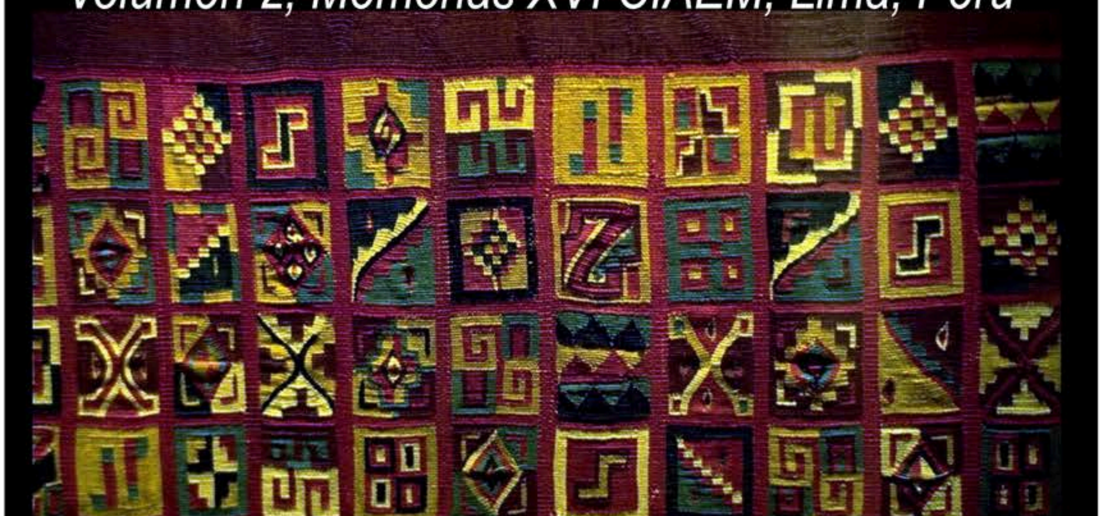
EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje

Volumen 2, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú



Patrick Scott, Yuri Morales
y Angel Ruiz
Editores

CIAEM IACME
desde - since 1961

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2023
Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje
[Volumen 2, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-786-1
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: "un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas" (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con "sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo". Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional.*

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

El presente volumen es parte de la colección digital *Educación Matemática en las Américas 2023*, que corresponde a las *Memorias* de la *XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (celebrada en Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023).

Los diez volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Estos volúmenes se pueden revisar o descargar gratuitamente en la página ***Memorias XVI CIAEM*** del sitio principal del CIAEM.

A avaliação da aprendizagem em uma aula investigativa de Geometria

Stephanie Pereira **Codato**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, câmpus Campos do Jordão
Brasil
stephaniecodato.b@gmail.com
Danilo Guaituli **Cardoso**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, câmpus Campos do Jordão
Brasil
d.guaituli@aluno.ifsp.edu.br
Maura Araujo **Dias**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, câmpus Campos do Jordão
Brasil
maura.dias@ifsp.edu.br

Nesta pesquisa, buscamos refletir sobre o processo de avaliação de uma experiência de aula de Geometria utilizando materiais manipuláveis através da aula investigativa, realizada por meio de uma oficina no curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior. A oficina baseou-se nos documentos oficiais que norteiam a Educação Básica brasileira, que aborda o ensino de Geometria como indispensável para o desenvolvimento do cidadão, pois ao desenvolver o pensamento lógico e analítico, promove uma formação integral do indivíduo, prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros. De acordo com Lorenzato (1995, p. 5):

> A Geometria está por toda parte [...], mas é preciso conseguir enxergá-la [...], lida-se no cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, semelhança, proporcionalidade, medição, simetria: seja pelo visual, seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente se está envolvido com a Geometria.

Considerando esse aspecto, o do desenvolvimento do pensamento lógico e analítico, a aula foi pensada para o 7º ano do Ensino Fundamental, em que um dos objetivos foi experimentar a medição de volume a partir da comparação de blocos retangulares presentes no cotidiano com o cubo unitário. Na atividade, os alunos utilizaram os blocos unitários do material dourado para, inicialmente, contar quantos cubos unitários cabiam em cada um deles e, a partir dos comandos seguintes, medir comprimento, largura e altura dos blocos comparando com a aresta do bloco unitário. Então, foram estimulados a construir conjecturas sobre a relação entre comprimento, largura, altura e volume. A oficina foi dividida em 4 momentos, sendo eles: reconhecimento e exploração preliminar da situação; formulação de conjecturas; realização de teste e refinamento das conjecturas; argumentação e apresentação das conjecturas.

Com o objetivo de avaliar o desenvolvimento da aula, foi escolhida a avaliação do tipo formativa, dado que, ao utilizar a metodologia de aula investigativa, uma avaliação somativa iria contra todos os fundamentos que embasam a aula. Buscamos orientar o educando quanto ao processo de ensino-aprendizagem em que estava inserido (Allal, Cardinet, & Perrenoud, 1986). Apesar de a avaliação somativa indicar resultados imediatos devido ao conteúdo escolhido da aula, optamos pela formativa dado que se tinha como objetivo investigar a estrutura do pensamento e das ações do indivíduo durante a aula. Elencamos os seguintes critérios avaliativos: a contribuição com ideias para o debate, a cooperação em cada passo da construção da conjectura e, por fim a argumentação sobre as conjecturas construídas, ou seja, como se deu a construção do conhecimento matemático. Os objetivos eram verificar que os alunos: (a) reconheceram a ideia de medição como comparação, tanto ao comparar o volume do bloco com os cubos unitários, quanto ao comparar os comprimentos com a aresta unitária; (b) perceber que os cubos formavam "filas", "camadas" e por fim blocos; (c) verificar que o volume do bloco pode ser obtido através do produto das medidas das suas arestas. Tendo em vista que a turma foi dividida em cinco grupos de 3 a 5 pessoas, participar e cooperar foram essenciais para uma aprendizagem coletiva e significativa dos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

Durante a execução deste trabalho pudemos refletir sobre as dificuldades em avaliar, pois este processo avaliativo, levando em conta os critérios estabelecidos, não nos garantiu a consistência desejada na avaliação; mesmo que a maioria dos estudantes tenha demonstrado apropriação do conhecimento construído ao longo da oficina, não conseguimos estabelecer com a precisão desejada os objetivos específicos que cada um atingiu. Observamos que, por vezes, eles não conseguiram se inserir no processo de avaliação, seja por medo de se expor em uma discussão em grupo ou por não dominarem a linguagem e as habilidades de comunicação necessárias para defender seus pontos de vista. Sentimos que durante a execução da oficina os educandos pareceram não reconhecer a avaliação ali realizada, pois estavam acostumados a folhas que denotavam explicitamente que se tratava de um exercício ou problema matemático. Ao entregar uma folha que apenas orientava as anotações, pudemos perceber que eles pareciam não reconhecer que foram avaliados, devido à ausência de aspectos somativos no processo avaliativo determinado e planejado pelos professores.

Percebemos que nos faltou a experiência na utilização dessa forma de avaliação, que é importante pois demanda uma orientação constante do educando no processo de ensino-aprendizagem, e tempo de execução (em que muitas das vezes é limitado a 45 minutos), restringem o sucesso de se utilizar uma avaliação formativa que é processual e contínua. Podemos concluir que ao utilizar uma avaliação que não apenas classifica, seleciona e verifica, de modo que vai contra as avaliações predominantes nas instituições brasileiras, os educandos sentiram dificuldade em reconhecer e visualizar a avaliação que está inserida dentro do contexto de ensino-aprendizagem. Assim, como proposta para uma próxima atividade, propomos uma avaliação mais explícita, com comandos que solicitem o registro de cada passo da discussão do grupo.

Referências e Bibliografia

Allal, L.; Cardinet, J.; & Perrenoud, P. (1986). *A avaliação formativa num ensino diferenciado.* Coimbra: Livraria Almedina.

Lei nº 9394/96 do Ministério da Educação e Ciência (1996). *Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: MEC. BRASIL.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*, nº4, pp. 3-13.

A construção de registros de representações matemáticas por alunos Cegos

Elisabete Marcon **Mello**
Universidade Federal do ABC
Brasil
marcon.elisabete@gmail.com

Resumo

Este estudo investigou como uma aluna cega identifica e entende objetos geométricos por meio de suas representações semióticas e se o fato de ter a possibilidade de construir seus próprios registros de representação poderia auxiliar em seu aprendizado. A aluna, com cegueira adquirida no início de sua vida escolar, estava cursando o primeiro ano do Ensino Médio. Para que ela pudesse desenhar, foi utilizado um produto desenvolvido e patenteado chamado Prancheta de Desenho em Relevo Positiva. O estudo mostra que quando a aluna cega fez seu próprio desenho, pôde construir os registros de representação matemática no papel, ela se apropriou efetivamente destas representações, reconhecendo suas características e compreendendo suas propriedades.

Palavras-chave: Aluna cega; Registros de representação matemática; Desenho; Geometria; Prancheta de Desenho em Relevo Positiva; Brasil.

Introdução

No Brasil, a Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva determina que os sistemas de ensino devem proporcionar condições de acesso aos espaços, aos recursos pedagógicos e à comunicação a fim de promover a aprendizagem, a valorização das diferenças e o atendimento das necessidades educacionais de todos os alunos (BRASIL, 2008). Infraestrutura adequada e profissionais qualificados são essenciais para garantir educação de qualidade para todos.

De acordo com Duval (1999), os sistemas de representação semiótica são fundamentais para o pensamento matemático, pois não há outra maneira de se ter acesso aos objetos matemáticos a não ser por meio dessas representações. É necessário cuidado e atenção ao se trabalhar com registros de representação matemáticos com alunos cegos, principalmente no campo da geometria, pois esse aluno tem acesso a essas representações pelo tato, que é diferente do acesso pela visão. Um questionamento que pode surgir é: esta diferença pode afetar o aprendizado desse aluno?

Para estudar melhor esta questão, foi desenvolvida uma pesquisa em que foi investigado como um aluno cego identifica e compreende objetos geométricos por meio de suas representações semióticas e se o fato deste o aluno ter a possibilidade de construir registros de representação matemáticos no papel o auxiliaria em seu aprendizado.

Segundo Duval (1995, 2005), as representações são essenciais à atividade cognitiva do pensamento humano. Para ele a geometria é um domínio de conhecimento que exige a articulação cognitiva de dois registros de representação muito diferentes: a visualização de formas para representar o espaço e a linguagem para enunciar propriedades e para deduzir novas. No contexto de Duval (1999), "ver" uma representação vai além de enxergar, é entender o que está implícito na representação, é visualizar. Sendo assim, mesmo sem o recurso visual, um aluno cego poderia visualizar objetos geométricos se, por meio do tato, conseguisse reconhecer suas características.

Para reconhecer uma representação, quem enxerga compara imagens, o cego compara formatos e isso nem sempre é considerado de forma adequada na educação, muitas vezes por falta de informação e conhecimento (Mello, 2015). Para resolver problemas geométricos, é comum se fazer construções ou esboços no papel para ajudar na organização das ideias. O desenho é uma forma de representar e comunicar ao outro a imagem mental referente a algum objeto ou alguma situação. Mas como um aluno cego poderia desenhar sentindo o desenho que está fazendo?

Para esse propósito, foi desenvolvido um produto que possibilita ao cego fazer seus próprios desenhos, chamado de Prancheta de Desenho em Relevo Positiva, com o qual foi realizada essa pesquisa. A Prancheta de Desenho em Relevo Positiva é uma placa com pontos em relevo de forma que o usuário possa, por meio de uma folha de papel colocada sobre ela e o auxílio de um giz de cera ou lápis de cor com ponta grossa, imprimir os pontos em relevo de forma que o aluno cego possa sentir o desenho em relevo durante sua construção (figura 1).

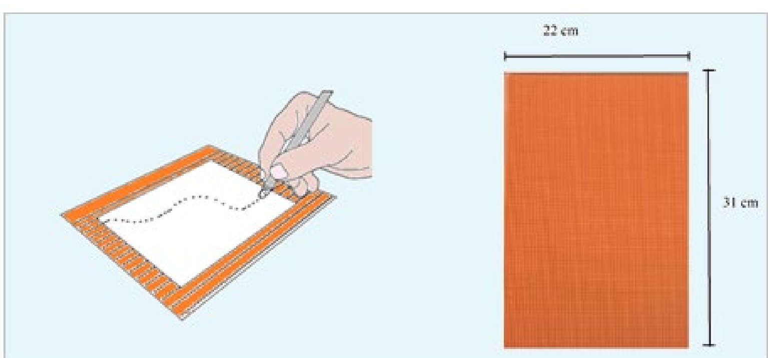


Figura 1. Prancheta de Desenho em Relevo Positiva.

Metodologia da pesquisa

De acordo com Bogdan e Biklen (1982), essa investigação caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, pois, a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação, buscou-se compreender comportamentos, em contato direto com os participantes em seu próprio ambiente escolar.

Dentre os tipos de pesquisas qualitativas, este trabalho se enquadra como estudo de caso que, segundo Stake (1995 apud ANDRÉ, 2005), é o estudo da particularidade e da complexidade de um caso singular, levando a entender sua atividade dentro de importantes circunstâncias. De acordo com a autora, o estudo de caso pode focar em uma situação, um programa ou um fenômeno particular e engloba um grande número de variáveis, sendo o produto final uma descrição completa e literal da situação investigada.

Essa pesquisa foi realizada com alunos cegos de uma escola pública do estado de São Paulo, Brasil. Os resultados aqui apresentados se referem às atividades realizadas com uma aluna do primeiro ano do Ensino Médio, com cegueira adquirida no início de sua vida escolar, durante sua alfabetização.

Não houve um roteiro rígido para a aplicação das atividades, o estudo foi realizado na própria escola em que a aluna cega estudava e as atividades foram sendo adaptadas de acordo com suas respostas e seu desenvolvimento.

Desenvolvimento do estudo

Antes do início das atividades, constatou-se que a aluna, apesar de estar no Ensino Médio, tinha pouco conhecimento sobre geometria. Foi disponibilizado um tempo para que a aluna interagisse com a Prancheta de Desenho em Relevo Positiva e, quando já estava familiarizada com o material, foi solicitado que, utilizando a prancheta e o lápis, desenhasse um retângulo e um triângulo (figura2).

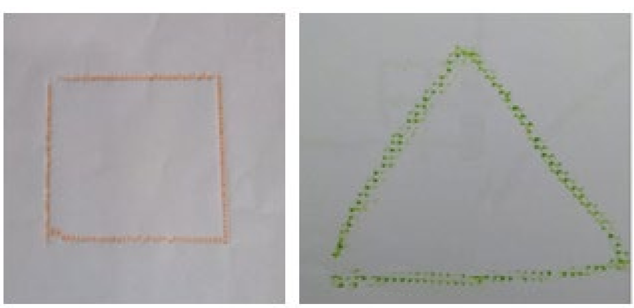


Figura 2. Desenho de figuras geométricas feito pela aluna cega.

A forma como os pontos em relevo estão dispostos na prancheta auxiliou na construção de uma linha reta, mesmo sem a utilização de régua. Após a realização do desenho, foi pedido para que a aluna observasse a quantidade de lados e os ângulos do retângulo e do triângulo, falasse sobre as características de cada um e identificasse as diferenças entre eles. Poder construir a figura geométrica ajudou a aluna a visualizá-las e reconhecer suas propriedades. O fato do desenho, além de estar em relevo, estar também à tinta, facilita a visualização do trabalho pelos professores ou por qualquer pessoa que possa enxergar.

Analisando sob a perspectiva de Duval (1988), é possível observar que houve a apreensão perceptiva que é o reconhecimento imediato das formas geométricas e, parcialmente, a apreensão discursiva que é a explicitação de propriedades matemáticas e a articulação da figura com suas características.

Para a próxima atividade foi adaptada uma ponta de giz de cera em um compasso e solicitado que a aluna construísse uma circunferência. Ela teve dificuldades para manusear o instrumento, pois era a primeira vez que o fazia. Depois de várias tentativas, conseguiu esboçar uma circunferência utilizando o compasso e a prancheta em relevo. A utilização do compasso ajudou a aluna a visualizar e entender a circunferência como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto central, um conceito que era abstrato para ela e se tornou compreensível com o uso do instrumento (figura 3).

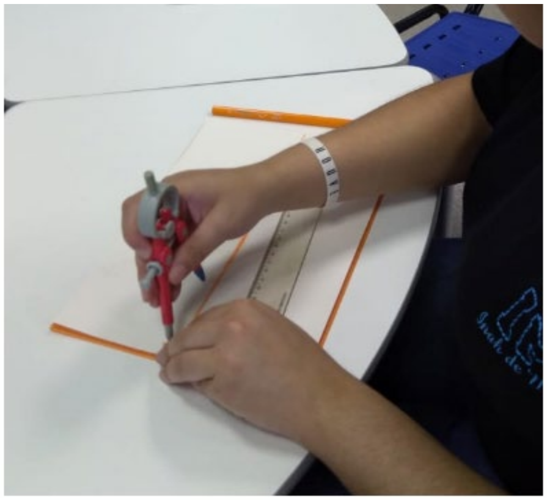


Figura 3. Aluna cega aprendendo a usar o compasso.

Ter a possibilidade de fazer e compreender as construções geométricas favoreceu a aprendizagem da aluna e auxiliou na visualização dos objetos geométricos, pois, de acordo com Duval (2005), é por meio da utilização de instrumentos de construção geométrica que os alunos podem verdadeiramente tomar consciência de que as propriedades das figuras não são somente características perceptivas, e podem experimentar as propriedades geométricas como as limitações de construção.

Como constatou-se que a aluna estava com dificuldade para entender a representação de pontos no plano cartesiano, este foi o próximo assunto abordado. Foi decidido verificar se a aluna conseguiria construir o plano cartesiano, para isso, foi adaptada uma régua na lateral da prancheta para que ela pudesse utilizar o esquadro. Ela não teve dificuldades para utilizar um esquadro e traçar a reta horizontal, mas precisou de ajuda durante a construção da reta vertical, pois foi necessária a utilização de dois esquadros e ela não estava acostumada a manipular estes instrumentos (figura 4).

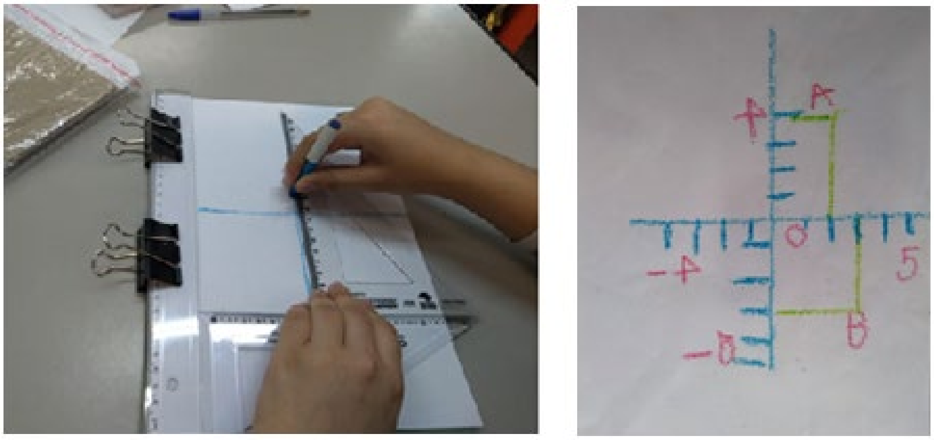


Figura 4. Aluna utilizando a prancheta e esquadros para construir plano cartesiano em relevo.

A aluna utilizou a medida do seu dedo para marcar os pontos sobre os eixos. Como ela possui memória visual, conseguiu escrever o zero na origem do plano e o número correspondente ao último ponto que marcou em cada eixo. Em seguida localizou os pontos A (2, 4) e B (3, -3) no plano. É possível observar (figura 4) que ela escreveu o algarismo 4 de forma espelhada, pois, como ficou cega no início de sua alfabetização, o aprendizado dos números a tinta ainda não estava concretizado quando iniciou sua alfabetização em Braille.

Foi a primeira vez que a aluna construiu o plano cartesiano, ela sempre utilizava algum que havia sido preparado por outra pessoa. Poder construir este registro de representação a auxiliou no entendimento do conceito do Plano Cartesiano e sua funcionalidade. Ela expressou muita satisfação em realizar esta atividade, pois, ao desenhar e escrever os números, estava fazendo uma tarefa que achava que não mais poderia após ter perdido a visão. A possibilidade de desenhar foi o resgate de algo que parecia impossível, e isso lhe restituiu uma autonomia que julgava perdida.

De acordo com Mendes e Monteiro (2016), diferentemente do cego congênito, os cegos com cegueira adquirida revelaram sentimentos de perdas resultantes da deficiência visual e apresentam sinais claros da dificuldade de enfrentar a perda da visão, eles vivem um período de dor pela perda de algo que tinham e não têm mais. Possibilitar ao indivíduo cego fazer algo que julgava não mais ser possível, como é o caso do desenho, é o resgate de uma condição anterior e cria uma alternativa a mais de expressão para essas pessoas.

Considerações finais

Durante esse estudo, foi possível observar o progresso no aprendizado da aluna e constatar que, quando ela fez seu próprio desenho, criou seu registro de representação no papel, ela se apropriou efetivamente desta representação, podendo usá-la como uma ferramenta de apoio às suas atividades cognitivas.

Os resultados apontam que a possibilidade de construir objetos geométricos em relevo no papel pode proporcionar a um aluno cego um novo caminho para reconhecer esses objetos e identificar suas propriedades, ou seja, que ele possa realmente visualizar essas representações.

Foi possível perceber que a utilização da Prancheta de Desenho em Relevo Positiva facilitou a comunicação entre a professora e a aluna cega, pois as representações desenhadas pela aluna, além de estarem em relevo, estão também à tinta, facilitando o entendimento não só pelo tato, mas também pela visão.

O próximo passo na continuidade desse estudo será a utilização deste material para trabalhar as representações matemáticas com alunos cegos congênitos.

Referências

André, M. E. D. A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional.* Liberlivros.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1982). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brasil. (2019). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. *Política nacional de educação especial na perspectiva da educação inclusiva***.** 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/politica.pdf.

Duval, R. (1988). *Approche cognitive des problèmes de géométrie em termes de congruence.* Annales de Didactiques et de sciences cognitives. IREM de Strarsbourg v.1, p.57-74.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. Basic issues for learning.

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 10, p. 5–53.

Mello, E. M. (2015). *A Visualização de Objetos Geométricos por Alunos Cegos: um estudo sob a ótica de Duval*. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil.

Mendes, F. A. F. & Monteiro, M. I. B. (2016). Implicações da Perda da Visão para o Processo de Ensino da Leitura e Escrita Braille. *Revista Diálogos e Perspectivas em Educação Especial*, v.3, p. 14-23.

A Educação Matemática Crítica e o ensino de funções nos livros didáticos brasileiros do Ensino Médio

Rosângela Ferreira **Domingues**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
rosangela.domingues@rede.ulbra.br
Clarissa de Assis **Olgin**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
clarissa_olgin@yahoo.com.br

Resumo

A Educação Matemática Crítica (EMC) é a preocupação da Educação Matemática com o papel social que a Matemática deve desenvolver. Essa pesquisa, bibliográfica e de natureza qualitativa, visa investigar como está sendo abordada a EMC nos livros didáticos do Ensino Médio que são distribuídos às escolas públicas brasileiras, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Para tanto, analisou-se as atividades presentes nos conteúdos de funções nas coleções de livros didáticos constantes do Guia do Livro Didático 2021, a partir dos pressupostos da EMC: a matemacia, a reflexão e os cenários de investigação. Como resultado, pode-se observar que todas as obras analisadas apresentam possibilidades de trabalhar a reflexão ou com os cenários de investigação, podendo ser desenvolvida a matemacia na perspectiva de uma EMC.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica; Livro didático brasileiro; Ensino de funções; Ensino Médio; Programa Nacional do Livro Didático.

Introdução

Esse artigo é parte da pesquisa de doutorado da primeira autora, que está em andamento e tem como temática as contribuições da Educação Matemática Crítica (EMC) para o desenvolvimento de uma sequência didática envolvendo o conteúdo de funções relacionado aos Temas Contemporâneos Transversais indicados pelo documento orientador da educação Básica Brasileira, denominado Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Esse trabalho tem por objetivo investigar como está sendo abordado o conteúdo de funções nos livros didáticos, do Ensino Médio, disponibilizados pelo Ministério da Educação, no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), buscando identificar os assuntos que são tratados e se contribuem para uma EMC. Para tanto, será apresentado um recorte do referencial teórico sobre a EMC e o ensino de funções, bem como a pesquisa bibliográfica referente aos livros didáticos de Matemática, aprovados no PNLD e a análise de como a EMC pode ser explorada nas atividades presentes nos conteúdos de funções nas coleções desses livros.

A Educação Matemática Crítica

A Educação Matemática Crítica tem como precursor o professor dinamarquês Ole Skovsmose, que tem se dedicado a essa temática desde os anos de 1970 influenciado pelos movimentos estudantis e, em 1994, começa a reformulação da ideia da EMC como uma Educação Matemática (EM) com uma preocupação em relação ao papel social da Matemática (Skovsmose, 2010). Para o autor, muitas ações são desenvolvidas através da Matemática, como as inovações tecnológicas, os procedimentos econômicos, os processos de automação, o gerenciamento, a tomada de decisão, dentre outras. Como essas ações fazem parte do cotidiano, elas devem ser analisadas de forma crítica.

Para Skovsmose (2015), a Matemática pode ter um poder de potencializar os estudantes, desde que seja trabalhada de forma a desenvolver a inteligência, promover uma maior chance de sucesso pessoal, assumindo um papel social e político. Para o autor, esse papel sociopolítico da Matemática pode ser desenvolvido à medida que a EM é realizada por meio de projetos que tenham como objetivos a aplicação e desenvolvimento de conceitos matemáticos em problemas de situações do cotidiano relacionados a questões sociais, econômicas ou políticas. Dessa forma, desenvolvendo a matemacia, que o autor conceitua como sendo o desenvolvimento de habilidades para entender, operar e aplicar ideias, algoritmos e procedimentos da Matemática em uma variedade de situações, além de habilidades para se refletir sobre todas essas aplicações.

A partir do desenvolvimento da matemacia, pode-se atingir o que Skovsmose (2001, p. 56) aponta como competência democrática: “uma característica socialmente desenvolvida da competência que as pessoas a serem governadas devem possuir, de modo que possam ser capazes de julgar os atos das pessoas encarregadas de governar”. Essa competência deve ser desenvolvida também no âmbito educacional a partir de situações de aprendizagem diferenciadas que possam contemplar as diversas situações vivenciadas pelos estudantes, visando a construção de conhecimentos críticos sobre o contexto trabalhado. E essas situações de aprendizagem devem levar em conta, um dos principais conceitos da EMC, a reflexão.

Para Skovsmose (2010), as ações que são desenvolvidas através da Matemática são objetos de reflexão, e essas reflexões podem ser *com*, *sobre* e *por meio* da Matemática. Sendo que: nas reflexões *com* a Matemática, ela é a tida como uma ferramenta para auxiliar as reflexões econômicas, políticas e sociais; nas reflexões *sobre* a Matemática, são as situações que envolve tomada de decisões utilizando dados matemáticos; e nas reflexões *por meio* da matemática, acontecem em situações de aprendizagem que envolvem investigações matemáticas, com reflexões a partir de propriedades matemáticas, com abordagens de diferentes aspectos do tópico estudado, abrindo caminhos para reflexões de outras naturezas pertinentes ao contexto estudado.

Para possibilitar que haja espaço para a reflexão, levando-se ao desenvolvimento da matemacia, Skovsmose (2010) apresenta o conceito de cenários de investigação, descritos como sendo situações em sala de aula em que o professor incentiva os estudantes a fazerem questionamentos sobre um assunto determinado, a partir de modelos de situação Matemática relacionada à realidade, podendo-se fazer descobertas por meio de alterações no modelo proposto, produzindo significados para a situação estudada. Para o autor, uma aula com cenários de investigação difere de uma aula baseada no ensino tradicional, pois pode ser realizada a partir de situações de aprendizagem com referências à realidade, à semirrealidade e, até mesmo, somente à Matemática pura. Assim, a Matemática é aplicada de forma a promover uma EMC, podendo possibilitar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos de forma autônoma e reflexiva, considerando o papel estruturante da Matemática nas diversas áreas econômicas e sociais, mas Skovsmose (2010) aponta que não é necessariamente o único caminho para esse fim e que, professores e alunos, devem refletir durante todo o percurso, inclusive para traçar as rotas a seguir.

O livro didático brasileiro

No Brasil, em todo o território nacional, as escolas públicas têm direito a livros didáticos que são distribuídos pelo Ministério da Educação (MEC) por meio do PNLD, desde 1937. A etapa do Ensino Médio começou a ser contemplada com esse programa em 2005, de forma gradativa (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação [FNDE], 2017).

Atualmente, o PNLD, é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público, que são atendidos em etapas alternadas e periódicas. O FNDE é responsável pela compra e distribuição dos materiais e livros didáticos selecionados pelo MEC, através da Secretaria de Educação Básica (SEB). O FNDE também é responsável pela logística do provimento e do remanejamento dos materiais didáticos para todas as escolas públicas do país cadastradas no censo escolar (Ministério da Educação [MEC], 2018).

Antes do livro didático chegar na escola, há todo um processo, que começa com o cadastramento das obras que passarão por avaliações pedagógicas coordenadas pelo MEC, com a participação de Comissões Técnica específica, integrada por especialistas das diferentes áreas do conhecimento correlatas formadas para atender ao ciclo a que se referir o processo de avaliação. Após a aprovação, as obras compõem o Guia do Livro Didático que serão distribuídos para as escolas para avaliação e escolha pelos professores das áreas pertinentes. Todas as etapas do processo contam com prazos no ano anterior ao que o livro começará a ser utilizado pelos alunos e professores, sendo que deverá ser utilizado pelo prazo de três anos (FNDE, 2017). A partir do PNLD de 2021, o prazo de utilização dos livros passa a ser de quatro anos.

A análise feita nesse trabalho foi a partir das dez coleções de livros didáticos da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, restringindo-se aos volumes e capítulos referentes ao conteúdo de funções. As obras foram disponibilizadas pelas editoras participantes do PNLD 2021 por meio do Guia Digital (2021), sendo que os livros adotados devem ser utilizados no período de 2022 a 2025.

O ensino de funções é um dos principais conteúdos do Ensino Médio, etapa escolar ofertada no Brasil aos alunos com idade entre 15 e 18 anos (idade regular). Sendo o conceito de função um dos mais importantes da Matemática (da Ponte, 1990). A história das funções passa pelas figuras históricas: Newton (1642-1727), Leibniz (1643-1716) – sendo este o primeiro a usar o termo função em 1673; João Bernoulli (1667-1748); Euler (1707-1783); Fourier (1768-1830); Dirichlet (1805-1859); Cantor (1845-1918) e outros. Cantor iniciou o desenvolvimento da teoria de conjuntos o que possibilitou o entendimento da noção de função mais próxima da que se tem atualmente, mas para o autor, esse conceito ainda continua em evolução (da Ponte, 1990).

Para da Ponte (1990, p.6): "O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências". Sendo este último aspecto que será abordado nessa pesquisa.

No quadro 1 apresenta-se a editora, o título da coleção e o volume que será analisado.

Editora	**Título da coleção**	**Volumes**	**Volume a ser analisado**
Moderna	Conexões - Matemática e suas Tecnologias	Grandezas, álgebra e algoritmos; Funções e aplicações; Estatística e probabilidade; Trigonometria; Geometria plana e espacial; Matrizes e geometria analítica.	Funções e aplicações.
SM	Diálogo Matemática e suas Tecnologias	Grandezas, medidas e matemática financeira; Geometria plana; Geometria espacial; Geometria analítica, sistemas e transformações geométricas; Estatística e probabilidade; e Funções e progressões.	Funções e progressões.
Editora do Brasil	Interação Matemática	O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau; As unidades de medida e a e a resolução de problemas por meio da função do 2º Grau; A matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica; A estatística e a resolução de problemas por meio de análise combinatória e probabilidade; A resolução de problemas por meio da geometria plana e da trigonometria; e A resolução de problemas por meio da geometria espacial.	O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau; A as unidades de medida e a e a resolução de problemas por meio da função do 2º Grau; A matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica.
Ática	Matemática em contextos	Funções afins e funções quadráticas; Funções exponenciais, funções logarítmicas e sequências; Análise combinatória, probabilidade e computação; Estatística e matemática financeira; Geometria plana e geometria espacial; Trigonometria e sistemas lineares.	Funções afins e funções quadráticas; Funções exponenciais, funções logarítmicas e sequências.
Scipione	Matemática interligada	Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica; Matrizes, sistemas lineares e geometria analítica; Trigonometria, fenômenos periódicos e	Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica

		programação; Grandezas, sequências e matemática financeira; Estatística, análise combinatória e probabilidade; Geometria plana e espacial.	
SEI	Matemática nos dias de hoje	Funções; Matemática financeira e álgebra; Geometria e álgebra; Medidas e geometria; Probabilidade e estatística; e Algoritmos e álgebra.	Funções
FTD	Multiversos - Matemática	Conjuntos e função afim; Funções e suas aplicações; Estatística e probabilidade; Sequências e trigonometria; Matemática financeira, gráficos e sistemas; e Geometria.	Conjuntos e função afim; Funções e suas aplicações.
FTD	Prisma - Matemática	Conjuntos e funções; Funções e progressões; Estatística, combinatória e probabilidade; Sistemas, matemática financeira e grandeza; Geometria; e Geometria e trigonometria.	Conjuntos e funções; Funções e progressões.
SM	Quadrante Matemática e suas Tecnologias	Funções; Grandezas, medidas e programação; Sistemas lineares e geometria analítica; Estatística, probabilidade e matemática financeira; Trigonometria e sequências; e Geometria plana e espacial.	Funções
SM	Ser protagonista Matemática e suas Tecnologias	Números e álgebra; Álgebra e educação financeira; Grandezas e medidas e trigonometria; Geometria plana e espacial; Estatística e probabilidade; e Pensamento computacional e fluxogramas.	Números e álgebra; Álgebra e educação financeira;

Quadro 1. Coleções da área de Matemática e suas Tecnologias constantes no Guia Digital 2021.

Metodologia

A metodologia utilizada é a pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica. Na pesquisa qualitativa para Creswell (2010), há uma geração básica de significado que é sempre social, que ocorre a partir da interação do pesquisador com o que está sendo pesquisado, sendo um processo bastante indutivo, gerando significado já a partir da coleta de dados. E, para Gil (2017), a pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado, como livros, revistas, jornais, teses, dissertações, anais de eventos científicos, podendo ser impressos ou digitais.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram organizadas as seguintes etapas:

- ✓ Verificação dos livros aprovados no PNLD (2021);
- ✓ Localização e acesso às versões online dos livros selecionados;
- ✓ Identificação do volume que trata do objeto do conhecimento referente a funções;
- ✓ Busca por seções, exercícios ou atividades propostas – ou mesmo resolvidas – com possibilidades de desenvolvimento de uma EMC;
- ✓ Análise do livro didático a partir do referencial teórico de EMC.

Análise e resultados encontrados

Os livros da edição de 2021 do PNLD não estão organizados por ano como eram os anteriores, agora eles são organizados por temáticas. Dessa forma, na etapa de análise considerou-se os volumes que contemplam os conteúdos do estudo de funções, observando-se que em algumas coleções, estavam distribuídos em mais de um volume.

A coleção Conexões - Matemática e suas Tecnologias, no seu volume intitulado “Funções e suas aplicações”, apresenta atividades que possibilitam o desenvolvimento da EMC, pois: permitem analisar as vantagens financeiras em uma situação de trabalho; possibilitam analisar as condições de um problema dado para se ter uma vantagem financeira; as atividades deixam espaço para o professor instigar a competência crítica dos alunos; podem ser aproveitadas para análise de questões relacionadas ao crescimento elevado (rápido) de certas populações em contraste com a escassez de recursos naturais, por exemplo.

A coleção Diálogos Matemática e suas Tecnologias, no seu volume intitulado: “Funções e progressões”, apresenta atividades que possibilitam a reflexão, como as atividades com situações que exigem tomada de decisão frente a questões econômicas ou de sustentabilidade e um texto sobre os planos de telefonia sugerindo análise do mais vantajoso financeiramente. Essa reflexão vem ao encontro do que afirma Skovsmose (2001), pois contempla não só o conteúdo de aprendizagem, mas também a relevância da aplicação desse conteúdo na vida do aluno.

Foram analisados três volumes da coleção Interação Matemática. O primeiro deles, intitulado “O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau” apresenta: um texto jornalístico com uma reportagem sobre o volume de chuvas no estado de São Paulo, trazendo questões de análise crítica sobre a situação da cidade; textos jornalísticos sobre o sistema de cotas nas universidades e sugere questões de reflexão sobre os textos; abordagem de questões que levam à criticidade a partir do cálculo de impostos. O segundo volume: “As unidades de medidas e a resolução de problemas por meio da função de 2º grau” apresenta um projeto com o tema demanda, custo e sustentabilidade, com a questão norteadora: “como podemos planejar custos e prever receitas para organizar um projeto social”, possibilitando o trabalho com os cenários de investigação e o desenvolvimento da matemacia. No terceiro volume analisado “A matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica” apresenta, ao longo dos exercícios propostos, sugestões de investigação na própria matemática, sobre as propriedades e outros conceitos, possibilitando assim as reflexões matemáticas. Nessa coleção, há a possibilidade de ser trabalhado o papel sociopolítico da Matemática, pois a partir do planejamento docente ao utilizar essas atividades se pode “concretamente causar impactos de ordem social e política, ao promover uma visão de mundo diferenciada” (Skovsmose, 2015, p. 20).

Na coleção Matemática em contextos, foram analisados dois volumes. No primeiro “Função afim e função quadrática”, foram encontradas situações-problema com utilização de tabelas para definir a função afim, e atividades em que se deve tomar decisão de compra por meio dos cálculos, possibilitando que os alunos possam interpretar criticamente situações econômicas com o olhar da Matemática. No segundo volume, “Função exponencial, função logarítmica e sequências”, a partir de textos introdutórios dos capítulos, há possibilidades para exploração da temática das mídias sociais, podendo ser conduzida para uma abordagem crítica, bem como uma outra situação que visa instigar os estudantes acerca de um processo de investigação crítica sobre as mudanças demográficas na América Latina, devido ao crescimento da população das pessoas com 60 anos ou mais.

No volume “Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica” da coleção Matemática interligada, foram encontradas situações-problema envolvendo tomadas de decisões em situações financeiras. Na seção conectando ideias, do capítulo de função afim, há atividades a partir de um texto sobre os tipos de combustíveis para automóveis e as vantagens sobre cada um deles, possibilitando aos alunos a utilização da reflexão e o desenvolvimento da matemacia.

A coleção Matemática nos dias de hoje, no seu volume “Funções”, apresenta situações em que são realizados cálculos para tomada de decisões, atividades que são realizadas segundo os ambientes de aprendizagem de Skovsmose (2010), além de uma proposta de simulação de empreendedorismo que pode ser explorada como cenário de investigação. Essa abordagem é amparada no argumento social da democratização trazido por Skovsmose (2001, p. 39), pois “tenta identificar um assunto relevante da Educação Matemática por meio de reflexões sobre possibilidades para construção e o aperfeiçoamento de instituições democráticas e capacidades democráticas na sociedade, melhorando o conteúdo da educação”.

Foram analisados dois volumes na coleção Multiversos - Matemática. Tanto no primeiro, “Conjuntos e função afim”, como no segundo volume “Funções e suas aplicações”, podem ser encontradas diversas atividades, principalmente relacionadas a situações de consumo, que trazem questionamentos podendo levar os alunos à reflexão. Apresentam uma seção intitulada "o que estudei" com propostas de reflexões sobre os relacionamentos e desenvolvimento do aluno nas aulas durante o percurso do capítulo.

A coleção Prisma - Matemática e suas tecnologias, também tem dois volumes com conteúdos voltado para o estudo de funções: “Conjuntos e funções” e “Funções e progressões. Os volumes apresentam seções que merecem destaque na nossa análise. A seção intitulada “Conexões” apresenta, ao final de cada capítulo, um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes, assim o trabalho desenvolvido nessa seção possibilita a valorização e utilização dos conhecimentos para explicar a realidade, levando os estudantes a relacionar fatos a conceitos estudados. Na seção “Explorando a tecnologia”, há contribuições para o desenvolvimento da reflexão e análise crítica dos estudantes, a partir da possibilidade de eles elaborarem e testarem hipóteses relacionadas aos tópicos estudados, ou seja, são cenários de investigação que possibilitam o desenvolvimento da matemacia. Ainda, para Skovsmose (2001) o desenvolvimento do conhecimento tecnológico é visto como necessário em todos os níveis educacionais, pois para ele a EM é parte integrante da tecnologia e a competência matemática é parte central da competência democrática.

A obra Quadrante Matemática e suas tecnologias, traz no volume “Funções”, um texto sobre dignidade no trabalho abordando temas como trabalho escravo e trabalho forçado com atividades propostas envolvendo a reflexão sobre o tema. Além disso, nas orientações ao professor, apresenta sugestões de questionamentos e reflexões para o professor propor aos alunos ao longo dos capítulos.

Na obra Ser protagonista, foram analisados os volumes: “Números e álgebra” e “Álgebra e educação financeira” que são os volumes em que são tratados os conteúdos de funções. Apresenta a seção “Foco no raciocínio lógico”, onde são encontradas atividades para desenvolvimento do raciocínio lógico e atividades voltada para situações de consumo, mas no geral, traz poucas situações-problema que levam à reflexão.

Conclusão

A Educação Matemática Crítica é uma possibilidade de proporcionar aos estudantes o conhecimento, as habilidades e competências para que ele possa se tornar um cidadão crítico e responsável na sociedade em que vivem.

Sendo o livro didático o principal instrumento utilizado pelos professores brasileiros nas escolas públicas, é importante que eles apresentem meios para que seja trabalhada a EMC, de forma a proporcionar a reflexão, principalmente a partir dos cenários de investigação, buscando o desenvolvimento da matemacia, na qual os estudantes se sintam convidados a investigar, a ampliar a sua rede de conhecimentos, por meio dos conteúdos matemáticos.

Todos os livros analisados apresentam situações, atividades, textos ou cenários de investigação, que podem ser exploradas pelos professores para uma aula envolvendo uma EMC. Dessa forma, cabe ao professor a reflexão de como incluir em seu planejamento esse trabalho tão necessário e importante, pois a partir da EMC é possível sonhar com uma sociedade mais justa e igualitária para o futuro dos nossos jovens.

Referências e bibliografia

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. (3a ed.) Porto Alegre: Artmed.

da Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, (no. 15), pp. 3-9.

Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação. (2017). *Histórico*. https://abre.ai/historicopnld

Gil, A. C. (2017). *Como elaborar projetos de pesquisa.* (6a ed.). São Paulo: Atlas.

Guia Digital PNLD. (2021). https://abre.ai/guiadigitalpnld

Ministério da Educação. (2018). *PNLD*. http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática crítica: a questão da democracia*. Papirus Editora.

Skovsmose, O. (2010). *Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica*. (2a ed.) Papirus Editora.

Skovsmose, O. (2015). *Um convite à Educação Matemática Crítica*. [livro eletrônico]. Papirus Editora.

Abordagem baseada em equivalência e a metodologia de resolução de problemas estatísticos para o ensino fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do ABC
Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br
Diego Marques de **Carvalho**
Universidade Federal do ABC
Brasil
diego.marques@ufabc.edu.br

Resumo

Apresentamos uma discussão teórica sobre os objetos de conhecimentos estatísticos para os anos iniciais do ensino fundamental (6 a 10 anos) por meio da formação de classes de equivalência. Essa discussão foi construída a partir do estabelecimento de uma relação entre o modelo de Equivalência de Estímulos e a resolução de problemas estatísticos proposta no documento norte-americano intitulado Relatório sobre Diretrizes para Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE I). Ao estabelecer essa relação, as quatro componentes da metodologia de solução de problemas do GAISE I foram definidas como quatro classes distintas de estímulos (fazer perguntas; coletar dados; analisar dados; interpretar os resultados). Dessa forma são concedidos subsídios para o desenvolvimento de pesquisas sobre a eficácia da Equivalência de Estímulos para o ensino de conteúdos estatísticos relativos a este ciclo do ensino básico, fornecendo aos alunos a oportunidade de desenvolver habilidades e aprender relações conceituais que não foram ensinadas diretamente.

Palavras-chave: Educação Estatística; Ensino Fundamental; Equivalência de Estímulos; Resolução de problemas; Ministério da Educação Pública; Brasil.

Introdução

Este trabalho surge da indagação sobre como o ensino por meio da formação de classes de equivalência pode contribuir para o ensino de conteúdos estatísticos nos primeiros anos do ensino fundamental, dada a comprovada economia de tempo obtida no ensino de alguns comportamentos matemáticos.

Assim, o objetivo deste trabalho foi relacionar o modelo de Equivalência de Estímulos com a metodologia de resolução de problemas no ensino de Estatística proposta no relatório sobre Diretrizes para Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE I) (Franklin et al., 2007), priorizando os objetos de conhecimento e as habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Ministério da Educação, 2018).

Para tanto, os quatro componentes (formular perguntas; coletar dados; analisar dados; interpretar os resultados) da estratégia de resolução de problemas do documento GAISE I em Estatística foram definidos como quatro grupos diferenciados de estímulos que poderiam ser organizados em uma rede de relações que estabelecem as etapas de ensino e avaliação de um programa de ensino baseado na Equivalência de Estímulos.

Marco teórico

Assis et al. (2003) afirmam que a metodologia de pesquisa em estudos sobre equivalência de estímulos, tema de muitos estudos na Análise do Comportamento, que teve como marco o experimento de Sidman (1971), envolve um conjunto de relações condicionais diretamente treinadas, com consequências diferentes para escolhas corretas e incorretas, e posteriormente a aplicação de testes para verificar o surgimento de novas relações condicionais.

O termo Equivalência de Estímulos, proposto para estudar o comportamento humano simbólico, foi definido no trabalho de Sidman e Tailby (1982) e traz o conceito de que os estímulos se tornam equivalentes quando são substituíveis, ou seja, um comportamento é controlado por diferentes estímulos. Para verificar a emergência de relações entre estímulos, Sidman e Tailby (1982) se apropriaram da definição matemática de equivalência e estabeleceram que os estímulos são considerados equivalentes se apresentarem as relações de reflexividade, simetria e transitividade.

No caso da utilização da equivalência de estímulos referentes ao ensino de conceitos matemáticos no Brasil, Oliveira Júnior, Benitez e Souza (2021), analisaram sistematicamente a literatura nacional, por meio de dissertações e teses de pós-graduações stricto sensu, que utilizaram a equivalência de estímulos, no ensino de repertórios matemáticos. Vinte estudos considerados nessa análise nos permitem refletir sobre a educação infantil, anos iniciais e finais do ensino fundamental, com conteúdo de frações, operações matemáticas (adição e subtração), contagem oral e relações numéricas e ordinais. O estudo propõe recomendações para estudos futuros, principalmente, ao ensino médio e superior.

Especificamente em relação ao ensino de Estatística, Souza (2020), construiu uma discussão teórica/conceitual, estabelecendo relação entre o modelo da Equivalência de Estímulos e a metodologia de resolução de problemas no ensino de Estatística proposta no documento americano intitulado Relatório de Diretrizes para a Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE I): uma Estrutura Curricular para a Educação Básica, priorizando os objetos de conhecimento e as habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Ministério da Educação, 2018) para o primeiro ano do Ensino Fundamental. Ao estabelecer essa relação, foi possível elaborar uma proposta de estudo sobre a formação de classes de estímulos equivalentes a partir de uma sequência de ensino composta por pré-teste, ensino, pós-teste e generalização.

Conhecendo o modelo de Equivalência de Estímulos, é possível investigar a possibilidade de relacionar este modelo com o ensino de conteúdos de Estatística para os primeiros anos do ensino básico. Segundo a BNCC (Ministério da Educação, 2018), no primeiro ano do ensino fundamental brasileiro, para alunos de 6 anos, são indicadas que devem ser trabalhadas as seguintes habilidades referentes aos conteúdos estatísticos: 1) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples; 2) Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.

Um dos documentos norteadores do conteúdo estatístico a ser abordado nos diferentes níveis da Educação Básica é o documento elaborado nos Estados Unidos denominado GAISE I de Franklin et al. (2007). Lopes (2011) destaca que, de acordo com este documento, de nada adianta os alunos a realização de atividades relacionadas com o ensino da Estatística e seus objetivos se não o forem para a resolução de problemas por eles problematizados. Além disso, a maneira de fazer inferências e conclusões sobre os dados deve ser determinada por eles. Essas considerações partem da concepção de que Estatística é uma disciplina metodológica.

O documento GAISE (Franklin et al., 2007), descreve os quatro componentes do processo investigativo da resolução de problemas em Estatística da seguinte forma: 1) Formular perguntas: Esclarece o problema e formula uma (ou mais) perguntas que podem ser respondidas com dados (informações); 2) Coletar dados: Elabora um plano apropriado e emprega o plano para coletar os dados; 3) Analisar: Seleciona métodos gráficos ou numéricos adequados e utiliza esses métodos para analisar os dados; 4) Interpretar os resultados: Interpreta a análise e relata a interpretação de acordo com a pergunta inicial ou provocadora do problema.

Batanero (2013) também destaca que a compreensão das ideias estatísticas fundamentais é necessária na resolução de problemas estatísticos, podendo ser ensinadas em vários níveis de ensino, baseado em investigações e projetos, que permita dar sentido aos vários objetos estatísticos e envolva os alunos no ciclo de investigação.

Metodologia

Consideramos, baseados em Oliveira Júnior, Souza e Datori Barbosa (2019), que o ensino de Estatística deve estar fundamentado na metodologia de resolução de problemas, não se tratando somente de informações, cálculos e modelos técnicos. Essa metodologia está voltada para o desenvolvimento do raciocínio do aluno, estimulando-o a encontrar a melhor solução e que o aluno seja capaz de resolver problemas do seu cotidiano e preparar-se para as situações futuras.

Assim, apresentamos a construção de uma discussão teórica/conceitual que forneça avanços para a Educação Estatística e a Análise do Comportamento, estabelecendo uma relação entre o modelo da Equivalência de Estímulos de Sidman e Tailby (1982) e a metodologia de resolução de problemas no ensino de Estatística proposta no documento americano intitulado Relatório de Diretrizes para a Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE I): uma Estrutura Curricular para a Educação Básica de Franklin et al. (2007), priorizando os objetos de conhecimento e as habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Ministério da Educação, 2018) para o Ensino Fundamental brasileiro.

Consideramos o documento GAISE I (Franklin et al. 2007), dada a sua relevância no contexto de pesquisa da Educação Estatística, trazendo importante contribuição na definição de aspectos didáticos específicos do ensino de conteúdos estatísticos em conjunto com os objetos de conhecimento e habilidades da unidade temática "Probabilidade e Estatística" da BNCC (Ministério da Educação, 2018).

Resultados

Apoiado em Franklin et. al. (2007), as representações dos conceitos básicos de Estatística para a formação dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental podem ser vistas como a resolução de problemas estatísticos, sendo um processo investigativo que envolve quatro componentes. Para o desenvolvimento de um programa de ensino baseado na Equivalência de Estímulos, foram especificados quatro conjunto de estímulos, cada um associado a um desses componentes (Quadro 1).

Quadro 1
Estímulos relacionados aos componentes do processo de resolução de problemas estatísticos proposto no documento GAISE.

Estímulos	Componentes de resolução de problemas
A	Fazer perguntas: esclarece o problema e faz uma (ou mais) perguntas que podem ser respondidas com dados (informações).
B	Coletar dados: Realizar plano adequado e usá-lo para coletar os dados.
C	Analisar, organizar e representar os dados: selecionar métodos gráficos ou numéricos apropriados e usar esses métodos para analisar os dados.
D	Interpretar os resultados: Interpretar a análise de acordo com a questão inicial ou o desencadeador do problema.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O estímulo A consiste em uma questão relacionada a tópicos de interesse dos alunos, restritos ao contexto da sala de aula, o estímulo B representa um conjunto de dados brutos coletados, o estímulo C é a representação gráfica que segue uma coleta de dados e o estímulo D é a interpretação possível no final de um artigo de pesquisa. A Figura 1 apresenta exemplos de duas classes de estímulos que poderiam ser empregadas nas diversas fases de experimentos baseados no programa de ensino proposto.

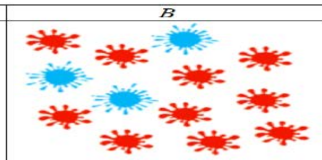
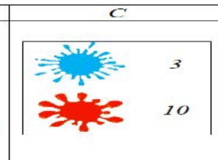
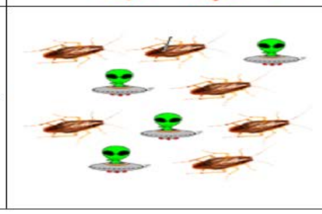
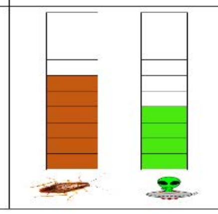
Classes	*A*	*B*	*C*	*D*
1	*Você prefere a cor azul ou vermelha?*			*A cor vermelha é a preferida pela maioria dos alunos dessa sala de aula.*
2	*Você tem mais medo de barata ou de extraterrestre?*			*A menor parte dos alunos dessa sala tem medo de extraterrestre.*

Figura 1. Sugestão de classes de estímulos para os quatro estímulos estabelecidos.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao analisar as possíveis relações entre os estímulos, definimos a rede de relações que deve constituir um programa de ensino e avaliação (Figura 1). Ressaltamos que as relações AC (questão-representação gráfica) e AD (questão e interpretação) não estarão envolvidas em nenhuma etapa, uma vez que não se aplicam no contexto real, uma vez que um processo de pesquisa não é possível sem a etapa de coleta de dados.

Assim, para facilitar a compreensão, a Figura 2 representa a rede de relações de estímulos que devem ser ensinadas, bem como aquelas que devem ser avaliadas em um programa de ensino baseado no modelo de Equivalência de Estímulos. Destacamos que na Figura 2, setas contínuas são os conceitos que serão ensinados e avaliadas e as setas tracejadas serão apenas avaliadas.

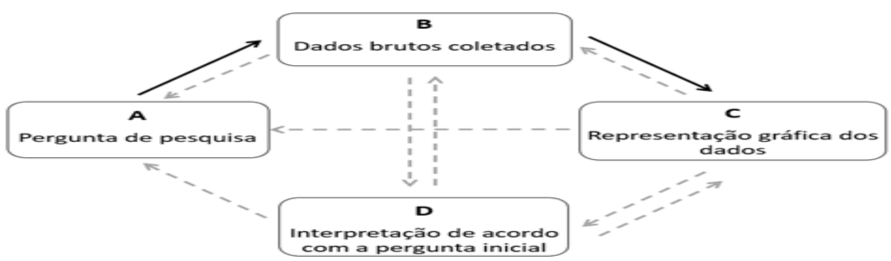


Figura 2. Representação das relações que são ensinadas e aquelas que são apenas avaliadas.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma vez estabelecidos os tipos de estímulos e as relações que compõem a rede de relações, é possível desenhar um programa de ensino com conteúdo estatístico para os primeiros anos do ensino fundamental.

Para fins de exemplificação, consideramos que cada uma das etapas da coleta de dados seja realizada em um computador ou tablet ou smartfone ou outras ferramentas, de modo que os participantes observem uma tela onde, juntamente com uma instrução (escrita ou ditada), o estímulo modelo seja apresentado na parte superior da tela e os estímulos de comparação apareçam alinhados na parte inferior.

A tarefa do participante consistirá em clicar sobre o estímulo de comparação correto para cada estímulo modelo apresentado. Cada resposta pode ser ou não ser seguida de um *feedback* que, geralmente, resume-se a uma mensagem que aparece na tela do computador informando ao participante se a resposta emitida está correta ou incorreta. Após a emissão da resposta de clicar sobre estímulo de comparação que o participante considera ser o correto, uma nova tentativa é apresentada, ou seja, um novo estímulo-modelo é apresentado no centro da tela simultaneamente a outros três estímulos de comparação. A Figura 3 apresenta um exemplo da tela de um *software* que poderia ser empregado para a coleta de dados em experimentos futuros.

