de que el todo era siempre mayor que cada una de sus partes.

Las intuiciones son las consecuencias inarticuladas de la corporización —que adquirimos a través de nuestras experiencias en el mundo humano, aunque no podamos hacerlas explícitas. No las podemos cambiar a voluntad. Ocurre que nuestras intuiciones (sobre un tema más o menos conocido por ejemplo) no están sometidas a un estricto control lógico-deductivo y por ello, su nivel de coherencia es local. Si decimos el todo es mayor que cada una de sus partes, nos parece aceptable hasta que recordamos o aprendemos que podemos poner en correspondencia los naturales con los pares. Entonces tenemos que fijar límites para esa proposición que parecía tan natural como para tomarla como universal.

A través de la educación llega el momento cuando la parte lógica de nuestro pensamiento– de nuestra racionalidad–se *impone* (al menos transitoriamente) sobre nuestras intuiciones, si se nos permite decirlo así. Aunque esta parte lógica de nuestro pensamiento esconde posiblemente siempre, una intuición fragmentada o separada del tren inicial de nuestro pensar.

Nuestras experiencias en el salón de clases hicieron tangible la certeza que, para los estudiantes, el aprender lo básico sobre el infinito era enfrentarse de manera abrupta a un territorio accidentado a lo largo del cual resultaba riesgoso y allí sentían que estaban sin los recursos necesarios para abordar los problemas que planteaba la nueva demanda cognitiva. Entonces: *¿cómo podíamos enfrentar el problema didáctico de iniciar el estudio del infinito entendiendo que el problema de fondo es el desarrollo del significado una vez que los estudiantes se enfrentan a un terreno formalizado?* Frente a la tensión subyacente, era necesaria una transición. La transición de una fluidez instrumental a una fluidez cognitiva es un problema educativo de interés global. En efecto, lo simple desde el punto de vista lógico, formal, no necesariamente coincide con lo simple desde el punto de vista cognitivo. Aunque ambos aspectos son partes constitutivas de la cognición humana.

Experimentación y búsqueda

La actividad de *El infinito en el espejo* es parte de una secuencia de actividades que tiene como propósito reconocer el vaivén entre la concepción intuitiva del concepto de infinito y la formalización que genera la necesidad de concretar una respuesta lógicamente matemática (lo formal). (La actividad es tomada y adaptada de: Prieto Sánchez, J.A., Fernández Escalona, C. ,2017).

Reflexión de Omar en la actividad *El infinito en el espejo*

Al reflexionar sobre cómo serían los reflejos de las bolas en el espejo si se van quitando de una en una Omar hace la comparación directa entre las cantidades de bolas que se reflejan.

> Omar: Intuitivamente los infinitos son más grandes y eso depende, si es uno (se refiere a una bolita) entonces va a ser más chiquito que un infinito de nueve (se refiere a nueve bolas), pero al mismo tiempo no puede ser más grande porque al ser números naturales siguen perteneciendo a un mismo infinito.

En esta afirmación Omar especifica claramente que su intuición le hace pesar en que sería dos infinitos de distintos tamaños, pero al reconocer que en ambos casos la cantidad de bolas están relacionada con los números naturales notamos como su conocimiento matemático más formal lo lleva a la conclusión de que serían infinitos del mismo tamaño.

Omar continua con su reflexión.

> Omar: *O sea, intuitivamente parece que es más grande, pero si le metemos matemáticas no sigue siendo el mismo infinito de números naturales y no puede haber infinitos diferentes de numero naturales porque es un mismo infinito*.

Decir "pero si le metemos matemáticas" deja ver como él busca la justificación desde el enfoque lógico que la brinda su educación matemática.

Dentro de la reflexión que Omar continuó desarrollando en la actividad de los espejos habla de la existencia de distintos tamaños de infinitos:

> Omar: *Había dicho que hay infinitos más grandes como los de los números reales que es porque hay números irracionales como pi y fracciones como1/4 que cada uno se dispara a infinito. Entonces cada uno tiene sus infinitos y por eso es un infinito más grande. Porque son como muchos infinitos combinados en uno solo entonces es más grande que un solo infinito de una solo cosa, los números naturales*.

Omar expresa de forma intuitiva lo que para él son los números reales y nos permite ver que ahora su intuición está relacionada con conceptos matemáticos (una intuición *refinada*).

> Omar: *Entonces, intuitivamente si pones más bolas es un infinito más grande, pero si les pones matemáticas pues no. Pero después de los que discutimos ahorita, pues no, sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar, si es teórico es posible*.

Aunque muestra en su reflexión el vaivén entre la intuición y la formalización para él resulta difícil concretarlo en una sola idea, él busca separar lo que identifica como material y existente en los conceptos abstractos.

> Omar: *Es que no es factible que exista un infinito material, ni siquiera el espacio que sabemos que se está expandiendo, puede que vaya creciendo a cierto ritmo, pero no sabemos si es infinito o no porque si sigue creciendo significa que no ha parado y si para no sabremos nunca porque no nos daríamos cuenta. Entonces por eso no es factible medir un infinito porque no tenemos un infinito material*.

En la reflexión que lleva a cabo Omar se ve el vaivén entre los intuitivo y lo formalizado, pues incluso él identifica la necesidad de (sus términos) "meterle matemáticas". Podemos ver que para él no es suficiente la intuición física para explicar lo que ve de manera material si esto se proyecta a un proceso infinito. También podemos observar la necesidad de herramientas cognitivas que lo ayuden a interpretar y conjugar su experiencia física con sus conocimientos matemáticos acerca de los números naturales y los reales.

Conclusión y perspectivas

Dentro de la experimentación llevada a cabo con los estudiantes de la licenciatura en matemáticas aplicadas se puede distinguir ya la tensión entre las intuiciones y el acercamiento formal vía la correspondencia biunívoca al explorar el infinito actual. Nuestro trabajo se localiza en el campo de la *cognición corporizada*, tal como ha sido desarrollada por M. Donald y Lakoff-Núñez en los libros referenciados en este trabajo. La noción de infinito actual vive su vida conceptual entre la experiencia sensoriomotriz y las formulaciones simbólicas propias de las matemáticas. Pero el reemplazo prematuro de las ideas intuitivas —que en realidad son consecuencias inarticuladas de la corporización, por la formalización cantoriana genera obstrucciones cognitivas difíciles de superar para los estudiantes. Allí emerge como una necesidad didáctica, la noción de metáfora conceptual (Lakoff-Núñez) que vincule las intuiciones con su eventual formalización. Todos los casos de infinito en matemáticas, de acuerdo con Lakoff-Núñez (p. 158) por ejemplo, límites, series infinitas, conjuntos infinitos y demás, corresponden a procesos que no terminan pero que nosotros los conceptualizamos como si en efecto, tuviesen un final. De nuevo: los seres humanos podemos *imaginar* el resultado de un proceso que no termina. Es el caso de la existencia de los números irracionales definidos mediante una colección infinita de dígitos que ni siquiera podemos *conocer* completamente, excepto en esa otra dimensión de nuestras experiencias cognitivas como lo es la realidad virtual de las matemáticas y demás mundos simbólicos creados.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (1983). L´obstacle du dedoublement des objects mathemátique. Educational Studies in Mathematics 14 (358-414)

Galilei. G. (1638/1954). Discourses and Mathematical Demostrations, concerning two new sciences.Dover edition, New York.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. Basic Books, New York.

Maor, E. (1987). To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite. Birkha¨user, Boston.

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, 5(8), 394-406.

Prieto Sánchez, J.A., Fernández -Escalona, C. (2017). Estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física de espejos paralelos. En Codina A., Puig, L., Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M., Baeza, M. A. (Eds.) Investigación en pensamiento numérico y algebraico (pp. 11-18). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM.

Tall, D. (2001). Conceptual and Formal Infinities. Educational Studies in Mathematics 48: 199–238.

Zimmerman, S. (2013). I believe it, but I don´t see it. International Journal of Mathematic Education in Science and Technology, 44(3), 452-456.

El Sistema de Numeración Decimal y la continuidad de los números reales: aportes de la historia de las Matemáticas en Colombia

Gilberto **Obando** Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

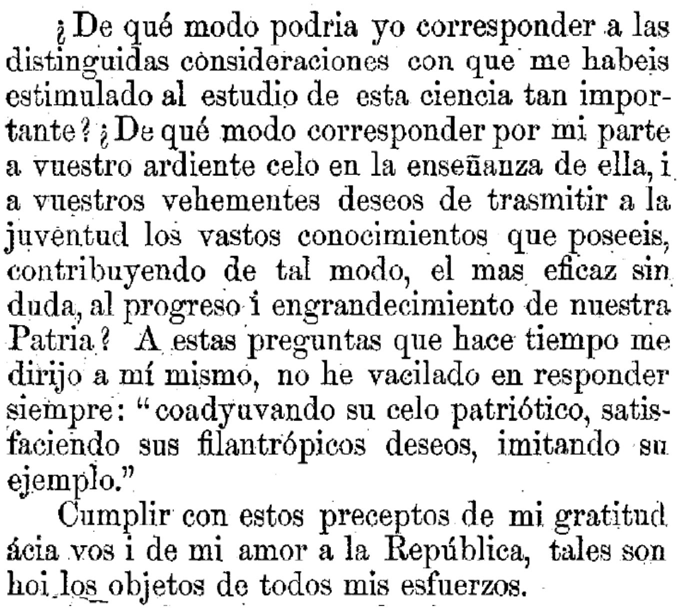
En 1856 Indalecio Lievano publicó su libro *Tratado de Aritmética Elemental*. En el presenta una fundamentación de los números (naturales, racionales y reales) con base en el Sistema de Numeración Decimal. Además, aborda un problema central de las matemáticas en la primera mitad del siglo XIX: la continuidad de los números reales. Inicialmente discute las propiedades de los números y sus operaciones, la representación de los números en el Sistema de Numeración Decimal y propone una solución a la continuidad de los números reales a partir de la notación decimal de los números. Lo importante de esta solución es que se adelanta unos 20 años a las soluciones ya clásicas de Cantor (1915) y Dedekind (1927). Así, a partir de un análisis de las prácticas matemáticas (Ferreirós, 2016; Obando, 2021, 2015) en el taller discutiremos como Indalecio Liévano presenta la solución a un problema sin resolver en la época.

Palabras Clave: Historia y Educación matemática; Números reales; Sistema de numeración decimal; Pensamiento Numérico; Historia de la matemática;

El autor y su obra

Indalecio Liévano Nació en Carmen de Apicalá el 21 de mayo de 1834; Estudio en el Colegio Militar, donde fue alumno destacado de **Lino de Pombo** y de **Aimé Bergeron**. En 1856 publica su obra *Tratado de Aritmética.* También fue autor de *Investigaciones Científicas*, 1871. *Tratado de Álgebra*, 1875. Fue profesor de Matemáticas y Astronomía en el Colegio de San Bartolomé y en la Universidad Nacional. Fundador de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.

Liévano es parte de una élite intelectual colombiana, que incluye a Lino de Pombo, Rafael Pombo, José María Villa y Julio Garavito, entre otros, que lideraron el desarrollo político del país naciente con el objetivo de proyectarlo en el mundo moderno del desarrollo industrial. Es heredero de una tradición nacionalista que buscaba los ideales de la ciencia y la política al servicio del estado a través de la ciencia y la educación. En esto sigue la influencia de próceres de la independencia como Francisco José de Caldas y de su maestro Lino de Pombo, a quien dedica su libro.



¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."

Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.

Figura 1. Dedicatoria a su profesor Lino de Pombo (Liévano, 1856, p. 4)

Su libro, *Tratado de Aritmética,* publicado en 1856, no solo es una obra con valor científico, sino también con valor político. La figura 1 muestra un fragmento tomado de la dedicatoria a Lino de Pombo, dónde se deja ver el interés político de brindar una formación matemática a los futuros ciudadanos de la república naciente: *formar en matemáticas, para engrandecer la Patria*. Esta misma intencionalidad política se puede ver en el prólogo: "Pero estas mis perennes investigaciones, con espíritu de esactitud, *a fin de ser útil a mi patria*, me han sujerido últimamente el plan riguroso de esposicion que tengo el honor ahora de presentar al público […]"[1] (Lívevano, 1856, p. 5, cursiva en el original).

El autor presenta una obra que se aparta de la tradición Euclidiana en tres aspectos principales: (i) la presentación de los números a partir de cantidades y sus medidas, (ii) la distinción entre cantidades continuas y discretas, y (iii) la forma en que trata con el infinito matemático. La obra muestra un esfuerzo por presentar conceptos intuitivos de la aritmética de manera rigurosa, basada en axiomas y teoremas con sus demostraciones. El libro "Tratado de Aritmética" se divide en dos partes con siete y cuatro lecciones respectivamente. La primera se dedica a los conceptos fundamentales de los números y sus operaciones básicas, y la segunda a la potenciación y radicación, las razones y proporciones, y algunas aplicaciones comerciales.

[1] En las citas textuales del autor, se ha conservado la grafía original, y, por lo tanto, lo que parecen faltas de redacción u ortografía son las formas adecuadas de escribir en la época.

Sobre el análisis histórico

Se asume una noción de *práctica*, entendida como:

> forma de actividad humana cooperativa socialmente establecida en la que una organización característica de las acciones y actividades (*haceres*) son comprensibles en términos de la organización de ideas relevantes en discursos característicos (*decires*), y cuando las personas y los objetos involucrados se distribuyen en organizaciones características de relaciones (*labor*), y cuando este complejo de decires, haceres y relaciones se 'ponen juntos' en un proyecto distintivo". (Kemmis, Wilkinson, Edwards-Groves, Hardy, & Grootenboer, 2014, p. 31).

En este sentido, la *práctica* es situada históricamente (en un tiempo y lugar específico); es sistemática y estructurada brindando un marco (sentido y significado) a la actividad concreta de los sujetos. Además, la actividad de los sujetos es reflexiva con respecto a la *práctica*: dispone la acción del individuo en una dirección específica (disposición), pero éste reflexiona sobre la práctica a partir de su actividad (posicionamiento), llegando incluso a transformarla (Subjetividad).

Se parte de la noción de sistemas de práctica matemática (Obando, 2015) a partir de 5 elementos: instrumentos, procedimientos, objetos, conceptos y formas de enunciación. Estas ideas se ponen en conjunción con la noción de marco presentada por Ferrreiros (2016) para caracterizar una práctica matemática: *marcos simbólicos*, *marcos teóricos*, y *agencia* (Ferreirós, 2016).

Los *marcos simbólicos* son el conjunto de construcciones culturales (instrumentos) que dan forma y estructura a la acción de los sujetos en contextos específicos de su práctica. Para las matemáticas, se tienen: las representaciones (dibujos, ideogramas, pictogramas, formas icónicas, símbolos, gráficos, tablas, etc.); los artefactos que median instrumentalmente la acción de los sujetos (instrumentos para calcular, medir, construir representaciones, comunicar – oralidad y escritura) las expresiones técnicas no necesariamente especializadas (maneras de nombrar, decir y de escribir –si la hay) y los métodos simbólicos (técnicas y procedimientos formales e informales).

Un *marco teórico* es el conjunto de discursos (no necesariamente formalizados), de lenguajes formales (si los hay), constituidos en relación con la práctica, y que le dan su soporte epistémico. En este se delimitan entonces, los objetos de conocimiento (y los conceptos elaborados sobre ellos); las formas de enunciación (explicaciones, formas de razonamiento, formas de argumentación –entre ellas la demostración–, formas discursivas, etc.) validas en el contexto de la práctica; cuestiones abiertas (problemas –de diferente naturaleza, no necesariamente matemáticos–, conjeturas, hipótesis) consideradas importantes.

La *agencia*, por su parte, relaciona los elementos de orden cultural (instrumentos, comunidades –no necesariamente científicas–, cosmovisiones, visiones matemáticas) con la actividad de los sujetos (subjetividades). En este sentido, la agencia sitúa histórica y culturalmente la práctica matemática, mostrando que la actividad matemática de los sujetos en una época y lugar no puede desligarse del complejo de las prácticas sociales de las cuales emerge.

Con los anteriores fundamentos, en un contexto histórico específico, se analizan cómo los sujetos abordan los problemas matemáticos; los instrumentos y técnicas que utilizan para resolverlo; los discursos y formas de enunciación que se utilizan, y los objetos y conceptos que se objetivan. Todo esto se examina en relación con las personas y comunidades involucradas en la práctica matemática con el fin de entender cómo se constituye y estructura la acción matemática de los sujetos. El objetivo es identificar fuentes heurísticas para planificar eventos de aprendizaje en las escuelas del futuro (Vasco, 1995).

El sistema de numeración decimal

La presentación que el autor realiza del sistema de numeración decimal se puede resumir en: presentación de las bases conceptuales de los sistemas de numeración posicional en cualquier base; la descripción detallada sobre el uso del SND para escribir los números y para nombrarlos; explicación detallada sobre los algoritmos basados en el SND para calcular los resultados de las cuatro operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división), inicialmente, operando solo números enteros; explicación sobre la forma de operar en sistemas de numeración diferentes al decimal; explicación del procedimiento para realizar cambios de un sistema de numeración a otro (por ejemplo, de numeración decimal a binaria o viceversa).

La lección VII inicia discutiendo la forma de extender el sistema de numeración decimal para expresar cantidades que no sean enteras, relacionando las cifras que quedan a la derecha de la coma con fracciones que tiene por denominador una potencia de 10:

> *Un número decimal no es otra cosa que un quebrado que tiene por numerador el número que se obtiene quitando la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hai; i cuando el número decimal tiene parte entera, es también igual a un número fraccionario cuya parte entera es la parte entera del número decimal, i cuya fracción tiene por numerador la parte decimal i por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hai*. (Liévano, 1856, p. 80, cursiva en el original).

De esta manera caracteriza tres tipos de números decimales: los finitos, los infinitos periódicos y los infinitos no periódicos. Para ello analiza el residuo de la división del numerador entre el denominador del número quebrado: si luego de varios pasos en la división el residuo es cero, entonces el número decimal que representa dicha cantidad tiene un número finito de cifras, pero si se llega a un punto en el que las cifras del cociente se repiten de la misma forma, entonces el número decimal que representa dicha cantidad tiene infinitas cifras y es periódico.

Vale la pena destacar la presentación que hace del criterio para definir si un número quebrado puede ser representado por un número decimal finito o infinito periódico: *b* no puede tener factores primos diferentes de 2 y 5. De manera similar presenta criterios para expresar en forma de quebrado un número decimal infinito periódico (multiplicando el número decimal por una potencia de 10^n según la cantidad de cifras en el periodo, y haciendo al resta del número original con el número multiplicado).

La inconmensurabilidad

De especial interés es la discusión presentada por el autor sobre “los números inconmensurables” (página 90 y siguientes): se basa en una construcción a partir de sucesiones de números racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor) que tienden al número inconmensurable dado, lo que le permite extender las propiedades ya estudiadas en los racionales, a los reales (números inconmensurables). Aunque el autor no lo expresa en estos términos, detrás de esta idea hay una noción de límite en el sentido de Cauchy, y una intuición fuerte sobre la continuidad en el sentido aritmético.

Para lo anterior, inicia analizando una característica de la notación decimal periódica infinita: si un número decimal tiene un periodo que inicia después de la cifra en la *n-ésima* posición (*n+1-ésima* posición y en adelante), y es igual a 9, entonces, las infinitas cifras equivalen a una unidad de la fracción decimal de la posición *n-ésima*. (por ejemplo, en palabras del autor (p. 90), 7,52999…=7,53 "*puesto que la porción ilimitada que queda a la derecha de los centésimos, vale esactamente 1 centésimo*"). Vale la pena destacar la conciencia que se tiene sobre los procesos infinitos (la sucesión infinita de las potencias de la forma $\frac{9}{10^n}$ en el lado derecho de la igualdad), y posibilidad de capturar dicha sucesión infinita en el número quebrado $\frac{1}{10^2}$. A partir de lo anterior afirma que, si el periodo es diferente de 9, esta parte del número no completa la unidad anterior al inicio del periodo.

Con base en los anteriores preceptos, demuestra por contradicción que, si el decimal no es periódico, entonces no puede expresarse por un número quebrado. En sus palabras:

> Esto supuesto, consideremos un número decimal ilimitado i no periódico: digo que, *la cantidad que representa este numero decimal no podrá apresarse esactamente por ningún quebrado.* En efecto, supongamos que sí hai quebrado equivalente al dicho número decimal: entonces convirtiéndolo en número decimal, se tendrán dos números decimales iguales, i en los cuales una porción cualquiera de la derecha no alcanza a valer la unidad decimal inmediatamente superior a la que se refiere la primera cifra de la izquierda; pero para que estas dos condiciones se verifiquen, es preciso que estos dos números decimales mirados de izquierda a derecha sean idénticos, luego habría quebrado que orijinaria número decimal ilimitado i no periódico, lo cual es un absurdo. Luego *la cantidad representada ·por el número decimal ilimitado i no periódico* (puesto que no puede espresarse esactamente por ningun quebrado) *no tendrá parte alícuota comun con la unidad, i será por tanto* (n.° 3) *inconmensurable con ella*. (Liévano, 1856, p. 91, cursiva en el original).

Esta demostración tiene un valor pedagógico y epistémico fundamental tanto por su sencillez, como por la profunda intuición del autor sobre el comportamiento del SND: demostrar la inconmensurabilidad con la unidad de cualquier número decimal infinito no periódico, sobre la base de las propiedades del sistema de numeración decimal. No obstante, lo anterior, el siguiente paso del autor es aún más importante desde el punto de vista epistemológico: desarrolla un método que le permite expresar un número inconmensurable a partir de sucesiones de números quebrados (en términos actuales, aproximar un número irracional por sucesiones de números racionales):

> Aunque una cantidad Inconmensurable con la unidad no puede representarse esactamente por ningún número sin embargo, si se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada. Para esto dividiremos la unidad en un número tan grande de partes iguales que cada parte sea menor que la magnitud dada (*); i entonces el quebrado que tiene por numerador el número de veces que esta pequeña parte cabe en la cantidad, i por denominador el número de partes en que se ha dividido la unidad, satisface a la condición requerida. Si ahora queremos aproximarnos más, valuaremos con un cierto error la parte inconmensurable que nos queda, i agregamos este nuevo número al número primitivo; i si esta serie de operaciones se supone prolongada indefinidamente, puede considerarse la cantidad espresada esactamente por la suma de una infinidad de números.

> Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad (Liévano, 1856, p 91, cursiva en el original).

Es de aclarar que con la expresión "número inconmensurable" el autor se refiere a lo que en el lenguaje actual se denomina "número irracional". Así, en Lievano, el "número inconmensurable" es la cantidad que expresa en términos numéricos la comparación (razón) del par de cantidades que son inconmensurables entre sí.

De otro lado, hay que resaltar la idea de aproximar un irracional a partir de sucesiones de números racionales. Si bien esta idea ya se encuentra en el Cours D'Analyse de Cauchy (1821), no hay evidencia de que el autor conociera la obra de Cauchy, pero es probable que así fuera. El procedimiento para encontrar la sucesión de números racionales que tienden a un número irracional dado, con un error menor que cualquier magnitud dada, es bastante original para la época (década de 1850). La magnitud dada que define el error considerado define un intervalo con centro en el número irracional que se quiere aproximar por la sucesión de número irracionales. Este intervalo se puede hacer tan pequeño como se desee. Luego, hay en esta idea una noción de límite, lo que se evidencia en la parte final, cuando da la definición de número inconmensurable: "Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad". Nótese, además, que estas ideas expresan una intuición profunda sobre las propiedades topológicas de los números, además de las algebraicas.

3.° Vamos a establecer que *el producto de dos números inconmensurables, es tanto independiente de la unidad a que se refiera el multiplicando, como del órden de los factores.*

Sean A i B los dos factores inconmensurables. Como todo número inconmensurable es la suma de una infinidad de números conmensurables, podemos poner

$$A = a + a' + \ldots\ldots$$
$$B = b + b' + \ldots\ldots$$

siendo a, a'...., i b, b'....números conmensurables.

Figura 2. uso de las representaciones de los irracionales como sucesiones de racionales para operar con estas representaciones. (Lievano, 1856, p 91)

Demostrado lo anterior, Lievano expresa: "116. Pasamos ahora a hacer estensivas al número inconmensurable, las propiedades jenerales del número conmensurable." (Liévano, 1856, p 91). (Figura 2). Para ello demuestra las propiedades de los números inconmensurables y sus operaciones. Si bien el autor no lo expresa así, es como si tuviera conciencia de que las cantidades inconmensurables se hacen números si logra dotarlos de una estructura hacer extensivas las propiedades aritméticas de los conmensurables a los inconmensurables es novedoso en la época (y anticipado a las soluciones dadas en Europa), y se basa en una idea potente (que se hará visible en los trabajos de Cantor (1915) y Dedekind (1917)): *construir los reales a partir de los racionales, y extender las propiedades demostradas en los racionales a los nuevos objetos (los reales), con lo cual adquieren el mismo estatus numérico del sistema de origen*. De esta forma, se objetivan las cantidades inconmensurables como números al dotarlos de una estructura (para más detalles de las implicaciones de este tratado sobre los números inconmensurables ver Albis, 1976).

La lección XI, llamada "Aplicaciones de las proporciones" inicia con el teorema cumbre que redondea todo su trabajo sobre la aritmética (en esencia, un parafraseo de la definición 5, del libro V de los elementos de Euclides):

> 150. TEOREMA *Siempre que se tengan dos especies de cantidades tales, que para cada valor particular i creciente de la una, corresponda un valor particular i creciente de la otra; i está en la naturaleza de estas variaciones el corresponder para un múltiplo cualquiera de la primera el mismo múltiplo de la segunda*; estas dos cantidades gozan de la propiedad de que *dos órdenes de magnitud cualesquiera de la primera, guardan la misma relación que los correspondientes ordenes de magnitud de la segunda*. (Liévano, 1856, p 132, cursiva en el original).

1.º—Representando por n un número entero, *para el valor* $\frac{A}{n}$ *de la primera cantidad, debe corresponder el valor* $\frac{a}{n}$ *para la segunda.*

Porque el valor que debe tomar la segunda cantidad para el valor $\frac{A}{n}$ de la primera, debe ser tal, segun el supuesto, que repetido n veces produzca a; luego es la n ava parte de a.

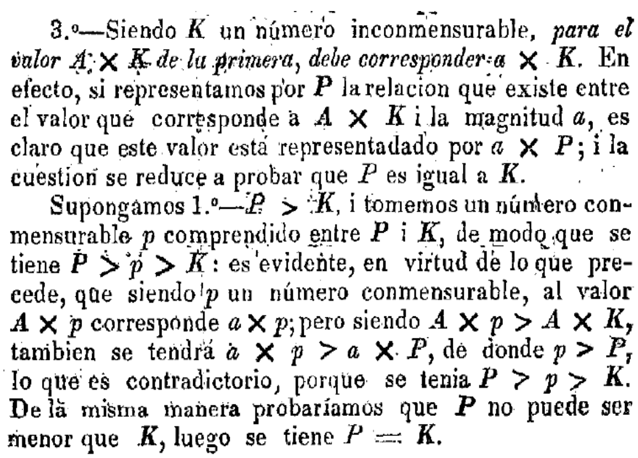
Figura 3. caso 1 de la demostración del teorema 150

La demostración del teorema 150 se basa en que, si las dos magnitudes son conmensurables, la razón entre ellas se puede representar por un número racional, pero, si las magnitudes son inconmensurables, entonces la razón entre ellas se expresa por un número irracional. Para ello divide la demostración en tres casos. En los dos primeros, cuando la razón se establece entre cantidades conmensurables, en cuyo caso, la razón se puede expresar por un decimal finito, o infinito periódico, pero si las cantidades son inconmensurables, entonces la razón se expresa por decimal infinito no periódico.

El caso 3, se puede ver en la figura 4. En este caso, la razón entre las cantidades se expresa por un número inconmensurable (número real), y se demuestra por contradicción, que cualquier secuencia de números racionales que acote superior e inferiormente a dicho número inconmensurable, es idéntica a dicho número (ver Figura 3). En el fondo, es una demostración de la continuidad de los reales, pues demuestra que cualquier cantidad, o es un número racional, o es un número irracional, y el autor es consciente de dar solución a un problema no resuelto en Europa, como se puede ver en la extensa nota al pie de la página 133:

> Tengo la satisfacción de presentar al público la demostración rigurosa de esta proposición, manifestando que he sido conducido a ella investigando las condiciones necesarias para la proporcionalidad de las cantidades. Hasta ahora los más famosos Matemáticos se han contentado con establecer las propiedades jenerales del número conmensurable i aplicar silenciosamente estas mismas propiedades al número inconmensurable; pero este jénero de deducción está mui lejos de ser riguroso: Yo notando este vacío en la Aritmética me propuse llenarlo, i después de mui detenidas meditaciones

> he coronado completamente mis esfuerzos, pues he logrado (n° 115) hacer estensivas al número inconmensurable las propiedades jenerales del número conmensurable […]. (Lívano, 1856, p. 133)



3.°—Siendo K un número inconmensurable, *para el valor* $A \times K$ *de la primera, debe corresponder* $a \times K$. En efecto, si representamos por P la relacion que existe entre el valor que corresponde à $A \times K$ i la magnitud a, es claro que este valor está representadado por $a \times P$; i la cuestion se reduce a probar que P es igual a K.

Supongamos 1.°—$P > K$, i tomemos un número conmensurable p comprendido entre P i K, de modo que se tiene $P > p > K$: es evidente, en virtud de lo que precede, que siendo p un número conmensurable, al valor $A \times p$ corresponde $a \times p$; pero siendo $A \times p > A \times K$, tambien se tendrá $a \times p > a \times P$, de donde $p > P$, lo que es contradictorio, porque se tenia $P > p > K$. De la misma manera probaríamos que P no puede ser menor que K, luego se tiene $P = K$.

Figura 4. Demostración del tercer caso del teorema 150, cuando las cantidades son inconmensurables (Liévano, 1856, p 132)

Liévano propone una solución al problema de la continuidad de los números reales sin mencionar explícitamente esta continuidad. Su solución se basa en una noción general de magnitud, la razón entre cantidades y las propiedades del Sistema de numeración decimal. Con estos elementos, demuestra que las cantidades inconmensurables son números y establece una teoría general de razones y proporciones para demostrar que cualquier número es un racional o un irracional, mostrando así una comprensión profunda de las propiedades topológicas de los números. También presenta una concepción moderna en la que el número emerge de las razones entre cantidades de magnitud y todos los números tienen el mismo fundamento epistemológico.

A manera de conclusión

La aproximación elaborada por Lievano le permite, no solo presentar los viejos problemas de la aritmética en una nueva forma, sino también abordar problemas no resueltos en su momento: la continuidad de los reales. Se puede ver en su trabajo apuestas epistemológicas y ontológicas sobre el concepto de número que se posicionaron como novedosas en la época en la que fueron propuestas, que en la actualidad han pasado al olvido, pero vale la pena recuperar: las magnitudes, sus medidas y las razones entre dichas cantidades. Además, se debe llamar la atención sobre el valor pedagógico de su trabajo. En las aproximaciones actuales en la educación media (bachillerato) el estudio de los números reales tiene un obstáculo crucial: cómo presentar los números irracionales. Comprender la naturaleza del número irracional requiere problematizar la inconmensurabilidad entre cantidades y generar un mecanismo que permite establecer la razón entre dicho para de cantidades.

Metodología del taller

Propósitos del taller: El taller tiene un doble propósito: de un lado, discutir una aproximación al estudio de las prácticas matemáticas fundamentado en un perspectiva histórico-cultural del conocimiento aplicando al análisis de un texto histórica de relevancia en la historia de las matemáticas en Colombia. De otro, discutir una aproximación novedosa al estudio de la continuidad de los números reales a partir del sistema de numeración decimal la cual no solo tiene un valor epistémico importante, sino también pedagógico.

Estrategia metodológica. Se utilizarán estrategias basadas en el trabajo en pequeños grupos para el análisis y la solución de algunos problemas específicos, y se realizarán discusiones plenarias con el fin de consolidar los aspectos conceptuales y metodológicos que se esperan constituir a lo largo del taller. Para ello se tendrá a disposición de los participantes copias de los textos que serán analizados, y algunos instrumentos para sistematizar el trabajo realizado.

Agenda del taller. El taller estará organizado en tres momentos: Un momento de conexión con la problemática (20 minutos), analizando algunas posibles dificultades asociadas a la comprensión sobre la continuidad de los números reales en su estudio a lo largo de la educación básica. Un segundo momento de desarrollo (una hora), en el que se analizarán algunos apartados específicos del texto de Indalecio Liévano, y pondrán en escena las herramientas para el análisis de las prácticas matemáticas. El tercer momento de cierre (30 minutos), a través de una discusión plenaria busca sinterizar los elementos conceptuales y metodológicos abordados en el taller.

Nivel educativo al que va dirigido el taller: Secundaria: 7 a 12 grados; Superior
Número máximo de personas: 40

Agradecimientos

Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación -MINCIENCIAS-, a través de la convocatoria 891-2020, Contrato 133 – 2021, y del programa de investigación código 1115-852-70767, proyecto código 71349 financiado por MINCIENCIAS a través del Fondo Francisco José de Caldas.

Referencias Bibliográficas

Albis-González, V. S., & Soriano-Lleras, L. I. (1976). The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Mathematica*. Historia Mathematica. http://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90032-x

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales. Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Ferreirós, J. (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton; Oxford: Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctt1dr36dc

Kemmis, S., Wilkinson, J., Edwards-Groves, C., Hardy, I., Grootenboer, P.. 2014. *Changing Practices, Changing Education*. Sngapore: Springer Science+Business Media. Doi: https://doi.org/10.1007/978-981-4560-47-4

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Bogotá: Imprenta de Echavarría Hermanos.

Obando, G. (2021). Número y Magnitud: lecciones del Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856). Documento no publicado.

Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado desde http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies* (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours D'Analyse. Analyse algebraico*. In Gauthiers-Villars (Ed.), Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. París: Gauthiers-Villars.

Albis-González, V. S., & Soriano-Lleras, L. I. (1976). The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Mathematica*. Historia Mathematica. http://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90032-x

Formación profesional del profesorado secundario de Matemáticas en España (1955-1960)

Josefa **Dólera** Almaida
Universidad de Murcia
España
j.doleraalmaida@um.es
Dolores **Carrillo** Gallego
Universidad de Murcia
España
carrillo@um.es
Encarna **Sánchez-Jiménez**
Universidad de Murcia
España
esanchez@um.es

Resumen

En la década de los cincuenta del siglo XX, se desarrollaron en España acciones, promovidas por el ejecutivo, dirigidas a proporcionar al profesorado de enseñanza secundaria una preparación pedagógica adecuada. Puig Adam, catedrático de instituto de Matemáticas, potenció numerosas actividades formativas dirigidas al profesorado de esta disciplina a partir de 1955. Este trabajo pretende estudiar las actividades de formación permanente que se organizaron para el profesorado secundario de Matemáticas en España, entre 1955 y 1960. Una de las fuentes principales de este estudio es la revista *Enseñanza Media*, que publicó varias crónicas sobre estas actividades. Los resultados muestran que estas acciones pretendían impulsar una renovación de los métodos de enseñanza de las matemáticas, algunos de los cuales estaban claramente inspirados en el modelo pedagógico de Puig Adam.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Historia de la educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza; Formación docente continua; Investigación documental; Matemáticas; España.

La formación pedagógica del profesorado secundario en la Ley de Ordenación de la Enseñanza Media (1953)

En el periodo comprendido entre 1939 y 1953, la formación pedagógica del profesorado secundario no fue un aspecto que preocupara, en demasía, al estado español (Lorenzo, 1996, 2003). Sin embargo, esta tendencia comenzó a cambiar a partir de 1953 con la aprobación de la Ley de Ordenación de la Enseñanza Media que establecía, en el artículo 42:

> El Ministerio de Educación Nacional cuidará el nivel científico y pedagógico del profesorado de Enseñanza Media, estimulando la mejora de los métodos, promoviendo, con las colaboraciones debidas, cursos de formación y de perfeccionamiento profesional, y vigilando las pruebas de suficiencia, selección y preparación (Ministerio de Educación Nacional, 1953, p. 1124).

Esta Ley pretendía asegurar una adecuada preparación científica y pedagógica del profesorado de enseñanza secundaria y era necesario desarrollar instituciones, experiencias y publicaciones que se encargaran de promover estos aspectos formativos (Lorenzo, 1996, 2003). Para dar cumplimiento a esta disposición el ejecutivo se apoyó -entre otros órganos- en el Centro de Orientación Didáctica (COD), creado en 1954, y se organizaron actividades concretas en favor de la formación profesional del profesorado (Utande, 1964). Al valorar las medidas puestas en marcha por el Régimen franquista, hay que destacar que muchos de los modelos pedagógicos sobre los que se sustentaba esta «renovación» se inspiraban en los postulados de la Escuela Nueva, por lo que «no fueron tan nuevos y avanzados» (Lorente, 2011, p. 682). En esta misma línea, Mainer (2009) y Viñao (2014) consideran que no llegó a producirse una ruptura total con los modelos pedagógicos iniciados antes de la Guerra Civil, ya que se aprecia una cierta continuidad entre los modelos de formación del profesorado que se desarrollaron antes y después del conflicto armado.

Las principales actividades de formación permanente realizadas en España a partir de la reforma de la enseñanza media de 1953 han sido clasificadas por Lorente (2011) en: reuniones de estudio de catedráticos agrupados por seminarios didácticos, con la participación de inspectores especialistas y promovidas por el COD; reuniones de estudio, convocadas con el objetivo de fomentar la coordinación en cada distrito universitario entre el profesorado oficial de institutos y el de los colegios religiosos; cursillos de actualización científica y didáctica, dirigidos prioritariamente al profesorado de materias experimentales; viajes o excursiones de estudio que especialistas en determinadas materias realizaron a lo largo de geografía española, y cursillos de prácticas para profesores no oficiales en determinadas materias, como las matemáticas.

En lo referente a la disciplina de Matemáticas, Pedro Puig Adam (catedrático del Instituto San Isidro de Madrid) tuvo un papel destacado; en 1955 fue nombrado por el COD para asesorar, al profesorado, sobre aspectos didácticos y metodológicos que podrían mejorar la enseñanza de las matemáticas en España, labor que desempeñó hasta su muerte en 1960. Este trabajo pretende estudiar las actividades de formación permanente, promovidas por el COD, que se llevaron a cabo en el ámbito de la educación secundaria sobre la enseñanza de las matemáticas; se alude también a las que se realizaron inspiradas en ellas.

Aspectos metodológicos

El COD desempeñó un papel relevante en la organización de las actividades de formación que nos ocupan. La revista *Enseñanza Media* (1956-1971), dirigida por el Inspector Rodríguez Lesmes, nació con el objetivo de colaborar en la tarea divulgadora del COD y se hizo eco de muchas de las actividades de formación dirigidas a este colectivo. Por este motivo, esta publicación es una de las principales fuentes de este estudio. Se han localizado y estudiado las crónicas que *Enseñanza Media* publicó sobre las actividades de formación, según la tipología de Lorente (2011), prestando especial interés a las cuestiones didácticas y metodológicas que se abordaron en ellas sobre la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato.

Actividades de formación permanente dirigidas al profesorado secundario de Matemáticas

En la segunda mitad de la década de los cincuenta se llevaron a cabo en España varias actividades dirigidas a la formación del profesorado secundario de Matemáticas: en 1956 se organizaron, en Madrid, tres reuniones de estudio de catedráticos agrupados por seminarios; entre 1956 y 1960 se realizaron tres reuniones de estudio en diferentes distritos universitarios, y en 1958 se impartió un cursillo de prácticas para profesores no oficiales sobre didáctica de las matemáticas en el bachillerato.

Reuniones de estudio de catedráticos agrupados por seminarios didácticos

La I Reunión de estudio de catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1956a) tuvo lugar en marzo de 1956. Asistieron a ella 16 catedráticos de los distintos distritos universitarios y 7 catedráticos de los institutos de Madrid. Uno de los temas que se trataron fue la posibilidad de implantar la enseñanza activa en los centros oficiales. Durante la reunión se llevaron a cabo demostraciones de métodos activos que estuvieron a cargo de Puig Adam, de García Rodeja (del Instituto Rosalía de Castro de Santiago de Compostela) y del profesor Gattegno (del Instituto de Educación de la Universidad de Londres). Otro de los temas abordados fue la importancia de que el profesorado intercambiara criterios didácticos sobre temas concretos en cuyo aprendizaje el alumnado presentaba dificultades habitualmente. Se consideraba que estas dificultades podían estar ocasionadas por la «inadecuación de su contenido o del método de su enseñanza a la edad del alumno» (Redacción, 1956a, p. 48) por lo que se reclamaba una adecuada formación pedagógica del futuro profesorado.

En octubre de 1956 se celebró la II Reunión de estudio de catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1957a). Asistieron a ella catedráticos de instituto de Matemáticas e inspectores de enseñanza media de distintas zonas de la geografía española. Se abordaron los obstáculos o inconvenientes que impedían implantar en España una «buena» enseñanza matemática; muchos de ellos se debían a la carencia de formación pedagógica del profesorado de enseñanza secundaria en ese momento, pero también se señalaron otros factores como el predominio de la clase magistral en las aulas, el abuso de los tradicionales métodos euclídeos o la inadaptación de la materia a la edad mental del estudiante, entre otros. Con respecto a los métodos de enseñanza, se propuso fomentar el heurístico. Puig Adam consideraba que esta manifestación de la enseñanza activa estaba destinada a ocupar un papel relevante en la mejora y renovación de la didáctica matemática y llevó a cabo dos lecciones heurísticas ante los asistentes.

La III reunión de estudio de catedráticos de Matemáticas tuvo lugar en diciembre de 1956 y prosiguió con la tendencia iniciada en las dos reuniones anteriores. Se esperaba que, a partir de la reflexión colectiva sobre temas relacionados con la disciplina, pudieran surgir pautas de acción común que permitieran iniciar el proceso de actualización de los métodos y modos que se empleaban en las aulas españolas (Redacción, 1957b). En esta reunión se consensuaron una serie de orientaciones metodológicas como la evolución de los métodos de enseñanza desde el marcado carácter intuitivo y práctico en los dos primeros cursos del bachillerato, el ciclo intuitivo de tendencia racional (cursos tercero y cuarto), que constituía una etapa de transición entre los métodos empíricos y el método racional que caracterizaba a los últimos cursos de la educación secundaria. También se señaló la conveniencia de presentar las matemáticas a partir de ejemplos concretos, extraídos de la vida real del alumno.

Reuniones de estudio

La primera reunión de catedráticos y profesores del distrito universitario de Granada (Redacción, 1956b) se celebró en noviembre de 1956, con el objetivo de reflexionar y discutir sobre la metodología matemática. El acto inaugural fue presidido por el inspector jefe del distrito de Granada, Alfonso Guiraum, junto al inspector Francisco Sevilla y varios directores de instituto. Puig Adam no pudo acudir a la reunión, pero no quiso desaprovechar la oportunidad de participar en ella a través de un mensaje grabado que fue reproducido en la crónica que *Enseñanza Media* publicó sobre la reunión, en el que resaltaba la importancia de la actividad del alumnado en sus aprendizajes:

> Con el hombre de estudio evoluciona también la sociedad. Y ¿cómo no ha de evolucionar la didáctica? (…) Reformemos, pues, los métodos, pero estemos alerta a la psicología de nuestros alumnos. Enseñar no es transmitir, sino guiar, en el sentido de que todo conocimiento se obtenga por una acción que lo provoque. Si se analiza la génesis de los procesos matemáticos, esta tiene que ser activa, en situaciones creadas por el maestro. El niño se ha de convertir en el creador de su propia cultura matemática (Redacción, 1956b, p. 51).

En 1958, en Valencia, Antonio de la Hoz (inspector jefe de enseñanza media de dicho distrito universitario) organizó un cursillo sobre didáctica de las matemáticas (Redacción, 1958). El objetivo de este cursillo era abordar la mejora de los métodos de enseñanza. Asistieron más de sesenta profesores, entre los que se encontraban todos los catedráticos de Matemáticas que ejercían en los centros oficiales y representantes de colegios religiosos y privados. Entre los temas tratados la publicación resaltaba los problemas de exámenes de grado, las pruebas objetivas y los errores más frecuentes de los alumnos. Todos ellos estuvieron a cargo de Francisco Bernardo Cancho, jefe nacional de las inspecciones de distrito universitario.

En mayo y junio de 1960 se realizaron dos coloquios sobre didáctica de las matemáticas en la provincia de Huelva (Redacción, 1960b), organizados por el Servicio Español del Profesorado de Enseñanza Media de Huelva y por los Institutos Laborales de Ayamonte y Aracena. El responsable de estas actividades fue el profesor Francisco Marcos de Lanuza (jefe provincial del Servicio y catedrático de Matemáticas del Instituto de Granada) quien desarrolló varias experiencias didácticas con materiales. En esta labor le acompañó Juan Fernández, profesor de Matemáticas y director de Instituto Laboral de Ayamonte.

Cursillos de prácticas para profesores de Matemáticas no oficiales

España sufrió en la década de los años cincuenta una transformación social que desembocó, entre otras consecuencias, en una democratización de la enseñanza secundaria (Utande, 1975; Viñao, 1992). El aumento significativo del número de matrículas en el bachillerato, ya que una gran parte de la población pudo acceder al sistema educativo, puso de manifiesto la escasez de personal especializado en la disciplina de Matemáticas (Redacción, 1957b, 1958).

Con la finalidad de aportar orientaciones didácticas y metodológicas al profesorado que impartía la asignatura en centros privados, y que no había recibido formación en la Sección de Exactas de la Facultad de Ciencias (donde se impartía la licenciatura en Matemáticas), el COD organizó en 1958, en el Instituto San Isidro de Madrid, un cursillo sobre didáctica de las matemáticas en el bachillerato (Redacción, 1958). Esta actividad fue dirigida por Puig Adam y en su programa se insertaban varias conferencias y lecciones prácticas. Algunas de ellas consistieron en el desarrollo, ante los cursillistas, de lecciones heurísticas con grupos de alumnos del bachillerato, principalmente de los primeros cursos. Estas demostraciones estuvieron a cargo de Puig Adam y Pascual Ibarra, inspector del distrito de Salamanca.

Conclusiones

El objetivo principal de todas las acciones citadas en este trabajo parece ser el mismo, poner en contacto al profesorado español con la finalidad de promover «un movimiento renovador en los métodos didácticos de las Matemáticas en la Enseñanza Media» (Redacción, 1956a, p. 47). En las reuniones no solo se debatían las reformas que se consideraban necesarias, sino que su programa solía contemplar la exposición de experiencias de aula, para proporcionar a los asistentes instrumentos de cambio metodológico. Al frente de ese movimiento se sitúa Puig Adam, encargado por el COD de la dirección del mismo, y cuya influencia se advierte tanto en los temas que se abordaron como en las conclusiones de las reuniones. Un ejemplo es la aceptación del «Decálogo de la didáctica matemática» que había publicado Puig Adam en 1955 (Puig Adam, 1955); otro son las orientaciones metodológicas, acordadas sobre la evolución del enfoque dado a las enseñanzas, desde lo intuitivo y práctico, con introducción gradual del razonamiento, hasta llegar a los métodos racionales. Estas propuestas están en continuidad con las que se habían realizado antes de la Guerra Civil, entre otros, por Puig Adam (1929).

Los debates de estas reuniones concluyeron con propuestas e ideas interesantes que se presentaron a la Dirección General de Enseñanza Media (Puig Adam, 1958). La revista *Enseñanza Media* corrobora este hecho al afirmar que los estudios y conclusiones alcanzados en estas reuniones tuvieron su reflejo en los Cuestionarios de Matemáticas que se publicaron en 1957 (Redacción, 1960a, p. 134).

Referencias y bibliografía

Lorente, A. (2011). El papel de la Inspección de Educación en la extensión de la Enseñanza Media y en la mejora de los Institutos antes de la LGE de 1970. En G. Vicente (Ed.), *Historia de la Enseñanza Media en Aragón* (pp. 673-692). CSIC.

Lorenzo, J. A. (1996). Evolución y problemática de la Educación Secundaria Contemporánea en España. *Revista Complutense de Educación, 7*(2), 51-79. https://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/view/RCED9696220051A

Lorenzo, J. A. (2003). *Formación del profesorado de enseñanza secundaria en España: pensamiento e instituciones (1936-1970)*. Editorial complutense.

Mainer, J. (2009). *La forja de un campo profesional. Pedagogía y Didáctica de las Ciencias Sociales en España (1900-1970)*. CSIC.

Ministerio de Educación Nacional (1953). Ley de 26 de febrero de 1953 sobre la Ordenación de la Enseñanza Media. BOE, 58, de 27 de febrero, 1119-1130.

Puig Adam, P. (1929). Notas sobre pedagogía matemática. *Revista Matemática Hispano-Americana*, 129-131.

Puig Adam, P. (1955). Decálogo de la didáctica matemática media. *Gaceta Matemática, 5-6*, 130-135.

Puig Adam, P. (1958). Sobre la formación del profesorado de Matemáticas de grado medio. *Boletín de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral*, 3-12.

Redacción (1956a). Renovación de los métodos didácticos en España: Matemáticas. *Enseñanza Media, 2*, 47-49.

Redacción (1956b). Reunión de Matemáticas del distrito universitario de Granada. *Enseñanza Media, 2*, 50-52.

Redacción (1957a). Las Reuniones de estudio del profesorado de Enseñanza Media. *Enseñanza Media*, *3*, 8-21.

Redacción (1957b). Las Reuniones de estudio del profesorado de Enseñanza Media: II Matemáticas. *Enseñanza Media, 6*, 5-15.

Redacción (1958). Referencia de dos cursos de Didáctica de las Matemáticas, celebrados en Madrid y en Valencia. *Enseñanza Media*, *18-19*, 29-39.

Redacción (1960a). Balance de cuatro años de labor. En P. Puig Adam (Ed.), *La matemática y su enseñanza actual* (pp. 132-136). Ministerio de Educación Nacional.

Redacción (1960b). La Didáctica de la Matemática. Coloquios en Ayamonte y Aracena, Huelva. *Enseñanza Media*, 1561-1566.

Utande, M. (1964). *Ley de Ordenación de la Enseñanza Media de 26 de febrero de 1953 anotada y comentada*. Dirección General de Enseñanza Media.

Utande, M. (1975). Treinta años de enseñanza media (1938-1968). *Revista de Educación, 240*, 73-86. https://www.educacionyfp.gob.es/revista-de-educacion/dam/jcr:7e952482-5572-4f4a-8f3b-1190f057a3b6/1975re240estudios08-pdf.pdf

Viñao, A. (1992). Del Bachillerato a la Enseñanza Secundaria (1938-1990). *Revista española de pedagogía, 50*(192), 321-340. https://revistadepedagogia.org/wp-content/uploads/2018/03/6-Del-Bachillerato-a-la-Ense%C3%B1anza-Secundaria-1938-1990.pdf

Viñao, A. (2014). La educación en el franquismo (1936-1975). *Educar em Revista, 51*, 19-35. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155030093003

Historia e identidad matemática en el aula de secundaria: una experiencia a través de la ficción

Albert **Vilalta** Riera
Universitat Autònoma de Barcelona e Innovamat Education
España
albert.vilalta@uab.cat
Marc **Caelles** Vidal
Escola Sant Gregori e Innovamat Education
España
mcaelles@santgregori.org
Verónica **Sánchez** Orpella
Escola l'Hortizó e Innovamat Education
España
veronica.sanchez@innovamat.com

Resumen

¿Por qué es importante introducir la historia de las matemáticas en el aula? ¿De qué manera se puede presentar, para que los alumnos la conecten con su identidad matemática? El presente taller trata de responder estas cuestiones desde la experiencia que supone haber creado, como material didáctico, una serie de animación fundamentada teóricamente que utiliza la narrativa para contextualizar la historia de las matemáticas en el aula de secundaria. En el taller, exploramos las bases didácticas de la serie, revisamos parte de la metodología de su proceso creativo y la vinculamos con actividades de muestra a través de ejemplos. Los objetivos principales son, por tanto, reivindicar el trabajo integrado de la historia en el aula, destacar el impacto positivo que la serie ha tenido en casos reales de alumnos y, sobre todo, ofrecer a los participantes herramientas para crear y analizar sus propios recursos.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Historia de las matemáticas; Educación secundaria; Enseñanza; Diseño curricular; Investigación educativa; Pensamiento algebraico; Pensamiento numérico.

Introducción

En las últimas décadas, muchos autores han defendido la importancia de incluir la historia de las matemáticas en el aula y han teorizado sobre cómo hacerlo. En el conocido estudio del ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), donde participan diferentes autores de consolidada trayectoria en el ámbito de la didáctica, se describen cinco áreas en las que la enseñanza de las matemáticas puede verse “enriquecida y mejorada mediante la integración de la historia de las matemáticas en el proceso educativo”. A saber:

> El aprendizaje de las matemáticas; el desarrollo de puntos de vista sobre la naturaleza de las matemáticas y la actividad matemática; el bagaje didáctico de los profesores y su repertorio pedagógico; la predisposición afectiva hacia las matemáticas; y la apreciación de las matemáticas como un esfuerzo cultural-humano. (Fauvel y Maanen, 2006, p. 203)

Dicho trabajo nos parece un marco de referencia interesante para empezar a abordar la cuestión. Los profesores de matemáticas debemos hacer un esfuerzo por dominar la historia de nuestra disciplina y hacer que nuestros alumnos la conozcan de manera integrada con el currículo. De hecho, son varios los territorios que incluyen la historia de las matemáticas como mecanismo para humanizarlas y como objetivo de aprendizaje en los documentos oficiales.

Sin embargo, en nuestra experiencia con el proyecto Innovamat (descrito en Vilalta, 2021) para la etapa de secundaria hemos podido observar que el profesorado, que en muchos casos no es licenciado en matemáticas, desconoce (salvo honrosas excepciones) tanto los detalles de la historia como la manera de introducirla con éxito en el aula. Es por ello que desarrollamos un programa curricular para secundaria que sea sensible con la historia y la utilice para introducir ciertos contenidos y también como una finalidad de aprendizaje en sí misma. De esa reflexión nació el proyecto que se presenta (más como experiencia que como investigación) en el taller que nos ocupa: la serie de animación “El viaje de Sam”. En formato de vídeos cortos (entre cinco y diez minutos), la serie sirve para introducir, una vez por semana, las sesiones de matemáticas en 1º y 2º de secundaria y conectarlas con la historia a través de una narrativa y unos personajes con los cuales los alumnos pueden sentirse identificados.

Utilizaremos el espacio del taller para explorar los fundamentos didácticos de la serie, eminentemente centrada en la historia de las matemáticas, y conectarla con algunos ejemplos de actividades de secundaria que proporcionen a los asistentes herramientas sobre como incluir la historia en el aula. Por último, analizaremos brevemente las conclusiones del estudio piloto que hemos llevado a cabo para medir el efecto de visualizar dicha serie en el alumnado.

Referencial teórico

La importancia de la historia en el aula de matemáticas

En Fauvel y Maanen (2006), los autores nos hablan desde diferentes perspectivas acerca de la importancia que tiene incorporar la historia en el aula:

> A primera vista, las matemáticas parecen ser el área curricular en la que los alumnos de todos los orígenes tienen puntos en común. Al fin y al cabo, salvo algunas pequeñas diferencias en los

> algoritmos de las habilidades básicas (como la forma de escribir los cálculos en papel), las habilidades computacionales en todo el mundo son muy parecidas. No obstante, los alumnos de todo el mundo aprenden las matemáticas basándose en sus patrones lingüísticos y culturales conocidos [...]. Muchos estudian matemáticas en la escuela sin entender su utilidad; a muchos les disgustan las matemáticas en la escuela; muchos más muestran una gran ansiedad por las matemáticas. Los alumnos de las minorías parecen ser los que peor lo pasan.
> Una de las formas en que los especialistas en currículo animan a los profesores a dar sentido a su área de contenidos es humanizando la asignatura. ¿Qué mejor manera de humanizar las matemáticas que utilizar la historia de las matemáticas en el aula? Además de ser entretenida, la historia de las matemáticas proporciona al alumno información sobre las raíces globales de las matemáticas. La historia de las matemáticas ayuda a los alumnos a darse cuenta de que las matemáticas no son solo una invención de la cultura escolar dominante. Más bien, ayuda a los alumnos a darse cuenta de que las matemáticas evolucionaron a partir de muchas fuentes y en muchos lugares. (p. 186)

Parece evidente que la historia, bien llevada al aula, puede convertirse en una puerta de entrada magnífica para aquellos alumnos que no disfrutan de las matemáticas desde aproximaciones más abstractas o desconectadas del resto de actividades humanas. Además, la multiculturalidad en los enfoques y estrategias con las que abordamos los problemas matemáticos en el aula enriquece su resolución:

> Este enfoque [...] permite a los alumnos y a los profesores pensar en las matemáticas como una disciplina de reflexión y acción continuas, influidas por la reflexión, el razonamiento, los procedimientos conocidos, la intuición, la experimentación y la aplicación a situaciones prácticas. (Fauvel y Maanen, 2006, p. 46)

Furinghetti (2000), una de las pioneras en la teorización del uso de la historia en el aula, en un trabajo previo a las reflexiones del ICMI, explica que "la historia de las matemáticas puede ser un elemento eficaz para dotar a los alumnos de flexibilidad, apertura mental y motivación hacia las matemáticas." Y añade un detalle que nos parece precioso:

> La historia es una especie de *lupa* para los nodos conceptuales de una determinada teoría, un medio para identificar los puntos críticos, para detenerse en los conceptos difíciles y para analizarlos a través de las palabras de los autores del pasado. La idea básica en este uso de la historia de las matemáticas es la de evitar la presentación de una teoría pulida, y construirla junto con los alumnos siguiendo el camino de aquellos que lucharon con los problemas matemáticos subyacentes a esta teoría. (p. 43)

Esta manera de ver la matemática como una ciencia viva, que evoluciona de la mano de la humanidad, que presenta la dificultad e incluso el error como fuente de conocimiento, transmite una imagen, en nuestra opinión, mucho más realista de lo que supone *hacer matemáticas*.

En un trabajo posterior, Jankvist (2009) analiza los hallazgos del ICMI y otros autores y explica que las aproximaciones a la cuestión son tan diversas como lo son los perfiles investigadores que la han estudiado:

> Al leer la literatura sobre el uso de la historia de las matemáticas en la educación matemática, uno se encuentra con varios argumentos a favor de por qué puede ser una buena idea y varias ideas sobre cómo hacerlo, a lo que me referiré como los porqués y los cómos respectivamente. Lamentablemente, esta lectura de la literatura parece revelar cierta confusión en la discusión de estos porqués y cómos. Parte de la explicación de esto puede tener que ver con que los temas son abordados por muchos tipos diferentes de investigadores (matemáticos, historiadores, educadores, etc.), cada uno de los cuales tiene su propia agenda, antecedentes y estilo. (p. 236)

En cualquier caso, el autor considera dicha variedad positiva para el debate y observa, a grandes rasgos, dos tipos de argumentos para incluir la historia en el aula (a los que denomina *los porqués*: argumentos de la historia como herramienta y argumentos de la historia como objetivo de aprendizaje). Además, profundiza en lo que denomina los *cómos* llevar esta historia al aula :

> Las tres formas de utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas son:
> a) Aprendizaje de la historia, mediante la aportación de información histórica directa.
> b) Aprendizaje de temas matemáticos, siguiendo un enfoque de enseñanza y aprendizaje inspirado en la historia.
> c) Desarrollar una conciencia más profunda, tanto de las propias matemáticas como de los contextos sociales y culturales en los que se han hecho las matemáticas. (Jankvist, 2009, p. 247)

Este último punto, que ve la historia como un catalizador que abre la puerta a la vertiente más humanista y cultural de las matemáticas, dialoga a la perfección con uno de los temas centrales del pasado congreso de profesores del NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), celebrado en Los Ángeles:

> Nuestras historias personales nunca han sido tan importantes para darnos un sentido de identidad y pertenencia en nuestro frágil y cambiante mundo. Se han convertido en catalizadores y palancas necesarias para reexaminar los propósitos del aprendizaje de las matemáticas para todos nuestros estudiantes. Las sesiones de este apartado no solo apoyarán el surgimiento crítico de una educación matemática antirracista, sino que también examinarán los temas universales e históricos de la alegría y el asombro que han atravesado todas las culturas, civilizaciones y situaciones socioeconómicas. Las matemáticas deben verse a través de un prisma que refracte todas sus posibilidades y encantos. A través de una poderosa narrativa, podemos asegurar que todos nuestros estudiantes puedan encontrar su voz y propósito únicos en el aprendizaje de las matemáticas. (Flynn et al., 2021, p. 8)

La historia, bien utilizada en el aula, puede actuar como un espejo que refuerce la identidad matemática de nuestro alumnado, la sensación de pertenecer a una sociedad que ha tenido dificultades y preocupaciones con las que sentirse identificados. Ello cobra una especial relevancia en el caso de los colectivos históricamente discriminados por razón de género (Henrion, 1997), raza, capacidad o estatus socioeconómico (Bartell et al., 2017): un tratamiento sensible de la historia puede abrir la puerta a ciertos debates enriquecedores que, de otra manera, difícilmente tienen lugar en el aula de matemáticas y dar voz a aquellos alumnos que habitualmente se sienten menos invitados a expresar sus ideas.

La narrativa como herramienta educativa

En la parte final de la cita anterior, el comité científico del NCTM nos habla de la narrativa como una *herramienta poderosa* para que los alumnos desarrollen su propósito en el aula de matemáticas. El uso de la narrativa en educación, sin embargo, no es una idea nueva. De hecho, en nuestra experiencia, los maestros de educación preescolar y primaria son muy conscientes de ello: es relativamente sencillo encontrar recursos matemáticos que giran en torno al cuento para dichas etapas. No obstante, esta práctica no resulta habitual en etapas posteriores. Y eso que, ya en los años 90, se pueden encontrar diferentes autores que destacan el poder que tiene la narrativa como herramienta educativa. Witherell y Noddings (1991) afirman que la narrativa y el diálogo son fundamentales para la educación. Weber (1993) va más allá y destaca el papel que puede tener la narrativa incluso en la formación de profesores:

> Cada recuento de una anécdota narrativa provoca una mayor reflexión y plantea preguntas, convirtiéndose en parte del proceso de investigación y en una forma de teorización pedagógica. A través de un relato ilustrativo de anécdotas, se sugiere que el uso perspicaz de la narrativa es una forma de construir y asimilar nuestra base de conocimientos en la formación de profesores. (p. 71)

Zazkis y Liljedahl (2009), en un estudio más reciente, presentan la narración de historias como medio para crear un aula en la que se comprendan y disfruten las matemáticas, y demuestran cómo la actividad matemática de los alumnos puede ser mejorada a través de la narración de historias. Además, presentan un marco para crear nuevas historias, ideas para utilizar y enriquecer las ya existentes, así como varias técnicas para contar historias que hacen que la narración sea más interactiva y atractiva para el alumno.

Metodología

Como se ha comentado en la introducción, "El viaje de Sam" es la serie de animación que acompaña, en capítulos semanales de entre 5 y 10 minutos, las sesiones de matemáticas de nuestra propuesta curricular para 1º y 2º de secundaria. El presente taller pretende explicar la experiencia de conceptualizar didácticamente la serie, con especial atención al tratamiento de la historia de las matemáticas. Y, sobre todo, pretende proporcionar a los participantes, a través de ejemplos concretos, herramientas para trabajar la historia y la identidad matemática en el aula. Por último, comentaremos brevemente las conclusiones del estudio piloto llevado a cabo para medir el efecto de visualizar dicha serie en el alumnado.

"El viaje de Sam" responde a la necesidad que se explora en el referencial teórico: introducir la historia de las matemáticas en el aula. Además, desde el principio quisimos hacerlo a través de una narrativa interesante para los alumnos. Es evidente que se puede hablar de historia sin narrativa (y viceversa), pero siempre creímos en la simbiosis entre ambas: queríamos contar la *historia* a través de una buena *historia*. Para ello, basándonos en las cinco áreas principales que describe el ICMI (Fauvel y Maanen, 2006) en las que pueden existir beneficios cuando hablamos de historia en el aula, definimos tres grandes objetivos alineados con el marco teórico descrito en el apartado anterior.

Tabla 1
Relación de las áreas que describe el ICMI con los objetivos didácticos de la serie.

Áreas ICMI	Objetivo de la serie
- El aprendizaje de las matemáticas - El desarrollo de puntos de vista sobre la naturaleza de las matemáticas y la actividad matemática - El bagaje didáctico de los profesores y su repertorio pedagógico	1. Transmitir lo que significa *hacer matemáticas*
- La apreciación de las matemáticas como un esfuerzo cultural-humano	2. Poner perspectiva histórica y cultural a los contenidos de matemáticas
- La predisposición afectiva hacia las matemáticas	3. Fomentar el desarrollo de habilidades socioemocionales

Fuente: Elaboración propia a partir de Fauvel y Maanen (2006).

Con los objetivos definidos, nos propusimos escribir, dibujar y animar una serie que utilizara la narrativa como medio a través del cual hacer llegar la historia al alumnado (Zazkis y Liljedahl, 2009). Para ello, era necesario definir un canon propio, una selección de personajes históricos que, más que exhaustiva, debía ser representativa. A la hora de elegir el canon, concretamos dos indicadores para cada objetivo. Para transmitir lo que significa *hacer matemáticas*, los personajes deben ser matemáticamente relevantes (1) y estar conectados con el currículo (2). Para poner perspectiva histórica y cultural a los contenidos, los personajes deben ser históricamente relevantes (3) y diversos en el tiempo y en la geografía (4). Para fomentar el desarrollo de habilidades socioemocionales, deben ser un modelo de referencia para los alumnos (5) y ser diversos en cuanto a género y etnia (6). Además, se limitó el número de personajes diferentes por temporada a un máximo de ocho, para permitir que los alumnos se familiarizaran con todos en profundidad. Sirva como ejemplo la selección de personajes que se hizo para la 1ª temporada (28 capítulos, 1º de secundaria):

Tabla 2

Selección de personajes históricos para la primera temporada de acuerdo con los indicadores.

	Mirzakhani	Arquímedes	Un romano	Un sumerio	Brahmagupta	Euclides	Germain
1	Geometría hiperbólica	Número π, potencias	Números romanos	Números sumerios	Operar con 0	Definir conceptos	Números primos
2	Operaciones combinadas	Números naturales	Números naturales	Números naturales	Enteros	Geometría plana	Divisibilidad
3	Primera mujer medalla Fields	Imperio griego	Imperio romano	Primeros números escritos	Números negativos	*Los Elementos*	Monsieur Le Blanc
4	1977 - 2017 Irán	287 - 212 aC Imperio griego	100 Imperio romano	3000 BC Civilización sumeria	598 - 668 Hinduismo	300 BC Alejandría	1776 - 1831 Francia
5	Artista, escritora	Ingeniero	Matemático anónimo	Matemático anónimo	Aceptar el error	Ir más allá de los límites	Imparable
6	Mujer árabe	Hombre griego	Hombre romano	Hombre sumerio	Hombre hindú	Hombre griego	Mujer francesa

Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta selección inicial, fruto del asesoramiento de un grupo de expertos en historia de las matemáticas, que contó con el vistobueno del equipo artístico que hizo realidad las ideas escritas por los guionistas (y autores del taller), se escribió una historia por capítulos cortos, con una narrativa que trata temas relevantes para los alumnos (Zazkis y Liljedahl, 2009). Y finalmente, se dibujó y sé animó en un formato visual que imita el estilo de videojuegos RPG

(*Role Playing Game*). Aunque explicar la parte artística visual de la serie no forma parte de los objetivos del presente taller, a continuación se incluyen dos capturas que ilustran el trabajo:

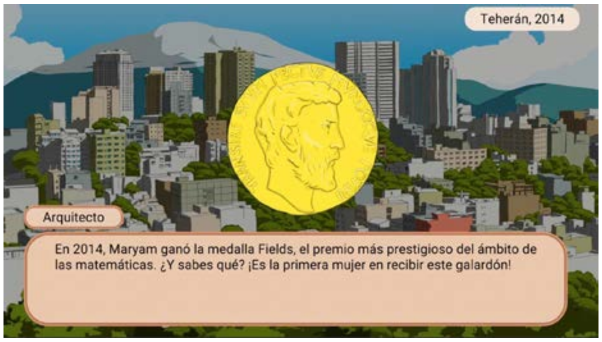


Figura 1. Capturas de los capítulos 3 y 12 de 1º, respectivamente.

Para ilustrar de manera práctica la relación entre la serie y las sesiones curriculares que se introducen a través de ella, en el taller que nos ocupa exploraremos tres ejemplos de actividades para 1º de secundaria y sus respectivos capítulos. La agenda prevista es la siguiente:

1. Introducción (presentación, 5 min.)
2. La historia y la narrativa en el aula de matemáticas (discusión, 10 min.)
3. El proceso de creación de "El viaje de Sam" (presentación, 20 min.)
4. Actividad 1: ¿Quién es el intruso?, con operaciones combinadas. A través del capítulo 3, descubrimos la importancia de los signos matemáticos en las operaciones (análogos a los signos de puntuación en ortografía) y planteamos una actividad sobre operaciones combinadas (trabajo en grupos, 15 min. y puesta en común, 5 min.)
5. Actividad 2: La estrategia de *cover-up* para la resolución de ecuaciones. El capítulo 4 introduce la necesidad de dividir un problema en partes más pequeñas, y ello nos conduce a presentar la estrategia de *cover-up* para resolver ecuaciones (trabajo en grupos, 15 minutos y puesta en común, 5 min.)
6. Actividad 3: En busca del 0. A través del capítulo 5, hablamos de la importancia del número 0 como punto de referencia y planteamos una actividad de práctica productiva sobre enteros en la línea numérica. (trabajo en grupos, 15 min. y puesta en común, 5 min.)
7. Conclusiones (discusión, 15 min.)

Finalmente, cabe destacar que a lo largo del curso 2021/22 se llevó a cabo un pequeño estudio piloto para medir el efecto del uso de la serie en el aula: se comparó un grupo que había visto la serie con un grupo que no, a través de sus respuestas a un cuestionario. Si bien los resultados fueron estadísticamente no concluyentes (se están revisando tanto la metodología como la muestra, para repetir el estudio), la tendencia que apuntan es prometedora en cuanto a conocimiento de la historia de las matemáticas y reducción de la ansiedad matemática (como la definen y miden Núñez-Peña et al. (2014)). Dicha tendencia sale reforzada, además, si de manera informal interpretamos las respuestas individuales de algunos alumnos cualitativamente. De hecho, sin ánimo de extraer conclusiones globales, en las puestas en común del taller analizaremos brevemente algunas respuestas del alumnado al cuestionario.

Resultados y conclusiones

Dado que la propuesta de taller pretende compartir la experiencia de los autores durante el desarrollo de una serie de animación para introducir la historia de las matemáticas en el aula, el resultado (la misma serie y su uso en el aula) no responde a la naturaleza habitual de las investigaciones en didáctica. Por ello, bajo nuestra visión, no se requiere cotejarla con el referencial teórico más allá de comprobar que, efectivamente, responde a los objetivos marcados y combina con solvencia las tres formas de utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas descritas por Jankvist (2009, p. 247). Además de experimentarlo en primera persona durante el taller, como harán los participantes, la mejor muestra de ello se encuentra en el aprendizaje de los alumnos, que exploraremos brevemente al final del mismo. En cualquier caso, sirva el presente trabajo para mostrar cómo es posible introducir la historia a través de la narrativa. Esperamos que proporcione herramientas a otros docentes para crear sus propias propuestas en el futuro.

Referencias y bibliografía

Bartell, T., Wager, A., Edwards, A., Battey, D., Mary Foote, M. y Spencer, J. (2017). Toward a framework for research linking equitable teaching with the standards for mathematical practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(1), 7-21.

Fauvel, J. & Maanen, J. V. A. (2006). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Springer.

Flynn, M., Turner, K., Aminata, D. Livingston, T., Lee, J., Garcia, M. Klassen, A. Kelley-Petersen, M., Singh, S., Margolis, C., Garrison, L., Valdez, M., Vilson, J. & Treglio, C. (2021). Conference Focus Strands. *Program Book for the NCTM Annual Meeting & Exposition*, 8.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 43-51. https://doi.org/10.1080/002073900287372

Henrion, C. (1997). *Women in Mathematics: The Addition of Difference*. Amsterdam University Press.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

NCTM (2014, April 18). Access and Equity in Mathematics Education. A position of the National Council of Teachers of Mathematics.

Núñez-Peña, M., Guilera, G. & Suárez-Pellicioni, M. (2014). The Single-Item Math Anxiety scale (SIMA): An alternative way of measuring mathematical anxiety. *Personality and Individual Differences, 60,* S75-S76. https://doi.org/10.1016/j.paid.2013.07.339

Vilalta, A. (2021). Un proyecto para desarrollar la competencia matemática en el aula de primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 92*, 73-79.

Weber, S. (1993). The Narrative Anecdote in Teacher Education. *Journal of Education for Teaching, 19*(1), 71-82. https://doi.org/10.1080/0260747930190107

Witherell, C. & Noddings, N. (1991). *Stories Lives Tell: Narrative and Dialogue in Education*. Teachers College Pr.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Macmillan Publishers.

História Oral e pesquisa documental: trânsitos em um estudo em História da Educação Matemática

Mariana Cristina Boaretti Cavenaghi **Johansen**
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências
Brasil
mariana.boaretti@unesp.br
Maria Ednéia **Martins**
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências
Brasil
maria.edneia@unesp.br

Resumo

Esse artigo apresenta uma problematização acerca dos trânsitos entre História Oral e pesquisa documental em um estudo iniciado em nível de mestrado, com mudança de nível para doutorado, cujo objetivo é estudar o curso de Matemática da Fundação Educacional de Bauru/Universidade Estadual Paulista, mobilizando a História Oral como referencial metodológico. Embora tenha sido criado, e seja hoje oferecido, como licenciatura, o curso também assumiu, ao longo de sua existência, a modalidade bacharelado, como complementação à licenciatura, em torno da qual a problematização aqui proposta é delineada. A relação bidirecional e complementar que se estabelece entre fontes orais e escritas foi evidenciada, sustentando a ideia de que fontes heterogêneas se enriquecem mutuamente e, jamais, devem ser hierarquizadas. No curso da investigação, ao mesmo tempo em que trouxeram à cena uma nova fonte oral e, decorrente dela, novas e significativas fontes documentais, fontes escritas sustentaram e complementaram as memórias dos depoentes.

Palavras-chave: Educação Matemática; História da Educação Matemática; Ensino Superior; Ensino; Formação de Professores; Pesquisa qualitativa; Matemática; Bacharelado; Fundação Educacional de Bauru; FEB.

(História da) Educação Matemática, metodologias e fontes

A Educação Matemática pode ser satisfatoriamente entendida como uma prática social – centrada no ensino e na aprendizagem da Matemática (Garnica & Souza, 2012) – em que duas dimensões coexistem: “um movimento que ocorre no mundo” (Silva & Miarka, 2017, p. 754), onde há a manifestação das situações de ensino e de aprendizagem da Matemática em espaços diversos, sejam eles institucionalizados ou não, e o campo de investigação (Silva & Miarka, 2017) que reúne as pesquisas em que elementos acerca desse movimento são tematizados.

Tomarmos o ensino e a aprendizagem da Matemática como objeto de estudo desse campo, não significa, contudo, assumirmos que a Educação Matemática se preocupa (ou deveria se preocupar) apenas com investigações que rendem materiais e métodos voltados à melhoria do ensino. Essa é uma ideia demasiadamente reducionista (Garnica & Souza, 2012) que, não raras vezes, tende a uma equivocada e falaciosa hierarquização do conhecimento produzido e divulgado na área – logo, que urge ser superada. Isso porque inúmeros são os elementos associados ao ensino e à aprendizagem da Matemática, visto que esses processos não ocorrem de forma isolada e independente, desconectados de outros fatores situados para além das salas de aula, propriamente ditas. Não há, a título de exemplo, ensino e aprendizagem institucionalizados sem a existência de espaços destinados a esse fim, sem gestão escolar e sem, destacamos, formação de professores. O objeto de estudo tem, por si só, um caráter interdisciplinar, tal como o tem a própria natureza do campo e, por consequência, a sua manutenção.

Inevitavelmente, essa interdisciplinaridade leva os educadores matemáticos a dialogarem com distintos campos científicos consolidados, tais quais a Antropologia, a Sociologia, a Filosofia, a História e a Psicologia. Consequentemente, aspectos psicológicos, históricos, filosóficos e sociais do ensino e da aprendizagem da Matemática – bem como dos elementos a eles associados – são estudados (Alencar, 2019; Garnica & Souza, 2012), trazendo à tona ricas e oportunas problematizações.

No seio dos diálogos estabelecidos, em particular, com a História, emerge a História da Educação Matemática, que, ao associar fazeres historiográficos à Educação Matemática, se ocupa de “[...] produzir significado para o que se entende como sendo alterações e manutenções dos (e nos) espaços em que se ensina e se aprende Matemática. Disso, várias questões se abrem” (Garnica, 2015, p. 111). Tais questões, que, insistimos, extrapolam os limites das salas de aula, requerem que outras áreas do conhecimento sejam trazidas para o diálogo exercido entre História, Educação e Matemática (Garnica & Souza, 2012, p. 40). Em solo brasileiro, nas crescentes produções nas searas da História da Educação Matemática, “[...] vemos amiúde uma interlocução genuína de fazeres muito diversos, agregando ao tratamento, digamos, historiográfico, matizes filosóficos, sociológicos, políticos” (Garnica, 2015, p. 108).

Diante desse cenário, parece-nos consensual que a História da Educação Matemática é um campo profícuo, no que se refere tanto à quantidade quanto à diversidade de suas produções científicas. Todo o leque de possibilidades de investigações e interpretações que se abre aos educadores matemáticos que praticam historiografia deve-se, sem sombra de dúvidas, à disponibilidade de metodologias, de teorias e de fontes vastas e heterogêneas. Contudo, a mobilização de variadas fontes e referenciais metodológicos e teóricos guarda uma estreita ligação com a concepção de história assumida pelo pesquisador. Isso porque tal concepção está intimamente relacionada àquilo que ele entende serem esses elementos, ao modo como ele conduz as problematizações que se propõe a praticar e à sua própria ideia de objeto de estudo.

Desse modo, não fosse a renovação da historiografia, certamente, a História da Educação Matemática não se encontraria, hoje, em um patamar tão elevado de desenvolvimento.

Fazemos essa afirmação com segurança, ante às limitações impostas pelo paradigma tradicional de história. Diante de uma busca incessante pela racionalidade, pela objetividade e pela neutralidade do conhecimento histórico, assentada em ideias positivistas, essa concepção pregava a valoração exacerbada das fontes escritas elaboradas por “autoridades competentes”, que eram consideradas oficiais e, em tese, poderiam ter sua suposta autenticidade comprovada (Alencar, 2019; Le Goff, 1990). Em decorrência, fontes de outras naturezas, aqui incluídas aquelas orais, eram negligenciadas e colocadas às margens da historiografia. Ora, se as fontes orais não encontravam lugar no fazer historiográfico, tampouco a prática da História Oral o faria. Os defensores dessa perspectiva que se opõem à mobilização da História Oral como referencial metodológico se valem de questionar sua confiabilidade, sob a frágil premissa de que “não podemos nos fiar em narrativas orais porque a memória e a subjetividade tendem a ‘distorcer os fatos’” (Portelli, 2016, p. 17).

É inegável que lapsos de memória e distorções, intencionais ou não, podem ocorrer. Ainda assim, esse argumento não se sustenta e pode ser facilmente refutado. Primeiro, porque “[...] tal como o passado não é a história, mas o seu objeto, também a memória não é a história, mas um dos seus objetos e simultaneamente um nível elementar de elaboração histórica” (Le Goff, 1990, p. 49). Quando se trata de História Oral, um fazer historiográfico não se encerra na mera constituição de narrativas; ao contrário, pressupõe o cotejamento com fontes de naturezas outras e diversas. Ademais, toda história produzida, seja a partir de fontes orais ou não, é passível de ser revista e submetida ao crivo de um corpo de pesquisadores capacitados, se sua credibilidade for questionável. Segundo, porque as fontes escritas não estão isentas de serem carregadas de intencionalidade, omissões e deturpações. Le Goff (1990, p. 110) sabiamente nos alerta que “nenhum documento é inocente”; logo, fontes escritas também devem ser confrontadas.