Figura 3. Exemplo de uma tela em que está representado um estímulo-modelo, três estímulos comparação e a instrução da tarefa.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Discussão e conclusão

A hipótese de que seria possível relacionar o modelo de equivalência de estímulos com a metodologia de resolução de problemas no ensino de Estatística, proposta no documento Diretrizes para Avaliação e Instrução em Educação Estatística (GAISE) (Franklin et al., 2007), foi confirmada, uma vez que foi permitiu construir uma rede de relações entre estímulos composta pelos componentes sugeridos neste documento.

Justificando os resultados e necessidade desse trabalho trazemos Batanero (2013) ao destacar que, apesar da inegável importância do domínio da elaboração e leitura de tabelas e gráficos na construção da cidadania, crianças enfrentam grandes dificuldades nas tarefas associadas a esses elementos de representação estatística.

Assim, esperamos contribuir para a produção de estudos que relacionem o ensino da Estatística na Educação Básica e a Análise do Comportamento no Brasil, por meio da Equivalência de Estímulos, promovendo pesquisas que considerem metodologias promissoras e ainda pouco exploradas que trazem contribuições importantes para a aprendizagem.

Referências e bibliografia

Assis, G. J. A., Baptista, M. Q. G., Kato, O. M., & Cardoso, D. G. (2003). Equivalência de estímulos após treino de pareamento consistente de estímulos com atraso do modelo. *Estudos de Psicologia*, 8(1), 63-73.

Batanero, C. (2013). Sentido Estadístico: componentes y desarrollo. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.) *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55-61). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., e Scheaffer, R. (2007). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. www.amstat.org/education/gaise/

Lopes, C. A. E. (2011). A Estocástica no Currículo de Matemática e a Resolução de Problemas. *Anais do 2 Seminário de Resolução de Problema*, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília, Brasil.

Oliveira Júnior, A. P.; Souza, N. G. S.; Datori Babosa, N. A resolução de problemas no ensino de estatística no ensino fundamental: contribuições da teoria antropológica do didático e a equivalência de estímulos. *Revemat*, 14, 1-18, 2019.

Oliveira Junior, A. P., Benitez, P., & Souza, N. G. S. (2021). Tendência da pesquisa sobre equivalência de estímulos para o ensino de matemática em teses e dissertações brasileiras. *Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva*, 23, 1-23.

Sidman, M. (1971). Reading and auditory-visual equivalents. *Journal of Speech and Hearing Research*, 14, 5-13.

Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 37, 5-22.

Souza, N. G. S. (2020). *Ensino de conceitos estatísticos no primeiro ano do ensino fundamental*: instrução baseada em equivalência. Dissertação de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática. Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática da Universidade Federal do ABC.

Actividades con GeoGebra y material lúdico para construir el concepto de fractal

José Carlos **León**
Universidad de Lima
Perú
jleonr@ulima.edu.pe
Isabel Torres **Céspedes**
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ ulima.edu.pe

Resumen

El taller está dirigido a docentes de matemática de educación básica regular con el fin de enriquecer las estrategias metodológicas de la enseñanza de las matemáticas. El objetivo es analizar el conocimiento que tiene el profesor de matemática de los contenidos matemáticos como disciplina científica y como conocimiento de enseñanza y aprendizaje en la construcción de fractales. Para realizar el análisis se aplicará el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). El trabajo es colaborativo ya que las actividades están diseñadas con material concreto, de esta forma los participantes podrán interactuar de manera individual y colectiva. Además, se hará uso del aplicativo GeoGebra 6, para vincular con la práctica docente y construir alguno de los fractales elaborados como la curva de Koch. En el taller, se espera generar evidencias del conocimiento de los profesores de los dos dominios del MTSK cuando identifiquen relaciones y patrones de regularidad en los fractales.

Palabras clave: Educación Matemática; Fractal; Curva de Koch; Triángulo de Sierpinsky, GeoGebra, Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemática.

Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas

Usamos para el taller el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018), donde se considera al conocimiento del profesor especializado puesto que es útil el ejercicio de su práctica.

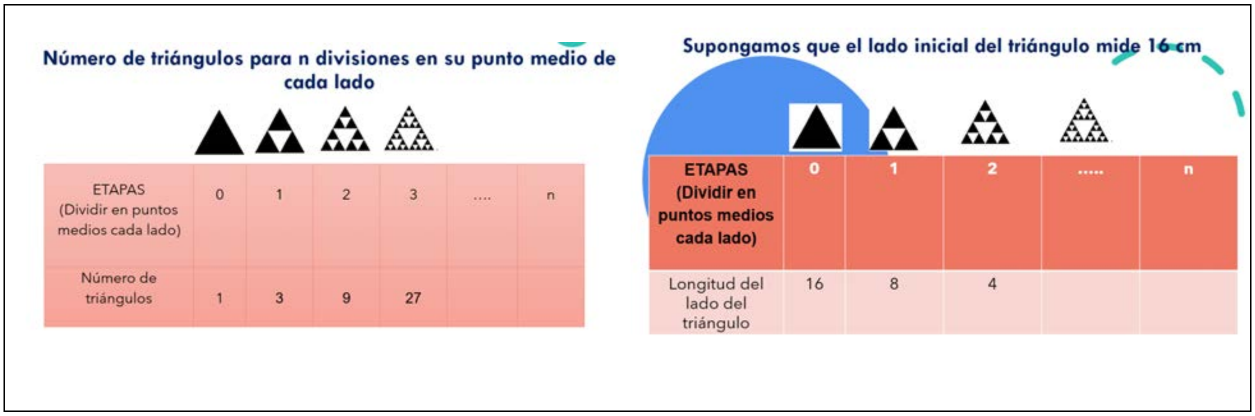
El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas desde tres dominios: conocimiento matemático (MK), conocimiento didáctico del contenido (PCK) y dominio afectivo que permea todo el conocimiento del profesor. En nuestro trabajo no profundizaremos en el último dominio.

El dominio MK comprende tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). El KoT comprende las siguientes categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones relacionados con el tema. El KSM incluye el conocimiento que el profesor posee sobre las conexiones entre elementos matemáticos. Se compone de cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. El KPM tiene que ver con un conocimiento relacionado a las reglas de construcción de un nuevo conocimiento matemático. Se contempla el conocimiento sobre la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, las formas de validación y demostración, el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producción matemática, las prácticas particulares del quehacer matemático y las condiciones necesarias y suficientes para generar un nuevo conocimiento.

El dominio PCK considera el conocimiento de la matemática desde la mirada puesta en la enseñanza y aprendizaje. Se divide en tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS). El KMT toma en cuenta el conocimiento de teorías sobre la enseñanza del contenido, conocimiento de recursos materiales y virtuales, y conocimiento de diversas estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Inspirados en este subdominio hemos planteado el siguiente taller. El KFLM considera el conocimiento que debe tener todo profesor acerca de cómo se aprende el contenido y comprende 4 categorías: teorías de aprendizaje personales e institucionalizadas, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales. El KMLS considera el conocimiento que el profesor posee sobre las orientaciones dadas por autoridades de diversos niveles acerca de qué debe aprender un alumno en cierto momento. Este subdominio incluye tres categorías: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Actividades con el triángulo de Sierpinsky

El matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) es célebre por sus importantes aportaciones a la teoría de conjuntos, la topología y la teoría de números. Entre las actividades que se realizarán con la construcción del triángulo de Sierpinsky será completar las tablas que se muestran en la figura1 y deducir los patrones matemáticos que se presenten.



Número de triángulos para n divisiones en su punto medio de cada lado

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada lado)	0	1	2	3	....	n
Número de triángulos	1	3	9	27		

Supongamos que el lado inicial del triángulo mide 16 cm

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada lado)	0	1	2	.....	n
Longitud del lado del triángulo	16	8	4		

Figura 1. Tablas para encontrar el patrón matemático

En la figura 2, se muestra la construcción del triángulo de Sierpinsky usando la técnica del kirigami. Esta actividad será interactiva y permitirá deducir patrones adicionales de regularidad.

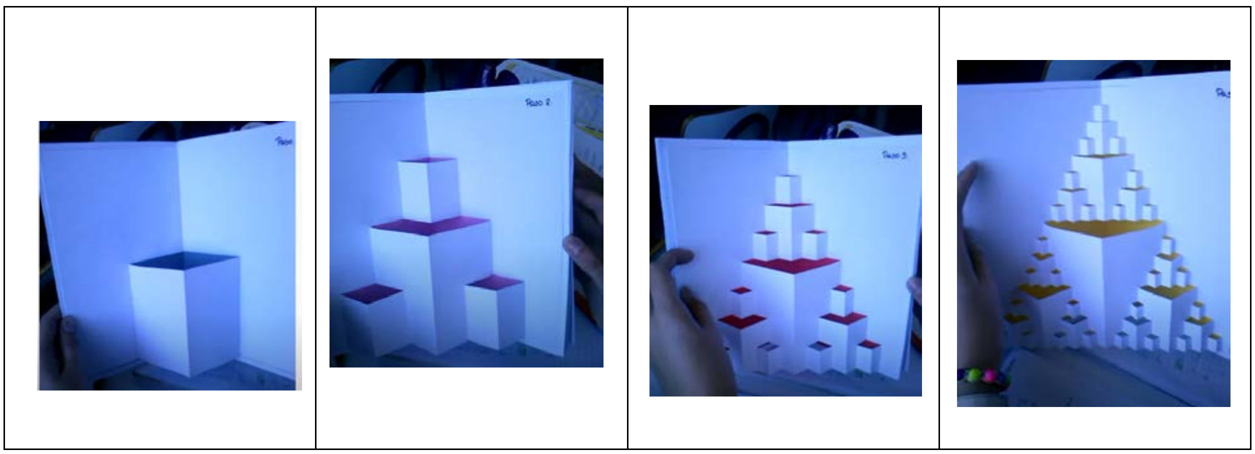


Figura 2. Fases de la construcción del triángulo de Sierpinski usando la técnica del Kirigami.

Actividades con GeoGebra

El taller está dirigido a docentes de matemática de educación básica regular con el fin de enriquecer las estrategias metodológicas de la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de la integración de la tecnología de información y comunicación (TIC) en el aprendizaje de los patrones matemáticos

Para modelar la curva de koch, las actividades incluirán una secuencia de pasos gráficos (ver figura 3), las cuales se detallan a continuación:

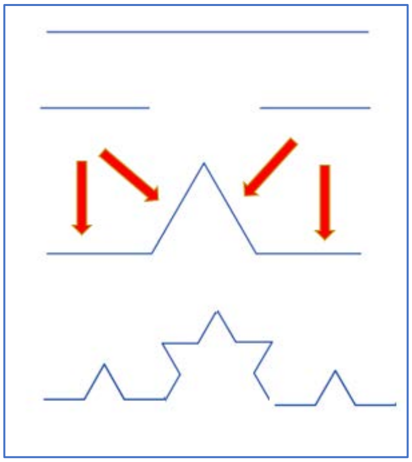


Figura 3. Secuencia gráfica: Curva koch

1. Trace un segmento.
2. Divida el segmento en tres tramos iguales y oculte el segmento central.
3. Trace un triángulo equilátero cuya base sea el segmento que ocultó.
4. Los tres pasos anteriores se repiten de manera recursiva en los segmentos visibles.

En el paso 1, se usará la herramienta $Segmento$ del GeoGebra para trazar el segmento AB no necesariamente paralelo al eje de abscisas. En el paso 2, se dividirá dicho segmento en tres tramos iguales haciendo uso del $Teorema\ de\ Thales$ (ver figura 4), o mediante el comando $Traslada$ del GeoGebra (ver figura 5), para este fin el vector AB será el medio por el cual se determina la posición de los puntos restantes, haciendo uso de escalares que permiten modificar el tamaño del vector y por consiguiente localizar los puntos C y D desde un punto dado.

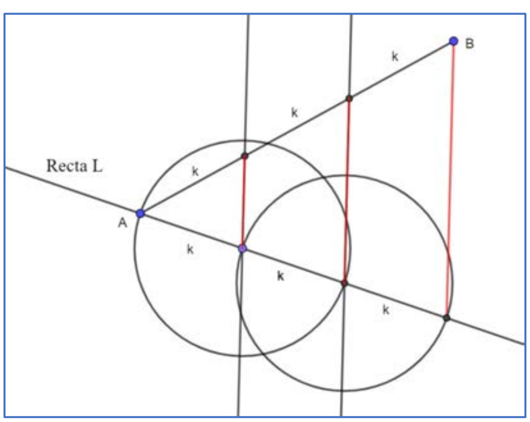


Figura 4. Thales para dividir segmento AB

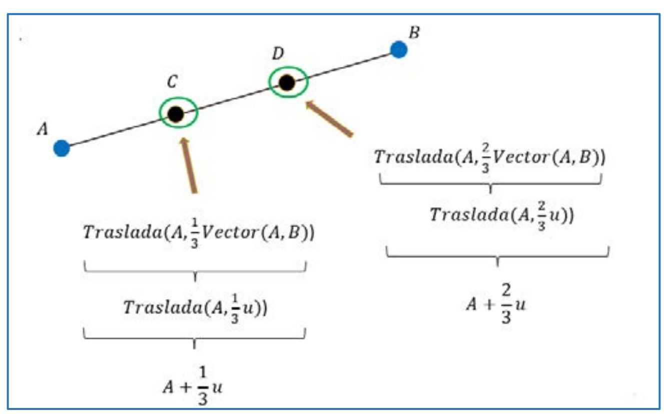


Figura 5. Comando Traslada para dividir segmento AB

En el paso 3, se traza el triángulo equilátero CED a partir de dos de sus vértices (C y D). Para determinar el tercer vértice (E), se hace uso del comando $Rota$ con el cual se podrá modificar la dirección y sentido del vector AB, tal como se observa en la figura 6. Es importante distinguir si el ángulo de rotación que se digitará es antihorario u horario, ya que el GeoGebra considera que cuando el ángulo tiene signo positivo la rotación del objeto es antihoraria y cuando es de signo negativo la rotación es horaria. También será posible hallar el vértice (E), haciendo uso de la propiedad de la mediatriz del segmento CD, pues dicho vértice equidista de los extremos (C y D), tal como se observa en la figura 7.

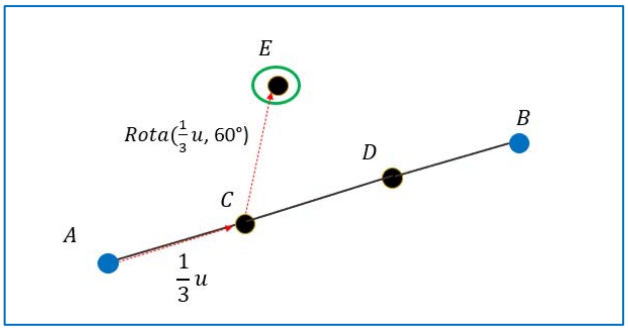


Figura 6. Comando Rota para determinar el vértice *E*

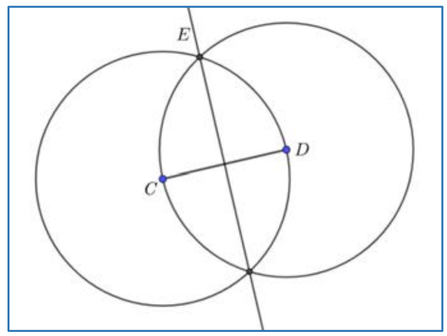


Figura 7. Mediatriz para determinar el vértice *E*

Luego, se traza la línea poligonal por los puntos $A, C, E, D\ y\ B$ para formar la curva de Koch. La automatización de los pasos descritos se consolidará en una sola herramienta, con la $Creación\ de\ una\ nueva\ herramienta$ del GeoGebra. Se tomarán como elementos de entrada los puntos A y B, y como elementos de salida los puntos C, E y D, la línea poligonal y el segmento CD que es un segmento de color blanco con una capa de nivel superior al resto de elementos para ocultar el segmento de inicio (ver figura 8).

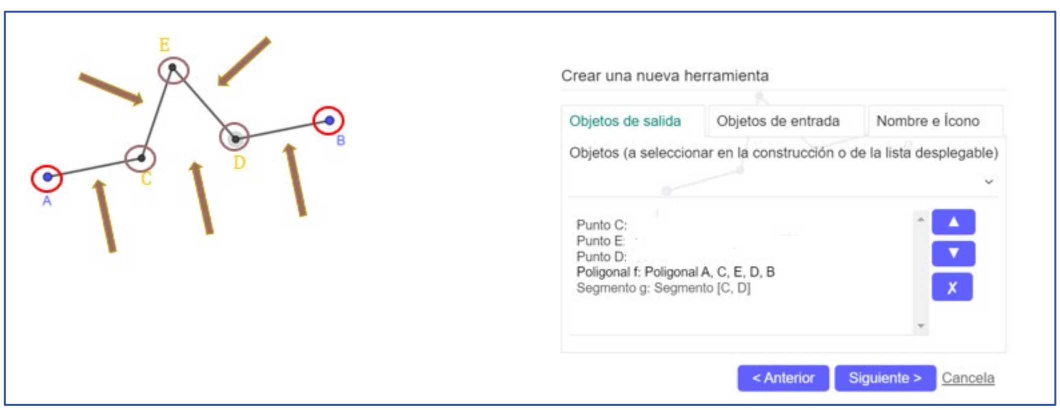


Figura 8. Creación de la herramienta Curva de Koch

Finalmente, una vez creada la herramienta Curva de Koch, se le seleccionará con el puntero o se le digitará en la barra de entrada para formar estructuras irregulares y fragmentadas.

Al concluir el taller, creemos que los profesores presentarán evidencias del conocimiento los dos dominios del MTSK. En ese análisis, el conocimiento del profesor en el dominio (KoT) se hará visible cuando movilice algunos temas o contenidos matemáticos, como el teorema de thales, vectores, mediatriz de un segmento, propiedades de un triángulo, proporcionalidad. El segundo dominio (PCK), referido al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), se visualizará cuando cada docente haga uso de los recursos materiales, virtuales y del conocimiento de las estrategias subordinadas a sus prácticas. De igual manera, creemos que habrá una presencia del subdominio KFLM por las fortalezas y dificultades en la interacción con el programa GeoGebra. Este análisis se complementará luego de finalizado el taller.

Referencias y bibliografía

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in* Mathematics *Education*, *20*(3), 236-253.

Fuse, T. (2022). The Complete Book of Origami Polyhedra: 64 Ingenious Geometric Paper Models. Tuttle Publishing.

Actividades ricas para primaria: los procesos matemáticos en el aula

Albert **Vilalta** Riera
Universitat Autònoma de Barcelona e Innovamat Education
España
albert.vilalta@uab.cat
Cecilia **Calvo** Pesce
Escola Sant Gregori e Innovamat Education
España
ccalvo@santgregori.org
Laura **Morera** Úbeda
Innovamat Education
España
laura.morera@innovamat.com

Resumen

¿Qué elementos hacen que una actividad de matemáticas pueda considerarse rica? En este taller exploramos, a través de tres ejemplos prácticos de primaria, la importancia de elegir bien la tarea y de saber gestionarla. Gracias a los ejemplos, desarrollaremos las claves del marco teórico sobre riqueza matemática: que la tarea ofrezca oportunidades de aprendizaje competencial y un contenido adecuado; y que la gestión fomente un ambiente de discusión y sea sensible a la diversidad. Primero afrontaremos las actividades como alumnos para, posteriormente, analizar su riqueza como profesores y generar aprendizajes didácticos que puedan servir en el aula.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación primaria; Enseñanza presencial; Implementación curricular; Resolución de problemas; Investigación educativa; Matemáticas; Cataluña; España.

Introducción

Cada vez somos más los maestros y profesores que compartimos el valor de desarrollar la competencia matemática de nuestro alumnado. Hemos comprendido, gracias a la investigación, la reflexión y la experiencia, que los contenidos curriculares no bastan: es necesario transmitir también una manera de hacer, unos procesos que estructuren el pensamiento y la actividad matemática y que, en definitiva, den sentido a los contenidos.

El objetivo del presente taller es precisamente transmitir, a través de ejemplos de actividades ricas, que se pueden trabajar los contenidos con profundidad mientras desarrollamos los procesos matemáticos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones; comunicación y representación). El formato previsto es fundamentalmente práctico, con una breve introducción al referencial teórico (¿qué procesos conforman la competencia matemática?, ¿qué entendemos por *actividad rica*?, ¿cómo debe ser su gestión?) y, posteriormente, tres ejemplos actividades ricas. Para cada actividad, se destina un tiempo para que los participantes la resuelvan como alumnos y, después, se analiza conjuntamente su potencial riqueza didáctica, con especial atención a los contenidos, los procesos y la gestión de aula, atendiendo a la diversidad del alumnado a quien propondríamos dichas actividades.

Referencial teórico

Los procesos de la competencia matemática

En los años cuarenta del siglo pasado, George Pólya (1945) advierte que sumergir a nuestro alumnado en operaciones y procedimientos rutinarios mata el interés y obstaculiza el desarrollo intelectual. Es por ello que invita a los maestros a fomentar la curiosidad, planteando problemas adecuados a los conocimientos del alumnado y ayudándoles a resolverlos mediante preguntas que estimulen el pensamiento independiente. Si bien Pólya se centró en la resolución de problemas, en los años setenta ya encontramos ejemplos de autores que profundizan en esta concepción de las matemáticas como una actividad. Freudenthal (1973), por ejemplo, es considerado por muchos el pionero a la hora de concebir las matemáticas como una actividad con procesos que se pueden enseñar y aprender, más allá de ser una lista de contenidos. Actualmente, los currículos oficiales de muchos países y territorios emergen de esta concepción competencial. El Common Core de EEUU, los currículos del Reino Unido, Dinamarca, Canadá o el anexo sobre matemáticas de la nueva Ley de Educación en España, son solo algunos ejemplos de ello. En el Marco de evaluación y de análisis de PISA para el desarrollo: lectura, matemáticas y ciencias de la OCDE (2017), también se justifica una concepción competencial del aprendizaje de las matemáticas. Niss y Højgaard (2019), los ideólogos del currículum de Dinamarca y de la vertiente matemática de PISA, describen la competencia matemática como “la disposición consciente de alguien para actuar adecuadamente en respuesta a un tipo específico de desafío matemático en situaciones determinadas”. Podemos desgranar esta competencia matemática en cuatro procesos que se describen a continuación.

El proceso de Resolución de problemas incluye las fases que debemos seguir para resolver problemas (es decir, situaciones desconocidas que requieren una estrategia de resolución): plantear y traducir el problema, resolverlo mediante herramientas o estrategias, comprobar la solución, plantear nuevas preguntas, etc. Es el proceso más troncal y el que nos proporciona un mejor ambiente en el que desarrollar la competencia matemática global. El proceso de Razonamiento y prueba se centra en las destrezas que parten del análisis de la situación para formular y probar conjeturas, hacer deducciones razonadas, observar patrones, generalizar y, sobre todo, argumentar cualquier afirmación que se hace en el aula. El proceso de Conexiones incluye todas las relaciones que encontramos o establecemos entre ideas y conceptos. Distinguimos dos grandes tipos de conexiones: las que se producen dentro del ámbito de las matemáticas y las que se producen con la realidad cotidiana. Por último, el proceso de Comunicación y representación nos habla de las destrezas relacionadas con la transmisión de información matemática y los cambios de representación, ya sea como emisores o como receptores, en solitario o colectivamente. Distinguimos hasta cinco formas de comunicar o representar un concepto: oralmente, por escrito, gráficamente, mediante tecnología y mediante materiales manipulativos.

Definir los procesos que queremos trabajar no es suficiente para que se produzcan oportunidades de aprendizaje significativas en el aula. Debemos conocer y disponer de actividades ricas que nos permitan fomentar un ambiente verdaderamente competencial. En el siguiente apartado, definimos lo que entendemos por “actividad rica de matemáticas” y, más adelante, exponemos los ejemplos concretos que vehiculan el taller que nos ocupa.

Actividades ricas de matemáticas

Son muchos los autores que han definido su concepción sobre lo que significa enriquecer la actividad matemática en el aula. Piggott (2011), en el marco de la iniciativa NRICH de la Universidad de Cambridge, propone un marco que comprende dos factores: el contenido y la enseñanza. Según Piggott, las actividades ricas requieren, por un lado, un contenido basado en problemas atractivos que propicien el desarrollo y uso de estrategias y el pensamiento matemático; y, por otro lado, un enfoque de la enseñanza (esto es, una gestión de aula) que fomente un entorno abierto y flexible en el que se promueva el trabajo cooperativo, la exploración y la comunicación, y donde se aproveche la diferencia como herramienta de aprendizaje. Los dos factores que describe Piggott guardan una clara relación con los elementos de una actividad matemática rica que describimos en el 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME14), donde presentamos un taller sobre actividades ricas para el aula de primaria. Allí, partiendo de las ideas de Deulofeu y Vila (2021), concretamos un esquema como el siguiente:

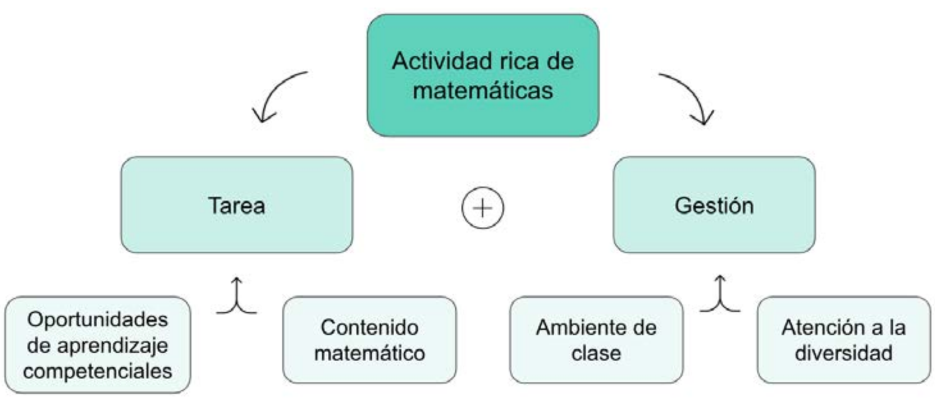


Figura 1. Elementos de una actividad de matemáticas rica (Vilalta y otros, 2021)

Parece claro que la riqueza de una actividad depende tanto de la tarea como de la gestión. Pero entonces, ¿cómo debe ser la tarea?, y ¿qué debemos tener en cuenta durante su gestión en el aula?

En primer lugar, la tarea debe proporcionar oportunidades de aprendizaje dentro de uno o de varios de los procesos matemáticos descritos (resolución de problemas; razonamiento y prueba; conexiones; comunicación y representación). En segundo lugar, la tarea debe abordar un contenido matemático que sea contextualizado (significativo para el alumno), riguroso (con sentido matemático) y extensible (conectado con los conocimientos previos y futuros). En cuanto a la gestión, debemos planificar y fomentar un ambiente de clase que promueva la discusión productiva basada en preguntas, la colaboración y conversación entre iguales y la investigación proactiva. Por último, añadimos un aspecto que no todos los autores de referencia contemplan dentro de su definición de riqueza: la atención a la diversidad para conseguir equidad. Según Bartell y otros (2017), las prácticas de enseñanza sin atención explícita a la equidad inevitablemente están condenadas al fracaso. De hecho, entendemos que la gestión no es completamente rica si no tiene en cuenta las necesidades especiales del alumnado. Esto significa que, mediante nuestra gestión, debemos procurar que todos los alumnos participen de la misma actividad. Este cometido es posible, como se describe en NRICH (2013, 2017), si la actividad es de "suelo bajo" (permite la entrada a todos los alumnos) y de "techo alto" (permite hacer muchas conexiones y extender la actividad para ir más allá con nuevas preguntas).

Una vez definido el marco teórico del que emana nuestra concepción sobre actividades ricas en el aula de matemáticas, es el momento de proponer ejemplos concretos y plantear como los aprovecharemos para vertebrar el taller.

Metodología

Las actividades elegidas pretenden ejemplificar las ideas desarrolladas en el marco teórico. Es por ello que hemos procurado que la selección contemple contenidos diversos y oportunidades dentro de los cuatro procesos. El formato de taller previsto es eminentemente práctico, con una breve introducción al marco teórico (que debe servir para acordar los términos más relevantes con los asistentes) y tres actividades ricas. Para cada actividad, se destina un tiempo para que los participantes la resuelvan y posteriormente, se analiza conjuntamente su potencial riqueza didáctica, con respecto a contenidos, procesos y gestión de aula, atendiendo a la diversidad del alumnado a quien que va dirigida la actividad. El índice previsto es el siguiente:

I. Breve introducción al marco teórico: actividades de matemáticas ricas
II. Actividad 1: La máquina que transforma números.
III. Actividad 2: La resta de dos dados, ¿qué es más probable?
IV. Actividad 3: Serpientes sobre el tablero del 100.
V. Conclusiones

A través de la vivencia de estas actividades, se espera que los participantes desarrollen herramientas para analizar la riqueza matemática de cualquier actividad y que ello les permita generar más oportunidades de aprendizaje en su aula. A continuación, describimos someramente cada una de estas actividades, una del ámbito pre-algebraico, otra del ámbito probabilístico y la última del ámbito numérico:

Actividad 1. En esta actividad se trabaja el concepto de transformaciones de elementos desde un punto de vista numérico y pre-algebraico. Por lo tanto, es ideal para trabajar el inicio del concepto de función usando como metáfora una máquina que transforma números. A partir de saber qué arroja la máquina cuando se aplica a ciertos números, se reta al alumnado a descubrir cuáles serán las imágenes de otros números, a que verbalicen qué hace la máquina y a que descubran la anti-imagen de ciertos elementos. Llegados a este punto, es importante tener en cuenta que no siempre hay solución única y se enfatiza la importancia de dar argumentos asociados a las diferentes soluciones propuestas. Para acabar se propone al alumnado que invente otras máquinas que transforman números y que rete a sus compañeros a descubrir qué hace cada máquina siguiendo el modelo de la máquina que transforma a cada número natural en la cantidad de segmentos que se utilizan para representarlo en formato digital.

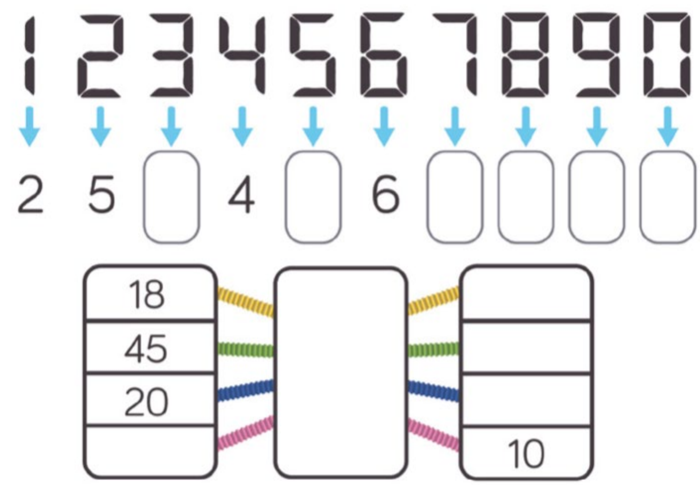


Figura 2. Presentación de la máquina que transforma números. Elaboración propia.

Actividad 2. Partiendo de la conocida actividad del cálculo de la probabilidad de diferentes sucesos asociados a la suma de dos dados, se propone la variante de calcular en cada caso la diferencia entre los dos dados. A través de la demanda inicial de una predicción de los sucesos elementales más probables, seguida por la experimentación de unos pocos casos, confrontamos la intuición probabilística del alumnado con el uso de un simulador virtual que permite experimentar en un gran número de repeticiones del experimento y con un razonamiento basado en el análisis del espacio muestral correspondiente.

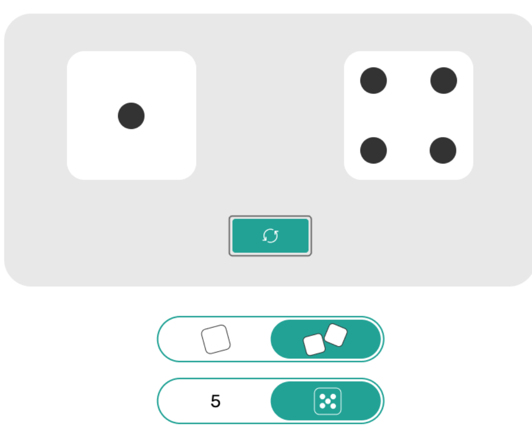


Figura 3. Captura de pantalla del simulador de lanzamiento de dos dados. Elaboración propia.

Actividad 3. Basándonos en una propuesta Ball & Ball (2011) plateamos el reto de analizar el peso y la longitud de serpientes que aparecen dibujados sobre un tablero del 100. A partir de definir la longitud como el número de celdas del tablero que cubre la serpiente y, el peso, como la diferencia entre los valores de las celdas donde yace la cabeza y la cola de la serpiente, proponemos al alumnado que busque serpientes a partir de condiciones que se aplican a su peso o a su longitud. Más allá de ser una actividad que da al alumnado la oportunidad de practicar el cálculo de restas en el rango 0-100, nos adentramos en los procesos matemáticos cuando analizamos, por ejemplo, cuál es el peso mínimo o máximo de una serpiente de longitud dada o cuando describimos la forma de todas las serpientes posibles con un peso dado.

Figura 4. Presentación de las serpientes sobre el tablero del 100. Elaboración propia.

Resultados y conclusiones

El trabajo pretende compartir una muestra de la experiencia de los autores en el propósito de recubrir el currículo mediante una secuencia de actividades ricas. Las actividades presentadas, como se podrá comprobar durante el desarrollo del taller, responden al referencial teórico: transmiten una imagen de las matemáticas como una actividad humana con procesos que se pueden enseñar y aprender, más allá de ser una lista de contenidos (Freudenthal, 1973). Gracias a la gestión del taller, evidenciaremos como la resolución de problemas es el proceso más troncal y el que nos proporciona un mejor ambiente en el que desarrollar la competencia matemática global en ámbitos tan diversos como son la enseñanza de la aritmética, la probabilidad y la pre-álgebra en primaria. En cualquier caso, sirva el presente trabajo para mostrar cómo es posible llevar actividades ricas al aula para trabajar los contenidos con profundidad a través de los procesos. Esperamos que proporcione ideas y herramientas a otros docentes para crear fundamentadamente sus propias actividades ricas en el futuro.

Referencias y bibliografía

Ball, D. y Ball, B. (2011). *Rich Task Maths (Book 1)*. Association of Teachers of Mathematics, 6-11.

Bartell, T., Wager, A., Edwards, A., Battey, D., Mary Foote, M. y Spencer, J. (2017). Toward a framework for research linking equitable teaching with the standards for mathematical practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 7-21.

Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas. GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática. Perspectivas desde el Trabajo de María Luz Callejo de la Vega*, 41-68. Compobell: Murcia.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

NRICH team (2013). Low Threshold High Ceiling - an Introduction. NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/10345

NRICH team (2017). Creating a Low Threshold, High Ceiling Classroom. NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/7701

OCDE (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, OECD Publishing, París

Piggott, J. (2011). Mathematics enrichment: What is it and who is it for? NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University. https://nrich.maths.org/5737

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Vilalta, A., Morera, L., Rojas, F. y Solar, H. (2021). Rich Math Activities for a Primary School Class. Taller presentado en formato virtual en el 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME14), Shanghái, China.

Algumas relações entre Funções Executivas e aprendizagem de Matemática

Dyana Grazielli Altomani **Braga**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
dyanabraga@alunos.utfpr.edu.br
Jader Otávio **Dalto**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
jaderdalto@utfpr.edu.bt

Resumo

O artigo apresenta resultados parciais de uma revisão de literatura sobre Funções Executivas e Aprendizagem de Matemática. Os objetivos desta revisão é conhecer os estudos que tratam da relação entre Funções Executivas e Aprendizagem de Matemática e analisar suas contribuições para a aprendizagem desta disciplina. Para tal, optou-se pela estratégia de busca de informações baseada em dois eixos temáticos, "*Executive Function and Mathematics Learnig*" e "Funções Executivas e Aprendizagem Matemática", inseridos na base de dados brasileira Periódicos CAPES. O processo de busca resultou em 260 estudos, analisados e relacionados entre si conforme o método de revisão da literatura. Destes, 31 estudos foram selecionados de acordo com os critérios de investigação da pesquisa, sendo analisados, neste artigo, 04 estudos publicados em português e 02 estudos publicados em espanhol. Os resultados obtidos mostram, entre outros aspectos, que as Funções Executivas contribuem para o desempenho da aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Funções Executivas; Habilidades Cognitivas; Desempenho Escolar; Aprendizagem; Educação Matemática.

Introdução

A Matemática, conforme Chevallard et al. (2001, p.25), "[...] não pode ser somente algo que se aprende e que se ensina, ela também serve para resolver problemas e situações da sociedade". Para Souza e Matias (2020, p. 1325), a aprendizagem Matemática está vinculada à

"[...] aquisição integrada de conhecimentos de âmbito específico, sistemas conceituais, princípios de caráter matemático e o desenvolvimento de habilidades cognitivas".

Roeberset et al. (2012) afirmam que existem efeitos diretos da relação entre desempenho em Matemática e desempenho em Funções Executivas. As Funções Executivas contemplam habilidades que possibilitam o controle do comportamento, da emoção e da cognição. Em específico, as pesquisas de Miyake et al. (2000), retomadas depois por Diamond (2013), sugerem um modelo fixado na existência de três habilidades básicas envolvidas nas Funções Executivas, a saber: Inibição (o sujeito deve inibir respostas dominantes e automáticas quando julgar pertinentes e de maneira controlada), Memória de Trabalho (manter, manipular e atualizar informações) e Flexibilidade Cognitiva (capacidade de o sujeito mudar o foco atencional ou curso da ação).

Corso et al. (2013), com base em Roebers et al.(2012), aludem que as Funções Executivas são importantes na previsão do aproveitamento escolar. Tais funções, quando integradas, estão diretamente relacionadas ao desempenho escolar em distintas áreas de conhecimento, como a Matemática, na medida em que possibilita o desenvolvimento do autocontrole, manipulação de ideias, atenção seletiva e sustentada, dentre outras habilidades necessárias ao processo de aprendizagem. Desta forma, o estudo das relações entre Funções Executivas e desempenho matemático escolar se mostra preponderante, na medida em que, conforme Vasconcelos (2008), fatores do funcionamento executivo são decisivos na qualidade desse desempenho da aprendizagem de Matemática.

Diante das questões apresentadas, o presente artigo teve como objetivos, a partir de uma revisão da literatura, conhecer os estudos que tratam da relação entre Funções Executivas e Aprendizagem de Matemática; e analisar suas contribuições para a aprendizagem desta disciplina. O texto se encontra dividido em quatro seções, nas quais são detalhados a metodologia, os resultados de revisão, as considerações finais e, por fim, as referências que embasaram a construção do artigo.

Procedimentos Metodológicos

Para iniciar a revisão de literatura, estabeleceu-se como estratégia de busca a definição de diferentes eixos vinculados com o tema do estudo. De acordo com o tema desta pesquisa, foram consideradas as áreas das Funções Executivas e Matemática. A partir disso, foram definidos estes eixos de busca: (i) "*Executive Function and Mathematics Learnig*", resultando em 240 trabalhos publicados (artigos em revistas científicas e trabalhos de dissertações de mestrado) em inglês e (ii) "Funções Executivas e Aprendizagem Matemática", resultando em 20 trabalhos publicados (artigos em revistas científicas e trabalhos de dissertações de mestrado) em espanhol e português. A definição dos estudos que seriam utilizados tem origem na base de dados Periódicos CAPES, com foco nas publicações do período de 2017 a 2022. Em se tratando de uma base de dados e dois eixos, foram realizadas duas buscas no total, obtendo como resultado 260 produções científicas nas áreas temáticas citadas acima.

Na segunda etapa, foram excluídas produções que não eram de interesse da revisão. De acordo com o tema escolhido e após revisar o título e resumo de cada produção, foram excluídas aquelas produções relacionadas a: (i) transtornos de aprendizagem em Matemática; (ii) dificuldades de aprendizagem em Matemática; (iii) ansiedade Matemática; (iv) Funções Executivas ou de Matemática, apenas. A exclusão das produções que não cumpriram os critérios estabelecidos reduziu o número inicial a 31 trabalhos publicados, os quais constituem o corpus da revisão.

Para este trabalho, por limitação de espaço, apresentamos os resultados iniciais da revisão, baseados nos trabalhos publicados em periódicos publicados em português e espanhol.

Resultados da Revisão

Nesta seção, são expostos, do corpus constituído, resultados parciais da revisão da literatura dos 04 trabalhos publicados em português e 02 trabalhos publicados em espanhol, conforme Quadro 1. Eles estão organizados pela revisão dos dois eixos mencionados: (i) "*Executive Function and Mathematics Learnig*" e (ii) "Funções Executivas e Aprendizagem Matemática". Apresentam-se as sínteses interpretativas dos trabalhos publicados em português e espanhol, destacando seus objetivos, metodologia empregada, resultados e conclusões.

Quadro 1
Trabalhos publicados em português e espanhol

Ano de Publicação	Autor(es)	Título
2017	Gonçalves, H.A., Viapiana, V.F., Sartori, M.S., Giacomoni, C. H., Stein, L.M. & Fonseca, R. P.	Funções Executivas predizem o processo de habilidades básicas de leitura, escrita e Matemática.
2018	Azar, E.E.; Aran-Filippetti, V. & Rubilar, J.V.	*Estrato Socioeconomico y Funcionamiento Ejecutivo: Su Relación con las Competencias Academicas en Edad Escolar*.
2018	Belli; M.	Análise de uma situação problema: competências socioemocionais e estimulação de Funções Executivas.
2018	Carvalho, C.A.S.M. & Fernandes, D.C.	Contribuições das Funções Executivas para o desempenho acadêmico.
2018	Diez-Riviego, E & Bausela-Herrera, E.	*Funciones ejecutivas y la competencia para resolver problemas matemáticos en Educación Primaria.*
2020	Santana, A. N.; Roazzi, A & Melo, M.R.A.	Os três componentes executivos básicos e desempenho matemático escolar.

O trabalho de Gonçalves et al. (2017) apresenta como objetivo analisar o efeito das Funções Executivas na leitura e escrita de palavras e na resolução de operações aritméticas a partir de uma tarefa cujos estímulos abarcam diferentes níveis de complexidade para crianças de 1° a 9° ano do Ensino Fundamental brasileiro. Participaram 302 estudantes, de 1º a 9º ano, de escolas públicas e privadas, sendo avaliados por testes neuropsicológicos e de desempenho escolar. Os resultados do estudo indicaram que a Memória de Trabalho fonológica (relacionada a habilidades verbais) é um preditor do desempenho de todos os domínios escolares avaliados. A partir dos resultados o estudo conclui que as intervenções precoce-preventivas de Funções Executivas podem ser inseridas na rotina escolar em prol da potencialização do desenvolvimento de leitura, escrita e Matemática, principalmente, nos primeiros anos escolares.

O trabalho de Azar et al. (2018) apresenta como objetivo analisar a relação entre nível socioeconômico, Funções Executivas valorizadas a partir da perspectiva dos pais e as competências de leitura e Matemática das crianças. Participaram 131 crianças e seus pais, pertencente ao nível econômico médio e baixo, residentes na província de Córdoba, Argentina. Os participantes foram avaliados a partir dos instrumentos: Método Social Graffar, teste CHEXI, teste EVALEC e teste EVAMAT. Os resultados do estudo relatam que o nível socioeconômico tem influência no desempenho escolar. Além disso, foi encontrada relações entre Funções Executivas e desempenho escolar. Desta forma, o estudo conclui que o nível socioeconômico tem efeitos diretos nas habilidades matemáticas e efeitos indiretos nessas habilidades por meio da Memória de Trabalho, evidenciando o impacto direto do nível socioeconômico no desenvolvimento das Funções Executivas.

O trabalho de Belli e Manrique (2018) apresenta como objetivo relatar e analisar uma situação-problema em aulas de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, atrelados às competências socioemocionais e à resolução de problemas. A pesquisa foi realizada em três partes: discussão de uma situação-problema, o seu desenvolvimento em sala de aula e a explicação das percepções sobre a experiência vivida. Nos resultados, as Funções Executivas identificadas e trabalhadas foram o Controle Inibitório, a Flexibilidade Cognitiva e a Memória de Trabalho, proporcionando um espaço para que o professor estimulasse os alunos a refletir sobre suas ações, inibindo os fatores distratores e motivando a autodisciplina e o autocontrole sobre sua atenção, habilitando o Controle Inibitório. Com isso, o estudo apresenta a proposta de educação socioemocional em aulas de Matemática, a ser desenvolvida e ensinada em situações de resolução de problemas, incorporando-a, também, na formação continuada dos professores.

O trabalho de Carvalho e Fernandes (2018) apresenta como objetivo explorar as relações entre as Funções Executivas e o desempenho acadêmico, de forma específica, dos alunos com conceitos ou notas mais altos e mais baixos e os processos executivos de Controle Inibitório, Memória de Trabalho, Flexibilidade Cognitiva e Planejamento. Participaram 142 alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, de escolas públicas do interior do Sul de Minas Gerais. Desta forma, como medidas do desempenho acadêmico, foram recolhidos os conceitos bimestrais dos alunos, sendo, ainda, aplicados testes neuropsicológicos que avaliam Controle Inibitório (Teste de *Stroop* Computadorizado), Flexibilidade Cognitiva (Teste de Trilhas – parte B), Planejamento (Torre de Londres) e Memória de Trabalho (Teste de Memória de Trabalho Auditiva e Visual). Nos resultados, as análises de correlação e regressão logística binária indicaram, em média, pontuações muito baixas em Flexibilidade Cognitiva e em Memória de Trabalho. A regressão logística binária mostrou que a Flexibilidade Cognitiva explicou significativamente 29,6% da variância do desempenho. Com isso, o estudo acrescenta novas informações à compreensão da relação entre as Funções Executivas e o desempenho acadêmico, sendo possível observar que a Flexibilidade Cognitiva tem um papel muito importante no desempenho escolar.

O trabalho de Diez-Riviego e Bausela-Herrera (2018) apresenta como objetivo analisar a relação entre Funções Executivas e habilidades matemáticas (resolução de problemas). Participaram 24 alunos do 6° ano da educação primária. Os participantes foram avaliados por três instrumentos: questionário de evolução comportamental, avaliação das Funções Executivas (nível I e II) e resolução de problemas. Neste estudo os resultados apresentaram a hipótese nula, que não há relação ou associação estatisticamente entre Funções Executivas (planejamento, Memória de Trabalho e raciocínio) e Matemática (resolução de problemas) no Ensino Primário. Esses resultados podem ser devidos a ter analisado as Funções Executivas do ponto de vista de unidimensional, não apresentando uma análise de diferentes dimensões que configuram sua estrutura em etapa educacional e momento de desenvolvimento, conforme indicado pelos resultados obtidos por outros pesquisadores que analisa a relação entre a competência matemática e as diferentes dimensões das Funções Executivas (inibição, flexibilidade cognitiva e atualização da Memória de Trabalho). No entanto, o estudo acrescenta que a detecção precoce de dificuldades nas Funções Executivas permite antecipar e/ou prevenir o risco de apresentar futuros transtornos na aprendizagem de Matemática.

O trabalho de Santana et al. (2020) apresenta como objetivo avaliar as Funções Executivas para o desempenho matemático escolar, investigando as relações existentes entre os componentes (Memória de Trabalho, Controle Inibitório e Flexibilidade Cognitiva). No estudo, foram selecionados 110 participantes a partir do método de amostragem probabilística estratificada, do 2º ao 7º ano do ensino fundamental. Os participantes foram avaliados a partir dos instrumentos: Questionário Sociodemográfico, Miniexame do Estado Mental, Roteiro para Sondagem de Habilidades Matemáticas, Instrumento de Avaliação Neuropsicológica Breve Infantil e Five Digit Test. Os resultados verificados apontaram que as Funções Executivas apresentam-se significativamente correlacionadas com o desempenho em Matemática. E que a Memória de Trabalho se refere ao componente cujas correlações com o desempenho em Matemática são de maior magnitude, seguido pela Flexibilidade Cognitiva e pelo Controle Inibitório. Portanto, o estudo aponta que as Funções Executivas encontram-se diretamente relacionadas com o desempenho matemático.

Os resultados dos trabalhos publicados em português e espanhol apresentam relações entre Funções Executivas e aprendizagem de Matemática. No que se refere à Memória de trabalho, Santana et al. (2020) relatam que as Funções Executivas apresentam-se significativamente correlacionadas com o desempenho em Matemática, e que a Memória de Trabalho se refere ao componente cujas correlações com o desempenho em Matemática são de maior magnitude, seguido pela Flexibilidade Cognitiva e pelo Controle Inibitório. Para Gonçalves et al. (2017), a Memória de Trabalho fonológica é um preditor do desempenho de todos os domínios escolares avaliados, independente do avanço do conteúdo e do aumento de complexidade nas tarefas. Já Belli e Manrique (2018) trazem que a Memória de Trabalho, quando estimulada em tarefas de interpretação e resolução da situação-problema, contribui para manipular os resultados e formular perguntas. Segundo Baddeley (2010**)** a Memória de Trabalho refere-se a um sistema necessário à manutenção de informações em mente enquanto o indivíduo executa tarefas complexas, como raciocínio, compreensão e aprendizado.

Para Azar et al. (2018), o nível socioeconômico tem efeitos diretos nas habilidades matemáticas e efeitos indiretos nessas habilidades por meio da Memória de Trabalho, evidenciando o impacto direto do nível socioeconômico no desenvolvimento das Funções Executivas. Já para Diez-Riviego e Bausela-Herrera (2018), a detecção precoce de dificuldades nas Funções Executivas permite antecipar e/ou prevenir o risco de apresentar futuros transtornos na aprendizagem de Matemática. No entanto, Carvalho e Fernandes (2018) abordam, através de análises de correlação e regressão logística binária, indicando, em média, pontuações muito baixas em Memória de Trabalho. Bull e Scerif (2001) afirmam que o funcionamento executivo é um bom preditor de desempenho escolar, pois alguns estudos mostram esse resultado mesmo após o controle de outros fatores explicativos, a exemplo da recuperação da memória de longo prazo, da velocidade de processamento de informações e do processamento fonológico.

O Controle Inibitório, de acordo com Belli e Manrique (2018), inibe os fatores distratores e motiva a autodisciplina e o autocontrole da atenção e das ações. De acordo com Diamond (2013), o Controle Inibitório é o processo que controla as informações relevantes durante a execução de uma tarefa, permitindo o controle da atenção, do comportamento e emoções para ignorar predisposições internas ou atrativos externos para atuar de forma mais apropriada. Já a Flexibilidade Cognitiva, para Carvalho e Fernandes (2018) tem um papel muito importante no desempenho escolar, apresentando a regressão logística binária de 29,6% da variância do desempenho. Segundo Diamond (2013), a Flexibilidade Cognitiva indica a capacidade de modificar sua maneira de atuar ou pensar, quando sua forma de se comportar não está funcionando e que alteram sua perspectiva ou ponto de vista conforme as demandas do ambiente, obtêm notas ou conceitos mais altos.

Algumas Considerações

A partir das sínteses dos trabalhos publicados em português e espanhol, buscou-se analisar as contribuições das Funções Executivas e a Aprendizagem de Matemática. Desta forma, verificou-se que os autores evidenciam as Funções Executivas e a relação significativa com o desempenho em Matemática, principalmente em relação à Memória de Trabalho, função executiva mais investigada.

Nesse seguimento, a análise dos trabalhos publicados em português e espanhol permitiu perceber algumas contribuições das Funções Executivas para o desempenho em Matemática, sendo necessário executar trabalhos futuros, com outros trabalhos construídos no corpus da revisão, para que desta forma se possa investigar e avaliar com mais profundidade as intervenções junto aos professores, em formação inicial ou continuada, para que desenvolvam atividades junto aos alunos, mobilizando e desenvolvendo suas Funções Executivas.

Referências e bibliografia

Azar, E., Arán-Filippetti, V. & Vargas-Rubilar, J. (2019). Estrato Socioeconomico y Funcionamiento Ejecutivo: Su Relación con las Competencias Academicas en Edad Escolar. *Cuadernos de Neuropsicología / Panamerican Journal of Neuropsychology*, 13(3), 80-93. https://www.cnps.cl/index.php/cnps/article/view/386

Baddeley, A. (2010). Working memory**.** *Current Biology*, 20(4), 136-140. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960982209021332

Belli, A.; Manrique & A. L. (2018). Análise De Uma Situação-problema: Competências Socioemocionais E Estimulação De Funções Executivas. *Educação Matemática Debate*, 2(5), 171-187. https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/67/72

Bull, R. & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273-293. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11758669/

Carvalho, C. S. & Fernandes, D. C. (2018). Contribuições Das Funções Executivas Para O Desempenho Acadêmico. *Argumentos Pró-educação*. Argumentos Pró-educação, 3(7), 164-184. http://ojs.univas.edu.br/index.php/argumentosproeducacao/article/view/292/217

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem*. Artes Médicas.

Corso, H. V., Sperb, T. M., Jou, G. I., & Salles, J.F. (2013). Metacognição e Funções Executivas: Relações entre os Conceitos e Implicações para a Aprendizagem. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 29(1), 21-29. https://www.scielo.br/j/ptp/a/SzJ3qv7qDLqdncBNfnz4Xnb/?format=pdf&lang=pt

Diamond, A. (2013). Executive functions. *Annual review of psychology*, 64, 135-168. https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-psych-113011-143750

Díez–Reviriego, E. & Bausela–Herreras, E. (2018). Funciones ejecutivas y la competencia para resolver problemas matemáticos en Educación Primaria. *Cuadernos de Neuropsicología / Panamerican Journal of Neuropsychology*, 12(1), 42-57. https://www.cnps.cl/index.php/cnps/article/view/322

Gonçalves, H.A., Viapiana, V.F., Sartori, M.S., Giacomoni, C. H., Stein, L.M. & Fonseca, R. P. (2017). Funções Executivas predizem o processamento de habilidades básicas de leitura, escrita e matemática? *Revista Neuropsicologia Latinoamericana*, 9(3), 42-54. https://www.neuropsicolatina.org/index.php/Neuropsicologia_Latinoamericana/article/view/393/223

Miyake, A., Friedman, M. J., Emerson, J.M., Witzki, A. H. & Howerter, A. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex frontal lobe tasks: a latent variable analysis. *Cogn. Psychol*, 40(1), 49–100. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/10945922/

Roebers, C.M, Cimeli, P., Rothlisberger, M. & Neuenschwander, R. (2012). Executive Functioning, Metacognition, and Self-Perceived Competence in Elementary School Children: An Explorative Study on their Interrelations and their Role for School Achievement. *Metacognition and Learning*, 7(3), 151-173. https://psycnet.apa.org/record/2012-29410-001

Santana, A. N., Roazzi, A & Melo, M R. A. (2020). Os Três Componentes Executivos Básicos E O Desempenho Matemático Escolar. *Revista Brasileira De Estudos Pedagógicos*, 101(259), 649-69. https://www.scielo.br/j/rbeped/a/ggLTY6LbGcwmQ4rjZVpf5YF/abstract/?lang=pt

Souza, C. F. De & Matias, N. C. F. (2020) *Correlatos Cognitivos na Aprendizagem da Matemática: uma revisão da literatura*. Bolema, 34(68), 1324-1340. https://www.scielo.br/j/bolema/a/8c45McBBqSV9nbf6r7394fN/?lang=pt

Vasconcelos, L. J. & Falcão, J.T.R. (2008). *O funcionamento executivo como um dos fatores explicativos do desempenho matemático escolar* [Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco]. Repositório Digital da UFPE. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8216

Alunos do anos finais do ensino fundamental investigando o tema contemporâneo transversal educação financeira

Amanda Anjos da Silva **Ramos**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
amandaanjos121@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Neste trabalho apresenta-se um recorte dos resultados obtidos a partir da implementação (desenvolvimento, aplicação e avaliação) de um projeto com o Tema Contemporâneo Transversal Educação Financeira com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental (EF). A presente investigação se justifica pela importância de buscar possibilidades didáticas para desenvolver nos anos finais do EF um projeto de trabalho que visa a aprendizagem e o desenvolvimento de competências e habilidades seguindo os princípios indicados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O objetivo foi que os estudantes aprendessem de maneira autônoma, investigando sobre o Tema Contemporâneo Transversal e aprendendo sobre os objetos do conhecimento no desenvolvimento do projeto de pesquisa. A metodologia é qualitativa e se caracteriza como um estudo de caso. Os resultados apontam que a resolução de situações problema com abordagem de temas com relevância social envolvendo Educação financeira podem favorecer o ensino de conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Anos Finais do Ensino Fundamental; Projetos de trabalho; Educação Financeira; BNCC.