“Foi-se, felizmente, o tempo em que algumas fontes – e talvez as fontes orais sejam o exemplo mais marcadamente recente disso – eram vistas como ilegítimas ou, no mínimo, duvidosas, implicando uma série de embates hoje vistos como desnecessários” (Garnica, 2015, p. 112). Com o advento da nova história, alicerçada na história-problema, os conceitos de fonte, metodologia e objeto de estudo são ampliados, ao passo que a subjetividade e a memória deixam de ser colocadas em xeque e passam a compor o fazer historiográfico. “A historiografia surge como sequência de novas leituras do passado, plena de perdas e ressurreições, falhas de memória e revisões” (Le Goff, 1990, p. 28). Se antes a hierarquização das fontes era aceita e propagada, agora o caráter que as que fontes orais, escritas, iconográficas e de qualquer outra natureza têm de se enriquecerem mutuamente é reconhecido e valorado. Como bem pontuam Garnica e Souza (2012, p. 32), uma fonte, por si só, “[...] abre perspectivas de análise, mas dificilmente dá conta [...] de montar todo um cenário”.

“Nesse sentido, história oral e pesquisa documental, normalmente, caminham juntas e se auxiliam de forma mútua [...]. Na verdade, a relação história oral e pesquisa documental é bidirecional e complementar. Ambas fornecem simultaneamente subsídios e informações à outra” (Delgado, 2006, pp. 24-25). Ao mesmo tempo em que existe “[...] uma gama de realidades que dificilmente se expressa em documentos escritos” (Silva & Souza, 2007, p. 147), as fontes documentais sustentam e complementam as memórias dos depoentes. Ademais, não é incomum que a partir de uma fonte documental, chegue-se a uma nova fonte oral, e vice-versa.

Esses trânsitos entre fontes orais e escritas – ou, podemos dizer, entre História Oral e pesquisa documental – foram observados em nossa pesquisa de doutorado (iniciada em nível de mestrado em 2020, com aprovação de mudança de nível em dezembro de 2022), cujo objetivo é tecer compreensões históricas sobre o curso de Matemática da Fundação Educação Educacional de Bauru (FEB)/Universidade Estadual Paulista (UNESP) à luz da História Oral, no período que se estende de 1969 a 1994. Eles constituem, ao mesmo tempo, a motivação e o embasamento para a problematização aqui proposta. Falamos sobre eles mais adiante.

Um bacharelado como complementação à licenciatura: a origem da problematização

A FEB foi criada pela Lei Municipal nº 1.276, de 26 de dezembro de 1966, com o “[...] objetivo de instalar e administrar a Faculdade de Engenharia de Bauru”, criada na mesma data pela Lei Municipal nº 1.277 (Lei 1.276, 1966, não paginado). Progressivamente, foram também instaladas a Faculdade de Ciências, a Faculdade de Tecnologia e a Faculdade de Artes e Comunicações. A Faculdade de Ciências, em particular, obteve autorização para funcionar, por meio do Decreto Estadual n° 51.578, em 1969 (Decreto 51.578, 1969), com os cursos de Matemática, Física, Ciências, Psicologia e Desenho e Plástica (Johansen, 2019). Por força do Decreto Municipal n° 4.497 e do Parecer do Conselho Estadual de Educação nº 951, as faculdades mantidas pela FEB foram reunidas, em agosto de 1985, na Universidade de Bauru (Decreto 4.497, 1985), incorporada pela Universidade Estadual Paulista (UNESP) em agosto de 1988, conforme o Decreto Estadual nº 28.682 (Decreto 28.682, 1988). Com a encampação, a Faculdade de Tecnologia foi extinta e, hoje, a UNESP é dotada de três unidades universitárias, quais sejam: a Faculdade de Engenheira, a Faculdade de Ciências e a Faculdade de Arquitetura, Artes, Comunicação e Design.

Em um estudo anterior (Johansen, 2019), também historiográfico e de natureza documental, tecemos algumas compreensões iniciais acerca do curso de Matemática da FEB, dentre as quais destacamos o oferecimento, por um curto período, de um bacharelado como complementação à licenciatura, modalidade em que o curso foi criado, em 1969, e é hoje oferecido pela UNESP. A partir dessas fontes documentais – a saber: programas de disciplinas – entendemos que foi acrescido ao curso um ano de formação, ao final dos quatro que compunham a licenciatura, em que eram oferecidas apenas duas disciplinas. A princípio, o modo como o bacharelado foi ofertado poderia ser pensado como uma possível inversão do modelo de formação de professores que ficou conhecido no Brasil como “3+1”. Regulamentado pelo Decreto-Lei nº 1.190, de 4 de abril de 1939, esse modelo era constituído por três anos de formação específica que, quando seguidos por um ano de formação didática, concedia ao graduado, além do diploma de bacharel, o grau de licenciado (Decreto-Lei 1.190, 1939). Em contrapartida, no modelo supostamente inverso, o qual havíamos pensado poder chamar de “4+1”, quatro anos de licenciatura antecederiam um ano de bacharelado. Esses dados preliminares, todavia, se revelaram insuficientes para que compreensões mais amplas acerca do bacharelado fossem tecidas e para que uma problematização acerca dos modelos de formação de professores supracitados pudesse ser delineada. Em consequência, nos propusemos a dar continuidade ao estudo, em nível de mestrado (agora, de doutorado), à luz da História Oral –

metodologia de pesquisa que se vale da produção intencional de narrativas, como fontes historiográficas, em situações de entrevista.

Foram entrevistados cinco depoentes que vivenciaram o curso como estudantes e/ou professores – *Hércules de Araujo Feitosa*, *Geraldo Antonio Bergamo*, *Mara Sueli Simão Moraes*, *Verilda Speridião Kluth* e *Pedro Walter de Pretto* –, cujas narrativas foram transcritas e textualizadas. Cada textualização foi submetida a um processo de negociação e ajustes, que culminou na assinatura de uma carta de cessão de direitos pelos depoentes, "um cuidado de natureza ética e jurídica" (Garnica & Gomes, 2020, p. 33) que garante à pesquisadora o direito de usar e publicar o texto produzido, em partes ou em sua totalidade. Tendo em vista a análise dos dados – por nós compreendida como um movimento de atribuição de significados plausíveis às memórias dos depoentes, pautado em referenciais da História da Educação Matemática e da formação de professores – foram identificadas e elencadas, em um estudo individual e do conjunto das textualizações, tendências associadas à historicidade do curso, quais sejam: *a ênfase na formação específica*, *as transformações na estrutura do curso*, *as implicações do contexto político* e *o papel das fundações educacionais no oferecimento de cursos de nível superior*.

O desenvolvimento desse estudo tem nos possibilitado um valioso trânsito entre História Oral e pesquisa documental, em que fontes orais levam a fontes escritas, e vice-versa, e em que a relação bidirecional entre ambas as metodologias é ressaltada. Tais trânsitos tiveram início, marcadamente, durante a elaboração das notas de rodapé das textualizações – o que evidencia o dinamismo da prática da História Oral, em que o levantamento de referenciais de análise e de fontes outras, a fim de cotejamento, não se restringe a um momento posterior à produção dos dados; ao contrário, permeia todo o desenvolvimento da pesquisa. Em particular, esses trânsitos giraram em torno do depoente *Pedro Walter de Pretto* – que, embora não tivesse sido considerado na listagem inicial de potenciais depoentes, tornou-se peça fundamental dessa investigação – e da modalidade bacharelado.

Pedro de Pretto foi citado pelo depoente *Geraldo Antônio Bergamo* por ter ocupado a direção da Faculdade de Engenharia da FEB em meados de 1970, o que nos levou, a fim de esclarecimentos (próprios e aos futuros leitores da tese), à elaboração de uma nota de rodapé a seu respeito. Em uma busca por fontes escritas, tivemos acesso a uma versão de seu currículo documentado, anexa a um documento municipal (Projeto de Decreto Legislativo, 1988), em que identificamos sua relação, até então por nós desconhecida, com o curso de Matemática e, em especial, com o bacharelado – temática que nos é tão cara. O documento esclarece que o depoente, entre outros cargos de liderança, ocupou a chefia do Departamento de Matemática, de junho de 1971 a junho de 1973. Ademais, foi homenageado como nome de turma dos bacharelandos em Matemática em 1976, além de ter sido designado, por meio de Portarias emitidas pela instituição, a orientar e compor bancas examinadoras de trabalhos de formatura dessa modalidade do curso (Projeto de Decreto Legislativo, 1988). Para além das relações do depoente com o bacharelado, tais Portarias revelam nomes de estudantes que optaram pela modalidade e de professores que estavam com ela envolvidos.

A entrevista com o depoente *Pedro de Pretto* foi delineada a partir de documentos de seu arquivo pessoal, relativos tanto ao curso de Matemática – inclusive à modalidade bacharelado – como a aspectos mais gerais associados à Faculdade de Engenharia e à instituição como um todo.

Esses documentos foram por ele mobilizados, a fim de que pudesse “falar com mais propriedade” sobre o assunto. Isso porque, como pontuado pelo próprio depoente, seu vínculo maior na FEB havia sido estabelecido com a Faculdade de Engenharia; enquanto sua atuação como docente do curso de Matemática – nosso objeto de interesse – havia ocorrido, basicamente, em seus anos iniciais. Além de serem expostos e avivarem a memória do depoente, durante a entrevista, tais documentos nos foram emprestados, para serem copiados e usados na pesquisa. Em relação ao bacharelado, propriamente dito, os documentos constituem-se: da Resolução nº 3 da Faculdade de Ciências da FEB, de 3 de abril de 1972 (Resolução 3, 1972), que estabeleceu condições para o oferecimento do bacharelado; de uma folha avulsa – cujo documento original não conseguimos ainda identificar, todavia, acreditamos tratar-se do Regimento da instituição –, em que outros critérios para a oferta do bacharelado são acrescidos aos listados na Resolução nº 3; e de notas de aulas, provas, listas de exercícios e listagens de notas e médias do curso de Equações Diferenciais, ministrado pelo depoente no bacharelado, em que podem ser identificados, entre outras coisas, estudantes que optaram por essa modalidade.

De outro modo, que não pelo trânsito fonte oral (narrativa do depoente *Geraldo Bergamo*) – fonte escrita (Projeto de Decreto Legislativo, 1988) – fonte oral (narrativa do depoente *Pedro de Pretto*), dificilmente teríamos tido acesso a esses documentos, a que Lowenthal (1998 como citado em Delgado, 2006, p. 25) chamaria de relíquias – ao menos em tempo hábil para a conclusão da pesquisa. Os dados deles emergentes complementam, ao mesmo tempo em que sustentam, as memórias dos depoentes – em particular, das depoentes *Mara Moraes* e *Verilda Kluth*. A primeira, além de egressa da modalidade licenciatura, graduada em 1977, foi docente do curso em tela, aposentando-se pela UNESP em 2014. A segunda, obteve os graus tanto de licenciada como de bacharel, ambos em 1973, tendo uma posterior atuação como professora do curso restrita a uma disciplina e a um único semestre.

Algumas compreensões possíveis a partir de fontes orais e escritas

A partir das narrativas das depoentes antes citadas, compreendemos que a modalidade bacharelado foi ofertada no último ano da licenciatura, para as turmas cujos ingressos deram-se em 1970 e em 1973. Em consonância com Johansen (2019), as depoentes afirmam que a complementação se dava mediante à aprovação em duas disciplinas adicionais e, acrescentam, à elaboração de um trabalho de formatura. Esses dados coadunam com o disposto na Resolução nº 3, onde é esclarecido, ainda, que o trabalho elaborado deveria ser aprovado por uma comissão julgadora (Resolução 3, 1972). De acordo com o estabelecido na folha avulsa anteriormente mencionada, acrescentava-se que a obtenção do título de bacharel estava condicionada à aprovação em todas as disciplinas da licenciatura, com exceção das pedagógicas. Esse critério é consonante com o Parecer 44 de 1972, emitido pelo Conselho Federal de Educação, que permitia que as instituições de ensino superior registrassem diplomas de bacharéis, mesmo que o curso de bacharelado não fosse reconhecido, na condição de que este correspondesse a uma licenciatura plena já reconhecida em funcionamento. Ademais, seus currículos deveriam obedecer ao currículo mínimo estipulado para a licenciatura, salvo as disciplinas pedagógicas, que poderiam ou não serem substituídas por “disciplinas acadêmicas” (Documenta 139, 1972). Uma vez que o bacharelado era previsto no Regimento da FEB (Resolução 3, 1972), o Parecer 44 parece ter viabilizado a oferta da modalidade.

É oportuno, aqui, retomarmos a possibilidade de o bacharelado como complementação à licenciatura ser pensado como uma inversão do modelo "3+1" de formação de professores. Antes disso, todavia, carece dizermos que, em meados de 1970, por força de lei, a licenciatura plena foi convertida em licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática, modalidade que deixou de vigorar apenas quando houve a incorporação pela UNESP, ante à autonomia da instituição pública. Isso posto, destacamos que as narrativas dos depoentes apontam para a ênfase na formação específica em todas as três modalidades assumidas pelo curso. *Geraldo Bergamo* afirma que o curso "[...] era uma licenciatura em termos formais, mas o professor Isaac Portal Roldán, que era a principal liderança do curso, sempre falava assim: 'esse é um curso para formar matemáticos, quiçá professores'" e que "a ênfase dos professores era pelo bacharelado; a ênfase dos estudantes, também". Apesar de afirmar que sempre soube que estava em uma licenciatura, ao refletir sobre sua formação *Mara Moraes* afirma que: "quando eu falo 'eu me formei em licenciatura', na verdade, era um pseudobacharelado". Em relação ao curso de Ciências, *Hércules Feitosa* pontua que, em decorrência de já ter existido um bacharelado, havia "[...] uma quantidade bastante grande de disciplinas na habilitação em Matemática [...]", porque "[...] os professores nunca gostam de rasgar o projeto anterior. [...] Eles não queriam perder integralmente aquele tipo de formação do bacharelado dos anos anteriores, que julgavam que era interessante, que era conveniente".

Diante dessas percepções, entendemos que a licenciatura não possuía uma estruturação que lhe era própria; ao contrário, assemelhava a formação dos professores a dos bacharéis. A ênfase dada à formação específica nas licenciaturas, que deixa à margem as disciplinas pedagógicas, "[...] enraíza-se na e implica a inexistência de uma identidade mais estável desses cursos" (Martins-Salandim, 2012, p. 346). Sob essa óptica, e a respeito da expansão dos cursos de licenciatura em Matemática em cidades interioranas do estado de São Paulo na década de 1960, Martins-Salandim (2012, p. 347) argumenta que

> Não havia uma intenção clara de formar os professores que atuariam no ensino secundário. [...] A especificidade da formação de professores de Matemática, no emaranhado de tantos movimentos, de tantos fluxos e refluxos, não encontrou seu espaço e caracterizou-se como decorrência de outras formações, como uma opção a mais ao formado e/ou como mero atendimento a imposições legais.

Parece-nos, portanto, incoerente ainda considerarmos a modalidade bacharelado como complementação à licenciatura como uma inversão do modelo "3+1".

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa.

Referências e bibliografia

Alencar, A. C. (2019). *Vozes do Cariri: monólogos e diálogos sobre a história da formação de professores de matemática no interior do Ceará* [Tese de doutorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista]. Repositório Institucional UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/182230.

Decreto-Lei n. 1.190, de 4 de abril de 1939. (1939). Dá organização à Faculdade Nacional de Filosofia. Presidência da República. https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1190-4-abril-1939-349241-norma-pe.html.

Decreto n. 4.497, de 16 de agosto de 1985. (1985). Estabelece a data do início de funcionamento da Universidade de Bauru. Prefeitura Municipal de Bauru. https://www2.bauru.sp.gov.br/arquivos/sist_juridico/documentos/decretos/dec4497.pdf.

Decreto n. 28.682, de 15 de agosto de 1988. (1988). Altera a redação de dispositivos do Estatuto da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", aprovado pelo Decreto n.º 9.449, de 26 de janeiro de 1977. Assembleia Legislativa do Estado de São Paulo. https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto/1988/decreto-28682-15.08.1988.html.

Decreto n. 51.578, de 21 de março de 1969. (1969). Dispõe sobre autorização de funcionamento da Faculdade de Ciências, da Fundação Educacional de Bauru. Assembleia Legislativa do Estado de São Paulo. https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto/1969/decreto-51578-21.03.1969.html.

Delgado, L. A. N. (2006). *História Oral: memória, tempo, identidades*. Autêntica.

Documenta n. 139. (1972). Conselho Federal de Educação.

Garnica, A. V. M. (2015). Uma agenda para a história da educação matemática no Brasil?. *Revista de História da Educação Matemática, 1 (1)*, 104-127. http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/10.

Garnica, A. V. M. & Gomes, M. L. M. (2020). *História oral: diversidade, pluralidade e narratividade em educação matemática*. Em: Gonçalves, H. J. L. (Org.), Educação Matemática & Diversidade(s) (pp. 15-40). Editora Fi. https://repositorio.usp.br/directbitstream/2268689d-9145-40ac-84f6-dd8ac290d6e9/3005163.pdf.

Garnica, A. V. M., & Souza, L. A. de. (2012). *Elementos de história da educação matemática*. Cultura Acadêmica. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/109211.

Johansen, M. C. B. C. (2019). *Um estudo dos anos iniciais do curso de Matemática da Fundação Educacional/Unesp de Bauru: licenciatura plena, licenciatura com habilitação e bacharelado* [Relatório de Iniciação Científica, Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista].

Le goff, J. (1990). *História e Memória*. Editora da UNICAMP.

Lei n. 1.276, de 26 de dezembro de 1966. (1966). Cria, neste município, a "Fundação Educacional de Bauru". Prefeitura Municipal de Bauru. https://sapl.bauru.sp.leg.br/pysc/download_norma_pysc?cod_norma=1326&texto_original=1.

Martins-Salandim, M. E. (2012). *A interiorização dos cursos de Matemática no estado de São Paulo: um exame da década de 1960* [Tese de doutorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista]. Repositório Institucional UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102107.

Portelli, A. (2016). *A história oral como arte da escuta*. Letra e Voz.

Projeto de Decreto Legislativo, de 26 de maio de 1988 (1988). Referente ao projeto de Decreto Legislativo que concede título de "cidadão bauruense" ao sr. Pedro Walter de Pretto. Câmara Municipal de Bauru. https://sapl.bauru.sp.leg.br/pysc/download_materia_pysc?cod_materia=MTQ5Mzc5&tetex_original=1.

Resolução n. 3, de 3 de abril de 1972. (1972). Faculdade de Ciências da Fundação Educacional de Bauru.

Silva, H. da, & Souza, L. A. de. (2007). A história oral na pesquisa em educação matemática. *Bolema, 20 (28)*, 139-162, https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221871008.pdf.

Silva, M. A. da, & Miarka, R. (2017). Geni, a Pesquisa em [E]educação [M]matemática e o Zepelim. *Perspectivas da Educação Matemática*, *10 (24)*, 256-757. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/5331.

O ensino de geometria espacial no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS a partir de um caderno de aluna de 1905

Silvio Luiz Martins **Britto**
Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT
Brasil
silviobritto@faccat.br
Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

O artigo objetiva apresentar reflexões sobre o ensino de geometria espacial no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS, voltado para a formação feminina. Possui abordagem qualitativa, por meio da análise documental de um caderno de geometria espacial do ano de 1905. Os 60 problemas presentes no caderno abordam o cálculo de área de superfície e, principalmente, de volume de sólidos geométricos. Predomina a aplicação direta das fórmulas para cálculo da área de superfície e de volume de sólidos, em 42 problemas. Outros 18 problemas estão associados ao dia a dia das alunas do Colégio, envolvendo cálculo de volume de sólidos. Com base no exposto, verifica-se que esses problemas revelam traços de uma cultura escolar, que educava as gerações de alunas para solução de problemas do cotidiano, tanto no gerenciamento de atividades domésticas, quanto profissionais, a partir de um material didático próprio para as aulas de geometria.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Cultura escolar; Colégio São José de São Leopoldo; Geometria espacial; Caderno escolar; Protagonismo feminino.

Introdução

O protagonismo feminino no ensino de Matemática no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo, Rio Grande do Sul (RS), Brasil, nos séculos XIX e XX, constitui tema de uma investigação, financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), em execução pelos autores deste artigo. Ressalta-se que a Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil completou 150 anos de missão religiosa e educacional no estado gaúcho, em abril de 2022.

Entre os materiais que se encontram no Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus – localizado em São Leopoldo/RS, encontra-se um caderno escolar, datado de 1905. Durante o processo de análise desse caderno, da aluna Elly Lucia Carolina Presser, observou-se a presença de uma série de problemas resolvidos, com o título "Medida dos volumes", o que chamou a atenção destes pesquisadores e os levou ao seguinte questionamento: O que os problemas encontrados no caderno de uma aluna do Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS, datado de 1905, revelam sobre a geometria espacial ensinada nesse colégio, voltado para a formação feminina?

A partir desse problema de pesquisa, propõe-se discutir o que os problemas encontrados no caderno do ano de 1905, de uma aluna do Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS, revelam sobre a geometria espacial ensinada nesse colégio, voltado para a formação feminina. Nesse sentido, realiza-se uma investigação com abordagem qualitativa, por meio de análise documental, sendo um caderno escolar do início do século XX, a principal fonte primária desta pesquisa histórica.

Após esta introdução, o artigo discorre sobre a cultura escolar expressa por meio de cadernos escolares, conta um pouco da história da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil e do Colégio São José de São Leopoldo/RS, apresenta a análise geral dos problemas presentes no caderno escolar de 1905 e as considerações finais deste estudo.

Cultura escolar através de cadernos escolares

O tema desta investigação se insere na História da Educação Matemática do início do século XX, no RS. Entre as fontes primárias de pesquisas históricas em Educação Matemática, destacam-se os documentos textuais (documentos oficiais, livros, jornais, revistas, cadernos escolares, etc.), as fontes visuais (fotografias, gravuras, entre outros) e os registros orais (entrevistas, gravações, etc.). Conforme Chartier (2007, p. 13), "os cadernos escolares são um material pouco utilizado nas pesquisas históricas, devido à sua extrema fragilidade. Eles fornecem, entretanto, testemunhos insubstituíveis a respeito dos exercícios escolares, das práticas pedagógicas e do desempenho dos alunos no contexto da sala de aula". A mesma autora complementa que "os cadernos escolares podem nos ajudar a entender o funcionamento da escola de uma maneira diferente da veiculada pelos textos oficiais ou pelos discursos pedagógicos" (Chartier, 2007, p. 14). Ademais:

> Os conteúdos da cultura escolar transformam-se ao longo do tempo, o que refletiu na modificação da hierarquia dos saberes e das práticas de escrita. Não é fácil apreender essa evolução nos textos nem nos programas oficiais, mas ela é visível nos cadernos dos alunos (Chartier, 2007, p. 31).

Nesse sentido, Julia (2001, p. 10) define a cultura escolar como:

> Um conjunto de normas que estabelecem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo às épocas.

Dessa forma, toma-se um caderno escolar como principal fonte documental desta pesquisa histórica, em busca de indícios de práticas de escrita, apropriações e usos, tornando-o mensageiro de sentidos, valores e representações das alunas do Colégio São José, de São Leopoldo/RS, no início do século XX.

Congregação das Irmãs Franciscanas e o Colégio São José de São Leopoldo/RS

As Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã chegaram ao Brasil, em 2 de abril de 1872, instalando-se no município de São Leopoldo, estado do RS, com o objetivo de contribuir para a educação de crianças e jovens, em sua maioria filhas de imigrantes alemães. A vinda das Irmãs foi demandada pelas comunidades de imigrantes alemães no estado gaúcho, que estavam desassistidas pela instrução pública (Bohnen & Ullmann, 1989).

Com a chegada a São Leopoldo/RS, as Irmãs fundaram o Colégio São José, sua primeira escola brasileira. “No dia 5 de abril, 1ª sexta feira do mês, começaram as aulas com 23 alunas de 7 a 13 anos, número que foi crescendo de dia para dia” (Flesch, 1993, p. 45). De acordo com Bohnen & Ullmann (1989, p. 174), “além das aulas de costume, as Irmãs davam lições de tricô às adolescentes, algumas vezes por semana. Igualmente ensinavam música a quem desejassem”. Complementa-se que:

> Inicialmente, as escolas franciscanas caracterizavam-se por um sistema tradicional, com rigor disciplinar, o regime de internato que, além, das disciplinas curriculares, pelo ensino de tempo integral, oferecia estudos complementares de teatro, música, canto, pintura. A maioria das escolas oferecia os cursos primário e ginasial e, nas localidades com maior número de habitantes, havia a formação de professoras primárias (Rupolo, 2001, p. 91).

As Irmãs do Colégio São José também foram pioneiras na elaboração e compilação de livros didáticos para suas escolas e na formação de professoras. De acordo com Rupolo (2001, p. 92), “as escolas franciscanas possuíam uma prática experienciada do ensino vinculado à realidade, ou seja, uma educação para a vida”. Isso já era evidenciado nos estudos realizados por Rambo (1994), quando afirmava que, na época, a função da escola era equipar os alunos com o ferramental mais indispensável para serem capazes de competir com êxito, no futuro, no meio social em que nasceram e cresceram.

Durante seus primeiros 50 anos, o Colégio São José funcionou às margens do rio dos Sinos, ao lado do Ginásio Nossa Senhora da Conceição, dos padres jesuítas. De acordo com Flesch (1993), em 1923, ocorreu a mudança das margens do rio dos Sinos para a Colina do Monte Alverne, onde o Colégio São José está localizado atualmente. Dessa forma, aos poucos, a construção foi sendo ampliada, com novos pavilhões, para acolher a juventude cada vez mais numerosa.

Atualmente, o Colégio São José recebe em torno de 500 alunos, desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. Ressalta-se que, em 2022, a Congregação das Irmãs Franciscanas completou 150 anos de ação missionária e educacional no Brasil, sendo mais uma razão para se resgatar suas contribuições na formação de crianças e jovens, especialmente o público feminino.

Análise do caderno da aluna Elly Lucia Carolina Presser com data de 1905

Ao realizar pesquisas no Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã - Província do Sagrado Coração de Jesus – localizado em São Leopoldo/RS, localizaram-se dois cadernos escolares, que pertenciam à aluna Elly Lucia Carolina Presser[1], do início do século XX. Inicialmente, os cadernos foram digitalizados para posterior análise[2]. O caderno escolar, datado de 1905, possui 16 folhas com linhas, papel de celulose e escrita a lápis nos dois lados de cada folha (32 páginas), em língua portuguesa.

A capa do caderno escolar de Elly Lucia Carolina Presser, conforme a Figura 1, traz uma etiqueta, fazendo referência ao Ginásio Nossa Senhora da Conceição de São Leopoldo/RS, com identificação da aluna e informação de começo em 6 de fevereiro de 1905. Ressalta-se que o Colégio São José e o Ginásio Conceição[3] tinham localização próxima, separados apenas pela rua. Além disso, a carência de material escolar a baixo custo, na época, com predominância de existência da lousa para os registros, leva a supor que o Ginásio Conceição poderia ter fornecido materiais para as alunas do Colégio São José.

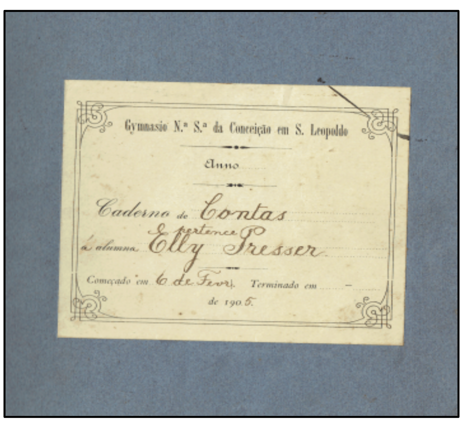


Figura 1. Capa do caderno escolar de Elly Presser.
Fonte: Presser, 1905.

[1] Com base nos cadernos escolares e na Lembrança da Conclusão Solemne do Anno Escolar no Collegio São José, de 1906, em que recebeu menção honrosa em diversas disciplinas, bem como o prêmio de Caligrafia daquele ano, registra-se que Elly Lucia Carolina Presser estudou nesse Colégio, ao menos, no período de 1904 a 1906. Ressalta-se que não foram localizadas mais informações sobre trajetória escolar da aluna, pois só existem registros de matrículas dos alunos do Colégio São José, a partir do ano de 1936.
[2] Este artigo é exclusivo do caderno datado de 1905, que traz tópicos de geometria espacial. O outro caderno apresenta exercícios resolvidos de aritmética e de álgebra.
[3] Ressalta-se que o Ginásio Nossa Senhora da Conceição atendia, exclusivamente, o público masculino.

Apesar de constar, na capa do caderno, a data de 6 de fevereiro de 1905 (segunda-feira) como o seu início, na primeira página desse caderno se encontra registrado o dia 4 de fevereiro de 1905 (sábado) e, na sequência, o título "Medida dos volumes". De acordo com Rambo (1994), esperava-se que os alunos assimilassem noções básicas de geometria nas escolas da época, além de conhecimentos corretos do sistema métrico.

No processo de análise, inicialmente, fez-se a compilação dos 60 problemas presentes no caderno. A partir dessa quantificação, passou-se a identificar: os conteúdos envolvidos nos mesmos; os procedimentos de cálculo que emergem desses problemas; a associação com o cotidiano das alunas do Colégio São José. No Quadro 1 se apresenta a distribuição desses problemas por conteúdo de geometria espacial.

Quadro 1
Quantitativo de problemas de geometria no caderno escolar de 1905.

Sólido geométrico	*Superfície lateral/total*		*Volume*		*Total*
	Problemas com aplicação direta de fórmulas	*Problemas do dia a dia*	*Problemas com aplicação direta de fórmulas*	*Problemas do dia a dia*	
Prisma	-	-	6	6	12
Cubo	-	-	4	-	4
Pirâmide	-	-	5	-	5
Tronco de pirâmide	-	-	1	-	1
Cilindro	3	-	7	3	13
Cone	3	1	2	1	7
Tronco de cone	-	-	4	7	11
Esfera	3	-	4	-	7
Total	9	1	33	17	60

Fonte: Dos autores, 2022.

No levantamento realizado, identificaram-se 60 problemas no caderno escolar, numerados em ordem crescente de 1 a 60, sempre apresentando o enunciado e a respectiva resolução. Esses problemas abordam o cálculo de área da superfície lateral e/ou total (10 problemas) e de volume (50 problemas) de sólidos geométricos, como prisma, cubo, pirâmide, tronco de pirâmide, cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Ressalta-se que mais de 50% desses problemas estão relacionados com prismas, cilindros e troncos de cone. A maioria desses problemas, 70% são de aplicação direta da fórmula, enquanto 30% possuem alguma relação com o dia a dia das alunas do Colégio São José de São Leopoldo/RS, envolvendo, principalmente, cálculo de volume de sólidos em forma de prisma, cilindro, cone e tronco de cone. Não se tem informações sobre a origem desses problemas, ou seja, se eles foram elaborados pelas próprias professoras do Colégio ou copiados/adaptados de algum livro, uma vez que as obras de Matemática que circulavam na época, não trazem esses enunciados.

Verificou-se que os primeiros 42 enunciados trazem aplicação direta das fórmulas de cálculo da área de superfície e do volume de sólidos geométricos. Sendo que os problemas de número 43 a 60 trazem enunciados relacionados ao dia a dia das alunas do Colégio São José de São Leopoldo/RS, envolvendo elementos como cuba, poço, cisterna, funil, telhado e balde. Constata-se que a proposta de ensino empregada começa por sólidos mais simples, dos quais derivam conceitos geométricos fundamentais, para aplicação no estudo de problemas envolvendo formas geométricas espaciais mais complexas. Apesar de ser um caderno voltado para o registro do estudo de conhecimentos geométricos, observou-se apenas um desenho de prisma em forma de paralelepípedo e de quatro figuras planas (trapézio, dois retângulos e círculo), representando superfícies, todos feitos à mão livre.

Considerações finais

As Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã chegaram ao Brasil, em abril de 1872, instalando-se no município de São Leopoldo/RS, com a finalidade de contribuir para a educação de crianças e jovens, em sua maioria filhas de imigrantes alemães. Sua primeira obra educacional foi a fundação do Colégio São José, no mesmo município, no dia 5 de abril de 1872. Em seus primeiros anos de atividades, o Colégio mantinha os cursos voltados para o público feminino, com regência das próprias Irmãs.

Com base em referenciais sobre cultura escolar, investigaram-se os problemas presentes em um caderno escolar, datado de 1905 e pertencente a aluna desse Colégio, Elly Lucia Carolina Presser, identificando-se os conteúdos envolvidos, os procedimentos de cálculo que emergem desses problemas e a associação com o dia a dia das alunas do Colégio São José, do início do século XX.

Os 60 problemas presentes nesse caderno abordam área de superfície e, principalmente, volume de sólidos geométricos – prisma, cubo, pirâmide, cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Na resolução dos problemas encontrados no caderno, predomina a aplicação direta das fórmulas para cálculo da área de superfície – lateral e/ou total – e de volume de sólidos, em 42 enunciados. Outros 18 problemas estão associados com a prática diária das alunas do Colégio São José, envolvendo o cálculo de volume de sólidos em forma de prisma, cilindro, cone e tronco de cone, tais como cuba, poço, cisterna, funil, telhado e balde. Nesses problemas são exploradas as noções de grandezas e medidas, possibilitando uma melhor compreensão de conceitos relativos aos sólidos geométricos.

Os problemas presentes no caderno de geometria dessa aluna do Colégio São José de São Leopoldo/RS, no ano de 1905, revelam traços de uma cultura escolar marcada por um processo de ensino de Matemática com um certo rigor, voltado para a compreensão de conceitos e aplicação desses, buscando uma sólida formação em conhecimentos geométricos. Dessa forma, desejava-se que as egressas do Colégio colocassem em prática os conhecimentos adquiridos e propagassem a tradição do Colégio São José, especialmente através de sua ação no magistério de escolas primárias em diferentes comunidades do RS.

Referências e bibliografia

Bohnen, A. & Ullmann, R. A. (1989). *A Atividade dos Jesuítas de São Leopoldo.* São Leopoldo: Unisinos.

Chartier, A. M. (2007). Os cadernos escolares: organizar os saberes, escrevendo-os. *Revista de Educação Pública*, *16*(32), 13-33. file:///C:/Users/Usuario/AppData/Local/Temp/542-Texto%20do%20Artigo-847-1-10-20121007.pdf

Flesch, I. B. (1993). *História da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil (1872-1951).* Porto Alegre: Metrópole. v. 1.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, (1), 9-43.

Presser, E. L. C. (1905). *Caderno de contas.* São Leopoldo.

Rambo, A. B. (1994). *A escola comunitária teuto-brasileira católica.* São Leopoldo: Unisinos.

Rupolo, I. (2001). Irmãs Franciscanas no Rio Grande do Sul e compromisso educacional. *Revista Vidya*, Edição Especial – 50 anos, 83-98. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/498/488

La teoría de Galois en las prácticas del estructuralismo categórico

Miguel Ángel **Moreno** Ramírez
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, Universidad del Valle
Colombia
miguel.angel.moreno@correounivalle.edu.co

Resumen

Este documento presenta la relación concreta que existe entre la teoría de Galois y la teoría de categorías, así mismo reconoce prácticas matemáticas que son protagonistas del proceso de generalización a lo largo de más de un siglo, lo cual contribuye a las reflexiones de los profesores de matemáticas respecto a la posibilidad de desarrollo de prácticas en el aula. Para tal efecto, se revisa el teorema fundamental de la teoría de Galois como caso particular de las conexiones de Galois, y estas últimas como caso particular de los funtores adjuntos.

Palabras clave: Teoría de Galois, Teorema fundamental, Conexiones de Galois, Funtores adjuntos, Práctica matemática.

Introducción

Desde mediados del siglo XIX, las matemáticas han experimentado un profundo proceso de generalización y abstracción. Se reconoce como precursor de este proceso al estructuralismo conjuntista, desarrollado desde principios del siglo XX y protagonizado por los trabajos del grupo Bourbaki, estas matemáticas, también conocidas como modernas, son las que prevalecen en los currículos universitarios; sin embargo, otro tipo de estructuralismos, entre ellos el categórico, son los que han fundamentado las matemáticas contemporáneas, por lo que existe la necesidad de estudiar esas matemáticas contemporáneas en las aulas universitarias.

Una manera particular de abordar esta transición a las matemáticas contemporáneas, rescatando los elementos que prevalecen en la educación universitaria, es estableciendo vínculos que ayuden a comprender el proceso de generalización en el que se encuentran las matemáticas actuales; en este sentido, la teoría de Galois es un caso particular de análisis, se pueden establecer vínculos en resultados como el teorema fundamental y algunos resultados asociados a las matemáticas modernas y contemporáneas. Dichos vínculos se enmarcan en prácticas identificadas a lo largo de más de un siglo y que son objeto de estudio en este trabajo.

En este sentido, se revisan los desarrollos en el álgebra previos al surgimiento de las ideas de Galois, luego se explicita la correspondencia entre estructuras que muestra el teorema fundamental, así como sus vínculos con las conexiones de Galois y los funtores adjuntos, nociones enmarcadas en las matemáticas modernas y contemporáneas respectivamente. Por último, se reflexiona respecto a las prácticas que se movilizan en el pensamiento de Galois.

El problema de la resolubilidad y el teorema fundamental de la teoría de Galois

La resolución de ecuaciones fue una preocupación desde sociedades como la egipcia y la babilónica para resolver problemas relacionados con su cotidianidad, en particular, se reconoce la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con reglas como la de "falsa posición", la cual consiste en asignar valores concretos a una ecuación para luego resolver sistemas de ecuaciones simples (Chavarria, 2014). En el renacimiento, la actividad de resolver ecuaciones estuvo en auge con trabajos centrados en encontrar fórmulas generales para ecuaciones de grado tres y cuatro, los protagonistas en esta época fueron matemáticos como Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576) y Ferrari (1522-1565).

En esencia, el desarrollo del álgebra consistió en encontrar fórmulas algebraicas que expresaran las raíces de una ecuación de cualquier grado, dichas fórmulas eran encontradas a partir de manipular los coeficientes de la ecuación usando las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación, división y radicación. Con este fin, las fórmulas para las ecuaciones de primer, segundo, tercer y cuarto grado ya habían sido encontradas y trabajadas por matemáticos del Renacimiento; sin embargo, la ecuación de quinto grado generó incertidumbre respecto a la existencia de su fórmula general.

Fue hasta el siglo XVIII que Lagrange (1736-1813) intentó encontrar, mediante su *resolvente*[1], dicha fórmula general para las ecuaciones de quinto grado, sin embargo, después de haber aportado un razonamiento puso en duda la existencia de esta fórmula. Su conjetura fue retomada por Ruffini (1765-1822) quien propuso la prueba de la no existencia de la fórmula de quinto grado, dicha prueba luego fue completada por Abel (1802-1829) entre 1824 y 1826. Esta prueba cerró el misterio respecto a las ecuaciones de grado cinco o más: no existe una fórmula general para resolver ecuaciones de cualquier grado por radicales[2].

Con esto como base, Evariste Galois (1811-1832) lejos de pensar en que el problema de la resolubilidad finalizaba con el teorema de Abel, se propuso a estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pueda ser resuelta por radicales, esto debido a resultados como el de Gauss (1777-1855) respecto a las ecuaciones ciclotómicas, Gauss encontró una forma de resolver por radicales las ecuaciones de la forma $x^p - 1 = 0$ cuando p es primo.

[1] La resolvente es una expresión algebraica que permite reducir el grado de una ecuación.
[2] El término resolver ecuaciones por radicales refiere a utilizar una fórmula general que exprese las raíces de la ecuación, utilizando únicamente los coeficientes de la ecuación.

Durante el estudio de Galois, fue necesaria una nueva forma de hacer matemáticas, en concreto, fue necesaria la idea de estructura, una noción centrada en estudiar las relaciones entre una agrupación de elementos[3]; en particular, Galois trabaja con las estructuras de *grupo* y de *cuerpo*, la primera consta de un conjunto con una operación binaria que cumple con una serie de axiomas centrados en las relaciones entre sus elementos, mientras que la segunda estructura, a diferencia de la de grupo, tiene dos operaciones binarias con sus respectivos axiomas. Con estas estructuras, Galois establece correspondencias entre subgrupos -grupos contenidos en un grupo más grande- y extensiones de cuerpo -cuerpos más grandes que un cuerpo inicial-.