Introdução

Neste trabalho pretende-se identificar as contribuições didáticas de um projeto de trabalho para a aprendizagem e desenvolvimento de competências e habilidades indicadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual do munícipio de Canoas, do estado do Rio Grande do Sul, Brasil. O presente estudo visa implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um projeto de trabalho que possibilite oportunidades de desenvolver e ou qualificar competências e habilidades indicadas na BNCC (Brasil, 2017). O trabalho foi desenvolvido em grupos, a partir de sub temáticas que auxiliem os estudantes a enfrentarem os desafios cotidianos, e a concretização de projetos de vida, sustentados por uma formação financeira. Entende-se que um estudo direcionado por meio de experiências reais, com estudantes investigando e sendo protagonistas, auxilia na formação de um cidadão mais crítico e autônomo de suas percepções da vida pessoal, social e futuramente profissional.

A aplicação deste projeto de trabalho está integrada ao Tema Contemporâneo Transversal (TCT) Educação Financeira, que tem o objetivo de desenvolver habilidades matemáticas de maneira real, dinâmica, com uma abordagem transdisciplinar que valorize a aprendizagem escolar, mas que contribua para diminuir progressivamente, as desigualdades econômicas e a discriminação social visando uma sociedade mais igualitária (BRASIL, 2019). Com o desenvolvimento de um projeto de trabalho repleto de intencionalidades que envolva experimentação, socialização, comunicação e autonomia, os estudantes podem construir significados para suas aprendizagens e compreender conceitos relacionados às habilidades com base na realidade concreta, enfatizando a importância da formação integral dos alunos (Groenwald & Kaiber, 2008).

A metodologia do desenvolvimento deste projeto de trabalho envolvendo Educação Financeira, pretendeu motivar os alunos, promover o desenvolvimento de competências e habilidades ligadas à área de Estatística e Probabilidade, buscando um sujeito mais ativo, capaz de construir seu próprio conhecimento a partir de situações reais, com habilidades para desenvolver um trabalho colaborativo em grupos.

Educação Financeira

A aprendizagem de educação financeira na escola tem um papel fundamental para preparar cidadãos para a vida, para que possam agir de forma consciente, diante de assuntos do "universo financeiro". Segundo Cordeiro, Costa & Silva (2018), somente no ano de 2010, a educação financeira passou a ser organizada pelo governo federal, no Brasil, através do Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), que criou a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), foi implantada a Educação Financeira (EF) dentro do contexto escolar, com a intenção de contribuir para a boa formação financeira da população brasileira. Com o objetivo de explicar e simplificar o entendimento das atividades financeiras cada vez mais cedo e construir uma cultura de organização e aprendizagem sadia de como o cidadão pode utilizar seu dinheiro de forma organizada, planejada e sustentada em princípios financeiros corretos. Os autores ainda salientam que havia poucas ações voltadas para EF, podendo considerar que seu nascimento formal no Brasil se deu a partir da criação da ENEF, com o Decreto 7397/2010, de dezembro de 2010. Só então, a EF começou a ganhar visibilidade no âmbito escolar.

É importante que o estudante seja educado financeiramente, e assim compreenda conceitos matemáticos nos assuntos financeiros que o permitam refletir sobre seus ganhos e custos previamente (Growenvald & Olgin, 2018). De acordo com D'Ambrósio (1997), o currículo escolar deve interligar diferentes situações sociais e refletir o momento vivenciado pela sociedade, e assim levar em consideração objetivos, métodos e conteúdos. Em uma perspectiva mais ampla, Azcárate (1997) defende que a prioridade na organização do currículo de matemática deveria priorizar problemas potenciais ao aluno que permitissem interação entre a realidade social, cultural, política e natural. Segundo a autora, problemas são todos os "[...] temas que interessam, preocupam ou são obstáculos para o estudante e estão relacionados a diferentes aspectos da vida" (Azcárate, 1997, p. 83). Conforme aponta Campos & Silva (2014), o mercado financeiro está disponibilizando cada vez mais produtos, sendo assim é importante que a população esteja bem informada e organizada para que saibam lidar futuramente com o mercado financeiro e aptos a discutir diferentes perspectivas para a formação de um cidadão que possa, com autonomia, tomar suas decisões de forma consciente.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), é um documento federal que busca orientar a elaboração do currículo de cada escola considerando as particularidades metodológicas e regionais de cada instituição. A BNCC por meio de habilidades e competências essenciais, estabelece os objetivos de aprendizagem que se quer alcançar.

Cordeiro, Costa & Souza (2018) apontam que no âmbito do sistema de educação se perpetua há anos a discussão em que defendem, a importância da articulação de um currículo escolar que fosse condizente com a realidade sociocultural dos estudantes, a fim de favorecer o seu processo educacional. Os autores averiguaram que desde a implementação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) 9.394/96 era cogitada uma estrutura curricular que pudesse uniformizar o currículo para que as diferenças de conhecimento pudessem ser superadas.

Analisando alguns trechos da BNCC (2017), é possível identificar uma forte orientação para que sejam desenvolvidos os temas contemporâneos transversais, de forma transversal e integradora, o documento propõe que estados e municípios abordem o consumo consciente e o planejamento financeiro em diferentes disciplinas.

Projetos de trabalho

Para formação de alunos com autonomia, que compreendam de maneira realista e interajam com os objetos do conhecimento no desenvolvimento de habilidades e competências, utilizando os mesmos em seu trabalho diário, um dos métodos que possibilita obter aprendizagem de forma significativa e também realista é o projeto de trabalho.

Mora (2003) vem enfatizar que o método de projetos é constituído de um conjunto de componentes como: iniciativa, discussão, planejamento, desenvolvimento e ápice, para chegar à evolução do conhecimento do aluno, visando uma aprendizagem significativa. O autor ainda descreve que o método de projetos, colabora para que os estudantes tenham uma visão mais humana, útil e atrativa da matemática.

Conforme destaca Hernández (1998), a metodologia de projetos propicia a criação de estratégias de organização de conhecimentos escolares, desenvolvendo a transformação da informação de diferentes saberes disciplinares para o conhecimento próprio. Corroborando com essas ideias Growenvald & Kaiber, (2008) acrescentam que o uso da metodologia de Projetos torna o estudante centro do ensino, e os professores mediadores e facilitadores do processo, favorecendo consideravelmente a criatividade, independência e possibilitando maior motivação e interesse dos estudantes.

Metodologia

Esta pesquisa constitui a primeira etapa do projeto de pesquisa, para uma dissertação de Mestrado, do PPGECIM. Os resultados apresentados foram obtidos através de uma investigação, de cunho qualitativo, cujo objetivo foi analisar, por meio da resolução de situações problema e pesquisa sobre subtemáticas que envolvem o TCT Educação Financeira, as contribuições de um projeto de trabalho para o desenvolvimento de competências e habilidades envolvendo a unidade temática Estatística e Probabilidade.

Para realizá-la optou-se pelo método estudo de caso, pois buscou verificar os resultados da implementação de um projeto de trabalho com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual no município de Canoas, Brasil. A importância de analisar dados reais permitiu uma exploração de situações das suas realidades. Os participantes foram 25 estudantes do colégio estadual na cidade de Canoas. Para coleta dos dados houve a utilização dos instrumentos: Questionário de sondagem sobre o TCT Educação Financeira, Investigação dos Subtemas, registro dos alunos sobre o aprendizado dos temas abordados em cada grupo e realização de situações problemas envolvendo as subtemáticas.

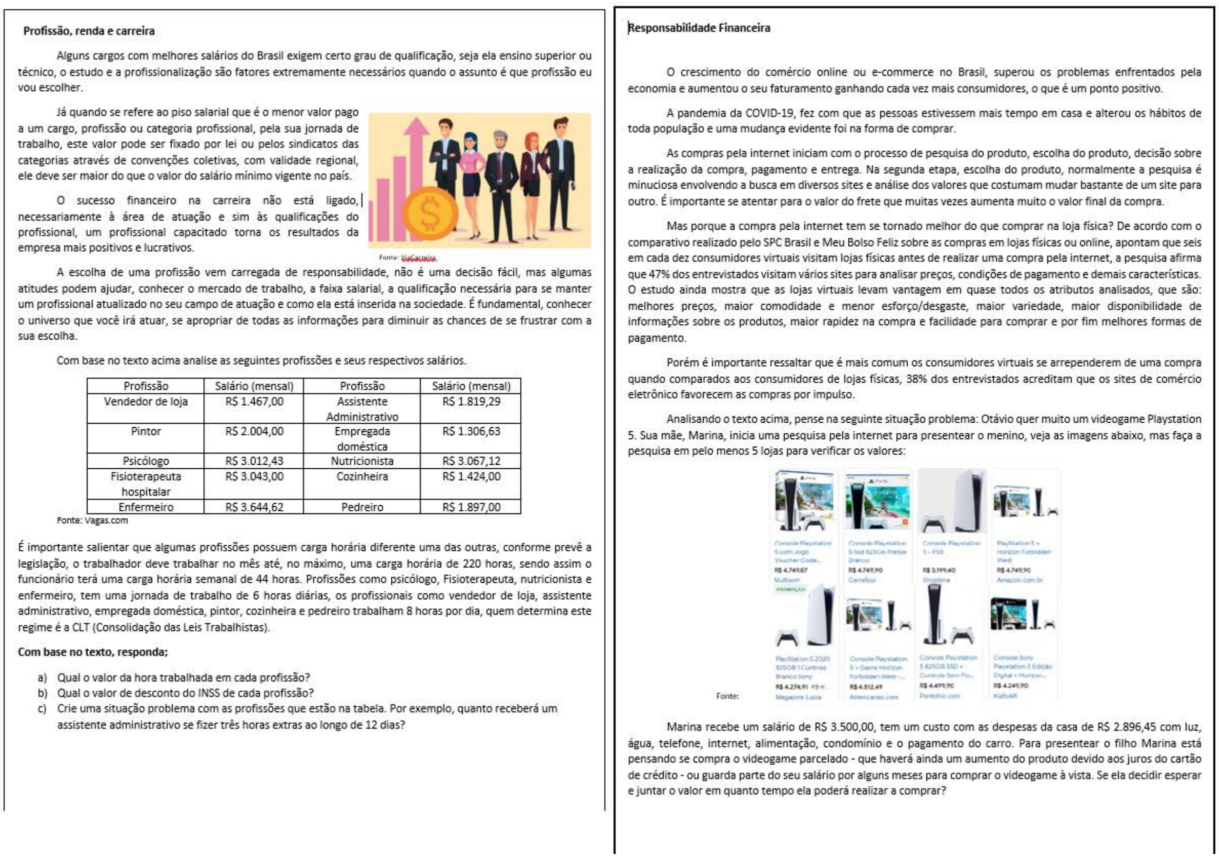
Neste artigo, apresenta-se um recorte dos resultados obtidos entre o 3° e 4° encontros da aplicação do projeto, que são referentes a atividade de realização das situações problema. Utilizando tecnologias digitais com o objetivo de que estas situações problema contribuíssem para compreensão da temática e análise do desenvolvimento dos estudantes em situações cotidianas que envolvam a utilização de gráficos, tabelas e frequências relativas. A seguir apresenta-se as etapas realizadas no desenvolvimento do projeto que alternaram entre a estruturação do projeto, organização e aplicação de um conjunto de atividades que exploravam a temática de pesquisa.

Análise das atividades e discussão dos resultados

O desenvolvimento do projeto aconteceu durante as aulas de Matemática, no segundo semestre de 2022. Os estudantes assistiram um vídeo que alertava para importância de discutir Educação Financeira na escola, após isso receberam os *Chromebooks* da escola para responder um questionário inicial, com o objetivo de identificar suas percepções quanto ao assunto e se organizaram em grupos após a escolha da subtemática de sua preferência, a partir dos seguintes subtemas: Salário Mínimo; Profissão, renda e carreira; Planejamento e Gestão do dinheiro; Orçamento familiar e despesas e Responsabilidade Financeira e receberam Ebooks com explicações e orientações sobre a temática escolhida.

Os estudantes precisaram pesquisar previamente sobre o subtema escolhido e em seguida receberam situações problema sobre o mesmo, ao longo do desenvolvimento foram socializando e elaborando juntos suas hipóteses para responder as perguntas, desenvolver os cálculos, realizar os gráficos e análises necessárias para orientar as reflexões e tomadas de decisões necessárias para cada situação.

Nas situações problema recebidas de forma impressa, os estudantes tiveram informações sobre os subtemas, nele continha uma breve história sobre a origem de cada subtemática ou situações reais que levassem a reflexão do tema e também uma pergunta que poderia ser respondida utilizando cálculos, gráficos ou tabelas, como mostra a Figura 1.



Profissão, renda e carreira

Alguns cargos com melhores salários do Brasil exigem certo grau de qualificação, seja ela ensino superior ou técnico, o estudo e a profissionalização são fatores extremamente necessários quando o assunto é que profissão eu vou escolher.

Já quando se refere ao piso salarial que é o menor valor pago a um cargo, profissão ou categoria profissional, pela sua jornada de trabalho, este valor pode ser fixado por lei ou pelos sindicatos das categorias através de convenções coletivas, com validade regional, ele deve ser maior do que o valor do salário mínimo vigente no país.

O sucesso financeiro na carreira não está ligado, necessariamente à área de atuação e sim às qualificações do profissional, um profissional capacitado torna os resultados da empresa mais positivos e lucrativos.

Fonte: ViaCarreira

A escolha de uma profissão vem carregada de responsabilidade, não é uma decisão fácil, mas algumas atitudes podem ajudar, conhecer o mercado de trabalho, a faixa salarial, a qualificação necessária para se manter um profissional atualizado no seu campo de atuação e como ela está inserida na sociedade. É fundamental, conhecer o universo que você irá atuar, se apropriar de todas as informações para diminuir as chances de se frustrar com a sua escolha.

Com base no texto acima analise as seguintes profissões e seus respectivos salários.

Profissão	Salário (mensal)	Profissão	Salário (mensal)
Vendedor de loja	R$ 1.467,00	Assistente Administrativo	R$ 1.819,29
Pintor	R$ 2.004,00	Empregada doméstica	R$ 1.306,63
Psicólogo	R$ 3.012,43	Nutricionista	R$ 3.067,12
Fisioterapeuta hospitalar	R$ 3.043,00	Cozinheira	R$ 1.424,00
Enfermeiro	R$ 3.644,62	Pedreiro	R$ 1.897,00

Fonte: Vagas.com

É importante salientar que algumas profissões possuem carga horária diferente uma das outras, conforme prevê a legislação, o trabalhador deve trabalhar no mês até, no máximo, uma carga horária de 220 horas, sendo assim o funcionário terá uma carga horária semanal de 44 horas. Profissões como psicólogo, Fisioterapeuta, nutricionista e enfermeiro, tem uma jornada de trabalho de 6 horas diárias, os profissionais como vendedor de loja, assistente administrativo, empregada doméstica, pintor, cozinheira e pedreiro trabalham 8 horas por dia, quem determina este regime é a CLT (Consolidação das Leis Trabalhistas).

Com base no texto, responda;

a) Qual o valor da hora trabalhada em cada profissão?
b) Qual o valor de desconto do INSS de cada profissão?
c) Crie uma situação problema com as profissões que estão na tabela. Por exemplo, quanto receberá um assistente administrativo se fizer três horas extras ao longo de 12 dias?

Responsabilidade Financeira

O crescimento do comércio online ou e-commerce no Brasil, superou os problemas enfrentados pela economia e aumentou o seu faturamento ganhando cada vez mais consumidores, o que é um ponto positivo.

A pandemia da COVID-19, fez com que as pessoas estivessem mais tempo em casa e alterou os hábitos de toda população e uma mudança evidente foi na forma de comprar.

As compras pela internet iniciam com o processo de pesquisa do produto, escolha do produto, decisão sobre a realização da compra, pagamento e entrega. Na segunda etapa, escolha do produto, normalmente a pesquisa é minuciosa envolvendo a busca em diversos sites e análise dos valores que costumam mudar bastante de um site para outro. É importante se atentar para o valor do frete que muitas vezes aumenta muito o valor final da compra.

Mas porque a compra pela internet tem se tornado melhor do que comprar na loja física? De acordo com o comparativo realizado pelo SPC Brasil e Meu Bolso Feliz sobre as compras em lojas físicas ou online, apontam que seis em cada dez consumidores virtuais visitam lojas físicas antes de realizar uma compra pela internet, a pesquisa afirma que 47% dos entrevistados visitam vários sites para analisar preços, condições de pagamento e demais características. O estudo ainda mostra que as lojas virtuais levam vantagem em quase todos os atributos analisados, que são: melhores preços, maior comodidade e menor esforço/desgaste, maior variedade, maior disponibilidade de informações sobre os produtos, maior rapidez na compra e facilidade para comprar e por fim melhores formas de pagamento.

Porém é importante ressaltar que é mais comum os consumidores virtuais se arrependerem de uma compra quando comparados aos consumidores de lojas físicas, 38% dos entrevistados acreditam que os sites de comércio eletrônico favorecem as compras por impulso.

Analisando o texto acima, pense na seguinte situação problema: Otávio quer muito um videogame Playstation 5. Sua mãe, Marina, inicia uma pesquisa pela internet para presentear o menino, veja as imagens abaixo, mas faça a pesquisa em pelo menos 5 lojas para verificar os valores:

Fonte:

Marina recebe um salário de R$ 3.500,00, tem um custo com as despesas da casa de R$ 2.896,45 com luz, água, telefone, internet, alimentação, condomínio e o pagamento do carro. Para presentear o filho Marina está pensando se compra o videogame parcelado - que haverá ainda um aumento do produto devido aos juros do cartão de crédito - ou guarda parte do seu salário por alguns meses para comprar o videogame à vista. Se ela decidir esperar e juntar o valor em quanto tempo ela poderá realizar a comprar?

Figura 1. Imagem das duas situações problemas desenvolvidos no projeto. (Fonte: a pesquisa)

Inicialmente os alunos se organizaram em grupos, cada grupo teve tempo para ler seu Ebook e realizar a pesquisa sobre a subtemática. Os grupos pesquisaram questões como: Valor da hora trabalhada em cada profissão, desconto de INSS, surgimento e evolução do salário mínimo nos últimos anos, organização de orçamento familiar e sobre o faturamento de empresas da cidade de Canoas/Brasil. Os estudantes desenvolveram as questões, com muita autonomia, foram problematizando os dados apresentados, provocando questionamentos e reflexões.

Também foi discutido sobre a forma como a sociedade tem se comportado com relação as compras pela internet, através da pesquisa na internet. Dessa forma puderam analisar informações como o valor de frete nas compras e como o valor final seria alterado de acordo com esta cobrança. Entre as respostas dadas as perguntas, surgiram ideias muito sensatas para a faixa etária envolvida, tais como: não é possível comprar um *playstation* sem juntar dinheiro primeiro ou vai faltar para pagar as contas de casa e é melhor pesquisar bem e ver se a loja tem frete grátis e pesquisa de preços.

Para finalizar as atividades os estudantes apresentaram suas opiniões na forma oral e escrita, quando questionados sobre essa proposta de atividade, eles responderam que gostaram bastante por ser mais dinâmica, envolver pesquisa e resolução de atividades do cotidiano. Os resultados apontam que a resolução de situações problema com abordagem de temas com relevância social envolvendo Educação Financeira podem favorecer o ensino de conhecimentos matemáticos.

Considerações Finais

Quando o desenvolvimento de competências e habilidades está integrado a um tema que aborde questões da realidade social dos alunos e contempla um formato diferente de aprendizagem que o instiga a aprender de forma autônoma, é possível observar uma melhora no desempenho dos mesmos e interesse na resolução das atividades. Propor tarefas que envolvam a Educação Financeira com diferentes recursos didáticos e metodologias, foi enriquecedor pois os estudantes se mostraram mais acessíveis ao desenvolvimento das atividades propostas. Foi surpreendente o fato de que alguns estudantes ficaram admirados com as descobertas e atentos às situações, interagindo com os outros grupos e criando uma colaboração entre os mesmos para resolução das atividades desenvolvidas. Dentre o conjunto de atividades propostas a que mais se destacou entre os estudantes foi a atividade sobre o salário mínimo, mais de um grupo trabalhou com esta temática e houve um envolvimento de ambos os grupos para apresentar o que entenderam no momento de discussão dos resultados, demonstrando um fator motivacional e relacionando os objetos de conhecimento com a temática abordada.

Foi possível inferir que o propósito do trabalho até o momento foi alcançado, observou-se que os estudantes refletiram sobre ações e também sobre as consequências sobre a vida financeira, além de desenvolver habilidades e competências como comprometimento ligando teoria e prática na resolução das atividades propostas. A utilização de temas com relevância social pode favorecer o ensino de conhecimentos matemáticos.

Referências e bibliografia

Azcárate, P. (1997) *¿Qué matemáticas necessitamos para comprender el mundo actual? Investigación em la Escuela*, 32, 77-85

Brasil. Ministério da Educação. (2017). Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base. Brasília: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: 17 de outubro de 2022

Brasil. (2010) Decreto n 7.397, de 22 de dezembro de 2010. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Poder Executivo, Brasília, DF, 23 dez. Seção 1, p. 7-8. Acesso em: outubro de 2022

Brasil. (2019) Temas Contemporâneos Transversais. Brasília, DF: Ministério da Educação. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf Acesso em: outubro de 2022

Campos, M. B; Silva, A. M. (2014) *A Produção de significados de estudantes do ensino fundamental para tarefas de educação financeira. Perspectivas da Educação Matemática*, v. 7, n. 14, 2014.

CONEF (2013) Comitê Nacional de Educação Financeira - CONEF. Educação Financeira nas Escolas, Ensino Médio. 1. ed. Brasília.

Cordeiro, N. J. N; Costa, M. G. V; Da Silva, M. N. (2018) *Educação Financeira no Brasil: uma perspectiva panorâmica. Ensino da Matemática em Debate*, v. 5, n. 1, p. 69-84.

D´Ambrosio, U. (1997) *Educação Matemática: da teoria à prática*. Ed. Papirus, 9º edição. Campinas.

Groenwald, C. L. O.; Olgin, C. A. (2018) Educação financeira no currículo de matemática do ensino médio. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v.11, n. 2.

Groenwald, C. L. O; Kaiber, C T. (2008) Educação Matemática. In: Bonin, I. T. et. Al (Org.). Cultura, Identidade e Formação de Professores – Perspectivas para a Escola Contemporânea. Canoas: Ulbra.

Hernández, F; Ventura, M. (1998) *A Organização do Currículo por Projetos de Trabalho*. Traduzido por: Jussara Haubert Rodrigues. 5.ed. Porto Alegre: Artes Médicas.

Mora, D. (2003) *Aprendizaje y enseñanza: Proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro*. LaPaz, Bolivia: Campo Iris.

Análise Combinatória na perspectiva do ensino exploratório

Raquel Carneiro **Dörr**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
raqueldorr@unb.br
Elisângela Fernandes **Cerqueira**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
eliselis1903@gmail.com
Marcio Lucas de **Freitas**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
marciodlf@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica apresenta uma pesquisa qualitativa feita no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e descreve a realização de uma atividade de contagem, na perspectiva do ensino exploratório para uma turma da 3ª série do Ensino Médio da rede pública de ensino, na modalidade Educação de Jovens e Adultos, com o objetivo de desenvolver uma experiência de ensino na perspectiva do ensino exploratório. Para tanto, foi criada uma tarefa matemática sobre o tema e colocada em prática pela professora regente, que expôs aos alunos a proposta e como ela se desenvolveria. Um dos diferenciais evidenciados pelo método exploratório foi a presença de um segundo professor, chamado de "professor-observador". Entre os resultados obtidos, destaca-se que os estudantes se engajaram na resolução das atividades propostas e conseguiram realizar uma discussão matemática sobre o tema da Análise Combinatória.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino exploratório; Resolução de problemas; Análise Combinatória; EJA.

Introdução

O estudo da Análise Combinatória apresenta desafios na maioria das salas de aula brasileiras (Lós et al., 2019), seja na apresentação desse conteúdo, quanto na aprendizagem dos estudantes. Contudo, buscando contornar essa situação e cooperar para o ensino e a aprendizagem desse assunto, ele foi apresentado na perspectiva do ensino exploratório, por meio de uma tarefa matemática com vistas a promover o engajamento e a imersão dos alunos no tema, em conexão com o seu cotidiano.

Para tanto, alicerçados nos estudos de Canavarro (2011) acerca do ensino exploratório, foi criada uma tarefa matemática sequenciada em etapas, na qual os estudantes foram organizados em pequenos grupos para juntos, procurarem as informações necessárias para a resolução da atividade proposta a partir do enunciado. Ainda foram orientados a buscarem junto ao grupo a construção e o desenvolvimento dos raciocínios necessesários para a resolução da tarefa. A atividade foi orientada e monitorada pela professora regente da turma e teve um outro professor como observador. Esse último teve o papel de auxiliar a regente nas anotações das falas e registros dos estudantes nos grupos, sem intervir na mediação da tarefa.

Desta forma, esta comunicação científica apresenta a tarefa, discorre a respeito do referencial teórico que fundamenta a escolha do tipo de tarefa e os conceitos agregados a tal escolha; a metodologia implementada na realização da tarefa; o seu planejamento; a descrição de como se desenvolveu essa tarefa; a análise dos resultados e as considerações finais a respeito do que foi observado.

Referencial teórico

A Base Nacional Curricular Comum, documento que norteia a educação brasileira, preconiza, em suas competências gerais, que os estudantes tenham uma formação integral comprometida com a “construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea” (Brasil, 2018, p. 14). Logo, para que esses processos sejam efetivos, faz-se necessário, segundo Oliveira, Araman e Trevisan (2022), saber quais ações e práticas pedagógicas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio do estudante. Nesse cenário, é possível que sejam desenvolvidas tarefas matemáticas em sala de aula que viabilizem o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Em que consiste uma atividade matemática? E qual sua diferença ante uma tarefa? Christiansen e Walther (1986) consideram que ambas se constituem em categorias didáticas básicas, mas distintas. Para esses autores, uma atividade pode incluir, mas não se limitar, à execução de numerosas tarefas e pode ser física ou mental. Por outro lado, eles afirmam que a tarefa apenas corresponde ao objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra.

Neste contexto, há que se distinguir as tipologias de tarefas que podem ser aplicadas. Ponte (2005) considera que existem duas dimensões fundamentais por elas apresentadas: o seu grau de desafio matemático – que depende da percepção de dificuldade da questão, sendo “reduzido” ou “elevado” – e o seu grau de estrutura – que pode variar entre os polos “aberto” e “fechado”. Diante deste cenário, uma tarefa exploratória pode ser considerada uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos. Ainda segundo Ponte (2014), ela deve possibilitar a todos eles um elevado grau de sucesso e o desenvolvimento de autoconfiança.

Para que este cenário se concretize, Stein et al. (2008) afirmam que devem ser seguidas de perto cinco práticas que proporcionam ao professor melhores condições para concluir boas discussões matemáticas no âmbito de uma tarefa exploratória. São elas: Antecipar: prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa, bem como elencar estratégias – sejam corretas ou incorretas – que os alunos podem seguir, de modo a antever como reagir diante de questionamentos; Monitorizar: observar e ouvir os alunos, avaliando a validade das ideias e resoluções aplicadas. Nesta etapa, o professor consegue perceber as barreiras encontradas pelos alunos e decidir em quais aspectos focar na discussão subsequente; Selecionar: diante da monitorização dos grupos, o professor pode identificar quais resoluções e ideias são importantes partilhar com todo o grupo, a fim de direcionar a discussão para o objetivo final da atividade; Sequenciar: simultaneamente à anterior, nesta etapa o professor deve decidir qual percurso de exploração das ideias dos alunos deve ser seguido, a fim de iniciar de forma mais acessível e direcionar progressivamente para resoluções que permitam generalizar os conceitos; Estabelecer conexões: nessa etapa, o professor deve incentivar os alunos a analisar as resoluções apresentadas, identificar o que deve ser priorizado e balizar quais conexões devem ser estabelecidas para consolidação do aprendizado.

Por isso, Stein et al. (2008) afirmam que o ensino exploratório da Matemática é uma atividade complexa e pode ser considerada difícil de ser colocada em prática por muitos professores. São variadas as etapas de preparação prévia e acompanhamento das atividades para se obter sucesso na aplicação de uma tarefa exploratória. No entanto, nessa abordagem, "em que a comunicação se sustenta em processos de discussão e negociação" (Guerreiro et al., 2015, p. 280), as oportunidades de discussão e consolidação do aprendizado coletivo são destacadamente superiores ao modelo de tarefas fechadas tradicionais, cujas etapas são apenas a resolução por parte do aluno e a correção por parte do professor.

A Análise Combinatória promove um pensar hipotético-dedutivo que permite ao estudante levantar hipóteses e possibilidades para que se efetue uma determinada contagem em problemas de natureza matemática, ou de outras áreas do conhecimento, de maneira contextualizada. De acordo com Morgado e Carvalho (2015), não se deve fazer uso demasiado de fórmulas no ensino da Análise Combinatória, mas sim desenvolver o conteúdo com o princípio básico de contagem.

Metodologia

A investigação acerca da criação e desenvolvimento da tarefa matemática aqui apresentada está baseada na pesquisa qualitativa de estudo de caso, com caráter interpretativo. A tarefa matemática e sua aplicação foram trabalhados ao longo de um semestre na disciplina de Tópicos de Matemática, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade de Brasília (UnB), no segundo semestre de 2022.

Ela foi desenvolvida em uma escola pública da Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF) que oferece turmas de anos finais – 6º, 7º, 8º e 9º, Ensino Médio e

Educação de Jovens Adultos (EJA). A escola é composta de 20 salas de aulas, todas equipadas com um televisor de 32 polegadas, o qual foi utilizado para sistematizar a tarefa.
Os registros de prática foram coletados por meio da entrega do material escrito pelos alunos, da resolução da atividade; áudio gravado pelo celular do professor-observador sobre os acontecimentos que se desencadearam no desenvolvimento da tarefa matemática; anotações pontuais em relação às dúvidas dos estudantes feitas ao final da aula e imagem da sistematização da tarefa matemática no aparelho televisor da sala de aula. Os registros serão ilustrados por meio de uma das imagens contidas nos materiais entregues pelos alunos.

Planejamento da tarefa matemática

Inicialmente, a proposta consistia em uma tarefa matemática fechada, inspirada em uma questão típica de um material didático, porém, verificou-se a necessidade de reestruturar a proposta inicial de modo a possibilitar que os estudantes pudessem expressar a construção e a sistematização do raciocínio matemático. Assim, optou-se por transformá-la em uma tarefa aberta, buscando aproximá-la de uma atividades exploratória. As etapas da tarefa e o tempo necessário para a implementação foram assim definidos:

1. Formação dos grupos; (5 minutos)
2. Leitura e interpretação do texto introdutório; (5 minutos)
3. Apresentação da situação-problema; (5 minutos)
4. Simulação da situação-problema; (10 minutos)
5. Questionamentos a partir do situação-problema; (10 minutos)
6. Resolução da situação-problema; (25 minutos)
7. Análise das estratégias apresentadas; (10 minutos)
8. Conclusão (10 minutos).

Desenvolvimento da tarefa matemática em sala de aula

A tarefa foi aplicada no dia 22 de agosto de 2022, em uma escola pública da região metropolitana de Brasília, no turno noturno. Participaram do desenvolvimento da atividade, 22 estudantes de uma turma da 3ªetapa do 3º segmento da EJA, dos quais 16 são do gênero feminino e 6 do masculino, com idades entre 19 e 66 anos; 91% da turma possuíam trabalho permanente ou temporário no diurno e frequentavam a escola no período noturno. Aproximadamente 14% dos estudantes não frequentavam a escola há mais de 5 anos e retornaram naquele semestre. A turma contava com um estudante com deficiência motora leve que não necessitava de um monitor de gestão educacional para acompanhá-lo.

Inicialmente, foi entregue o roteiro da atividade matemática para cada um dos estudantes presentes. A seguir, foi disponibilizado um tempo suficiente para que fosse realizada a leitura individual do texto introdutório retirado de um artigo de jornal sobre um acidente de trânsito ocorrido na cidade semana antes. Logo após, houve uma discussão sobre o texto com perguntas sobre a legislação de trânsito vigente e sobre as impressões dos estudantes sobre a necessidade das leis para a segurança do trânsito. Esse momento foi importante, pois trouxe à luz o tema da tarefa matemática a ser realizada.

Em seguida, foi solicitada a formação de quatro grupos com os estudantes presentes, seguida da leitura individual da tarefa matemática descrita abaixo. Originalmente, a questão fazia parte de uma prova de um curso preparatório para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), porém, pelo fato do grau de dificuldade ter sido considerado muito alto para a turma em que seria aplicada, a questão foi adaptada pelos autores, tendo a versão final ficado como a seguir:

Uma família irá viajar daqui a quatro semanas em um carro de sete lugares, sendo dois bancos dianteiros - um deles, o do motorista - e cinco bancos traseiros. Na família há um pai e uma mãe, ambos habilitados a dirigir, além de quatro filhos que, atualmente, têm as seguintes idades: 7, 13, 17 e 21 anos. Nesta família, assim que completam 18 anos, os filhos iniciam o curso de direção na autoescola, e após 3 meses estão aptos a dirigir. Sabe-se ainda que os dois filhos mais velhos farão aniversário na semana anterior à viagem e que o banco dianteiro destinado ao passageiro deve, necessariamente, estar ocupado. Sendo assim, de quantas maneiras diferentes essa família pode se acomodar no veículo para a realização dessa viagem?.

Após a leitura, foi realizada a simulação da situação-problema com as cadeiras da sala de aula como os bancos do carro e os próprios estudantes como os ocupantes do veículo. O objetivo da simulação foi tornar mais clara a compreensão dos estudantes acerca da atividade e das possibilidades existentes na hora de ocupar cada banco do veículo.

Após a simulação, os estudantes começaram a discutir a tarefa e a solicitar a presença da professora, que passava nos grupos, para fazerem alguns questionamentos. Nessa fase de aplicação, que durou cerca de 40 minutos, os estudantes demonstraram grande interesse e envolvimento, debateram, sugeriram, trocaram ideias acerca da resolução do problema. Notou-se que houve, a princípio, grande dificuldade de compreensão por parte dos estudantes, todavia, após a simulação e as intervenções da professora, que, sem dar as respostas, ajudava com questionamentos pontuais, os estudantes compreenderam a situação e se empenharam em apresentar um resultado.

Os estudantes registraram e entregaram os resultados obtidos após a fase de discussões. Para ilustrar, apresentamos a seguir, na Figura 1, um dos registros dos grupos.

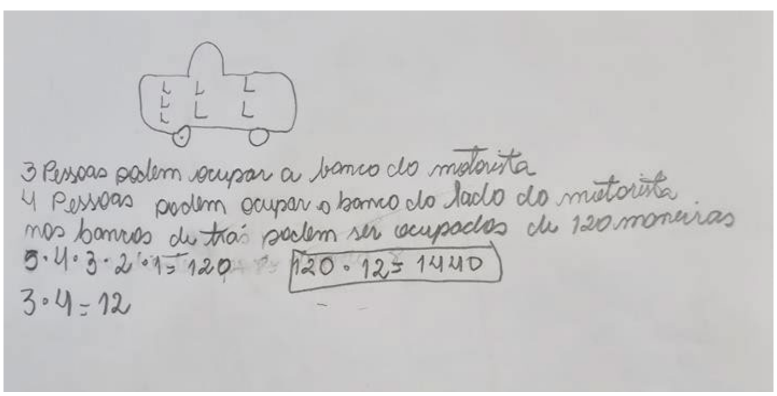


Figura 1. Exemplo de resposta

Análise dos resultados

Dois grupos optaram pela construção de uma figura para ajudar na resolução da questão; um deles foi o da Figura 1. Acreditamos que essa foi uma consequência oportunizada pela abordagem exploratória que se mostrou de grande utilidade pois, a partir daí, juntamente com a discussão matemática que ocorreu intensamente nos grupos, os estudantes elaboraram conjecturas matemáticas válidas quanto ao número de opções para ocupar o banco do motorista. Da mesma forma, para o banco dos passageiros, o que evidenciou a familiaridade e a compreensão dos integrantes dos grupos com a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

Um dos grupos utilizou traços, como um recurso, para representar os bancos do carro, nomeados com as letras (A, B, C, D e E) e F_1, F_2, F_3 e F_4 para designar os filhos. Abaixo dessa representação, escreveu a quantidade de maneiras como cada filho poderia escolher os bancos traseiros. Apesar da sintaxe matemática não estar totalmente correta, o raciocínio matemático estava em consonância com a quantidade de maneiras de se tomar uma decisão aplicada ao Princípio Fundamental da Contagem. Portanto, acreditamos que a escolha dessa estratégia esteve ligada diretamente à abordagem na perspectiva do ensino exploratório.

Um dos grupos apresentou bastante dificuldade inicialmente, de forma que praticamente todo o tempo foi gasto tentando criar uma estratégia, mesmo assim, seus integrantes conseguiram desenvolver uma alternativa que calculou corretamente a forma de ocupar os assentos do veículo.

Considerações finais

A partir do relato da professora, que identificava no grupo de estudantes dificuldades de compreensão e envolvimento da turma em alguns conteúdos matemáticos, foi realizada uma experiência de como o ensino exploratório pode ser um meio de criar ambientes de aprendizagem apoiados em tarefas matemáticas, desenvolvidas por meio de ações investigativas que buscam proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, e não apenas treino de procedimentos e aplicação de fórmulas, processo consolidado pelo método tradicional de ensino.

A abordagem didática consolidada por meio da aula exploratória revelou que, apesar dos estudantes apresentarem estágios diferentes de aprendizagem, eles conseguiram elaborar conjecturas matemáticas, através da discussão coletiva, as quais se aproximavam do padrão de resposta sistematizado no final da aula. O aprendizado ficou ainda evidenciado por meio das frases faladas por eles ao final da simulação com a turma, tais como: “*Ah, então era isso? É tão fácil, ‘a gente’ é que complica*”. A experiência evidenciou ainda que a aula desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório se mostrou como uma alternativa interessante para o ensino tradicional ao viabilizar o envolvimento e o interesse por parte dos estudantes. Além disso, a experiência apresentou uma possibilidade de construção do conhecimento matemático em paralelo com a solução de problemas cotidianos; uma iniciação à compreensão de conhecimentos de análise combinatória; e ainda amenizou a resistência demonstrada nas aulas de Matemática. Acrescenta-se a isso, a experiência de se ter o apoio do professor-observador, uma vez que essa perspectiva incomum da sala de aula, tornou possível constatar as diversas reações dos estudantes, o que normalmente é difícil, ou mesmo impossível, quando se é o único regente da classe: reações vocais, comportamentais e inclusive faciais.

Para a continuação da pesquisa, serão feitas atividades diagnósticas antes e depois da aplicação da tarefa, buscando mensurar, de forma mais sólida, a aprendizagem dos estudantes; e, além disso, desenvolver a tarefa em escolas diferentes, para que seja possível verificar elementos do pensamento matemático e das atitudes frente à resolução de problemas em ambientes escolares diferentes.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Prática e desafios. *Educação e Matemática*, (115), 11–27. https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In: Christiansen, B., Howson, A.G., & Otte, M. (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (Mathematics Education Library, vol 2.). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_7

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspectiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(4), 279–295.

Lós, D. E. D. S. (2019). *CombEsq: Uma proposta de objeto de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de análise combinatória* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Alagoas]. Repositório da UFAL. https://bityli.com/Ux4HP

Morgado, A. C., y Carvalho, P. C. (2015). *Matemática discreta* (2. ed., Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Oliveira, L. S. de, Araman, E. M. de O., & Trevisan, A. L. (2022). Processos de raciocínio matemático em uma tarefa exploratória. *Paradigma, 43*(1), 1–21.

Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. *In* Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). GTI/APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In* Ponte, J. P. (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13–27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Stein, M. K., et al. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313–340.

Análisis de la pertinencia del uso de la metáfora para el abordaje de contenidos matemáticos

Daniela **Alvarado-Porras**
Sección de Matemática, Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
daniela.alvaradoporras@ucr.ac.cr
Jeison **Reyes** Ávila
Sección de Matemática, Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
jeison.reyes@ucr.ac.cr
Julia **Venegas-Fallas**
Sección de Matemática, Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
julia.venegas@ucr.ac.cr

Resumen

El presente taller pretende reconocer el impacto positivo y negativo del uso de metáforas por parte de las personas docentes en matemáticas en cuanto a la comprensión de un contenido matemático y el desarrollo de habilidades matemáticas. Para este fin se han recopilado metáforas empleadas por docentes de secundaria y educación superior para presentar situaciones matemáticas que analizarán las personas participantes del taller donde deberán identificar cuáles metáforas *desconfiguran* el sentido primordial de un concepto, lo cual puede generar dificultades para el estudiantado, y cuáles pueden fortalecer un significado matemático, tanto que pueden ser usadas como una estrategia didáctica que conduce a un adecuado proceso de enseñanza y aprendizaje. De este modo, en el taller se busca estudiar las metáforas desde una perspectiva global en la que se reconocen sus limitaciones para el estudio de las matemáticas, también el fortalecimiento y comprensión de un tema en la disciplina ya mencionada.

Palabras clave: Educación matemática; Metáfora; Problema matemático; Analogías; Lenguaje matemático; Estrategias didácticas.

Introducción

En el presente taller se pretende mostrar metáforas empleadas por algunas personas docentes de matemática de secundaria y nivel universitario. Asimismo, se presenta una propuesta diferente tomando como base los lineamientos del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. La idea principal es generar discusión y análisis sobre la necesidad de prestar atención al lenguaje que el profesorado utiliza en su proceso de mediación pedagógica, ya sea de manera consciente o inconsciente, y cómo el uso de las metáforas puede influir, de manera positiva o negativa, en la comprensión de un concepto matemático, lo cual repercute en el aprendizaje de las matemáticas por parte de las personas estudiantes.

Además, se pretende mostrar, conforme a la investigación bibliográfica realizada, que el uso de las metáforas aporta riqueza comunicativa y funciona como un medio a través del cual las personas estudiantes pueden expresar sus ideas e interpretar más fácilmente la información; todo esto conduce a que se puedan adoptar las metáforas como estrategia didáctica para las personas docentes de matemáticas.

Marco teórico

Metáfora

La comprensión de la matemática por lo general no se rige por el aprendizaje absoluto de teoremas, axiomas o conceptos, se da por la relación en el pensamiento humano, de elementos matemáticos con otros elementos presentes en la vida cotidiana (Lakoff y Johnson, 1986; Lakoff y Núñez, 2000). La interacción docente-estudiante influye en la comprensión de la matemática, donde la metáfora forma parte de la comunicación que dicha interacción conlleva. Alrededor de esta idea se definirá el concepto de metáfora y se aludirá a su importancia como estrategia didáctica.

En relación a lo anterior, Pimm (2002) atañe al significado de la metáfora como un medio por el cual se pueden acuñar expresiones para un determinado registro matemático que no ha sido explorado. Así mismo, menciona que la metáfora brinda medios a través de los cuales lo que es menos habitual, es posible asimilarse a lo más familiar, considerando lo primero en términos de lo segundo. De este modo, se establece la metáfora como un medio que se emplea dentro del proceso cognitivo para la asimilación y adquisición del conocimiento matemático.

De igual forma, Pochulu et al. (2021) mencionan que “las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada” (p. 2), con lo cual se refuerza la definición que brinda Pimm acerca de la misma.

Además, Pimm menciona dos tipos metáforas matemáticas: *1) las metáforas extra-matemáticas* que “tratan de explicar o interpretar ideas y procesos en términos de acontecimientos del mundo real, y pueden incluir objetos y procesos de la vida diaria” (p. 143*); y 2) las metáforas estructurales* que “suponen una ampliación metafórica de ideas precedentes de las mismas matemáticas” (p. 143). La clasificación de estos dos tipos de metáforas es importante para su debido análisis, ya que, el primero de ellos alude a la comprensión de un concepto matemático a través de la asimilación del mismo con un término del lenguaje natural; el segundo relaciona un concepto matemático previo con otro, dentro del mismo registro matemático para el entendimiento de un concepto nuevo.

Por otro lado, alrededor de la interpretación de la metáfora como parte de las matemáticas existen aspectos positivos y negativos del uso de ellas en la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina. Pimm expone el cuidado que debe existir por parte de la persona docente con respecto al uso de estas, ya que, "si la metáfora se emplea como puente conceptual en un contexto introductorio, esta comparación directa no obstante es inadecuada y las diferencias deben ponerse de manifiesto o en una etapa posterior" (p. 147). Sin embargo, señala que "la metáfora y la analogía constituyen formas de expresión que potencian el lenguaje natural, y creo que en matemáticas se dan procesos comparables, al tiempo que la metáfora se utiliza en forma habitual en su enseñanza" (p. 143). En otras palabras, el impacto que la metáfora provoque es consecuente con la manera en la que la persona docente la utilice.

Asimismo, Flores (1999) indica que "la metáfora favorece la comunicación en cualquier contexto, que hace que esta comunicación sea significativa y global para los dos comunicantes, que permite la retroalimentación … y deja claro el aspecto que cada cual quiere enfatizar" (p. 95). El comentario de Flores se puede extrapolar a la interacción entre docente-estudiante, ya que la metáfora puede ser empleada por ambas partes y funcionar como puente de conexión entre la comunicación y la comprensión.

Por último, Sierra Ibáñez (2016) apunta que "la metáfora en la matemática es una herramienta universal para una enseñanza didáctica y traslación de conceptos teóricos a la práctica. Además, puede ser interpretada como el entendimiento de un dominio en términos de otro" (p. 35). Desde este punto de vista se caracteriza la metáfora como una estrategia didáctica que permite la comprensión de un concepto matemático en función de aspectos más avezados para la persona estudiante.

Por esta razón, nace la inquietud de generar un análisis sobre el impacto tanto positivo como negativo que puede darse a través del uso de las metáforas por parte de las y los docentes en su mediación pedagógica y tratar de comprender el cómo se fortalece o cómo se limita la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiantado.

Método de investigación

Como parte de un trabajo del curso Lenguaje Matemático de la malla curricular de licenciatura de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica en la Sede de Occidente, las personas matriculadas en el curso realizaron diversas observaciones a docentes de secundaria y universidad, con el objetivo de analizar el lenguaje empleado en el aula por parte de la persona docente y el estudiantado. En dichas observaciones se recolectaron metáforas empleadas por profesores las cuales fueron analizadas con base en el libro de Pimm (2002) y discutidas en clase. El ejercicio fue de gran enriquecimiento y dio pie a realizar muchas reflexiones importantes sobre el uso de metáforas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos. Como consecuencia de esta experiencia se han planteado diversos problemas y situaciones que tienen como base las metáforas mencionadas con el propósito de que los participantes del taller puedan encontrar los aspectos positivos y negativos de las mismas a partir de un análisis crítico y discusiones con los compañeros de grupo.

Metodología del taller

El desarrollo del taller se dividirá en dos etapas. Primeramente, se dividirá el grupo de participantes en 4 subgrupos y a cada uno de ellos se le asignan dos *propuestas* de diferentes *situaciones*: una de ellas corresponde a la recolectada a partir de las observaciones y la otra es planteada a partir de lo que sugiere el MEP. Cada subgrupo trabajará en las situaciones y luego discutirán los siguientes aspectos:

1. ¿Qué tan pertinente es el uso de la metáfora para abordar los contenidos matemáticos implicados en la situación planteada?
2. ¿Existen limitaciones o aspectos importantes de los contenidos matemáticos que la metáfora no alcanza a cubrir para su debida comprensión, o ella es suficiente para una comprensión total?
3. Con base en su experiencia, ¿qué posibles confusiones por parte del estudiantado supone que puede implicar el uso de esta metáfora? También vale justificar por qué no se esperarían confusiones.
4. ¿Cuáles ventajas y desventajas (puntuales) puede rescatar de esta metáfora?
5. ¿Utilizaría esta metáfora como estrategia didáctica para abordar los contenidos matemáticos que están involucrados en esta situación o propone una estrategia distinta?

En segunda instancia, cada subgrupo presentará a los demás participantes los problemas que han analizado y sus conclusiones finales acerca del mismo. Por último, se hará un cierre donde se englobe, de manera general (y tomando los aspectos más relevantes), los aportes de todos los participantes con el fin de mostrar la importancia del uso de las metáforas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A continuación, se muestran las situaciones que se utilizarán.

Situación 1: Operaciones con números enteros

Propuesta 1. Leyes de signos para operar números enteros:

+	-	=	-
-	-	=	+

Figura 1. Leyes de signos.

Para la suma y resta. Números con el mismo signo se suman y se conserva el signo y números con signo diferente se restan y gana el signo del mayor.

Para la multiplicación y división. Signos iguales da positivo y signos diferentes da negativo.

Propuesta 2. El Ministerio de Educación Pública (2012) propone los siguientes ejemplos como base para enseñar operaciones básicas con números enteros.

Es necesario utilizar el símbolo "–" (símbolo de resta) para denotar el cálculo del opuesto de un número dado. Así el opuesto de -31 se denotaría simbólicamente $-\ (-31)\ =\ 31$ y el opuesto de 24: $-(24)\ =\ -24$ o bien $-\ 24\ =\ -24$.

Suma y resta. Conviene utilizar la representación de la suma y la resta de números enteros en la recta numérica para afianzar desde otra perspectiva estos algoritmos. Por ejemplo: la operación -6 – -5 se puede representar

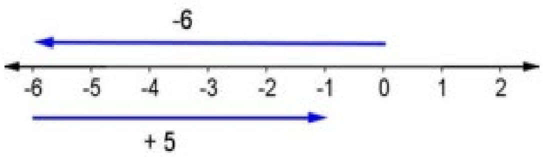


Figura 2. Resta de número enteros.

donde el símbolo de resta representa un cambio de dirección en el desplazamiento que sugiere el segundo término. En este caso se desplazó hasta -6 y luego no se siguió el desplazamiento hacia la izquierda (como lo sugeriría el número -5) sino que se movió en la dirección contraria.

Multiplicación. Determine el resultado de la operación $5 \quad -4$. Se espera que cada estudiante utilice la noción de producto como suma sucesiva y que verifique, con operaciones similares, que se sigue cumpliendo la tendencia en el signo del resultado:
$5 \quad -4\ =\ -4\ +\ -4\ +\ -4\ +\ -4\ +\ -4\ =\ -20$.

Cuando se trata el producto de dos números enteros negativos, se puede utilizar la noción de número opuesto para justificar el signo que posee el resultado. Observe: $-3 \quad -2\ = -\ (3)\ -2\ = -\ (-2\ +\ -2\ +\ -2) = -\ (-6) =\ 6$.

Situación 2: Radicales

Propuesta 1. Suponga que la raíz es una cárcel y que el subradical debe pagar una fianza, donde el pago se lo debe hacer al índice para poder salir de prisión. Descomponga el subradical de manera adecuada para que pueda pagar la fianza y salir de la cárcel: $\sqrt[3]{216}, \sqrt{269}\ , \sqrt[3]{131}$.

Propuesta 2. Resuelva cada una de las siguientes expresiones radicales. Recuerde hacer un uso adecuado de las leyes de potencias: $\sqrt[3]{216}, \sqrt{269}\ \sqrt[3]{131}$.

Situación 3: Identidades trigonométrica

Propuesta 1. Se definen las identidades trigonométricas básicas de la siguiente manera

$$sin\ (\alpha)\ =\ \frac{lado\ opuesto}{hipotenusa},\quad cos\ (\alpha)\ =\frac{lado\ adyacente}{hipotenusa},\quad tan\ (\alpha)\ =\frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$$

Sugerencia. La palabra <u>SOHCAHTOA</u> resume las identidades anteriores.

Propuesta 2. Considere el siguiente triángulo rectángulo:

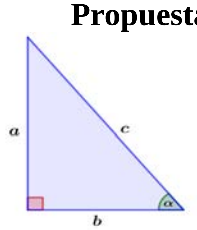


Figura 3. Triángulo rectángulo con medida de lados.

A partir de lo anterior, se definen las identidades trigonométricas como:
$sin\ (\alpha)\ = \frac{a}{c},\ \ cos\ (\alpha)\ = \frac{b}{c},\ \ tan\ (\alpha)\ = \frac{a}{b}$

Observación. a se llama lado opuesto al ángulo α; b se llama lado adyacente al ángulo α; y c es la hipotenusa del triángulo en cuestión.

Situación 4: Funciones Logarítmicas

Propuesta 1. Para introducir la propiedad de las asíntotas en las funciones logarítmicas se explica lo siguiente:

a. La función logarítmica es asintótica por abajo cuando la base del logaritmo es mayor que uno.
b. La función logarítmica es asintótica por arriba cuando la base del logaritmo es mayor que cero, pero menor que uno.

Propuesta 2. Para introducir la propiedad de las asíntotas de la función logarítmica se explica lo siguiente:
La función logarítmica tiene una asíntota vertical con la recta $x = 0$, es decir, es asintótica con el eje y.

Referencias y bibliografía

Flores, P. (1999). Empleo de metáforas en la formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, *11*(01), 89-101.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1986). *Metáforas de la vida cotidiana*. Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Ministerio de Educación Pública [MEP]. (2012). *Reforma curricular en ética, estética y ciudadanía: Programas de estudio de matemáticas*. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula* (3ra ed.). Ediciones Morata, S. L.

Pochulu, M. D., Abrate, R. S., y Font Moll, V. (2021). Implicancias educativas del uso de metáforas en contextos de resolución de ecuaciones. *Revista De Educación Matemática*. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10403

Sierra Ibáñez, L. F. (2016). *Metáforas en matemáticas: Ecuaciones diferenciales* [tesis, Universidad de Cartagena]. https://hdl.handle.net/11227/8887

Análisis preliminar de matrículas y cancelación de semestre en la Facultad de Educación durante el periodo 2015-1 AL 2022-1

Mercy Lili **Peña** Morales
Universidad Surcolombiana
Colombia
mercy.pena@usco.edu.co
Indira Tatiana **Garcia** Ramírez
Universidad Surcolombiana
Colombia
u20182171204@usco.edu.co
Herbert E. **Quintero** Fonseca
University of the Virgin Islands
US Virgin Islands
herbert.quinterofonseca@uvi.edu

Palabras clave: estadística descriptiva; contexto real; matrículas y cancelaciones.

La estadística es el punto de partida para el análisis de fenómenos y procesos que ocurren al interior de la familia, la comunidad educativa, y en general de la sociedad. La estadística involucra una serie de pasos que van desde el planteamiento del problema a evaluar, la recolección, organización y análisis de datos, hasta la presentación adecuada de los resultados y conclusiones obtenidas referente al fenómeno evaluado (Batanero et al. 2011). Uno de los fenómenos que llama la atención al interior de los programas académicos es la deserción escolar manifestada mediante la cancelación de matrícula. La presente investigación se encuentra enmarcada como un proyecto de aula en el curso de estadística descriptiva de la licenciatura de matemáticas en la facultad de educación, con el objetivo de aplicar conceptos estadísticos en un contexto real desde la colección de datos hasta la presentación de resultados, mediante la formulación de la pregunta de investigación; ¿Cuál es la tendencia de los procesos de matrículas y cancelaciones ocurridas en los programas de la Facultad de educación para las cohortes 2015-1 al 2022-1 en la sede Central de Universidad Surcolombiana?

Este estudio está concebido como una investigación cuantitativa, donde la población de estudio está definida por la información de matrículas y cancelaciones ocurridas en todos los programas de la Facultad de Educación. La muestra de esta población fue determinada para 15 periodos o cohortes correspondientes al periodo 2015-1 al 2022-1. Los datos para evaluar se consideran variables discretas, representada por el número de estudiantes y fueron colectados del Centro de tecnología e información de la Universidad Surcolombiana (sf.).

La Facultad de Educación de la USCO está conformada por ocho (8) programas de licenciatura, los cuales muestran diferentes procesos de matrícula y cancelación. En las quince cohortes estudiadas el promedio de los estudiantes matriculados en la Facultad de Educación por cohorte fue 2323 ± 95 estudiantes (coeficiente de variación, CV=4,1%). Uno de los hallazgos para destacar corresponde al incremento drástico en el número de cancelaciones del periodo 2020-1, que coincide con el inicio de la pandemia Covid-19, seguida con una reducción en las cohortes 2020-2 y 2021-1, coincidente con el proceso de virtualidad; y el subsecuente incremento por encima de lo normal para las cohortes 2021-2 y 2022-1, lo cual coincidió con el regreso a la presencialidad (Figura 1).

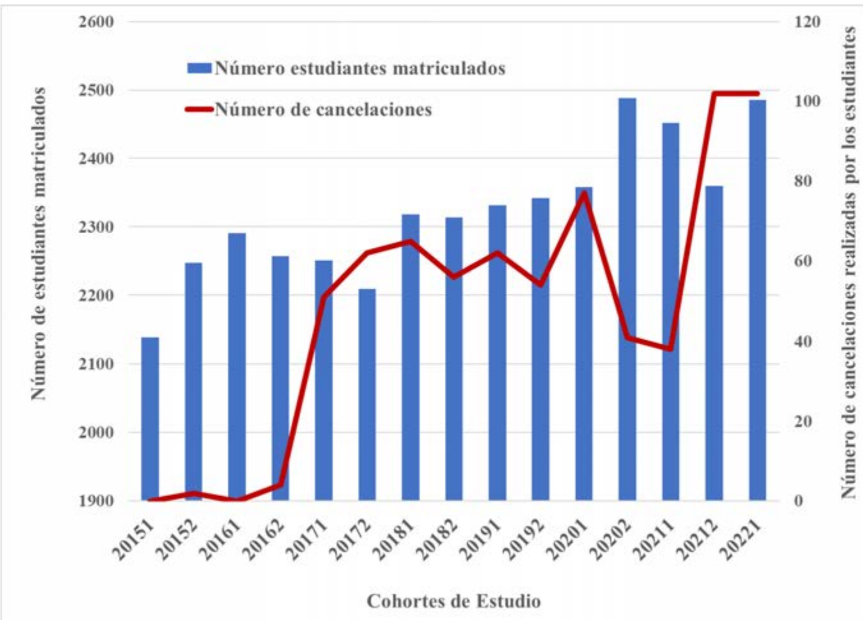


Figura 1. Número de estudiantes matriculados y cancelaciones en la Facultad de Educación de la USCO durante el periodo 20151-20221.

Este proyecto de investigación permitió aplicar los conceptos vistos en el curso de estadística descriptiva en el análisis de la data proporcionada por el centro de tecnología e innovación. Se analizó el comportamiento de las cancelaciones en comparación de los matriculados de los programas de la facultad de educación en los periodos planteados de la sede central de la Universidad Surcolombiana.

Referencias y bibliografía

Batanero, C., Diaz, C., Contreras, J. M., Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En: Batanero, C. & Diaz, C. (Ed.) Estadística con Proyectos. Reprodigital, Universdiad de Granada, pp. 1-46.

Centro de tecnología e innovación de la universidad Surcolombiana. (sf). *Reporte estado de admisión* [Conjunto de datos].

Aplicación práctica de la función coseno

Carlos Díaz Serruche
Universidad de Ciencias y Humanidades.
Perú
cardiaz_27@yahoo.es
Gilder Samuel Vargas Vargas
Universidad de Ciencias y Humanidades.
Perú
gvargas@uch.edu.pe

Resumen

El objetivo de este estudio fue analizar la relación entre los dominios conceptuales y las aplicaciones de la función coseno, mediante la mediación del GeoGebra, en estudiantes de un primer curso de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería de una universidad privada de Lima. En esta investigación se ha considerado como soporte metodológico algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Con la ayuda del software GeoGebra se logró que la mayoría de estudiantes ubicaran correctamente los puntos en el plano cartesiano y visualicen la construcción del gráfico inicial. A partir de dicha gráfica se calcularon la amplitud, el periodo, el desplazamiento vertical, el desface y la regla de correspondencia asociada a la función coseno.

Palabras clave: Aprendizaje de la matemática; Aprendizaje por descubrimiento; Situaciones Didácticas; Función coseno.

Introducción

En relación a la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas en el nivel superior encontramos trabajos como los de Santos (2021) quien propone enfoques metodológicos para el estudio de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. En dicho trabajo se presenta un estudio teórico de estos dos tipos de funciones a partir de herramientas metodológicas alternativas para su aprendizaje, con la finalidad de buscar un aprendizaje más efectivo, a través de recursos tecnológicos como softwares, aplicaciones para celulares, tabletas gráficas y lenguajes de programación. Dentro de los softwares recomendados por el investigador se tiene al GeoGebra, el cual es tomado en cuenta para el desarrollo del presente trabajo.

La modelización, visualización y programación, son tres características esenciales de GeoGebra que la convierten en una herramienta efectiva para la enseñanza de las funciones trigonométricas. Asimismo, la integración de GeoGebra con esquemas de aprendizaje puede ayudar a mejorar las habilidades y conocimientos en los estudiantes universitarios, tal como lo mencionan Ziatdinov y Valles (2022).

Considerando que el estudio de las funciones trigonométricas requiere un alto grado de abstracción, se propone una situación didáctica desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) donde el estudiante con la ayuda del GeoGebra pueda visualizar y movilizar diferentes significados y a su vez, logre aplicarlos a una situación real.

El aprendizaje de la matemática

En el enfoque estructuralista se considera que el aprendizaje es un proceso de restructuración cognitiva que se da en el sujeto cuando este se enfrenta a situaciones o problemas nuevos, que son significativos, y que le exigen utilizar los conocimientos y razonamientos adquiridos previamente. Si el problema nuevo no puede ser resuelto con los recursos que maneja hasta entonces, el sujeto se ve en la necesidad de reestructurar su esquema cognitivo, incorporando nuevos conocimientos y razonamientos a los que ya tiene, tal como lo menciona Piaget (1983). Al enfrentase a nuevos problemas del entorno social, el sujeto los relaciona con las experiencias previas. La primera tendencia es interpretar estos problemas y buscar soluciones por medio de las estructuras y conocimientos previos.

La asimilación, según Piaget, es el proceso de comprensión e interpretación de la realidad, motivo por el cual cuando estas estructuras cognitivas previas que posee el sujeto, no son suficientes para explicar la nueva situación o resolver el nuevo problema, el sujeto en cuestión, se ve obligado a reestructurar o reajustar las estructuras cognitivas que posee; es decir, incorpora nuevas ideas y conceptos, cambia, complementa o corrige los conocimientos que ya tenía. Este proceso de cambio de estructuras es conocido por Piaget como acomodación, y a los procesos de asimilación-acomodación lo denomina proceso de equilibrio.

Si el aprendizaje de la matemática es un proceso continuo de asimilación-acomodación y equilibrio cognitivo, entonces es necesario organizar e implementar escenarios donde los estudiantes pongan a prueba sus habilidades, capacidades cognitivas y logren así incorporar nuevos conocimientos y razonamientos que le permitan comprender los diferentes campos temáticos de la matemática.

El aprendizaje de la matemática por descubrimiento

En el aprendizaje por descubrimiento los estudiantes tienen un rol activo y participativo. En ese sentido, el aprendizaje de la matemática por descubrimiento tiene por intención la comprensión antes que la memorización. Para esto, el desarrollo de actividades es fundamental y se convierte en un factor indispensable del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el docente asume como función el acompañamiento en su rol de guía y motivador de los aprendizajes.

El acompañamiento debe promover la atención y concentración, de modo que el estudiante logre conectar sus saberes previos con las nuevas relaciones que va descubriendo, solo así se podrá estructurar un sistema lógico y coherente, tal como lo menciona Bruner (1986) “la enseñanza del descubrimiento, en general, no implica tanto el proceso de guiar a los estudiantes para que descubran lo que está allí fuera, sino, en realidad, el descubrimiento de lo que hay dentro de sus propias mentes” (p. 85). Por ello, en el proceso de acompañamiento que realiza el docente, es recomendable que se presente a los estudiantes ejemplos y contraejemplos a partir de las relaciones que estudian y de aquellas que van descubriendo en las actividades.

Las situaciones didácticas

Las situaciones didácticas son una construcción artificial modelada por el docente, para visibilizar y comprender las interacciones entre los estudiantes y los saberes matemáticos que se proponen en una clase (Brousseau, 2007). Esta construcción es intencional, donde la convergencia de estudiantes y docentes en un determinado espacio físico, encierra una finalidad que se expresa en los saberes que se pretende que se apropien y se asimilen. De lo anterior, se desprende que todo docente que busca promover aprendizajes significativos y duraderos debe plantearse ciertas interrogantes como, ¿Qué actividad deben realizar los estudiantes, para que surja la necesidad de apropiarse de las funciones trigonométricas?, ¿Qué actividad deben realizar los estudiantes, para adquirir las nociones de la función coseno?, responder estas preguntas representa todo un desafío para los docentes. Veamos algunos elementos de la TSD propuestas por Brousseau (2007):

- *La situación acción*. Los estudiantes son expuestos a problemas, actividades lúdicas que representen un desafío cognitivo, procedimental y/o manual, en esta etapa el estudiante se familiariza con las reglas de la actividad, y gracias a la recurrencia y la toma de decisiones le permitirán formular una estrategia para enfrentar el desafío propuesto.
- *La situación de formulación.* Los estudiantes comparten sus valoraciones y sus primeras intuiciones, sobre cómo enfrentar de forma exitosa la actividad propuesta. Esto es posible gracias a la interacción entre el sujeto y los dispositivos didácticos.
- *La situación de validación.* Los estudiantes proponen enunciados que sirven de forma directa en la solución del problema o actividad propuesta, estos enunciados tienen que ser demostrados para ser aceptados como tal. También se puede encontrar que un enunciado propuesto por algún otro estudiante es falso, en consecuencia, el enunciado es descartado.
- *La situación de institucionalización.* Los conocimientos ya validados, requieren ser organizados y jerarquizados, en ese proceso se generan los saberes, previamente se despojan de su particularidad, adquieren rigurosidad y generalidad, de este modo su comunicación y su utilización como herramienta matemática llega a ser confiable y segura, en otras palabras los conocimientos se constituyen en saberes que tienen una connotación científica y por lo que pueden ser aplicados en diferentes contextos, en este proceso la participación del docente es fundamental.

Implementación

La actividad se desarrolló a través de la plataforma Zoom, con estudiantes del primer ciclo de la Facultad de Ingeniería de los primeros ciclos del semestre académicos 2022-II en el curso de Matemática Básica.

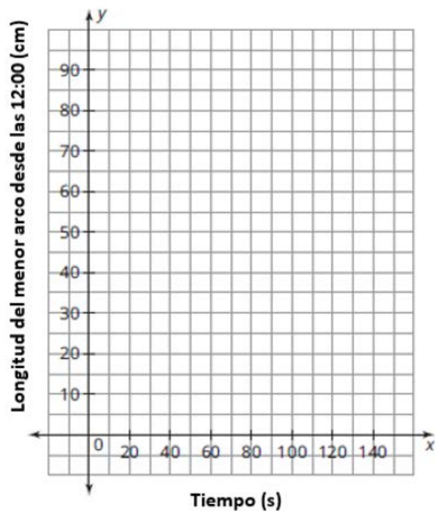
A continuación, mostramos la situación didáctica que desarrollaron los estudiantes.

Situación didáctica

Si la longitud del segundero y el radio de la circunferencia del reloj son iguales y miden 30 cm cada uno. Supongamos que el segundero comienza su movimiento exactamente a las 12:00 de la noche.

1. Completa la tabla para describir el tiempo en segundos y la longitud del menor arco entre el extremo del segundero y su posición inicial a las 12:00, en centímetros. Para cada vuelta completa, considere que la longitud inicial es 0. Luego, elabora un gráfico que relacione el tiempo (s) y la longitud del menor arco (cm).

Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	
20	
30	
40	
50	
60	0
70	
80	
90	
100	
110	
120	0



2. Con la ayuda del software GeoGebra comprueba la solución obtenida en la pregunta 1. La gráfica obtenida al unir los puntos ¿A qué función trigonométrica se asemeja? ¿Cuál sería su regla de correspondencia?

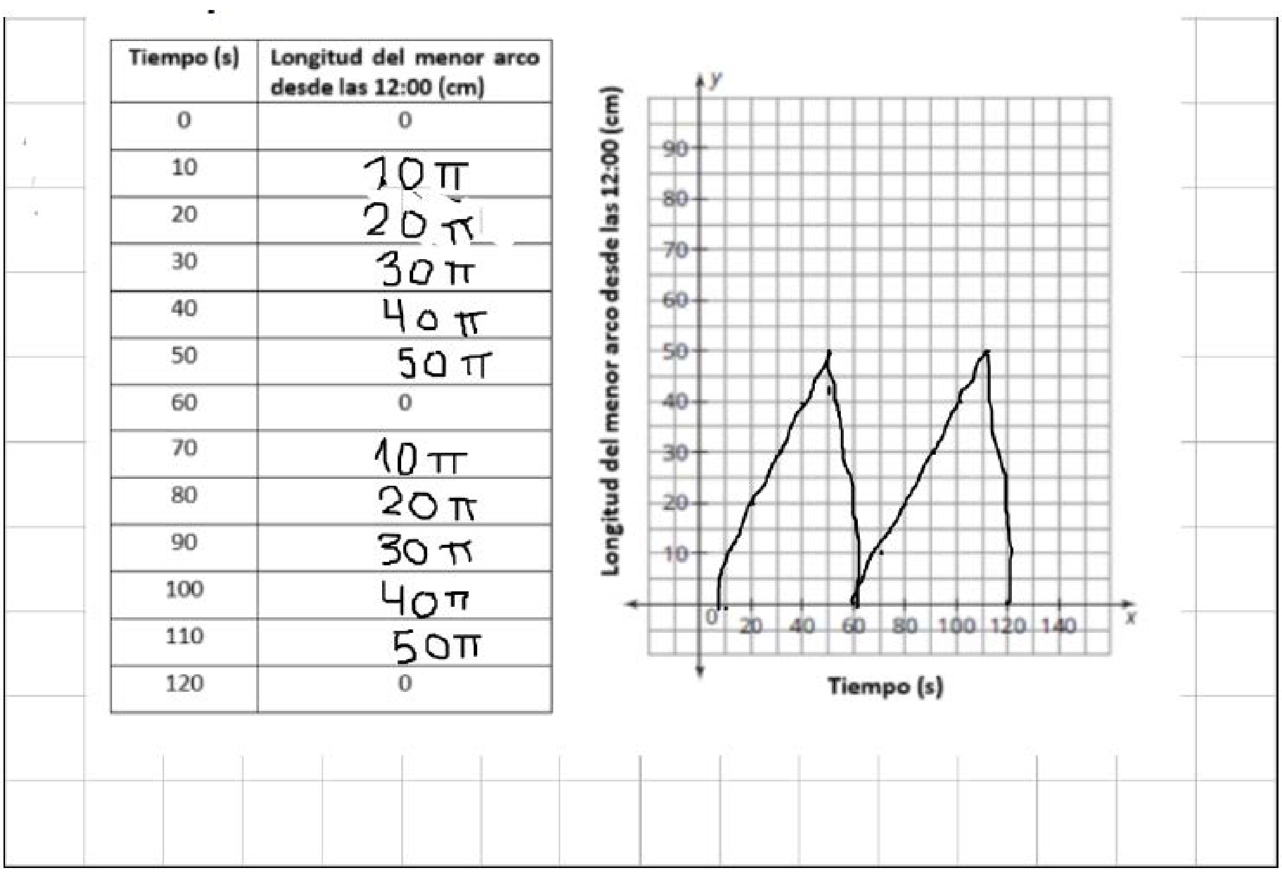
3. A partir de la gráfica obtenida:
   1. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar Y?
   2. Si la Amplitud se puede obtener como $|A| = \frac{Y_{máx} - Y_{min}}{2}$. Calcule dicha amplitud.
   3. Calcule el periodo de la función.
   4. Si el desplazamiento vertical se define como $D = \frac{Y_{máx} + Y_{min}}{2}$. Halle el valor para D.
   5. Halle la regla de correspondencia y grafique la función con el GeoGebra.

Figura 1. Pregunta sobre la función coseno.

A partir de esta la situación se plantearon las siguientes cuestiones: ¿En qué sentido giran las agujas de un reloj?, ¿Cuál es el ángulo recorrido por el horario en una hora?, ¿Cuál es el ángulo recorrido por el minutero en una hora? ¿Cuál es el ángulo que recorre el segundero en un minuto?, ¿Existe alguna relación entre los ángulos recorridos, la aguja del segundero y la longitud recorrida por su extremo? y ¿Cómo se pude calcular dicha longitud?

Para el desarrollo de la pregunta 1 se formaron 9 grupos de forma aleatoria mediante la herramienta del Zoom y se les asignó 20 minutos para que puedan completar la tabla y ubicar los puntos en el plano cartesiano.

Los grupos enviaron sus resoluciones a través de la plataforma Whiteboard. En la figura 2 se observa la resolución enviada por el grupo 5.



Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	10π
20	20π
30	30π
40	40π
50	50π
60	0
70	10π
80	20π
90	30π
100	40π
110	50π
120	0

Figura 2. Respuesta del grupo 5.

El grupo 5 no calculó de forma correcta las longitudes de los arcos esto debido a que no tuvieron en cuenta el menor arco entre el minutero y su posición inicial. Asimismo, al momento de ubicar los puntos no consideraron las escalas.

El grupo 2, como se observa en la figura 3, logró encontrar los valores correspondientes y utilizó una aproximación. Sin embargo, no llegó a ubicar los puntos.

Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	31.4
20	62.8
30	94.2
40	62.8
50	31.4
60	0
70	31.4
80	62.8
90	94.2
100	62.8
110	31.4
120	0

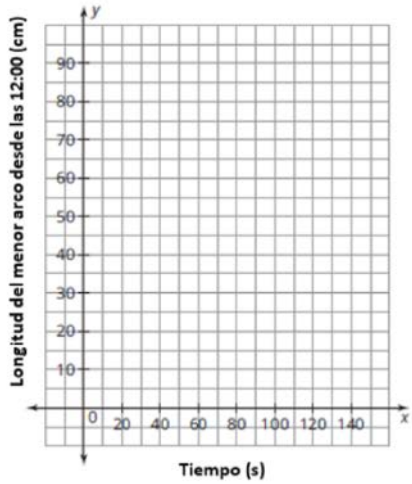


Figura 3. Respuesta del grupo 2.

Luego que todos los grupos enviaron su resolución se les pidió que se unieran a la sala principal del Zoom para socializar las resoluciones encontradas.

En la resolución de la pregunta 2 se utilizó el GeoGebra y los grupos compitieron sus construcciones, como se observa en la figura 4.

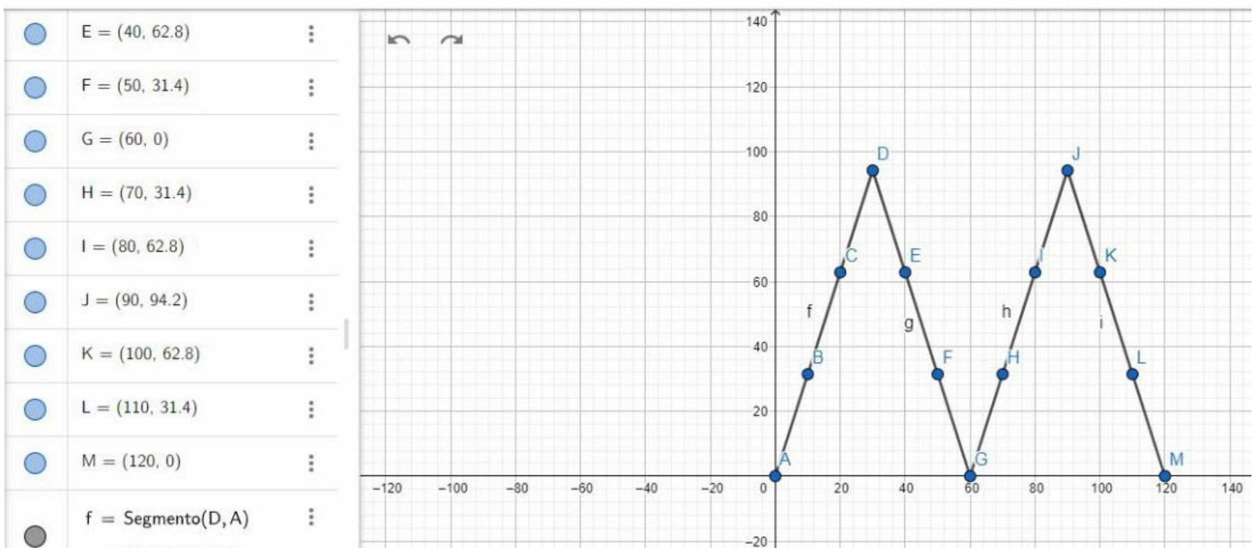


Figura 4. Respuesta del grupo 1.

La gráfica obtenida al unir los puntos generó interés en los estudiantes por conocer su regla de correspondencia y seguir desarrollando las demás preguntas.

En la justificación de la pregunta 3e los estudiantes usaron el GeoGebra y lograron visualizar la gráfica de la función coseno, figura 5.

Aplicación práctica de la función coseno.

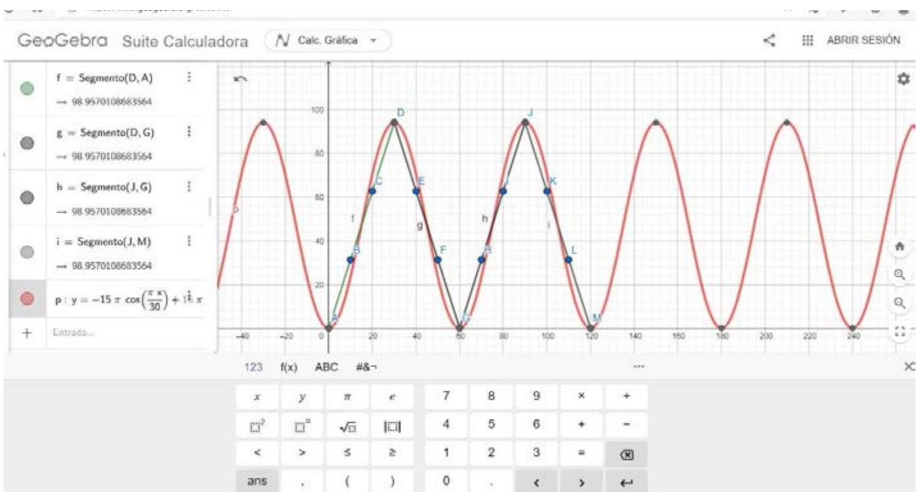


Figura 5. Respuesta del grupo 2.

Con la ayuda de las fórmulas los grupos lograron encontrar la regla de correspondencia y los demás elementos de la gráfica como el periodo, la amplitud y los desplazamientos.

Algunos resultados

Los estudiantes, en un inicio, al enfrentarse a la situación planteada encontraron diferentes resoluciones. Una de las principales dificultades que se observó en la mayoría de las resoluciones fue el no haber tenido en cuenta la menor longitud de arco formado por el extremo inicial y el extremo final del segundero.

Algunos de los grupos mostraron cierto dominio de conceptos asociados a la longitud de arco, los sistemas de conversión y el plano cartesiano. Sin embargo, no lograron construir la gráfica de la función inicial.

Con la ayuda del software GeoGebra la mayoría de grupos logró ubicar correctamente los puntos en el plano cartesiano y visualizar la construcción del gráfico inicial. A partir de dicha gráfica se calcularon la amplitud, el periodo, los desplazamientos y la regla de correspondencia de la función coseno.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al Estudio de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1986). *Juego, pensamiento y lenguaje*. Perpectivas. Infancia. https://www.observatoriodelainfancia.es/ficherosoia/documentos/1742_d_juego_pensamiento_lenguaje.pdf

Piaget, J. (1983). *Psicología y pedagogía*. Barcelona: Editorial Ariel

Santos, D. R. D. (2021). Estratégias metodológicas para o estudo das funções trigonométricas e funções hiperbólicas.

Taylor, H. y Wade, T. (1981). *Cálculo diferencial e integral.* D.F.: Limusa.

Ziatdinov, R., & Valles, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, *10*(3), 398.

Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias en estadística aplicada a las ciencias agronómicas

Eduardo Sebastian **Bustos**
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
sbustos@agrarias.unca.edu.ar
Norma Leonor **Rodríguez**
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina
norleor@yahoo.com.ar

Resumen

La Estadística aplicada a las Ciencias Agropecuarias -Biometría- es considerada una herramienta clave para la toma de decisiones en el desarrollo de investigaciones de estudiantes y futuros profesionales. Pero su enseñanza presenta complejidades asociadas a la resolución de ejercicios descontextualizados y enfocados en conceptos teóricos, cuyo aprendizaje se torna mecánico y memorístico. El objetivo es generar una propuesta didáctica de aprendizaje de Biometría, sustentada en el *Aprendizaje Basado en Proyectos* (ABP) con un enfoque por competencias. El diseño del trabajo se encuadra dentro de la investigación aplicada. Los resultados consisten en la descripción de una propuesta del tema estimación de parámetros y pruebas de hipótesis de la asignatura antes mencionada de segundo año de la carrera de Ingeniería Agronómica, estructurada en cuatro etapas: inicio, planeación, aplicación y evaluación -mediante rúbrica-, promoviendo competencias genéricas y específicas a desarrollar en los estudiantes, en base a un ABP vinculado al cultivo de citrus.

Palabras claves: Didáctica de matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Mediación pedagógica; Investigación educativa; Enseñanza de la estadística; ABP; Rúbrica; Universidad Nacional de Catamarca; Argentina.

Introducción

La Estadística aplicada a las Ciencias Agropecuarias, conforma el bloque de asignaturas básicas en la carrera de Ingeniería Agronómica, impartida en la Facultad de Ciencias Agrarias (FCA) de la Universidad Nacional de Catamarca (UNCA). Este espacio curricular, aporta a los estudiantes competencias que contribuyen, tanto a su perfil profesional como al rol de ciudadano, favoreciendo el crecimiento personal y fomentando el razonamiento crítico.

Sin embargo, la educación estadística presenta su propia problemática, asociada a la resolución de ejercicios descontextualizados y enfocado en conceptos teóricos, en el cual el aprendizaje se torna mecánico y memorístico, ocasionando que los alumnos transiten la asignatura "sin comprender correctamente o ser capaces de aplicar los conceptos y procedimientos estadísticos" (Batanero et al., 2013, p. 7).

Asimismo, la forma tradicional de impartir conocimiento centrada en la enseñanza "ha carecido de elementos que logren en los estudiantes una actitud positiva hacia esta importante disciplina" (Ojeda Ramirez, 2011, p. 10). Del mismo modo, la falta de prácticas de campo que relacionen las técnicas estadísticas con las actividades propias de sistemas agropecuarios, no les permite a los educandos construir conocimiento en forma activa y reflexionar acerca de la relevancia de este espacio curricular en su formación.

Frente a la necesidad de encontrar alternativas a las estrategias didácticas de enseñanza usadas tradicionalmente en el aula, se plantea el desarrollo de una experiencia de aprendizaje de Estadística centrada en el estudiante, aplicando una estrategia formativa denominada *Aprendizaje Basado en Proyectos* (ABP) con un enfoque por competencias. En esta línea, los estudiantes deberán resolver situaciones cotidianas de la vida profesional, haciendo uso de las herramientas que la Estadística provee, a través de un proceso de participación activa que les otorgue competencias propias del campo profesional.

Con base en la situación descrita, el objetivo del presente trabajo es generar una propuesta de innovación educativa con un enfoque por competencias, sustentada en el ABP, aplicado a la enseñanza de la asignatura Estadística y Biometría, correspondiente al segundo año de la carrera de Ingeniería Agronómica, impartida en la FCA-UNCA, República Argentina.

Antecedentes

La educación superior está migrando del paradigma de la enseñanza al del aprendizaje, abandonando los viejos -aunque siempre presentes- modelos educativos donde el docente era el centro de la educación con su saber erudito y la clase magistral, como principales características de ella, y el educando en un rol de receptor pasivo de la información, limitando su participación a hacer preguntas o solicitar aclarar dudas respecto del contenido expuesto. Por su parte, la educación estadística, no fue ajena a esta forma de enseñanza, basada en conceptos, fórmulas, procedimientos y cálculos rutinarios, impartidos como recetas de laboratorio. En adición, la falta de prácticas de campo vinculadas a la carrera elegida, a partir de las cuales los estudiantes lleguen a articular los conceptos teóricos con su propia realidad, no les permite percibir para qué les servirá concretamente ese bagaje de conocimientos. En este contexto, el estudiante termina perdiendo el interés en la asignatura y difícilmente logre otorgarle un sentido a lo aprendido, sin incorporarla en su futura actividad profesional y en su vida.

Así planteado, el desafío docente consiste en encontrar una nueva forma de mediar entre el conocimiento y los estudiantes por medio del cual dotarlos de saberes estadísticos, que les permita ser competentes en diversos ámbitos de su vida personal y profesional.

Diversos autores –Batanero y Díaz (2011), Ojeda Ramírez (2011), entre otros- han buscado alternativas educativas a los modelos tradicionales de enseñanza llevados a cabo en el aula, generando propuestas de abordaje de la clase que favorezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje de Estadística, en particular, se han orientado hacia al ABP, como una estrategia didáctica que busca un acercamiento diferente del alumno a la disciplina. Más aún, se pretende que desarrollen competencias que les permitan desenvolverse adecuadamente en diferentes contextos, a través de una formación integral del ser.

Marco Teórico

¿Qué son las competencias?

Al abordar esta temática, se debe determinar qué se entiende por competencia. Al respecto, Perrenoud (2011), se refiere a ellas como “una capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos” (p. 7), mientras que Tobón Tobón, Pimienta Prieto y García Fraile (2010) sostienen que “son las actuaciones integrales ante actividades y problemas del contexto, con idoneidad y compromiso ético, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer en una perspectiva de mejora continua” (p. 11). Esta última definición, es la que se adoptará en el desarrollo del presente trabajo, ya que proporciona un abordaje de las competencias con un enfoque integral.

Competencias genéricas y específicas

El enfoque por competencias, busca tender puentes entre la formación académica y las demandas del contexto en el cual se desenvolverá una vez egresado, alineando el saber conocer, saber hacer y el saber ser en una formación holística del ser, tejiendo “un hilo conductor entre el conocimiento cotidiano, el académico y el científico” (Villaroel y Bruna, 2014, p. 25). Esta formación integral, los prepara para enfrentar situaciones en las cuales se requiere de la movilización de competencias. En este contexto, se puede referir a dos tipos de competencias, de carácter complementario y sinérgico, denominadas genéricas y específicas.

Las competencias específicas o disciplinares, se definen como aquellas que “se adquieren mediante un proceso educativo determinado, y permiten al individuo solucionar los problemas inherentes al objeto de su profesión en un contexto laboral determinado” (Córdova Duarte y Barrera Guerra, 2008, p. 85). En adición, se encuentran las competencias genéricas que, para Villaroel y Bruna (2014), “comprenden un amplio rango de combinaciones del saber y del hacer, compuestas por conocimientos, habilidades y actitudes que posee un individuo” (p. 26).

La pregunta que surge entonces es ¿qué competencias se debe estimular en la asignatura Estadística y Biometría que contribuyan a formar el perfil del graduado?

Competencias requeridas en el perfil de los egresados de Ingeniería Agronómica

Es necesario tener en cuenta, al momento de determinar las competencias a incentivar a través de la propuesta educativa, las actividades profesionales reservadas al título de Ingeniero Agrónomo establecidas por resolución N° 1002/2003 del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la República Argentina, y que totalizan 44 actividades. Del mismo modo, se considera el perfil deseado del egresado de dicha carrera en la FCA – UNCA. Ante este planteo, cabe preguntarse: ¿qué estrategias educativas pueden favorecer al desarrollo de las competencias deseables en el graduado de la carrera de Ingeniería Agronómica?

Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)

Entre las diversas estrategias metodológicas que viabilizan el desarrollo de competencias que contribuyan a la formación integral del profesional de las Ciencias Agronómicas, se encuentra el ABP. Al respecto, Tobón Tobón, Pimienta Prieto y García Fraile (2010) considera que el ABP permite "abordar los diversos aspectos de las competencias, en sus tres saberes y articulando la teoría con la práctica" (p. 76). Esta estrategia de enseñanza, propone el desarrollo de un proyecto que aborda una situación de interés para los estudiantes, mediado por el docente que diseña, guía y apoya experiencias de aprendizaje basado en el concepto de aprender haciendo.

La rúbrica como instrumento de valoración

Ante la necesidad de valorar las competencias promovidas, surge la rúbrica como una herramienta adecuada para determinar el nivel del logro adquirido por los estudiantes respecto de las competencias fomentadas. Este dispositivo, es considerado un instrumento que favorece la evaluación del desempeño de los estudiantes -evaluación formativa- en forma continua y, colabora en la coordinación de los equipos docentes al unificar los criterios de evaluación, sirviendo a ambos, docentes y estudiantes, como una hoja de ruta en el desarrollo de un proyecto y su valoración. Además, permite la evaluación sumativa al calificar el desempeño de los estudiantes, según una escala numérica propuesta, alineándose con las escalas valorativas que poseen las instituciones educativas.

Materiales y Métodos

El diseño del trabajo final se encuentra encuadrado dentro de la investigación aplicada, y consistió en el desarrollo de una propuesta educativa metodológica de trabajo, siguiendo los lineamientos del ABP, con el fin de promover el desarrollo de competencias genéricas y específicas en los estudiantes que cursan la asignatura Estadística y Biometría, perteneciente al segundo año de la carrera de Ingeniería Agronómica de la FCA - UNCA.

En la selección de los contenidos curriculares a abordar, se tuvieron en cuenta los resultados de una encuesta de retroalimentación aplicada a través del aula virtual de la FCA - UNCA, a los estudiantes que cursaron la asignatura Estadística y Biometría durante el año 2019.

Dicho instrumento de medición, constaba de una serie de preguntas que pretendían conocer la opinión de los estudiantes respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje que se estaba llevando a cabo, de modo tal que el cuerpo docente de la cátedra obtenga una retroalimentación respecto del proceso educativo. Con base en la información obtenida en la encuesta, se determinó que los contenidos que presentaban dificultad para la mayor parte de los estudiantes, corresponden en primer término a las Pruebas de Hipótesis para dos muestras, y, en segundo lugar, la Estimación de Parámetros. Los tópicos mencionados pertenecen a la unidad temática n°3: Inferencia Estadística. En adición, se incluyeron actividades buscando la integración y articulación con los contenidos de las unidades temáticas de Estadística Descriptiva y Probabilidad.

Las competencias a promover fueron seleccionadas teniendo en cuenta el perfil del egresado anhelado por la institución educativa (FCA-UNCA), las actividades reservadas al título de Ingeniero Agrónomo previstas en la normativa y los contenidos del espacio curricular que presentaban mayores inconvenientes para los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo referenciado, pero, además, los medios y recursos con que cuenta la FCA- UNCA (aula, sala de informática, campo experimental, instrumental, movilidad, etc.), se elaboró una propuesta didáctica relacionada con la práctica educativa, recurriendo al ABP para lograr los objetivos educativos. En la tabla 1 se muestran las principales características de la estructura de la propuesta didáctica elaborada.

Tabla 1
Estructura de la propuesta didáctica basada en ABP

Carrera: Identificación de la carrera **Asignatura:** Identificación de la asignatura **Año:** Identificación del año de la asignatura **Duración:** Identificación de la duración de la asignatura		
Título: Título de la propuesta formativa		
Contenido Curricular: Contenido curricular a abordar mediante la propuesta		
Competencias a promover: Se propondrán las competencias genéricas y específicas a promover		
	Estructura de la propuesta didáctica	
Etapas	**Características**	**Lugar**
Inicio	Descripción de las principales actividades de la etapa de Inicio	Aula común de la FCA
Planeación	Descripción de las principales actividades de la etapa de Planeación	Aula común y sala de informática de la FCA
Aplicación	Descripción de las principales actividades de la etapa de Aplicación	Campo experimental y sala de informática de la FCA
Evaluación	Descripción de las principales actividades de la etapa de Evaluación	Aula común, campo experimental y sala de informática de la FCA
Recursos: Se establecerán los recursos necesarios para desarrollar la propuesta en cada etapa		

Fuente: elaboración propia.

Resultados

A continuación, se expone la propuesta didáctica elaborada describiendo sus componentes.

Identificación y título de la propuesta educativa

En este apartado, se identifica la propuesta educativa indicando la carrera (Ingeniería Agronómica), asignatura (Estadística y Biometría), año de la carrera (segundo año) y duración (cuatrimestral).

Título de la propuesta: Comparación de parámetros físicos, químicos y atributos, en frutos de dos variedades de mandarina (*Citrus reticulata*): Criolla y Clementina, cultivadas en el Campo Experimental de la FCA-UNCA.

Contenido curricular a abordar y competencias a promover

El contenido curricular a abordar corresponde a la unidad temática n° 3: Estimación de Parámetros y Pruebas de Hipótesis.

Por su parte, las competencias a promover serán:

Competencia genérica

- Comunica en forma escrita y oral, exponiendo y argumentando los resultados del desarrollo del proyecto de manera clara y precisa.

Competencias específicas

- Formula hipótesis estadísticas en forma correcta según la situación problema.
- Selecciona y aplica la técnica apropiada para la recolección y procesamiento de los datos.
- Interpreta los resultados alcanzados en un ambiente de trabajo colaborativo.

Etapas de la propuesta didáctica

El proyecto se llevará a cabo en cuatro etapas claramente diferenciadas. Ellas son *Inicio, Planeación, Ejecución y Evaluación*. A continuación, se describen cada una de ellas:

Inicio. En la primera etapa, el cuerpo docente expondrá a los estudiantes las principales características del proyecto a desarrollar, sus alcances y la importancia en su formación. Se explicitará el proceso de evaluación y sus instrumentos. Por otra parte, se invitará a los estudiantes para que evacuen sus dudas y formen los grupos de trabajo, conformados por dos o tres integrantes. Además, se efectuará el diagnóstico de los saberes previos a través de un cuestionario.

A continuación, el docente expone la situación a resolver. Esta consiste en la comparación de dos variedades de mandarina (*Citrus reticulata*): Criolla y Clementina, cultivadas en el Campo Experimental de la FCA – UNCA, ubicado en la localidad de Colonia del Valle, depto. Capayán, Prov. de Catamarca, Argentina. De esta manera, los estudiantes deberán determinar cuál es la variedad de mandarina que presenta mejores características de interés agronómico para una futura plantación. Para ello, efectuarán una serie de pasos que les permitirán, medir, evaluar y comparar parámetros físicos, químicos y atributos de las variedades del cultivo mencionado, recurriendo a las herramientas estadísticas provistas durante el desarrollo de la asignatura. Para finalizar la etapa de Inicio, se desarrollarán los contenidos de la unidad temática seleccionada correspondientes a Muestreo, Estimación de Parámetros y Pruebas de Hipótesis. Las actividades descriptas para esta etapa, tendrán lugar en aula común de la FCA-UNCA. Los recursos necesarios para esta etapa son computadora para docente, proyector, y artículos de librería.

Planeación. En la segunda etapa, los estudiantes efectúan la planificación de las actividades a desarrollar en la fase de Aplicación. Esto orientará a los participantes y les otorgará claridad en los pasos a seguir. Para ello deberán, en primer lugar, determinar el método de muestreo a aplicar, teniendo en cuenta para ello criterios estadísticos, agronómicos, económicos y de tiempo, con una visión integradora. Luego, se establecen las variables de interés agronómico a medir: peso de frutos, diámetro ecuatorial de fruto, porcentaje de jugo, grados Brix, cantidad de semillas por gajos, estado sanitario y sabor.

A continuación, los estudiantes construirán las planillas que utilizarán para registrar los datos que obtengan en las mediciones. Finalmente, confeccionarán un cronograma con las actividades a campo para que el proceso de toma de datos se efectúe en forma ordenada. Para esta etapa se requiere de computadora para docente, proyector, computadora con acceso a internet para los estudiantes y artículos de librería.

Aplicación. En esta etapa se realiza el muestreo que tendrá lugar en el Campo Experimental de la FCA-UNCA, registrando los datos en las planillas confeccionadas. Posteriormente, los estudiantes construirán la base de datos y harán el análisis estadístico descriptivo e inferencial, usando el software estadístico InfoStat. Seguidamente, los alumnos redactarán el informe escrito, siguiendo las pautas provistas por la cátedra respecto de las normas de redacción y escritura. Por último, socializarán en forma oral el trabajo efectuado, exponiendo el proceso llevado a cabo, los resultados alcanzados y las conclusiones a las que arribaron. Se requerirán los siguientes recursos: medio de transporte para trasladar los estudiantes desde la FCA - UNCA hacia el Campo Experimental, planillas impresas, artículos de librería, instrumentos de medición (balanza, calibre, brixómetro, cinta métrica), computadoras con acceso a internet y software estadístico InfoStat, proyector, computadora para docente.

Evaluación. El proceso de evaluación, se llevará a cabo en forma paralela a las otras etapas indicadas en el proyecto e incluirá tanto valoraciones del proceso de enseñanza como del aprendizaje. Dentro de la evaluación del proceso de aprendizaje bajo un enfoque por competencias, se aplicarán dos dispositivos de evaluación a utilizar en diferentes momentos del desarrollo del proyecto educativo. En primer lugar, una evaluación inicial diagnóstica, la cual se materializa mediante un cuestionario que incluye preguntas de tipo respuestas cortas, si/no, opción múltiple, entre otras. Este instrumento permitirá al cuerpo docente determinar la situación de las estudiantes referidas a las competencias que se desea promover. Este, debe ser aplicado al inicio del proyecto y socializado a través del aula virtual de la FCA-UNCA.

Un segundo instrumento, la rúbrica, diseñado para evaluar y calificar las competencias puestas en juego a través de la realización del proyecto, posibilitará la evaluación formativa y sumativa de los estudiantes.

Por último, las prácticas de enseñanza, se valoran mediante un cuestionario de carácter anónimo, individual y sin calificación, a realizarse a través del aula virtual. Este posibilitará conocer la opinión de los estudiantes respecto de diversos aspectos del proyecto realizado y las competencias propuestas, a fin de efectuar adecuaciones y mejoras en un proceso iterativo. Los recursos para esta etapa son computadora para docente, artículos de librería y computadoras con acceso a internet para los estudiantes.

Conclusión

Como corolario del trabajo, se generó una propuesta formal de innovación educativa sustentada en el Aprendizaje Basado en Proyectos, aplicado a la enseñanza de la asignatura Estadística y Biometría, correspondiente al segundo año de la carrera de Ingeniería Agronómica de la FCA-UNCA. Dicha propuesta, busca un acercamiento diferente de los estudiantes a la asignatura, a fin de lograr dotar de sentido a esta disciplina y de esta forma, desarrollen competencias que le permitan desenvolverse pertinentemente, tanto en su vida profesional como personal, a través de una formación integral del ser, alcanzando así las intenciones educativas planteadas por la institución y demandadas por la sociedad.

Referencias y Bibliografía

Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos*. Granada: Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Batanero, C., Díaz , C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico su desarrollo. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 7-18. http://funes.uniandes.edu.co/3651/1/Batanero2013ElNumeros83.pdf

Córdova Duarte, G., y Barrera Guerra, J. L. (2008). Competencias Profesionales del Ingeniero Agrónomo de la Universidad de Guanajuato. *Acta Universitaria. Dirección de Investigación y Posgrado, 18*, 82-89. https://www.actauniversitaria.ugto.mx/index.php/acta/article/view/136/119

Ministerio de Educación, C. yT. (s.f.). Resolución n° 334. Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina. https://www.argentina.gob.ar/normativa/nacional/resoluci%C3%B3n-1002-2003-91684/texto

Ojeda Ramirez, M. M. (2011). *Aprender Estadística con Proyectos. Memoria de una experiencia replicable.* Xalapa, Veracruz: Dirección General Editorial.

Perrenoud, P. (2011). *Construir Competencias Desde la Escuela.* México: Comunicaciones y Ediciones Noroeste Ltda.

Tobón Tobón, S., Pimienta Prieto, J. H., y García Fraile, J. A. (2010). *Seciuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias.* Mexico: Prentice Hall.

Villaroel, V., y Bruna, D. (2014). Reflexiones en torno a las competencias genéricas en educación superior: Un desafío pendiente. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad, 13*, 23-34. https://dx.doi.org/10.5027/psicoperspectivas-Vol13-Issue1-fulltext-335

Articulación de los pensamientos matemáticos bajo la situación de aprendizaje "un juego justo"

Oscar J. **González Pinilla**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arévalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Kmilo741a@gmail.com
Mónica A. **Diaz** Guarín
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Andreadg_323@gmail.com
Liz P. **Acero** Molina
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
lianllely@gmail.com

Resumen

Una de las competencias que debe desarrollar un profesor de matemáticas en ejercicio de su profesión, es la de planificar; en la que debe tener la habilidad de diseñar tareas y crear actividades capaces de llamar la atención de los estudiantes en su objetivo de enseñar la disciplina. La presente comunicación se centra precisamente en mostrar mediante una experiencia didáctica en el aula, sobre la posibilidad real de diseñar situaciones de aprendizaje congruentes con los fundamentos teóricos curriculares, es decir, situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema que integren los diferentes pensamientos matemáticos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje, se enfoquen en la construcción de un conocimiento matemático general; evitando así caer en el error pedagógico de involucrar a los estudiantes en escenarios de aprendizaje ligados a la construcción de un único concepto, tópico o tema en particular.

Palabras clave: Planificar; Articular; Competencia matemática; Pensamiento matemático; Situaciones de aprendizaje.

Introducción

En los procesos de enseñanza-aprendizaje, el enfoque sistémico, donde se concibe al conocimiento como un conjunto sistematizado y articulado de saberes es claramente necesario, pues éste se aplica en tres tipos distintos de contexto: a) en el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto; b) en el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales; y c) en los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado (Godino, 2004). Sin embargo, actualmente parece una tarea difícil para los profesores en su tarea de planificar situaciones de aprendizaje, donde se vea claramente la integración de varios de los pensamientos matemáticos en pro de la construcción de conocimiento.

Es por ello que, esta experiencia de aula enmarcada en la construcción de conocimiento matemático general, evoca la necesidad de mejorar las prácticas pedagógicas en el aula de clase, especialmente la de planificación, con el propósito de contribuir al desarrollo de competencias matemáticas generales de los estudiantes con particular énfasis en su componente práctico, en la que se aprende matemáticas haciendo matemáticas, en la que además, se haga evidente una articulación entre los saberes y conocimientos (pensamientos) que se convocan durante la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Currículo y estándares en matemáticas para Colombia

Con el fin de potenciar el pensamiento matemático en Colombia, se propone el trabajo por competencias, que se generan gracias a la planificación de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de comprensión mayores y más complejos. En este sentido se hace indispensable pensar la matemática como un compilado de saberes donde se diferencie el conocimiento conceptual y procedimental enmarcados en cinco pensamientos:

1. Pensamiento numérico y sistemas de numeración
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos
3. Pensamiento métrico y sistemas de medición
4. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos
5. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

A pesar de que los lineamientos en matemáticas son claros al afirmar que, "Los cinco tipos de pensamiento matemático tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático" (MEN, 1999. Pág. 69), aún persiste una clara dificultad para el profesor de matemáticas en su proceso de planificación, lograr ligar y relacionar los cinco tipos de pensamiento matemático en una situación de aprendizaje que propenda por el desarrollo de más que un concepto o tópico, lo que llamaríamos una red de conocimientos.

A continuación, se presenta la planificación de una actividad orientada al desarrollo de los pensamientos matemáticos, enmarcados en una situación de aprendizaje llamada "Un juego Justo", reconociendo el papel de "las situaciones en contexto" como medio y espacio para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, donde se pueda establecer implícitamente una relación entre los diferentes conceptos y saberes involucrados en la situación y que permitan resolver el problema. Es importante aclarar que la situación problema debe apuntar siempre a distintos contenidos y hacia diversas estructuras matemáticas, pero éstos no deben ser evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes, por tal razón la situación problema será presentada a los estudiantes a manera de reto o juego.

Situación de aprendizaje "Un juego justo"

El juego consiste en que usted y sus amigos dibujan en el suelo la imagen que se muestra en la figura 1. Luego lanzan canicas desde una distancia acordada con el objetivo de que ésta quede dentro de la figura. Determine las reglas y consideraciones que debe tener el juego para lograr obtener un ganador.

La figura consiste en un triángulo equilátero con dos figuras internas inscritas, un círculo y un cuadrado respectivamente.

Figura1. Representación geométrica que deben dibujar los estudiantes para iniciar el juego.

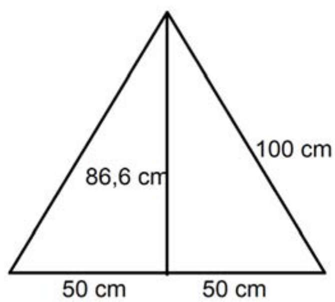
Inicialmente los estudiantes realizan la exploración del juego, haciendo lanzamientos al azar y verificando el lugar en el cuál quedaban las canicas; deciden entonces trabajar la dinámica bajo la modalidad de puntajes y ciertas reglas que ellos mismos establecieron y acordaron con forme se desarrollaba el juego. A continuación, se enumeran las reglas acordadas por el grupo y la relación de dicho acuerdo con el pensamiento matemático que se iba desarrollando a medida que la dinámica avanzaba:

Regla 1 – Pensamiento espacial, aleatorio y variacional: *Si la canica cae en el interior de la figura, se otorgará un puntaje dependiendo del lugar geométrico que ocupe la canica.*

Los estudiantes no tardan en darse cuenta de que existe una relación entre el puntaje que debería obtenerse y el lugar geométrico en el cual cae la canica; tal que si la canica cae en una región de área menor el puntaje ha de ser mayor, porque es menos probable que la canica caiga en áreas menores y viceversa; es decir, la proporción entre el área de la figura donde cae la canica y el puntaje obtenido debe ser inversa.

Vemos entonces en lo anterior, que la dinámica del juego hace que salgan a flote de manera implícita dos tópicos bastante importantes en los pensamientos espacial y variacional, ya que deben jugar con el área de figuras planas y la respectiva relación inversa con el puntaje obtenido. Para ello, los estudiantes con ayuda del profesor logran obtener el área de las respectivas regiones de las figuras y le otorgan un puntaje.

En primer lugar el área del triángulo equilátero viene dada por la expresión:

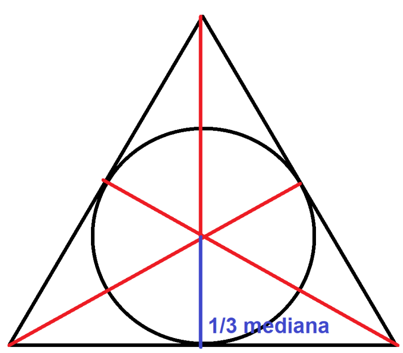


$$C^2 = h^2 - C^2$$
$$C^2 = 100^2 - 50^2$$
$$C^2 = 10000 - 2500$$
$$C = \sqrt{7500} = 86{,}6$$

$$Area\ \Delta = \frac{100cm * 86{,}6\ cm}{2} = 4330\ cm^2$$

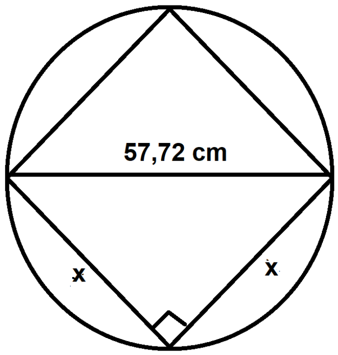
Donde 100 cm representa la base del triángulo y 86,6 la altura, que se puede obtener fácilmente usando el teorema de Pitágoras.

Por otro lado, el área del círculo está dada por la expresión $AO = \pi r^2$, donde el radio r equivale a la tercera parte de las medianas del triángulo equilátero (teorema del baricentro); es decir, en el triángulo equilátero las medianas corresponden a la altura del triángulo y el punto de corte de sus tres medianas coincide con el centro del círculo, De allí que podamos decir que el radio r del círculo equivale a la tercera parte de la mediana del triángulo, esto es $\frac{86{,}6}{3} = 28{,}86\ cm$. Luego el área del círculo es:



$$AO = \pi r^2$$
$$AO = (3{,}1416) * (28{,}86)^2$$
$$AO = (3{,}1416) * (832.9)$$
$$AO = 2616.64\ cm^2$$

Posteriormente, para hallar el área del cuadrado inscrito en la circunferencia sabemos que la diagonal del cuadro equivale a dos veces el radio del círculo, es decir 57,72 cm, y que dicha diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos congruentes; de tal forma que es sencillo averiguar la longitud del lado del cuadrado usando nuevamente teorema de Pitágoras y así su área:



$$C^2 = h^2 - C^2$$
$$57{,}72^2 = x^2 + x^2$$
$$57{,}72^2 = 2x^2$$
$$\frac{3331.6}{2} = x^2$$
$$x = \sqrt{1665{,}8}$$
$$x = 40.81$$

$$A\blacksquare = 40.81^2$$
$$A\blacksquare = 1665{,}8\ cm^2$$

Finalmente, sabemos que la figura de la que trata el juego es una figura compuesta, en la que las áreas de una figura menor hacen parte de una mayor, por ello procedemos a calcular el área de cada región usando los cálculos y resultados hallados en los procesos anteriores (Ver figura 2):

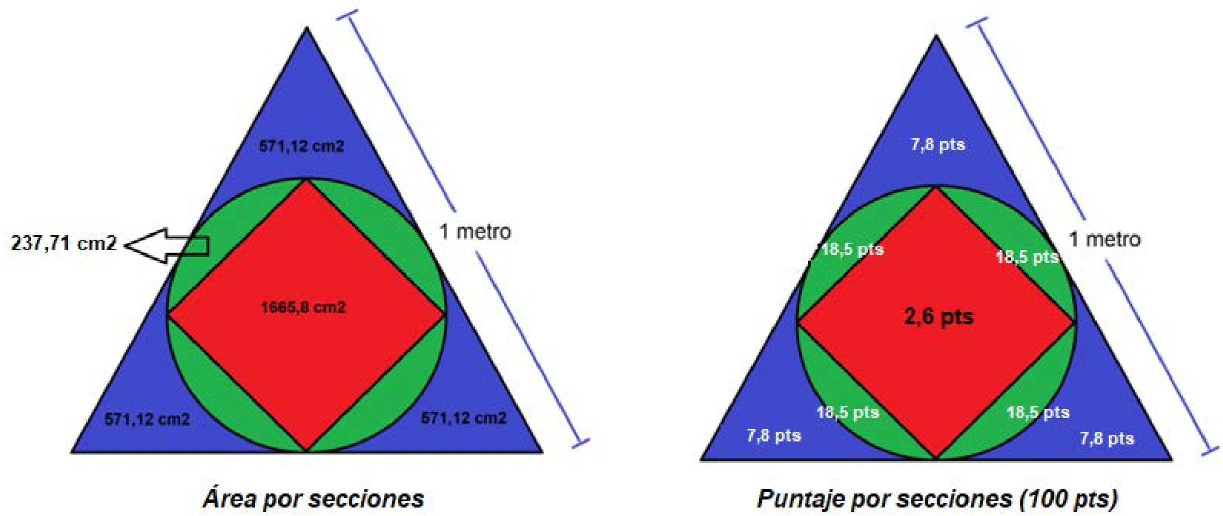


Figura 2. Correspondencia del área con el puntaje por sección en la figura.

$$\acute{A}rea\ roja = A\blacksquare = 1665{,}8\ cm^2$$
$$\acute{A}rea\ verde = A\mathrm{O} - \mathrm{A}\blacksquare = 2616.64\ cm^2 - 1665{,}8\ cm^2 = 950.84\ cm^2$$
$$\acute{A}rea\ azul = A\Delta - A\mathrm{O} = 4330\ cm^2 - 2616.64\ cm^2 = 1713{,}36\ cm^2$$

Como se puede ver el área verde y el área azul corresponden a cuatro y tres regiones diferentes respectivamente, entonces cada región sería la cuarta y tercera parte del área de cada color:

$$\acute{A}rea\ cada\ regi\acute{o}n\ verde = \frac{950.84\ cm^2}{4} = 237{,}71\ cm^2$$

$$\acute{A}rea\ cada\ regi\acute{o}n\ azul = \frac{1713{,}36\ cm^2}{3} = 571.12\ cm^2$$

Al reconocer que la relación que se presenta entre el área de la sección en la que cae la canica y el puntaje que debe asignarse, es inversamente proporcional a la probabilidad de ocurrencia, se les pide a los estudiantes que asignen a cada sección un puntaje entre 0 y 100 y para ello hacen uso de la regla de tres inversa y reglas básicas de probabilidad.

Tabla 1
Correlación del área de la figura con el puntaje obtenido.

Región	**Área**		**Probabilidad P** $\left(\frac{\acute{a}rea\ de\ la\ secci\acute{o}n}{\acute{a}rea\ total}\right)$		**Inversa de la probabilidad** $\frac{1}{P}$	
	Sección	*Color*	*Sección*	*Color*	*Puntaje por Sección*	*Puntaje por Color*
Roja	1665,8	X 1= 1665,8	0,38	X 1 = 0,38	2,6	X 1 = 2,6
Verde	237,71	X 4 = 950,84	0,054	X 4 = 0,22	18,5	X 4 = 74,0
Azul	571,12	X 3 = 1713.36	0,132	X 3 = 0,39	7,8	X 3 = 23,4
Total	2553,87	4330	0,566	1	28,9	100

Desde esta perspectiva, el juego y en particular la forma en que platean la regla para asignar puntaje a cada región geométrica a partir de su relación inversa, es una clara alusión al desarrollo del pensamiento espacial y variacional donde se privilegia el estudio del concepto de área y las propiedades de cuerpos geométricos bidimensionales junto con el reconocimiento y caracterización de la variación y el cambio así como con su descripción, modelación y representación en distintos registros simbólicos, en este caso el gráfico.