Para que dicha correspondencia se pueda establecer, las extensiones de cuerpo que se asocian son los cuerpos más pequeños que contienen las raíces de una ecuación, como ejemplo está la ecuación $x^2 - 2 = 0$ en $\mathbb{Q}$, que no tiene solución, pero la extensión más pequeña en la que sí hay solución es $(\mathbb{Q}\sqrt{2}/\mathbb{Q})$[4]. Por otro lado, los subgrupos que se asocian son los grupos que están compuestos de automorfismos de la extensión de cuerpo, los cuales dejan invariante al cuerpo base. Retomando el ejemplo anterior, hay dos automorfismos asociados, estos son: $\sigma_1(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ y $\sigma_2(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, estos automorfismos junto con la operación composición conforman lo que se conoce como el *grupo de Galois*.

Con base en esto, la correspondencia que establece el teorema fundamental de la teoría de Galois funciona gráficamente como lo muestra el siguiente ejemplo que utiliza la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ con subcuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ y $\mathbb{Q}$; aquí el grupo de Galois es $Gal\ (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}) = \{e, \eta_1, \eta_2, \eta_1 \circ \eta_2\}$:

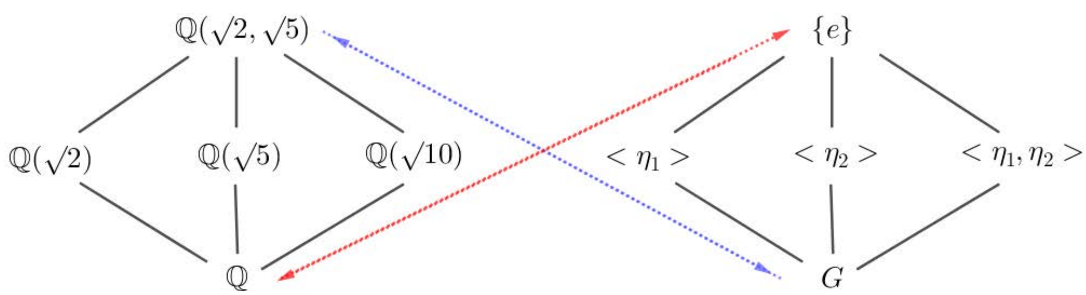


Figura 1. Correspondencia reticular del Teorema Fundamental de la teoría de Galois.

La profundidad que establece esta correspondencia es que permite resolver un problema de la teoría de cuerpos en la teoría de grupos, lo cual reduce la complejidad de la estructura. Por esta línea, Galois plantea lo que es un *grupo resoluble*, esto resulta clave, porque cuando un grupo es resoluble, entonces la ecuación puede ser resuelta por radicales.

Las conexiones de Galois y los funtores adjuntos

Posterior a la construcción del teorema fundamental, el nivel de generalización se enmarca en las matemáticas modernas con la conexión de Galois. Esta noción fue propuesta por el matemático noruego Oystein Ore (1899-1968), reconocido por su participación en la escuela de Göttingen a cargo de Emmy Noether (1882-1935). La conexión de Galois se establece con

[3] Esta definición corresponde a las matemáticas modernas.

[4] Esta notación hace referencia a que $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ es la extensión del cuerpo base $\mathbb{Q}$.

base en la definición de conjunto parcialmente ordenado -o "poset" por su abreviación en inglés-, un poset es definido como un par $(X, \preccurlyeq)$ con X no vacío y $\preccurlyeq$ una relación de orden reflexiva y transitiva; un ejemplo de poset son los números racionales junto con la desigualdad usual $(\mathbb{Q}, \leq)$. Con base en esto, la definición de conexión de Galois que presenta el mismo Ore (1994, p. 495) es la siguiente:

Definición 1: Sean P y Q dos conjuntos parcialmente ordenados. Sean $p \longrightarrow \mathfrak{Q}(p)$ y $q \longrightarrow \mathfrak{P}(q)$ correspondencias de P a Q y de Q a P, respectivamente. Estas correspondencias forman una *conexión de Galois* entre P y Q si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Cuando $p_1 \succcurlyeq p_2$ con dos elementos en P o $q_1 \sqsupseteq q_2$ con dos elementos en Q, entonces
$$\mathfrak{Q}(p_1) \sqsubseteq \mathfrak{Q}(p_2), \qquad \mathfrak{P}(q_1) \preccurlyeq \mathfrak{P}(q_2)$$
b. Para un elemento p en P o q en Q
$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(p) \succcurlyeq p \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{P}(q) \sqsupseteq q$$

En esencia, esto permite generalizar las relaciones entre estructuras, únicamente teniendo como referencia las relaciones de orden, en este caso no interesa si los poset son estructuras de grupo o de cuerpo, solo interesa que cumplan con las dos propiedades de un poset, es este aspecto el que diferencia a las conexiones de Galois con el teorema fundamental.

Al relacionar esta definición de las matemáticas modernas con las matemáticas contemporáneas, la teoría de categorías permite evidenciar una generalización y abstracción; trabajos como el de Payares (2009) posibilitan mirar el desarrollo de estas ideas en las matemáticas contemporáneas -en particular con las ideas de Grothedieck (1928-2014)-; no obstante, el énfasis de este trabajo está en mirar la generalización del teorema fundamental mediante la noción de funtor adjunto -como en el trabajo de Lezama (1996)-. En este sentido, resulta necesario tener claridad respecto a dos nociones de la teoría de categorías.

En primer lugar, una categoría consta de cuatro cosas según la definición original propuesta por Eilenberg y MacLane (1945): objetos, morfismos -o flechas-, la operación composición entre morfismos y morfismos identidad para cualquier objeto. Con base en estos, una categoría debe de cumplir con cinco axiomas relacionados con los morfismos que la componen, el primer axioma consiste en que la asociatividad entre morfismos debe de cumplirse, el segundo axioma habla de que una triple composición de morfismos $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ es definida siempre que $\alpha_3\alpha_2$ y $\alpha_2\alpha_1$ estén definidas, el tercer axioma establece la existencia de un morfismo identidad para cada morfismo, el cuarto axioma establece el morfismo e_A, que corresponde a todos los morfismos identidad del objeto A, y el quinto axioma consiste en que para cada identidad de la categoría hay un único objeto de dicha categoría tal que $e_A = e$. En segundo lugar, la manera en la que se pueden relacionar dos categorías es mediante la noción de funtor que, en esencia, se puede intuir como una función[5] entre categorías y la forma en la que actúa es que va de objetos a objetos, morfismos a morfismos, etc.

Con estas ideas como base, los funtores adjuntos resultan ser objeto de estudio, en concreto, esta noción consiste en una pareja de funtores que permiten ir y volver de la manera más optima de una categoría a otra, en la intuición que permite evidenciar la teoría de conjuntos,

[5] Un funtor resulta ser más general que una función, las funciones se establecen en la teoría de conjuntos, y esta teoría resulta ser un caso particular de la teoría de categorías.

un ejemplo de funtores adjuntos es una función junto con su inversa, debido a que permite ir y volver de un conjunto a otro recuperando la mayor información posible del conjunto inicial.

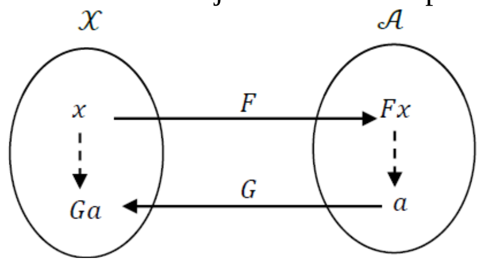


Figura 2. Representación gráfica de los funtores adjuntos[6]

Naturalmente, surge la inquietud respecto a la relación que tienen los funtores adjuntos con las conexiones de Galois, lo cual vincularía las matemáticas contemporáneas con las modernas, para estudiar esa relación es necesario ver *la categoría de los poset*, un caso particular dentro de la teoría de categorías.

En esta categoría se tienen en consideración cuatro cosas: la primera es que los objetos en esta categoría son los conjuntos, incluyendo los subconjuntos; la segunda es que los morfimos son las relaciones de orden, así la relación $a \leq b$ es el morfismo $a \to b$. La tercera consideración es que el morfismo identidad existe por la relación reflexiva del poset. Por último, esta categoría cumple la asociatividad y cada uno de los axiomas de la teoría de categorías. Con esto como base, Armstrong (2016) define la adjunción de los poset:

<u>Definición 2:</u> Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos posets. Un par de funciones $L\colon\ P \leftrightarrows\ Q\colon\ R$ es llamado una adjunción si para todo $p \in P$ y $q \in Q$ se tiene:

$$p \leq_p\ R(q)\ \ \Leftrightarrow\ \ L(p) \leq_Q\ q$$

En este caso se escribe $L \dashv R$ y se llama a esto un par adjunto de funciones. La función L es el adjunto izquierdo, y la función R el adjunto derecho.

No obstante, esta última definición tiene la particularidad de que no altera el orden al cambiar de una categoría a otra, es por esto que Armstrong (2016) precisa esta relación con base en la noción de *poset opuesto*, el cual invierte el orden que tiene un poset; en consecuencia, la adjunción de los poset $P \leftrightarrows Q$ es como la conexión de Galois $P \leftrightarrows Q^{op}$.

Las prácticas matemáticas en las ideas de Galois

Si bien el análisis histórico epistemológico de estas nociones resulta relevante para comprender una perspectiva de las matemáticas que se desarrollan actualmente, son importantes las reflexiones de las ideas de Galois para entender unos posibles impactos en la Educación, y en concreto en las construcciones que establecen los profesores en formación y en servicio. Una forma de llevar a cabo esta reflexión puede ser mediante el estudio de *las prácticas matemáticas*, término que refiere a una de las nuevas líneas de investigación en filosofía de las matemáticas.

[6] Tomada de Anacona (2017, p. 245)

Sin discutir respecto a lo que se define por práctica matemática, la definición de Carter (2019) parece cubrir los elementos importantes para definir una práctica matemática, en concreto, ella la define como un conjunto de "agentes" y "matemáticas" que son capturados por la dupla $\langle A, M\rangle$, considerando a los agentes como practicantes reales o idealizados, junto con sus actividades y creencias; por otro lado, las matemáticas se refieren a los contenidos en matemáticas como teoremas, métodos matemáticos, pruebas, etc.

Con esta caracterización de práctica matemática, se identifican algunas prácticas relacionadas con las ideas de Galois, por un lado, resulta interesante la práctica de generalización que se moviliza en teoría de categorías, esta práctica surge con la idea de fundamentar las matemáticas a partir de mirar cómo funcionan sus relaciones, lo que corresponde con una visión macro de las matemáticas. Galois pudo haber visto las matemáticas clásicas, centradas en resolver ecuaciones particulares, como un patrón dentro de un gran patrón llamado teoría de Galois; esta generalización construida por la necesidad de las estructuras de grupo y de cuerpo.

Por otro lado, se reconocen prácticas como las de *comparar* (Lezama, 1996) y *adjuntar*[7], en primer lugar, Galois establece una comparación entre dos estructuras de naturalezas distintas, lo cual permite bajar la complejidad de la teoría de cuerpos; en segundo lugar, la adjunción a las extensiones de cuerpo que realiza Galois, permite determinar la (ir)resolubilidad de una ecuación a partir de elementos indeterminados -los elementos adjuntos- (Santaya, 2014), esto a partir de estudiar los abismos contradictorios de la teoría (Zalamea, 2017).

Si bien, esta nueva línea de la filosofía de las matemáticas permite reconocer las anteriores prácticas en las ideas de Galois, la reflexión para los profesores de matemáticas podría estar relacionada con el desarrollo de prácticas en el aula de clase. Esto también permitiría, por un lado, explicitar obstáculos epistemológicos (Chavarria, 2014) en áreas como el álgebra, por otro lado, aportar una visión actual de las matemáticas a los profesores, haciendo énfasis en el uso de las estructuras, que tendría coherencia con modelos como el de Carrillo et al. (2014) frente a los conocimientos para los profesores de matemáticas. En este sentido, resulta necesario que el profesor amplifique otras miradas respecto a las matemáticas actuales.

Referencias y bibliografía

Anacona, M. (2017). Una mirada a los funtores adjuntos. En M. Anacona, *Los números reales en el estructuralismo bourbakista: un análisis histórico-epistemológico con fines educativos* (págs. 244-245). Cádiz, España: Universidad de Cádiz.

Armstrong, D. (2016). Adjoint Functors. En D. Armstrong, *Fancy Algebra* (págs. 1-65).

Carrillo, J., Contreras, L. C., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. Á. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice. *Philosophia Mathematica, 27*(1), 1-32.

Chavarria, S. (2014). *De las ecuaciones a la teoría de grupos, algunos obstáculos epistemológicos.* Cali: Universidad del Valle.

[7] La adjunción entendida desde el procedimiento que hace Galois para la resolubilidad, no a la teoría de categorías.

Eilenberg, S., & MacLane, S. (1945). General Theory of Natural Equivalences. *Transactions of the American Matematical Society, 58*(2), 231-294.

Lezama, C. (1996). Conexiones de Galois. *Integración, XIV*(1), 1-8.

Ore, O. (1944). Galois Connexions. *Transactions of the American Mathematical Society 55*, 493-513.

Payares Guevara, C. (2009). *Conexiones de Galois en categorías.* Cartagena : Universidad de Cartagena.

Santaya, G. (2014). El procedimiento de adjunción de Évariste Galois y su presencia en la ontología Deleuziana. En J. Ferreyra, & M. Soich (Edits.), *Deleuze y las fuentes de su filosofía* (págs. 37-47). Buenos Aires.

Zalamea, F. (2017). La emergencia abismal de la matemática moderna. *Mathesis*, 1-23.

Transposición didáctica entre instituciones: el caso de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica

Diana Carolina **Flores** Gallo
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
dfloresg@pucp.edu.pe
Elvis **Bustamante** Ramos
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Perú
ebustamater@pucp.edu.pe

Resumen

El trabajo tiene como objetivo identificar y analizar las praxeologías de la transformada de Laplace, de manera que se pueda mostrar cómo circula el saber relacionado a dicho concepto, en la carrera de ingeniería mecatrónica, entre una institución de la enseñanza de las matemáticas E(M) hacia una institución intermediaria E(DI). Para ello, desarrollamos una metodología cualitativa, donde primero se identifica la praxeología en un curso de Ecuaciones Diferenciales, luego en una segunda etapa, se identifica la praxeología en el curso de Control Clásico; en función de las etapas previas, se establece conexiones o diferencias entre las praxeologías. Como resultado de este trabajo, podemos indicar que la técnica en la E(M) no se amplía o continua en la E(DI) además la forma de validación en E(DI) no proviene de E(M) sino por un software. Además, podemos indicar que la razón de ser de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica de una universidad de Perú es la resolución de ejercicios de Control Clásico mediante modelos matemáticos.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Diseño curricular; Teoría antropológico de lo didáctico; Investigación cualitativa; Ecuaciones diferenciales; Transformada de Laplace; Perú.

Introducción

En el nivel superior, existen investigaciones cuyo foco es el análisis del contenido curricular y cómo se articula entre las matemáticas impartidas y las necesarias para la carrera como Guzmán (2016) y Silva (2017) en el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD). Estos contenidos avanzados de cálculo no se muestran articulados en la mayoría de los casos; en el caso de la transformada de Laplace, en la educación superior en los cursos de las ecuaciones diferenciales, lo presentan como una forma de convertir una ecuación diferencial a una algebraica como lo indica Cordero y Miranda (2011) y no se da una razón de ser en las escuelas de ingeniería.

Marco teórico y metodología

Para poder realizar la identificación de las organizaciones de temas relacionados a la transformada de Laplace en una institución, utilizaremos herramientas proporcionadas por la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), esta teoría se basa en una unidad llamada *praxeología*, que es un cuarteto $[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}]$ llamado la unidad mínima de análisis, compuesto por un tipo de tarea T, una técnica τ, una tecnología θ, y una teoría Θ (Chevallard, 1999). Además, en el trabajo se hace referencia a institución como lo que enmarcan las actividades humanas y al mismo tiempo las hacen posibles a través de los recursos que estas instituciones ponen a disposición de los sujetos según Castela y Romo (2011); por ejemplo, las instituciones:

- Instituciones de enseñanza de matemáticas (E(M)): Por ejemplo, los cursos de matemáticas, curso de ecuaciones diferenciales.
- Instituciones de disciplinas intermediarias (E(DI)): Son los cursos de disciplinas intermediarias, por ejemplo, el curso de Control Clásico.

Respecto a la metodología en nuestro trabajo, aplicaremos una investigación cualitativa, que nos permitirá identificar las praxeologías presentes en cada institución, desde TAD. La primera etapa de nuestra metodología es revisar la malla curricular de la carrera de ingeniería mecatrónica para saber en qué cursos está presente la transformada de Laplace, para luego hacer una descripción de libros de textos e identificar el modelo praxeológico en la E(M).

Para la segunda etapa, haremos una descripción de libros de textos de un curso de la especialidad e identificar el modelo praxeológico en la E(DI). Cabe resaltar que la elección de los textos se hace por las entrevistas de algunos docentes que dictan dichos cursos, tanto para la praxeología en la E(M) y en la E(DI), y porque los libros tienen una parte teórica muy bien explicada, y diversos ejercicios de distinta complejidad.

Los datos se organizaron de acuerdo con los temas que aparecen en el sílabo del curso, desde lo básico hasta lo más complejo que se ve en los cursos analizados. De acuerdo con dicha organización, se van encontrando las tareas que aparecen en el esquema de la figura 2 y 3, y finalmente se van analizando la manera en cómo se relacionan dichas tareas. Estos pasos nos permitirán mostrar y analizar la transposición entre instituciones además identificar la razón de ser de la transformada de Laplace. También, se realiza una triangulación de datos, ya que hay información de varias fuentes, como por ejemplo la entrevista con el docente del curso de Control Clásico, la revisión de textos, tanto del curso de Ecuaciones Diferenciales como del curso antes mencionado, además de la información extra que se tuvo del programa que se utiliza en el curso.

Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en E(M)

Primero, hemos revisado la malla curricular de la Escuela ingeniería mecatrónica y se identificó que el curso de Ecuaciones Diferenciales está presente el tema de la transformada de Laplace, como se observa por la Figura 1.

5. CONTINUOUS FUNTIONS, LAPACE'S TRANSFORM / 16 HOURS
Continuous function in segments and of exponential order. Laplace's transform, properties, theorem, calculation methods and application of Laplace's transform. Inverse Laplace transform, calculation methods. Application of the inverse Laplace's transform. Application of the inverse Laplace's transform to differential equations with constant and variable coefficients, other applications. Systems of 2x2 linear differential equations. Matrix solution for Laplace's transform.

Figura 1. Silabo del Curso de Ecuaciones Diferenciales de ingeniería Mecatrónica.

El curso de Ecuaciones Diferenciales es un curso de cuarto semestre de la carrera de ingeniería mecatrónica de una universidad de Perú y es prerrequisito del curso de Variable compleja y Análisis de Fourier, que, a su vez, es prerrequisito del curso de Control Clásico. Justamente el curso de Control Clásico pertenece al sexto semestre de la carrera de ingeniería mecatrónica, analizaremos para la E(DI).

Después de identificar el curso, se considera dos libros para el curso de Ecuaciones Diferenciales como son:

- Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning
- O'Neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.

Podemos observar que ambos libros presentan una organización parecida, mostrando definiciones, teoremas, y ejemplos directamente aplicativos. Sin embargo, un aspecto importante es la manera en cómo se presenta dicho contenido, ya que el primer libro tiene más ejercicios y ejemplos de corte extramatemático que el segundo libro. Por último, una característica que tienen ambos libros en común es que en el tema de la transformada de Laplace presentan ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales conocidas

.

De acuerdo con todo lo encontrado en la descripción de dichos libros, se plantea la pregunta generatriz: *¿De qué manera podemos dar solución a una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace?* Para dar respuesta a esta interrogante, consideraremos las técnicas que están presentes en los libros de ecuaciones diferenciales mencionados anteriormente, asociadas a la institución de la enseñanza de las matemáticas (E(M)).

Hemos encontrado 6 tipos de tareas y tienen como teoría a las Ecuaciones Diferenciales, ya que es la rama de las matemáticas que justifica cada tecnología encontrada en dicho análisis. En la figura 2, se muestra las tareas y las técnicas encontrados en Zill (2002); sin embargo, la praxeología completa se puede ver con más detalle en Flores (2021).

De acuerdo con el esquema planteado en la figura 2, las técnicas $\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3}$ y $\boldsymbol{\tau_6}$ utiliza $\boldsymbol{\tau_1}$, señalado con líneas punteadas, porque la relación entre las técnicas es parcial, es decir, solo se utilizan algunos pasos de la técnica; lo mismo sucede $\boldsymbol{\tau_5}$ que utiliza $\boldsymbol{\tau_3}$. También, podemos ver una línea punteada en la pregunta generatriz que se relaciona con $\boldsymbol{T_4}$ de manera parcial, ya que en este tipo de tarea no se resuelve una ecuación diferencial, sino una ecuación integral, pero usando la transformada de Laplace.

En el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$, relacionada a resolver una ecuación diferencial lineal se toma como base para obtener un generador de tareas $\boldsymbol{GT_1}$, donde las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$ tienen como objetivo generar subtipos de tareas más específicas, como lo es el orden de la EDO, las condiciones iniciales, cómo es la función $g(t)$ (polinomial, exponencial, seno y coseno). También, podemos ver que la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ y la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ se utilizan en los tipos de tarea $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_3}$, que también se relacionan con resolver una ecuación diferencial, pero no se utilizan todos los pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ ya que en $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_3}$ los términos de las ecuaciones diferenciales se trasladan en s o en t y surge la necesidad de aplicar otra tecnología (primer y segundo teorema de traslación) para complementar $\boldsymbol{\theta_1}$ y poder justificarla.

Por otro lado, vemos que $\boldsymbol{T_2}$ posee más subtipos de tareas que $\boldsymbol{T_1}$, y, si la variable didáctica $\boldsymbol{V_2}$ no tuviera como restricción a la constante $k \neq 0$, se podría formar un subtipo de tarea para $\boldsymbol{T_1}$ y en ese caso, se podría decir que el alcance de la técnica $\boldsymbol{\tau_2}$ es mayor a la de $\boldsymbol{\tau_1}$ porque resolvería más tareas (como la multiplicación de dos funciones) que $\boldsymbol{\tau_1}$.

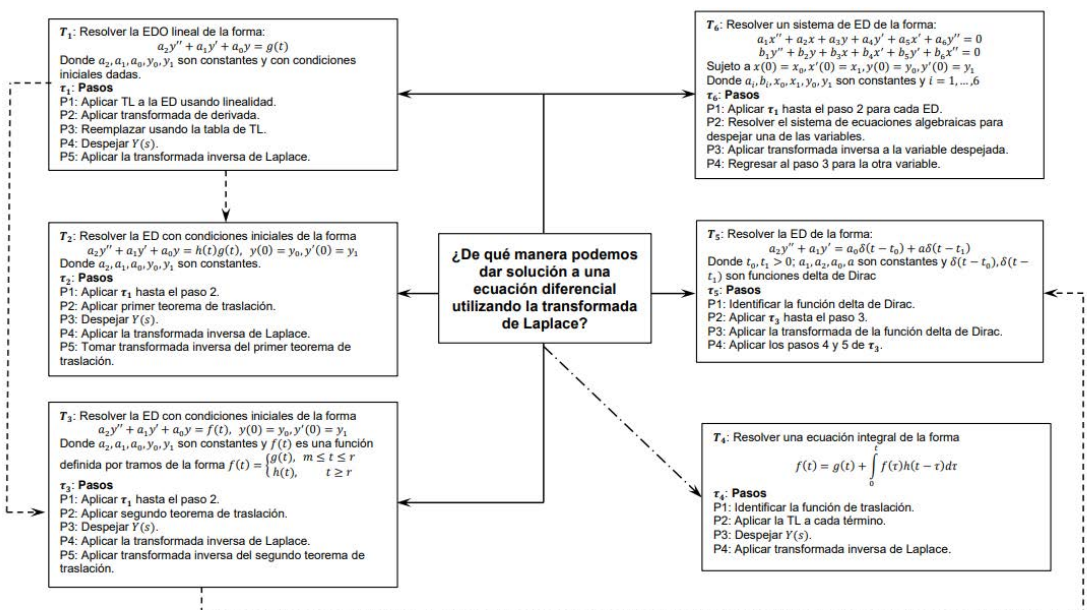


Figura 2. Esquema praxeológico de la transformada de Laplace.

El tipo de tarea T_3 se relaciona con el tipo de tarea T_5 por la técnica que utilizan como se mencionó antes; incluso podemos observar que τ_5 necesita implícitamente a τ_1 porque la técnica τ_3 llama a τ_1. Por lo tanto, la técnica τ_3 tiene más alcance que la técnica τ_5. Este alcance también se puede ver a través de las tecnologías empleadas para los tipos de tareas mencionados, con la diferencia que para T_5 tenemos como tecnología principal a la transformada de la función delta de Dirac.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$ que se pide resolver una ecuación integro-diferencial, se aplican herramientas propias de la transformada de Laplace, como el teorema de convolución, incluso se puede observar que la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ necesita implícitamente casi todos los pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ (excepto el paso 2 de aplicar la transformada de la derivada), y esto debido justamente a la tecnología $\boldsymbol{\theta_5}$ que aplica la convolución de funciones y también la traslación de funciones (usado en $\boldsymbol{\tau_2}$) para justificar la técnica. Sin embargo, no podemos hablar del alcance de la técnica debido a que los tipos de tareas realizadas por $\boldsymbol{T_4}$ son diferentes a los demás tipos de tareas encontrados ($\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_5}$ y $\boldsymbol{T_6}$).

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ se presenta para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, donde las dos variables didácticas $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}$ generan cuatro subtipos de tareas. Debemos resaltar que en el paso 2 de la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, que se estudia en cursos de matemática elemental a nivel escolar, porque se debe despejar una de las variables (usando métodos vistos en álgebra sobre sistemas de ecuaciones lineales) y continuar con el proceso de la transformada de Laplace; por ende, la tecnología $\boldsymbol{\theta_6}$ para dicho paso se justificaría con técnicas ya aceptadas en otra teoría, que en ese caso sería la teoría $\boldsymbol{\Theta}$ del álgebra

Podemos concluir, que, de acuerdo con la descripción de la praxeología, se puede mostrar una perspectiva general de cómo los textos de ecuaciones diferenciales abordan el tema de la transformada de Laplace mediante técnicas específicas de resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, lo cual es diferente a las tareas que dieron origen al concepto actual de la transformada de Laplace, donde si bien es cierto, también se buscaba resolver ecuaciones diferenciales, las técnicas empleadas para este fin eran distintas, porque Euler y Laplace buscaban inicialmente reducir el orden de la ecuación diferencial multiplicando el factor de la exponencial; además en sus estudios realizados no mencionaban las funciones por tramos ni condiciones iniciales.

Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en E(DI)

Para esta parte, se ha considerado un curso esencial en la carrera de ingeniería mecatrónica que es el curso de Control Clásico del sexto semestre de la carrera mencionada. La elección de este curso para el análisis praxeológico es porque, según el sílabo, se presentan temas relacionados a la transformada de Laplace, y se evidencia claramente en los primeros temas que se desarrolla en el curso. Además, un docente principal del curso de Control Clásico nos explicó la importancia del curso, y nos brindó la bibliografía que se utiliza en dicho curso, que son los siguientes libros:

- Hernández Gaviño, R. (2010). Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab. Pearson Educación.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.

Para el análisis praxeológico, utilizaremos los libros de Hernández (2010) y Ogata (2003) ya que, según el Docente, hay ejercicios donde el estudiante puede practicar la parte teórica. Por lo tanto, de las descripciones de los libros, surge nuestra pregunta generatriz: *¿Cómo aplicar la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico?* Y para dar respuesta a esta interrogante identificaremos distintos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías, asociada a la institución de disciplinas intermediarias (E(DI)).

Ahora, para hacer un análisis praxeológico se va a organizar los diversos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías utilizaremos el modelo praxeológico extendido dado por Chaachoua, Bessot, Romo & Castela (2019) y tendremos en cuenta los siguientes criterios:

- Procedimientos necesarios para resolver las tareas planteadas.
- Justificaciones que van a garantizar el procedimiento que se emplee en la resolución de la tarea planteada.
- Procedimientos que se toman en cuenta desde la matemática o la de Control Clásico.
- Teoría que justifica los procedimientos.

Para esta praxeología se identificaron siete tipos de tareas, relacionados con hallar la función de transferencia de un sistema de control determinado. Para modelar dichos sistemas de control se utilizan los conocimientos previos de cursos iniciales como Física 1, donde los estudiantes llevan temas como equilibrio, estática, dinámica, movimiento amortiguado (temas presentes en $\boldsymbol{T_1^*}, \boldsymbol{T_2^*}, \boldsymbol{T_5^*}$ y $\boldsymbol{T_6^*}$). También están presentes los temas de electrostática y magnetismo en $\boldsymbol{T_4^*}, \boldsymbol{T_6^*}$ y $\boldsymbol{T_7^*}$ que son temas llevados en el curso de Física 3.

En $\boldsymbol{T_1^*}$, la variable didáctica $\boldsymbol{V_1}$ toma algunas funciones elementales (constante, polinómica, exponencial, seno, coseno) porque son las funciones que se estudiaron en la praxeología de la E(M). La función $f(t)$ puede tomar las combinaciones lineales de las cinco funciones anteriores y la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ seguiría siendo efectiva, y no sería necesario aplicar algún otro método.

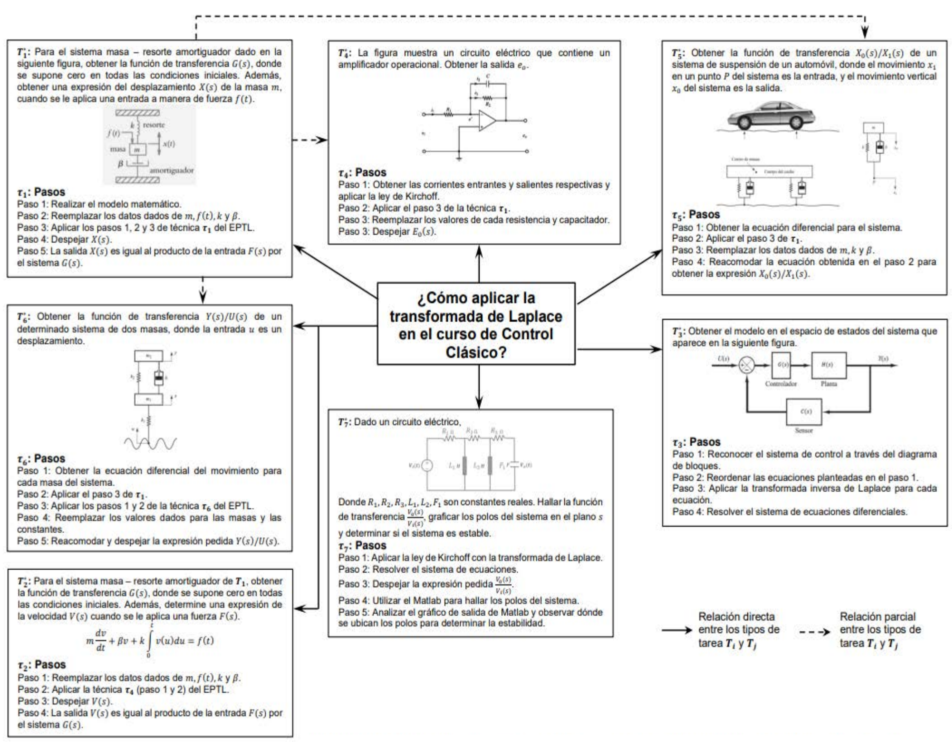


Figura 3. Esquema praxeológico de la transformada de Laplace.

En $\boldsymbol{T_2^*}$ se utiliza el mismo sistema masa – resorte amortiguado usado en $\boldsymbol{T_1^*}$, pero con la diferencia que en $\boldsymbol{T_2^*}$ se pide hallar la velocidad $V(s)$, y justamente es lo que va a diferenciar la técnica y tecnología entre dichos tipos de tareas, ya que en $\boldsymbol{T_2^*}$ se resuelve una ecuación integrodiferencial usando $\boldsymbol{\tau_4}$ de la praxeología E(M). En $\boldsymbol{T_3^*}$, las variables didácticas deben ser funciones racionales de una forma determinada, sin embargo, pueden ser cualquier función de transferencia y la técnica seguiría funcionando, pero el cálculo se haría más tedioso y afectaría los pasos 1 y 2 de $\boldsymbol{\tau_3}$.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4^*}$, donde se presenta un circuito eléctrico, no tiene generadores de tareas, y esto es debido a que, si se aumentan o se disminuyen resistencias, capacitores y/o inductores, entonces se estaría generando otro tipo de tarea, que se podría resolver utilizando los pasos 2 y 3 de $\boldsymbol{\tau_4}$, pero el paso 1 necesitaría de otra tecnología (circuitos RLC) y el cálculo se haría más tedioso. Los tipos de tareas $\boldsymbol{T_5^*}$* y $\boldsymbol{T_6^*}$* son parecidos, debido a que ambos utilizan un sistema de suspensión. Sin embargo, la diferencia es la cantidad de masas que se toman, ya que en $\boldsymbol{T_5^*}$* solo se toma una masa, y en $\boldsymbol{T_6^*}$* se toman dos masas, formándose para este tipo de tarea un sistema de ecuaciones diferenciales. Finalmente, para $\boldsymbol{T_7^*}$, donde se da un circuito RLC y se pide hallar la función de transferencia, graficar los polos y determinar la estabilidad del sistema.

Cabe resaltar que el software mencionado en Hernández Gaviño, R. (2010) no se enseña en el curso en cuestión, sin embargo, el docente de curso les deja como tarea al estudiante y le brinda un manual de Matlab. Por lo tanto, el análisis realizado de los libros de Control Clásico nos brinda un panorama acerca del uso de la transformada de Laplace, mediante la función de transferencia, estabilidad de un sistema y espacios de estado de un sistema, y gracias a estos temas se le da un significado a la transformada de Laplace.

Relación y diferencias entre las praxeologías identificadas

Primero, podemos indicar que ambas instituciones E(M) y E(DI) ponen su foco de atención a la resolución de tareas aplicativas, como resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales o hallar la función de transferencia de algún sistema de control dado.

En la E(DI), se observa que la validación de cada técnica se hace debidamente respetando los conocimientos producidos en la E(M). Sin embargo, encontramos que en $\boldsymbol{T_7^*}$, la tecnología $\boldsymbol{\theta_7^p}$ se justifica con el Matlab para su técnica, esta validación no proviene de la E(M), pero se considera como válida para los ingenieros mecatrónicos en formación, es decir, la técnica y tecnología que se usa en $\boldsymbol{T_7^*}$ no proviene de la tecnología teórica, sino de la componente práctica.

Además, vemos que el componente tecnológico de la E(DI) es muy sensible al proceso de transposición, debido los discursos según el contexto donde se aplica, por ejemplo, para $\boldsymbol{T_1^*}$ vemos que $\boldsymbol{\theta_1^p}$ se compone de modelos físicos establecidos, pero si se cambiara por varias masas, este modelo físico también cambiaría, haciendo que la tecnología empleada cambie.

En la figura 4 se muestran las relaciones existentes entre las praxeologías de las instituciones E(M) y E(DI) a través de los tipos de tareas. La línea punteada indica que los tipos de tareas $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_5}$ se relacionan de manera indirecta para calcular la función de transferencia, es decir, en algunos tipos de tareas se da una función de transferencia que proviene de una función por tramos, ya sea de escalón unitario, de rampa, o función de Dirac. Luego se utilizan tablas para aplicar la inversa de la transformada de Laplace y regresarlo al dominio del tiempo.

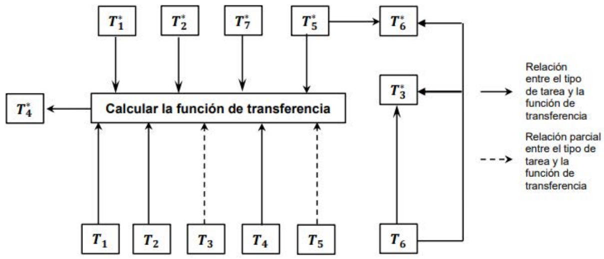


Figura 4. Esquema praxeológico para enseñar sobre la transformada de Laplace (EPESTL).

En resumen, podemos decir los pasos de la técnica que se realizan en los tipos de tarea ($\boldsymbol{T_i}$) de la E(M) no se utilizan en los tipos de tarea ($\boldsymbol{T_j^*}$) de la E(DI), ya que solo se llega a aplicar la transformada de Laplace, pero no la inversa, como en todos los tipos de tarea de la E(M).

Conclusiones y resultados

De acuerdo con el objetivo planteado inicialmente para nuestro trabajo, el cual era mostrar la transposición del saber relacionado a la transformada de Laplace, podemos identificar que los tipos de tareas de la E(M) son de carácter intramatemático, y la resolución de las tareas se realiza a través de las tablas de transformadas de Laplace y su inversa también, y su foco de atención se centra en resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas, para finalmente realizar ejercicios aplicativos de modelación matemática, es decir, su razón de ser.

También se pudo identificar que para el curso de Control Clásico (es decir, la E(DI)), la praxeología identificada hace uso de técnicas y tecnologías provenientes de la E(M), de manera que se pueden ejercer tareas propias del entorno profesional del ingeniero mecatrónico, es decir, la contribución de la E(M) se encuentra principalmente en el nivel del desarrollo de las tecnologías que validan las técnicas, según los criterios específicos para el área de la Teoría de Control.

Además, en el curso de Control Clásico, se puede observar en la praxeología encontrada que en la mayoría de problemas que se resuelven en el curso no se utiliza la definición formal de la transformada de Laplace a través de la integral impropia, tampoco se resuelve de manera explícita una ecuación diferencial, ya que lo único que se necesita en algunos problemas es hallar la función de transferencia tomando la transformada de Laplace en cada término y ya no buscar la solución específica, sino que trabajando solo en "s", se busca las características del sistema (estabilidad) sin necesidad de llegar, en algunos casos, a la solución del sistema en el dominio del tiempo. También podemos ver que, incluso en el curso de Control Clásico, hay ejercicios donde ya no se utiliza la transformada de Laplace, sino que se hace a través de Matlab.

Se ha podido identificar que el concepto de la transformada de Laplace no solo tiene su foco de atención como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, sino también como un instrumento potente para la interpretación del comportamiento básico de un sistema de control. Por tal motivo, se sugiere que en el curso de ecuaciones diferenciales se deban considerar más tipos de tareas basadas en modelación matemática, de modo que el estudiante se adapte a las técnicas y tecnologías que se aplican, como en los tipos de tareas $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_4}, \boldsymbol{T_5}, \boldsymbol{T_6}$ y $\boldsymbol{T_7}$ donde se modelan sistemas que requieren conocimientos básicos de física y con ayuda de la E(M).

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas – línea de epistemología de las matemáticas en didáctica de las matemáticas, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

Referencias y bibliografía

Castela, C. & Romo, A. (2011). *Des Mathématiques A L'Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(1), 79-130.

Chaachoua, H., & Bessot, A. (2019). *La notion de variable dans le modèle praxéologique*. Educação Matemática Pesquisa *(EMP)*, *21*(4), 234-247.

Cordero, F., Valle, T. & Morales, A. (2019). *Uses of the optimization of engineers in training: the role of mechatronic engineering and the work of Lagrange*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 22(2). 185-2012.

Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.

Flores, D. (2021). *Un modelo praxeológico para el estudio de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional – Pontificia Universidad Católica del Perú.

Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.

Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. Pearson Educación.

Miranda, E. (2011). *Epistemología de la Transformada de Laplace y sus Implicaciones en la Didáctica de las Matemáticas*. Didac, (56-57), 76-81. Recuperado de https://biblat.unam.mx/es/revista/didac/articulo/epistemologia-de-la-transformada-de-laplace-y-sus-implicaciones-en-la-didactica-de-las-matematicas

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Quinta Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A.

O'neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.

Silva, L. T. (2017). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.

Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning

O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas Prescrições Curriculares para o Ensino Médio Técnico no CEFET-MG

Davidson Paulo Azevedo **Oliveira**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Brasil
davidson@cefetmg.br
Erica Marlúcia Leite **Pagani**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Brasil
leitepagani@gmail.com
Alessandra Carvalho **Teixeira**
Universidade Paulista
Brasil
prof_alecarvalho@yahoo.com.br

Resumo

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) esteve presente na escola secundária brasileira desde a década de 1950 sendo retirado, oficialmente, quarenta anos depois. Entretato, no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG) ainda está presente no currículo. Nosso objetivo é apresentar uma breve descrição desta trajetória e um primeiro olhar sobre um material de CDI da instituição de 1973. Para isso, nos baseamos nas três esferas de análise histórica: contextual, epistemológica e historiográfica. Conclui-se que o ensino do conteúdo se dá de modo mecânico por meio do estudo de técnicas sem formalização ou aplicabilidade em áreas técnicas.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Ensino Técnico; Cálculo Diferencial; Brasil; Ensino Profissional.

Introdução

Este trabalho que aqui relatamos é parte de uma pesquisa maior que busca entender como, historicamente, se desenvolve o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real nas escolas técnicas federais, em particular, no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) nas unidades de Belo Horizote. Nosso objetivo neste texto é apresentar uma primeira análise do material produzido e utilizado na instituição em 1973.

A Instituição-CEFET-MG

Essa instituição foi criada em 1909 como Escola de Aprendizes e Artíficies, iniciando suas atividades em 1910, com o objetivo de atender à população dos desvalidos; ou seja, aos filhos dos desfavorecidos de fortuna. Sofre diversas transformações e em 1969 a instituição passa a denominar-se Escola Técnica Federal de Minas Gerais. Destacamos que no Brasil , nessa época, existiam 23 Escolas Técnicas ao longo de todo o território e em todas as regiões do país. Humberto Castelo Branco era presidente do Brasil nesse período, cargo que exerceu de 1964 a 1967; enquanto que no período da publicação do material analisado o presidente era Emilio Garrastazu Médici, que exerceu o cargo de 1969 a 1974. Esse período, entre 1969 e 1973, ficou conhecido no país como "Milagre Econômico", sendo um momento em que se esperava que as profissões da área tecnológica fossem propulsoras do desenvolvimento industrial brasileiro. Apesar do êxito económico, Fausto (1995) afirma que esse período foi um dos períodos mais tenebrosos no campo político. Ainda segundo o autor, "em 1968 e 1969, o país cresceu em ritmo impressionante registrando, a variação respectivamente de 11,2% e 10,0% do PIB, o que corresponde a 8,1% e 6,8% no cálculo *per capta."* (Fausto, 1995, p.482).

Entre as décadas de 1940 a 1960 a então Escola Técnica de Belo Horizonte oferecia cursos técnicos de Mecânica Industrial, Estradas e Eletromecânica. O Curso Técnico Industrial era reconhecido pelo Conselho de Engenharia e Arquitetura (CREA) e habilitava o formando a exercer uma profissão dentro da área técnica das empresas.

Distaciando-se dos objetivos traçados no decreto de 1909, os cursos técnicos oferecidos pela Escola Técnica Federal de Minas Gerais atingem uma qualidade alta e atraem diversos públicos, inclusive a população elitizada, e essa escola se torna uma instituição moderna, com foco nas necessidades do país. Essa alteração acontece, também, em outras Escolas Técnicas do país, por exemplo, na Escola Técnica de Curitiba em que há

> uma transformação das Escolas de Aprendizes Artífices, de habilitadora dos "filhos dos desfavorecidos da fortuna", para se tornarem formadoras de uma elite de técnicos necessários para a indústria, com uma formação direcionada para a sua disciplinarização, não prescindindo para isso dos princípios da racionalização científica (Amorim, 2010, p. 173).

A Escola Técnica Federal de Minas Gerais, em 1972, implantou seus primeiros cursos superiores, iniciando pelo curso de Engenharia de Operação Elétrica e Mecânica, de acordo com o Decreto nº70 366/72. Segundo Pagani (2016), "essa escola, em 1978, através da lei nº 6.545, passa a se chamar Centro Federal de Educação Tecnológica-CEFET-MG".(p.26).

O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas Prescrições Curriculares para o Ensino Médio

Nos dias atuais é possível perceber que o ensino de Cálculo Diferencial e Integral não é prescrito nos Currículos nacionais e estaduais do território brasileiro. Mas não foi sempre assim. Existiu um período em que ele era obrigatório para o Ensino Médio. A presente seção objetiva apresentar esse período e indicar os possíveis motivos para que esse objeto do conhecimento não esteja mais nas prescrições curriculares.

As reformas conhecidas como Benjamin Constant e Amaro Cavalcanti, no anos de 1890, marcaram a primeira década do período republicano no Brasil. Nelas o ensino de Cálculo Diferencial e Integral esteve prescrito para o Ensino Médio, na época conhecido como Ensino Secundário, com o objetivo de inserir o aluno no Ensino Superior. Salientamos que esse não era o único objetivo, mas um deles e o mais latente.

Na reforma Benjamin Constant a disciplina Cálculo Diferencial e Integral[1] foi prescrita para o 3º ano de ensino, devendo ser revisada nos quatro anos seguintes. Na reforma Amaro Cavalcanti, a disciplina era prescrita a partir do 5º ano até o 7º ano. Diferentemente do que acontece na primeira reforma, na Amaro Cavalcanti o Cálculo Diferencial e Integral não é posto, em momento algum, como revisão, mas sim com disciplina ao longo dos três anos.

A Reforma Francisco Campos, ocorrida na década de 1930, divide o Ensino Secundário em dois ciclos: fundamental e complementar, sendo o primeiro com duração de cinco anos e o segundo com duração de dois anos. Como o ensino complementar tinha por objetivo preparar o aluno para ingressar no Ensino Superior, ele foi dividido em três modalidades: pré-jurídico, pré-médico e pré-politécnico. Apenas nas duas últimas modalidades o ensino de Cálculo era prescrito mas, restringindo-se às noções de limite e derivada.

De acordo com Carvalho (1996), no início dos anos 1940, na Reforma Capanema, conteúdos do Cálculo também fizeram parte do currículo da escola secundária. No entanto, Araújo (2016) afirma que não aparece, em nenhum dos cursos instituídos na reforma Capanema, o conteúdo de Cálculo. O que existe é apenas uma referência sobre o estudo do comportamiento variacional das funções e das derivadas no ensino Científico. O conteúdo relacionado ao estudo de integrais e primitivas de uma função voltam a aparecer, oficialmente, nos programas de ensino apenas em 1951.

Avila (1991) resume a história do ensino de Cálculo no Brasil da seguinte forma:

> [...] fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5ª à 8ª série mais o 2º grau era o curso ginasial de 5 anos, seguidos por dois anos de pré-universitários, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia. (Avila, 1991, p.1)

[1] A partir de agora, toda vez que usarmos a palavra Cálculo estaremos no referindo ao Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real.

Para esse autor, é um erro grave descartar o ensino de Cálculo, pois ele considera esse conteúdo como o mais significativo da Matemática para a formação do aluno, num contexto de ensino atual.

A partir de 1960 até meados de 1980, o Movimento da Matemática Moderna – MMM esteve no auge das discussões, lideradas pelo professor Osvaldo Sangiorgi, não se restringindo apenas sobre a necessidade de uma reforma curricular, mas também influenciando a formação do professor.

Um dos pontos propostos durante o MMM foi a modernização dos conteúdos, tendo como um dos motivos o fato de que as reformas de Constant e Capanema não terem tido êxito ao tentarem resolver questões sobre o Ensino Secundário, além de ter como objetivo a aproximação do ensino ministrado nas escolas com a pesquisa, considerado um modo de contribuir para o desenvolvimento tecnológico.

Assim, com esse Movimento, começa a retirada do ensino de Cálculo do currículo das escolas secundárias, para a inclusão de conteúdos que foram considerados mais importantes durante o Movimento. Segundo Avila (1991, p.2), “não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e formalismo exigiam o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos que toma tempo.”

Metodologia

A pesquisa foi realizada de acordo com a adaptação das três esferas de análise histórica como direcionadas por Moura (2017), a saber, a historiográfica, a epistemológica e a contextual. Por esfera historiográfica entende-se um estudo crítico das várias formas pelas quais já se analisou o mesmo documento. Entretanto, como o documento investigado ainda não foi completamente estudado esta esfera não será considerada em nossa análise, por esse motivo adaptaremos as esferas de análise.

A esfera epistemológica auxilia a analisar o conjunto de conhecimentos e ações compartilhados pelos contemporâneos do documento analisado, ou seja, é o estudo crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados da dimensão interna desse documento. Essa esfera sugere um diálogo entre uma rede de outros diversos documentos dos mais variados temas.

Por último, a esfera contextual por meio da qual realiza-se um estudo do contexto histórico propriamente dito, lançando luz sob as circunstâncias sobre as quais foi elaborado o documento que está em análise; ou seja, são relações de diferentes ordens (política, social, filosófica e religiosa) das quais permearam o ambiente em que o documento foi produzido. É importante salientar que as esferas de análise não acontecem de modo isolado, mas durante todo o processo da pesquisa e, por isso, não são destacadas no trabalho.

Além disso, para nosso estudo entendemos que a denominação fontes diretas e indiretas na perspectiva de Barros (2019, p.32) que sugere que os termos fontes primárias, secundárias e terciárias estão em desuso, embora muito vistos em trabalhos historiográficos no campo da Educação Matemática no Brasil. O estudioso ainda ressalta que uma classificação nesse sentido depende do objeto em análise e uma mesma fonte pode ser tanto direta e indireta, a depender do olhar do pesquisador. As fontes indiretas podem se situar “em uma cadeia documental, testemunhal ou informativa, colocando-se por exemplo, entre o historiador e um primeiro documento ou testemunho, anterior a ele”.

O Cálculo no contexto da Escola Técnica Federal de Minas Gerais

Nos cursos técnicos da Escola Técnica Federal de Minas Gerais, atual CEFET-MG, os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) estavam inseridos, no currículo de todos os cursos técnicos, na disciplina de Matemática para atender às demandas das disciplinas técnicas. Entretanto, com as transformações vivenciadas na instituição

> […] a partir do ano letivo de 2013, pasa a ser restrito aos cursos de Eletrônica, Eletrotécnica e Mecatrônica. Atualmente, os conteúdos de CDI são ministrados no 2º ano do Ensino Médio, ao longo do 3º bimestre. (Pagani, 2016, p.27).

A pesar da justificativa para o estudo de CDI ser a necessidade de disciplias técnicas, em nossas investigações nos deparamos com materiais produzidos a partir da década de 1970, no formato de livros ou apostilas, com intuito de padronizar o ensino de CDI. A padronização era requerida não só na instituição mineira em que se insere este trabalho, mas em todas as escolas técnicas federais do país.

Alguns desses materiais foram produzidos em parceria com profesores que atuavam em outras regiões e estados brasileiros. Estamos restritos, neste trabalho, ao material didático produzido em 1973 por dois professores do Escola Técnica Federal de Minas Gerais destinado á segunda serie dos cursos técnicos.

Descrição do material analisado

Conforme mencionado anetrioremte, em 1973, o ensino de Cálculo era ministrado na segunda série do segundo grau, denominação dada à época para o Ensino Médio atual e nosso objetivo aqui é apresentar uma primeira análise do material (apostila) produzido e utilizado na instituição, para o ensino de Matemática.

Por meio de informações contidas na capa podemos ver que o material foi escrito pelos professores Arnaldo Stochiero e João Bosco Laudares, ambos docentes da Escola Técnica Federal de Minas Gerais, da Escola Superior de Agrimensura. O primeiro deles, na época, ainda era professor da Universidade do Trabaho de Minas Gerais (UTRAMIG) e do Colégio Estadual de Minas Gerais. O segundo, além de lecionar nas duas instituições ainda era professor na Universidade Católica de Minas Gerais e no Colégio Arquidiocesano de Belo Horizonte.

Ademais, a capa ainda apresenta uma imagem de uma curva com destaque para uma área S delimitada pelo eixo x e os pontos a e b o que pode ser calculado por meio de uma integral definida, cujo símbolo se encontra logo abaixo do gráfico (figura 1). Essas informações representam indícios de que o cálculo de área sob curvas por meio de integrais definidas fazia parte do conteúdo a ser ensinado. Entretanto, até o momento, não sabemos qual a relação desse conteúdo com as disciplinas técnicas.

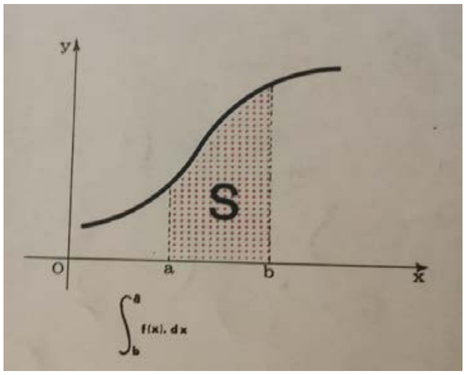


Figura 1. Capa da apostila analisada

Neste material constatamos o ensino de Matemática da segunda série era composto pelos conteúdos descritos nas oito unidades da apostila, a saber: (a) Determinantes; (b) Números Complexos; (c) Funções Numéricas e Graficos; (d) Limite de uma função; (e) Funções contínuas e descontínuas; (f) Derivadas; (g) Cálculo Diferencial e integral: integral indefinida.

Nesta fonte documental, podemos observar que a última unidade de ensino do material analisado é dedicada ao estudo da Integral definida e inicia com a definição e a interpretação geométrica dela, conforme figura 2 a seguir.

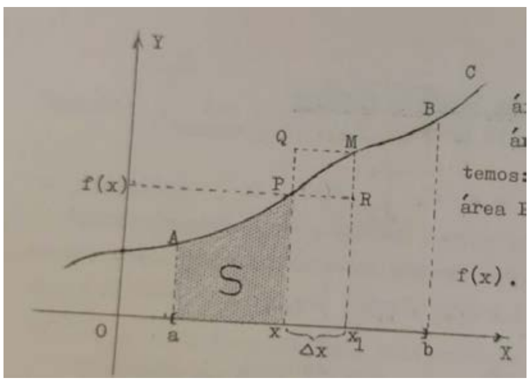


Figura2. Integral. Stochiero e Laudares (1973, p.109)

Observe que das oito unidades, cinco delas se referem ao conteúdo de CDI, o que representa 51% das páginas do material em análise. Apresentaremos, na seção seguinte, uma discussão sobre a unidade IV – Limite de uma função.

Limite de uma função

A unidade IV do material é dedicada à noção de limite de um função que é apresentada de modo intuitivo, sem uma definição formal. De acordo com os autores:

> Diz-se que uma função f tem por limite o número N, quando a variável x tende para o valor dado a, quando o valor f(x) da função pode tornar-se tão próximo do número N quanto desejarmos, desde que x esteja suficientemente próximo de a. (Stochiero e Laudares, 1973, p.59)

A ausência de uma definição formal de limite por meio de epsilons e deltas, consoante ao rigor atual, deve ser analisada de acordo com a esfera epistemológica e comparação com outras obras do mesmo período. Ainda em fase de investigação, ao compararmos com Junior (1974) percebemos que ele também não apresenta a definição formal de limites e se assemelha ao material analisado da Escola Técnica Federal de Minas Gerais.

Além disso, no ensino superior brasileiro,na década de 1960, inicia-se uma discussão no sentido de transformar o ensino de Cálculo que se aproximava ao que hoje é Análise Matemática, com a formalização mencionada anteriormente, em uma disciplina de CDI sem a formalização exigida nessa primeira disciplina. Sendo a década de 1970 um período de mudanças no qual existiam, de acordo com Raad (2012), cursos de Cálculo com uma visão mais analítica, rigorosa e demonstrative e outros que privilegiavam as técnicas, a aplicação. Nesse sentido, o Ensino da Escola Técnica Federal de Minas Gerais se aproximava da segunda opção, mais voltado às técnicas e sem um rigor matemático propriamente dito. Os conceitos são apresentados ao longo do texto de maneira intuitiva seguidos de diversos exercícios que valorizam e exigem manipulações algébricas para que se calcule os limites desejados.

Considerações Finais

A partir da pesquisa realizada até o momento, percebemos como o Cálculo Diferencial e Integral se insere no CEFET MG a partir de necessidades de desevolvimeto industrial e tecnológico no Brasil na década de 1970. Aliado a isso, a instituição segue uma tendência brasileira no ensino de CDI do ensino superior voltado a técnicas e aplicabilidade em detrimento de uma matemática formal com demonstrações. Apesar disso, o material analizado não apresenta aplicações voltadas aos cursos técnicos da instituição, ou seja, o conteúdo fica restrito à disciplina de Matemática, com foco em técnicas de resolução de limites.

Nesse sentido, a partir deste trabalho inicial, pesquisas futuras serão realizadas de modo a entendermos as necessidades dos estudantes do ensino técnico da década de 1970 em aprenderem o CDI e suas aplicabilidades na área técnica e no desenvolvimento tecnológico e industrial brasileiro do período.

Referências

Amorim, M. L. A (2010) *Escola Técnica de Curitiba/Escola Técnica Federal do Paraná (1942-1965).* Tecnol. & Huma. Ano 24. N. 39.

Araujo, S. X. S.(2016) Uma Introdução ao Estudo de Derivada no Ensino Médio. *Dissertação de Mestrado em Matemática* – Universidade Federal Rural do Semi-Arido..

Avila, G. O.(1991) *Ensino do Cálculo no Segundo Grau*. In:´ Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pp.1-9.

Barros, J. A (2019). *Fontes Históricas. Introdução aos seus usos historiográficos.* Petrópolis: Editora Vozes.

Carvalho, J. B. P. F.(1996) *O cálculo na escola secundária: algumas considerações históricas*. Caderno CEDES. Campinas: Papirus, n. 40, pp. 68-81.

Fausto, B. (1995). História do Brasil. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo: Fundação do Desenvolvimento da Educação.

Junior, F. A(1974). Cálculo Diferencial e Integral. (Trad. CARVALHO, J. R.) Coleção Schaum. Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA. 8ª reimpressão. 1974.

Moura, R. A. (2017) Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista. (*Tese de Doutorado*). PUC- SP. 219p.

Pagani, E.M.L. (2016) O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao médio através da resolução de problemas. (*Tese de Doutorado).* Unicsul-SP.168p.

Raad, M. R. (2012). História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura. (*Dissertação de Mestrado*). UFJF.

O Ensino de Matemática no Primeiro Ciclo da Escola Cidadã – Rede Pública Municipal de Ensino de Porto Alegre/RS

Alexandre Ausani **Huff**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
alexandre.a.huff@gmail.com
Rossano André **Dal-Farra**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
rossanodf@uol.com.br

Resumo

Este trabalho apresenta o contexto educacional da Rede Pública Municipal de Ensino do Município de Porto Alegre/RS (Brasil) nos anos 1990. Foi escrito a partir do recorte da Tese de Doutorado "O ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Porto Alegre a partir da implantação dos Ciclos de Formação: aspectos históricos (1995 – 2019)". Nele estão presentes discussões sobre o Ensino de Matemática proposto pela Prefeitura Municipal de Porto Alegre para o Primeiro Ciclo da Escola Cidadã, após a elaboração da proposta pedagógica por Ciclos de Formação. A pesquisa se desenvolveu à luz da Hermenêutica de Profundidade, que se caracteriza pela interpretação de objetos simbólicos junto à conjuntura e reconstruindo a história. Após analisar os documentos, a legislação, as entrevistas e o momento em que a sociedade brasileira vivia, especialmente na cidade de Porto Alegre, foi possível abordar os conteúdos de Matemática ensinados no Primeiro Ciclo das Escolas Públicas Municipais desta cidade.

Palavras clave: Ensino de Matemática; Hermenêutica de Profundidade; Currículo; História da matemática; Ciclos de Formação.

Introdução

Este trabalho refere-se a um recorte da Tese de Doutorado, cujo título é "O ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Porto Alegre a partir da implantação dos Ciclos de Formação: aspectos históricos (1995 – 2019)". Portanto, trata-se de um estudo histórico, dirigido às bases que formaram o currículo a partir da proposta Escola Cidadã e que auxiliou na construção da base pedagógica desta rede de ensino.

O conhecimento histórico se faz importante para que os professores possam conhecer o cenário que constituiu o Ensino de Matemática da rede em que atuam, para que consigam reconhecer o cenário educacional e o contexto social que envolve a formação do currículo escolar e, com isso, ampliar a visão sobre a importância da educação para as comunidades.

O pesquisador necessita entender o contexto sócio-histórico da região em que está sendo realizada a investigação, para que consiga aprofundar sua análise junto aos documentos encontrados. Por conta disso, nesta pesquisa foi utilizada a metodologia da Hermenêutica de Profundidade de John Thompson, que se baseia na Hermenêutica de Friedrich Daniel Ernst Schleiermacher. Thompson, por sua vez, adaptou a metodologia de interpretação hermenêutica para a realização de estudos historiográficos, desenvolvendo o método da Hermenêutica de Profundidade, que auxilia na aproximação do pesquisador com as qualidades que envolvem a sociedade do período estudado.

Sendo assim, a metodologia da pesquisa se desenvolveu por meio de interpretação de documentos e leis que embasaram a criação da Escola Cidadã, leituras bibliográficas acerca da Rede Municipal de Porto Alegre e entrevistas com agentes participantes da implementação da Escola Cidadã em Porto Alegre, com a estrutura educacional através dos Ciclos de Formação. Os documentos analisados foram encontrados nos arquivos das escolas públicas municipais, na Secretaria de Educação Municipal de Porto Alegre e nos sites da Prefeitura Municipal e, conforme eram analisados, verificou-se os nomes dos principais agentes que fizeram parte da construção destes documentos e assim, procurou-se estas pessoas para a realização das entrevistas. Do mesmo modo, nas entrevistas surgiam novos nomes que foram contactados e contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Hermenêutica de Profundidade

De acordo com Strecker e Schnelle (1997, p. 179) "a*l definir la hermenéutica como 'arte de la comprensión' y como disciplina filológica, Schleiermacher consigue superar la distinción entre la hermenéutica sacra y la hermenéutica profana"*[1]. Assim, a Hermenêutica de Profundidade, segundo Thompson (2011, p. 33):

> Ao mesmo tempo em que a tradição da hermenêutica pode chamar nossa atenção para essas e outras condições hermenêuticas da pesquisa sócio-histórica, ela pode também nos propiciar, num nível mais concreto, algumas orientações metodológicas para pesquisa. Desenvolvo essas orientações através do que chamarei de referencial metodológico da hermenêutica de profundidade. A ideia da hermenêutica de profundidade é tirada do trabalho de Paul Ricoeur, entre outros. O valor dessa ideia é que ela nos possibilita desenvolver um referencial metodológico que está orientado para a interpretação (ou reinterpretação) de fenômenos significativos, mas em que os diferentes tipos de análise podem desempenhar papéis legitimados e que se apoiem reciprocamente.

[1] Ao definir a hermenêutica como 'arte de compreender' como disciplina filológica, Schleiermacher consegue superar a distinção entre hermenêutica sagrada e hermenêutica profana (tradução do autor).

A Hermenêutica de Profundidade, então, está embasada na interpretação dos objetos simbólicos expressos nos documentos históricos, assim como em narrativas advindas de conversas, entrevistas ou gravações. Esses símbolos são os fatos constituídos através das conjunturas que se desenvolveram na sociedade no período pesquisado, gerando o contexto histórico que está por trás da composição destes objetos simbólicos.

Nessa perspectiva, a reconstrução da história necessita de uma compreensão de modo que a reinterpretação seja realizada com base na interpretação do contexto que levou à construção dos documentos estudados. Por vezes, haverá a necessidade de o historiador sintetizar os objetos de estudo através de sua simbologia, facilitando, assim, a sua compreensão.

Assim, a pesquisa foi realizada através da interpretação dos documentos encontrados nos arquivos da biblioteca da Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, dos arquivos das escolas públicas municipais e das entrevistas com os agentes atuantes na construção da proposta pedagógica da Escola Cidadã, com o auxílio de referenciais teóricos que compõem a contextualização da sociedade porto-alegrense do período pesquisado.

Ciclos de Formação

Os ciclos de formação de Porto Alegre são identificados por Perrenoud (2004) por ciclos de aprendizagem, e constituem uma proposta de organizar a formação escolar sem que haja a ruptura anual, dando aos alunos mais tempo em uma mesma etapa escolar.

> As escolas sem programas anuais se desenvolveram em escolas experimentais ou alternativas. Alguns sistemas educacionais instauraram aqui e ali, por meio de reformas particulares, ciclos de aprendizagens plurianuais durante um tempo e, depois, voltaram às etapas anuais (Perrenoud, 2004, p. 11).

A organização curricular escolar através dos ciclos de formação constituiu-se em diversos países como uma alternativa à seriação dos anos escolares assim, todo o processo de ensino passa a ser uma etapa ampliada e com qualidades distintas da usual.

> A reorganização temporal da escola em ciclos se insere em um processo de reavaliação pelo qual a escola de ensino fundamental passa em vários países, incluindo tanto países latino-americanos quanto os Estados Unidos e países europeus, entre eles Portugal, Espanha e França (Lima, 2000, p. 3).

Essa reorganização dos tempos escolares precisa ser elaborada de forma conjunta entre estudos científicos, em consonância com os documentos escolares oficiais que regem as estruturas de ensino da educação básica e discussão com profissionais que atuam no campo educacional, professores e pesquisadores da área, para que se consiga desenvolver objetivos que gostariam de alcançar através desta reestruturação.

> Consequentemente, um certo número de problemas surge em larga escala e, portanto, em termos renovados. Não se trata mais de inventar uma organização atípica em uma escola alternativa, mas de conceber uma organização em ciclos para a totalidade do ensino fundamental, até mesmo para a totalidade da escolaridade de base (Perrenoud,2004, p.11).

Parte dos problemas da educação básica em diversas regiões do planeta estão relacionados com a desatualização das estruturas educacionais, que foram formadas no passado e que não evoluíram em conjunto com a sociedade. Assim, precisa-se repensar o contexto escolar, alterando a estrutura pedagógica para que a atual e as novas gerações tenham a oportunidade de vivenciar experiências que condizem com o seu contexto, diminuindo o desinteresse pela educação, que, em parte, gera evasão e fracasso escolar. Essa deve ser uma construção coletiva entre administração pública, professores e comunidade escolar, para que se consiga elaborar um currículo que rompa com a estrutura tradicional de ensino e abranja as necessidades da população.

O Ensino de Matemática no Primeiro Ciclo da Escola Cidadã

Para que se possa obter melhor entendimento do processo educacional, é necessário entender o contexto que gerou as alterações na forma de se trabalhar a Matemática. Dentre os documentos analisados estão: leis, regulamentações, decretos, documentos escolares e entrevistas e a análise do contexto político de cada período no processo de ensino e aprendizagem das escolas públicas municipais.

Nos anos 1990, especificamente o ano de 1995, foi posto em prática a construção de um plano de trabalho, que mais tarde virou a base da proposta pedagógica da Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre – SMED, registrado e publicado no Caderno Pedagógico nº 9 (Scherer, 2013). Neste plano de trabalho consta a organização das áreas do conhecimento, entre elas a Matemática. Neste primeiro documento, no Primeiro Ciclo não há uma definição de quais conteúdos de Matemática devem ser trabalhados dentro da proposta dos Ciclos de Formação, porém, é possível observar no plano de trabalho do ciclo, a indicação do que está sendo trabalhado em Matemática pelos professores. A organização elaborada em 1995 foi estruturada em 3 (três) ciclos (A, B e C), cada um contendo três anos (A10, A20, A30, B10, B20, B30, C10, C20, C30).

Nesta proposta de ensino, não há uma relação do desenvolvimento de conceitos matemáticos pré-estabelecidos no plano de estudos do Regimento Padrão. Pois acreditava-se na liberdade dos professores construírem seus planos de trabalho de maneira interdisciplinar e a Matemática surgiria em meio a atividades de outras disciplinas dentro do estudo elaborado a partir da pesquisa socioantropológica realizada junto à comunidade escolar (Azevedo, 2007).

O processo educacional, então, era pensado e planejado de forma conjunta. Poderia ser que professores de outros ciclos auxiliassem nesta construção. E isso apareceu nas falas dos entrevistados, onde evidenciaram que a Escola Cidadã era constituída com base na coletividade, onde os professores planejavam as ações pedagógicas a partir do interesse e da necessidade de sua comunidade escolar. O planejamento coletivo era fundamental para encontrar um caminho que abrangesse a Matemática para a vida em meio à Matemática dos programas escolares.

Na proposta dos Ciclos de Formação foi discutida a questão da Matemática amplamente nas formações internas (das escolas) e nas externas (promovidas pela SMED). Constatou-se que era preciso contrabalançar a Matemática trabalhada para atender a perspectivas da comunidade escolar, vinculada aos anseios encontrados na pesquisa socioantropológica, com a Matemática dos programas escolares pré-estabelecidos.

> Refletir sobre a contribuição da Matemática na escola por Ciclos de Formação é pensá-la profundamente articulada ao cotidiano, não havendo, portanto, separação entre a Matemática da vida e

> a Matemática dos bancos escolares. Uma deve estar a serviço da outra. A ordem não importa. É fundamental pensar um currículo articulado e a forma como a escola vem cumprindo e construindo o seu papel social na formação de um sujeito crítico e capaz de propor alternativas para melhoria do espaço em que vive (Eckhardt; Santos, 2004, 68).

No Brasil, o Primeiro Grau era composto de oito anos, enquanto a rede de Porto Alegre criou um sistema de nove anos, então o primeiro ano das escolas públicas desta rede municipal correspondia ao último ano da Educação Infantil. Por isso, os conteúdos de Matemática abordados eram referentes à seriação, classificação e conhecimento de figuras geométricas. De acordo com os documentos oficiais, as atividades eram desenvolvidas através de ações lúdicas por meio de atividades interdisciplinares.

Sendo assim, professores deste ciclo propuseram o trabalho de sistema monetário através das temáticas seguintes: salários, pesquisa de preços no comércio da comunidade escolar, valores gastos na festa junina escolar, construção de um minimercado na sala de aula, comparação entre o modo de vida das diversas classes sociais, troca de cartas entre as turmas e produção de textos coletivos. Trabalhou-se, também, com saídas de campo ao Mercado Público Municipal. Toda essa abordagem foi a proposta de trabalho para a área da Matemática. Torna-se evidente a interdisciplinaridade com a disciplina de Língua Portuguesa, podendo até dizer que houve integração com a área sócio-histórica na questão geográfica. Considera-se que, mesmo não havendo uma programação oficial de conteúdos de Matemática, não significa que o professor não está trabalhando esta disciplina. Existe o entendimento de realizar o trabalho pedagógico sem que haja a formalização dos conteúdos de maneira explícita.

> Quando mencionamos que devemos trazer as vivências dos alunos para sala de aula e, a partir delas, construir novos conhecimentos que tenham significado, propomos uma ruptura com a linearidade dos conteúdos matemáticos previamente estabelecidos. Não estamos dizendo com isto que não os tenhamos que ensinar. Esta ruptura proporciona aos alunos e professores outra visão de sujeito numa perspectiva transformadora e, principalmente, leva o professor a superar sua própria concepção de ensino e de aprendizagem, pois não queremos um processo de colonização da cultura dominante sobre a cultura das classes populares (Eckhardt; Santos, 2004, p. 69).

Já para o fim deste Primeiro Ciclo, no seu Terceiro ano, os conteúdos de Matemática trabalhados estavam vinculados às escalas dos mapas e planificação das áreas territoriais.

Conforme a proposta da Escola Cidadã, as atividades desenvolvidas são elaboradas de maneira interdisciplinar. Entretanto, a Matemática no Terceiro Ano do Primeiro Ciclo ficou sem registro oficial nos planos de trabalho, embora houvesse o entendimento de que a Matemática estivesse sendo trabalhada a partir da planificação dos mapas, assim como no estudo do espaço da sala de aula e da escola, pois se tratava de atividades relacionadas à geometria métrica e ao trabalho de proporcionalidade quando ao serem abordadas as escalas dos mapas.

Considerações finais

A intenção da SMED era diminuir os índices de evasão e de múltipla repetência. Desse modo, chegaram a uma proposta na qual as escolas públicas municipais foram integradas de vez com os moradores do seu entorno, pois as aulas eram planejadas conjuntamente entre os professores de forma interdisciplinar a partir de uma pesquisa socioantropológica realizada junto à comunidade, dessa forma nasceu a Escola Cidadã organizada por Ciclos de Formação.

Ao retratar a história do Ensino de Matemática das Escolas Públicas Municipais de Porto Alegre entre 1995 e 2019, foi possível estabelecer relações entre os conteúdos ensinados e as legislações vigentes que norteavam a educação nacional e municipal. Salienta-se que, através dos registros encontrados nos programas de ensino, nos referenciais pedagógicos e nos planos de estudos, em conjunto com as falas dos entrevistados, foi possível identificar os movimentos da educação que influenciaram a prática docente em sala de aula. Constatamos, enfim que a Matemática ensinada no primeiro ciclo correspondia a seriação e classificação, quatro operações básicas e geometria plana, por vezes a Matemática não compunha uma área do conhecimento nos planos de estudos, mas aparecia nos planos de trabalho das escolas de forma interdisciplinar, o que auxiliou em um entendimento desta disciplina, pois era priorizado ensino através de atividades práticas por conta da metodologia educacional proposta pela organização dos Ciclos de Formação.

Por fim, através desta reorganização foi possível estabelecer dois fatores relevantes: a manutenção do aluno na escola e a criação dos Ciclos de Formação com a duração de nove anos, antes da vigência nacional. Se o objetivo era manter o aluno na escola, a administração popular criou esse mecanismo de obrigar a matrícula do estudante no primeiro ano do primeiro ciclo aos seis anos de idade, tendo um ano a mais no período até então denominado de Primeiro Grau. Essa proposta, que fora inovadora, contribuiu muito para a evolução da educação da rede municipal de Porto Alegre, auxiliando nos desenvolvimentos dos estudantes das escolas presentes nas comunidades carentes desta grande cidade brasileira.

Referências e bibliografia

Azevedo, J. C. (2007). *Reconversão cultural da escola: mercoescola e escola cidadã*. Porto Alegre: Sulina.

Eckhardt, C. A.; Santos, C. I. C dos. (2004). A Matemática nas escolas por Ciclo de Formação: uma reflexão histórica do processo. *Educação Matemática em Revista*. Porto Alegre, dezembro, p. 67-79.

Lima, E. S. (2000). *Ciclos de Formação: uma reorganização do tempo escolar*. São Paulo: Sobradinho 107 Editora.

Perrenoud, P. (2004). *Os ciclos de aprendizagem: um caminho para combater o fracasso escolar*. Porto Alegre: Artmed.

Scherer, R. M. (2013). Ciclos de formação na EMEF Vila Monte Cristo: vestígios de uma história. In: MOLL, J. *Os tempos da vida nos tempos da escola: construindo possibilidades.* Porto Alegre: Penso.

Strecker, G.; Schnelle, U. (1997). *Introducción a la exégesis del Nuevo Testamento.* Salamanca: Sigueme.

Thompson, J. B. (2011). *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* 9. Petrópolis: Vozes.

Prácticas Asociadas a la Solución del Problema de la Tangencia. Herramienta para la Formación de Profesores de Matemáticas

Jhon Helver **Bello** Chavez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhbelloc@udistrital.edu.co
Alberto **Forero** Poveda
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
aforerop@udistrital.edu.co

Resumen

Este taller pretende desarrollar un análisis del cambio de práctica vinculada a diferentes soluciones de un problema histórico, la tangente a una curva en un punto. Las soluciones a los problemas, los objetos matemáticos y los conceptos asociados a la solución, se enfocan en una forma de hacer matemáticas, la cual impone maneras de percibir el rigor, la validez y la validación. En este sentido, el análisis de la práctica por parte de quien enseña matemáticas permite vislumbrar diferentes escenarios cognitivos detrás del abordaje de una situación, el cual incluye tratamientos de las representaciones, los diagramas, el símbolo, el lenguaje matemático, entre otros. Se propone que, como parte de la formación de los profesores de matemáticas, estos diferentes estados del conocimiento sean reflexionados, a partir de las herramientas conceptuales que definen la práctica matemática que se aborde.

Palabras clave: Historia de la Matemática; Tangencia; Práctica Matemática; Formación de Profesores; Resolución de problemas.

Algunas ideas sobre la importancia del análisis de la práctica matemática en educación matemática

Entendemos las matemáticas como una producción que realizan los humanos en comunidades y culturas determinadas, compartiendo problemas y creencias de un momento histórico y sobre la base de capacidades biológicas y cognitivas (Löwe, 2016; Ferreiros, 2016). En este sentido, creemos que las matemáticas son consensos de la comunidad científica sobre un producto construido en un sistema de producción de conocimiento, ese procedimiento es la cuestión de indagación de la práctica, la cual reconocemos con las dificultades propias de una práctica social, la cual se establece y se modifica a través del tiempo y la cultura (Ferreiros, 2016). El ejercicio social del conocimiento no puede analizarse sólo en sus condiciones objetivas; se necesita considerar a los agentes de las prácticas en su proceso y en su sistema de producción. Se requiere "rescatar la producción no en cuanto individuo sino como agente socializado, es decir, de aprehenderlo a través de aquellos elementos objetivos que son producto de lo social" (Gutiérrez, 2005, p. 16).

Siendo así, a partir de los problemas y su tratamiento podemos indagar las condiciones de la práctica que permiten consolidar una solución parcial o total de un problema dado. En la práctica este tipo de análisis permiten identificar las ideas que acondicionan y posibilitan una solución. La forma como se soluciona una situación es una muestra del estado de conocimiento en una época, por lo tanto, en el estudio de varias soluciones del mismo problema nos interesa analizar el cambio en: los ideales, las justificaciones, las herramientas, los procesos y los procedimientos con que se aborda el problema.

En consecuencia, pero en el sentido de la formación del profesor, este taller indaga el hecho que, dado un problema cuya solución remite a la tangente en un punto los participantes se aproximan más a las maneras como el problema se solucionó en una de las prácticas estudiadas. Es posible que algunos criterios o herramientas hayan sido sustituidos por aplicaciones o programas fundamentados en artefactos tecnológicos, sin embargo, los modelos de razonamiento y argumentación, las hipótesis y el lenguaje que se exponen para producir una solución se ubican en una práctica específica. El producto de nuestro saber y conocimiento se construye en el aprendizaje de una práctica matemática, lo que nos lleva a solucionar una situación que es problémica, en el campo en que se desarrolla una de las prácticas conocidas.

A continuación, teniendo en cuenta la perspectiva que orientará este taller, expondremos consideraciones generales frente a tres prácticas matemáticas vinculadas al abordaje, tratamiento y resolución del problema de tangencia a una curva. La primera, vinculada a las consideraciones en la Grecia antigua, la segunda, vinculada al tratamiento cartesiano y la tercera, desde la fundamentación del Cálculo, en la perspectiva de Fermat, Newton y Leibniz.

Práctica en la Grecia Antigua

En el texto Metafísica, Aristóteles distingue a las Matemáticas como un género de ciencia que estudia los aspectos cuantitativos del ser, sin atender a su movimiento físico, aspecto fundamental en la comprensión inicial de la práctica matemática en discursos como los de Euclides y Apolonio, en el sentido de que, según Sánchez (2017), los matemáticos focalizan la atención en los cuerpos físicos, pero no en cuanto que están en movimiento, sino en cuanto que son cuerpos o sólidos (p. 50). Existen diversos agentes vinculados a la práctica matemática en la Grecia antigua, fundamentales en la comprensión epistémica de las Matemáticas, que nos permite, por ejemplo, explorar perspectivas asociadas al problema de la tangencia en la antigüedad.

En este sentido, una de las caracterizaciones del problema de tangencia en la Grecia antigua se encuentra asociada a la práctica matemática emergente de los discursos y perspectivas presentes en los trabajos de Euclides y Apolonio, quienes coincidían, entre otros, en formas de actuación y comprensión frente a diversos problemas geométricos, aspecto que pretendemos fundamentar en el presente texto. Frente a los agentes principales en la práctica matemática que se enfrenta al problema de la tangencia en Euclides y Apolonio, podemos indicar que su génesis se concentra en la primigenia de la noción de curva, desde su caracterización hasta sus propiedades y relaciones emergentes, principalmente desde el estudio y análisis de las secciones cónicas. En este contexto, la idea de tangencia se manifiesta cuando una recta "toca a la circunferencia y siendo prolongada no corta a la circunferencia" (Euclides, Libro III), perspectiva que continúa Apolonio para la caracterización de una recta tangente a una sección cónica.