Regla 2 – Pensamiento numérico y sistemas de numeración: *Si una canica lanzada desplaza a otra que ya está en la figura hacia el exterior de esta, el jugador duplicará el puntaje de la región en la cual caiga y el perdedor disminuirá su puntaje acumulado en la mitad (Ver figura 3).*

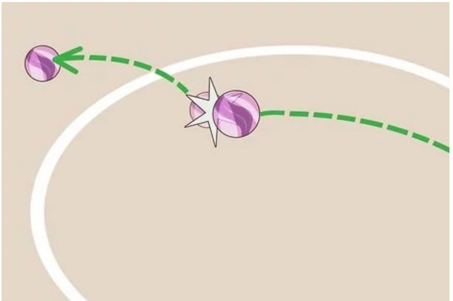


Figura 3. Regla 2, Desplazamiento entre canicas.

Está regla obliga a los estudiantes a recurrir a estrategias de calculo constante para llevar cuentas; y en tanto los puntajes de cada sección en la figura corresponden a números decimales (racionales), el rigor matemático que requieren para sumar o restar puntajes será mayor, ya que las cantidades en cuestión los obligan a trabajar el concepto de número más allá de la acción de contar con unidades discretas (Números naturales), para ampliar su universo numéricos hacia las cantidades continuas. Estas extensiones de los conjuntos numéricos se convierten en fuertes obstáculos de aprendizaje para los estudiantes y una serie de dificultades didácticas para docentes, las cuales logran ser resueltas en gran medida cuando estas nociones son trabajadas bajo una situación de aprendizaje y como en este caso cuando el estudiante se ve involucrado de manera lúdica a un juego que pretende ganar. Algo similar ocurre cuando la dinámica del juego conlleva también al posible trabajo con la operatividad de cantidades negativas.

Regla 3 – Pensamiento métrico: *Si una canica lanzada queda al interior de la figura y a menos de dos cuarta de otra canica, la primera robará el puntaje obtenido por la segunda.*

Figura 4. Regla 3, Distancia entre canicas usando un patrón no estandarizado de medición (la cuarta).

Esta regla creada por los estudiantes, muestra una clara alusión a la posibilidad que tiene el juego y su dinámica en el desarrollo de pensamiento métrico, donde la estimación de medidas y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas, trascienden el tratamiento exclusivamente numérico y propenden por la estimación y aproximación de longitudes a partir de patrones de medidas no estandarizados y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta para tomar decisiones. Es de precisar que está competencia dentro del pensamiento métrico, históricamente se ha perfeccionado gracias a la estandarización de patrones de medida tomadas al comienzo de partes del cuerpo, es decir, se está comprendiendo el conceto de medición a partir de su génesis y desde un principio empírico.

Conclusiones de la experiencia

La articulación de los diferentes pensamientos en matemáticas que sugieren la formación de individuos verdaderamente competentes debe contemplar que se hace necesario involucrar a los estudiantes en situaciones de aprendizaje significativas, que despierten el interés y curiosidad de estos por descubrir. Si bien esta tarea está directamente asignada a la labor docente como agente didactizador y creador de contextos significativos, no resulta ser tarea fácil, ya que debe en primer lugar reconocer entre otras cosas, las siguientes premisas:

- Debe existir una relación de conocimientos a enseñar, donde una situación de aprendizaje se preste para lograr articular y crear redes de conocimientos en los estudiantes. No se trata de enseñar conceptos o contenidos sino de hacer de las situaciones de aprendizaje una posibilidad de crear conocimientos generales. En este sentido, la NCTM (2000) es clara al decir que: "En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios" (NCTM, 2000, p.15).

- En las situaciones de aprendizaje que surjan en la labor de planificación de los docentes, los estudiantes, por sí mismos, deben tener la capacidad de relacionar los conocimientos aprendidos, ya que "Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p.68).

- Una situación de aprendizaje significativa debe garantizar el avance gradual de los estudiantes por los diversos pensamientos matemáticos con miras a la sofisticación del conocimiento y a la creación de individuos competentes, pues solo de esta manera es posible que "los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, con una comprensión más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura, sino que también se dan cuenta de su utilidad." (NCTM, 2000, p.68).

Referencias y bibliografía

Chaves, E. (2019). Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad. *Memorias del XV CIAEM*. Medellín, Colombia.

Godino, J. D., (2004). "Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica". (URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España. Fecha de consulta: 10 de febrero de 2022.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. (Hay una edición del mismo año en la Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá).

Ministerio de Educación Nacional (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemática. Serie Lineamientos Curriculares. Punto EXE Editores. Bogotá

NCTM (The Nacional Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principios y estándares de la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla, España

Avaliação integrada ao ensino de Matemática: uma tendência

Ademir **Basso**
FAMA/CEPACS
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Este pôster traz a divulgação de uma possível nova Tendência em Educação Matemática, intitulada de Avaliação Integrada ao Ensino de Matemática. Este texto foi construído a partir de uma obra lançada em 2022 fruto de pesquisas e experiências vividas pela autoria ao longo de quase três décadas de atuação como pesquisador e professor na Educação Básica e Superior. O prefácio desta obra foi gentilmente escrito por Ubiratan D'Ambrosio em 2019, nele, o educador matemático ressalta o que pensa a respeito do tema escolhido e elogia o manuscrito dizendo que este está muito bem organizado, escrito numa linguagem simples e acessível, sem perder o rigor acadêmico e oferecendo uma grande contribuição à Educação Matemática e também à Educação de maneira geral.

Neste contexto, a obra traz a classificação da avaliação quanto ao tempo, natureza, formalidade e agentes, construindo um pequeno histórico que mostra como ela surgiu, a princípio como atividade humana cotidiana e como a mesma foi incorporada à escola. Elucida ainda as características próprias da avaliação em Matemática, trazendo informações de como ela era executada no passado nas instituições de ensino e em muitos locais ainda hoje, e de como deveria ser dado o processo avaliativo atualmente.

A obra segue mostrando que o professor pode ensinar esta ciência utilizando-se de outras estratégias que não somente o quadro negro e o livro texto. Mostra as inúmeras Tendências em Educação Matemática criadas através do tempo para tornar o ensino desta ciência mais atrativo, mais real e por que não dizer, mais divertido tanto para o estudante quanto para o professor. Por isso, faz uma síntese das principais Tendências e de outras estratégias utilizadas no ensino desta ciência para torná-la melhor compreendida (Basso, 2022).

Neste manuscrito, evidenciam-se experiências realizadas onde os instrumentos avaliativos foram diferenciados, ou seja, optou-se por utilizar formas diferentes de avaliar dando ao estudante, professor e processo, uma nova possibilidade. Os resultados foram positivos tanto na questão de menções (notas), quanto no interesse que gerou nos estudantes que experimentaram estas novas maneiras de avaliação. Aqui são mostrados instrumentos tais como:

a produção textual como forma de avaliar; as colagens como uma maneira de mostrar o conhecimento adquirido pelo estudante; a avaliação em duas fases, a avaliação relâmpago; a famigerada cola como instrumento de avaliação; avaliando através de imagens; a lição de casa como avaliação; avaliando com a leitura, escrita e desenho em Matemática.

A obra avança mostrando ainda três experiências onde a avaliação ocorreu de forma integrada, ou seja, os inúmeros instrumentos utilizados foram aplicados durante todo o processo de ensino, não reservando, portanto, um tempo ao final para avaliar. A integração da avaliação com o ensino foi tão forte que em inúmeras ocasiões os estudantes não percebiam a diferença entre os momentos em que estavam aprendendo ou que estavam sendo avaliados (Basso, Chamoso y Azcárate, 2014, Basso y Massa, 2017, Basso y Hein, 2017).

Por fim, mostra-se a importância de avaliar durante o processo de ensino, em outras palavras, que a avaliação esteja integrada ao mesmo. Mais ainda, traz a ideia de que a Avaliação Integrada deve ser considerada uma Tendência em Educação Matemática, pois ela oferece uma possibilidade de orientação, de uma nova direção, de um novo caminho no ensino e na aprendizagem desta importante ciência, característica de uma tendência que pode colaborar muito para o êxito do processo.

Referências e bibliografia

Basso, A., Chamoso, J. M. y Azcárate, P. (2014). *Concepções de alunos a respeito da avaliação em matemática*. Curitiba: CRV.

Basso, A. y Massa, L. S. (2017). *Ensino e avaliação de matemática*: duas faces da mesma moeda. Pato Branco: Imprepel.

Basso, A. y Hein, N. (2017). Avaliando diariamente em matemática. *In*: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7. Anais do VII CIEM. Canoas: ULBRA.

Basso, A. (2022). *Avaliação integrada ao ensino de Matemática*: uma tendência. São Paulo: Livraria da Física.

Avaliação relâmpago no Ensino Médio

Ademir **Basso**
FAMA/CEPACS
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Resumo

Este relato apresenta um experimento realizado com seis grupos de estudantes de 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio do CEPACS de Mariópolis, Paraná, nas disciplinas de Matemática, Educação Financeira e Física. O contrato didático efetuado entre professor e estudantes previa que as avaliações seriam realizadas por meio de diferentes instrumentos e integrados ao processo de ensino-aprendizagem. O objetivo do experimento foi avaliar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes enquanto se utilizava a avaliação relâmpago que possui a característica de ser efetuada em pouco tempo. Ao longo do experimento foi possível observar que a aplicação e o interesse dos estudantes foram satisfatórios, pois houve uma melhora nas menções/notas e também na aprendizagem dos conceitos trabalhados nas disciplinas onde ocorreu tal experiência. Como forma de conclusão é possível inferir que quando se utiliza instrumentos avaliativos diversificados as chances de êxito dos estudantes, durante o processo ensino-aprendizagem, aumentam consideravelmente.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Educação Financeira; Física; Avaliação Relâmpago; Avaliação integrada.

Avaliação relâmpago

Constantemente se buscam melhores maneiras de avaliar durante o processo de ensino-aprendizagem de Matemática ou de qualquer outra ciência. A avaliação denominada aqui de Avaliação Relâmpago possui características da avaliação integrada, pois, independente do conteúdo a ser trabalhado, ao final de uma aula são oferecidas questões para que os estudantes possam resolver, dando a eles alguns minutos para realizarem a tarefa. O tema desta avaliação são os conhecimentos trabalhados naquela aula ou nas últimas aulas, já que os conceitos estão bastante claros, facilitando a compreensão e até a resolução das atividades propostas. Após o término da resolução das atividades, o professor recolhe as avaliações para posterior correção (Basso y Chamoso, 2009).

Na aula seguinte, o professor distribui aos estudantes as avaliações realizadas na aula anterior, para que os mesmos possam corrigir, a princípio, a avaliação de um colega. Em seguida, o professor responde juntamente com os estudantes as questões utilizando a lousa e explicações pertinentes, enquanto os estudantes corrigem e dão a menção (nota) do colega com base na resposta "correta", entregando em seguida para o estudante que realizou aquela avaliação observar seus erros e devolver ao professor para as devidas anotações (Fabregat, 1997).

Outra maneira de corrigir essa forma de avaliar é feita pelo professor, pois os estudantes fazem as avaliações relâmpago, sempre ao final da aula, entregam ao professor que as corrige em outro momento. Essa forma de avaliar pode ser efetuada com qualquer conteúdo e em qualquer momento do processo de ensino-aprendizagem. Os estudantes ao realizarem essa avaliação, fazem uso de consulta ao seu material ou mesmo sem consulta, dependendo do momento ou do planejamento do professor (Basso, 2022).

O objetivo primeiro é ajudar na formação, enquanto o propósito somativo da avaliação fica relegado a um segundo plano. Com esse instrumento, avaliam-se os conhecimentos essenciais sobre os complementares, acerca de questões teóricas, por exemplo, o que o estudante sabe sobre determinado conhecimento (definições, descrições, explicações e conexões) e o que ele sabe fazer (exercícios, problemas, comunicações, trabalhos aplicados e outros) (Fabregat, 1997).

É importante recordar que essa forma de avaliação deve ser utilizada juntamente com outras formas de avaliar, pois cada estudante aprende de uma maneira diferente e, certamente também o faz de modo distinto na avaliação. Esse contexto pode ser relacionado com a teoria das Inteligências Múltiplas (Gardner, 2000) a qual relata que os indivíduos possuem várias formas de inteligência, mas cada um desenvolve uma delas com maior amplitude, o que seria equivalente dizer que todo estudante aprende de um modo diferente e que, possivelmente, no momento de ser avaliado mostrará diferentes caminhos de como aprendeu aquele conhecimento.

Dessa forma, os métodos de avaliação precisam levar em conta as características do estudante e devem ser coerentes com a maneira de ensinar, por isso é importante ter presente de que o grau de percepção e o tipo de inteligência em uma sala de aula podem ser bastante diversos, pois quando se utiliza apenas um tipo de avaliação, alguns estudantes fracassarão sempre (Alsina *et al*, 1996).

Nesse caso, a avaliação relâmpago é uma maneira de avaliar o estudante no momento em que está se dando a aprendizagem, na verdade, é uma avaliação contínua que o ajuda a perceber seus erros e os de seus colegas, sabendo que ao corrigir está também aprendendo. Assim, quando for avaliado com outros instrumentos, o estudante estará propenso a ter melhores resultados, pois já foi avaliado sobre aquele(s) tema(s). É importante lembrar que é possível avaliar em cada momento do processo de ensino e aprendizagem, sem prejuízo no desenvolvimento dos conhecimentos necessários para que o estudante seja inserido matematicamente nas ciências e na sociedade atual, altamente matematizada.

A experiência

A ciência Matemática é a base científica de todas as outras ciências, ou seja, elas se utilizam desta ciência para provar suas teorias, sustentar seus cálculos e provar sua existência (Basso, 2021). Neste contexto, o relato em tela mostra uma experiência avaliativa, que utiliza um instrumento diferente, traz dados importantes deste processo no componente curricular de Matemática, mas também em Educação Financeira e em Física, ciências que utilizam Matemática cotidianamente.

A experiência ocorreu no Colégio Estadual Presidente Arthur da Costa e Silva na Região Sudoeste do Estado do Paraná, Brasil com seis grupos de estudantes do 1º, 2º e 3º anos. Nos grupos de primeiros anos, trabalhou-se essa forma de avaliar em Física e Educação Financeira e nos grupos de segundos e terceiros anos foi em Matemática. Importante salientar que o professor, ao iniciar o ano letivo, efetuou um contrato didático com os estudantes, embasado em Brousseau (1988), onde deixava claro que a avaliação, no decorrer do ano letivo, ocorreria por meio de diversificados instrumentos. O que se apresenta aqui é apenas uma das várias oportunidades avaliativas com estes grupos de estudantes e nestas disciplinas.

Inicialmente com o 1º ano A e com o 1º C em Educação Financeira foi proposto aos estudantes uma questão a respeito de aplicação envolvendo CDI. A questão em um dos grupos propunha uma aplicação de R$ 4500,00 que renderia 140% do CDI, considerando que no 1º ano, o CDI estaria a 8% e no 2º ano a 10%. Conforme a característica dessa forma de avaliar, os estudantes teriam alguns minutos para realizar esta avaliação e entregar ao professor. No outro grupo a questão indicava, com o mesmo conteúdo, uma aplicação de R$ 2000,00 que pagava 130% do CDI, cujas taxas eram de 15% e 12% no 1º e 2º anos respectivamente. Na sequência se mostra a avaliação relâmpago da estudante B. F. C.:

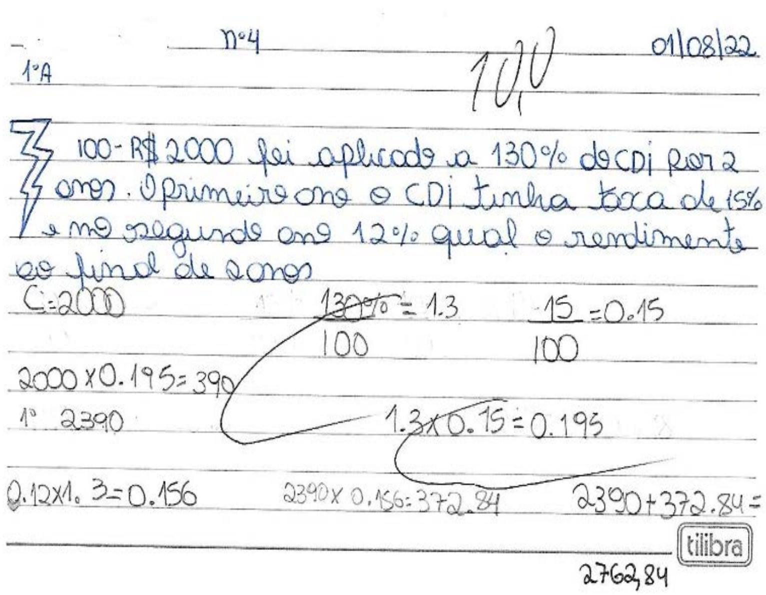

n°4 10,0 01/08/22
1°A
100- R$ 2000 foi aplicado a 130% do CDi por 2 anos. O primeiro ano o CDi tinha taxa de 15% e no segundo ano 12% qual o rendimento ao final de 2 anos
C=2000 130%/100 = 1.3 15/100 = 0.15
2000 x 0.195 = 390
1° 2390 1.3 x 0.15 = 0.195
0.12 x 1.3 = 0.156 2390 x 0.156 = 372.84 2390 + 372.84 =
2762,84

Figura 1. Avaliação Relâmpago em Educação Financeira 1º ano.

Conforme observado na figura, a estudante copiou a questão ditada pelo professor, resolveu a questão rapidamente e acertou, tendo com isso, além do provável conhecimento, mais uma menção/nota para compor as demais do trimestre.

Ainda nos 1º anos, no componente curricular de Física, onde os conhecimentos abordados eram de Movimento Uniformemente Variado, a avaliação relâmpago ocorreu normalmente. Em ambos os grupos foi proposto uma questão que dava a posição inicial, a velocidade inicial, a aceleração de um móvel e reivindicava que determinassem a velocidade e a posição desse móvel após um determinado tempo. Como pode ser observado na sequência um exemplo:

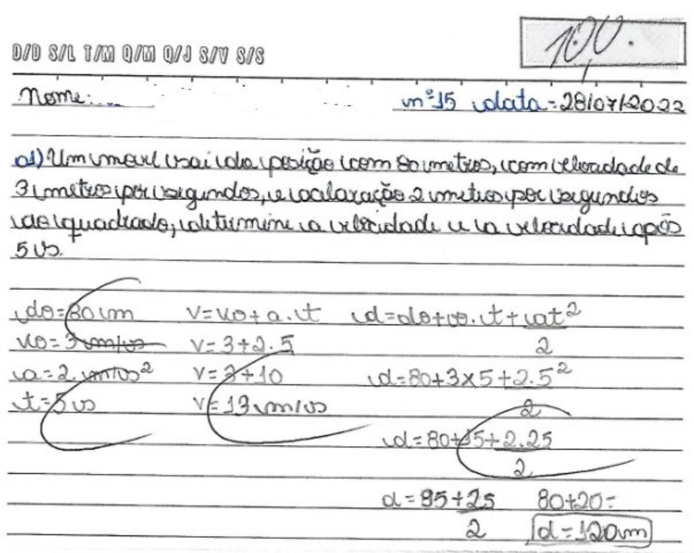


Figura 2. Avaliação Relâmpago em Física no 1º ano.

A avaliação acima é da estudante K. B. de A. que conseguiu entender a proposta, identificou as grandezas envolvidas na questão e efetuou os cálculos propostos em pouco tempo, conforme exige esse instrumento avaliativo.

No 2º ano por sua vez, na disciplina de Matemática, os conhecimentos abordados naquele momento eram de função seno. A questão dava uma pequena equação e solicitava ao estudante que indicasse o domínio, a imagem, o período e construísse o gráfico da função dada. As equações dadas nos dois grupos foram sen x = m + 9 e sen x = m + 10. Na sequência se observa um exemplo de uma avaliação relâmpago de um dos grupos:

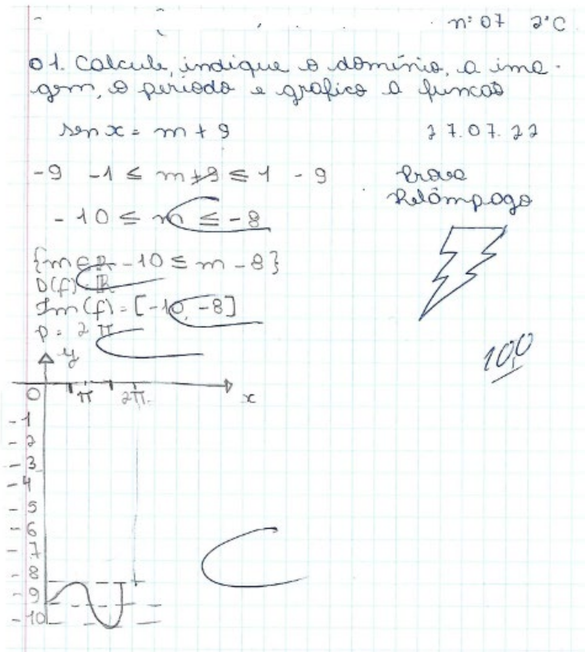


Figura 3. Avaliação Relâmpago em Matemática no 2º ano.

Da mesma forma, aqui a estudante M. E. A. D. C., realizou sua avaliação de acordo com a proposta deste instrumento avaliativo e conseguiu mais uma menção máxima para adicionar às demais menções do trimestre.

Já no terceiro ano, também em Matemática, o conteúdo em questão era geometria espacial, mais precisamente tronco de pirâmide. A questão simples trazia o tronco de pirâmide planificado e indicava aos estudantes que realizassem o cálculo das áreas e do volume do mesmo. Observa-se na sequência, a avaliação relâmpago de um estudante:

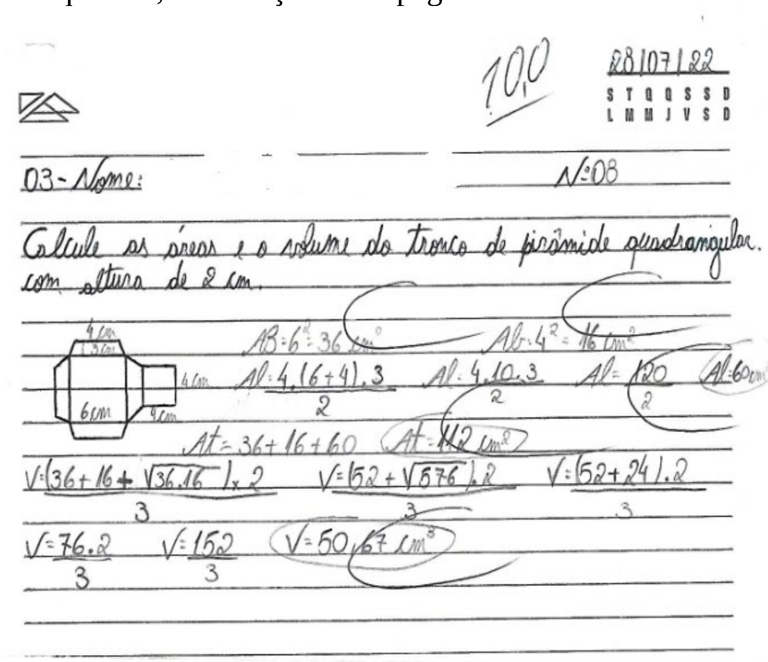


Figura 4. Avaliação Relâmpago em Matemática no 3º ano.

O estudante J. P. R. S. realizou sua avaliação relâmpago utilizando pouco tempo e também pouco material, sua avaliação se parece mais a um pequeno bilhete, mesmo assim, o realizou de maneira correta, mostrando que os conhecimentos matemáticos foram alcançados. Foram mostrados aqui apenas quatro exemplos, no entanto, todos os estudantes, em todos os grupos e nos respectivos componentes curriculares realizaram suas avaliações relâmpago e, em sua maioria, com êxito total.

Considerações

O processo avaliativo em qualquer componente curricular, deve seguir um caminho diferente daquele trilhado no passado e atualmente ainda se aplica em muitas instituições educacionais, que é utilizar quase exclusivamente o instrumento tradicional, sem consulta, com tempo determinado e ao final do processo. Não que essa forma de avaliar não possa ser utilizada, pode, no entanto, não deve ser a única forma de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes e o trabalho do professor.

Tendo essa ideia como norte é que se utilizou o instrumento avaliação relâmpago nestes três componentes curriculares e com estes seis grupos de estudantes. Esta experiência é somente um recorte, apenas um dos momentos avaliativos utilizados durante o ano letivo neste colégio e com estes estudantes. O instrumento foi aplicado ao final de uma aula, faltando de 10 a 15 minutos para o término da mesma, por isso seu nome relâmpago. Os conhecimentos trabalhados naquela aula ou nas últimas aulas, foram cobrados, uma oportunidade, portanto, de que estes conhecimentos estivessem bastante claros. A maioria dos estudantes conseguiu mostrar todo o conhecimento estudado naquele período letivo, a partir de seus cálculos bem elaborados utilizando a tecnologia da calculadora e deixando claro os resultados.

Constatou-se que quando se avalia com esse instrumento, em quase todas as aulas, os estudantes ficaram mais interessados, mais atentos às explicações do professor e aos trabalhos propostos durante as aulas. Provavelmente esse maior interesse é devido ao fato de que se ao final daquela aula ocorresse uma avaliação relâmpago seria importante estar atento aos conhecimentos que seriam cobrados nela. Além disso, muitas vezes em que o tempo não propiciava a realização de uma avaliação relâmpago ao final de uma aula, os estudantes cobravam uma justificativa pelo motivo de não ser realizada naquele dia, contrariando a postura do estudante frente a qualquer avaliação.

Outro ponto relevante a ser considerado é que a experiência foi realizada com grupos de estudantes de um colégio e região específicos, estudantes do Ensino Médio, em três disciplinas diferentes, por essa razão, é importante pensar na possibilidade de se aplicar o mesmo instrumento em contextos diversos, em grupos de outros graus de ensino, e também em outros componentes curriculares. Pode-se, portanto, inferir que, em experimentos semelhantes, existirá uma boa chance de que sempre que a avaliação for ministrada simultaneamente com o processo de ensino, as chances de êxito poderão aumentar consideravelmente.

Por fim, convêm ressaltar que quando se avalia de forma integrada ao processo de ensino e utilizando instrumentos diversificados e diferentes do tradicional, os ganhos no aprendizado dos estudantes, bem como para o próprio professor são visíveis. Uma ação com este contexto, mostra que é possível, ao estudante, aprender enquanto é avaliado e também é perceptível que ele seja avaliado enquanto aprende. Portanto, é possível pensar na avaliação integrada, em Matemática ou em qualquer outra ciência, como uma nova Tendência em Educação Matemática, especialmente porque uma tendência é uma inclinação, uma orientação, uma direção a ser tomada, ou mesmo que está sendo tomada, nesse caso, para melhorar o processo de ensino-aprendizagem-avaliação (Basso, 2022).

Referências e bibliografia

Alsina; C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Basso, A. (2021). *M4T3M4T1C4 3 C0T1D14N0*: do homem das cavernas à atualidade. São Paulo: Livraria da Física.

Basso, A. (2022). *Avaliação integrada ao ensino de matemática*: uma tendência. São Paulo: Livraria da Física.

Basso, A. y Chamoso, J. M. (2009). Avaliação Relâmpago: uma maneira processual de avaliar em Matemática. *In*: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 10., 2009, Guarapuava. Anais do X EPREM. Guarapuava: UNICENTRO/SBEM-PR.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des Mathématiques*. v. 9, n. 3, pp. 309-336.

Fabregat, J. (1997). La evaluación por parejas en la universidad y la teorías y-z. *In*: Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias, 5., 1997, Murcia. Actas del Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias. Murcia: Universidad de Murcia. p. 427-428.

Gardner, H. (2000). *Inteligências Múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas.

Avaliando em Matemática com Relatório Avaliação

Ademir **Basso**
FAMA/CEPACS
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br
José María **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
Espanha
jchamoso@usal.es
Maria José **Cáceres** Garcia
Universidad de Salamanca
Espanha
majoca@usal.es
María Mercedes **Rodríguez** Sánchez
Universidad de Salamanca
Espanha
meros@usal.es

Resumo

O presente relato traz uma experiência realizada no Colégio Estadual Presidente Arthur da Costa e Silva, no Município de Mariópolis, Estado do Paraná, Brasil. O objetivo desta foi avaliar em Matemática utilizando outro instrumento que não somente o tradicional, nesse caso, o Relatório Avaliação. A avaliação, neste contexto, consiste em um resumo construído pelo estudante do exposto pelo professor, mais pesquisa efetuada do tema trabalhado e bibliografia pertinente, referências que o estudante buscou para ampliar o conhecimento do tema. A experiência oportunizou aos estudantes uma forma diferente de avaliar o que foi exitoso, pois todos mostraram uma aplicação diferenciada ao elaborar seus relatórios. Os resultados, em menções/notas, em interesse e em aprendizagem, foram visíveis, já que discutiam o estudado com propriedade. Com esta experiência, é possível considerar que avaliar com instrumentos diferentes e concomitantes ao processo, traz ganhos à aprendizagem e ao ensino de Matemática.

Palavras-chave: Matemática; Avaliação; Ensino de Matemática; Avaliação em Matemática; Relatório Avaliação.

Avaliação em Matemática

Tema recorrente em discussões acadêmicas, nos grupos de pesquisas e no interior das instituições de ensino, a avaliação em educação tem gerado trabalhos, experiências e pesquisas das mais diversas. Não é diferente no ramo da Matemática, a propósito, é nesta ciência que as discussões se tornam mais asseveradas, pois pesa sobre ela a ideia errônea de que ela sempre esteve entre as mais difíceis de ser ensinada, compreendida e avaliada.

Nesse contexto, a avaliação em Matemática possui um histórico extenso desde a ideia de que o único instrumento possível para avaliar nesta ciência seria o teste escrito, sem consulta e com tempo limitado para sua realização. Quanto à história da avaliação, Alsina *et al* (1996), dizem que a humanidade, desde seu início, utilizou métodos avaliativos escritos, orais ou físicos para selecionar militares ou estudantes, mas consideraram que a avaliação começou em 1845 com as ideias de Mann sobre exames escritos, com Fischer que introduziu o método de escalas em 1864 e com Ricel, em 1894, com os testes de informações sobre programas que tiveram continuidade no século XX. Em 1904, Thorndike utilizou os testes de atitudes e, em 1905, apareceram as escalas de inteligência com Simon.

De maneira resumida, Cuadra (2000), estabelece quatro períodos para delimitar a forma como se desenvolveu a avaliação. Começou com as primeiras provas para julgar a capacidade de uma pessoa em um ofício ou atividade determinada, avaliada por especialistas que decidiam em função dos resultados mostrados, uma nota, uma classificação. Posteriormente, as provas realizadas nos colégios no século XIX recolhiam informações a respeito do conhecimento dos estudantes. de 1900 até 1960 apareceram os testes psicométricos de inteligência geral, atitude e rendimento. E, finalmente, desde 1960 até a atualidade surgiram os programas de avaliações institucionais para comparar o êxito dos estudantes em diferentes países. E, nos últimos dois séculos, a avaliação adotou novos objetivos, visíveis para a sociedade e para as instituições de ensino.

Atualmente se considera que a avaliação em Matemática não somente deve ser controladora dos resultados, bem como deve ocupar um lugar preponderante nos processos de ensino e aprendizagem como reguladora de tal processo, de maneira que contribua para que os estudantes alcancem suas metas, apoie a aprendizagem de conceitos matemáticos e subministre informação útil tanto aos professores como aos estudantes (Azcárate, Cardeñoso e Serradó, 2005).

Dessa maneira, conclui-se que quando a avaliação é parte integrante do processo de ensino da Matemática, contribui significativamente para a aprendizagem, informando e guiando os professores quando tenham de tomar decisões sobre sua maneira de ensinar. As tarefas que os professores selecionam para avaliar convertem-se em uma mensagem para os estudantes sobre o tipo de conhecimento matemático e que capacidades são avaliadas (NCTM, 2000).

Por isso, defende-se aqui a avaliação integrada ao processo de ensino de Matemática como uma forma de mudar o contexto avaliativo estabelecido. Adotar a avaliação integrada ao ensino é uma forma de superar este “estado” inercial avaliativo (Basso e Hein, 2011). É preciso, portanto, implementar o fazer avaliativo, é preciso uma nova orientação, direção, nova inclinação, o que caracteriza uma tendência, é necessário adotar a avaliação integrada ao processo de ensino de Matemática como sendo uma nova Tendência em Educação Matemática (Basso, 2022).

Relatórios

Para tornar a avaliação integrada ao processo de ensino de Matemática, é necessário utilizar diferentes e variados instrumentos avaliativos no decorrer do processo. Neste contexto, os relatórios podem ser utilizados. Um relatório sugere, como o próprio nome diz, um relato, existem várias maneiras de se fazer um relatório, pode ser como uma produção escrita sobre a resolução de um problema, uma pesquisa, uma investigação ou a respeito da confecção de um projeto. Pode ser construído individualmente ou em pequenos grupos. A atividade utilizando relatórios é uma ótima possibilidade de avaliação e aprendizagem (Ponte *et al*, 1997).

Este tipo de instrumento de avaliação objetiva desenvolver no estudante a capacidade de se expressar sobre um problema ou atividade como uma investigação ou projeto em que esteja engajado. Pode-se avaliar com os relatórios a organização das ideias, a visão geral do que foi visto, as ligações que o estudante faz com o que foi estudado, suas conclusões a respeito, sua ordem e limpeza na entrega do relatório, dentre outras variáveis.

Uma das vantagens de se avaliar com relatórios é que o professor não precisa elaborar a prova; tem sim que explicar e acordar com os estudantes o que quer no relatório, mas não elabora nada a princípio. Outra vantagem é que em um relatório o estudante se expõe, ou seja, mostra o que aprendeu de uma maneira só sua, o que ele aprendeu segundo ele. O relatório deve servir como estratégia de aprendizagem, e pode ser aproveitado de acordo com a criatividade do professor. Compreende-se que este instrumento ajuda a melhorar a comunicação do estudante, contribuindo para a melhoria do processo ensino-aprendizagem em qualquer disciplina.

Neste contexto, o relatório avaliação é também uma possibilidade, neste, o estudante faz um relato da aula expositiva do professor, identificando ele, o professor, a disciplina, o tema da aula e data. Além disso, os estudantes devem fazer uma síntese do conteúdo da aula que foi apresentado pelo professor, segue com comentários e sugestões dele sobre a aula, o tema e a disciplina, que é o ponto de vista do estudante em relação ao conteúdo exposto e, por fim, a bibliografia pertinente, referências trazidas pelo estudante que buscou aprimoramento do assunto estudado (D`Ambrosio, 2004).

As vantagens são perceptíveis, a partir do exposto pelo professor, o estudante fará seu resumo e, ainda, trará sua contribuição com o que ouviu e anotou e com mais um pouco de pesquisa. A desvantagem é o tempo de correção, que é ampliado consideravelmente, mas não prejudica o bom andamento do processo ensino-aprendizagem-avaliação.

A experiência com relatório avaliação

A experiência ora mostrada ocorreu com quatro grupos de 2º e 3º anos do Ensino Médio do Colégio Estadual Presidente Arthur da Costa e Silva, localizado em Mariópolis, Região Sudoeste do Paraná, Brasil. A diversidade de instrumentos avaliativos estava prevista no contrato didático celebrado entre professor e estudantes no início do ano letivo, baseado em Brousseau (1988), que afirma que quando o processo de ensino aprendizagem for pensado por professores e estudantes, as chances de êxito são maiores.

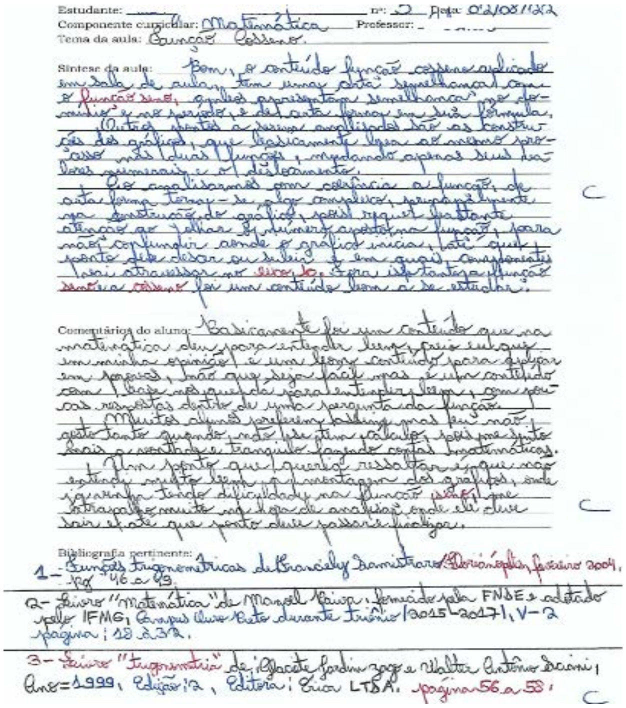
É importante recordar que os estudantes tiveram diferentes e variadas oportunidades durante o ano letivo quanto a diversificação dos instrumentos avaliativos, tais como exemplo: avaliação relâmpago, produção de acrósticos, produção textual em forma de uma história, autoavaliação, criação, execução e apresentação de projeto na ExpoCepacs.

No entanto, aqui será realizado o relato sobre o instrumento relatório avaliação, mais um momento avaliativo proposto. Neste contexto, no 2º ano, este foi utilizado em dois momentos e no 3º ano em apenas um momento. No caso do 2º ano, foi com os conhecimentos trigonométricos da Função Cosseno e do Teorema da Área. No caso da Função, os estudantes ouviram e visualizaram as explicações e exemplos dados pelo professor durante uma aula enquanto anotavam em rascunho o que pensavam ser importante. Na sequência, os estudantes, em suas casas, terminavam seus relatórios, trazendo-os na próxima aula.

Neste contexto, os relatórios da sequência foram elaborados por dois estudantes, em dois momentos diferentes do processo e com dois conhecimentos/conteúdos diferentes trabalhados. No primeiro momento, o estudante L. F. dos S. L., ao escrever a síntese compara a Função Cosseno, tema deste relatório, com a Função Seno trabalhada anteriormente, fala das semelhanças e diferenças na grafia das mesmas e no gráfico de ambas. Comenta sobre a complexidade da Função Cosseno e nas dificuldades para construir o gráfico (Figura 1).

Nos comentários do estudante, ele comenta de sua preferência de outros conhecimentos que possuem mais cálculos em detrimento de gráficos e análises mais aprofundadas junto a essas funções. Nas referências buscadas pelo estudante apontou três obras que versavam sobre o tema, identificando a localização das páginas que consultou.

Em outro momento, ainda em dois grupos de 2º ano, os conhecimentos trabalhados foram os de Teorema da Área, ainda ligado à Trigonometria. O exemplo mostrado é da estudante M. V. da S. e está bem estruturado, comenta ela que tal teorema é aplicado a triângulos quaisquer, diz que é utilizado para calcular a área de um triângulo. Indica ainda, na síntese da aula, a equação/fórmula para calcular a área. Nos comentários do estudante, ela mostra ainda mais conhecimentos a respeito da área de um triângulo qualquer e, por fim, na bibliografia pertinente, destaca três livros, destes, apenas um aparece na imagem, os demais estão no verso da folha (Figura 2).



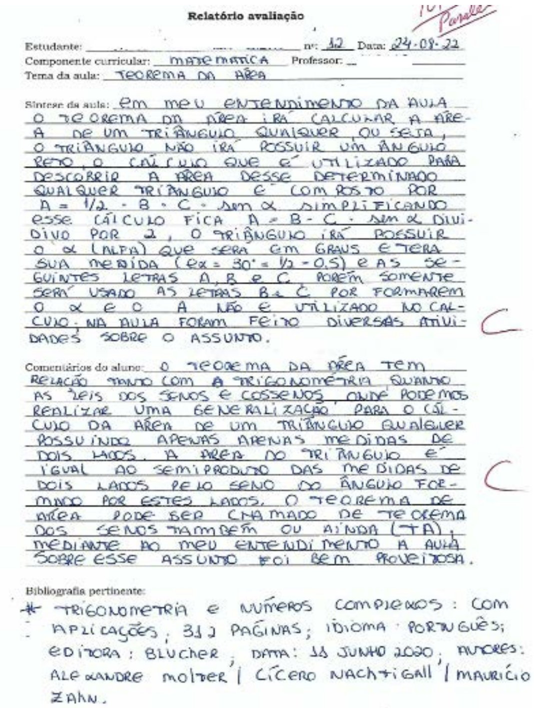
Estudante: nº: 2 Data: 02/08/2022
Componente curricular: Matemática Professor:
Tema da aula: Função Cosseno.

Síntese da aula: [illegible]

Comentários do aluno: [illegible]

Bibliografia pertinente:
1- Funções trigonométricas de [illegible] Florianópolis, fevereiro 2004, pg 46 a 49.
2- Livro "Matemática" de Manoel Paiva, fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG, Campus Ouro Preto durante triênio (2015-2017), V-2 página: 18 à 32.
3- Livro "trigonometria" de [illegible], Ano=1999, Edição: 2, Editora: [illegible] LTDA. página 56 a 58.

Figura 1. Relatório Avaliação Função Cosseno 2º ano.



Relatório avaliação

Estudante: nº: 12 Data: 24-08-22
Componente curricular: MATEMATICA Professor:
Tema da aula: TEOREMA DA ÁREA

Síntese da aula: EM MEU ENTENDIMENTO DA AULA O TEOREMA DA ÁREA IRÁ CALCULAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER, OU SEJA, O TRIÂNGULO NÃO IRÁ POSSUIR UM ÂNGULO RETO, O CÁLCULO QUE É UTILIZADO PARA DESCOBRIR A ÁREA DESSE DETERMINADO QUALQUER TRIÂNGULO É COMPOSTO POR A = 1/2 · B · C · sen α SIMPLIFICANDO ESSE CÁLCULO FICA A = B · C · sen α DIVIDIDO POR 2, O TRIÂNGULO IRÁ POSSUIR O α (ALFA) QUE SERÁ EM GRAUS E TERÁ SUA MEDIDA (Ex: 30° = 1/2 = 0,5) E AS SEGUINTES LETRAS A, B e C, PORÉM SOMENTE SERÁ USADO AS LETRAS B e C POR FORMAREM O α E O A NÃO É UTILIZADO NO CÁLCULO. NA AULA FORAM FEITO DIVERSAS ATIVIDADES SOBRE O ASSUNTO.

Comentários do aluno: O TEOREMA DA ÁREA TEM RELAÇÃO TANTO COM A TRIGONOMETRIA QUANTO AS LEIS DOS SENOS E COSSENOS, ONDE PODEMOS REALIZAR UMA GENERALIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER POSSUINDO APENAS APENAS MEDIDAS DE DOIS LADOS. A ÁREA DO TRIÂNGULO É IGUAL AO SEMIPRODUTO DAS MEDIDAS DE DOIS LADOS PELO SENO DO ÂNGULO FORMADO POR ESTES LADOS. O TEOREMA DE ÁREA PODE SER CHAMADO DE TEOREMA DOS SENOS TAMBÉM OU AINDA (TA), MEDIANTE AO MEU ENTENDIMENTO A AULA SOBRE ESSE ASSUNTO FOI BEM PROVEITOSA.

Bibliografia pertinente:
* TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS: COM APLICAÇÕES; 312 PÁGINAS; IDIOMA: PORTUGUÊS; EDITORA: BLUCHER; DATA: 11 JUNHO 2020; AUTORES: ALEXANDRE MOLTER / CÍCERO NACHTIGALL / MAURÍCIO ZAHN.

Figura 2. Relatório Avaliação Teorema da Área 2º ano.

Já no terceiro ano, o relatório avaliação foi com o início dos corpos redondos, mais especificamente com a questão que envolve o número π, um histórico pormenorizado do mesmo, a sua relação com o diâmetro e comprimento da circunferência e mais, uma relação muito interessante com a distância da nascente à foz de um rio, observando a distância em linha reta e a de seu contorno. Na sequência se mostra dois exemplos deste relatório avaliação:

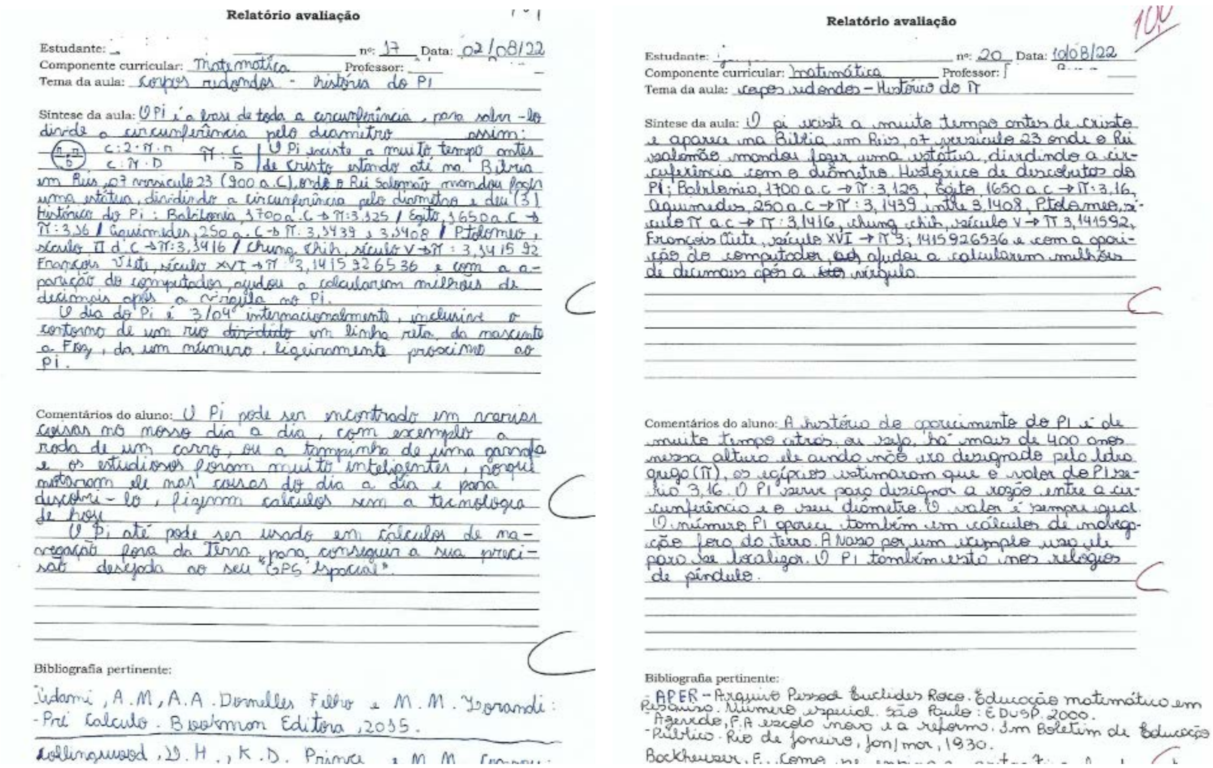


Figura 3. Relatórios Avaliação Corpos redondos – Histórico do π 3º ano.

No 1º relatório em tela, a estudante T. da S. P. na síntese falou da relação diâmetro e comprimento da circunferência, mostrou a equação/fórmula e comentou sobre o histórico do π, iniciando na Babilônia em 1700 a. C, quando seu valor era de 3,125, passando por outros períodos da história, inclusive uma citação na Bíblia no Livro dos Reis, uma história sobre o Rei Salomão e um tanque de fundição que tinha circunferência de 30 metros e diâmetro de 3 metros, o que daria um π = 3. Escreve ainda que o número π é tão importante que possui um dia internacional dele, o dia 14/03. Nos comentários da estudante, ela falou sobre a relação dessa medida com o cotidiano. Na bibliografia pertinente citou três obras. Na sequência é possível observar a transcrição literal de parte deste relatório:

Síntese da aula

O PI é a base de toda circunferência e para saber-lo divide a circunferência pelo diâmetro, assim: $C = 2 . \pi . r \longrightarrow C = \pi . D \longrightarrow \pi = C/D$. O PI existe a muito tempo antes de Cristo, estando até na bíblia em Reis 07, versículo 23 (900 a. C.) onde o Rei Salomão mandou fazer uma estátua, dividindo a circunferência pelo diâmetro e deu (3). Histórico do PI: Babilônia 1700 a. C. π = 3,125 / Egito 1650 a. C. π = 3,16 / Arquimedes 250 a. C. π = 3,1439 e π = 3,1408 / Ptolomeu, século II d. C. π = 3,1416 / Chung Chih, século V π = 3,141592 / François Viete, século XVI π = 3,1415926536 e com a aparição do computador, ajudou a calcularem milhões de decimais após a vírgula no PI.

O dia do PI é 14/03, internacionalmente, inclusive o contorno de um rio dividido em linha reta da nascente a foz, dá um número ligeiramente próximo ao PI.

Comentários do aluno

O PI pode ser encontrado em várias coisas do nosso dia a dia, com exemplo, a roda de um carro, ou a tampinha de uma garrafa e os estudiosos foram muito inteligentes, porque notaram ele nas coisas do dia a dia e para descobri-lo, fizeram cálculos sem a tecnologia que temos hoje.

O PI pode até ser usado para cálculos de navegação fora da Terra, para conseguir sua precisão desejada ao seu "GPS espacial".

O 2º relatório em tela é o da estudante J. J. da S. G., que na síntese da aula faz um apanhado geral do histórico do π, até chegar à ideia de que atualmente os cálculos efetuados pelos computadores, trazem uma quantidade imensa de números após a vírgula para este número. Nos comentários da estudante, ela traz exemplos deste famoso número no cotidiano e ainda comenta que ele é usado para cálculos de navegação fora do Planeta Terra, dizendo que a NASA o utiliza para localização. Ainda comenta que este número aparece nos relógios de pêndulo. Ao final, traz três obras em que podem ser encontrados os conhecimentos a respeito do π. Além destes exemplos mostrados, há outros dos demais estudantes que realizaram seus relatórios de maneira correta, em sua maioria, com êxito.

Considerações

A avaliação é senão a mais importante, umas das partes mais importantes do processo ensino-aprendizagem, pois é ela que de certa forma regula todo o processo já que, tanto professor quanto estudantes, têm nela um parâmetro, um termômetro do que foi aprendido e do que foi ensinado. Nesse sentido, quando o instrumento utilizado propõe ao estudante e ao professor poder de leitura, ele contribui com a retomada importante dos conhecimentos, para mudanças, caso necessário.

Assim foi o processo avaliativo descrito neste relato, o relatório avaliação mostra a compreensão do que foi explanado pelo professor e também o trabalho do estudante, já que, além do resumo do que foi explanado, ele busca em outras fontes conhecimento do assunto abordado, transformando-o, mesmo que em curto período, em agente ativo e pesquisador. Dessa forma, professor e estudante, são responsáveis pelo processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

Avaliar os conhecimentos matemáticos utilizando este instrumento se mostrou muito positivo, ainda que esse tenha sido apenas dois momentos no 2º ano e um momento no 3º ano no trimestre. A ideia da autoria é avaliar durante o processo utilizando instrumentos diferentes. Neste contexto, a produção do relatório aproxima a ciência Matemática da Língua Materna, já que o estudante, a partir do que aprendeu em sala e com a busca por mais detalhes, faz uso da produção textual.

A experiência deixou claro que o fato de avaliar em Matemática de forma integrada ao processo de ensino-aprendizagem, utilizando outro instrumento que não somente a conhecida prova sem consulta, traz bons resultados em notas, em conhecimento e, o que merece destaque, na aplicação dos estudantes. É possível, portanto, considerar que quando os estudantes realizam uma tarefa com empenho – e os meios são abrangentes e variados – a aprendizagem tem maiores chances de ocorrer. E mais, mostra que é possível avaliar enquanto ocorre o aprendizado e que é possível aprender enquanto se é avaliado (Basso, 2022).

Referências e bibliografia

Alsina; C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. & Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. & Serradó, A. (2005). La evaluación a debate en el aula de formación. *In*: Simposio de Educación Matemática, 7. Buenos Aires. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática. Buenos Aires: EMAT. p. 1176-1191.

Basso, A. & Hein, N. (2011). *Vencendo a inércia na escola*. 3 ed. Pinhais: Melo.

Basso, A. (2022). *Avaliação integrada ao ensino de matemática*: uma tendência. São Paulo: Livraria da Física.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des Mathématiques*. v. 9, n. 3, pp. 309-336.

Cuadra, F. G. (2000). *Marco Conceptual y Creencias de los Profesores sobre Evaluación en Matemáticas*. Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

D'Ambrosio, U. (2004). *Educação Matemática*: Da teoria à prática. 11 ed. Campinas-SP: Papirus.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática*: ensino secundário. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Avances en la enseñanza de Matemática con diferentes estrategias

María del Rosario Enriquez de Kopp
Montano College
Guatemala
mrenriquez@montano college.edu.gt

Resumen

Dentro de Montano College se han realizado importantes cambios en la metodología y herramientas de aprendizaje, los cuales han logrado avances académicos significativos. El objetivo del poster es presentar dichos avances para potencializar un intercambio de experiencias entre docentes, a través de las experiencias eficaces propuestas y de posibles mejoras. De acuerdo con el Ministerio de Educación de Guatemala, Montano College obtuvo un incremento del 20.66% en la evaluación a graduandos, en donde nueve de diez estudiantes alcanzaron el logro, lo cual se evidencia también en los diversos reconocimientos en la Olimpiada Nacional de Ciencias logrando mayor participación y destacar tanto los estudiantes como la institución.

Palabras clave: Educación Matemática; educación; enseñanza; gestión educativa; pruebas nacionales; implementación curricular.

Poster

El póster desarrollado tiene como propósito presentar los avances de la educación Matemática dentro de la institución educativa. Esto fue logrado a partir de diversas estrategias y metodologías de enseñanza. En el desarrollo de la metodología, se le da énfasis al tiempo de aprendizaje activo, es decir, el tiempo de aprendizaje por sí mismo del estudiante.

Teniendo en cuenta los momentos de una clase y el tiempo de aprendizaje activo, se elaboran propuestas educativas para todos los niveles educativos, las cuales tienen como énfasis el desarrollo óptimo de las habilidades lógicas y numéricas. Para ello, se evidencia en la institución el uso del ciclo de Kolb, en el cual el estudiante es el protagonista y se enfoca en cuatro momentos de aprendizaje: reflexión, conceptualización, experimentación y aplicación. Estos momentos se dan de forma cíclica, por lo que luego de completarlo una vez, se vuelve a iniciar. Este ciclo se evidencia con las diversas propuestas y actividades realizadas en la institución.

Una de las propuestas educativas consiste en la enseñanza de la matemática en diversificado de acuerdo con el nivel de desempeño de cada estudiante, el cual se clasifica de la siguiente manera.

Nivel Avanzado (Nivel 1): Para estudiantes que su fuerte es el área matemática y están orientados a cursar una carrera universitaria que requiera un nivel avanzado.

Nivel Intermedio (Nivel 2): Para estudiantes que tienen cierta facilidad y/o interés y están orientados a estudiar una carrera universitaria en que puedan requerir los conocimientos básicos.

Nivel Bajo (Nivel 3): Para estudiantes que presentan cierta dificultad en el aprendizaje de esta materia y están orientados a estudiar una carrera en área humanística.

Así mismo, se obtuvo un gran porcentaje de medallas en las Olimpiadas nacionales de ciencias, lo cual se alcanzó a través del apoyo y preparación para los alumnos destacados e interesados en participar. Se les brinda una preparación de alto nivel con personal capacitado y preparado para hacerlo, logrando sacar los mejores resultados de cada uno. Se trabaja en horario extracurricular desde inicio del año y se les motiva ofreciéndoles ayuda económica en becas y/o estudios avanzados.

Además, se propone el uso del material manipulativo y rallys matemáticos desde kínder hasta secundaria de la siguiente manera.

Pre-Primaria: Material para aprendizaje de decenas, centenas y unidades, cubos conectables, ábaco, entre otros.

Primaria: Base Ten Classroom Set, fichas de enteros, barras de fracciones, entre otros.