Esta perspectiva estática de la tangencia, se manifiesta en diferentes idealizaciones, por un lado, desde la caracterización de las propiedades que se definen al trazar una recta tangente a una curva, por ejemplo, cuando Euclides se refiere a la visión de tocar, pero no cortar, en su proposición 16 del libro III, "La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia…"(p.125). Perspectiva que fundamenta las consideraciones frente a la curva, el espacio y la tangencia en su práctica. Igualmente, Apolonio manifiesta un objetivo fundamental en la práctica vinculada a la tangencia, cuando se dispone a construir y definir diferentes relaciones geométricas emergentes de la elaboración de rectas tangentes a secciones cónicas, como lo son las relaciones entre la recta tangente, las ordenadas y los diámetros en parábolas (Fig. 1A) (Proposición 33, I, Conics), cuando establece las condiciones en las que una recta será tangente a una parábola, a partir de relaciones proporcionales sobre una extensión del diámetro y una ordenada, o entre los puntos de aplicación, los diámetros y las rectas tangentes en secciones cónicas (Fig. 1B) (Proposición 45, III, Conics), cuando se define que una de las consecuencias del trazado de una tangente a una sección cónica es la determinación de una dependencia entre la posición de los puntos de aplicación (focos) y los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es un segmento tangente.

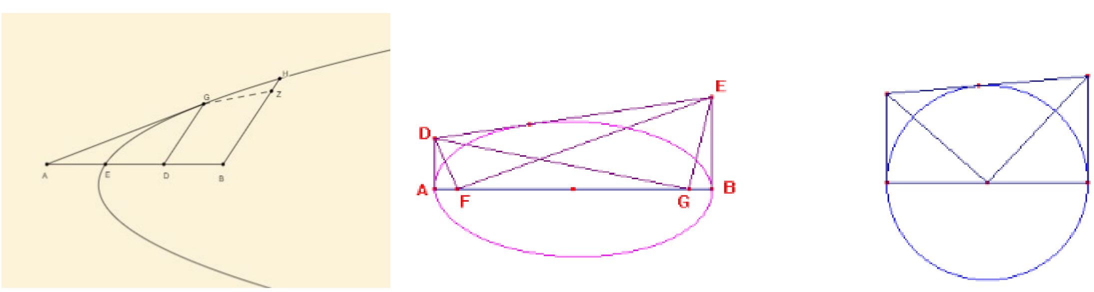


Figura 1. A. (33,I) Conics. B. (45, III) Conics

En este sentido, se puede distinguir, de manera general, una fuerte correlación entre los métodos estáticos expuestos para la determinación de relaciones y comprensiones asociadas con la tangencia a secciones cónicas, y el razonamiento visual que permite interpretar y argumentar la validez de las mismas, en la perspectiva de la abstracción del espacio y de las secciones cónicas en la definición de tangencia y en la fundamentación de la geometría en las actividades vinculadas a la práctica matemática griega en este contexto.

Solución en la práctica cartesiana

En complemento con la práctica de la antigüedad, alrededor de finales del siglo XVI e inicios de siglo XVII, el trabajo de diferentes autores, como Viete, Fermat, Clavius y en especial Descartes, permitieron la formulación de nuevas ideas sobre el rigor geométrico, el método analítico de resolución de problemas, las curvas como objetos de la geometría y la validez de la construcción geométrica realizada con instrumentos articulados, diferentes a la regla y el compás; estos fueron asuntos que permitieron ir originando el cambio en la práctica. Quizás la mayor innovación de la época fue el tratamiento de problemas por medio del método analítico, el suponer el problema resuelto para construir la ecuación que contiene la respuesta se convirtió en una forma usual de resolución de problemas. En el caso específico del problema de la tangente a una curva en un punto, el tratamiento cartesiano, incluyó el uso del método y la construcción de ecuaciones.

Se toma una línea curva CE y por C se traza la recta normal, como se muestra en la figura 2. Al tomar la recta AG de modo que los puntos de la curva se describan a partir de la recta $CM = x$ y $AM = y$, de tal manera, que sea posible construir una ecuación expresada en términos de x y y.

Dos innovaciones aparecen asociadas a esta práctica: suponer el problema resuelto, de tal manera, que lo buscado se exprese a partir de tratar de la misma manera las cantidades conocidas y desconocidas; y un diagrama que en las formas e instrumentos de esta práctica es una construcción geométrica; un modelo de la situación que ejemplifica las razones que permiten garantizar el trazo de la normal y la construcción de las ecuaciones que representan el problema.

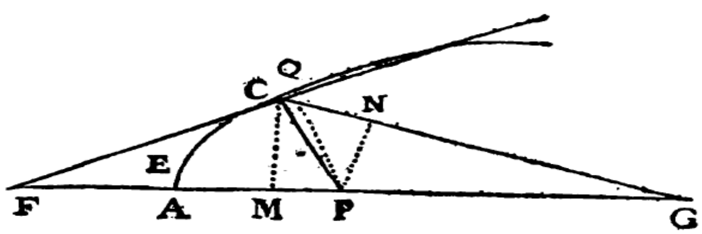


Figura 2. Problema de la tangencia en Descartes.

En esta solución ya se vislumbran consideraciones sobre la siguiente práctica, en donde se aprecia la idea de cantidades infinitamente pequeñas; pues, la idea de tangencia está ligada al encuentro de los dos puntos de corte de la recta con la curva, de tal forma, que se convierte en un punto, la tangente a un punto de la curva. Implícitamente, la técnica que se usa supone la existencia de la recta tangente a partir de la aproximación de un punto a otro. Aquí la curva se encuentra dada, se aplica el supuesto del método analítico, suponiendo que la recta tangente en un punto de la curva existe y a partir de ecuaciones se relaciona en un punto la recta y la curva.

Solución en la práctica desde el Cálculo: Fermat-Newton-Leibniz

Frente al tratamiento del problema de tangencia a curvas en la época de la Modernidad se encuentran diversos autores que lograron trabajar relaciones y actividades vinculadas a este, entre los que se tienen los trabajos y discursos asociados a Fermat, Newton y Leibniz. Las prácticas matemáticas que fundamentan el proceso de resolución de problemas en los trabajos de estos autores permiten comprender, entre otras, tres perspectivas fundamentales asociadas al problema de la tangencia, que se concentran en la actividad de simbolización, la fundamentación del análisis infinitesimal y la caracterización del movimiento continuo.

Frente a la actividad de simbolización, para Fermat fue fundamental el proceso que le permitió aplicar su método de tangentes, derivado del método de máximos y mínimos, para tramitar la heurística fundamentada en las "adigualdades", en donde, a modo de ejemplo, llega a conclusiones definidas previamente por Apolonio, pero fundamentadas desde la relación entre la actividad de simbolización y el uso de cantidades infinitesimales, que le permiten determinar que una expresión que requiere analizar para estudiar las relaciones vinculadas a la determinación de la recta tangente a la parábola viene definida por:

$$\frac{m^2x^2}{d} \approx m^2\frac{(x-y)^2}{d-y}$$

expresión que le permite a Fermat desarrollar su actividad vinculada a la determinación de tangentes y exponer simbólicamente las relaciones que definen a la parábola como una curva con condiciones geométricas específicas y así, elaborar un proceso que le permita trabajar con cantidades infinitesimales.

En este sentido, esta caracterización de las cantidades infinitesimales es otra perspectiva fundamental, que se manifiesta en el proceso de determinación de tangentes a curvas, inicialmente en los trabajos de Fermat, cuando interviene el estudio de las pendientes y el uso de un incremento E, a partir del método analítico asociado a la resolución del problema de caracterizar simbólicamente las relaciones vinculadas a la determinación de la tangente, por ejemplo, en el caso de las secciones cónicas (Figura 2a). Igualmente, Leibniz construye heurísticas vinculadas a la caracterización de la utilidad de las cantidades infinitesimales en el establecimiento de relaciones sobre la determinación de la tangente a curvas, así como de su vínculo con los problemas de cuadratura, para esto, inicialmente aborda la intervención de los infinitésimos en problemas asociados a series que representan sumas de diferencias, que le contribuye en el establecimiento de una simbología para un tratamiento de cantidades infinitesimales y así, lograr construir una estructura propia frente al método del análisis infinitesimal, por medio de uno de sus principales aportes, el establecimiento de relaciones y propiedades asociadas al problema de la tangencia por medio del triángulo característico, como se evidencia en las relaciones proporcionales asociadas al triángulo indeterminable, como un elemento fundamental en su proceso de argumentación (Figura 3b).

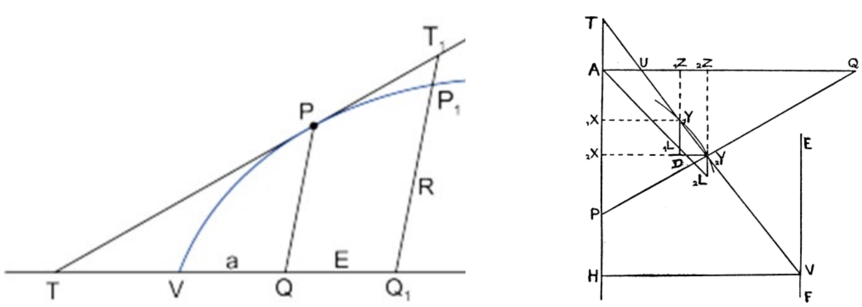


Figura 3. Perspectivas infinitesimales asociadas al problema de la tangencia en Fermat y Leibniz

En el caso de Newton, principal precursor de la perspectiva vinculada al movimiento y la filosofía natural, dos asuntos importantes en el desarrollo de las primeras ideas en la solución del problema de la tangente están vinculadas con los siguientes aspectos: la búsqueda de un método único para la solución del problema, basado en cantidades infinitamente pequeñas, que dieron inicio a la idea de fluxión, y, la generación de un método para las curvas mecánicas, basado en ideas cinemáticas. En ambos casos, el abordaje del problema se realiza a partir de la idea de movimiento y el uso del método analítico de resolución de problemas.

Dos procedimientos para la solución de este problema se establecen en los diagramas de la figura 4:

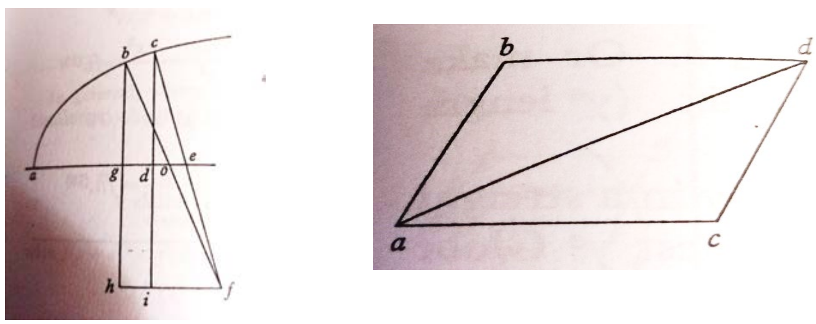


Figura 4. Diagrama para curvas algebraicas y para curvas mecánicas

la aproximación de la recta secante a la recta tangente propuesto para curvas algebraicas (figura, 4a) y la idea vectorial de construcción de la tangente a partir de la descomposición del movimiento en dos especies de vectores que permiten construir la razón que genera la tangente en un punto, para curvas mecánicas (figura, 4b). En ambos casos, la idea de movimiento es fundamental para la comprensión de la práctica matemática que se encuentra antes de la formalización.

Conclusiones

En términos del análisis sobre los discursos vinculados al abordaje, tratamiento y resolución del problema de la tangencia en diferentes prácticas, podemos comprender que la heurística vinculada al proceso en cada discurso, está directamente relacionada con los ideales, las justificaciones y las herramientas que fundamentan la práctica en cada etapa o momento histórico, así, es posible centrar la atención en las relaciones geométricas o en el método analítico que conecta las relaciones geométricas y la simbología o en la perspectiva infinitesimal de las relaciones geométricas o en la estructuración de métodos generales para el tratamiento de situaciones asociadas a la tangencia, pues en todos los casos es posible encontrar actividades matemáticas que contribuyen en el proceso para potenciar el desarrollo de pensamiento matemático de un estudiante, pues éstas perspectivas se fundamentan en todos los elementos que se pueden intervenir a la hora de solucionar un problema en Matemáticas.

De esta forma, analizar la práctica matemática, como un instrumento que permite construir un estado de conocimiento, implica considerar aspectos como los signos, símbolos, diagramas y esquemas que están directamente relacionados con el discurso de una época. En ese sentido, el profesor puede recrear elementos de una práctica en el aula, e ir diseñando con el fin de transformar y fortalecer significados asociados a la idea de tangencia.

La perspectiva del análisis de curvas desde los instrumentos mecánicos es una posibilidad que permite establecer conexiones entre práctica analítica, estática e infinitesimal en la caracterización del problema de la tangencia. Aspecto que se desarrolla en el taller. La diversidad de perspectivas de solución a un mismo problema son ejemplo de diferentes prácticas y posturas sobre las matemáticas, las cuales pueden ser aprovechadas por el profesor para determinar diferentes estados y transformaciones de las matemáticas que practican los aprendices.

Referencias y bibliografía

Apolonio, D. (1952). Conics. En *Britannica Great Books 11* (C. Taliaferro, Trad., págs. 597-804). London: Encyclopedia Britannica, INC.

Descartes, R. (1954). *The Geometry.* (D. Smith, & M. Latham, Trads.) New York: Dover Publication.

Euclides. (2007). *Elementos I.* (M. Puertas Castaños, Trad.) Barcelona: Gredos.

Ferreiros, J. (2016). *Mathematical Knowlegde and the Interplay of Practice.* Princeton: Princeton University Press.

Gutierrez, A. (2005). *Las prácticas sociales: una introducción a Pierre Bourdieu* . Buenos Aires : Ferreira Editor.

Löwe, B. (2016). Philosophy or not? The study of Cultures and Practices of Mathematics. En S. Ju, B. Löwe, T. Müller, & Y. Xie (Edits.), *Cultures of Mathematics and Logic. Selected Papers from the Conference in Guangzhou, China, November 9-12, 2012* (págs. 23-42). Switzerland: birkhauser.

Produções didáticas de Aritmética das Irmãs Franciscanas do Colégio São José de São Leopoldo/RS para o público feminino no final do século XIX

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br
Silvio Luiz Martins **Britto**
Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT
Brasil
silviobritto@faccat.br

Resumo

O artigo apresenta livros de aritmética produzidos pelas professoras do Colégio São José, de São Leopoldo, Rio Grande do Sul, no final do século XIX, para o público feminino. Trata-se de um estudo qualitativo e documental, amparado na história cultural. As autoras propunham algo prático e necessário, que visava facilitar às alunas do Colégio o conhecimento de uma ciência nem sempre atrativa para elas. As obras abordam diferentes temas, iniciando com operações fundamentais, redução de número complexos e incomplexos, frações decimais, frações ordinárias, razões e proporções, regra de três, juros, regra de desconto, companhia, mistura e liga, potência, raiz e geometria. A maioria das atividades são problemas, para serem desenvolvidos de forma oral e por escrito, com foco no processo de repetição. Com base no exposto, constata-se que a metodologia utilizada pelas Irmãs nos livros visava despertar nas alunas o desejo de alcançar o conhecimento matemático e sua aplicabilidade.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; História cultural; Colégio São José de São Leopoldo; Livros de aritmética; Protagonismo feminino.

Introdução

O papel das mulheres na construção da sociedade e da história do Rio Grande do Sul (RS), na multiplicidade de talentos e áreas de atuação, merece ser resgatada e contada. Particularmente, o protagonismo feminino no ensino da Matemática no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS nos séculos XIX e XX, constitui tema de uma investigação, financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), em execução pelos autores deste artigo. Ressalta-se que a Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil completou 150 anos de missão religiosa e educacional no RS, em abril de 2022.

Assim, o objetivo deste artigo é apresentar três livros de aritmética, produzidos pelas Professoras do Colégio São José das Irmãs Franciscanas, de São Leopoldo/RS. Possui como questão norteadora a contribuição das professoras (Irmãs) do Colégio São José para o ensino de aritmética ao público feminino, no final do século XIX.

As Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade chegaram a São Leopoldo em 1872. Os livros por elas editados, desde a década de 1880, foram impressos em português e nesses defende-se a ideia de um ensino que relacione a teoria com situações práticas, evidenciando-se a aplicação desses conteúdos através de muitos exercícios e problemas. Observa-se uma forte tendência das autoras para o ensino intuitivo, em voga nesse período, principalmente na Alemanha, pois essas professoras (Irmãs), todas de origem germânica, tinham como principal referência os compêndios alemães.

Nesse contexto, realiza-se uma investigação com abordagem qualitativa, por meio de análise documental, e o aporte metodológico está fundamentado na história cultural, a partir da perspectiva de Chartier (1990). Para investigar os livros de aritmética foram realizadas visitas ao instituto Anchietano de Pesquisa (Unisinos), em São Leopoldo/RS, e ao Memorial das Irmãs Franciscanas, onde se encontram diferentes edições das referidas obras.

Além desta introdução, o artigo discorre sobre a história cultural, conta um pouco da história da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil e do Colégio São José de São Leopoldo/RS, apresenta uma breve análise de livros de aritmética e as considerações finais deste estudo.

A história cultural como aporte teórico-metodológico

A história cultural (*Kulturgeschichte*) ocupa-se da pesquisa e das representações de determinada cultura em dado período e lugar, tais como: relações familiares, língua, tradições, religião, arte e ciências. Segundo Chartier (1990), uma questão desafiadora para a história cultural é o uso que as pessoas fazem dos objetos que lhes são distribuídos ou dos modelos que lhes são impostos, uma vez que há sempre uma prática diferenciada na apropriação dos objetos colocados em circulação. Nessa perspectiva, pode-se dizer que a imprensa pedagógica, aqui representada por obras de Aritmética, foi um veículo para circulação de ideias que traduziam valores e comportamentos que se desejavam ensinar por meio de uma proposta pedagógica de forma prática e útil junto as alunas do Colégio São José, de São Leopoldo/RS.

Conforme Chartier (1990), as noções complementares de práticas e representações são úteis para examinar os objetos culturais produzidos, os sujeitos produtores e receptores de cultura, os processos que envolvem a produção e a difusão cultural, os sistemas que dão suporte a esses processos e sujeitos e as normas a que se conformam as sociedades por meio da consolidação de seus costumes. Para a produção dos livros de Aritmética foram movimentadas determinadas práticas culturais e também representações, sem contar que as obras, depois de produzidas, difundiam novas representações e contribuíram para a produção de novas práticas.

Para Chartier (1990), as práticas culturais são tanto de ordem autoral (modos de escrever, pensar ou expor o que será escrito), como editoriais (reunir o que foi escrito para torná-lo material de estudos), ou ainda artesanais (a elaboração do livro na sua materialidade). Da mesma forma, quando um autor se põe a escrever uma obra, ele se conforma a determinadas representações do que deve ser um livro, a certas representações concernentes aos temas que ele abordará. As atividades propostas poderão ser realizadas de modo individual ou coletivo, e o seu conteúdo poderá ser imposto ou rediscutido.

A partir do desenvolvimento das atividades e da difusão da obra, podem ser geradas inúmeras representações novas sobre o tema – aqui evidenciando o ensino de Matemática, de modo prático e utilitário, que poderá passar a fazer parte das representações coletivas. De acordo com Chartier (1990, p. 17), a história cultural tem por principal objeto identificar o modo como "em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade cultural é construída, pensada e dada a ler, por diferentes grupos sociais".

Congregação das Irmãs Franciscanas e o Colégio São José de São Leopoldo/RS

As Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã chegaram ao Brasil, em 2 de abril de 1872, instalando-se no município de São Leopoldo, estado do RS, com o objetivo de contribuir para a educação de crianças e jovens, em sua maioria filhas de imigrantes alemães. Seu preparo e experiência pedagógica, originaram um convite do missionário jesuíta alemão Padre Guilherme Feldhaus, superior da missão brasileira dos jesuítas no RS, o que foi reforçado pela "ameaça de desencadear na Alemanha um período de grandes dificuldades para a igreja católica: era o *Kulturkampf* (luta pela cultura) à vista, que traria no seu bojo uma perseguição ferrenha às ordens e congregações religiosas ensinantes" (Flesch, 1993, p. 40).

Com a chegada a São Leopoldo/RS, as Irmãs fundaram o Colégio São José[1] no ano de 1872, sua primeira escola brasileira. "No dia 5 de abril, 1ª sexta feira do mês, começaram as aulas com 23 alunas de 7 a 13 anos, número que foi crescendo de dia para dia" (Flesch, 1993, p. 45). Ainda de acordo com Rupolo (2001, p. 91):

> Inicialmente, as escolas franciscanas caracterizavam-se por um sistema tradicional, com rigor disciplinar, o regime de internato que, além, das disciplinas curriculares, pelo ensino de tempo

[1] As seis Irmãs que partiram de Kapellen, Alemanha, no dia 9 de fevereiro de 1872, acompanhadas pela Superiora Geral, foram até Marselha, na França, onde embarcaram rumo ao Brasil. A viagem decorreu bem até o Rio de Janeiro, onde fizeram baldeação para o navio Calderon. No trajeto entre o Rio e Porto Alegre, o leme da embarcação quebrou e se houvesse uma tempestade, as ondas do mar tragariam o navio. No entanto, no dia 19 de março – dia de São José – apareceu um navio que rebocou o Calderon de volta ao Rio de Janeiro. Com a graça alcançada, as Irmãs prometeram dar ao patrocínio de São José a primeira escola que haveriam de fundar no Brasil (Flesch, 1993).

integral, oferecia estudos complementares de teatro, música, canto, pintura... A maioria das escolas oferecia os cursos primário e ginasial e, nas localidades com maior número de habitantes, havia a formação de professoras primárias.

As Irmãs do Colégio São José também foram pioneiras na elaboração e compilação de livros didáticos para suas escolas e na formação de professoras. De acordo com Rupolo (2001, p. 92), "as escolas franciscanas possuíam uma prática experienciada do ensino vinculado à realidade, ou seja, uma educação para a vida". Isso já era evidenciado nos estudos realizados por Rambo (1994), quando afirmava que, na época, a função da escola era equipar os alunos com o ferramental mais indispensável para serem capazes de competir com êxito, no futuro, no meio social em que nasceram e cresceram.

No ano de 1884, o Colégio São José, localizado ao lado da Igreja Matriz de São Leopoldo, começou a receber alunas do Rio de Janeiro, São Paulo, Paraná, Santa Catarina, Uruguai e Argentina, de modo que, em poucos anos, a escola já contava com alunas internas e externas. Durante seus primeiros 50 anos, o Colégio São José funcionou às margens do rio dos Sinos, ao lado do Ginásio Nossa Senhora da Conceição, dos padres jesuítas.

De acordo com Flesch (1993), em 1923, ocorreu a mudança das margens do rio dos Sinos para a Colina do Monte Alverne, onde o Colégio São José está localizado atualmente. Até o ano de 1930, o Colégio São José mantinha o curso Primário e de Música, sendo que dessa data em diante até 1946, por convênio estadual, passou a ministrar o curso Complementar. Já em 1942, passa a funcionar o curso Ginasial Secundário no estabelecimento e, a partir de 1948, o curso Colegial Normal. De 1958 em diante, passa a oferecer os cursos Colegial Secundário Científico e Clássico (Flesch, 1993). Atualmente, o Colégio São José recebe em torno de 500 alunos, desde a Educação Infantil ao Ensino Médio.

As Irmãs Franciscanas fundaram escolas em importantes municípios do RS, tais como Porto Alegre, São Leopoldo, Santa Cruz do Sul e Santa Maria. Essas escolas seguiam os princípios da Madre Madalena Damen[2] e sua unidade era marcada pelo pertencimento à Província, com respeito especial pela superiora provincial, que fazia visitas periódicas a cada unidade de ensino, para supervisionar o andamento do processo pedagógico de acordo com as determinações provinciais. "Na vida de Madalena Damen os valores não foram teorizados; a educação e a pedagogia tinham expressão prática, na convivência" (Rupolo, 2001, p. 93).

Ressalta-se que, em abril de 2022, a Congregação das Irmãs Franciscanas completou 150 anos de ação missionária e educacional no Brasil, sendo mais uma razão para se resgatar suas contribuições na formação de crianças e jovens, especialmente para o público feminino.

Breve análise da coleção de livros *Arithmetica Elementar Prática*

Os livros *Arithmetica Elementar Prática: partes I, II e III,* das professoras do Colégio São José das Irmãs Franciscanas, apresentam, conforme a terceira edição da *Arithmética Elementar Prática: parte III,* uma coleção de numerosos exercícios e problemas, metodicamente

[2] Maria Catarina Damen nasceu em 19 de novembro de 1787, na Holanda. Em 1817, Catarina emite os votos como franciscana. No dia 10 de maio de 1835, junto com outras três companheiras, funda a Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã. Catarina passa, então, a chamar-se Madre Madalena (Flesch, 1993).

compilados. Nessa edição do livro, aparece uma nota de advertência para a primeira edição, com os objetivos do Colégio quanto à edição de livros, em especial no campo da Aritmética.

> Deve-se confessar que os livros existentes não contêm senão muitas regras e explicações applicadas a poucos exemplos. A teoria será bem depressa esquecida se não fôr seguida de numerosos e variados exercícios e problemas para serem resolvidos arithmeticamente. Para aprender a arte da música é preciso que o discípulo faça diariamente muitos exercícios; haverá outro meio para aprender praticamente a arithmetica? Dir-se-há que o professor poderá com o auxílio de um livro ministrar muitos exercícios a seus discípulos. Devemos observar ainda que esse livrinho é destinado ao uso de meninas, por isso limitamo-nos ao mais necessário para a vida prática, deixando ao arbítrio das professoras uma explicação mais ou menos especial das poucas regas dadas. (Professoras do Collegio São José, 1900, p. 3).[3]

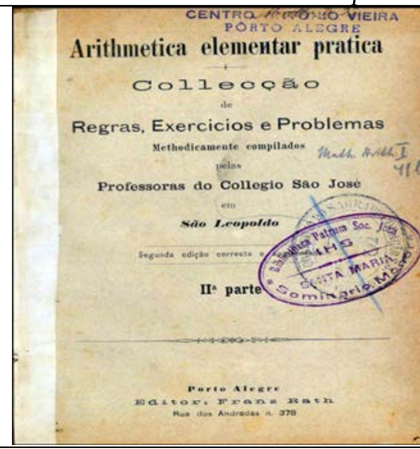
O livro *Arithmetica Elementar Prática: parte I,* não foi localizado, porém, segundo o livro *Arithmética Elementar Prática: parte III,* de 1900, na página 177 encontra-se o índice das matérias trabalhadas em cada parte. A parte I é dividida em cinco capítulos, destinado ao ensino preparatório elementar, com conhecimentos iniciais de Aritmética. O Quadro 1 apresenta os conteúdos trabalhados na *Arithmética Elementar Prática: parte I.*

Capítulo	*Conteúdos abordados*
Capítulo I	Exercícios sobre os números de 1 a 10.
Capítulo II	Exercícios sobre os números de 1 a 20.
Capítulo III	Exercícios sobre os números de 1 a 100.
Capítulo IV	Exercícios sobre os números de 1 a 1000.
Capítulo V	Exercícios sobre os números de 1 a 100000.

Quadro 1. Conteúdos da Arithmética Elementar Prática: parte I.
Fonte: Professoras do Collegio São José, 1900.

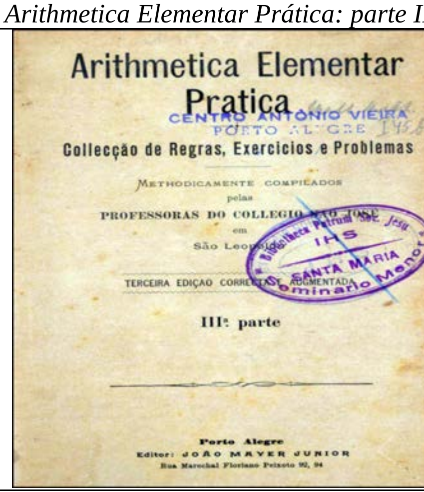
Já o livro *Arithmetica Elementar Prática: parte II,* editado em 1890 pela Editora Franz Rath (Porto Alegre), tem 54 páginas divididas em três capítulos. A edição analisada é a segunda correta e alterada, datada de 1890. Não foi localizada a primeira edição, porém, verificou-se que, além da segunda datada de 1890, a terceira edição é do ano de 1902. Portanto, pode-se supor que a primeira edição tenha surgido no alvorecer da década de oitenta no século XIX. O Quadro 2 traz a capa dessa edição, capítulos e conteúdos trabalhados.

[3] A citação mantém sua ortografia original.

Capítulos	*Conteúdos abordados*	*Arithmetica Elementar Prática: parte II*
Capítulo I	As quatro operações.	
Capítulo II	Redução dos números complexos e incomplexos e as quatro operações.	
Capítulo III	Frações decimais.	

Quadro 2. Capítulos e conteúdos da *Arithmetica Elementar Prática: parte II.*
Fonte: Professoras do Collegio São José, 1890.

O livro *Arithmetica Elementar Prática: parte III,* editado em 1900 pela Editora João Mayer Junior (Porto Alegre), tem 177 páginas divididas em 13 capítulos. A edição analisada é a terceira correta e alterada, datada de 1900. Não foram localizadas as duas edições anteriores, porém, em nota apresentada na página quatro desse livro há registro da segunda edição datada em 12 de novembro de 1889. Logo, cogita-se que a primeira edição tenha surgido no início da década de oitenta no século XIX. O Quadro 3 ilustra a capa dessa edição, capítulos e conteúdos trabalhados.

Capítulos	*Conteúdos abordados*	*Arithmetica Elementar Prática: parte III*
Capítulo I	Frações decimais.	
Capítulo II	Números primos.	
Capítulo III	Frações ordinárias.	
Capítulo IV	Metrologia.	
Capítulo V	Razões e proporções.	
Capítulo VI	Regra de três.	
Capítulo VII	Regra de juros.	
Capítulo VIII	Regra de desconto.	
Capítulo IX	Regra de proporções e companhia.	
Capítulo X	Regra de mistura e liga.	
Capítulo XI	Potências e raízes.	
Capítulo XII	Elementos de Geometria.	
Capítulo XIII	Problemas mistos sobre todas as regras dadas.	

Quadro 3. Capítulos e conteúdos da *Arithmetica Elementar Prática: parte III.*
Fonte: Professoras do Collegio São José, 1900.

Em relação aos aspectos pedagógicos, observou-se que a coleção de livros *Arithmetica Elementar Prática,* fazem uma breve introdução do conteúdo, através de definições, regras e em alguns momentos apresentam exemplos quanto ao seu desenvolvimento, seguindo de exercícios de fixação. Posteriormente, muitas situações problemas práticos associados ao dia a dia das alunas.

Considerações finais

A edição de livros de Aritmética pelas Professoras do Colégio São José das Irmãs Franciscanas, de São Leopoldo, no final do século XIX, constitui-se um dos marcos no processo de instrução do público feminino gaúcho. Objetivando-se, inicialmente, algo útil para a vida prática das meninas do Colégio. A publicação de livros para as alunas do Colégio São José, pode ter várias explicações: inicialmente, o fato de haver pouco material em circulação e, num segundo momento, as tendências pedagógicas na Europa, onde essas autoras tiveram sua formação. Outra explicação seria o seu uso até mesmo como instrumento de evangelização.

Os livros eram direcionados ao ensino de Aritmética de forma prática e útil para as alunas do Colégio São José. As estratégias metodológicas utilizadas pelas autoras consistiam, num primeiro momento, em apresentar a teoria, seguida de regras e procedimentos de resolução. Num segundo momento, exercícios de fixação desenvolvidos oralmente, seguidos por uma coleção de exercícios repetitivos objetivando fixar a teoria. Finalizava-se com um grande número de situações problemas, ligando o conteúdo trabalhado com o dia a dia das alunas. Portanto, a proposta das autoras consistia num ensino não limitado apenas na teoria e reprodução mecânica dos conteúdos propostos, mas a teoria deveria ser guiada pela prática.

Esse estudo sobre a Aritmética nos livros das Irmãs Franciscanas do Colégio São José permitiu um adentramento numa cultura escolar, em um lugar e em um tempo determinados, contribuindo para um resgate da História da Educação Matemática no RS. Também possibilitou resgatar um pouco da história dos 150 anos de ação missionária e educacional das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no RS, particularmente no campo da Matemática.

Referências e bibliografia

Chartier, A. M. (2007). Os cadernos escolares: organizar os saberes, escrevendo-os. *Revista de Educação Pública, 16*(32), 13-33. file:///C:/Users/Usuario/AppData/Local/Temp/542-Texto%20do%20Artigo-847-1-10-20121007.pdf

Flesch, I. B. (1993). *História da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil (1872-1951).* Porto Alegre: Metrópole. v. 1.

Professoras do Collegio São José. (1890). *Arithmetica Elementar Prática – Collecção de regras, exercícios e problemas methodicamente compilados, II parte.* 2. ed. correcta e augmentada. Porto Alegre: Franz Rath.

Professoras do Collegio São José. (1900). *Arithmetica Elementar Prática – Collecção de regras, exercícios e problemas methodicamente compilados, III parte.* 3. ed. correcta e augmentada. Porto Alegre: João Mayer Junior.

Rambo, A. B. (1994). *A escola comunitária teuto-brasileira católica.* São Leopoldo: Unisinos.

Rupolo, I. (2001). Irmãs Franciscanas no Rio Grande do Sul e compromisso educacional. *Revista Vidya*, Edição Especial – 50 anos, 83-98. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/498/488

Propuesta de aprendizaje transversal y multidisciplinar a través de películas con contenido matemático de carácter histórico

José Andrés Ynoñán Jiménez.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo
Perú
aynonanj@unprg.edu.pe
Leticia Avila Mera
Bachillerato General "Ahuazotepec"
México
letifanny65@gmail.com

Resumen

La Historia de la Matemática incorporada en las aulas de clases a través de medios audiovisuales, ofrece una posibilidad de apreciar el carácter cultural en el más amplio sentido de la Matemática. Varios estudios proponen el uso de material audiovisual con fines didácticos, algunos de ellos advierten algunas precauciones a tener en cuenta. En este trabajo proponemos una metodología de carácter multidisciplinar, tomando como referencia cuatro largometrajes de corte histórico, fundamentada en las ideas críticas y constructivistas de Dewey (1989), de Brousseau (1997) y de Rezende (2008). Destacamos que se puede trascender el incorporar el cine en la clase de Matemática, ya que se puede lograr una producción no profesional de material audiovisual con intervención de estudiantes y maestros, como una forma de integrar Ciencias, Artes y Humanidades.

Palabras clave: Historia de las matemáticas; motivación; películas; transversalidad; multidisciplinariedad; aprendizaje socioemocional.

Introducción

La Matemática como disciplina cultural en el más amplio sentido, vertebra las ciencias, las artes y las humanidades (Urbaneja 2022, Fried 2018), como tal, tiene que ser concebida de igual manera en su transmisión, a pesar que los planes curriculares de los países latinoamericanos son muy restrictivos en contenidos e interrelaciones con las demás disciplinas.

En la actualidad, la UNESCO y otras instituciones académicas y culturales, están reconociendo la importancia de la Matemática de diferentes formas, entre ellas, por ejemplo a través de fechas calendáricas como el Día Internacional de las Matemáticas, el 14 de marzo, el Día de las Mujeres Matemáticas, el 12 de mayo; denominaciones de años como el Año Mundial de la Matemática, el 2000, el Año de la Biología Matemática, el 2018; otros reconocimientos se han dado a través de películas, series de televisión, documentales y otras fuentes audiovisuales.

Es menester aprovechar en las aulas de clase, tales reconocimientos que la sociedad, a través de sus instituciones le está otorgando a la matemática, donde se resalta el trabajo de muchas generaciones de personajes y sus aportaciones, que han configurado nuestro mundo actual, evidenciando el carácter humano, social, e histórico-cultural de la Matemática. Esto permitirá motivar las clases de los estudiantes, reflexionar sobre el actuar ético de los gobernantes y de la sociedad, así como formar vocaciones STEAM.

Reconocer los eventos y personajes trascendentes no solo en su contexto cultural, sino sobre todo histórico, es fundamental, como lo menciona E. T. Bell (1985, p. 54), “ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas”. Se hace uso de esta frase porque se encuentra la oportunidad para que el estudiante observe desde otra perspectiva a la matemática. Las relaciones entre la Historia de la Matemática y la Educación Matemática, han constituido un campo interdisciplinario de intensa actividad en las dos últimas décadas (Chorlay et al, 2022).

La incorporación del cine y otros medios audiovisuales en clases de Matemática ha sido abordada por varios autores (Rezende 2008, Beltrán Pellicer y Asti 2014, Sorando 2021, Emmer 2005, Lemes 2015), destacando el carácter visual, motivacional y emocional; además de su relación con la Historia, la Literatura y otras artes. A la par que existe abundante material didáctico audiovisual disponible, existen trabajos que resaltan el uso de estos medios en la enseñanza de las ciencias y la matemática, que proponen ejemplos y metodologías concretas (Rezende, 2008; Bessonart et al, 2018). Considerando los largometrajes, solamente una película contiene bastante información para analizar, es por ello que en este caso, se pueden trabajar según un tema específico, una idea o una particularidad cultural como el género, la discriminación, la religión, etc.

Para Sorando (2021), “Dar entrada al cine en la clase de Matemáticas, además de ser un factor motivador, rompe prejuicios sobre la aspereza y lejanía del conocimiento matemático; lo vincula al universo de las aventuras y las emociones”. Por su parte, para el ministerio de Ciencia e Innovación en España (2021), Marta Macho refiere: “Entrar a las matemáticas a través del cine es una herramienta extraordinaria, los profesores pueden utilizar escenas de cine en donde el alumnado intenta analizar ¿qué ha ocurrido y por qué ha ocurrido?” Ella nos hace hincapié que el cine como material de enseñanza, es una oportunidad para que el estudiante empiece a preguntarse el ¿por qué de las situaciones que rodean al protagonista?, ¿cómo fue desarrollando sus hipótesis?, ¿cuál fue el proceso que tuvo que realizar para poder llegar a sus teoremas? ¿A qué problemáticas sociales, emocionales, culturales, políticas, se tuvo que enfrentar? Es por ello que es interesante el análisis de películas donde los protagonistas son matemáticos.

Consideramos que las ideas de John Dewey (1859-1952), psicólogo, pedagogo y filósofo norteamericano, considerado el padre de la educación progresista norteamericana, similar a la

Escuela Activa o Escuela Nueva en Europa, junto a la constructivista Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, basada en el principio de que cada conocimiento o saber puede ser determinado por una acción (situación) entre dos o más personas, pueden converger con el uso didáctico de material audiovisual, en particular de películas.

El proceso tradicional de aprendizaje pasivo y de obediencia forzada en las aulas de clase, que genera aburrimiento, es criticado por John Dewey (1989), quien propone que se parta de alguna necesidad y del propio interés del estudiante, siempre y cuando asegure la transmisión cultural, basada en valores y buenos hábitos por parte de profesores y alumnos; considera la escuela como una institución social. Para Dewey existen tres fases por las que atraviesa el pensamiento reflexivo; parte de un estado de duda o de estar en una situación de conflicto que como consecuencia promueve la actividad del pensamiento, esto da paso a un proceso de investigación racional, con el objetivo de encontrar información que aclare la duda inicial y finalmente para llegar a una conclusión que nos dé una idea más clara y fundamentada sobre el cuestionamiento que desencadenó el proceso reflexivo.

Según la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), el profesor debe diseñar cuidadosamente la situación de modo que los estudiantes puedan actuar, reflexionar, hablar, interactuar y avanzar por iniciativa propia, creando así condiciones en las que jueguen un papel eficiente y emprendedor en el proceso de aprendizaje. Se distinguen cuatro aspectos. 1. Acción: cuando el estudiante que se enfrentan a una situación didáctica sabe qué hacer. Por lo tanto, se trata de poner en práctica el conocimiento y las estrategias adecuadas. 2. Comunicación: el compartir experiencias, ideas, dudas; es un vehículo para transformar el conocimiento implícito en explícito. 3. Validación: Es el consenso al que se llega después de analizar las ideas de todo el grupo. 4. Institucionalización: Es la síntesis lograda con intervención del profesor.

Se puede pensar que el uso de películas de contenido matemático puede hacerse sin restricciones, en ese sentido Luiz Augusto Rezende (2008), advierte de algunos problemas al tratar de usar material audiovisual en clases, y propone tres abordajes historiográficos como metodología para el uso de ellos, con una adecuada orientación por parte del Maestro, estos son Historia Factual, Historia Epistemológica e Historia Arqueológica.