Secundaria: Algeblocks, balanza matemática para ecuaciones, Jenga, entre otros.

De esta manera, se busca concientizar a las personas para que promuevan los recursos a su alcance en la enseñanza creativa e innovadora de la matemática. Además, proveer herramientas pedagógicas que contribuyen al fortalecimiento de la labor docente en el aula, para el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes.

Por ello, como estrategias complementarias se presentan refuerzos que consisten en brindar la oportunidad, una vez por semana, a todos los estudiantes de asistir a clases adicionales para reforzar temas en los que presenten dificultad o que necesiten un Plan de Mejora Académico (PMA) en horario extracurricular.

Todo lo mencionado previamente para potencializar la matemática en los estudiantes de los diversos niveles educativos, permitiendo avances significativos en toda la institución.

Figura 1. Poster final avances en la enseñanza de Matemática con diferentes estrategias.

Referencias y bibliografía

Ministerio de Educación (2018). Matemática, *Currículum Nacional Base.* Digecade.

Santiago, R. (2015). The Flipped Classroom. *Flipped Classroom*. https://www.theflippedclassroom.es/sabes-lo-que-es-el-ciclo-de-kolb/

Averiguando el uso diario de la matemática mediante una bitácora

Rosa Eulalia Cardoso Paredes
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
rcardoso@pucp.pe

Resumen

En este trabajo se presenta algunos hallazgos sobre la aplicación de la bitácora como forma de averiguar el uso de los conocimientos matemáticos aplicados diariamente por 200 docentes participantes de un Programa de Segunda Especialidad en Matemática de una unidad de Formación Continua; y, además, como una estrategia didáctica para valorar la presencia de la matemática en la vida diaria de una persona. El estudio es cualitativo y mediante el análisis documental realizado se encontró que el uso social de la matemática que más prevalece es la Aritmética y como situaciones-problemas, las transacciones comerciales.

Palabras clave: Bitácora en matemáticas; Estrategia didáctica; Situaciones-problemas reales. Uso social de la matemática.

Introducción

Hay muchos argumentos para explicar el uso social de las matemáticas y su necesidad de aprenderla, por ejemplo: forma parte del pensamiento, es una construcción de la humanidad y se debe transmitir de generación en generación, es una necesidad en cada ciudadano, entre otros. La dificultad reside en cómo acercar estos conocimientos a sus usuarios. Es por eso por lo que, si a los ciudadanos o ciudadanas se les pregunta sobre su utilidad en su vida cotidiana, éstos tienen muchas dificultades para dar ejemplos de sus usos más allá de las compras, las ventas o uso en el tiempo. Suponemos que este resultado puede ser porque se piensa que la matemática es una ciencia formal y poco tiene que ver con los hechos concretos y cotidianos. Sin embargo, no se toma conciencia que mucho de ella es parte de la vida misma.

Ya desde los años 90, las políticas educativas enfatizan en la importancia de desarrollar una enseñanza de las matemáticas que tome más en cuenta la realidad social, económica y las nuevas tecnologías. Esto se manifiesta a través de las evaluaciones PISA, espacio donde se propicia la cultura matemática en la formación de un ciudadano. Dentro de ello está:

> La capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, para formular juicios bien fundados y para utilizar las matemáticas, en función de las exigencias de su vida en tanto que ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2006, p. 74).

Otro problema de alfabetización como ciudadanos del Siglo XXI, aparte de la comprensión lectora que se tiene, es el de la escritura en las áreas de ciencias y especialmente en matemáticas, a parte de la comprensión lectora, este es el caso de Perú. Aunque los investigadores indican que tanto la lectura como la escritura se complementan, sin embargo, Vigptsky (1978) nos indica que el lenguaje escrito es un lenguaje más elaborado y que éste ayudará al desarrollo de los procesos superiores: Pensamiento y Lenguaje, si se ejercita.

La National Council of Teachers of Mathematis (NCTM), Miller, et al., (2006) entre otros, indican que escribir puede servir positivamente en el desarrollo del estudiante y proponen que la escritura se puede implementar como: diarios, bitácoras, informes sobre artículos de publicaciones matemáticas, ensayos, resúmenes; ya que, el registrar observaciones entre ellas las matemáticas, permitirá a los estudiantes organizar sus ideas a cerca de un determinado tema o situación que se les encomiende. Afirman que las anotaciones, por ejemplo, de un diario, contienen textos no estructurados y las ideas del que escribe fluye libremente, no es así en las anotaciones que se registran en la bitácora, y más si es de aprendizaje, ya que estas por lo general son más estructuradas. El cómo se elaboran puede ser de forma libre y motivar la creatividad del estudiante, o tener una estructura pero que no interfiera con el contenido que se pretende que se registre.

Así también, Andrade y Zuñiga (2011) señalan que las bitácoras como herramienta de diálogo permite a los estudiantes expresar sus percepciones de la realidad a través de las matemáticas, ya sea en forma oral-gestual (bitácora audiovisual) o escrita, resaltando que ésta última fue clave para, en este caso, aquellas alumnas que tuvieron dificultades en el área de expresión social.

Ante lo anterior y, como ya nosotros comenzamos a utilizar la bitácora en un curso de formación inicial sobre el Desarrollo del Pensamiento Lógico-matemático en el pregrado de una Facultad de Educación, surgió la inquietud de adaptar este instrumento que permita tener acceso al pensamiento de otros grupos de estudiantes, por ejemplo de formación continua y nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Será la bitácora un buen espacio para observar sobre el uso diario de la matemática que hacen los docentes que imparten clases de matemáticas? ya que, como bien lo afirma Stone (2001) la capacidad de comprender se desarrolla con la aplicación práctica de lo comprendido. Que ese tipo de experiencia donde se piensa en lo que se sabe y se intenta aplicarlo a situaciones nuevas y que llegue más lejos, es una forma eficaz de aumentar esa capacidad. Para tratar de contestar a esta pregunta nos plantemos los siguientes objetivos:

Objetivo General

Probar que el uso de la "bitácora sobre el uso diario de la matemática" permite averiguar el tipo de conocimientos matemáticos que usan en la vida los docentes que imparten clases de matemáticas.

Objetivos específicos

1) Recoger datos sobre los conocimientos matemáticos que usan en su día-día los docentes que imparten clases de matemáticas mediante la bitácora.
2) Verificar el uso de la bitácora como una estrategia didáctica para involucrar a los docentes que imparten clases de matemáticas con las situaciones – problemas personales reales.

La Bitácora

Este instrumento que sirve para registrar datos tiene sus orígenes en los marineros que fueron los primeros en utilizarla y en ese tiempo era un cuadernillo que se encontraba cerca del timón teniendo como función resaltar las experiencias en orden cronológico de cada viaje. Sin embargo, con el tiempo los usos de la bitácora se han diversificado y las investigaciones muestran la adaptación esta idea a las diferentes áreas del saber hasta en la educación, específicamente a la educación matemática (Gonzáles y Gama, 2011).

Así mismo, para Gonzales y Gama refiriéndose a la bitácora en forma física, indican que es un conjunto de hojas que diariamente los alumnos deben elaborar; sirve de espacio para que anoten sus tips o reglas más importantes de cada tema y con sus palabras, lo cual les permitirá recordar mejor y no se les olvide el tema; también es un espacio en el cual pueden manifestar sus dudas y comentarios acerca de la asignatura.

A continuación, mostramos algunos usos de la bitácora matemática según Gonzales y Gama (2011): Como diagnóstico de los conocimientos previos del alumno en un tema, como un espacio de retroalimentación la que es importante para reforzar los contenidos vistos, como un espacio de expresión por parte de los alumnos en una asignatura, siendo éste, uno de los puntos importantes de la adaptación de dicho instrumento y como el espacio para apreciar el error. Los autores indican que esta parte enriquece el aprendizaje como un espacio donde el alumno ejercita y se diferencia de un cuaderno, indicando que el error es un indicador de procesos y espacio para mejorar.

La bitácora es el espacio del alumno, no es un trabajo más que hay que entregarle al profesor para efecto de evaluación. En ella, el alumno manifiesta su sentir hacia el tema que trata. Se dirige hacia su propio aprendizaje y lo expresa en las formas que quiera. Espacio que se ha perdido en las aulas de los diferentes niveles y que, sin duda, es fundamental para el logro de mejores aprendizajes desde los nuevos enfoques en la educación matemática.

Es interesante ver cómo la bitácora pone en evidencia lo que sucede en el día a día, refleja modos de comprender y hacer, formas de vivir en la escuela y afuera. Nuestro desafío es aprender a enseñar a estas nuevas generaciones, y la bitácora es una herramienta muy valiosa para conocerlos, entenderlos, y acercarnos a ellos. Es posible ver que la bitácora implica compartir la responsabilidad y la autoridad en el aprendizaje, como afirma Stone (2001, p.7): "Los alumnos asumen la responsabilidad de aprender de una manera activa, y al mismo tiempo pueden participar en la revisión de [sus] propios objetivos con respecto a ellos". Es decir que, como autor de una bitácora resulta inevitable aprender, es por ello qué, ésta se ubica en una concepción del aprendizaje centrado en el estudiante, por tanto, también permite reflexionar sobre lo aprendido ya que es el constructor de la bitácora quien maneja los tiempos, la profundidad, extensión y cantidad de material que coloca en él, el momento de revisarla, la forma de procesarla, así como la necesidad de agregar información o sacarla. Para el caso de los docentes, desde esta perspectiva, nos interesa apuntar a la formación de docentes que, lejos de quedar atrapados en la racionalidad técnica (Schön, 1992), puedan situarse críticamente frente a los desafíos que le propone el hacer de su profesión.

Evaluación de la bitácora

Stone (2001) indica que cuando los criterios que se utilizan para evaluar el desempeño de los alumnos se hacen públicos, éstos sabrán claramente qué es lo que determina que un trabajo esté bien elaborado, y así lo pongan en práctica en su elaboración. En este caso, la bitácora busca objetivos más concretos: iniciar a los estudiantes en la práctica de la observación a partir de referentes científicos; acostumbrarle al registro de observaciones, aunque sea de un modo elemental; acostumbrarles a incitar, a hacer explícitos, los propios dilemas (Zabalza, 2004); mostrarles de forma experiencial una herramienta pedagógica (la bitácora), y aprovecharla para el aprendizaje de contenidos relacionados con una asignatura concreta.

Metodología

El recojo de los datos para este trabajo fue en una población de 200 docentes participantes de dos cursos: Seminario de Estrategias para la Enseñanza de la Matemática y Desarrollo del Pensamiento Matemático que forman parte de la malla de la Segunda Especialidad, de la unidad de Formación Continua en una universidad privada, cuya modalidad de enseñanza es virtual con actividades sincrónicas y asincrónicas y durante el periodo de un año a partir de agosto del 2021 hasta agosto dl 2022. La finalidad de esta Segunda Especialidad es logar un desempeño profesional de calidad y que responda a las demandas de la sociedad, así como, diseñe estrategias metodológicas para optimizar el aprendizaje de la matemática y logre desarrollar habilidades matemáticas que fortalezcan su pensamiento personal y de sus estudiantes.

La formación y desempeño de los participantes fueron de los niveles educativos: inicial, primaria, secundaria y superior, los mismos que laboran en el sector público y privado. Los participantes de secundaria de las especialidades: Ciencias Naturales, Comunicación, Educación para el trabajo y Matemáticas. En educación superior: ingenieros, contadores, economistas, administradores, matemáticos, estadísticos, entre otros. Así también, estos participantes se desempeñan en cargos administrativos de las diferentes instituciones escolares, así como los organismos descentralizados a lo largo de todo el país.

La investigación fue de tipo cualitativa. La metodología utilizada fue el Análisis de contenido ya que debía analizar y sintetizar los registros diarios, conclusiones, discusiones y recomendaciones del trabajo. La recolección de los datos se realizó con la misma bitácora y para su elaboración se elaboró una Guía con lineamientos generales, la misma que fue validándose en su forma y contenido a partir de las preguntas y dudas que hacían los participantes de los diferentes grupos organizados por la universidad durante un año (secciones y semestres). Para la selección de las reflexiones se consideraron los criterios de la ficha: Conclusiones y Recomendaciones. La muestra de los registros sobre la reflexión de los participantes de este trabajo fue dirigida y se consideraron: la interacción y asistencia a las clases sincrónicas, la presentación de los avances para recibir el feedback, el nivel de desempeño usando contenidos matemáticos en el ítem Registros/contenido, el resultado de la ficha de valoración de la bitácora y el nivel educativo donde se desempeñan.

Procedimiento

La primera actividad que se realizó fue la elaboración del documento “Guía de elaboración de una bitácora sobre el uso diario de la matemática” que forma parte de la planificación del curso y es depositada en el campus virtual de la institución, antes de comenzar el curso. En esta guía se indica todo el procedimiento para realizar la tarea denominada “Producto acreditable” que los estudiantes deben presentar como una evidencia de sus competencias adquiridas en un curso.

La tarea se presenta a los estudiantes el primer día de clases sincrónicas, donde se lee algunas indicaciones sobre la elaboración y de la entrega de esta misma. La ejecución de la esta tarea fue durante los días que incluían clases sincrónicas programadas en el sílabo. La elaboración por parte de los estudiantes fue en forma individual y/o por pares, esto con la intención de fomentar el trabajo colaborativo.

A parte de las fechas, esta guía incluía la ficha de valoración del trabajo, donde se registra el contenido del instrumento (Tabla 1). Los criterios de evaluación se dividieron en dos partes: los de forma que sirvió para observar en participante la autonomía y dedicación en la realización del trabajo y los de fondo con el fin de ayudar al participante, en el desarrollo de sus competencias investigativas. Las partes del contenido de fondo fueron sugeridos mas no obligatorias, sin embargo, se logró que todos los estudiantes o grupos completen los indicadores que se solicitó.

Como la bitácora formaría parte de la evaluación del producto acreditable, debía ejecutarse durante el desarrollo del curso, para lo cual, en cada jornada de clases se planificó un tiempo para que los estudiantes pudieran preguntar sobre su elaboración o avances. Se trataba de que los alumnos dispongan de una oportunidad para recibir feedback y mejorar su trabajo.

Una vez presentada la bitácora en el campus virtual debería ser socializada mediante una exposición ante todos los integrantes de la clase, a fin de observar el desempeño argumentativo a sus registros.

Para esta investigación la bitácora sirvió como el instrumento para recoger datos sobre los conocimientos matemáticos que usan en su día-día los docentes que imparten clases de matemáticas.

Tabla 1
Ficha para la valoración del Producto académico "BIUDMA"

Criterios		Descripción	Puntaje		
			Regular	**Bien**	**Muy bien**
De forma	Apariencia	Presenta los avances del producto en las fechas 09-04-2022 y el 23-04-2022	**0**	**0.5**	**1**
	Apariencia	Tiene una presentación amigable pero rigurosa, notas imágenes y texto bien redactado. Cumple con los criterios establecidos en la guía para su elaboración con creatividad.	**0.5**	**1**	**1,5**
	Organización	Sigue la secuencia histórica señalada con las fechas y cada día tiene una presentación significativa y novedosa relacionada con el contenido.	**0.5**	**1**	**1.5**
De fondo	Introducción	Presenta una descripción breve y correcta de los temas presentados en la bitácora.	**1**	**1**	**1**
	Justificación	Describe razones novedosas por las que se consideran importante y relevante lo que se está realizando.	**1**	**1.5**	**2**
	Formulación del problema	Se redacta en términos concretos, explícitos, claros y precisos y refleja tema que está tratando.	**1**	**1.5**	**2**
	Objetivos	Expresa clara y correctamente los propósitos del trabajo.	**1**	**1.5**	**2**
	Registros /contenidos	Modeliza, emplea conceptos matemáticos y sistematiza información con rigurosidad al hacer uso de la matemática diariamente.	**3**	**3.5**	**4**
	Conclusiones	Expresa reflexiones interesantes sobre los resultados obtenidos durante la realización del trabajo.	**1**	**1.5**	**2**
	Recomendaciones	Registra situaciones no conclusas o acciones futuras para su aplicación del instrumento bitácora.	**1**	**1.5**	**2**
	Bibliografía	Registra fuentes científicas para la realización del trabajo y utiliza las normas APA.	**0**	**0.5**	**1**
Puntaje de presentación para la fecha del (20-10-2022) Sustentación Nota: (Presentación + sustentación) /2			**10 10**	**15 15**	**20 20**

Resultados

Nació la Bitácora sobre el uso diario de la matemática (BIUDMA), como el espacio en el que los participantes manifiesten sus conocimientos matemáticos en la solución de sus problemas de su diario vivir de una forma más reflexiva y estructurada (Miller, et al., 2006).

Al plantear la escritura de la bitácora se les presentó un problema que llevó al participante al razonamiento para ir descubriendo por el mismo el uso que hacía de sus conocimientos matemáticos. Al respecto, podemos decir que, ellos encontraron muchas dificultades pues refirieron que era la primera vez que se les pedía hacer este tipo de trabajo y que al superar dichas dificultades le encontraron mucha utilidad.

Al revisar y escuchar la presentación de las bitácoras se encontró que el área de la matemática que más está presente en la vida de las personas es la aritmética, la medición, algo de geometría estadística y casi nula es la participación del algebra.

En los registros se encuentra la diferencia que existe sobre el uso de la matemática en las distintas formaciones profesionales que participaron, por ejemplo: se nota solo el uso de contenidos aritméticos y geométricos básicos en los docentes de los niveles inicial y primario, a diferencia de los del nivel secundario y otras profesiones que hacen uso de contenidos estadísticos y algebraicos (lo más presente es funciones).

La elaboración y sustentación de la bitácora realizada por pares logro que los integrantes puedan llegar a coordinar y a acuerdos entre ellos para registrar un solo hecho; llegar a darse cuenta sobre muchas actividades en común, les permitió fomentar el consenso.

Por la naturaleza de este trabajo, los resultados los presentamos en dos partes: una donde se muestran los registros que realizan sobre los usos que hacen diariamente de la matemática y otra acerca de la reflexión del participante referente al uso de la bitácora para reflexionar sobre el uso de la matemática en la vida diaria.

Cabe anotar que, para organizar la bitácora se indicó los días que se integrarían el uso de la matemática y ya, los participantes hicieron la división del día y decidieron las actividades que consideraban registrar. Había libertad para organizarla. La información que se presenta en la figura 1, es propiedad de los autores Blondet, M. y Liser.

Registros de actividades diarias

V. REGISTROS O CONTENIDOS

FECHA	ACTIVIDAD	HORA	AUTOR	Reflexión	OBSERVACIÓN
Viernes 08 de abril del 2022	El uso del tiempo en el partido de futbol.	1:00 pm	Liser	El uso del tiempo nos permitió desarrollar el juego en periodos iguales de 15 minutos cada uno.	Esta actividad me permitió traducir cantidades a expresiones numéricas haciendo uso de la aritmética (al sumar los tiempos que duró el partido), así mismo se hace uso de ecuaciones matemática, lo que permite determinar la velocidad con la que es lanzado el balón o la velocidad con la que llega al suelo.
	Uso de la alarma para despertar y realizar las responsabilidades diarias.	6:00 am	Magda	El programar la alarma de mi celular me basé en el tiempo aproximado que utilizo para organizar mis actividades como: aseo, preparación de alimentos, desayuno, desplazamiento de mi casa hasta mi centro de labores.	En esta actividad hice uso de la estimación del tiempo que utilizo para organizarme por las mañanas.
Sábado 09 de abril del 2022	Preparación de una ensalada de verduras.	9:00 am	Liser	Al preparar la ensalada de verduras me plantee las siguientes interrogantes: ¿Qué cantidad de verduras necesito para tres personas? ¿Cuántos limones será necesario? ¿Qué proporción de sal debo utilizar?	Al realizar esta actividad pude darme cuenta que al establecer proporciones hice cálculos mentales haciendo uso de la regla de tres simples.
	Propina al mozo del restaurante	9:00 pm	Magda	Al terminar la cena en un restaurante con mi hija decidimos la cantidad de propina que debe brindarse al mozo, mi hija concluyo que lo correcto era darle el 10% del valor del total de la cuenta.	En esta actividad hice uso del cálculo de porcentaje.
Domingo 10 de abril del 2022	Visitar el mercado para realizar compras.	7:00 am	Liser	Para ir de compras al mercado tuve en cuenta los tipos de productos, la cantidad necesaria de productos y la cantidad de dinero suficiente para cubrir mis necesidades.	Esta visita me permitió establecer el uso de la aritmética al sumar, restar, multiplicar y dividir durante la compra de los productos y en el momento de recibir el cabio en algunas ocasiones.
	Medicando a mi gata.	4:00 pm	Magda	Para preparar la medicación de mi gata que está enferma, debí guiarme de la receta y hacer uso de una jeringa para medir los mililitros que debía administrarse el medicamento.	El uso de la medida del medicamento me permitió reconocer que los mililitros tenían equivalencia con los centímetros cúbicos y que la cantidad recetada va en proporción al peso de mi mascota.

Figura 1: Registro de uso diario de la matemática en la bitácora a partir de los datos recogidos.

A efectuar el análisis, se encontró que la parte más débil al realizar la bitácora fue la de Modelización de las actividades que registraron, ya que el 90% de los participantes se limitó a hacer un listado de actividades en las que, consideran, interviene la matemática. El análisis de este indicador no es parte de este trabajo.

Aunque los participantes le encuentran valor a la matemática, se nota muy poca observación de ésta en su vida diaria. No identifican, por ejemplo, las diferentes geometrías de su entorno en situaciones más allá de los caminos, así como de los diferentes usos de los sistemas numéricos como códigos, el algebra o la estadística. En general, se pudo encontrar que ellos no hacen la conexión entre los problemas del entorno y la matemática aprendida, sino que más bien elaboran problemas que simulan realidades, pero de acuerdo al tema que deben enseñar es sus clases.

Algunas reflexiones de los estudiantes sobre el valor de la matemática en la vida y la bitácora

A continuación, presentamos algunas reflexiones tomadas de las bitácoras de los estudiantes. Las mismas que nos indican que el buen uso de este instrumento didáctico puede ayudar a desarrollar competencias que todo ciudadano debe poseer en este tiempo tan cambiante.

> La matemática está presente en nuestra vida a cada instante y en cada acción que realizamos desde los primeros años de vida. • La matemática ayuda a desarrollar el razonamiento y prepara paulatinamente para la abstracción. • Los docentes debemos aprovechar las situaciones que se dan en las acciones diarias para generar situaciones matemáticas que se puedan trabajar en el aula. • Se debe pensar matemáticamente siempre y utilizarlo en la solución de los problemas simples y complejos. • Se sugiere aprovechar cualquier situación, hecho o fenómenos y que a partir de ellos se puedan generar espacios de aprendizaje (Castañeda, E. profesor de primeria)

> Todos requerimos usar la matemática en la vida para actividades tan cotidianas como comprar diversos productos, calcular el tiempo que necesitamos para llegar a un lugar o determinar la cantidad de un ingrediente que se debe colocar en una comida. Por esta razón el aprendizaje de la matemática, así como el desarrollo del pensamiento matemático son esenciales en la formación de todo estudiante. No es válido el argumento que muchos estudiantes postulan cuando dicen que no necesitan la matemática porque van a estudiar una carrera de letras (Pitaluga, G., profesor de secundaria y psicólogo)

> Todos los docentes entendamos que no sólo los contenidos son importantes para adquirir la competencia matemática, sino que los procesos matemáticos también han de estar presentes en las actividades planteadas, los niños y niñas tienen la posibilidad de experimentar, resolver diferentes problemas de forma creativa, formular preguntas, obtener respuestas y verbalizar sus impresiones, además de que en todas y cada una de ellas, se reserva un tiempo al final para establecer relaciones entre los contenidos aprendidos y tomar conciencia del proceso seguido y del resultado (Castañeda, E.)

> Reflexionar en este trabajo implicó un acto de pensamiento, abstracción, observación y debate consigo mismo y en equipo, para tratar de explicar las propias acciones realizadas de manera cotidiana haciendo uso de conocimientos matemáticos. ● El resultado de esta reflexión permite reconocer la importancia de conectar las matemáticas que se enseñan con el mundo real para darles un sentido más allá de aspecto formal. ● Desde la reflexión se puede profundizar la relevancia de las matemáticas como instrumento fundamental al ejercer la ciudadanía de una forma crítica y con libertad. (Blondet, M., profesora de inicial y Liser, profesor de secundaria)

> La bitácora muestra que la matemática está presente en la vida cotidiana de todas las personas. Tanto en la vida de las personas que la usan como parte de su trabajo como un economista, un ingeniero o un profesor de matemática como en la vida de personas que se dedican a otras profesiones. Además, esta bitácora tendrá gran valor práctico, que puede servir como guía a futuros estudiantes. (Pitaluga, G.)

> La bitácora es un instrumento muy importante que sirve para plasmar todas las actividades realizadas en el día, la misma que nos permite confrontar el uso del pensamiento matemático en cada una de las actividades. Podemos construirlo con nuestros estudiantes para constatar actividades relacionados con problemas matemáticos contextualizados, con la finalidad de hacerlo más funcional y que responda a las necesidades e intereses de los estudiantes. (Santa Cruz, N., profesor universitario)

> Mediante el análisis de la bitácora desarrollada se evidencio el uso diario de las matemáticas en las actividades cotidianas. (Blondet, M. y Liser)

Conclusiones

La bitácora es un espacio para averiguar los conocimientos matemáticos que los estudiantes consideran que usan al resolver cada problema que se les presenta en el día a día.

La bitácora es una buena estrategia didáctica para enseñar a los docentes donde encontrar situaciones-problema reales para sus clases de matemáticas y así mismo, ayuda a desarrollar competencias matemáticas a sus estudiantes, como lo mencionan en sus registros los mismos participantes.

La bitácora permite valorar el sentido formativo de la matemática y su importancia en la alfabetización de cada ciudadano.

La bitácora ayuda en el desarrollo de competencias investigativas. Estas competencias se notaron en el logro de la elaboración de las partes del contenido de fondo solo sugeridas para la construcción del trabajo. Todos los estudiantes o grupos completaron los indicadores que se solicitó.

La bitácora, por definición misma, puede ayudar a desarrollar competencias transversales y necesarias para el Siglo XXII como son: Creatividad, Innovación, Pensamiento crítico, Resolución de problemas, Comunicación, Colaboración, entre otras.

Referencias y bibliografía

Andrade, T.; Zuñiga, L. (2011) El diálogo como estrategia y la bitácora como herramienta en el aula matemática. *XIII CIAEM-IACME.* Recife. Brasil. https://xiii.ciaem-edumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1380/858

Bondy E. y Kendall, B. (2004) Evaluación diagnóstica continua. Blythe T. y colaboradores (2004). *Enseñanza para la comprensión. Guía del docente*. Paidós. Buenos Aires.

González, I.; Gama, J. L. (2011). Hacia la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Investigación con bitácora. *Espacios Públicos,* vol. 14, núm. 32, septiembre-diciembre, 2011, pp. 280-293 Universidad Autónoma del Estado de México. Toluca, México

Miller, Heeler y Hornsby (2006*) Matemáticas: Razonamiento y aplicaciones*. Décima Edición. Pearson. Educación de México S.A.

OCDE (2006). *PISA marco de evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.

Shön, D. (1992), *La formación de profesionales reflexivos.* Madrid. Paidós.

Stone, M. (2001) Llegar a la comprensión mediante el uso de las TICS. Ciclo de conferencias sobre el uso de las TIC y la educación virtual organizadas por EduLab. https://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107031/stone.html

Vigotsky, L. S. (1978). *Obras Escogidas. (Incluye Pensamiento y Lenguaje). Consideraciones sobre Psicología.* Editorial Paidós. Madrid. España.

Vain, P. D. (2003). El diario académico: Una estrategia para la formación de docentes reflexivos. *Perfiles educativos*, 100, 56-68.

Zabala, M. A. (2004). *Diarios de clase. Un instrumento de investigación y desarrollo profesional*. Madrid: Narcea.

Bases da Aprendizagem Matemática: um estudo com alunos com TEA

Silvia Cristina Costa **Brito**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
silviacbrito@yahoo.com.br
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

O presente artigo traz um recorte da tese em andamento Reflexões sobre a Neurociência e a Educação Matemática no ensino fundamental: um estudo envolvendo estudantes com Transtorno do Espectro do Autismo (TEA). Este recorte tem por objetivo compreender o desenvolvimento das noções matemáticas destes estudantes, a partir dos esquemas protoquantitativos e dos princípios de contagem. Utilizou-se uma abordagem qualitativa de pesquisa por meio da análise descritiva interpretativa, com intervenções pedagógicas desenvolvidas com materiais concretos e atividades que visaram a compreensão do processo e, consequentemente, a aprendizagem. Como resultado, percebeu-se que os alunos desenvolveram as noções pretendidas. Entende-se que a necessidade de aprofundar os estudos sobre as bases da aprendizagem matemática com o apoio da neurociência, partindo da premissa de que sempre existe potencial de aprendizagem a ser desenvolvido.

Palavras-chave: Educação Matemática Inclusiva; Esquemas Protoquantitativos; Princípios de Contagem; Transtorno do Espectro do Autismo.

Introdução

O termo Transtorno do Espectro do Autismo (TEA), é classificado como uma alteração do neurodesenvolvimento. Segundo as diretrizes do DSM-5, os critérios para o diagnóstico do TEA foram divididos em dois grandes grupos: (1) déficits persistentes na comunicação e na interação social verbal e não verbal em múltiplos contextos e (2) padrões restritos e repetitivos de comportamento, interesses ou atividades.

Para dar início a pesquisa, foi planejado verificar a consciência numérica de dois estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental com TEA. Para tanto, foram empregados os esquemas protoquantitativos, apresentados por Resnick (1989), que permitem estabelecer juízos de quantidades sem atender a numerosidade[1]. De acordo com Orrantia (2006), o pensamento matemático se constitui com aprendizagem conjunta, iniciando a partir dos três anos de idade, com a incorporação dos esquemas protoquantitativos e da habilidade de contagem das crianças, que são elementos básicos para o desenvolvimento matemático.

Esquemas Protoquantitativos e os Princípios de Contagem

A Matemática faz parte da vida em sociedade, pois vivemos imersos em números no nosso cotidiano, exemplos disso, são valores das contas a serem pagas, depósitos, culinária, horas, quantidades. Segundo Cunha (2015), crianças e adolescentes convivem diariamente com a realidade numérica, tanto nos ambientes sociais, como na escola. Alguns conteúdos como numerais, sequenciamentos, pareamentos, adições e subtrações podem ser bem assimilados quando possuem relação com a vida social e afetiva. Cunha (2015, p.79) indica uma relação de competências para a verificação da compreensão de noções matemáticas nos estudantes, como por exemplo: “fazer pareamento simples ou complexos; visualizar objetos dentro de um conjunto maior; conservar a quantidade e as relações de valor; sequenciar números; compreender sinais; montar operações; compreender medidas; lembrar sequências para a realização de operações matemáticas; contar sequencialmente”.

No ensino da Matemática para um estudante autista, pode ser necessário planejar metodologias e/ou estratégias que possibilitem à criança se sentir motivada e confortável com a situação vivenciada. Assim, entende-se que o contar é essencial para um bom desenvolvimento da aprendizagem matemática, diante disso, verificou-se os princípios de contagem de Gelman e Gallistel (1978), sendo que tais princípios devem estar desenvolvido entre 5 e 6 anos.

De acordo com Orrantia (2006), com um pouco de conhecimento sobre número e contagem relacionando com os esquemas protoquantitativos, as crianças são capazes de resolver muitas situações problemas, para isso, fazem uso de diferentes estratégias que modelam a situação e permitem chegar à solução para o problema. Ainda segundo Orrantia (2006), a relação dos esquemas protoquantitativos com o contar, proporciona à criança a competência necessária para enfrentar a resolução de situações problemas, sendo que essas competências numéricas e aritméticas se constroem progressivamente.

[1] Numerosidade, segundo Resnick (1989), são relações numéricas que expressam juízo de quantidade sem precisão numérica.

Metodologia

A pesquisa[2], oriunda de um recorte de uma tese da área de educação matemática, se desenvolve por meio de uma abordagem qualitativa, com enfoque exploratório e descritivo, envolvendo dois estudantes com TEA, representados pelas letras J e W. Neste contexto, este recorte descreve as intervenções pedagógicas desenvolvidas, com o intuito de compreender os conhecimentos prévios destes estudantes, tendo como ponto de partida os esquemas protoquantitativos, definidos por Resnick et al (1998), e os e os princípios de contagem Gelman e Gallistel (1978).

A pesquisa como um todo, ocorreu ao longo de dezesseis meses no laboratório de aprendizagem com materiais concretos e/ou digitais que foram selecionados a partir de potencialidades e limitações identificadas junto aos alunos. Em relação à análise dos dados, utiliza-se a análise descritiva interpretativa inspirada em Rosenthal (2014).

Resultados

No contexto da investigação, foi realizada uma atividade inicial com o intuito de compreender os conhecimentos prévios dos estudantes, considerando os esquemas protoquantitativos definidos por Resnick et al (1998) e os princípios de contagem Gelman e Gallistel (1978). Nesta e nas demais atividades, foram empregados diferentes materiais concretos como, tampinhas de plástico, conjunto de lápis de cor, palitos de picolé, material dourado e carrinhos de metal.

O primeiro esquema verificado foi o de comparação, pois esse esquema permite que as crianças tenham uma série de termos que expressam julgamentos de quantidades sem precisão numérica como, por exemplo: maior ou menor, mais ou menos. Orrantia (2006), apoiada nas ideias de Resnick (1989), faz uma distinção entre dois tipos de conhecimento, o que a autora chama de conhecimento representacional, que inclui o sistema numérico e o conhecimento relacional caracterizado pelos esquemas protoquantitativos. Estes dois tipos de conhecimentos têm origens distintas no desenvolvimento infantil da construção do número e, somente por meio da sua integração, se concretiza o conhecimento protoquantitativo.

Para a sondagem do esquema de comparação foram utilizados carrinhos de metal. O aluno J ao ser questionado sobre qual carrinho era maior, ele apontou para o carrinho que respondia corretamente ao questionamento. Ao perguntar como sabia disto, J pegou alguns palitos de picolé e colocou separando os carrinhos para que a visualização do comprimento dos carrinhos ficasse mais evidente, apontando para o dedo para o maior carrinho. J realizou uma comparação de comprimento, há mais espaços na frente do carrinho de cor cinza. Assim, pode-se inferir que J tem construído o esquema de comparação.

[2] A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética sob protocolo número CAAE: <omitido para avaliação>, tendo obtido inicialmente, autorização dos pais (Apêndice 1), professores e profissionais da escola regular, a concordância dos estudantes, além da autorização da Escola para a realização da pesquisa.

O estudante W escolheu o carrinho de sua preferência, brincou com ele sobre a mesa, disse que tinha muitos carrinhos ali. A pesquisadora escolheu um carrinho para si e perguntou: *"Qual carrinho é maior? O meu ou o seu?"* O carrinho dele era maior, sua resposta foi correta, uma que vez efetuou a comparação de tamanho entre os carrinhos. Em sequência foi disposto sobre a mesa, duas quantidades separadas de carrinhos, e a pergunta foi feita para o J: *"Qual tem mais carrinhos?"* A reação do aluno foi que a resposta era óbvia e questionou a pesquisadora se não era uma pegadinha. Sua resposta foi correta, comprovando que J realizou a correspondência entre os tamanhos dos carrinhos.

O aluno W ao visualizar os dois grupos de carrinhos, apontou para o monte que havia mais, respondendo de forma correta o questionamento da pesquisadora *"Qual tem mais carrinhos?"*. Nesta intervenção foi realizada uma nova verificação do esquema de comparação, com a utilização do *notebook*. As imagens foram visualizadas nos slides e em uma conversa buscou-se questionar qual era o maior e menor, mais e menos, alto e baixo. Os alunos responderam corretamente, possibilitando a inferência de que as duas crianças têm o esquema de comparação construído. De acordo com Lorenzato (2018, p. 102), "o processo de comparação pode possibilitar à criança intuir a adição (ou subtração). Ao perceber que um conjunto A é maior que o conjunto B, a questão ´O que se deve fazer para B ter a mesma quantidade de A?´ levará a criança a juntar unidades ao que tiver menos (a ou tirar do que tiver mais)". É imprescindível ter o esquema de comparação consolidado para que a criança possa seriar, classificar, incluir e conservar.

Segundo Orrantia (2006, p. 163), "no esquema aumento e decréscimo, permite crianças de três anos raciocinarem sobre as quantidades quando adicionam ou se tiram algum elemento. Utilizou-se lápis de cor para a verificação do esquema de aumento e decréscimo. Ao retirar alguns lápis do pote, questionou-se o aluno J: *"Agora aumentou ou diminuiu os lápis do pote?"* Sua resposta foi que aumentou.

Novamente, retirou-se mais alguns lápis e o mesmo questionamento foi realizado, *"E agora aumentou ou diminuiu?"*, sendo que sua resposta foi *"aumentou"*. Percebeu-se que não houve entendimento por parte da criança a respeito da pergunta feita, sua resposta foi sem atenção naquele momento repetindo sempre sua resposta de forma mecânica, referindo que havia aumentado. Segundo Lima (2019, p.168), "considerar que os níveis atencionais variam ao longo de um mesmo dia (o desempenho deficiente em um momento isolado, não implica um déficit significativo)".

Verificando o esquema aumento e decréscimo com o aluno W com os carrinhos sobre a mesa dividida em dois grupos. O aluno respondeu de forma correta que ao retirar alguns carrinhos, o monte diminuiu. Uma vez que, sua resposta foi condizente com a ação da pesquisadora, retirando alguns carrinhos do monte. Sendo assim percebeu-se imediatamente que o estudante tem o esquema construído.

Em outro encontro, buscou-se realizar com o estudante a confirmação do esquema aumento e decréscimo. Disponibilizou-se alguns palitos de picolé sobre a mesa e colocou-se à frente do aluno, dizendo: *"Todos estes são seus, vamos distribuir um pouco para a monitora e também para mim! E agora aumentou ou diminuiu os seus palitos?"* ele respondeu *"aumentou"*, juntou-se novamente os palitos e separou um pouco só para a monitora e novamente o aluno foi questionado, aumentou ou diminuiu? Sua resposta foi que *"aumentou"*. Percebemos, com as tentativas, que o seu entendimento era que ele ainda continuava com mais palitos, do que a monitora. E não percebeu que houve um decréscimo.

Novamente, investigou-se o esquema aumento e decréscimo com uma nova consigna, já que se percebeu que seu entendimento era de que ele continuava com a maior quantidade. Disponibilizou-se alguns carrinhos sobre a mesa e J contou quantos tinha. Após, foi lhe solicitado que entregasse alguns para a sua monitora, e entregou a ela uma grande parte de carrinhos. O questionamento foi diferente dos anteriores, em vez de usar aumentou e diminuiu, foi feito a seguinte consigna: *"E agora, você continua com a mesma quantidade de carrinhos?"* ele respondeu *"não, fiquei com menos"*.

Suas respostas anteriores aos questionamentos eram sempre *"aumentou"*, mesmo que houvesse decréscimo. Para J, o aumentou era sempre para a pessoa que estava recebendo os carrinhos. E com a mudança de questionamento houve melhor entendimento sobre o raciocínio de J, para que ele pudesse responder de forma mais assertiva. De acordo com Orrú (2012), a linguagem embora sendo comunicativa e construtiva do pensamento, também é planejadora das ações, organizadora e reguladora do comportamento. É importante uma ação mediadora do professor para auxiliar na construção da linguagem, possibilitando melhor comunicação possibilitando.

Na sequência, utilizou-se a testagem com os brinquedos de madeira "engenheiro", foi solicitado para o aluno J que separasse uma quantidade de blocos para ela, para a pesquisadora e sua monitora. Os blocos foram retirados e acrescentados entre todos e por meio dos questionamentos verificou-se que ele compreendeu que ao oferecer suas peças para a monitora ele ficava com menos blocos. O aluno J em todas as testagens tinha a atenção focada no pensamento que, o que aumentava eram os objetos de quem recebia e o questionamento era se as peças dele tinham aumentado ou diminuído.

O esquema protoquantitativo parte-todo permite que as crianças aceitem que qualquer peça pode ser dividida em partes menores e que, ao juntar-se novamente, darão origem à peça original. Também foi verificado o esquema parte-todo com as crianças autistas por meio da representação de um bolo construído com EVA. Os alunos reconheceram a representação do bolo representado na Figura 2 que ao retirar um pedaço e juntar novamente se deu origem a peça original, um bolo inteiro. De acordo do Orrantia (2006), do mesmo modo, duas grandezas podem ser reunidas que dão origem a uma quantidade maior, de tal maneira que, pelo menos implicitamente, as crianças começam a conhecer a propriedade aditiva das quantidades; eles podem saber que o todo é maior do que as partes e podem chegar a emitir este tipo de julgamento, sem ter que se dar conta das quantidades (o bolo e suas partes). Pode-se, então, a partir de testagens como esta, inferir que a criança identifica o esquema parte-todo, em consonância com a afirmação de Orrantia (2006).

Foi solicitado aos alunos que separassem a pizza em pedaços e distribuísse entre a pesquisadora e a monitora. Assim as crianças o fizeram e foram questionadas novamente. Nesta atividade foi verificado pela segunda vez que a grandeza pode ser reunida em partes menores, confirmado que as duas crianças conseguiram visualizar o pedaço da pizza e a pizza inteira, portanto apresentando o esquema parte todo construído (Figura 1).

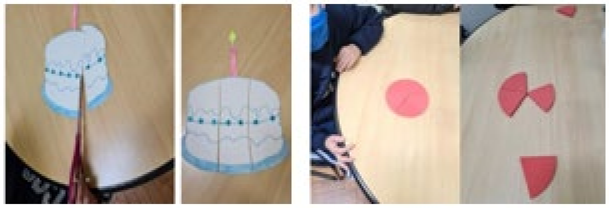


Figura 1. Esquema parte-todo
Fonte: a pesquisa

A compreensão dos esquemas protoquantitativos, que envolvem comparação, aumento e decréscimo e parte todo, é considerada uma das bases da aprendizagem matemática, pois são processos mentais utilizados no cotidiano das pessoas. Neste contexto, os dados inferem que os dois alunos após a intervenção tiveram construído os esquemas.

De acordo com Gelman e Gallistel (1978), a contagem é norteada pelos cinco princípios de contagem que se desenvolvem durante a pré-escola. Esses princípios precisam ser construídos nos primeiros seis anos de vida, a não aquisição dessas habilidades numéricas se tornará para criança nas atividades em idade posterior, de difícil entendimento. Os princípios de contagem são descritos a seguir:

1) Correspondência termo a termo: na contagem dizer o nome do número a cada elemento que contar, somente uma vez.
2) Ordem estável: A ordem das palavras de contagem é estável, seguindo a sequência um, dois, três e assim por diante.
3) Cardinalidade: o último nome de número durante o processo de enumeração indica o número total de elementos de um conjunto.
4) Irrelevância da Ordem: a ordem de contagem dos elementos do conjunto independe do elemento inicial ou direção da contagem, não interferindo no total.
5) Abstração: Objetos de qualquer natureza podem ser contados juntos em qualquer tipo de conjunto.

Os dados analisados após a aplicação das atividades com materiais concretos indicaram que os alunos autistas possuem os cinco princípios de contagem consolidados. As atividades foram reaplicadas com os alunos, para a constatação da construção destas habilidades. Para Nunes e Bryant (1997), é preciso contar com entendimento, saber contar bem, pois assim as habilidades cognitivas mais complexas serão desenvolvidas.

Conclusões

Os dados inferem que os dois estudantes desenvolveram os esquemas protoquantitativos. J demonstrou em algumas situações dificuldades de aprendizagem, como por exemplo: déficit de atenção em alguns dias de atendimento, além de respostas não totalmente claras, sendo necessárias mais intervenções para a compreensão do esquema aumento e decréscimo. Alunos com TEA podem responder melhor a proposta de trabalho por meio de estratégias e recursos de estímulos visuais exercendo melhor controle atencional para a aprendizagem. Por meio da reorganização de algumas atividades e utilização de recursos visuais, modificando os materiais, mediando a compressão do nível de pensamento das crianças, percebeu-se um avanço neste aluno em relação aos conceitos abordados. Por sua vez, W mostrou ter construído os esquemas protoquantitativos, sendo verificado nas atividades aplicadas, onde o aluno não hesitou em responder às perguntas da pesquisadora, respondendo de forma correta.

Os princípios de contagem também foram averiguados, sendo que os dados analisados após a aplicação das atividades, indicaram que ambos os alunos possuem os cinco princípios de contagem consolidados.

Otimizando o processo de aprendizagem do indivíduo com as contribuições da Neurociência, objetiva-se, no contexto da tese, contribuir com as práticas pedagógicas, por meio da modificabilidade cognitiva, ou seja, baseando-se na premissa de que existe potencial de aprendizagem a ser desenvolvido em todos os alunos, independentemente de suas características.

Referências e Bibliografia

American Psychiatry Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* - DSM-5. 5. ed. Washington: American Psychiatric Association.

Cunha, E. (2015). *Autismo na escola*: um jeito diferente de aprender, um jeito diferente de ensinar–ideias e práticas pedagógicas. Rio de Janeiro: Wak, 2015.

Gelman, R.; Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Massachusets: Harvard Press.

Lorenzato, S. (2018). *Educação infantil e percepção matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.

Nunes, T.; Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: uma perspectiva evolutiva. *Revista da Psicopedagogia*, v. 23 (71): pp 158-18. Recuperado de https://www.revistapsicopedagogia.com.br/detalhes/401/dificultades-en-el-aprendizaje-de-las-matematicas--una-perspectiva-evolutiva

Orrú, S. E. (2012). *Autismo, linguagem e educação: interação social no cotidiano escolar*. 3.ed. Rio de Janeiro: Wak.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, v.44, n.2, 162-169. Recuperado de https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162

Rosenthal, G. (2014). *Pesquisa Social Interpretativa: uma introdução*. Porto Alegre: Edipucrs.

XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
Universidad de Lima
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Cambios en la enseñanza de la Matemática mediados por la metodología de la indagación y las situaciones didácticas

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Héctor Gerardo **Sánchez** Bedoya
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
hgsanche@utp.edu.co
Walter Fernando **Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
walter.castro@udea.edu.co

Resumen

Se presenta una experiencia de formación postgraduada de profesores que enseñan matemáticas sin formación en licenciatura o didáctica de la matemática, centrada en la reflexión y transformación de su práctica de enseñanza. La investigación es cualitativa y estudia la apropiación de la Metodología de Indagación en la práctica docente de maestros que la incorporaron en la enseñanza de la matemática, mediada por la planificación y ejecución de una unidad didáctica, organizada desde las Situaciones Didácticas. Los resultados reportan que los docentes identificaron transformaciones en la enseñanza de objetos matemáticos a partir de tres categorías: Secuencia Didáctica, Competencia Científica e Interactividad; categorías que muestran los cambios que los profesores hicieron en su práctica de aula.

Palabras clave: Cambios en la Enseñanza de la Matemática; Metodología de la Indagación; Práctica Docente; Situaciones Didácticas; Unidad Didáctica.

Introducción

La enseñanza de la matemática en la educación básica y media en Colombia, en ocasiones ha estado a cargo de profesionales cuya formación no es en licenciatura en matemáticas, o en educación matemática; esta es una de las razones por las cuales en los últimos años el gobierno colombiano ha otorgado becas para la cualificación de estos docentes. Parte de esta formación fue impartida en la Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, en la Maestría en Educación, en la línea Didáctica de la Matemática; en donde se formaron 80 maestros que enseñan matemáticas. En la formación posgraduada los profesores tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre su práctica docente (González-Weil, et. al., 2012), seleccionar un objeto matemático para su enseñanza y apropiarse de referentes teóricos como la Metodología de la Indagación (Harlen, 2013. Bustos, 2011) y las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), que les permitió involucrar cambios en sus prácticas de aula, haciendo de la clase un espacio de construcción conjunta de significados, privilegiando aprendizajes activos, en donde los estudiantes fueron partícipes de su aprendizaje.

En esta comunicación se dan a conocer algunas de las transformaciones de la práctica docente de los profesores, dado que la formación como magíster giró en torno a la investigación "*Análisis de la práctica docente en la enseñanza de la matemática mediada por la metodología de la indagación*". Por tanto, aquí, se describe brevemente el marco teórico que fundamentó la investigación, el método, algunos resultados y conclusiones.

Marco teórico

Los referentes teóricos que fundamentaron la investigación fueron: la *práctica docente*, entendida como los procesos en el aula para involucrar a los estudiantes en su acto de aprender. Es decir, las actuaciones que el maestro realiza en el aula con el propósito de enseñar. Práctica que fue observada, sistematizada y estudiada desde tres categorías de análisis: Secuencia Didáctica, ¿qué actividades se realizan en el salón de clase y cómo se estructuran?, Competencia Científica, ¿qué ámbitos de competencia científica implementa el docente en su clase? e Interactividad, ¿qué características tiene la interacción profesor- alumno y de qué manera apoya el aprendizaje? (González-Weil, et al., 2012).

La *Metodología de la Indagación,* caracterizada por descentralizar la enseñanza del maestro hacia la participación productiva del estudiante, donde la pregunta y la búsqueda de respuestas argumentadas transversalizan las relaciones entre docente, estudiante, estudiante-estudiante y saber; a través del diálogo durante todas las sesiones de clase (Sánchez, Uzuriaga y Palechor, 2019); en donde se potencia la creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, a través de: saber preguntar, diálogos en el aula, autoevaluación, coevaluación y retroalimentación (Harlen, 2013).

Las *Situaciones Didácticas* entendidas como una forma para "modelar" los procesos de enseñanza y aprendizaje, de manera tal que se conciban como un juego para el cual el docente y el estudiante han definido o establecido reglas y acciones implícitas que lleven a la construcción paulatina y sistemática de los conocimientos matemáticos. La clase se concibe como un escenario o medio adecuado por el docente para que el estudiante desde las situaciones a-didácticas usando los saberes previos de manera individual y grupal, construyan saberes matemáticos que son formalizados por el docente como situaciones didácticas (institucionalización, Brousseau, 2007).

Método

La investigación cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo (Yin, 2014), porque “brinda descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 9), que en la investigación buscó comprender y reflexionar sobre la práctica docente en su entorno natural como lo es, el aula, llevando a caracterizar los cambios en la práctica de los docentes participantes en la investigación, quienes fueron estudiantes de la Maestría en Educación de la Universidad Tecnológica de Pereira, becados por el Ministerios de Educación Nacional Colombiano en el programa “Becas para la Excelencia Docente”. Para el diseño de la investigación se usó la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 1990) en tres momentos: *El primero*, *la visión retrospectiva*, donde los profesores caracterizaron su práctica docente antes de su formación posgraduada. *El segundo*, diseño y planeación de unidades didácticas; para esta comunicación se mostrarán resultados de siete unidades didácticas, fundamentadas en la Metodología de la Indagación y en las Situaciones Didácticas. El *tercer momento*, refiere a la observación y sistematización de la práctica de cada uno de los docentes durante la implementación de las unidades didácticas. La observación y sistematización de la práctica docente se hizo con base en los instrumentos Rejilla de Observación y Matriz de Análisis.

Resultados y discusión

La *visión retrospectiva* permitió caracterizar la práctica de los docentes, como una enseñanza centrada en el docente, en la transmisión de conocimientos, con un rol pasivo de los estudiantes. La siguiente figura muestra otras peculiaridades de la práctica antes de la formación posgraduada como Magíster en Educación.

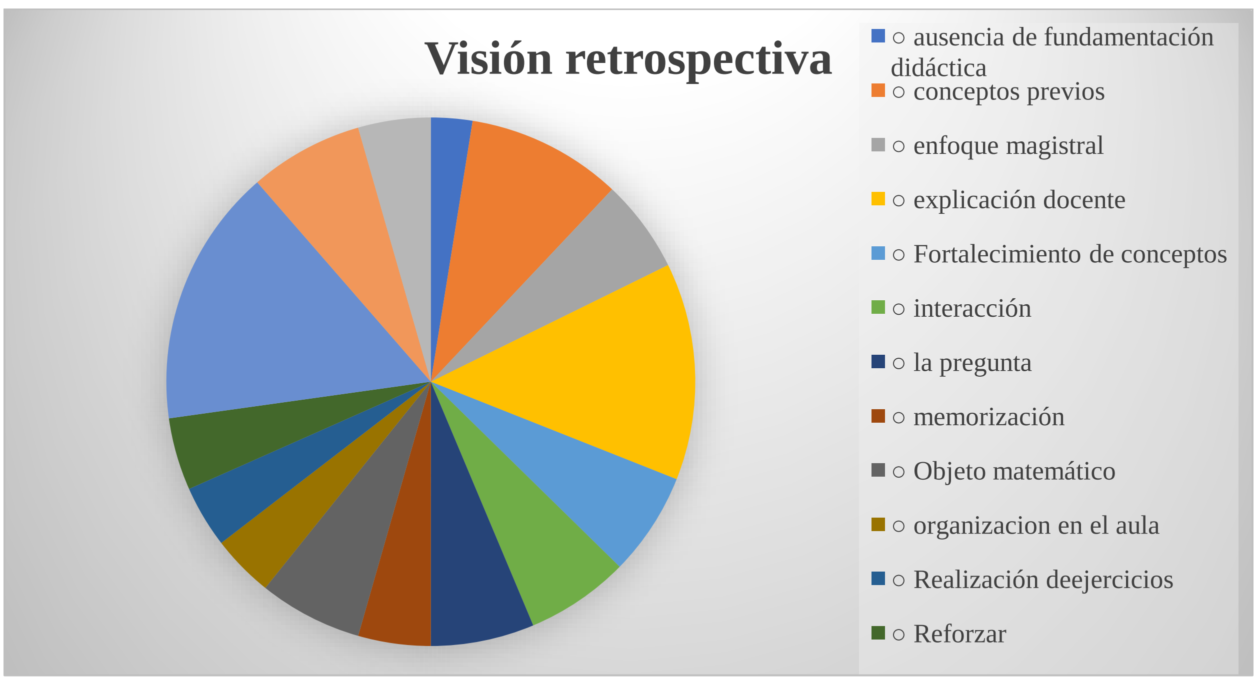


Figura 1. Visión retrospectiva de los docentes.

La Figura 1, resalta categorías de la práctica docente que emergieron de la observación y sistematización mediante la codificación abierta y axial; características que la centra en una práctica de enseñanza "tradicional" en donde el alumno es un sujeto pasivo y el docente es el protagonista transmisor de contenidos. La figura siguiente ilustra algunas actuaciones de los docentes en las clases.

Docente: voy a explicar acá en el tablero para que ustedes, me comprendan, por qué estamos diciendo un medio, un tercio, un cuarto… (en el tablero señala y escribe va explicando) resulta que tenemos la unidad, o sea uno, ahí estamos completos, porque la unidad está completa. (Escobar y Correa, 2020).

La observación de la práctica de la docente mostró una clase centrada en resolver ejercicios rutinarios sin tener en cuenta la participación y aportes de los estudiantes; tampoco profundizó en la explicación del tema, la aclaración de dudas no tenía mayor profundidad del saber, y la retroalimentación fue poca. (Jiménez y Parra, 2019).

Figura 2. Visión retrospectiva, docentes transmiten conocimientos.

La figura muestra dos imágenes que corroboran un aula de clase centrada en el profesor, en la cual su rol no promovió que los estudiantes aportaran ideas para construir el nuevo conocimiento de manera conjunta con sus compañeros. También, muestra que el interés es transmitir un contenido para cumplir una planeación, sin mucho interés en el actuar de los estudiantes, como se refleja claramente en la imagen de la derecha, en donde la profesora habla y las niñas están distraídas. Concluyendo que, "El método de enseñanza es **eminentemente expositivo**…"

Una vez los profesores, estudiantes de la Maestría, avanzaron en la revisión bibliográfica, en la apropiación teórica de la Metodología de la Indagación y las características que aporta a la enseñanza, las Situaciones Didácticas y los seminarios en Didáctica de la Matemática; planearon y construyeron unidades didácticas para la enseñanza de objetos matemáticos, los cuales fueron seleccionados a partir de los bajos desempeños de los estudiantes mostrados en los resultados del día E de las instituciones educativas donde laboran los docentes. El Día E, o Día de la Excelencia, es un espacio pedagógico que deben dedicar las instituciones educativas de Colombia, para analizar los resultados de las pruebas que aplica el Ministerio de Educación Nacional, para trazar estrategias y metas de mejoramiento.

Las unidades didácticas, se convirtieron en estrategias que permitieron a los docentes regresar al aula de clase para mostrar la apropiación teórica que sería evidenciada en su actuar en la enseñanza de la matemática. La Figura 3 muestra algunas transformaciones de prácticas docentes mediadas por la Metodología de la Indagación y las Situaciones Didácticas de tres maestros sin formación inicial en enseñanza de las matemáticas, esta formación es: Administración en Educación, Orientación Escolar y Licenciatura en Educación Física.

Figura 3. Transformación de práctica docente.

La figura muestra clases en las cuales los estudiantes son activos y partícipes de su aprendizaje, implicados en los procesos. También, se observa un rol docente activo, de guía y mediador del conocimiento. Asimismo, el aula de clase evidencia estrategias que favorecieron el desarrollo del pensamiento crítico y argumentativo sobre la realidad social y la matemática como disciplina del pensamiento lógico (Bustamante, 2009), al resolver las situaciones problemas diseñadas por los maestros y significativas para los aprendices, llevándolos a involucrarse en ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativas (MEN, 2006), al usar el razonamiento deductivo para validar conjeturas y formular nuevas pruebas (Cantoral, et al., 2005), potenciando la creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, a través de: saber preguntar, diálogos en el aula, autoevaluación, coevaluación y retroalimentación (Harlen, 2013), al caracterizar y modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos (Cantoral, et al., 2005). Por otro lado, se resalta la interacción de los estudiantes con el material didáctico para lograr las consignas propuestas. Materiales didácticos que fueron construidos por los docentes, de acuerdo a las exigencias de cada una de las situaciones problemas diseñadas para la enseñanza de los objetos matemáticos, como fueron: el diagrama de barras, números fraccionarios, entre otros.

Asimismo, la Figura 4 muestra transformaciones en la práctica de los docentes relacionada con la institucionalización de saberes, la que se construyó a partir de la validación hecha por los estudiantes, en donde el error fue una oportunidad de aprendizaje gestionado por el maestro.

La interactividad fue una de las categorías que caracterizaron la práctica docente a través de un "Proceso activo y sistemático de negociación y construcción con los estudiantes, y al andamiaje a partir de sus requerimientos", posibilitando el aprendizaje al hacer preguntas relacionadas con los objetos de saber (González-Weil, et. al., 2012).

¿Cómo hicieron para completar la serie?, ¿cuál fue el patrón que se tenía que repetir?

¿Cuál fue el primer y el último elemento de la serie? (Díaz y Botero, 2019, p.55).

Figura 4. Institucionalización de conocimientos.

De la figura se observa como la docente lleva a los estudiantes a partir de su validación con preguntas a la construcción del conocimiento, en este caso la *seriación*. La tabla muestra este diálogo.

Tabla 1
Docente institucionaliza el concepto a partir de preguntas orientadoras

Profesora: y ¿qué hicieron? ¿Qué tuvieron que hacer después?
Estudiantes: ¡¡tuvimos que repetir lo mismo!!
Profesora: ahora yo les pregunto ¿cuál es la primera ficha y cuál es la última ficha de la cenefa?
Estudiantes: ¡la primera es cuadrado grande y la última es el triángulo chiquito.!
Profesora: de aquí hasta allá ¿cuantas fichas hay? (señala la cenefa)
Estudiante: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, (la niña va señalando una a una la ficha mientras cuenta)
Profesora: dieciséis fichas, muy bien la cenefa de ellas está compuesta por 16 fichas y el patrón de su cenefa está compuesto por ¿cuántas?
Estudiantes: ¡¡¡cuatro!!!

Fuente: (Díaz y Botero, 2019, p. 73).

Conclusiones

Reflexionar sobre la práctica docente a través de la auto-observación antes y durante la formación posgraduada como estudiantes de Maestría en Educación en la línea Didáctica de la Matemática, de la Universidad Tecnológica de Pereira, en Colombia, llevó a los profesores a iniciar transformaciones de sus prácticas a partir de la apropiación teórica que fue plasmada en el diseño de unidades didácticas como estrategias de planeación de clase, que fueron implementadas en el aula, en donde se observaron cambios significativos y positivos tanto en el rol docente como de aprendices; generando espacios de reflexión conjunta que llevaron al desarrollo del pensamiento matemático; trascendiendo de una matemática de fórmulas y reglas, a una que aporta herramientas para la modelación, planteamiento y solución de problemas en situaciones significativas para los alumnos.

Se identificaron transformaciones en la enseñanza de objetos matemáticos a partir de tres categorías, que muestran los cambios que los profesores hicieron en su práctica de aula. *Secuencia Didáctica*: relacionaron los contenidos con situaciones de la vida cotidiana. Utilizaron variados recursos para la construcción del conocimiento. Planearon y construyeron paso a paso de manera sucesiva y acumulativa el proceso de enseñanza. *Competencia Científica*: hicieron preguntas orientadoras y retadoras que tenían relación con las inquietudes de los estudiantes que surgieron del proceso de aprendizaje. Permitieron a los estudiantes la argumentación acerca del proceso llevado a cabo para resolver un problema. Aplicaron estrategias que permitieron a los estudiantes la articulación de los saberes previos con el nuevo aprendizaje. En la institucionalización, los docentes retomaron las producciones de los estudiantes en las fases de acción, formulación y validación, utilizado un lenguaje disciplinar apropiado para el desarrollo del saber. *Interactividad:* utilizaron estrategias que posibilitaron el aprendizaje autónomo y la construcción compartida de significados y sentidos en los estudiantes. Ofrecieron ayuda ajustada según necesidades del estudiante para la construcción del nuevo conocimiento.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal

Bustamante, A. (2009). Lógica y argumentación. De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole. México: Prentice Hall.

Bustos, A. (2011). Presencia docente distribuida, influencia educativa y construcción del conocimiento en entornos de enseñanza y aprendizaje basados en la comunicación asincrónica escrita. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, España.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanis, J. A., Rodríguez, R. A., y Garza, A. (2005). Desarrollo del pensamiento Matemático. México: Editorial Trillas.

Díaz, F. y Botero, Y. (2019). Apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente al implementar una unidad didáctica para la enseñanza de la noción de seriación. Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira.

Escobar Londoño, J. E., y Correa Castaño, D. N. (2020). Reflexión de la práctica docente al implementar una unidad didáctica para la enseñanza de la organización de datos en grado cuarto, mediante la metodología de la indagación. Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira.

González-Weil, C., Cortéz, M., Bravo, P., Ibaceta, Y Cuevas, K. (2012). La indagación científica como enfoque pedagógico: estudio sobre las prácticas innovadoras de docentes de ciencia en EM (Región de Valparaíso). Estudios Pedagógicos, XXXVIII (2), 85-102.

Harlen, W. (2013). Evaluación y educación en ciencias basada en la indagación. Trieste, Italia: Global. Network of Science Academies.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación 5ª Edición. Mac Graw Hill.

Jiménez Botero, N. J. y Parra, L. F. (2019). Apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente, al implementar una unidad didáctica para la enseñanza de la organización de datos en pictogramas. Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Sánchez, H.G., Uzuriaga, V.L. Y Palechor, A.O. (2019). La metodología de la indagación, una forma de enseñar y aprender matemática. Colombia: Universidad Tecnológica Pereira.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Antioquia: Editorial Universitaria de Antioquia.

Yin, R. (2014). Case study research design and methods (5th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage. 282 pages.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Caminatas Matemáticas: una oportunidad para re-imaginar nuestra relación con las Matemáticas y la naturaleza

Kelly Jennifer **Dávila** Vargas
Innova Teaching School
Perú
kdavila@its.edu.pe
Sthefani Elena **Garay** Ramírez
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Perú
sgarayr@unmsm.edu.pe

Resumen

Los mundos naturales nos brindan un gran abanico de patrones, colores, formas, cantidades y otros atributos que favorecen el aprendizaje de las matemáticas. Una forma de explorar la naturaleza y aprender matemáticas es a través de las caminatas matemáticas. En el marco de la investigación cualitativa, hemos usado la autoetnografía como metodología para explorar y reflexionar sobre nuestras propias vivencias al implementar caminatas matemáticas. En este estudio, se concluye que las caminatas matemáticas son una estrategia con potencial para revalorar el sentido de las matemáticas a través del aprendizaje al aire libre y favorecen diversas conexiones entre las matemáticas, la naturaleza y la imaginación. Además, como resultado de nuestra experiencia, proponemos una estructura de cómo elaborar una caminata matemática para implementar con estudiantes.

Palabras clave: Caminatas Matemáticas; Educación Matemática; Educación Imaginativa; Educación Ecológica; Educación Primaria; Perú.

Introducción

Al preguntarles a docentes y futuros docentes, “¿Cuál es la primera imagen que viene a tu mente cuando escuchas ‘matemáticas’?”, siempre obtenemos como respuestas: números, fórmulas, símbolos, operaciones. Ninguna de las respuestas incluye respuestas como: lugares, naturaleza, comunidad o historias. Una posible explicación a la limitada comprensión de las matemáticas es el tipo de educación que reciben los estudiantes, una educación que prioriza la práctica repetitiva de algoritmos ampliando la brecha entre lo que sucede en la escuela y en la vida de los estudiantes. Como señala Alsina (2019), "[...] no siempre se logra 'hacer un puente correcto' entre los instrumentos estudiados y los usos normales de los mismos en la vida de las personas" (p. 3). Además, si el salón de clase se concibe como el único lugar en donde se generan aprendizajes, se pierde la oportunidad de explorar otros contextos. ¿Qué enseñanzas nos ofrecen los lugares fuera del aula? ¿Qué historias matemáticas podemos encontrar en lugares como un bosque, la orilla del río, el pantano, el parque de la comunidad?

Observar un lugar con atención es una práctica que permite percibir distintos elementos, diversas conexiones, numerosas historias; así, uno se convierte en un investigador que re-imagina lo que creía conocido. Como señala Kimmerer (2013), "Prestar atención es una forma de reciprocidad con el mundo viviente, recibiendo los dones con los ojos abiertos y el corazón abierto" (p. 222). El acto de caminar con una intención curricular puede tener múltiples consecuencias positivas (Judson, 2018): puede desarrollar una conexión significativa con el lugar, puede favorecer el encuentro de huellas matemáticas alrededor, o puede invitar a reconocer esa interconexión previamente desapercibida entre todo lo que nos rodea porque, de una forma u otra, todas las cosas en el mundo están unidas. Considerar al lugar como un co-docente permite traer a los estudiantes de vuelta al vínculo inicial, al vínculo con la tierra, porque no es el conocimiento acumulado lo que debemos ofrecer a nuestros estudiantes, sino su capacidad para estar en sintonía con una tierra que sostendrá sus vidas (Dávila y Garay, 2021).

Las matemáticas parecen ser el área con menor posibilidad de interrelación con la naturaleza y, por lo mismo, el desafío de visibilizar sus conexiones se vuelve más relevante. En este contexto, el propósito de este estudio es explorar la estrategia de 'Caminatas Matemáticas' como una oportunidad para re-imaginar nuestra relación con las matemáticas y la naturaleza.

Contribuciones Teóricas

Contribución de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR) es un enfoque planteado por Freudenthal (1973) en el que las matemáticas son consideradas una actividad humana que puede ser realizada por todas las personas y no solo por una élite. En esta propuesta, el uso de contextos reales y cercanos a los estudiantes se convierte en un elemento clave. Se busca que los estudiantes sean capaces de matematizar su realidad y reconozcan las diversas relaciones entre las ideas matemáticas.

La estrategia de caminatas matemáticas se construye sobre la base de la EMR, en tanto los contextos reales y situados cobran vital importancia al diseñar e implementar una caminata. Los estudiantes pueden explorar nociones de cantidad, forma, patrones, y más, a partir de las invitaciones que les ofrece el lugar. Además, las caminatas invitan a los estudiantes a organizar la información de su entorno a través de herramientas matemáticas. Así, por ejemplo, los estudiantes pueden recoger data sobre tipos de semillas o tipo de hojas que encontraron durante la caminata y pueden traducirla usando términos matemáticos.

Contribución de la Educación Imaginativa Ecológica

La propuesta de Educación Imaginativa Ecológica es un enfoque centrado en promover que el cuerpo, las emociones y la imaginación sean parte del proceso de enseñanza aprendizaje (Judson, 2015). Por un lado, la educación ecológica enfatiza que los seres humanos somos parte del mundo natural y que estamos inexorablemente conectados con él. Por otro lado, la educación imaginativa favorece el uso de herramientas de aprendizaje que aprovechan la imaginación de los estudiantes. Mediante el uso de herramientas cognitivas como las rimas, ritmos y patrones, el sentido de misterio, las metáforas, la creación de espacios o historias, los estudiantes pueden pensar en lo posible, no solo en lo real (Egan, 2005).

Las caminatas matemáticas recogen la propuesta de la educación ecológica en tanto se implementan en un espacio natural y promueven la conexión con este espacio. Judson (2015) señala que "Desde una perspectiva ecológica, la 'carencia de vínculo con el lugar' (*placelessness*) en la planificación curricular es perjudicial para el aprendizaje" (p. 19). Para implementar las caminatas matemáticas, el lugar cobra vital importancia. No solo es un espacio físico, sino que es un espacio con el que interactuamos emocional e imaginativamente. Las caminatas matemáticas recogen la propuesta de la educación imaginativa al promover el uso de herramientas cognitivas para aprender matemáticas. Por ejemplo, durante las caminatas se puede compartir con los estudiantes una historia de cómo la disposición de las hojas en algunas plantas modela una secuencia. Así, la herramienta cognitiva de creación de historias les permite a los estudiantes desarrollar su imaginación y explorar nociones matemáticas.

Metodología

En el marco de la investigación cualitativa y considerando la autoetnografía como pedagogía (Banks & Banks, 2000), el propósito de este estudio es explorar la estrategia de 'Caminatas Matemáticas' como una oportunidad para promover conexiones entre las matemáticas, la naturaleza y la imaginación, a través de la reflexión sobre nuestras vivencias implementando esta estrategia. Pasar de asociar las matemáticas solo con símbolos a asociarlas con historias, lugares, comunidad, vida, es parte de este viaje que quisiéramos compartir en este estudio. Evocar nuestra propia sensación de asombro cuando pensamos en nuestro entorno y en matemáticas nos ha ayudado a diseñar y seleccionar experiencias de aprendizaje para los estudiantes que van más allá de repetir algoritmos o memorizar fórmulas.

Análisis y Discusión

Sintonía con el lugar

Nuestra experiencia realizando caminatas matemáticas ha ido cambiando a lo largo del tiempo. En un inicio, nuestra principal intención era encontrar huellas matemáticas en la naturaleza. Sin embargo, esa intención iría modificándose a medida que el lugar nos ofrecía nuevas historias y provocaciones. Observar las hojas de una planta, reconocer qué planta es, observar la forma en cómo se disponen las hojas en una rama, y encontrar las historias matemáticas en ellas, se convirtió en una experiencia que desarrolló un compromiso sensorial. Una experiencia que trascendió el hecho de acercarnos a una planta y comenzar a medir sus ángulos o contar sus espirales. Nuestro contacto con estas plantas comenzó con el reconocimiento de que son seres que albergan mucha sabiduría y nos enseñan con el ejemplo. Son seres que han vivido por muchísimos años y que han tenido tiempo para resolver problemas (Kimmerer, 2013). Este reconocimiento permitió que nuestra relación con el lugar sea gentil y respetuosa, sintonizándonos con este para poder escucharlo, y de esta forma, diseñar caminatas matemáticas que inviten a los estudiantes a re-imaginar su conexión con la naturaleza.

Prosperando en las intersecciones

De nuestras caminatas, muchas preguntas han surgido como: ¿Por qué algunos árboles pierden sus hojas durante el otoño y otros no? ¿Por qué no todas las hojas tienen la misma forma? ¿De qué formas se disponen las hojas de distintas plantas? ¿Cuánta agua necesitan los árboles para sobrevivir? ¿Cuántos años han vivido estos árboles? ¿Cuántos árboles de cada tipo hay en el parque? ¿Qué tan profundo crecen las raíces de los árboles? Estas preguntas abordan diversas ideas matemáticas como número, medida, forma, y patrones, que se conectan entre ellas y con el lugar en el que se realiza la caminata. Al explorar un lugar con detalle, podemos ver más allá de lo superficial, podemos buscar la interconexión inadvertida, y asombrarnos de lo que ya dábamos por sentado. Así, nada es percibido como lineal, sino como un sistema de incontables redes. Las clases de matemáticas que se centran en los procedimientos rutinarios priorizan el aislamiento de ideas, enseñando temas tras temas sin ninguna relación entre ellos. La estrategia de caminatas matemáticas busca cuestionar esta práctica promoviendo espacios en los que los estudiantes vean las conexiones. “Si las matemáticas no se tratan de relaciones, ¿de qué se trata?” (Jardine, 2017, p. x). Hacer caminatas nos ha llevado a preguntarnos: ¿qué imágenes construyen los estudiantes cuando aprenden conceptos aislados? ¿Qué imágenes construirían si realizan caminatas matemáticas que los lleva a permanecer en sintonía con el lugar?

Registro de la experiencia

Al hacer caminatas matemáticas, el registro de observaciones es un elemento clave. A continuación, presentamos un extracto de nuestros registros que intentan responder a las preguntas que el lugar nos invitaba a hacer.

Figura 1. Registro de una caminata matemática

Ahora me encuentro con un árbol de arce. Su tallo es delgado, y tiene algunas grietas. Sus hojas tienen extremos puntiagudos. El color de sus hojas es verde y rojo. En algunas hojas, más de la mitad es de color rojo y el resto es verde. Otras son completamente rojas. Algunas miden 10 cm de largo, otras solo 4 cm. Muchas hojas caen cerca de mis pies. Me siento acogida bajo sus ramas. Las hojas en el suelo me invitan a crear patrones de repetición”. (Diario de caminatas, octubre 2022).

Las caminatas nos han permitido entender las matemáticas en estrecha relación con el lugar, y nos han motivado a construir un aula al aire libre que invite a los estudiantes a re-imaginar su relación con la naturaleza y las matemáticas. Como un primer resultado de nuestra experiencia, hemos construido una primera propuesta de cómo implementar una caminata matemática con estudiantes de primaria, que se detalla a continuación.

Creando una caminata matemática

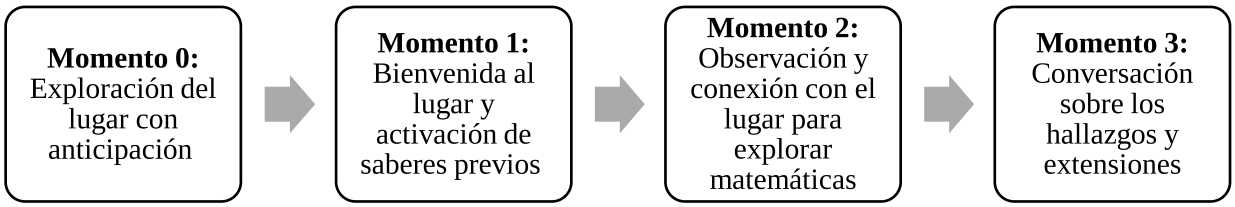


Figura 2. Estructura de una caminata matemática

- **Momento 0: Exploración del lugar con anticipación**

Antes de diseñar una caminata matemática es necesario que los docentes visiten el lugar en el que piensan implementar la caminata para generar conexión con este y observar sus distintas provocaciones. Algunas preguntas que guían este momento pueden ser: ¿Qué lugar quiero explorar? ¿Por qué he elegido este lugar? ¿Qué historias viven en este lugar? ¿Qué matemáticas viven en este lugar?

Figura 2. Registro de un helecho en una caminata matemática

Este momento nos permite identificar en qué sitios se plantearán las invitaciones y, así, definir la ruta de la caminata. Cuando decimos invitaciones, nos referimos a las actividades que realizarán los estudiantes. Por ejemplo, al caminar por un parque nos encontramos con un helecho (figura 2). Esta planta nos invita a hacer preguntas como: ¿Qué observan? ¿Qué se preguntan? ¿Cómo están dispuestas las hojas? ¿Qué matemáticas viven en esta planta? ¿Cuántas hojas aproximadamente tendrá este helecho? ¿Observan algún patrón? ¿Cuál? Las distintas invitaciones que se incluyen en la caminata matemática se crean a partir de la exploración realizada en este momento.

- **Momento 1: Bienvenida al lugar y activación de saberes previos**

Una vez que los estudiantes están en el lugar en el que realizarán la caminata matemática, se comienza agradeciendo al lugar en el que están porque les permite aprender de él. Como una forma de favorecer la conexión con el lugar, se pueden compartir los antecedentes o historias del lugar. A continuación, los docentes activan los saberes previos de los estudiantes sobre las nociones matemáticas que se abordarán en la caminata. Esta activación puede ser a través de preguntas, exploración de libros, observación de imágenes, etc.

- **Momento 2: Observación y conexión con el lugar para explorar matemáticas**

En este momento, los estudiantes explorarán el lugar a partir de las invitaciones creadas por el docente para identificar huellas matemáticas. Se les puede entregar una guía que les permitirá tener claridad de cuál es el curso de la caminata. A continuación, presentamos algunos ejemplos de invitaciones que forman parte de una guía que buscaba explorar cantidad y patrones.

<u>Invitación:</u> Observa a tu alrededor y encuentra elementos de la naturaleza (hojas, semillas, flores, ramas, piedras, etc.) que vienen en grupos de 1, de 5, de 10. Registra lo encontrado con un dibujo.

<u>Invitación:</u> ¿Puedes hacer un patrón AB con materiales elementos de la naturaleza (hojas, semillas, flores, ramas, piedras, etc.)? ¿Puedes hacer un patrón ABC? ¿Puedes hacer un patrón AAB? ¿Puedes hacer un patrón ABB? Registra lo encontrado con un dibujo.

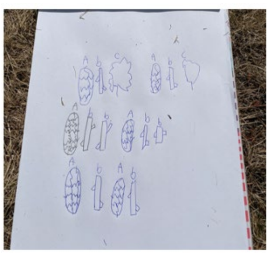


Figura 3. Patrones de repetición

Un aspecto importante de este momento es el registro de los encuentros durante la caminata. Como se muestra en la figura 3, hemos registrado patrones de repetición creados con materiales de la naturaleza, haciendo uso de dibujos. Se puede usar dibujos, se puede tomar fotos, se puede recopilar los materiales encontrados, o se puede usar palabras que describan lo encontrado. La forma de registrar es importante porque al haber observado con detalle, los estudiantes sienten la necesidad de usar un vocabulario sofisticado y sensorial, que les permitirá narrar historias de lo que observaron. El propósito del registro es re-vivenciar lo realizado en la caminata y narrar esa experiencia en el último momento de la caminata.

- **Momento 3: Conversación sobre los hallazgos y extensiones**

Luego de haber explorado el lugar y registrado los distintos encuentros, los estudiantes tienen la oportunidad de compartir su experiencia y comparar sus hallazgos. Se busca generar una discusión sobre la forma en que se relacionaron con el lugar, así como visibilizar las conexiones entre las ideas matemáticas. Al momento de compartir, los estudiantes usarán palabras sobre el lugar y compartirán su experiencia de inmersión en él, y así evocarán vívidas imágenes mentales. Sus palabras podrán resonar con significado mucho tiempo después de que la caminata haya terminado. (Judson, 2014).

Figura 4.

Además, se proponen extensiones de las actividades realizadas, para continuarlas en la clase. Por ejemplo, si la caminata tuvo como propósito explorar patrones en las semillas de pino, los estudiantes pueden llevarlas a la clase para seguir analizando la cantidad de espirales que tiene las semillas y cómo se relacionan con la secuencia de Fibonacci (figura 4). Finalmente, se concluye la caminata, del mismo modo como se inició, agradeciendo al lugar porque les permitió aprender de él.

Conclusiones

Las caminatas matemáticas nos han permitido deconstruir el concepto de escuela como un lugar cerrado e inactivo para avanzar hacia una comprensión más amplia en la que los espacios abiertos se convierten en maestros y nos permiten generar conexiones entre las ideas matemáticas. La oportunidad de vivenciar las caminatas matemáticas como investigadores nos ha llevado a explorar los contextos y re-imaginar nuestra propia conexión con las matemáticas y la naturaleza, para luego promover dicha conexión en los estudiantes. La propuesta de cómo estructurar una caminata matemática puede funcionar como un primer recurso para implementar esta estrategia.

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2019). Las matemáticas imprescindibles para la vida. *Ruta Maestra*, (26), 2-7. https://rutamaestra.santillana.com.co/

Banks, S. P., & Banks, A. (2000). Reading "the critical life": Autoethnography as pedagogy. *Communication Education*, 49(3), 233-238. https://doi.org/10.1080/03634520009379212

Dávila, K., & Garay, S. (2021). Caminatas Matemáticas. *Educaccion*, *74*. https://www.educaccionperu.org/caminatas-matematicas/

Egan, K. (2005). *An imaginative approach to teaching* (1st ed.). Jossey-Bass.

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task.* Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Jardine, D. W. (2017). *Back to the basics of teaching and learning: Thinking the world together.* Taylor and Francis. https://doi.org/10.4324/9781315096681

Judson, G. (2014). The role of mental imagery in imaginative and ecological teaching. *Canadian Journal of Education*, *37*(4), 1-17.

Judson, G. (2015). *Engaging imagination in ecological education: Practical strategies for teaching.* Pacific Educational Press.

Judson, G. (2018). *A walking curriculum: Walking, wonder, & sense of place (K-12).*

Kimmerer, R. W. (2013). *Braiding sweetgrass: Indigenous wisdom, scientific knowledge and the teachings of plants* (First ed.). Milkweed Editions.

Cómics y proyectos STEAM para motivar a jóvenes en entornos vulnerables

Claudia María **Lara** Galo
Fundación DECA Desarrollo Educación Calidad
Guatemala
Claudoiamaria.Laragalo@gmail.com

Resumen

En Guatemala, la mayoría de jóvenes no asiste a la escuela secundaria debido a la poca cobertura, la baja calidad y a necesidad de los jóvenes de obtener ingresos. Los programas de educación flexible autorizados intentan, apoyados por organizaciones nacionales e internacionales, atraer y, sobre todo, retener a estudiantes con la esperanza de que adquieran competencias básicas para la vida, se gradúen y puedan acceder a mejores trabajos o emprender para tener mejores ingresos. La mayoría de programas replica metodologías obsoletas enfocadas en cubrir contenidos alejados del contexto de los estudiantes. En 2021 en Jalapa, surge un programa de Educación flexible usando cómics con personajes atractivos y con proyectos *STEAM*[1] proponiendo actividades novedosas que ayuden a los estudiantes a lograr sus metas personales de estudio, trabajo y acreditación. Con alto nivel de éxito compartimos en el taller algunos elementos para replicar o adaptar los cómics en diferentes regiones y grupos.

Palabras clave: Educación flexible extraescolar; Proyectos integrados; Competencias matemáticas básicas; Cómics, Enfoque STEAM

Introducción

La realidad guatemalteca, similar a la de muchas culturas y países latinoamericanos, presenta desafíos para toda la comunidad educativa: el ministerio de educación y los funcionarios, las instituciones educativas, los educadores (padres, madres y docentes), los

[1] STEAM es un acrónimo para Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics.

proveedores de material didáctico –sean libros, plataformas digitales, objetos o juguetes- y, claro, las niñas, niños y jóvenes de Guatemala. Guatemala es una nación en permanente construcción.

Para los jóvenes, en particular, los desafíos son aún mayores. La mayoría (74.49%) no está inscrita en la escuela secundaria por lo que son vulnerables y presa fácil de maras o grupos delictivos. Muchos realizan labores para obtener ingresos, pero como tienen menos de 7 años de escolaridad, consiguen trabajos mal remunerados y muy duros. Sin habilidades de estudio, se enfrentan a no poder desarrollarse de forma autónoma. Su nivel de lectura es muy bajo. Hay muchas madres solas y los jóvenes padres abandonan a sus hijos en manos de ellas. La oferta, tanto de instituciones públicas como de instituciones privadas con secundaria, es pobre. Pobre en cantidad y pobre en calidad. La mayoría es urbana, en español, con docentes sin especialización, anticuada y descontextualizada, con pocos materiales y recursos en general y, menos, en tecnología o acceso a internet. Sus horarios son rígidos y enfocados a que se cubran contenidos que los jóvenes no ven como útiles para su realidad cotidiana.

En el departamento de Jalapa, uno de los 22 departamentos de Guatemala, Plan International, organización que apoya el desarrollo integral y la educación, estableció una alianza con Fundación Desarrollo, Educación y Calidad –DECA-, para diseñar e implementar el Programa de Educación Flexible para jóvenes de Jalapa, que inicia en 2021 atendiendo a 1000 jóvenes que no han terminado la secundaria por los motivos ya señalados.

Marco teórico y propuesta metodológica

Para responder a las necesidades particulares de los jóvenes de Jalapa, se buscan ideas que logren, ante todo, que los estudiantes lleguen, se inscriban y se queden; esperando que la deserción sea mínima. Segundo, se desea que la propuesta metodológica ayude en el desarrollo de las competencias enfocadas a mejorar lectura, expresión oral y escrita, comunicación y a manejar operaciones básicas con orientación en finanzas y resolución de problemas. Por otro lado, un propósito importante es que los jóvenes desarrollen una autoestima saludable, reconozcan sus habilidades y se pongan metas. También, que deseen y puedan construir comunidad, y que trabajen en equipo. Por supuesto, los contenidos esenciales de salud, ciudadanía y manejo de la tecnología para la comunicación y la información, son cruciales, y forman también parte del programa.

Al crear el programa, se tomaron de referencia diferentes experiencias educativas, investigaciones y propuestas actuales, así como otras que mantienen validez. Aplicando los resultados de Ken Bain en sus estudios de los mejores docentes y estudiantes universitarios, que sugieren técnicas y la creación de un ambiente favorable al aprendizaje; tomando como referencia las propuestas de neurocientíficos como Héctor Ruiz Martin y Francisco Mora, quienes orientan al tipo de tareas que deben realizar los estudiantes para aprender y retener lo aprendido; integrando elementos de los enfoques de aprendizaje con proyectos integradores; generando cómics para motivar intrínsecamente y buscar el desarrollo de equipos cooperativos que también sean un factor de asistencia y permanencia; y atendiendo a las propuestas del ministerio de educación, se desarrolla una metodología que incluye:

1. Trabajar con cómics para atraer y mantener el interés. En cada cómic (son 16 en total), se presenta un personaje (8 mujeres y 8 hombres, 8 guatemaltecos y 8 internacionales) que destaca en diferentes áreas que puedan llamar la atención, ya sea por el trabajo que hacen o hicieron, por el esfuerzo que les ha costado o porque su personalidad es llamativa. La idea es buscar ejemplo con los que los estudiantes se puedan identificar y admirar. Al cubrir varias profesiones, edades, nacionalidad y género, hay posibilidad de valorar la diversidad de personalidades y el esfuerzo personal. Cardona (2021) comparte la visión de que lograr una meta implica planeación, preparación y disciplina, siendo ese el mensaje que se espera que los jóvenes interioricen. El cómic se diseña específicamente para este programa educativo.

2. Para cada cómic, desarrollar proyectos integradores con enfoque STEAM en cuanto a que relacionan las ciencias, las expresiones artísticas, aplican la tecnología, la resolución de problemas y la multidisciplinariedad, diferentes, con un contenido general relacionado al personaje y con diferentes productos para construir en equipos cooperativos y con interacción directa entre compañeros. La decisión de aplicar el aprendizaje cooperativo la establecen Johnson, Johnson y Holubec (1999) en su propuesta “El aprendizaje cooperativo en el aula” en donde, en la página 5 señalan muy claramente: “la cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes” y eso es algo que se debe enseñar intencionalmente. Mazur (1997), por su lado, ha concluido que la educación entre pares es eficiente y motiva.

Tabla 1
Ejemplos de elementos en un cómic.

Personaje	**Nacionalidad**	**Proyecto**	**Materias del Currículo**
Marie André Destarac Ingeniera en robótica	Guatemalteca	Hacer un robot para resolver un problema de la comunidad	Matemáticas Física Salud Tecnología
Marcos Antil Emprendedor en tecnología	Guatemalteco	Hacer una modelo de empresa	Productividad Matemáticas Inglés Tecnología
Sara Curruchich Música y activista	Guatemalteca	Organizar un concierto	Artes Estudios sociales
Malala Yousafzai Autora Filósofa Activista	Pakistaní	Escribir cartas a jóvenes invitándolas a estudiar	Literatura Estudios sociales Filosofía
Jane Goodall Bióloga Activista	Británica	Hacer una maqueta de un zoo clasificando animales	Ciencias naturales Ecología Biología

Fuente: Elaboración propia. 2022.

Los proyectos integradores y los productos que los estudiantes realizan forman parte de técnicas de metodologías activas y buscan que los jóvenes tengan oportunidades según sus estilos de aprendizaje, sugeridos por Kolb (2002), o sus gustos y habilidades. Se comparten, además, videos, podcast, infografías, cuentos, se construyeron mini bibliotecas, murales. Todos productos innovadores.

3. Reconociendo el valor del educador, se contratan tutores con el grado académico de licenciatura en educación y con profesorado de enseñanza media en alguna especialidad, para llenar los requisitos de ley, y que cumplan con ser comprometidos, dispuestos a hace actividades diferentes, a ser flexibles con las condiciones de asistencia y el estilo de calificación y evaluación, ya que esas son algunas de las cualidades que, según Bain, K. (2011), evidencian los mejores profesores.

4. Entre los productos a construir, los estudiantes deben generar un glosario personal ejemplificado e ilustrado. Reiteran palabras, términos y conceptos de las materias que el ministerio de educación considera necesario aprender en este nivel de estudios. Ruiz Martín (2020) en su libro dedicado a jóvenes “Conoce tu cerebro para Aprender a aprender”, repasa ideas fundamentales para ayudar en el aprendizaje basándose en neurociencia. Explica el valor de recuperar ideas, representarlas reflexionar sobre ellas y registrarlas de diferentes formas. El glosario es esa elaboración personal manuscrita para recuerdo y registro.

5. Por otro lado, se usan tabletas como dispositivo para acceder a internet y a otros recursos valiosos como videos con contenido, archivos de *office*, presentaciones *power point* e incluso textos que se han generado específicamente para este proyecto. En la tableta se descargan todos los archivos de la página https://fundaciondeca.org/educacionflexible/ que se diseña para ellos. Están sus cómics, material de lectura, videos relacionados con los personajes y los temas, mapas y mucho más.

6. Estructura flexible de una sesión presencial enfocada en desarrollo de competencias y en la expresión de los estudiantes profundizando en contenidos esenciales.

Atendiendo a las propuestas del propio CNB de Guatemala y de autores como Manuel de Guzmán y las escritoras de Labrador (2008) y Lobo (2012) en sus respectivas tesis de grado, en el caso del área de matemática, se favorece el uso de *algeblocks*®, tangramas y otros materiales manipulativos, así como juegos que los estudiantes han utilizado en muy pocas o ninguna ocasión y que llaman su atención por su uso divertido y porque, efectivamente, aprenden conceptos, relaciones, hipótesis y teorías científicas.

Resultados cuantitativos

El proyecto inicia en enero de 2021 con la meta de inscribir a 1000 estudiantes. De los 40 grupos deseados, se forman 39 y sí se logra el porcentaje de mujeres inscritas.

En octubre de 2022 tenemos estos resultados:

Tabla 2
Evaluados y aprobados.

Nivel	**Evaluados**		**Evaluados**	**Aprobados**		**Aprobados**
Básicos	Mujeres	Hombres	Total	Mujeres	Hombres	Total
	342	184	526	304	162	466
Diversificado	229	138	367	202	117	319
TOTAL	571	322	893	506	279	785

Fuente: Informe final elaborado por Dinno Zaghi, gerente de Fundación DECA. Inédito. 2022.

De los 1000 inscritos, 893 permanecen en el programa y son evaluados. Considerando las tasas de deserción en programas similares, haber mantenido al 89.3% de estudiantes es un gran logro. De estos estudiantes, algunos reprueban, por lo que 785 son los que logran terminar con éxito sus dos primeras etapas correspondientes a un nivel de secundaria (básico o diversificado).

Tanto para los estudiantes de nivel básico como para los que terminan diversificado y obtienen su diploma de bachilleres, se organizan actos de clausura con un alto nivel de emotividad y en el que participan las familias, la comunidad y las autoridades educativas correspondientes. Son estudiantes que creyeron que no lograrían terminar sus estudios.

De los 466 egresados de básico, algunos tienen la oportunidad de cursar, en una extensión del proyecto, el diversificado. 83 jóvenes se integran porque cumplen el requisito de la edad y desean obtener el bachillerato. Otros no pueden hacerlo por la edad, porque se mudaron o porque ya cumplieron su meta al obtener el diploma de básicos.

Resultados cualitativos

En formatos de evaluación que se registran regularmente y en los informes que envían los tutores, así como en las actividades organizadas para que los estudiantes expongan ideas y compartan resultados con los patrocinadores (Plan International) o en la comunidad, encuentran manifestaciones de alegría y agradecimiento por la oportunidad de estudio, se hace referencia a la buena relación con sus tutores, a paradigmas rotos a todo nivel (“yo creía que no podía”) y el reconocimiento de personajes guatemaltecos, sus vidas y esfuerzos. Aprecian el tipo de actividades variadas en las que “no se aburren” y el ambiente de apoyo real a sus necesidades. Muchas madres asisten con sus hijas e hijos por no tener con quién dejarlos -eso no sucede en otros programas- y la flexibilidad de entrega de trabajos o de ajuste por situaciones laborales, entre otras.

Conclusiones

1. En un contexto vulnerable, se logró una coordinación efectiva con autoridades locales de educación para cumplir, además de los requisitos que el ministerio de educación exige, con los procedimientos de registro de los estudiantes en el sistema de control educativo Sistema de información y registro de educación extra escolar SIREEX, lo que asegura la certificación oficial al final del proceso. El 78.5 % de los estudiantes obtendrá su

certificado en esta cohorte. Las metas propuestas por Plan International se cumplieron en cuanto a cobertura.

2. El programa se ha adaptado para atender las necesidades detectadas, fortalecer aspectos identificados como deficientes en la formación de los estudiantes, y para mantener la motivación y la participación activa en las sesiones presenciales. Por ejemplo, ha sido recurrente ver en los registros fotográficos a las jóvenes madres con sus hijas e hijos llegando a estudiar. El papel de los tutores, realmente flexibles, atentos, humanos, con deseo de superación y eficientes, ha sido imprescindible para lograr que los estudiantes se identificaran con el programa y permanecieran en él.

3. El material de apoyo, los cómics, los personajes y los productos se han trabajado a detalle en la integración de contenidos programáticos y en proyectos que permiten desarrollar las competencias, destrezas y habilidades esperadas en las y los jóvenes. Asimismo, se buscan un diseño y un estilo que logren motivar a los jóvenes para entender el enfoque práctico de las actividades y los contenidos en su contexto.

4. Consideramos el Programa de Educación Flexible semipresencial basado en cómics de personajes destacados y asociado a proyectos integradores, una propuesta viable y que se puede replicar en similares condiciones.

Referencias y bibliografía

Bain, K. (2014). Lo que hacen los mejores estudiantes universitarios. Universidad de Valencia.

Cardona, A. (2021). Sin límites. Lecciones para el nuevo líder. Guatemala: Atelier Be Good.

De León, A. (2013). Metodología activa en el proceso de enseñanza aprendizaje y la fundamentación de los estilos de aprendizaje. Tesis doctoral. Universidad de San Carlos de Guatemala. https://bit.ly/2IREQke.

Guzmán, M. de (1991). Para pensar mejor. Barcelona: Labor.

Johnson, D. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires: Paidós.

Labrador, J. (2008). Metodologías activas. Universidad Politécnica de Valencia.

Lara Galo, C.M. (2019). Los 4 lenguajes de las matemáticas. Guatemala: Fundación DECA.

Lobo, M. (2012). Los materiales didácticos manipulativos en la enseñanza aprendizaje de la geometría. Actividades para realizar con el alumnado del segundo ciclo de E. Primaria. Tesis de grado. Escuela universitaria de educación de Valladolid.

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: A User's Manual Series in Educational Innovation. USA: Prentice Hall.

Ministerio de Educación. (2011). Currículum Nacional Base. Dirección General del Diario de Centroamérica y Tipografía Nacional, Guatemala.

Mora, F. (2013). Neuroeducación. Solo se puede aprender aquello que se ama. Madrid: Alianza editorial.

NCTM. (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. USA.

Ruiz Martin, H. (2021). Conoce tu cerebro para Aprender a aprender. Barcelona. Graó.

Como assim? A história do café como proposta interdisciplinar para ensinar e aprender sobre gráficos estatísticos

Anderson Marcolino de **Santana**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
anderson.marcolino@ufpe.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo evidenciar a viabilidade de estudantes aprenderem Estatística a partir de uma investigação científica sobre a história do café. Para a aprendizagem de conceitos estatísticos em uma perspectiva do Letramento Estatístico foi proposta uma sequência didática investigativa que explorasse as peculiaridades dessa bebida tão amada no Brasil e no Mundo. Os resultados atingidos são incalculáveis, pois os estudantes puderam observar na prática a presença da Estatística no seu dia a dia e conseguiram desenvolver uma visão crítica sobre o tema, além de desenvolver a argumentação sobre interpretações e as análises de gráficos.

Palavras-chave: Estatística; Educação Estatística; Letramento Estatístico; Gráficos; Interdisciplinaridade.

A Estatística está presente no cotidiano. Os conceitos e procedimentos estatísticos são fundamentais para compreender o mundo e, consequentemente, poder atuar melhor nele. A Estatística não se restringe ao uso de fórmulas e à realização de cálculos matemáticos, ela requer que o indivíduo se de dados que envolvam a incerteza e a variabilidade para compreender melhor o mundo.

Com o desenvolvimento dos computadores e softwares passou a ser possível para um maoir número de pessoas lidarem com uma grande quantidade de informações. A mídia, rapidamente, passou a utilizar desse tipo de sistematização de informações. A escola precisa urgentemente preparar os alunos para analisar e produzir informações sistematizadas em gráficos. Muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas (Lopes e Souza, 2016; Guimarães e Melo, 2008; Pegan *et al.*, 2008; Cavalcanti e Guimarães, 2008 entre outros) no intuito de elucidar o que estudantes de diferentes idade sabem ou podem aprender quando levados à aprendizagem escolar. Assim, considero fundamental que os estudantes tornem-se cidadãos críticos reflexivos, que compreendem essa forma de representação utilizada em nossa realidade social.

Nesse sentido, em 2002, Iddo Gal propôs um modelo teórico em dois componentes que viabilizam a promoção do Letramento Estatístico, a saber: os elementos de conhecimento e os elementos de disposição. Os elementos do conhecimento são formados pelo conhecimento estatísticos, conhecimento matemático, habilidade de letramento, conhecimento de contexto e questionamentos críticos. Os elementos de disposição são formados pela postura crítica; crenças e atitudes. O letramento estatístico, de acordo com Gal (2002), corresponde à motivação e à capacidade de acessar, entender, interpretar, avaliar criticamente e, se relevante, expressar opiniões, sobre informações estatísticas, argumentos relacionados a dados ou questões envolvendo incerteza e risco. O autor alerta que não basta desenvolver apenas a dimensão cognitiva, mas também é necessário desenvolver a dimensão atitudinal.

O uso da representação tabular e gráfica vem sendo, cada vez mais, valorizado e requisitado na sociedade. Diversas informações são veiculadas por meio de gráficos, como dados econômicos, pesquisas políticas, contas de energia, entre outros, tornando necessário para o indivíduo entender e atuar de forma cidadã na compreensão de alguns conceitos iniciais de Estatística. Sistematizar informações em gráficos e/ou tabelas contribui de forma importante para a compreensão das informações, possibilitando conclusões e tomadas de decisão em função das mesmas.

Porém, para a compreensão dessas representações é fundamental considerar todos os conhecimentos apontados por Gal (2002). As crenças, muitas vezes, são tão fortes que acabam por levar a conclusões equivocadas sobre um fenômeno. Assim, é preciso levar os estudantes dos diferentes anos de escolaridade a compreender a importância de olhar os dados sistematizados para estabelecer conclusões e não basearem-se apenas em suas experiências de vida.

Dados ou as informações estatísticas sempre se referem a uma situação do cotidiano. Nesse sentido, a estatística é por natureza uma ciência interdisciplinar.

A interdisciplinaridade permite que conteúdos do contexto dos estudantes podem e devem ser estudados, tornando a aprendizagem mais significativa para os estudantes. Ao trabalhar com essa perspectiva, o professor assume uma postura que quebra as barreiras da própria disciplina e amplia a visão para o conhecimento do mundo, o qual não se apresenta dividido em disciplinas.

Método

Considerando as relações entre a Base Nacional Comum Curricular e o Currículo de Matemática da Cidade do Paulista – PE, optou-se pela escolha de um tema de interesse dos estudantes e a possibilidade de uma investigação científica. A escolha do tema deu-se a partir da seguinte pergunta: “*Considerando a ceia matinal, qual é a sua bebida preferida*?” O café foi a bebida mais citada. Assim, passamos a propor uma prática pedagógica para vivenciar a história do café e aprender sobre os gráficos estatísticos numa perspectiva de ensino interdisciplinar.

Neste contexto, o objetivo geral foi evidenciar a viabilidade de estudantes aprenderem estatística a partir de uma investigação científica sobre a história do café e aprender sobre os tipos de gráficos estatísticos. Para tal, era fundamental interpretar e construir gráficos de acordo com os dados pesquisados. Tínhamos também como objetivo desenvolver a capacidade deles expressar visual e oralmente resultados de uma pesquisa, utilizando o *software Excel* para construir gráficos.

A sequência de ensino

A proposta da sequência didática foi desenvolvida numa turma do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Paulista, Pernambuco – Brasil. A turma é composta por 18 estudantes adolescentes residentes no mesmo bairro.

A BNCC (2017) traz à importância do ensino de estatística de forma articulada com a realidade respeitando às atividades culturais, aspectos econômicos, sociais e a realidade do estudante. De mesmo modo, enfatiza a valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes. Buscando atender esses princípios, desenvolveu-se esse trabalho.

De acordo com Brum (2015), a sequência de ensino é um processo caracterizado pelo desenvolvimento e transformação progressiva das capacidades intelectuais dos alunos, com convergência ao domínio do conhecimento, habilidades e sua aplicação. Neste sentido, a sequência de ensino possui uma orientação com vistas a atingir os objetivos previamente definidos, implicando em passos gradativos, como tarefas, planejamento, direção das atividades e avaliação.

O desenvolvimento da sequência aconteceu durante 11 aulas de 50 minutos. Na primeira aula iniciamos uma reflexão dialogada diferenciando variável qualitativa e quantitativa, e, em seguida, a frequência absoluta e relativa. E então foram construídos uma tabela e um gráfico de barras a partir das respostas dos estudantes. Como atividade para casa, foi proposto que os estudantes deveriam realizar uma pesquisa sobre diferentes aspectos sobre o tema: aspectos Históricos (primeiros fatos que envolviam a história do café), Geográficos (localização, disseminação e expansão das mudas de café), Biológico (tipos de grãos), Químico (a cafeína), Matemático e Estatístico (momento em que estudantes pesquisariam sobre tipos de gráficos).

Na segunda e terceira aula, o professor levou imagens relacionadas ao mundo do café. Buscando problematizar a situação, levou dois pacotes de café sendo um tradicional e um especial, para que os estudantes sentissem o aroma e percebessem a diferença entre os dois tipos. Em seguida questionou se os estudantes conheciam e acreditavam se eram simples os processos de industrialização, desde a plantação até chegar a nossa mesa. Como esperado, os estudantes responderam: Não!

Os estudantes passaram a apresentar as pesquisas que haviam realizado:

No contexto Biológico: Os dois tipos mais conhecidos de semente são a Arábica e a Robusta. No contexto Químico: O café de semente Arábica tem 1,4% de cafeína e o café de semente Robusta tem 2,5% de cafeína A cafeína tem a função estimulante no aumento do estado *de vigília e sensação de alerta, proporcionando sensação de bem-estar e diminuição da fadiga, mas muita cafeína pode viciar*.

Para explorar o contexto Geográfico, o professor pergunta: onde surgiu o café? Com um mapa impresso, um estudante responde: *As primeiras mudas de café foram encontradas na Etiópia – África, sendo levada para a Arábia, onde se adaptou muito bem e depois foi para Europa e ganhou o mundo.*

No contexto Histórico, uma estudante levantou e contou o que tinha em sua pesquisa: *"De acordo com a Lenda de Kaldi, registrada em manuscritos do Iêmen no ano de 575 d.C, o pastor Kaldi observou que suas cabras ficavam alegres e cheias de energia depois que mastigavam os frutos de coloração amarelo-avermelhada dos arbustos abundantes dos campos. Os árabes dominaram rapidamente a técnica de plantio e preparação do café. As plantas foram denominadas Kaweh e sua bebida recebeu o nome de Kahwah ou Cahue, que significa "força" em árabe. A expansão do café no Brasil deu-se em 1727 que o oficial português Francisco de Mello Palheta, vindo da Guiana Francesa, trouxe as primeiras mudas da rubiácea para o Brasil. A características das fazendas de café que se aglomeravam entre São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro. A crise de 29, em que na época o Brasil era um grande exportador para Europa e para EUA. Isto é, teve que queimar sacas e mais sacas de café para não vender mais barato. A importância da economia cafeeira e da industrialização do Brasil. Finalizando com o mundo do café atual, em que o Brasil é um dos maiores consumidores e produtores de café no mundo.*

O professor aproveitou e perguntou: Onde você encontrou essas informações? A estudante responde: *eu pesquisei no site da ABIC – Associação Brasileira da Indústria do Café. E completou: Nesse site tem tudo sobre o café (https://www.abic.com.br/tudo-de-cafe/origem-do-cafe/), eu fiz um resumo*. Discutir com os estudantes sobre confiabilidade nas fontes de pesquisa é fundamental.

No contexto do mundo do Trabalho: *Um estudante disse que os Baristas são pessoas que estudam métodos e técnicas de extração de café da melhor maneira e que tem cursos para formar esses profissionais.*

No contexto da Matemática e Estatística: *alguns estudantes levaram tipos de gráficos relacionados ao Café – Gráficos de Setores, Pictográficos e gráficos de Colunas e de Barras impressos. E um estudante aproveitou caixas de café de máquinas, que usam cápsulas que o professor levou, para fazer um gráfico de coluna 3D com os maiores produtores de café no Brasil (MG (52%), ES (21%), SP (10%), BA (5%), PR (5%), RO (5%) e Outros (2%)), colando no quadro, em que o eixo horizontal indica os estados, e no eixo vertical indicam as porcentagens de produção de café.*

Figura 1. Quadro com as imagens relacionadas à história do café e outros contextos.

Na quarta e quinta aula, o professor levou uma atividade com problemas de análise e interpretação de gráficos de linha, barra, coluna, setores, pictográficos. Os estudantes discutiram as questões, pois o objetivo era levá-los a refletir sobre o assunto de gráficos. Entretanto, simultaneamente, os estudantes puderam perceber as características de cada gráfico.

Na sexta e sétima aula, os estudantes construíram gráficos com uso de alguns materiais recicláveis, como cápsulas da máquina de café expresso. Uma das técnicas foi à divisão em equipes com quatro estudantes. Cada equipe ficou responsável por fazer um gráfico baseado nas pesquisas que haviam realizado sobre o café. A mediação foi feita ao longo da aula para minimizar as dúvidas e resultar num grande momento de aprendizagem significativa e interdisciplinar. Aproveitou-se o momento para reiterar a importância da reciclagem de materiais. O professor foi de grupo em grupo fazendo observações e questionamentos.

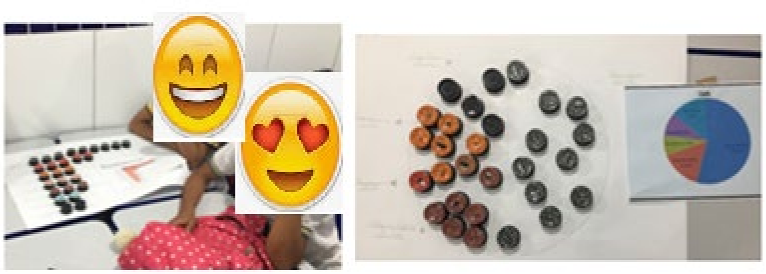


Figura 2. Gráficos construídos com material reciclado.

A oitava e nona aula foram realizadas no laboratório de informática. Iniciamos com algumas explicações sobre o uso da planilha do *Microsoft Excel* e a construção de gráficos para trabalhar com os recursos digitais.

Segundo Pontes (2020), o uso do Software Excel no ensino de Estatística ajuda na construção de diferentes formas de representação como gráficos, planilhas, banco de dados e tabelas, e desta maneira, os estudantes interagem com outros recursos.

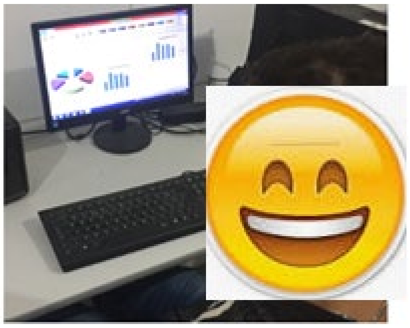


Figura 3. Estudante usando o *Excel* para construir diferentes gráficos

Então, foi solicitado aos estudantes que reproduzissem gráficos que haviam construído no caderno na planilha do Excel. Depois foram explorando outras possibilidades de gráficos e escalas.

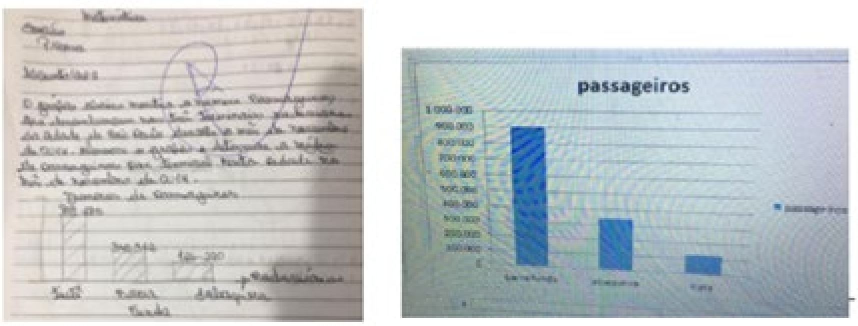


Figura 4. Comparação entre os gráficos feitos em papel com caneta e no computador

Na décima e décima primeira aula, foi realizada a socialização dos gráficos construídos pelas equipes, oportunizando um momento para refletir as aprendizagens e esclarecer os pontos de superação decorrente dessa sequência didática. Além disso, alguns gráficos apresentaram erros, como por exemplo, a falta de título, legenda ou problemas de escala. Aproveitou-se esse momento para um momento de reflexão e revisão dos gráficos, verificar as argumentações dos estudantes perante a análise dos gráficos.

Quanto à avaliação

Os estudantes foram avaliados continuamente no decorrer das aulas observando a participação e engajamento nas atividades. Com essa sequência didática, eles puderam observar na prática a presença da Estatística e demais áreas no seu dia a dia a partir da história do café.

Na avaliação considerou-se a apresentação do trabalho observando a compreensão do conteúdo estudado pelos estudantes, bem como, o desenvolvimento das habilidades e competências referente ao eixo Estatística, Probabilidade e Combinatória, que deve garantir o letramento estatístico, que consiste na capacidade de compreensão, análise e interpretação crítica de gráficos e tabelas.

Considerações Finais

O presente artigo propôs apresentar uma sequência didática vivenciada por uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental a qual buscou explorar temas referentes ao conteúdo de Matemática e Estatística a partir de uma atividade interdisciplinar de investigação sobre a história do café. Essa proposta evidencia a possibilidade de oportunizar aos estudantes desenvolverem pesquisas e relações entre algumas disciplinas para tornar o conteúdo mais instigante permitindo a apropriação de conceitos e seus usos.

Os resultados atingidos são incalculáveis, pois os estudantes conseguiram desenvolver uma visão crítica e o poder de argumentação sobre as interpretações e as análises de tipos de gráficos como propõe Gal (2002). Com essas atividades os estudantes, também, puderam observar na prática a presença da Estatística no seu dia a dia ao desenvolverem uma investigação sobre a história do mundo do café, construíram gráficos em ambiente analógico (papel e caneta), digital (no *Excel*) e o uso de material reciclado para construção na prática.

Como sugestão de pesquisas futuras, outros temas podem ser trabalhados com caráter interdisciplinar, sendo importante que o tema seja, preferencialmente, escolhido pelos estudantes, tal como, a história da vacina sendo abordada com ideias iniciais, construção de linha do tempo, abordagem sobre aspectos químico, biológico, físico, geográfico, matemático e estatístico.