Historia Factual: Descriptiva, atiende fechas, biografías, descubrimientos, tratados, doctrinas, teorías, con procedimientos reconocidos por una ciencia como “correctos”.

Historia Epistemológica: Parte del supuesto que la ciencia se desarrolla en función de una verdad y racionalidad cada vez mayores. Juzga los acontecimientos a partir de la Ciencia actual (anacronismo).

Historia Arqueológica: Cuestiona la idea del progreso de la Ciencia, interroga las condiciones de existencia de discursos, neutralizando la cuestión de la cientificidad, y analiza los saberes del pasado en su contexto.

Metodología

Nuestra propuesta incorpora las ideas de Brousseau (1996), sobre las Situaciones Didácticas, junto con los tres abordajes historiográficos propuestos por Rezende (2008), para tal fin hemos seleccionado cuatro películas con contenido matemático, de carácter histórico: Ágora (2009), El hombre que conocía el infinito (2015), Figuras ocultas (2016), y Con ganas de triunfar (1988). A continuación, describimos nuestra adaptación de estas teorías.

Acción. Ésta se da cuando el estudiante o los estudiantes que se enfrentan al análisis de las películas, ponen en práctica su conocimiento para anotar sus observaciones, la incorporación de nuevos aprendizajes, su vinculación con otras asignaturas del currículo escolar y en concordancia con la descripción de la Historia Factual, es principalmente descriptiva, en donde el estudiante se ubicará en un contexto temporal, investigará las biografías de los personajes, ¿qué fue lo que descubrieron? ¿de qué forma sus descubrimientos ayudarían a la humanidad? Por ejemplo, en la película Ágora, ¿cuáles eran las teorías que existían sobre el sistema geocéntrico? ¿Cuáles eran los problemas religiosos, sociales y políticos de esa época?, etc.

Comunicación. Se da durante el análisis de las películas, en donde los estudiantes comparten experiencias, emociones, ideas, dudas, conocimientos, etcétera; con la ayuda de la Historia Epistemológica y la Historia Arqueológica, el estudiante puede analizar los saberes del pasado en su contexto, vislumbrar la influencia que tienen las películas matemáticas e históricas para comprender sus relaciones con la política, la sociedad, la cultura y el poder, por ejemplo ¿Con qué argumentos Hipatia de Alejandría decía que la tierra giraba alrededor del sol?

Validación. Ésta se presenta cuando no existe armonía en las opiniones entre los estudiantes que se enfrentan a una situación y en la cual hay opiniones diferentes en cuanto a los valores éticos y morales de los protagonistas de las diferentes películas, para lo cual existe un acompañamiento por parte del profesor de cada disciplina y existe la labor de convencimiento para que coexistan acuerdos comunes, es por eso que la Historia Arqueológica, se encarga de estudiar la naturaleza, el origen, de dar validez, objetividad, verdad, avalar el método realizado por los matemáticos, por ejemplo ¿Por qué no eran aceptadas las fórmulas de la teoría de números de Ramanujan? ¿Por qué las mujeres afroamericanas que trabajaron en la NASA, fueron discriminadas?

Institucionalización. Aquí pueden confluir los tres abordajes anteriores, puesto que los estudiantes pueden tener una visión sesgada de la historia y la realidad, es preciso la intervención objetiva del docente o mejor aún de un grupo comprometido de ellos, de manera multidisciplinaria.

¿Cómo se va a realizar?

Conformar un equipo multidisciplinario de docentes en la institución educativa, quienes tendrán un rol preponderante antes, durante y después de la ejecución de la propuesta didáctica.

La ejecución de nuestra propuesta se hará el ciclo escolar 2022-2023 semestre B, considerando un promedio de 30 estudiantes del sexto semestre del Bachillerato General Oficial “Ahuazotepec” de Puebla-México. Por su parte, durante el semestre académico 2023 -I, con un promedio de 15 estudiantes de Profesorado de la Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo, Lambayeque-Perú.

FASE 1:

a) A inicios del Semestre B, se les invita a los Docentes que conforman el cuerpo académico escolar, para integrar un equipo multidisciplinario de Matemáticas, Literatura, Lenguaje y Comunicación, Ética y Valores, Filosofía, Orientación Vocacional e Historia, con el objetivo de realizar un trabajo de investigación.

b) A través de una infografía se hace la invitación a los estudiantes interesados en participar en este proyecto de investigación.

c) Se capacitará al equipo docente conformado en el ítem a; sobre las Teorías Constructivistas y la metodología a utilizar, para que ellos puedan planear sus actividades y elaborar el material a utilizar de acuerdo a cada disciplina.

FASE 2:

a) Durante el semestre académico del Bachillerato, que tiene una duración de cinco meses, se trabajará con una película por mes; respetando el orden cronológico con los que fueron suscitados los hechos históricos, se propone el siguiente orden de las películas: “Ágora”, “El hombre que conocía el infinito”, “Figuras ocultas” y “Con ganas de triunfar”

b) Para lograr una mayor atención en los detalles, se sugerirá que de manera extraescolar, los estudiantes vean la película por partes a razón de 30 minutos por semana.

c) Los docentes de manera multidisciplinaria y con preguntas guiadas, y los productos solicitados de acuerdo a cada disciplina, en su clase, una vez por semana, coordinarán y escucharán las reflexiones, los cuestionamientos, los debates, las dudas de los estudiantes del bloque correspondiente a cada una de las partes, así como evaluará las actividades requeridas (mapas mentales/conceptuales, resúmenes, collage, reflexiones, fichas de trabajo, etc.)

FASE 3:

Al término de cada mes, coincidiendo con la visualización completa de cada película, se hará un encuentro entre estudiantes y el equipo académico conformado en la fase 1, de manera extraescolar, para analizar y debatir sobre la película correspondiente, propiciando un intercambio de ideas entre los participantes, el análisis de los tres abordajes historiográficos, conclusiones, las reflexiones finales desde el punto de vista de cada disciplina.

FASE 4:

Análisis de resultados por cada docente de las diferentes disciplinas sobre la propuesta didáctica, así como también las opiniones, reflexiones y sugerencias de los estudiantes.

En esta fase, se espera ver un alto grado de satisfacción de los estudiantes, de tal manera que el profesor de matemáticas les sugiera recrear, según sus habilidades, algún pasaje histórico o la vida de algún matemático, tales como Galois, Cantor, Emilie Noether, etc, plasmándolo en guiones, poster, un mural, en infografías, recursos literarios y otros, tales que, algunos puedan escenificarse a posteriori.

Expectativas

El carácter multidisciplinario de nuestra propuesta, debe generar interés e involucramiento de la sociedad y de académicos afines a la temática. Es deseable que, al equipo inicial de maestros, se puedan unir especialistas externos al ámbito educativo, como puede ser artistas, literatos, comunicadores, filósofos. Con lo cual se puede llegar a analizar y producir material no solo educativo sino en general cultural, ético, artístico, etc.

Esta propuesta es inclusiva, permite incorporar a estudiantes con todo tipo de habilidades, para la escritura, la danza, la poesía, el arte en general, la Matemática y las demás ciencias, además de un genuino interés por la Filosofía. Se fomentará el respeto al otro y promoverán valores culturales,

El material usado para implementar esta metodología no se debe restringir únicamente a fuentes audiovisuales internacionales, sino que se puede extender a entornos locales, regionales o nacionales, existen personajes y hechos históricos notables de cada cultura. Producto de ello se conseguirá fortalecer la identidad cultural local y, dado el carácter inclusivo de nuestra propuesta, el empoderamiento y enriquecimiento cultural de todos los participantes, además de descubrir vocaciones STEAM, artísticas, literarias, etc.

Consideraciones finales

La metodología propuesta puede implementarse con otros medios selectos de audiovisuales además de películas de cine, como por ejemplo en documentales, series de televisión, obras de teatro, etc. Incluso en ambientes extraescolares como Clubes de Matemática o similares, donde el interés no sea sólo la preparación para competiciones.

Rezende (2008) destaca la importancia del papel del Profesor, nuestra propuesta incluye un equipo preparado de Profesores, donde aparte del carácter histórico del material audiovisual, se cuestionará todo el contexto cultural, por lo que la Filosofía de la Ciencia, y en particular la Historia y Filosofía de la Matemática es fundamental y debe ser parte de la formación de todo maestro.

Citando a PMG Urbaneja (2022), desde la Matemática, como disciplina cultural en el más amplio sentido de la palabra, se pueden integrar Artes, Ciencias y Humanidades, a través de esta propuesta inclusiva y multidisciplinaria, no sólo de análisis crítico de material audiovisual, sino al producir un material propio susceptible de ser utilizado y revisado a la luz de la presente metodología.

Referencias y bibliografía

Avila. L. La Modelación en el entendimiento del concepto de Función en estudiantes de Bachillerato. (2011) [Tesis para obtener el Grado de Maestría, inédita], Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica.

Beltrán, P. & Asti, A. (2014, febrero). *Utilización didáctica del cine en matemáticas*. Enseñanza & Teaching, 32. Recuperado 2 de octubre de 2022, de https://www.researchgate.net/publication/287544047_Utilizacion_didactica_del_cine_en_matematicas

Bessonart, L., Fernández, A., Lemes, J., Roqueta, C., Sánchez, E. (2018). Aportes para la incorporación de la historia de la matemática como recurso didáctico. *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa*, 13-27.

Brousseau, G. (s. f.). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. www.delzorzal.com.ar. Recuperado 15 de septiembre de 2022, de http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM–Mathematics Education*, 1-14.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós Ibérica.

Emmer, M. (2005). Mathematics, Literature and Cinema. In *Mathematics and Culture II* (pp. 173-174). Springer, Berlin, Heidelberg.

Fried, M. N. (2018). History of mathematics, mathematics education, and the liberal arts. In *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 85-101). Springer, Cham.

Lemes, A. J. (s. f.). *Historia de la matemática como un recurso pedagógico*. CUREM 5. Recuperado 30 de septiembre de 2022, de http://funes.uniandes.edu.co/17775/1/Lemes2015Historia.pdf

FECYT ciencia. (2021, 28 abril). *Cine y Matemáticas con Marta Macho | Plano detalle* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=g4kY-GtxLWA

Rezende, L. A. (2008). História das ciências no ensino de ciências: contribuições dos recursos audiovisuais. *Ciência em tela*, *1*(2), 1-7.

Sorando, J. (2021, septiembre). *Como enseñar y aprender matemáticas con el cine*. Ciencia Vol 72 No. 3. Recuperado 20 de septiembre de 2022, de https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/72_3/PDF/06_72_3_1255.pdf

Urbaneja, P.M.G. (2022). Historia, enseñanza y dimensión cultural de las matemáticas. plazabierta.com. Recuperado el 15/10/22 de https://plazabierta.com/historia-ensenanza-y-dimension-cultural-de-las-matematicas/

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

"Que matemático a despertar em nós?" Reflexões sobre Modernidade, Colonialidade e Matemática em diálogo com Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio

Filipe Santos **Fernandes**
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
fernandes.fjf@gmail.com
Carolina **Tamayo-Osorio**
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
carolina.tamayo36@gmail.com

Resumo

Neste ensaio teórico-político promovemos reflexões sobre a Modernidade, a Colonialidade e a Matemática junto aos pensamentos de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio. Buscamos discutir como o projeto colonial configurou uma trajetória da Modernidade que, apenas com o comércio pelo Atlântico e a colonização das Américas, possibilitou conferir à Matemática o seu sentido de universalidade. Para isso, pautamo-nos na potência dos estudos decoloniais como substrato de nossas posturas, ideários e discursos. Como direcionamento, indicamos uma compreensão sobre a Matemática que não a afasta de nossa paisagem colonial, sustentando uma questão-desdobramento da entrevista concedida por Paulo Freire a Ubiratan D'Ambrosio e à Maria do Carmo Santos Domite: *que matemático a despertar em nós?*

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Matemática na América Latina; História e Epistemologia da Matemática e da Educação Matemática; Modernidade; Colonialidade; Decolonialidade; Justiça Social; Brasil.

Reivindicando vozes, em política: uma introdução

> *Eu não tenho dúvida nenhuma que dentro de mim há escondido um matemático que não teve chance de acordar, e eu vou morrer sem ter despertado esse matemático, que talvez*

> *pudesse ter sido bom. Bem, uma coisa eu acho, que se esse matemático que existe dormindo em mim tivesse despertado, de uma coisa eu estou certo, ele seria um bom professor de matemática. Mas não houve isso, não ocorreu, e eu pago hoje muito caro, porque na minha geração de brasileiras e brasileiros lá no Nordeste, quando a gente falava em matemática, era um negócio para deuses ou gênios. Se fazia uma concessão para o sujeito genial que podia fazer matemática sem ser um deus. E com isso, quantas inteligências críticas, quantas curiosidades, quantos indagadores, quanta capacidade abstrativa para poder ser concreta, perdemos.*

O trecho acima compõe a entrevista com Paulo Freire concedida a Ubiratan D'Ambrosio e Maria do Carmo Santos Domite, sugerida pelo professor Jeremy Kilpatrick para ser exibida na oitava edição do *International Congress on Mathematical Education* (ICME 8), realizado em Sevilha (Espanha), em 1996. No ano de 2021, momento em que celebramos o centenário do patrono da Educação e que sentimos a perda do mais notório educador matemático brasileiro, recuperar seus ideários e discursos e atualizá-los no presente é, mais do que uma possibilidade, um compromisso coletivo que o nosso campo, a Educação Matemática, deve assumir no cultivo de nossa memória e ação política.

Este ensaio teórico tem como objetivo promover reflexões sobre a Modernidade, a Colonialidade e a Matemática junto aos pensamentos de Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrosio. Buscamos discutir como o projeto colonial configurou uma trajetória da Modernidade que, apenas com o comércio pelo Atlântico e a colonização das Américas, possibilitou conferir à Matemática o seu sentido de universalidade, tornando-a “a linguagem de um deus mais sábio, mais milagroso e mais poderoso que as divindades das outras tradições culturais” (D’Ambrosio, 2005, p. 115). Para isso, pautamo-nos na potência dos estudos decoloniais como substrato de nossas reflexões. Como direcionamento, indicamos uma compreensão sobre a Matemática que não a afasta de nossa paisagem colonial, sustentando uma questão-desdobramento da entrevista com Paulo Freire: *que matemático a despertar em nós?*

Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrosio: reflexões sobre a Modernidade, a Colonialidade e a Matemática

Ambos, Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrosio, acreditavam que a Matemática poderia se configurar como poderoso instrumento de humanização e justiça social, direcionado à superação das tantas desigualdades que acometem corpos individuais, sociais e políticos em um país marcado pela herança colonial. Os autores se colocam em oposição à Matemática como “forma privilegiada de conhecimento, acessível apenas a alguns especialmente dotados, e cujo ensino deve ser estruturado levando em conta que apenas certas mentes, de alguma maneira ‘especiais’, podem assimilar e apreciar a Matemática em sua plenitude” (D’Ambrosio, 1996, p. 9). Por isso, para empreender um projeto político-educacional que direciona a Matemática à justiça social, seria necessário reivindicar novas políticas de conhecimento e identidade em Matemática, reconfigurando as dimensões históricas, sociais, culturais, econômicas, geracionais, de raça, de gêneros e sexualidades, de etnia etc. que circunscrevem as formas de produção, circulação e difusão do conhecimento matemático.

Uma das estratégias de Paulo Freire foi a defesa da Educação Popular. Entendemos que a Educação Popular é aquela que nega o intelectual como o portador e produtor de consciência, estimulando “a presença organizada das classes sociais populares na luta em favor da transformação democrática da sociedade, no sentido da superação das injustiças sociais [...] critica também a natureza autoritária e exploradora do capitalismo” (Freire, 2007, pp. 103-105). A Educação Popular, sem desconsiderar outras formas de conhecimento e assumindo uma posição substancialmente democrática, não separa o debate e as práticas educacionais da elaboração de compreensões sobre a realidade, na direção da produção de uma consciência emancipatória.

Tornar a educação mais humanizada passa, na obra de Freire, não só pela conscientização dos oprimidos, mas também do opressor que, em uma dimensão epistemológica, se manifesta na figura do intelectual vinculado à Universidade. A esse respeito, Paulo Freire (2018), em uma publicação póstuma, convida os matemáticos, os praticantes do que nomeia como “Matemática Oficial”, a buscarem no campo popular a abertura para outras compreensões sobre conhecimento matemático e seus processos educacionais, dizendo:

> Eu acredito que é preciso cuidar das especificidades dos intelectuais em um processo de Educação Popular; é preciso aproveitar tudo o que cada um deles sabe, pode e queira fazer bem-feito. Deve-se, por exemplo, pedir aos matemáticos: “Venham conosco um sábado para ver como os garotos do povo vendem e como fazem o cálculo sem saber nada da chamada Matemática Oficial. Estudem propostas para ver como podemos melhorar o ensino da Aritmética e de outros campos da Matemática em áreas populares”. Se você é um matemático ou biólogo, não pode ficar satisfeito somente com as aulas que dá na universidade. Qualquer especialidade pode ser importante para apoiar a Educação Popular, para alcançar uma compreensão mais humanizada e mais científica do que é a identidade cultural do povo (Freire, 2018, p. 241).

A defesa do campo popular surge na obra Ubiratan D'Ambrosio sob a égide do Programa Etnomatemática. O autor defende que a Matemática se configurou como “instrumento essencial e poderoso no mundo moderno”, tornando-a “presença exclusiva de outras formas de pensamento. Na verdade, ser racional é identificado com dominar a matemática” (D’Ambrosio, 2005, p. 115). O triunfo dessa racionalidade – que, como discutido mais à frente, foi forjado nos processos de colonização das Américas – subjugou práticas socioculturais que se diferenciavam da *Matemática da tribo europeia* (Lizcano, 2006), sendo um compromisso do Programa Etnomatemática o estudo das formas de conhecimento de diversos grupos étnicos, mas não só isso.

A obra de Ubiratan D’Ambrosio não se limita à identificação e à valorização das matemáticas – agora, em grafia e sentido plurais – de povos que não configuram os grupos socioculturais dominantes. Como defendido pelo próprio autor, “diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é apenas o estudo de ‘matemáticas das diversas etnias’” (D’Ambrosio, 2005, p. 113). Há no Programa Etnomatemática uma dimensão política e epistemológica que, de forma expressa, se aproxima do projeto edificado por Paulo Freire na preocupação não apenas com as políticas de conhecimento e identidade que tocam os oprimidos, mas também os opressores. Em Matemática, o opressor se materializa na “Matemática dominante”, nas políticas de conhecimento e nas identidades por elas demandadas na alegação ideológica e colonizatória de que se trata a cultura europeia uma cultura universal, critério de representação e avaliação de humanidade. Assim, nas palavras de D'Ambrosio (2005, pp. 115-116):

> A disciplina denominada matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa mediterrânea, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo. Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao predomínio da ciência e tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa. [...] Faz sentido, portanto, falarmos de uma "matemática dominante", que é um instrumento desenvolvido nos países centrais e, muitas vezes, utilizado como instrumento de dominação. Essa matemática e os que a dominam se apresentam com postura de superioridade, com o poder de deslocar, e mesmo eliminar, a "matemática do dia-a-dia". […] falar dessa matemática em ambientes culturais diversificados, sobretudo em se tratando de indígenas ou afro-americanos ou outros não-europeus, de trabalhadores oprimidos e de classes marginalizadas, além de trazer a lembrança do conquistador, do escravista, enfim do dominador, também se refere a uma forma de conhecimento que foi construído pelo dominador, e da qual ele se serviu e se serve para exercer seu domínio.

É sobre a "lembrança do colonizador" que pautamos, agora, a implicação deste pensamento para a Educação Matemática, tendo a potência dos estudos decoloniais como substrato de nossas posturas, ideários e discursos.

Que matemático a despertar em nós? Percorrendo outra trajetória da Modernidade

Em Fernandes (2021), aponta-se que a relação entre a Matemática e a Modernidade Ocidental se dá em uma dupla trajetória. Na primeira, alinhada ao movimento cultural europeu dos séculos XVII e XVIII, a Matemática se constitui como ideário e discurso da exatidão, da certeza, da perfeição, do rigor, da previsibilidade, da universalidade, da indubitabilidade, da virilidade, da objetividade, da linearidade e de outros elementos.

Essas premissas e possibilidades, que concedem à razão a possibilidade de obtenção do conhecimento seguro e verdadeiro, promoveram e ainda promovem forte influência no pensamento Ocidental. O método instituído e instituinte do pensamento cartesiano, que se confunde com o método matemático e com a própria Matemática, se converte, então, na única ferramenta analítica adequada para a compreensão da realidade. A racionalidade se assume como suporte exclusivo à produção do conhecimento e de suas tecnologias, sendo a matemática modo de identificação do ser racional e, com isso, o homem europeu se convence de seu amplo domínio sobre a natureza e a sociedade, em uma perspectiva de totalidade, universalidade.

Esse estatuto de universalidade, de segurança e de perenidade concedido à Matemática e a outros campos disciplinares contribuiu com a alegação ideológica de que a Matemática seria uma forma de conhecimento representativa de uma cultura universal e, portanto, representativa de toda a humanidade, uma forma de expressar uma verdadeira identidade em comum. A Matemática seria, então, a narrativa global capaz de explicar rigorosamente, de forma neutra, verificável, completa e definitiva, a realidade e, nesse ínterim, a nós mesmos.

Acontece que essa trajetória centrada no europeu não reconhece os silenciamentos, exclusões e extermínios aos quais têm sido submetidos histórias, saberes, indivíduos e coletivos que não se enquadram no padrão estabelecido pela totalidade do conhecimento. Tais silenciamentos, exclusões e extermínios, entendemos, é parte constitutiva do projeto da Modernidade Ocidental, que se institucionalizou com as invasões europeias de Abya Yala, Tawantinsuyu e Anahuac, hoje as Américas e o Caribe, e com o tráfico de povos escravizados. A Modernidade articulou uma maquinaria de poderes, de saberes e de instituições que serviram e que servem, ainda hoje, para reforçar hierarquias e hegemonias em relações sociais, políticas e educacionais que legitimam a desumanização de seres, a subalternização de saberes e a usurpação de territórios. Pode-se dizer, assim, que a Modernidade engendrou o Colonialismo e a Colonialidade, e também o contrário.

É nessa direção que Fernandes (2021) apresenta uma segunda trajetória que descreve a relação entre a Matemática e a Modernidade, anunciada a partir do comércio do Atlântico e da invenção das Américas. Nela,

> […] a Matemática era entendida como modo de *compreender e dominar a natureza*, transformando-a em recurso. Esse recurso, entretanto, não se restringia ao uso da terra, das matas ou dos minérios, mas também avançava sobre os indivíduos considerados não humanos nos territórios conquistados. Nessa forma de sociabilidade, a cultura seguiria dominando a natureza, seja como geologia, ou homem selvagem. Pouco a pouco, o *Penso, logo existo* tornar-se-ia *Conquisto, logo existo*, em um processo devastadoramente orquestrado pelo *Extermino, logo existo* (Fernandes, 2021, pp. 6-7).

Esse caráter universal da Matemática, que condiciona a existência a uma racionalidade específica, também a torna um modelo totalitário na medida em que seu controle nega outras formas de conhecimento, particularmente aquelas geradas e geridas nas cosmovisões dos habitantes dos territórios conquistados e que passa a ser modeladas de acordo com seus princípios, regras e regulamentos epistemológicos.

Contudo, essa incursão totalitária não se dá apenas no plano epistemológico, mas também em interesses subjetivos e econômicos. O genocídio dos povos e a usurpação dos recursos naturais em curso nos territórios conquistados é mediado por um conhecimento, o do mundo moderno e colonial, que passa a ser tomada como medida de humanidade. É nesse ponto que a Educação Matemática pode nos permitir não apenas a denúncia dessas injustiças epistêmicas, mas também anunciar novas possibilidades ao dialogar com a perspectiva da virada decolonial, especialmente para questionar o status de universalidade e a sua posição invisível da Matemática frente aos padrões de poder que sustentam o projeto de Modernidade/Colonialidade.

Nesse sentido, entendemos como necessário criar margens para essa ampliação epistemológica do que uma Modernidade tem entendido por Matemática, tendo como base a interlocução com outras formas de vida, no desenvolvimento de uma urgente desobediência epistêmica, como método de oposição aos conceitos modernos e eurocentrados de conhecimento. Segundo Mignolo (2007), a desobediência epistêmica não deve ser confundida com a ideia de deslegitimar a epistemologia da tribo europeia. Desobediência epistêmica não quer dizer o abandono ou ignorância do que já foi institucionalizado por todo o planeta, mas contar outras histórias e experiências que escapam às compreensões da Modernidade e que podem ter muito a contribuir para pensar outras formas de viver.

Afirmamos, por fim, que *o matemático a despertar em nós* pode se pautar em uma Educação Matemática como compromisso transformador da sociedade, alinhada ao exercício da cidadania, da liberdade e da construção de um projeto de sociedade solidário, baseada em valores como a empatia, a ética, a responsabilidade, a justiça e a inclusão social e que não se furta de um amplo debate sobre as hierarquizações e exclusões simbólicas, materiais e subjetivas produzidas na Modernidade/Colonialidade. Seja como prática social de ensino ou de pesquisa, a área se assume imersa em estruturas sociais e institucionais herdadas do colonialismo, sendo produzida cotidianamente por seus dispositivos e efeitos. O que, talvez, difira a Educação Matemática de outras áreas é a sua postura frente às desigualdades produzidas colonialidade, colocando-se em prontidão e avaliação para a compreensão dos privilégios adquiridos por seu objeto particular de trabalho – a participação da matemática em diferentes culturas, inclusive as culturas escolares –, buscando aliar-se às lutas de diferentes coletivos sociais.

Esperamos que essas reflexões contribuam com o papel da Filosofia da Educação Matemática, anunciado por Paul Ernest (2016, p. 8, tradução nossa), "de analisar, questionar, desafiar e criticar as reivindicações da prática, da política e da pesquisa em Educação Matemática", situando essa postura, porém, não apenas na filosofia que nasce na dialética dos gregos antigos, mas no projeto edificante, reativo e propositivo que emerge e insurge junto aos estudos decoloniais, na formulação de um pensamento crítico latino-americano.

Referências

D'Ambrosio, U. (1996). *Da realidade a ação:* Reflexões sobre a educação e matemática. Campinas: Unicamp.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, *31*(1), 99-120. https://doi.org/10.1590/S1517-97022005000100008

Ernest, P. (2016). An Overview of the Philosophy of Mathematic Education. Em P. Ernest; O. Skovsmose; J. P. van Bendegem; M. Bicudo; R. Miarka; L. Kvasz & R. Moeller (Eds.), *The Philosophy of Mathematics Education* (pp. 3-8). Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-40569-8

Fernandes, F. S. (2021). Matemática e colonialidade, lados obscuros da modernidade: giros decoloniais pela Educação Matemática. *Ciência & Educação*, *27*(e21065), 1-15. https://doi.org/10.1590/1516-731320210065

Freire, P. (2007). *Política e educação.* São Paulo: Villa das Letras.

Freire, P. (2018). *Pedagogia do Compromisso: América Latina e Educação Popular*. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra.

Lizcano, E. (2006). As matemáticas da tribo europeia: um estudo de caso. Em G. Knijnik (Ed.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores*. EDUNISC.

Mignolo, W. D. (2007). Desobediência epistêmica: a opção descolonial e o significado de identidade em política. *Gragoatá*, *12*(22), 11-41. https://periodicos.uff.br/gragoata/article/view/33191

Significados Parciales de la Integral Definida desde un estudio histórico en Newton y en Leibniz

Weimar **Muñoz** Villate
Universidad de La Salle y Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wmunoz@unisalle.edu.co
Olga Lucía **León** Corredor
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
olleon@udistrital.edu.co

Resumen

El propósito de esta investigación es identificar vínculos entre: (i) argumentos históricos que configuraron el Teorema Fundamental Cálculo (TFC); (ii) recursos tecnológicos que actualizan esos argumentos; (iii) efectos en la didáctica del cálculo, de los recursos y de su actualización. Los nuevos significados parciales para la integral definida que se muestran como efecto de estos vínculos, son el resultado de una metodología multimodal que articula la historiografía aplicada a los documentos de Newton y de Leibniz, con las metodologías del Enfoque Ontosemiótico (EOS) en lo que refiere a la identificación de idoneidades mediacionales y epistemológicas.

Palabras clave: Teorema fundamental del cálculo, integral definida, Leibniz, Newton, significados parciales.

Introducción

La pregunta ¿qué tipo de objetos hacen parte de la formación matemática en programas como el de ingeniería? se articula con la pregunta sobre ¿qué tipos de significados sobre esos objetos promueven los profesores en sus prácticas docentes? La teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) destaca: la complejidad de los objetos matemáticos en tanto los reconoce no como un objeto unitario, sino como un sistema complejo formado por componentes o partes (Rondero & Font, 2015); y la necesidad de considerar significados parciales de estos objetos “en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios, activados en estas prácticas" (Rondero & Font, 2015, p. 31).

En el caso de la formación de ingenieros a finales del S. XIX: "se planteaba la controversia acerca de qué tipo de formación matemática debería darse a los ingenieros; los dirigentes del país tenían un especial interés por lo práctico, lo técnico y lo productivo" (Castro, 1997, p. 9), esta controversia se mantiene vigente hasta el siglo XXI. El profesor de matemáticas que forma ingenieros se enfrenta a decisiones como: considerar las estructuras matemáticas como el único objeto de formación matemática para el ingeniero o, considerar las aplicaciones de las matemáticas como la razón fundamental de la utilidad de la matemática en la formación del ingeniero (ICMI, 2002). Las prácticas de enseñanza de lo que actualmente es reconocido como Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) también sobrelleva dichos problemas. En efecto, el primer inconveniente de considerarlo complicado se debe a sus conceptos matemáticos implícitos y explícitos (Kirsch, 2014; Robles et al., 2014; Fuente et al., 2010; Tall, 1992). La segunda postura problemática se adopta porque, en el mejor de los casos, el TFC sólo es recordado por su utilidad (Bressoud, 2011; Toumasis, 1993). Sin embargo, el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC tiene dificultades para muchos docentes, porque es frecuente que algunos de ellos tengan un bajo conocimiento conceptual, incluso a veces procedimental, de la integral definida (Rosyidi & Kohar, 2018). También, porque muchos profesores no saben cómo mejorar su ambiente de enseñanza, o crear secuencias didácticas que busquen la mejora de la comprensión del teorema, además de no considerar la complejidad de los objetos matemáticos que se enseñan (Robles et al., 2014). Complementariamente surgen preguntas como ¿cuál versión del TFC se requiere en la formación de ingenieros?

Para los estudiantes, los obstáculos al comprender el TFC, radican en la dificultad de comprender otros objetos matemáticos, tales como función, continuidad, derivada e integral, o de relacionarlos entre sí, e.g. comprender la correspondencia entre la integral definida y el área. Estas dificultades conducen a ideas no permanentes y poco cohesionadas entre ellas, que conlleva a que los alumnos se conformen con imágenes mentales que tienen sólo aspectos parciales de una definición o de algún ejemplo particular (Thompson & Dreyfus, 2016; Kouropatov & Dreyfus, 2013; Cordero, 2003; Coelho, 1998; Thompson, 1994; Dreyfus, 1990). El TFC algunas veces no es teorema, ni es fundamental para los estudiantes (Thompson & Dreyfus, 2016).

Estas problemáticas no son las únicas. Siempre que se aborda un estudio sobre el TFC se debe considerar que "el teorema fundamental es una piedra angular adecuada para cualquier desarrollo riguroso del cálculo" (Dunham, 2005, p. 90), y además que emerge un cuestionamiento inmediatamente: ¿a cuál TFC se hace referencia? Se suele presentar, por ejemplo, entre todas las versiones que existen del TFC (Fullerton, 2003) e incluso de lo que es recordado por algunos profesores (Toumasis, 1993), la siguiente versión:

***Teorema Fundamental del Cálculo**:*

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$,

(1) Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

(2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f, es decir, $F'(x) = f(x)$, (Stewart, 2015)

Como un elemento de esta problemática hay que señalar que cada texto universitario aborda el TFC desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, alternan el orden de (1) y (2), o varían presentando primero la integral definida o el problema del área, y posteriormente, la integración por sustitución o las sumas de Riemann (Stewart, 2015; Larson & Edwards, 2014; Zill & Wright, 2010; Thomas, 2006).

Desde la educación matemática universitaria se han ofrecido diferentes soluciones, por ejemplo, las que se desarrollan desde las huellas que los problemas de enseñanza y aprendizaje del TFC dejan y que se plantean a la comunidad de investigadores. En esta perspectiva, se cuenta con un estudio de caso de la transposición didáctica de la demostración del TFC (Klisinska, 2005); otra investigación que indaga sobre la comprensión del vínculo entre derivadas e integrales (Coelho, 1998); otra más que plantea definir de otra manera los diferenciales, y desde allí, tener otra perspectiva del TFC (Biehler et al., 2017; Thompson, 1994); y desde el marco de la abstracción reflexiva, se cuenta con el análisis del concepto de integral definida (Aranda & Callejo, 2015). Se dispone de investigaciones alrededor de la parte evaluativa del TFC (Ponce, 2014) y también sobre cómo los estudiantes lo aplican a problemas físicos y gráficos (Bajrachrya, 2014). Lo anterior también se vincula a la relación que el EOS manifiesta en:

> La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia"(Godino & Batanero, 1994, p. 4).

En el caso específico del TFC la génesis cultural a la que alude el EOS está vinculada a las reflexiones personales de Newton y de Leibniz. Los dos investigadores llegaron al TFC resolviendo un problema común y de gran dificultad de la época: el problema inverso de las tangentes y su relación con aquel de hallar áreas (Scriba, 2014). Además, como aspecto de total relevancia: ambos ofrecieron lo que se reconocería hoy en día como tablas de integración, mostrando así un algoritmo para el uso de la solución que plantearon (Muñoz-Villate, 2021; Scriba, 2014; Bressoud, 2011). Se puede decir entonces que ellos dos vieron la importancia de esta nueva herramienta matemática, más allá de lo desarrollado por Barrow, Wallis, Fermat, Descartes, van Heuraet, Sluse, Hudde, y otros tantos matemáticos contemporáneos suyos, a los cuales no se les puede desconocer de ninguna manera su aporte a la invención del análisis.

Para los escritos de Newton se tiene a disposición un amplio abanico de escritos desde su fuente primaria. Por ejemplo, se cuenta con su manuscrito "The October 1666 Tract on Fluxions" recuperado gracias al trabajo de *The Newton Project* (Iliffe, 2011). A partir de este tratado, se puede realizar una presentación alternativa de la parte dinámica del TFC (Muñoz Villate, 2021, 2022; Bressoud, 2011). Se cuenta también con las obras sobre Newton de historiadores de primer nivel como Marco Panza y Niccolò Guicciardini (Guicciardini, 2011; Panza, 2005).

En el caso de Leibniz, es más difícil recuperar toda su fuente primaria. Sin embargo, se cuenta con un argumento que hace parte de lo que se reconoce como TFC, y que fue publicado en el año 1693 en la revista "Acta Eruditorum" (Swetz, 2015). También es posible tener a disposición los trabajos restaurados en *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek*, en parte por Siegmund Probst y su equipo. Allí están los escritos de ciertos periodos, por ejemplo, entre los años 1674-1676 (Leibniz, 2008). Se cuenta así mismo con los escritos de expertos en los trabajos matemáticos de Leibniz como David Rabouin y Davide Crippa (Crippa, 2019; Chemla et al., 2016), y del grupo Mathesis, encargado de editar material matemático leibniziano (Mathesis Project, 2017). Desde este gran insumo en historia de las matemáticas, y de las matemáticas mismas, ha sido posible recuperar los argumentos y significados parciales que se mostrarán a continuación.

Metodología

Inicialmente se utiliza la metodología aportada desde la historiografía, es decir, aquella que permite abordar las matemáticas desde el punto de vista de lo que se hace, como una actividad humana que constituye una historia, más que ver las matemáticas como aquello que se estudia desde la unión de propiedades de objetos creados por esa actividad (Panza, 2005). Se accedió a los manuscritos de la fuente primaria de Newton y, en la medida de lo posible, de Leibniz. A partir del estudio de los tratados de Newton (1665-1671) y de Panza (2005) se *recupera* un argumento realizado por Hendrick van Heuraet, desconocido en la mayoría de textos universitarios de cálculo, que permite identificar que el problema inverso de las tangentes, el problema de las áreas, el problema de la rectificación de curvas, y el cálculo de las denominadas antiderivadas, son caras de la misma moneda (Panza, 2005). Así mismo, es posible hacer un análisis cronológico de distintas *versiones* del TFC en Newton a partir de 1665 hasta 1704 (Muñoz Villate, 2022).

Desde el punto de vista newtoniano, abordar el TFC como aquel que enuncia la derivada y la integral como opuestos, no tiene sentido, porque saldrían directamente de la definición que concebía él. Así que la forma de abordarlo, fue buscando un teorema que resultara análogo a lo reconocido como TFC. Este es el argumento que se presentará más adelante y que propicia así una entrada distinta, tanto a este teorema como a la integral definida: el teorema de Newton-van Heuraet (Panza, 2005).

En Leibniz este trabajo requiere más cuidado. No es posible en este momento realizar un estudio cronológico del TFC en sus estudios. Además, no hay como tal una sola proposición que pueda tomarse como este teorema dada la ausencia de su demostración. Lo que sí es posible, es presentar argumentos que hacen parte del sistema que integra el objeto matemático que se denomina TFC. Luego es posible abordarlo por lo menos desde tres perspectivas leibnizianas: como la relación inversa entre los operadores diferencial e integral, desde un argumento geométrico (que genera el significado parcial que se ilustrará adelante), y desde el trabajo de 1693 como el movimiento de tracción. Este trabajo fue presentado el 22 de junio del 2022 al grupo Mathesis en una conferencia híbrida (ver http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article2755&lang=en).

La metodología complementaria proviene del EOS por cuanto es un enfoque que proporciona herramientas para realizar un análisis microscópico de la actividad matemática, permitiendo identificar la configuración de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas requeridas en resolución de problemas, que son la razón de ser de un concepto. El análisis aplicado consideró la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas requeridos en la resolución de problemas. Este análisis busca tomar conciencia del concepto *complejidad*, lo que conduce a la reflexión del profesor sobre las posibles dificultades que pueden surgir en la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje, y de los nuevas soluciones que se podrían tener a disposición (Burgos et al., 2021).

Resultados: Nuevos significados parciales para la integral definida

La noción de *significado*, se vincula, de manera muy recurrente al de *comprensión*, y se utiliza también muy persistentemente en documentos curriculares, así como en la investigación y la práctica de la educación matemática (Godino, J. Burgos, M. Gea, 2021). Luego tener varios significados parciales de un objeto matemático permite, como lo propone el EOS, "un análisis detallado de la actividad matemática, al tener en cuenta la pluralidad de objetos implicados en dicha actividad, así como articular las dimensiones epistemológica, semiótica, cognitiva y sociocultural implicadas en la investigación en educación matemática" (Godino, J. Burgos, M. Gea, 2021, p. 4). Es así como tener varios significados parciales de la integral definida puede ayudar a mejorar la comprensión de este objeto matemático, viéndolo desde la complejidad que suscitan diferentes perspectivas del mismo.

En el artículo de *Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus* (Burgos et al., 2021) se proponen cuatro significados para la integral desde el punto de vista de los procesos de instrucción matemática en la universidad. Ellos son:

1. Cantidad de magnitud acotada entre dos sucesiones de convergentes cantidades. La magnitud puede ser geométrica, física, longitud, área, volumen, distancia, trabajo, densidad, etc.
2. Límite de sumas de Riemann, $\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
3. Función acumulativa, $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
4. Incrementos diferenciales de la función acumulativa $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ si $G'(x) = f(x)$

Sin embargo, desde el estudio del TFC en los trabajos de Newton y de Leibniz, se puede afirmar que existen por lo menos dos maneras adicionales de abordar esta integral definida:

5. *Cuadratura* del área bajo una curva $f(x)$, i.e. relacionar el área bajo una curva con el área de un rectángulo: $\int_a^b f'(x)\,dx = K \cdot [f(b) - f(a)]$
6. Transformar *transmutar* una curva en otra que sea integrable *cuadrable*.

El EOS nos indica que estos son significados parciales *nuevos*, porque permitieron resolver problemas que eran irresolubles (además de célebres) hasta el S. XVII. Estos argumentos emergieron en la actividad matemática de Newton y de Leibniz al buscar resolver dichos problemas, y la forma en la cual fueron descritas por ellos es novedosa. También es cierto que estos argumentos no aparecen en los textos universitarios como Stewart (2015), Thomas (2009), Zill & Wright (2011), comúnmente usados en Latinoamérica, luego no hacen parte del insumo con el que cuenta algunos profesores al momento de organizar la enseñanza del TFC. El significado 5 y 6 parecen haber quedado olvidados en el tiempo, dejados de lado luego del crecimiento del análisis matemático, que decantó su evolución con el uso, por ejemplo, de los objetos matemáticos de límite y sumas de Riemann. Sólo un estudio historiográfico podría develarlos.

El significado parcial 5 puede abordarse desde el Teorema de Newton-van Heuraet (Muñoz, 2022; Panza, 2005) o desde la *demostración* del TFC de Leibniz de 1693 (Muñoz Villate, 2021; Mena, 2014; Lopez, 2011). Como se mencionó anteriormente, también se cuenta con los escritos recuperados de The Newton Project y Mathesis Project.

En efecto, Hendrick van Heuraet demostró que, si se cuenta con la cuadratura (el área) de una curva apropiadamente elegida, es posible rectificar una curva cualquiera. Newton modificó este teorema de tal forma que se pueda encontrar el área bajo una curva, teniendo la normal o la subtangente de otra curva apropiadamente elegida. Ver Figura 1.

A groso modo, van Heuraet usó la cuadratura de una curva END y el cálculo de la recta normal MG para hallar la longitud de la curva AML. Newton modificó estas condiciones tomando el segmento PG, y obtuvo directamente la cuadratura de la curva END. Así, este significado parcial 5 tiene por objetivo retomar la idea original de hallar la cuadratura de una curva como una aproximación del área de un cuadrado. Ambos, Newton y Leibniz obtuvieron este resultado para una gran cantidad de curvas (Muñoz Villate, 2021; Jullien, 2015; Scriba, 2014; Panza, 2005).

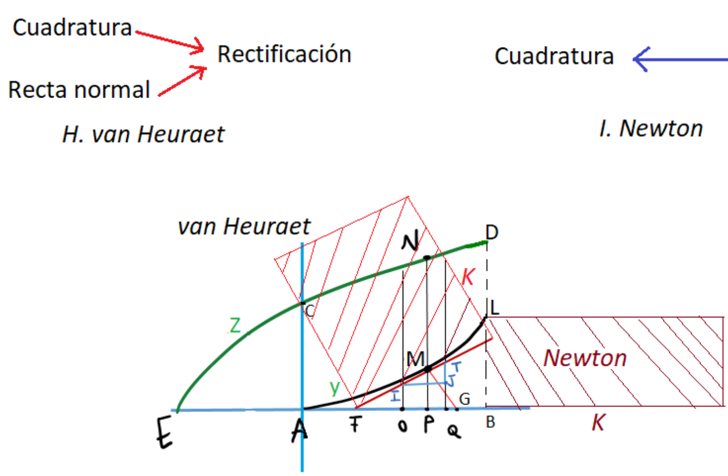


Figura 1. Figura propia para describir de forma paralela, el teorema de van Heuraet y la modificación de Newton

La demostración completa y la ilustración de algunos ejemplos, con uso de software matemático, para este argumento de Newton y van Heuraet, pueden verse en (Muñoz, 2022).

El significado parcial 6 en cambio se puede abordar a partir de la Proposición VI hecha por Leibniz en el libro *De Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*, donde escribió 51 proposiciones. La proposición número VII es el reconocido *Teorema de Transmutación* (Muñoz Villate, 2021; Mena, 2014; Lopez, 2011).

Se presentará un ejemplo de la construcción de dicha transformación de curvas realizada por Leibniz, porque el *algoritmo* general de esta transmutación está detallada por David Rabouin en *Leibniz's Rigorous Foundations of the Method of Indivisibles* (Jullien, 2015). Cabe resaltar que dicha proposición es calificada por Rabouin como *espinosa.* Este calificativo es debido a que en esencia la Proposición VI busca relacionar el área de un polígono formado por una función escalonada, y el área bajo una curva dada. La construcción de este polígono es un poco engorrosa, por eso Leibniz replantea sus ideas y obtiene una mejora en la que será la Proposición VII.

Para realizar la construcción del polígono cuya área será muy cercana a la curva transmutada, se debe relacionar primero una curva inicial (la que se va a transformar o *transmutare*) con otra curva que sea *cuadrable* (integrable). Esta construcción que se explicará a continuación no es tampoco original de Leibniz: la idea de utilizar la transmutación en técnicas de cuadraturas fue enfatizada por Van Heuraet y construcciones muy similares a la de Leibniz se pueden encontrar en Roberval o Gregory (Jullien, 2015).

Ejemplo Proposición VI de Leibniz.

Se tomará la curva $f(x) = 2\sqrt{x}$ sobre el intervalo [0,9]. Esta curva es la que se *transmutará* en otra. Posteriormente, se construirá un polígono cuya área será tan cercana como se quiera al área bajo la curva transformada.

El primer paso es entonces trazar tangentes sobre algunos puntos de la curva elegida. En este caso, se trazan cuatro rectas tangentes, y se señalan los respectivos puntos de corte con el eje y. Se usa en este caso la notación original de Leibniz, esto es, ${}_1T, \dots ,{}_4T$. El segundo paso es trazar segmentos de recta paralelos a los ejes y y x a partir de los puntos elegidos para las tangentes y de los ${}_1T, \dots ,{}_4T$ respectivamente, véase la Figura 2.

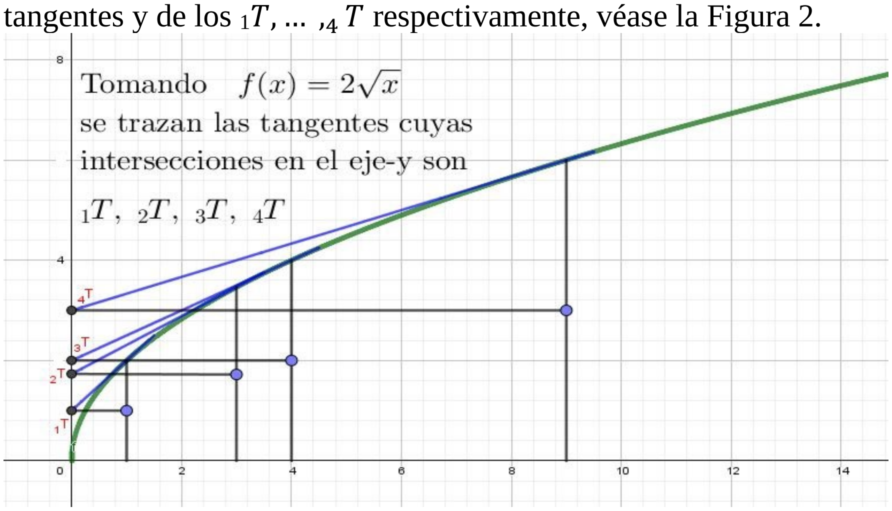


Figura 2. Figura propia basada en la Proposición VI de Leibniz De Quadratura

El tercer paso es construir la curva transmutada. Esta nueva curva se traza a partir de los puntos de intersección de los segmentos construidos en el paso anterior. Utilizando, por ejemplo, el software GeoGebra se obtiene la curva $g(x) = \sqrt{x}$, véase Figura 3.

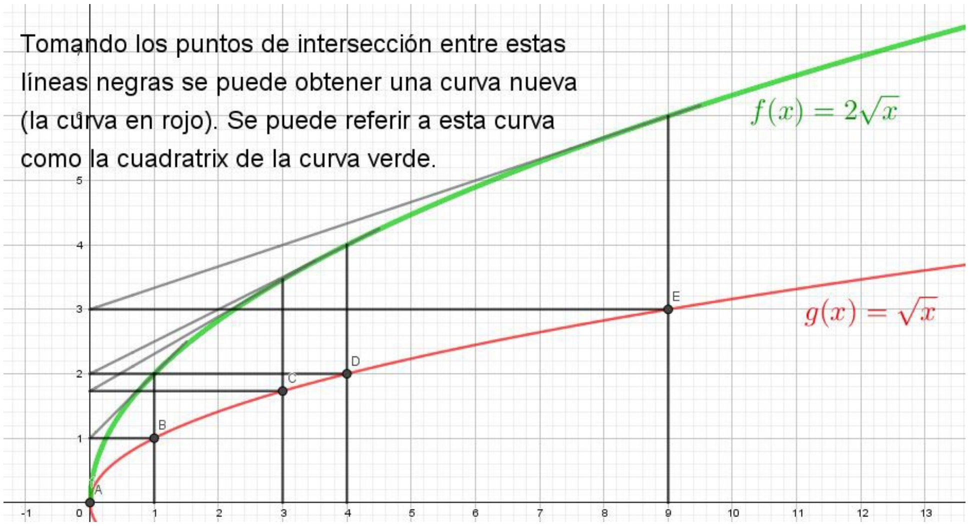


Figura 3. Construcción de la quadratrix (en rojo) a partir de la curva original (en verde)

El siguiente paso es construir un polígono equipolente a $g(x)$ en [1,9] (desde 1 por ser el primer punto de tangencia elegido). Para obtenerlo, Leibniz utilizó los puntos F, G, H, I (los puntos de tangencia inicial) y tomó las rectas secantes entre ellos. Es decir, se trazan ahora las secantes entre F y G, G y H, y H e I, y se procede como en el Paso 1, es decir, se hallan los puntos de corte con el eje y y se construyen segmentos paralelos al eje x. En este caso, los puntos de intersección se notarán como P, O, T, S, véase la Figura 4.

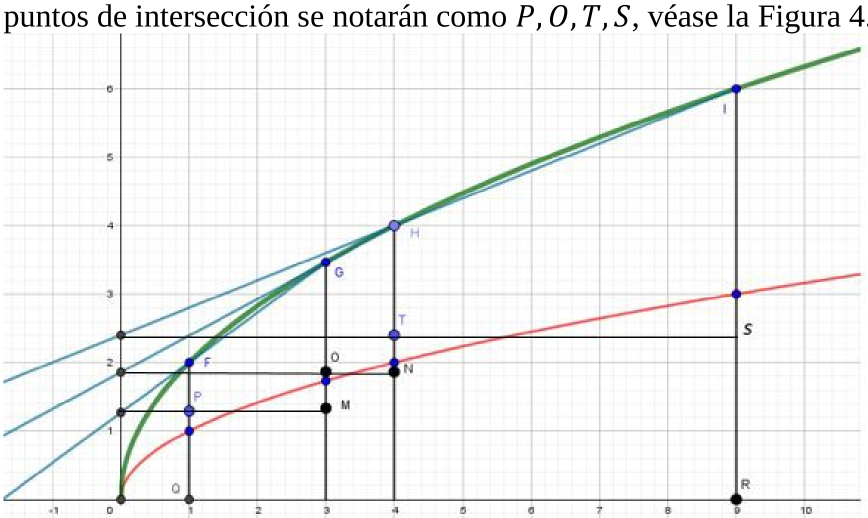


Figure 4. Construcción del polígono que será equipolente a la curva en rojo.

El quinto y último paso es calcular el área bajo la curva transmutada $g(x)$ y el polígono recién construido $PQRSTNOMP$. Utilizando nuevamente GeoGebra se comprueba que $\int_1^9 \sqrt{x}dx \approx 17.33$ mientras que el área del polígono será $Area((\text{PQRSTNOMP}) = 16.48$

Claramente, entre más puntos de tangencia se tomen, mejor será la aproximación del área de este polígono equipolente, véase Figura 5.

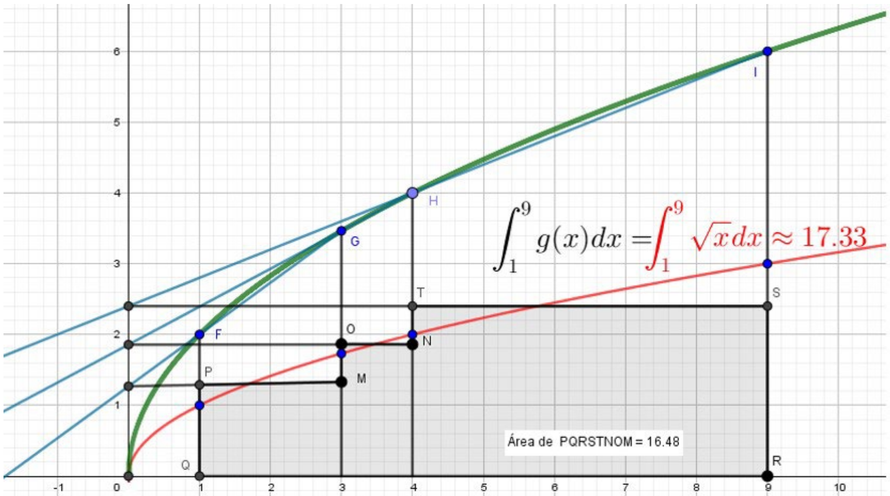


Figura 5. El área del polígono equipolente puede hacerse tan cercana al área bajo la curva en rojo como se quiera.

Conclusiones y reflexiones.

La investigación historiográfica y didáctica sobre los argumentos de Newton y de Leibniz en el estudio del TFC aporta dos significados parciales para la integral definida en el marco de estudios de significados y amplía la perspectiva de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje del TFC.

Gracias al *significado parcial 5* se evidencia que el cálculo de la longitud de arco de una curva (rectificación de una curva) fue históricamente anterior al de la integral definida, y no en la forma en que se presenta actualmente en los citados textos universitarios. También, que gracias a los trabajos de Hendrick van Heuraet, matemático olvidado en varios textos de análisis, Newton desarrolló un teorema que resulta análogo al reconocido TFC.

Del *significado parcial 6* se puede concluir que, aunque pareciera que este significado parcial fuera similar al significado número dos (aproximar el área bajo una curva como suma de área de polígonos), se puede asegurar que Leibniz relaciona dos curvas y obtiene luego un polígono equipolente a una de ellas, mientras que Riemann aproxima el área bajo una curva con un polígono construido a partir de esa misma curva. Lo que sí es evidente es que el proceso riemanniano es más sencillo en su construcción geométrica que el presentado en esta Proposición VI de Leibniz de *De Quadratura*, ver Figura 6. No obstante, para ciertos ejemplos, esta aproximación de Leibniz es mejor que la realizada por sumas superiores e inferiores (o por derecha o izquierda, según sea el caso).

Como una reflexión final, uno de los requisitos de los profesores es el de tener más recursos para enseñar objetos matemáticos y favorecer su comprensión. La historia de la matemática, y el estudio de sus fuentes primarias, siguen siendo hoy en día una fuente inmensa de recursos que podrían aportar, como en este escrito, más significados parciales de un objeto matemático, ofreciendo así nuevas perspectivas, nuevas entradas. Estos estudios se pueden favorecer con el uso de un software matemático, que participa en este proceso como un mediador para mejorar la visualización y adaptación de argumentos, que como en este trabajo, eran inicialmente de corte geométrico.

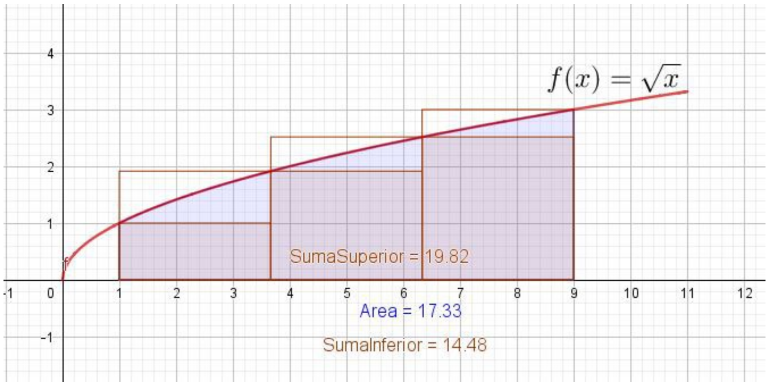


Figura 6. Aproximación del área por la suma superior e inferior en GeoGebra

Referencias y bibliografía

Aranda, C., & Callejo, M. (2015). Un experimento de enseñanza para la construcción del concepto de integral definida usando un programa de geometría dinámica. *Departamento de Innovación y Formación Didáctica Universidad de Alicante*, *1*, 1–13. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Bajrachrya, R. R. (2014). *Student Application of the Fundamental Theorem of Calculus with Graphical Representations in Mathematics and Physics*. *August*.

Biehler, R., Hochmuth, R., Göller, R., & Rück, H. (2017). Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline. *Khdm Conference 2015*, *February*. https://kobra.uni-kassel.de/bitstream/123456789/2016041950121/5/khdm_report_17_05.pdf

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, *118*(2), 99–115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D., & Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(1), 4. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Castro, I. (1997). *Pasado, presente y futuro del cálculo en Colombia*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Chemla, K., Chorlay, R., & Rabouin, D. (2016). The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences. In *1*. Oxford University Press.

Coelho, C. (1998). *Students' understanding of the fundamental theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and visual imagery*. https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10020309/

Cordero, F. (2003). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. *Grupo Editorial Iberoamericana*, *January 2003*. https://www.researchgate.net/publication/270959982_Reconstruccion_de_significados_del_Calculo_Integral_La_nocion_de_acumulacion_como_una_argumentacion

Crippa, D. (2019). *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: A debate among Gregory, Huygens and Leibniz* (Vol. 1673). Birkhäuser.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In *Mathematics and cognicion* (pp. 113–134). Cambridge University Press.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery: Masterpieces. From Newton to Lebesgue.* Princeton University Press.

Fuente, Á. C. de la, Cañada, L. O., & Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*.

Fullerton, C. S. U. (2003). *Bibliography for the Fundamental Theorem of Calculus*. http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/c2003/FunTheoremCalculusBib/Links/FunTheoremCalculusBib_lnk_2.html

Godino, J. Burgos, M. Gea, M. (2021). Análisis de teorías del significado en educación matemática. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *2019*, 1–31.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Guicciardini, N. (2011). *Newton*. Carocci Editore.

ICMI. (2002). *History in mathematics education (International Commission on Mathematical Instruction)* (J. Fauvel & A. Van Maanen (eds.)). Kluwer Academic Publishers.

Iliffe, R. (2011). *The October of 1666 Tract on Fluxions*. The Newton Project. http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00100

Jullien, V. (2015). *Seventeenth- Century Indivisibles Revisited*. Birkhäuser.

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 691–695. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0608-9

Klisinska, A. (2005). The Fundamental Theorem of Calculus_ A case study into the didactic transposition of proof. In *Integration The Vlsi Journal*. https://doi.org/10.2307/2307007

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the Fundamental Theorem of Calculus. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Methodology and Methods in Mathematics Education*, *3*, 201–208.

Larson, R., & Edwards, B. (2014). Calculo. In *Igarss 2014*. https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Leibniz, G. W. (2008). *Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe, Reihe VII, Band 5. Mathematische Schriften, 1674–1676 Infinitesimalrechnung PDFA*. https://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/VII5A.pdf

Lopez, J. (2011). Reflexions On Leibniz' Proof Of The Fundamental Theorem Of Calculus. *Research Gate*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405

Mathesis Project. (2017). *Mathesis. Editing Leibniz's Mathematical Manuscripts*. http://mathesis.altervista.org/

Mena, R. (2014). *The Fundamental Theorem of Calculus*. http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf

Muñoz-Villate, W. (2021). Relations between history of mathematics and training of engineers. *Revista Vision Electrónica*, *15*(1). https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471

Muñoz Villate, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación*, *5*(1), 189–204. https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i1.pp189-204

Muñoz Villate, W. (2022). Elementos para un argumento didáctico desde el estudio histórico del Teorema Fundamental del Cálculo en Newton. *Ciencia e Interculturalidad*, *30*(1), 26–39. https://www.camjol.info/index.php/RCI/article/view/14241/16787

Muñoz, W. (2022). Memorias 25 encuentro de geometría y sus aplicaciones. In P. Perry (Ed.), *Argumentos de Newton y Leibniz relativos al Teorema Fundamental del Cálculo mediados por software* (pp. 81–92). Universidad Pedagógica Nacional. http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/memorias.html

Panza, M. (2005). *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Ponce, J. (2014). *El Teorema Fundamental del Cálculo : estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación* (Issue August).

Robles, M., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*.

Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *33*(2), 29. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rosyidi, A. H., & Kohar, A. W. (2018). Is f(x) unique? Prospective teachers' conceptual and procedural knowledge on a definite integral problem. *Journal of Physics: Conference Series*, *1108*(1), 0–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1108/1/012095

Scriba, C. (2014). Method The Inverse of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). In *Archive for History of Exact Sciences* (Vol. 2, Issue 2, pp. 113–137).

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

Swetz, F. (2015). *Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus*. Mathematical Association of America. https://www.maa.org/book/export/html/641727

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, *August 1992*, 13–28. https://doi.org/DESC787 [pii]\r10.1111/j.1467-7687.2008.00787.x

Thomas, G. J. (2006). *Calculo de una variable* (11th ed.). Pearson.

Thompson, P. (1994). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 131. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4236/ojo.2014.48035

Thompson, P., & Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials. *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*, *August*, 355–359. http://pat-thompson.net/PDFversions/2016Thompson-Dreyfus.pdf

Toumasis, C. (1993). What is the fundamental theorem of integral calculus? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *24*(5), 685–687. https://doi.org/10.1080/0020739930240509

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2010). Matemáticas. Cálculo diferencial. In *McGraw Hill*.

Una caracterización de las prácticas estocásticas en el texto de Thomas Bayes (1763)

Cristian G. **Paredes-Cancino**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
México
cristian.paredes@cinvestav.mx
Gisela **Montiel-Espinosa**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo reportamos un estudio documental cuyo objetivo es caracterizar las prácticas estocásticas que subyacen a la actividad matemática del Teorema de Bayes. Para su desarrollo se siguió un esquema metodológico para estudios histórico-epistemológicos desde la Socioepistemología que se fundamenta en el análisis cualitativo de contenido. Como resultados se ha identificado que la práctica a nivel de actividad vinculada con la emergencia del Teorema de Bayes se sitúa en la medición de la probabilidad de una conjetura realizada sobre la probabilidad desconocida de un suceso y esta se desarrolla a partir de algunas prácticas del nivel acción como experimentar, registrar datos y conjeturar.

Palabras clave: Matemática Educativa; Educación media superior; Enseñanza; Desarrollo curricular; Socioepistemología; Investigación documental; Estocástica.

Introducción

En el marco de los significados de probabilidad, se ha reportado la supremacía en la enseñanza de los significados laplaciano o clásico y frecuentista de la probabilidad, dejando de lado el significado subjetivo. Respecto al frecuentista, Borovnick (2021) señala que ha sido la base para el desarrollo teórico del paradigma de la inferencia informal, sin embargo, destaca que la inferencia es más natural de entender desde la integración de elementos bayesianos y el riesgo – como contexto y sentido de la probabilidad–. Al respecto de la probabilidad bayesiana, algunos estudios, como el de Carranza (2014), señalan que en el escenario escolar se prioriza la mirada procedimental por encima de los aspectos asociados a su significado. A su vez, Borovcnik (2012) y Vancsó et al. (2021) destacan la falta de trabajo sobre el vínculo de la probabilidad con la inferencia y que las ideas bayesianas están excluidas de los planes de estudio e incluso de la investigación didáctica.

Entonces, con el fin de incidir en esta área del campo, nos proponemos analizar la naturaleza subjetiva del significado y el vínculo entre la probabilidad y la inferencia desde una perspectiva bayesiana, en particular, en su génesis para profundizar en la actividad matemática que le da origen y le caracteriza. Así, presentamos parte de una investigación documental de corte histórico cuyo objetivo es: *identificar las prácticas estocásticas que emergen en la actividad matemática de la génesis del Teorema de Bayes.*

La investigación sobre el Teorema de Bayes se ha posicionado desde dos enfoques, uno cognitivo y otro didáctico. El primero se ha centrado en explicar las formas de razonar de los individuos ante la incertidumbre, lo que ha dado paso a la tipificación de sesgos y heurísticas. Por otra parte, en lo didáctico se hace un llamado a la centración en ciertos recursos (como las visualizaciones, la naturaleza y formato de los datos) como medios para mejorar el razonamiento bayesiano. Dentro de esta, el señalamiento sobre el riesgo pone foco en el papel del contexto, lo que resulta interesante para realizar un acercamiento diferente a las formas desde y cómo se ha realizado la investigación sobre el Teorema de Bayes, en particular, un enfoque social desde el cual el contexto juega un rol sustancial para entender la actividad humana.

En relevancia con lo anterior, la noción de *prácticas* ha sido una manera mediante la cual se han realizado acercamientos en el campo de la Matemática Educativa con una mirada social. Dicha noción podemos situarla en las teorías de prácticas y es un constructo empleado para comprender y explicar la actividad humana en el mundo social. En nuestra disciplina la mirada centrada en prácticas se ha introducido desde diferentes perspectivas teóricas, como ejemplo, podemos considerar las investigaciones de Dogruer y Akyuz (2020), Triantafillou y Potari (2010) y Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022) quienes respectivamente se interesan por reconocer las *prácticas matemáticas* asociadas a ciertos contenidos en el *escenario escolar*, en el *lugar de trabajo* y a través de *fuentes históricas*. Esto habla de que "las prácticas matemáticas no son singulares, monolíticas u homogéneas … y que incluyen múltiples formas …" (Moschkovich, 2013, p. 264).

En este sentido, hemos considerado abordar dicho constructo desde la perspectiva de la Socioepistemología, al reconocer la actividad matemática como actividad humana y por la consideración de distintos tipos de saberes (culto, técnico y popular).

Elementos teóricos

La Teoría Socioepistemológica se ha interesado por estudiar la *construcción social del conocimiento matemático* a través de las *prácticas* (matemáticas) que acompañan y anteceden la producción de conocimiento, es decir, es una perspectiva cuyo interés es estudiar la forma en la que las circunstancias sociales y culturales de la actividad humana enmarcan, regulan y constituyen la producción de conocimiento matemático.

Prácticas matemáticas desde la Socioepistemología

La construcción de conocimiento desde este enfoque queda revelada en una *progresión pragmática de prácticas* también conocida como *anidación de prácticas*. Dicho modelo se compone de la práctica en el nivel acción, seguida por la práctica en el nivel actividad y la práctica socialmente compartida. Así, se entiende la *práctica* (matemática) siguiendo a Schatzki (1996) como el hacer (matemático) organizado de las personas, que se estructura de acuerdo con el contexto donde están situadas y a su vez da significado a lo que se hace. En particular, estamos interesados en reconocer aquellas *prácticas* de *naturaleza estocástica* (las relacionadas con la estadística y la probabilidad) en un escenario histórico. Es decir, se quiere comprender la epistemología intrínseca del Teorema de Bayes a partir de prácticas mediante un análisis del texto original de Thomas Bayes (1763).

Elementos metodológicos

Para el desarrollo del estudio se realizó un análisis cualitativo de datos siguiendo la propuesta de Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa (2022), diseñado para estudios de corte histórico-epistemológico desde la Socioepistemología. Estos autores proponen un esquema metodológico de cinco momentos: 1) determinación del propósito y texto de análisis; 2) recolección, selección y organización de fuentes de datos; 3) pre-análisis de los datos; 4) análisis de datos o historización; 5) interpretación e inferencia.

Por extensión, en este reporte profundizamos en el momento de historización, del que se desprenden directamente los resultados y las conclusiones que aquí presentamos.

Historización

La historización es “el estudio histórico-crítico de la epistemología situada que describe la construcción y constitución del saber matemático” (Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa, 2022, p. 7). Este se realiza mediante un acercamiento histórico-matemático a las matemáticas del pasado y se constituye de manera general por un análisis contextual y otro textual. Como producto de la historización se genera una reconstrucción racional de la actividad matemática atendiendo a sus aspectos situacionales y se identifican las prácticas matemáticas asociadas a la construcción social de un conocimiento matemático específico. Los elementos que conforman la historización pueden verse en la Tabla 1.

Tabla 1
Elementos del análisis histórico-epistemológico

Historización como historia crítica del saber	
Análisis contextual Historia crítica externa del saber a través del contexto de significación	Análisis textual Historia crítica interna del saber a través de la reconstrucción de la actividad matemática
▪ Contexto cultural: características sociales de grupos culturales que reflejan necesidades ideológicas, políticas, cosmovisiones y que rigen su racionalidad. ▪ Contexto situacional: factores o circunstancias espacio–temporales que inciden sobre el sujeto relacionado el saber matemático de interés. ▪ Contexto de la situación específica: actividad matemática específica que origina problemas y soluciones vinculadas con la emergencia del saber.	▪ Acción: es la práctica derivada de las transformaciones realizadas sobre los objetos, dirigidas por un sujeto y suscitadas por el objetivo de la tarea matemática. ▪ Actividad: es la práctica resultante de la organización de acciones articuladas intencionalmente hacia un objetivo de la tarea matemática.

Resultados

Para desarrollar el estudio histórico-epistemológico se seleccionó la obra *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* de Bayes (1763), la cual se reconoce como el primer texto donde se encuentra establecida la construcción de la primera versión del método actualmente conocido como Teorema de Bayes y que muestra un tratamiento de la inferencia inductiva.

Análisis contextual

El *contexto cultural* se enmarca en la Ilustración temprana, período que genera un movimiento hacia la comprensión del mundo (conocimiento humano) a través del pensamiento racional, en lugar de las creencias religiosas. Algunas características de este período son: las luchas religiosas entre miembros de la iglesia establecida en Inglaterra y los disidentes o inconformistas, de la cual la familia Bayes era partidaria; uno de los principales representantes científicos fue Newton sobre el cual el propio Bayes escribe una obra; el desarrollo de la doctrina filosófica denominada empirismo, promovida por Locke y Hume. En particular, la visión empirista de Hume da paso al llamado problema de la inducción, el cual es un rechazo a la inferencia inductiva. De acuerdo con Stigler (2013) el trabajo de Bayes busca ser una herramienta defensiva para combatir las afirmaciones de Hume mediante la probabilidad.

En relación con el *contexto situacional*, este está impregnado por el desarrollo y progreso de la naturaleza de los tipos de problemas de probabilidad hacia el *siglo XVIII*: pasando por el análisis de situaciones simétricas, transitando por situaciones asimétricas y de probabilidad conocida y finalizando en situaciones de probabilidad desconocida.

El *contexto de la situación específica* se caracteriza por una inversión en los análisis de probabilidad de Bernoulli y de Moivre. Dicha forma de análisis era un tránsito de razonar a partir *de las causas a los efectos* a *de los efectos a las causas*. El problema matemático del texto puede sintetizarse de la siguiente forma: si se sabe que en n pruebas un suceso se ha observado p veces, ¿qué se puede decir de la probabilidad del suceso? Cabe destacar que para el desarrollo de las proposiciones a través de las cuales se da solución al problema, Bayes propone un modelo físico que consta de una mesa plana y cuadrada, sobre la que se lanzan bolas sin apuntar y la medida de probabilidad está en relación con las propiedades geométricas del modelo. De acuerdo con Daston (1988), el método construido en el texto de Bayes permite "determinar 'en qué grado' las observaciones confirman una conjetura dada y así *medir* 'la fuerza del razonamiento analógico o inductivo'" (p. 256, resaltado en el original).

Análisis textual

Para llevar a cabo este análisis tomamos como referencia el texto original de Bayes (1763), traducciones del texto original (Bayes, 1763/2001) e interpretaciones del texto (Dale, 1999). El análisis textual se llevó a cabo mediante el desarrollo de tres momentos: una etapa descriptiva, una analítica y una inferencial. A manera de ejemplo, mostraremos el análisis de la proposición 8:

> Si sobre BA se alza la figura $BghikmA$ con la siguiente propiedad de que … $y = Ex^p r^q$, entonces digo que antes de lanzar la bola W, la probabilidad de que el punto o se encuentre entre f y b, dos puntos cualesquiera de la línea AB, suponiendo que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p + q$ pruebas, es la razón entre $fghikmb$ … y CA el cuadrado sobre AB. (Bayes, 1763, p. 388)

En la primera etapa se reconoció la estructura discursiva del texto en general y de cada una de las proposiciones con el fin de tener un conocimiento del contenido, construir bloques de proposiciones con un objetivo común y hacer una reconstrucción de estas vinculada con la solución del problema matemático. La obra de Bayes se divide en cuatro partes principales: 1) planteamiento del problema; 2) teoría base (definiciones y proposiciones); 3) construcción del método solución; 4) empleo del método en situaciones específicas. La Figura 1 muestra la estructura de la proposición 8 (tercera sección), una descripción de los elementos que la conforman y la red de proposiciones y lemas con las que se vincula.

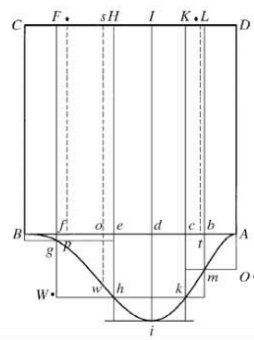
PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS			
Mini-genero	**Preguntas**		**Proposición 8**
Enunciado	**¿Qué hace?**	¿Qué se quiere demostrar?	Que la probabilidad de que el punto o se encuentre entre f y b en AB y que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces, es la razón entre $fghikmb$ y CA.
Exposición	**¿Qué hace?**	¿Qué objetos estocásticos tiene para demostrarlo?	**Sucesos**: **Primer suceso**: el punto o esté entre f y b (el punto o define el suceso M); **Segundo suceso**: el suceso M ocurre p veces y no ocurre q veces en un total de $p+q$ pruebas. **Distribución**: con la propiedad de que $y = Ex^p r^q$ donde y,x,r representan respectivamente las razones de $y = bm/AB$, $x = Ab/AB$, $r = Bb/AB$ y E es el coeficiente del término en el que aparece $a^p b^q$ cuando se desarrolla el binomio $(a+b)^{p+q}$. 
Especificación	**¿Qué hace?**	¿Qué se hace en la proposición?	Demostrar por contradicción mediante la comparación de probabilidad conjunta de los dos sucesos para distintas regiones entre f y b, que las medidas de probabilidad en conjunto no son mayor ni menor que cierta razón supuesta.
Demostración	**¿Cómo lo hace?**	¿Cuáles herramientas matemáticas utiliza para demostrar?	**Lema 1**: Medición de la probabilidad. **Lema 2**: Probabilidad del suceso éxito (suceso M). **Proposición 1 – Corolario**: Probabilidad del suceso fallo para sucesos inconsistentes. **Proposición 3**: Probabilidad conjunta para sucesos dependientes. **Proposición 7**: Probabilidad binomial.
Conclusión	**¿Para qué lo hace?**	¿Cuál o cuáles intenciones tiene la proposición?	Establecer la medida de la probabilidad conjunta de dos sucesos dependientes.

Figura 1. Primer análisis de la proposición 8 del texto de Bayes (1763)

En la segunda etapa se hizo una reconstrucción en términos de acciones y actividades mediante las preguntas analíticas ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿para qué hace lo que hace?, que permiten reconocer los aspectos intencionales, operativos y funcionales. En la Figura 2, se muestra el análisis de la actividad matemática de la proposición 8, en la cual se identifica que la práctica a nivel actividad es la medición de la probabilidad conjunta y se organiza a través de prácticas de nivel acción como la definición de sucesos, la conjetura, la medición de las probabilidades de los sucesos. Cabe destacar que en esta proposición subyacen distintas medidas de probabilidad a cuantificar para obtener una nueva medida de probabilidad.

SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS
Acciones ¿Qué hace? ¿Cómo lo hace?
A partir de la consideración de un *punto o* en AB que define el suceso M (región sobre *Ao*), se determina la ***medida de probabilidad del suceso M*** empleando el *Lema 2*. Luego se determina la ***medida de probabilidad del suceso contrario***, es decir, la probabilidad de que no ocurra el suceso *M* (región sobre *Bo*) empleando el *corolario de la proposición 1*. Considerando estas medidas, se establece la ***medida de probabilidad de la ocurrencia del suceso M en $n = p + q$ pruebas*** mediante la *proposición 7*. A partir de lo anterior quedan definidos dos sucesos: el primero sobre la posición del punto o y el segundo sobre la ocurrencia del suceso M en n pruebas en relación con la posición del punto o. Ahora se ***conjetura*** un intervalo en el que se encuentra el punto o que define el suceso M. Se hace una partición del intervalo y de forma homóloga para cada intervalo se sigue lo siguiente: se determina la medida de probabilidad de que el punto o esté en cierto intervalo de la partición y la medida de probabilidad del suceso en $p + q$ pruebas, supuesta la ocurrencia del primer suceso. Y mediante la *proposición 3* se cuantifica la ***medida de probabilidad conjunta*** de los sucesos. Luego, bajo la consideración de la *proposición 1* se establece la ***medida de probabilidad de sucesos inconsistentes*** (cada uno de los intervalos de la partición).
Actividades ¿Para qué lo hace?
Se determina la *medida de probabilidad de ambos sucesos* para los distintos intervalos con el objetivo de establecer la **medida de probabilidad conjunta** para la variable posición del punto o en AB (en el intervalo supuesto) y la variable número de ocurrencias del suceso M en n pruebas.

Figura 2. Segundo análisis de la proposición 8 del texto de Bayes (1763)

La tercera etapa, ha permitido identificar que el objetivo principal de Bayes era partir de ciertas observaciones para el estudio de la probabilidad del suceso y para ello se necesitaba de una conjetura sobre la probabilidad desconocida como punto de partida. Por otra parte, el significado de la medida de probabilidad está asociado con el experimento y refiere al grado de certeza que tiene la conjetura dada, sobre la verdadera probabilidad.

Conclusiones

Derivado de la historización se han reconocido algunas prácticas estocásticas asociadas con el Teorema de Bayes en el escenario histórico, como: experimentar, registrar datos, conjeturar, medir la probabilidad de la conjetura. De manera puntual, la práctica de medir la probabilidad de la conjetura adquiere el nivel de actividad y las restantes prácticas el estatus de acciones. El análisis también nos ha permitido identificar que la actividad matemática en la génesis del Teorema de Bayes está permeada por la noción de equiprobabilidad y asociada con un experimento de naturaleza binomial, lo que resulta en un modelo que atiende a una situación específica y cuya estructura es menos compleja a la forma en que se aborda este conocimiento matemático en el escenario escolar.

Por otra parte, estos elementos identificados en el estudio pretenden ser la base de un modelo epistemológico específico para el Teorema de Bayes a partir de prácticas estocásticas que describa la construcción social de este conocimiento matemático. El modelo busca ser un referente para la construcción de diseños para el aula y como herramienta analítica para el estudio de la actividad estocástica en el escenario escolar.

Referencias y bibliografía

Bayes, T. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions*, *53*, 370–418. https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053

Bayes, T. (2001). Un ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar (M. A. Gómez Villegas, F. J. Girón, M. L. Martínez y D. Ríos Insua, Traducción). *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales* (Esp), 95(1-2), 63-80. (Trabajo original publicado en 1763).

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2, 5-27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32

Borovcnik, M. (2021). Corner pillars of Probability Literacy. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 602-607). International Statistical Institute.

Carranza, P. (2014). Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en francia. *Educação Matemática Pesquisa*, *16*(3), 1071-1087. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21597

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. *Acta Scientiae*, *24*(4), 81–108. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

Dale, A. (1999). *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson* (2ª ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8652-8

Daston, L. (1988). *Classical Probability in the Enlightenment*. Princeton University Press.

Dogruer, S. S. y Akyuz, D. (2020). Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 1485–1505. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x

Moschkovich, J. N. (2013). Issues regarding the concept of mathematical practices. En Y. Li y J. N. Moschkovich (Eds.), *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching* (pp. 257–275). Sense Publishers.

Schatzki, T. R. (1996). *Social practices: a wittgensteinian approach to human activity and the social*. Cambridge University Press.

Stigler, S. M. (2013). The True Title of Bayes's Essay. *Statistical Science*, *28*(3), 283–288. https://doi.org/10.1214/13-STS438

Triantafillou, C. y Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics, 74*(3), 275–294. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9237-6

Vancsó, O., Borocnik, M. y Fejes-Tóth, P. (2021). A complex concept about statistical inference and a planned school experiment based on it. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 596-601). International Statistical Institute.

Vargas-Zambrano, L. C. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Los cortes del cono en la Geometría Griega: una caracterización de usos y significados más allá de la anécdota. *Revista de História da Educação Matemática*, *8*, 1-23. https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/514

Índice alfabético de Autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Historia y Epistemología

Volumen 7, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

ISBN: 978-9945-18-791-5

9 789945 187915

https://ciaem-iacme.org