Referências

Brasil (2017). Base Nacional Comum da Educação. Brasília: MEC (3ª versão).

Brum, W. P. (2015). Sequências didáticas no ensino de Matemática: uma investigação com professores de séries finais em relação ao tema Teorema de Pitágoras. Dialogia, São Paulo, n. 22, p. 187-207, jul./dez. São Paulo.

Cavalcanti, M. R. & Guimarães, G. L. (2008). Gráficos apresentados pela Mídia impressa. *Anais do II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – SIPEMAT, Recife.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In: *International Statistical Review*. Israel, 2002. p. 1-25.

Guimarães, G. L. & Melo, M. G. M. (2008). Educação Estatística: Estado da arte em anais de eventos científicos nacionais. *Anais do II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – SIPEMAT, Recife.

Lopes, C. E. & Souza, L. O. (2016). Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos do estudo de Probabilidade e Estatística na Educação Básica. *Educação Matemática em Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1465–1489.

Pegan, A.; Leite, A. P. & Magina, S. (2008). Leitura e Interpretação de Gráficos e Tabelas no Ensino Fundamental e Médio. *Anais do II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – SIPEMAT, Recife.

Pontes, M. E. N. (2020). *Letramento Estatístico: construção de gráficos de barras com Excel ou lápis e papel.* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]. Attena repositório digital da Universidade Federal de Pernambuco. https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/37952/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Marc%c3%adlia%20Elane%20do%20Nascimento%20Pontes.pdf

Fracciones y recta numérica: ¿Cómo organizo las actividades de un día?

Rebeca **Flores** García
Benemérita Escuela Normal Veracruzana
rebefg@gmail.com
México

Resumen

Este taller pretende contribuir al trabajo que sobre fracciones se realiza en el nivel básico, específicamente a la ubicación de fracciones en la recta numérica. La propuesta tiene como finalidad el reconocimiento de la existencia de una relación de orden a partir de una relación con la magnitud, en este caso, de tiempo, es decir; mientras más duradera es una actividad, mayor es la fracción que la representa, lo cual resulta esencial para atender las dificultades asociadas al orden y la comparación. También se pretende establecer relaciones y significados de la fracción del día con la cantidad de tiempo que representa y viceversa. Así, conceptualizar al día como el entero o el todo es la parte vital y la referencia para determinar las fracciones involucradas. Por ello, se recurre a los mecanismos precursores propuestos en el modelo de Kieren (partición, equivalencia cuantitativa y la formación de una unidad divisible).

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria; Enseñanza Implementación curricular; Resolución de problemas; Pensamiento numérico; Secretaría de Educación Pública; México.

Introducción

Uno de los contenidos matemáticos más ampliamente estudiados en el nivel básico es el de fracciones. Diversos son los estudios que se han desarrollado alrededor de las fracciones tanto a nivel nacional como internacional como se reporta en Flores (2010). Al respecto, Perera y Valdemoros (2007), destacan a las fracciones como uno de los contenidos matemáticos que manifiestan dificultades tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, esencialmente en los niveles básicos. Por otro lado, Fandiño (2005), señala que la noción de fracción y la operatividad correspondiente son de los contenidos más estudiados desde el inicio de la investigación en Matemática Educativa debido quizá a que representan una de las áreas de mayor dificultad en las escuelas de todo el mundo. Asimismo, se advierte de la importancia de conceptualizar a la fracción a través de todos sus significados, puesto que una elección de enseñanza con únicamente uno o dos de ellos podría ser inadecuada, al respecto Lamon (2001), subraya que aún no queda claro cómo es que los distintos significados puedan integrarse para ser enseñados. No obstante, lo que si se ha hecho es profundizar en el estudio de elementos que subyacen a los distintos significados alrededor de las fracciones. Uno de esos significados se relaciona con la recta numérica.

En ese sentido, se retoma lo reportado por Butto (2013) en su estudio relacionado con el aprendizaje de fracciones en el nivel básico llevado a cabo con estudiantes de sexto grado de educación primaria, en México. En la pregunta 17 del cuestionario, se muestra (Ver figura 1), un reactivo donde pide a los estudiantes ubicar varias fracciones en la misma recta numérica, lo cual resulta de gran complejidad para resolverse sin no se toma en cuenta lo que en su misma solución implica, es decir, no es un planteamiento de respuesta simple o inmediata.

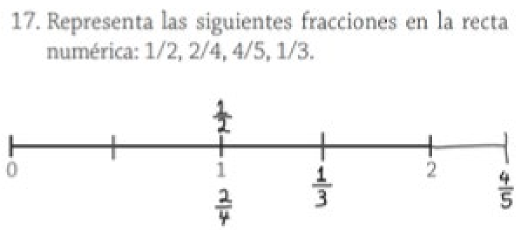


Figura 1. Pregunta planteada en el estudio de Butto (2013, p. 43).

Entre los resultados encontrados en esta pregunta, se reporta que: "...los estudiantes representan las fracciones en la recta numérica tomando como referencia el numerador de la fracción que se pide que representen en la recta" (Butto, 2013, p 42). Concluyendo que es necesario trabajar en las ideas de partición, equivalencia y formación de una unidad divisible como se propone en el nivel más bajo del modelo de Kieren (1976) para que los estudiantes puedan transitar a un siguiente nivel donde se encuentran los significados de la fracción como medida, cociente, razón y operador.

Aunado a ello, en Ávila (2019) se destaca que: "Es únicamente el 6.8 % de los estudiantes el que compara números decimales; resuelve problemas aditivos con números decimales y fraccionarios; resuelve problemas que implican dividir o multiplicar fracciones por números naturales; ubica una fracción en la recta numérica y usa las fracciones para expresar el resultado de un reparto" (p. 24).

Cabe hacer mención que estos resultados provienen de los exámenes aplicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México a estudiantes que se encuentran concluyendo el sexto grado de la educación primaria, reportados en 2015.

Tanto lo señalado por Butto como por Ávila se convierten en un antecedente esencial para reconocer que los estudiantes tienen dificultades con contenidos relacionados no solo con las fracciones, su operatividad, asi como con sus significados; entre éstos, su ubicación en la recta númerica.

En la propuesta que se plantea para este taller, se busca abordar las fracciones en la recta numérica manteniendo la idea del todo de manera permanente, para así realizar una transición a la recta numérica desde un planteamiento con carácter exploratorio y que a continuación se describe en la siguiente sección.

Elementos teóricos para la construcción de la propuesta

Este taller se caracteriza por ser una propuesta para implementarla con estudiantes de quinto y sexto grado de primaria para tratar contenidos relacionados con las fracciones equivalentes y su ubicación en la recta numérica. La secuencia de actividades propuesta contiene tres etapas: factual, procedimental y simbólica. Dichas etapas son propuestas desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013), en particular se consideran las prácticas socialmente compartidas para la construcción y reconstrucción del diseño de las actividades, después de haber desarrollado una problematización del saber matemático. Dicha problematización toma en cuenta cuatro dimensiones, a saber: epistemológica, social, didáctica y cognitiva. En la construcción de esta secuencia de actividades se desarrollan con más énfasis dos dimensiones: la cognitiva y la didáctica.

En lo que corresponde a la secuencia de actividades que se plantea, se mantuvo básicamente la idea del todo invariante para realizar la transición de una franja a la recta numérica. Para construir la secuencia de actividades, se usaron las herramientas intuitivas provenientes del modelo recursivo para el entendimiento de los racionales (Kieren,1976), (Ver figura 2). En este modelo se presenta un orden de cómo acercarse al pensamiento de los números racionales. El nivel más bajo del modelo (primer nivel) se plantean las herramientas intuitivas (partición, equivalencia y la formación de la unidad); en el siguiente nivel se encuentran los subconstructos de medida, cociente, razón y operador que dan lugar al constructo escalar y funcional de donde se gesta el pensamiento formal multiplicativo (tercer nivel). En el cuarto nivel se da lugar a un conocimiento estructural de los racionales, se manifiestan sus significados matemáticos (Butto, 2013).

De ahí la relevancia de plantear este taller, en el que se considera esencial retomar las tres herramientas intuitivas propuestas en el primer nivel del modelo de Kieren, para hacer evidente cómo se ponen en juego en el diseño de las actividades. Estas herramientas intuitivas son reconocidas como mecanismos constructivos de las fracciones y de sus respectivos significados (Valdemoros, 1993). Si bien en la propuesta se retoman estos mecanismos intuitivos, se hace desde una mirada socioepistemológica centrada en prácticas.

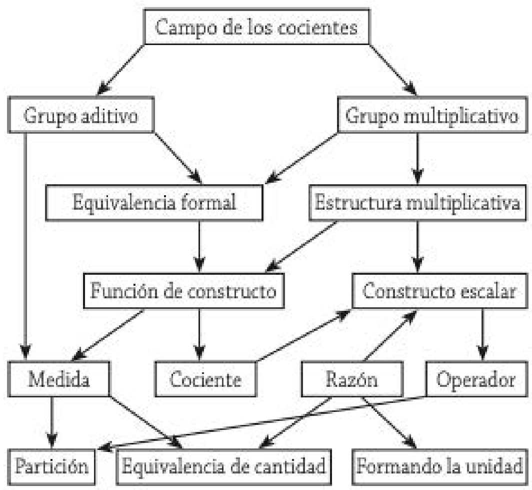


Figura 2. Modelo recursivo para el entendimiento de las fracciones propuesto por Kieren (1976, citado en Butto, 2013, p.37).

En este modelo de Kieren (1976), si bien se observa una ruta para el desarrollo de un conocimiento integral del número racional, así como de las conexiones que guardan cada uno de los niveles que se proponen, en particular centramos la atención en el nivel 1, la base del modelo.

Desarrollo

El taller se desarrolla considerando 3 fases: La primera fase está referida a la solución de las actividades por etapas, en equipos. La segunda fase consiste en discutir lo que las actividades promueven y movilizan en el pensamiento, asumiendo el rol del estudiante y en la medida que sea posible, reflexionando sobre la diversidad de estrategias que se podrían producir en cada etapa. La tercera fase consiste en hacer explícito el fundamento teórico, en particular las prácticas socialmente compartidas que se utilizaron en el diseño de las actividades propuestas tomando en cuenta las etapas planteadas desde la socioepistemológica. Esta postura teórica, reconoce que el aprendizaje de los estudiantes es el producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula con lo procedimental y se consolida en el nivel simbólico como se enfatiza en el Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje de Matemática (2019). Es otras palabras, todo objeto matemático tiene un origen y una significación amplia que se apoya en prácticas, cada vez más complejas y estructuradas. De ahí que, se considere relevante que los estudiantes reconozcan la funcionalidad y la transversalidad de las matemáticas para el desarrollo de estrategias, argumentos, así como la toma de decisiones para que el significado del conocimiento matemático apunte al valor de uso (Cantoral, 2013).

Algunos aspectos a considerar en la implementación

Se ha tenido oportunidad de hacer algunas exploraciones de esta propuesta con algunos estudiantes y profesores de México, dando pie a reconocer las posibilidades de llevarla al aula y trabajar con los estudiantes. Dentro de los elementos que han favorecido a la propuesta, es factible mencionar los siguientes:

1) El promover el uso de fracciones que son reconocidas por los estudiantes, es decir; la propuesta incluye el uso de fracciones expresadas como medios, cuartos, sextos, octavos, doceavos y veinticuatroavos, éste último emerge de una forma más natural una vez que los estudiantes ya se han familiarizado con las fracciones anteriores. Cabe hacer la aclaración que el plan programa de estudios para el nivel primaria, en México; no incluye las fracciones con denominador 24, no obstante; al conservar como unidad al día, el estudiante traerá a cuentas que el día tiene 24 horas, es decir; se encuentra dividido en 24 partes iguales, transición que por supuesto se busca consolidar en esta propuesta.

2) La propuesta permite recuperar los conocimientos previos que los estudiantes poseen sobre fracciones, recurrir a las particiones equitativas, reconocer la igualdad de partes y lograr identificar el cambio de nombre entre las fracciones (medios a sextos, de tercios a novenos) así como identificar la construcción de unidades divisibles, así como las cantidades combinables aditivamente.

Reflexiones finales

Se busca que en el desarrollo de este taller se promuevan reflexiones en dos direcciones: aquellas derivadas de la propia propuesta y aquellas derivadas de la interacción con las y los participantes.

La propuesta que se presenta considera un contexto situacional real – el contexto de la medida – acompañado de un contexto de significancia basado en una evolución pragmática. Es decir, movilizan las prácticas que permitan dar significado mediante el uso. Por lo que las prácticas socialmente compartidas como *partir, comparar, ordenar y equivaler* son las promovidas en el taller. Para ello, se parte de experiencias cercanas al estudiante como lo son las actividades realizadas en un día cualquiera, comparándolas respecto de su duración en horas, para después plantear la necesidad de expresar su duración en términos de fracción del día y viceversa. Todo ello posibilita una significación de la ubicación de las fracciones en la recta numérica a partir de la equivalencia.

Por ello, la voz de las y los participantes permitirá tomar en cuenta elementos para un rediseño de la propuesta, de acuerdo con las particularidades que emerjan en la discusión. En ese sentido, se resalta la importancia del trabajo que se realice en cada sesión del taller, así como la manera en que la propuesta pueda impactar al interior de las aulas, con los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática 31*(2), 22 – 60. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31/2/02_REM31-2.pdf

Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista Horizontes pedagógicos*, *15*(1), 33 – 45. https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/403/368

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italy.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México. https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/10680?show=full

Kieren (1976). On Mathematical cognitive and instructional foundations of rational number, in Lesh, R (Ed.), *Number and Measurement,* Columbus, OH. Eric/Smeac, 101-144.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146–165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019*). Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje de Matemática.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. https://www.educ.ar/recursos/132595/marco-nacional-para-la-mejora-del-aprendizaje-en-matematica/download/inline

Perera, P. y Valdemoros, M (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 209–218. http://funes.uniandes.edu.co/1254/1/Perera2008Propuesta_SEIEM_209.pdf

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Conceptualizando a la fracción

Manuel Fdo. **Alva-Alejos**
Universidad Autónoma de Chiapas
México
manu3l.alva@gmail.com

Resumen

En el taller aborda el concepto matemático de la fracción, bajo distintos enfoques; es decir, se recupera la complejidad que engloba dicho tema (origen, significados, representaciones) de manera general con una serie de actividades específicas y seleccionadas (previamente) para conceptualizar dicho concepto matemático. Algunos de los temas que se abordan son los significados asociados a la fracción (parte-todo, medida, número racional, porcentajes, etc.) las distintas representaciones (numérica, discreta, literal y gráfica) características propias del concepto matemático. Llinares y Sánchez (1996) consideran a la fracción como un metaconcepto.

Palabras clave: Fracción; significados; representación; concepto matemático; conceptualizar.

Introducción

Tener claro el saber (concepto matemático) a enseñar es fundamental, para transmitir y generar un aprendizaje significativo en el educando (alumno). La esencia (del saber matemático) es vital para evitar un "teléfono descompuesto" entre el maestro y el alumno, focalizando al saber (conocimiento matemático) a enseñar. Por ello, es importante hacer uso técnicas de enseñanza, metodologías y los recursos disponibles por parte del maestro para generar la sinergia de enseñanza-aprendizaje. Es así, que surge el presente taller, recuperando los aspectos importantes de la fracción (origen, concepto, representaciones y significados) con una serie de ejercicios (actividades) para reforzar dicho tema o bien una alternativa de repaso general en el nivel básico (primaria o secundaria). Con el apoyo de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1993), en cada actividad propuesta se requiere de conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero asociados (relacionados) -en este caso sobre las fracciones-.

Objetivos y alcances

El objetivo del taller es mostrar a los participantes una propuesta de abordar, enseñar, reforzar o retroalimentar el aprendizaje de los alumnos correspondientes al nivel básico sobre las fracciones; con una perspectiva integrada (origen, concepto, significados y representaciones) para la resolución de problemas reales, que permitan fomentar otros aprendizajes matemáticos como: las equivalencias, fracciones propias, impropias, números racionales, por citar algunos. Además de tener elementos que permitan diferenciar la fracción de la división; pues e plantea como pregunta detonadora ¿cuál es la diferencia entre dividir y fraccionar? si en ambos se realiza una repartición.

Método

Por medio de una presentación (diapositivas) con la ayuda de un software ofimático o de manera impresa las actividades propuestas (siete actividades), en la última actividad se emplean tapas de botellas de platico (diferentes tamaños) a fin de hacer lúdico dicha dinámica. Cada actividad se desarrollará con un contenido explícito, ya sea sobre el origen, representaciones, significados asociados a representaciones específicas, etc. (dependerá de la actividad planteada).

El desarrollo cada actividad será individual, al término del mismos (actividad) se promoverá el debate e intercambio con la participación; es decir, se presentarán 2 o 3 producciones de los participantes a fin de generar una mayor comprensión del aprendizaje esperada en las actividades.

Tabla 1.- *Secuencia y grado de dificultad de las actividades.*

Momento	Descripción	Dificultad
Actividad 1 y 2	Se abordan las representaciones y significados asociados en las matemáticas.	Bajo
Actividad 3 a la 6	Se contextualizan las representaciones y significados a las fracciones.	Medio
Actividad 7	Se plantea un problema (real), la finalidad es utilizar las fracciones como método en la resolución del problema.	Alto

Diseños Didácticos

Antes de empezar con el desarrollo de la primera actividad se planteará la pregunta detonadora, posterior a ello se dará inicio con la actividad. Se proyectará una figura geométrica sin referencia de tamaño (figura 1). Se espera emerja el término mitad de manera natural, dando así inicio a una serie de preguntas dirigidas para desarrollar distintas representaciones como la forma racional “0.5 o representación formal (unidad-todo) con ½ o $\frac{1}{2}$.

Figura 1.- Primer ejercicio del taller.

Lo que permitirá la aplicación de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1993) al crear situaciones complejas para analizar una combinación de tareas específicas que requieren de conceptos, procedimientos y representaciones diferentes. Que están relacionados con el saber matemático de las fracciones. Inmerso un medio en cualquier equivalencia (1/2, 2/4,… 8/16,…)

Con retroalimentación (por actividad) se tiene un trasfondo particular, similar a la teoría de situaciones didáctica, cuya finalidad sería el desarrollo de las actividades con un enfoque a una situación didáctica. Es decir, crear una atmósfera de aprendizaje significativo inducido con preguntas específicas ¿qué representa la parte obscura o clara de la figura? ¿de qué otra manera se puede representar? ¿se dividió o de fraccionó? Focalizando a la fracción, a la vez que se tienen argumentos del por qué es diferente a la división. Tomándose como herramientas (artilugios matemáticos) para resolver problemas de reparto.

El término suele ser ambiguo, si no se contextualiza de manera correcta, cuando el denominador es mayor al numerador (fracciones impropias). Fandiño (2009) plantea la pregunta ¿cuál es la unidad? La pizza a las pizzas de 5/3.

Al emplear ciertas representaciones (privilegiar una sobre otra) se explica de forma manera clara por qué 3/3 = 1 o la representación gráfica, que la forma racional 0.3+0.3+03=1. Esto se aborda en el momento del cierre del taller.

Algunas actividades (figura 2) son tomadas de investigaciones como el número cuatro (Acevedo, López, Guerrero y Morales, 2013) en su trabajo titulado “La fracción parte-todo a través de una mirada gráfica”, argumentan que existe una dificultad al visualizar las fracciones mediante una representación.

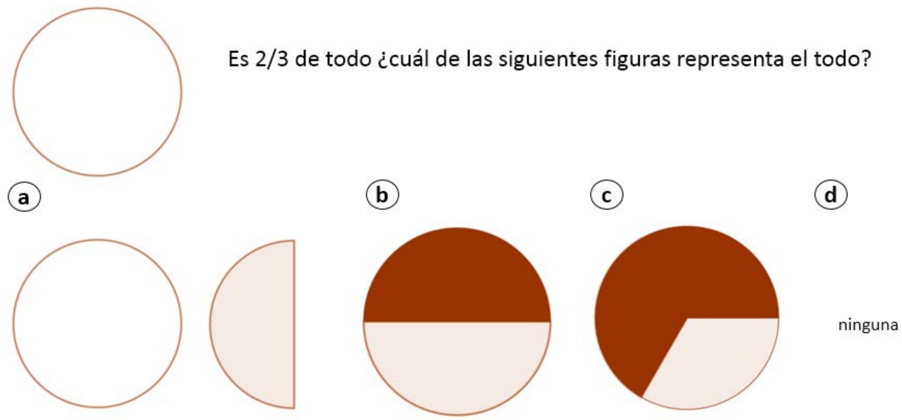


Figura 2.- Ilustración de un ejercicio propuesto.

De acuerdo con los registros semióticos de Reymond Duval, existen distintos tipos de registros (representaciones) y varían de acuerdo al concepto matemático. Lo anterior sólo es una referencia, que sirve para demostrar que no se puede acotar (limitar) a un tipo de representación en matemáticas y menos al hablar de las fracciones (figura 3).

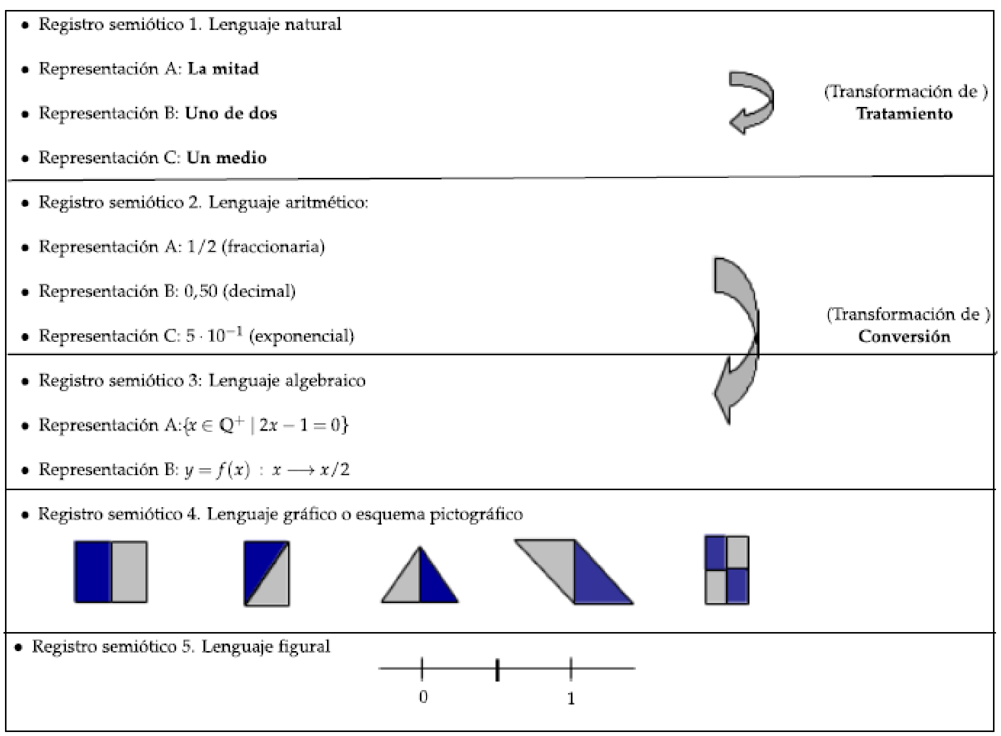


Figura 3.- Ilustración tomada del trabajo de Rojas (2012).

Otro recurso importante se ilustra en la figura 4, al considerar que representa a cierta cantidad de hombres y mujeres, pero no es tan evidente. Se pretende contextualizar el significado (relación); es decir, al considerar que existen 3 mujeres y 6 hombres la siguiente expresión 3/9 será válida.

Figura 4.- Segundo ejercicio del taller.

Estos son algunos diseños didácticos propuestos para el taller denominado "Conceptualizando las fracciones. A fin de poder dar elementos suficientes para comprender a las fracciones en su complejidad, pero a la vez de forma lúdica y reflexiva.

Referencias Bibliográficas

Acevedo, D., López, M., Guerrero, Y., y Morales, L. (2013). La fracción parte - todo a través de una mirada gráfica. *Educación científica y tecnológica*, 291-295.

Fandiño, I. (2009). LAS FRACCIONES: Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: MAGISTERIO.

Llinares S, Sánchez V. 1996. Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria. En: Giménez J, Llinares S, Sánchez V (Eds.). El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación matemática. Editorial Comares, Granada, España, pp. 97-120.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje en las matemáticas. Revista digital Matemática, Educación e Internet. 12(1). 1-5. https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i1.1686.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26.

Construcción del concepto de vector en álgebra lineal desde la perspectiva de la teoría APOE

Yulieth Alexandra **Gutierrez** Carrillo
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
yuliethgc98@gmail.com
Solange **Roa-Fuentes**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

Este documento hace parte de los avances de una propuesta de investigación que estudia la construcción del concepto de vector en álgebra lineal con base en los aspectos teóricos que conforman la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Nos enfocamos en el concepto de vector en álgebra lineal, ya que es un concepto que involucra los espacios vectoriales y otros conceptos importantes del álgebra lineal, y además, es difícil para los estudiantes aprender.

De este modo, se destacan algunas investigaciones en Educación Matemática sobre el concepto de vector, se estudia las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto de vector cuando los estudiantes resuelven situaciones de álgebra lineal diseñadas con base en la Teoría APOE, y se busca dar sugerencias didácticas para la comprensión de este.

Palabras clave: vector, construcción, teoría APOE, álgebra lineal.

Introducción

En los cursos universitarios de álgebra lineal y en los libros de texto es frecuente estudiar el concepto de vector, pues este hace parte de otros conceptos importantes como espacio vectorial, combinación lineal, transformación lineal, valores y vectores propios, entre otros. Sin embargo, aunque los estudiantes abordan los vectores como elementos de los espacios vectoriales, en ellos prevalece la idea de vector como flecha y presentan dificultades para comprender el concepto de vector (Hillel, 2000; Barniol y Zavala, 2014; Stewart y Thomas, 2009, Parraguez, 2020). Para profundizar sobre en estas ideas, se presentan algunas investigaciones en Educación Matemática asociadas al concepto de vector.

Estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza del concepto de vector en álgebra lineal

Los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal han tenido un interés creciente en investigaciones en los últimos años (Stewar et al., 2022). Se conoce que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para aprender estos conceptos, pues están asociadas al "obstáculo del formalismo" definido así por Dorier y Sierpinska (2001) donde los estudiantes asocian el álgebra lineal como una cantidad abrumadora de definiciones y símbolos que les cuesta comprender.

Así mismo, el concepto de vector resulta difícil para los estudiantes debido a la diversidad de representaciones (Aguirre y Erickson, 1984; Poynter y Tall, 2005). La palabra vector tiene diversas acepciones según el contexto donde es utilizado; en efecto, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) señalan que en física, el vector se representa por medio de una flecha y se interpreta como una fuerza que actúa sobre un objeto; pero, en álgebra lineal, el vector es visto de tres formas: una flecha que representa posiciones de puntos y transformaciones con respecto a un origen, una cadena de números reales que representan la aritmética de n-uplas en el caso de $\mathbb{R}^n$, y un elemento de un espacio vectorial que se representa por una letra **v**.

En particular, Dorier y Sierpinska, (2001) identificaron que la construcción de los conceptos del álgebra lineal fueron producto de dos procesos: unificación y generalización. En este sentido, las acepciones del vector en álgebra lineal se pueden relacionar con estos procesos, donde los vectores son estudiados desde un enfoque geométrico y la estructura de espacio vectorial hace que la noción de vector evolucione. En este sentido, Parraguez (2020) al estudiar la construcción de significados de las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial a la luz de la teoría APOE, reporta los estudiantes asocian el vector cero como un elemento constituido de ceros y esta idea errónea conlleva a obstáculos para la comprensión de las operaciones del espacio vectorial.

También se conocen investigaciones enfocadas en los errores que cometen los estudiantes al desarrollar actividades sobre la representación del vector geométrico y sus propiedades (Appova y Berezovski, 2013; Barniol y Zavala, 2014). En efecto, Appova y Berezovski (2013), diseñaron y aplicaron una prueba a 23 estudiantes universitarios de primer año de un curso de métodos lineales e identificaron algunos errores que cometen los estudiantes al abordar el concepto de vector, reportan que los estudiantes no comprenden el concepto de vector y escalar, y cometen tres tipos de errores: *vector - escalar = escalar, escalar · vector = escalar* y *vector · vector = vector*. Los autores asocian estos errores a la falta de imágenes para representar la solución de un problema específico.

El trabajo de Barniol y Zavala (2014) consistió en el diseño y aplicación de un test, para estudiar la comprensión del vector, en el que señalan dificultades para sumar vectores de manera geométrica, la dirección de un vector e incluso, los estudiantes tienen la creencia que la magnitud del vector corresponde a las componentes de este.

Las investigaciones mencionadas anteriormente, estudian la comprensión del concepto de vector enfocadas en identificar las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este concepto; aunque, esta investigación se centra en la construcción del concepto de vector en álgebra lineal fundamentada en la teoría APOE, que busca diseñar un modelo teórico que describa cómo se construye este concepto en la mente de un individuo.

Referente Teórico: Teoría APOE

La teoría APOE fue desarrollada por Dubinsky y colaboradores (Arnon, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014), la cual plantea que el conocimiento matemático se desarrolla a partir de estructuras mentales y las relaciones entre ellas; cada estructura mental se construye a través de un mecanismo mental, que también es conocido como un caso particular de Abstracción Reflexiva (Piaget 1975/1985). Los principales mecanismos mentales son: interiorización, coordinación, encapsulación, tematización y asimilación; y dan lugar a las estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Arnon et al., 2014).

Una *Acción* es una transformación de objetos siguiendo unas instrucciones externas que indican el paso a seguir, sin reflexionar sobre ellas (Asiala et al., 1996). Es decir, las Acciones se realizan siguiendo un paso a paso, puede ser un algoritmo que un individuo realiza, sin ser consciente de ello.

Un *Proceso* se construye usando el mecanismo mental de *interiorización* o *coordinación*. “Cuando se repite una Acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un Proceso” (Asiala et al., 1996, p. 7); es decir, un Proceso es una Acción interiorizada, cuando el individuo no depende del paso a paso de la Acción y es consciente de la Acción que realiza. También, es posible obtener un Proceso a través de la coordinación de dos o más Procesos.

Un *Objeto* es una estructura estática, a diferencia de la Acción y el Proceso que son dinámicas. Se dice que un Proceso es *encapsulado* en un Objeto, cuando ese Proceso es visto como un todo, al cual se le pueden aplicar nuevas Acciones. El mecanismo *desencapsulación* permite partir de la estructura Objeto y regresar al Proceso que le dio origen.

Un *Esquema* es la estructura más grande, pues esta contiene a Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están relacionados en la mente de un individuo en una estructura coherente y pueden usarse para resolver una situación matemática (Trigueros, 2005).

La Figura 1 muestra las relaciones entre las estructuras y los mecanismos mentales.

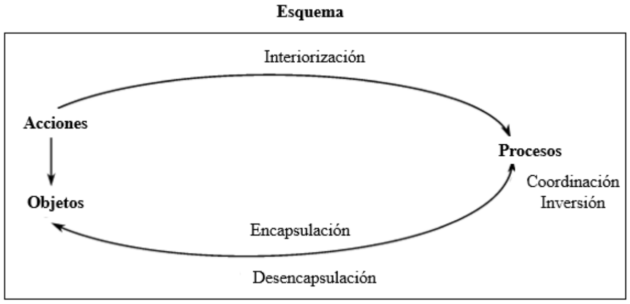


Figura 1 Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático
Fuente. Arnon et al., 2014, p. 18.

Las estructuras y mecanismos mentales hacen parte de un modelo teórico que muestra un camino para comprender un concepto, este modelo es conocido como *Descomposición Genética*.

Descomposición genética

La descomposición genética (DG) consiste en una descripción de las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante realiza para construir un concepto matemático específico. Una *descomposición genética preliminar* es aquella que no ha sido probada experimentalmente, pues Asiala et al., (1996) mencionan que la DG debe refinarse con base en los resultados obtenidos en la implementación de actividades, de modo que refleje lo que se ha encontrado empíricamente.

Una DG puede diseñarse con base en experiencias de enseñanza o aprendizaje, análisis de libros de texto, resultados de investigaciones previas, la epistemología de conceptos matemáticos, entre otros. Además, las DG de un concepto no son únicas, puesto que, “no proporciona una forma única en la que todos los estudiantes construyan un concepto matemático específico” (Arnon et al., 2014, p. 40).

Ciclo de investigación basado en la teoría APOE

La teoría APOE propone un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y recolección y análisis de datos.

El *análisis teórico* es la primera componente del ciclo de investigación, consiste en estudiar el concepto de interés (concepto de vector) a partir de su epistemología, el análisis de libros de texto, la revisión de investigaciones en Educación Matemática relacionadas con este tema y la experiencia de las investigadoras como estudiantes y profesoras, para finalmente, diseñar una DG preliminar para describir la construcción del concepto de estudio, que se obtiene como resultado de esta fase.

La DG preliminar del concepto permite guiar el *Diseño e implementación de la enseñanza*, donde se diseña e implementa actividades relacionadas al concepto matemático, con el fin de refinar la. DG como lo menciona Arnon et al., (2014), pues las DG debe describir las estructuras y mecanismos que se evidencian en los estudiantes. Esto hace parte de la tercera componente del ciclo, *Recolección y análisis de datos*, para finalmente obtener una DG validada.

Método

Esta investigación utiliza como método el ciclo de investigación que propone la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de actividades, y recolección y análisis de datos.

Análisis teórico

Con el fin de describir las estructuras y mecanismos mentales que puede realizar un individuo para construir el concepto de vector en álgebra lineal, es necesario profundizar sobre el objeto matemático (vector). Por lo tanto, se realizó una revisión a la epistemología del concepto de vector y el análisis de libros de texto.

Epistemología del concepto de vector. A partir de la revisión de las tesis de Zea (2013) y Chavarría (2019) los cuales describen aspectos histórico-epistemológicos sobre el concepto de vector y el concepto de espacio vectorial respectivamente, se identificó tres etapas para la conceptualización del vector: a) noción de vector, b) consolidación del vector y c) abstracción del vector.

a) Noción de vector: Esta etapa se caracteriza porque da el primer acercamiento con la idea de vector sin estar establecido como objeto matemático, en la cual se destacan dos períodos: el primer período hace referencia a las ideas de Euclides (330-275 a. C), quien se enfoca en asociar a los segmentos una magnitud y operar aritméticamente números y magnitudes para solucionar algunos problemas. El segundo período corresponde al siglo XVI-XIX, que se caracteriza por el encuentro con números negativos y complejos, centrado en la resolución de ecuaciones de grado mayor a 1, donde se vislumbra el vector como un segmento con magnitud.

b) Consolidación del vector: Esta segunda etapa (siglo XIX) se establece el vector como un objeto matemático con un tratamiento totalmente geométrico, pues al representar un número complejo $a + bi$ como un segmento de recta desde el origen del plano cartesiano hasta el punto (a, b), da paso a definir las operaciones suma y producto de vectores a partir de parejas ordenadas (a, b).

c) Abstracción del vector: Esta última etapa (mitad del siglo XIX) se destacan las ideas de Grassman ya que dan paso a la formalización de las operaciones entre vectores por medio de la estructura de espacio vectorial, donde hace referencia al vector como elemento de este conjunto.

Análisis de libros de texto. Se realizó el análisis a los libros de texto con el fin determinar el enfoque que tiene cada autor del libro sobre el concepto de vector y permite guiar hacia la estrategia que propone cada autor, con el fin de que el lector comprenda el concepto de vector. Se analizaron los libros de texto que utilizan los profesores de la UIS en los cursos de álgebra lineal para acompañar su proceso de enseñanza, entre ellos, Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico (Isaacs y Sabogal, 2009), Álgebra lineal (Grossman, 1996) y Álgebra lineal: una introducción moderna (Poole, 2011).

Para dicho análisis, se consideraron algunos aspectos propuestos por Campos (2017) para analizar los textos mencionados, estos son: a) Estructura general; y b) Presentación y definición del concepto. Con base en estos dos aspectos, se revisaron los ejemplos y ejercicios que presenta cada uno de los libros enfocados en el concepto de vector, y fueron clasificados en las categorías noción, consolidación y abstracción del vector. A continuación, se explica cada uno de los aspectos mencionados anteriormente,con respecto al concepto de vector.

a) Estructura general de los libros de texto: Se busca identificar la secuencia de los conceptos, su dependencia y los conocimientos previos. En efecto, La Tabla 1 muestra la organización de los contenidos de los libros de texto analizados y permite ubicar en el texto el orden y desarrollo del concepto de vector.

Tabla 1
Orden de los contenidos de los libros de texto.

Isaacs y Sabogal (2009)	Grossman (1996)	Poole (2011)
1. Inducción matemática y números complejos	1. Sistemas ecuaciones lineales	1. Vectores geométricos
2. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial	2. Determinantes	2. Sistemas ecuaciones lineales
3. Transformaciones lineales y álgebra de matrices	3. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	3. Matrices
4. $\mathbb{R}^n$ espacio euclídeo	4. Espacios vectoriales	4. Valores y vectores propios
5. Función determinante	5. Transformaciones lineales	5. Ortogonalidad
	6. Valores y vectores característicos	6. Espacios vectoriales

b) Presentación y definición del concepto de vector: Se analiza aquellos elementos que motivan su definición y la forma de desarrollar el concepto.

Con base en la estructura general de los libros de texto mostrada en el ítem anterior, en la Tabla 2 se destacan las definiciones de vector que presenta cada texto y algunos elementos importantes que dan origen al concepto de vector y la manera en que es abordado.

Tabla 2
Presentación y abordaje del concepto de vector en los libros de texto

Autores	Definición	Forma de abordar el concepto de vector
Isaacs y Sabogal (2009)	- "El conjunto de todos los vectores de dimensión n con componentes reales lo notaremos $\mathbb{R}^n$" (Isaacs y Sabogal, 2013, p. 49)	-Estudia los números complejos $\mathbb{C}$ en el plano -Visualiza a los elementos de $\mathbb{C}$ como vectores de $\mathbb{R}^2$ -Considera una n-upla como una solución de un SEL -Define a una n-upla como vector -Define $\mathbb{R}^n$ como todas las soluciones a los SEL - Vectores geométricos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ -Define axiomáticamente el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Grossman (1996)	*Vector renglón* Un vector de n componentes se define como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera: $(x_1, \dots, x_n)$. *Vector geométrico* El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama vector. *Vector algebraico* Un vector v en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan elementos o componentes del vector v.	-Estudia los SEL -Define el vector de n componentes -Define $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de n vectores -Define una matriz de tamaño mxn - Vector como una matriz fila o columna - Desarrolla el álgebra de Matrices - Producto punto entre dos vectores para explicar la multiplicación de matrices - *Capítulo 3:* -Define geométricamente el vector -Define algebraicamente el vector -Estudia la Magnitud y dirección de un vector -Define el producto escalar y proyección de vectores -Define el producto cruz de vectores -Define el espacio vectorial - Ejemplos de espacio vectorial ($\mathbb{R}^n$, $\{0\}$, M_{mxn}, $\mathbb{C}^n$) - Teorema sobre los axiomas del espacio vectorial A partir de la sección 4.4 se abordan demás conceptos como combinación lineal, subespacios, etc.
Poole (2011)	*Definición de vector* Un vector es un segmento de recta dirigido que corresponde a un desplazamiento desde un punto A hasta otro punto B	-Vectores geométricos como flechas -Define el vector como un segmento de recta dirigido - Suma de vectores y el producto por escalar en $\mathbb{R}^2$y $\mathbb{R}^3$. -Suma y el producto por escalar en $\mathbb{R}^n$. -Define la solución de SEL -Define el conjunto generador e independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^2\ y\ \mathbb{R}^3$ usando los SEL. - Álgebra de matrices -Estudia el espacio generado, combinaciones lineales y dependencia e independencia lineal de matrices, subespacios, dimensión con vectores de $\mathbb{R}^2\ y\ \mathbb{R}^3$. -Define las transformaciones lineales -Define los valores y vectores propios -Define el espacio vectorial -Presenta ejemplos de espacios vectoriales -Ejemplos de conjunto generador, base, dependencia e independencia lineal con vectores como polinomios de grado menor o igual a 2, matrices y funciones.

c) Sobre los ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto: Se revisaron los ejemplos y ejercicios propuestos para estudiar el concepto de vector en cada texto y estos se clasificaron en las siguientes categorías:

Noción (N): Esta categoría se ubican los ejemplos y ejercicios que requieren estudiar al vector a partir de la geometría como un segmento de recta que tienen magnitud y dirección, sin establecer al vector como objeto matemático.

Consolidación (C): En esta categoría se encuentran los ejemplos y ejercicios que se caracterizan por estudiar al vector en el plano cartesiano y el espacio.

Abstracción (A): En esta categoría se ubican los ejemplos y ejercicios que requieren estudiar a los vectores como elemento de un espacio vectorial.

De la clasificación de los ejemplos y ejercicios planteados por cada libro sobre el concepto de vector se tiene que los tres libros tienen la particularidad de que los ejemplos y ejercicios que corresponden a la categoría C tienen un mayor porcentaje como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

Clasificación de los ejemplos y ejercicios de los libros de texto

Isaacs y Sabogal (2009)	Grossman (1996)	Poole (2011)
Ejemplos: N: 25% (1 ejemplo) C: 50% (2 ejemplos) A: 25% (1 ejemplo) Total: 4 ejemplos	*Ejemplos:* N: 0% (No hay ejemplos) C: 71,4% (30 ejemplos) A: 28,6% (12 ejemplos) Total: 42 ejemplos	*Ejemplos:* N: 8,2% (5 ejemplos) C: 59% (36 ejemplos) A: 32,8% (20 ejemplos) Total: 61 ejemplos
Ejercicios: N: 11,1% (4 ejercicios) C: 83,3% (30 ejercicios) A: 5,6% (2 ejercicios) Total: 36 ejercicios	*Ejercicios:* N: 0% (No hay ejercicios) C: 89,9% (311 ejercicios) A: 10,1% (35 ejercicios) Total: 346 ejercicios	*Ejercicios:* N: 0% (No hay ejercicios) C: 77,9% (152 ejercicios) A:22,1% (43 ejercicios) Total: 195 ejercicios

Una característica común entre el libro de Grossman (1996) y Poole (2011), es que inicialmente se profundiza sobre el concepto de vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se estudia sus propiedades geométricas, es y finalmente en el siguiente capítulo se presenta la definición de espacio vectorial donde se establece el vector como un elemento de él. Por el contrario, en Isaacs y Sabogal (2009), relaciona las soluciones de los SEL con $\mathbb{R}^n$, define un vector como un elemento de $\mathbb{R}^n$ y al mismo tiempo representa los vectores en el plano y en el espacio como casos particulares con $n = 2, 3$. Por esta razón, es que los tres libros presentan un alto porcentaje de ejemplos y ejercicios pertenecientes a la categoría C que hace referencia al vector geométrico.

Cabe resaltar que en el texto Isaacs y Sabogal (2009) solo se encontraron espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$, porque el interés de los autores es estudiar los conceptos del álgebra lineal desde un enfoque geométrico. Así mismo, en Grossman (1996), el interés del autor es que se profundice sobre el vector geométrico, como lo muestra la Tabla 3, con un 71,4% de ejemplos y 89,9% de ejercicios de categoría C, y con el 28,6% de ejemplos y 10,1% de ejercicios sobre el vector como elemento de un espacio vectorial.

Por otra parte, el libro de Poole (2011), presenta variedad de ejemplos de espacios vectoriales, tiene en cuenta las n-uplas, matrices, polinomios de grado menor o igual a 2 y funciones reales y parejas ordenadas de números complejos como vectores. Además, los conceptos de combinación lineal, conjunto generado, dependencia e independencia lineal, etc, son nuevamente estudiados con estos vectores particulares.

Cabe resaltar que esta investigación hace parte de una propuesta de investigación la cual se encuentra en construcción de una DG preliminar del concepto de vector.

Diseño e implementación de la enseñanza

A partir de la DG preliminar del concepto de vector que se obtendrá en la fase anterior, se diseña talleres para implementarse con 35 estudiantes (16-22 años) de ingeniería química que cursan álgebra lineal I por primera vez en la UIS a finales del segundo semestre académico de 2022 (marzo de 2023). Este curso es guiado por el enfoque que propone el libro de Poole (2011) sobre los temas, entre ellos, vectores, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y finaliza con el concepto de valor y vector propio; además, tiene una intensidad horaria de 4 horas a la semana.

Luego de aplicar los talleres y analizar los datos obtenidos, se aplicarán entrevistas semiestructuradas a algunos estudiantes que se destaquen por las respuestas dadas en los talleres, con el fin de profundizar en las estructuras evidenciadas.

Es importante aclarar que las fecha para implementar los talleres es tentativo, es decir, puede variar respecto a factores externos.

Recolección y análisis de datos

Con el fin de validar la descomposición genética preliminar del concepto de vector, se consideran como instrumentos de recolección de datos: las hojas de trabajo de los estudiantes donde desarrollan los talleres propuestos, videograbaciones durante el desarrollo de cada taller, y las entrevistas semiestructuradas que serán grabadas y transcritas. Estos instrumentos serán analizados para evidenciar las estructuras mentales planteadas en la DG preliminar y en el caso que no se muestren estas mismas estructuras, la descomposición se retroalimenta a partir de las estructuras encontradas.

Reflexiones finales

Esta investigación hace parte de una propuesta que se encuentra en el diseño de la descomposición genética preliminar del concepto de vector, el cual se fundamenta en la epistemología del concepto de vector, el análisis de libros de texto y las investigaciones previas en Educación Matemática sobre el concepto de vector, los cuales que se expusieron en este documento; además, se tiene en cuenta la experiencia y observaciones de las investigadoras como docentes de un curso de álgebra lineal donde se aborda el concepto de vector geométrico y el vector como elemento de un espacio vectorial.

Cabe resaltar que desde la epistemología del concepto de vector se identificaron tres fases asociadas a la noción donde se vislumbra el vector como segmento de recta dirigido sin estar establecido como objeto matemático; consolidación del vector donde se establece el vector como un segmento de recta dirigido y abstracción del vector como un elemento de un espacio vectorial. A partir de estas fases se puede afirmar que el concepto de vector evoluciona en el sentido de que para estudiar el vector como elemento de un espacio vectorial es necesario reflexionar sobre la naturaleza de los objetos que se operan en álgebra lineal, donde se encuentra con dos conjuntos que tienen elementos distintos (vectores y escalares). Esto implica una gran diferencia a la actividad matemática que se realiza en otros cursos universitarios, pues en álgebra lineal se estudian los objetos a partir de la estructura del espacio vectorial.

Por otra parte, en el análisis de los libros de texto Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico (Isaacs y Sabogal, 2009), Álgebra lineal (Grossman, 1996) y Álgebra lineal: una introducción moderna (Poole, 2011) se encontró que prevalece un enfoque geométrico para abordar el concepto de vector como lo muestran los resultados obtenidos en la Tabla 3, los cuales por encima del 50% de ejemplos y ejercicios de estos textos corresponden a la categoría C que hacen referencia al vector geométrico y se deja de un lado el vector como un elemento de un espacio vectorial. Por ende, esta investigación se enfoca en la construcción del concepto de vector en álgebra lineal donde el vector es un elemento de un espacio vectorial.

La descomposición genética diseñada podría ser una herramienta útil para elaborar secuencias de enseñanza y guiar a los profesores al abordar este concepto en los cursos de álgebra lineal, para identificar los conceptos previos que debe tener en cuenta y las conexiones entre ellos.

Referencias y bibliografía

Aguirre, J., & Erickson, G. (1984). Students' conceptions about the vector characteristics of three physics concepts. *Journal of Research in Science Teaching*, 21(5), 439–457. https://doi.org/10.1002/tea.3660210502

Appova, A., & Berezovski, T. (2013). Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations. In S. Brown, G. Karakok, G. Hah Roh, & M. Oehrtman (Eds.), *Conference on research in undergradutate mathematics education: Crume xvi* (pp. 8–17).

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Barniol, P., & Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: A reliable multiplechoice vector concept test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 10(1).* https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Dorier, J., & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 255–273. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7

Grossman, S. (1993). Aplicaciones del Álgebra Lineal. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. Dorier (Eds.), *On the teaching of linear algebra*, (pp. 191-207). Springer.

Isaacs, R., y Sabogal, S. (2009). Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico. Ediciones UIS. Colombia.

Parraguez, M. (2020). Construcción de significados de las operaciones del espacio vectorial a través de conjuntos linealmente independientes/dependientes. RECHIEM. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 60-70. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.22

Poole, D. (2011). Álgebra lineal. Una introducción Moderna. Thomson.

Poynter, A., & Tall, D. (2005). Relating theories to practice in the teaching of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1264–1273.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches En Didactique Des Mathematiques, 19*(1), 7–40.

Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., ... & Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*, *69*(5). https://doi.org/10.1090/noti2479

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2009). A framework for mathematical thinking: *The case of linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 951–961. https://doi.org/10.1080/00207390903200984

Construções geométricas das abelhas apis e melíponas: alguns problemas contextualizados

Cláudia Ferreira R. **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br
Rosa **García** Márquez
Faculdade de Formação de Professores – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
rosagmarquez@yahoo.com.br

Resumo

As abelhas, além de serem importantes no equilíbrio ecológico, são excelentes arquitetas, como pode ser observado em sua engenhosidade, organização, precisão e intuição geométrica na construção das colmeias. O objetivo deste trabalho é sugerir alguns problemas interdisciplinares para os professores de Matemática do Ensino Fundamental, Médio e/ou Ensino Superior, indicativos da presença da matemática na natureza. Os problemas sugeridos envolvem geometria plana, espacial e analítica e o cálculo diferencial e integral. A metodologia prevista é qualitativa, pois através da observação das construções arquitetônicas encontradas na natureza, especificamente das abelhas, pretende-se incentivar professores e alunos a se interessarem por outros problemas elencados ao meio ambiente. A resolução de problemas, envolvendo essa abordagem prática como metodologia, contribui com o processo de aprendizagem e conhecimento.

Palavras-chave: Matemática educativa; Ensino Médio; Ensino Básico; Modelagem; Atividades pedagógicas; Geometria Analítica; Cálculo Diferencial e Integral; Conscientização ambiental.

Introdução

O desenvolvimento sustentável é um tema de grande relevância, uma vez que lida com a preservação dos ecossistemas do planeta. Por isso, é fundamental que esteja presente nos conteúdos abordados nas mais variadas disciplinas escolares. O professor é um elemento chave no processo de ensino e aprendizagem, e deve se empenhar em trazer para a sala de aula problemas práticos de natureza contextualizada. A interdisciplinaridade confronta a segmentação do conhecimento nas disciplinas, pois apesar de cada uma guardar sua especificidade, passa a se evidenciar um diálogo constante entres elas, o que proporciona inclusive o surgimento de novos campos do saber. Para D'Ambrosio (1997) interdisciplinaridade e transdisciplinaridade possibilitam até mesmo a busca de uma convivência harmoniosa com a natureza. Com essa perspectiva, são propostas nesse trabalho algumas atividades pedagógicas, na forma de exercícios direcionados a diferentes níveis educacionais, buscando estabelecer a relação da matemática com outras áreas de conhecimento (em especial, a Biologia) e com seu cotidiano.

Apesar de parte da matemática aqui desenvolvida estar um pouco além dos ensinamentos da educação básica, o intuito das atividades é sugerir aos colegas possibilidades de se destacar, em alguma medida, o processo matemático presente na construção dos alvéolos, bem como a eficiência das abelhas. Despertar um olhar para a consciência ambiental é nosso objetivo indisfarçável, que esse trabalho tenta alcançar no ambiente escolar, considerando como inconteste a importância das abelhas para o desenvolvimento sustentável e para o equilíbrio ecológico.

Interdisciplinaridade e educação ambiental

A Matemática pode servir como instrumento de investigação e compreensão da realidade que nos cerca. A contextualização dos conteúdos matemáticos e a busca de inter-relações destes com os de outras áreas do conhecimento são procedimentos inerentes ao processo de modelagem e são propulsoras da interdisciplinaridade.

A educação ambiental deve ser um caminho para sensibilizar e conscientizar os alunos. No contexto escolar, ancorada em uma perspectiva interdisciplinar e transversal, a Matemática pode se aliar a outras disciplinas, tendo por meta capacitá-los para a participação ativa e a solução de problemas ambientais.

Abelhas e algumas de suas características

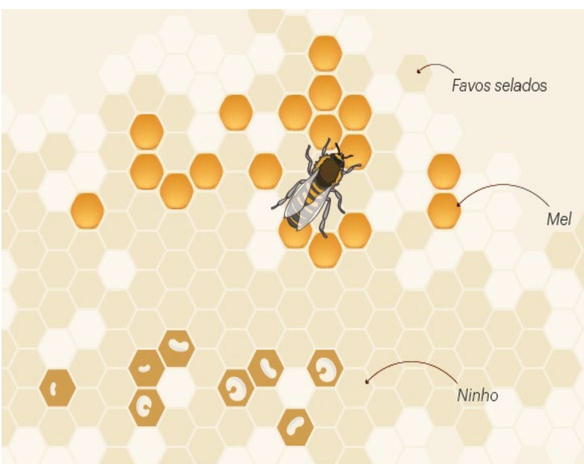
As abelhas são insetos voadores da ordem *Hymenoptera* (que significa "asas membranosas"), sendo importantes no equilíbrio ecológico devido ao efeito da polinização. Além disso, a construção de alvéolos por esses insetos oferece uma excelente oportunidade de ação pedagógica no ensino da Matemática e Ciências.

Atualmente, em nosso planeta existem mais de vinte mil espécies de abelhas; segundo Michener (1990), na família Apidae são destacadas 4 tribos: Euglossini, Bombini, Apini e a tribo Meliponini. As abelhas das tribos Meliponini e Apini são as que desenvolveram o maior nível de sociedade. As primeiras também são conhecidas como abelhas sem ferrão - comumente chamadas de nativas ou indígenas, cujo nome científico é *Meliponini* - receberam esse nome por possuírem um ferrão atrofiado. Já as Apini são abelhas com ferrão, e abrangem as abelhas australianas, europeias, africanas e as conhecidas como abelhas africanizadas, resultantes do cruzamento das abelhas europeias e africanas (Vieira, 1986; Kerr, 2001).

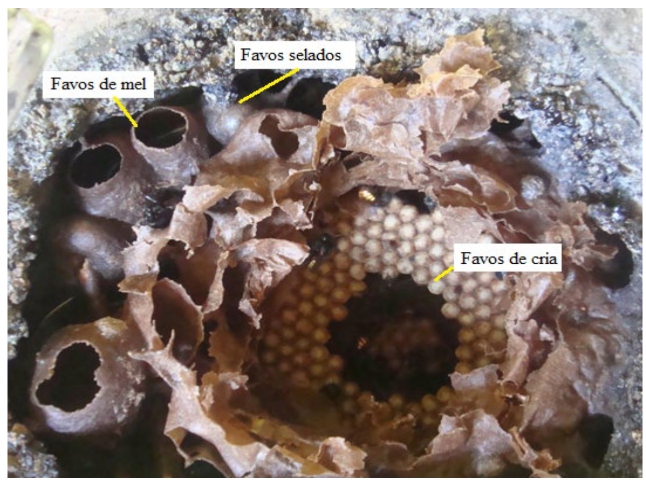
No Brasil existem aproximadamente cinco mil espécies de abelhas da família Apidae e, dentre estas, há quase trezentas e cinquenta espécies sem ferrão. No Peru existem cerca de novecentas espécies de abelhas, sendo cento e quarenta delas sem ferrão (Rasmussen & Castillo, 2003). As abelhas são responsáveis pela maior parte da polinização das flores e ainda nos fornecem cera, geleia real, mel, pólen, própolis e seu veneno; todos esses produtos são de interesse medicinal, alimentar e comercial. Apesar de sua importância, ultimamente observou-se uma redução drástica das populações de abelhas a nível mundial. Este problema, conhecido como desordem do colapso das colônias (CCD) (Pires et al., 2016), tem diversas causas, como a perda de seu habitat, quando florestas e jardins dão lugar a construções ou mesmo a plantações de monoculturas, excesso de agrotóxicos, poluição ambiental e parasitas (Bueno, 2010).

Forma dos alvéolos e potes de alimento

Os favos (conjunto de alvéolos) são construídos com a menor quantidade de cera secretada por uma glândula das abelhas operárias. As abelhas da tribo Apini constroem seus favos em forma de prismas hexagonais (Figura 1a), que armazenam o mel e servem também de berçários para suas crias. As abelhas nativas constroem dois tipos de potes elipsoidais, uns pequenos para as crias e outros maiores para armazenar mel e pólen e que ficam separados dos filhotes, conforme mostra a Figura 1b.



(a)

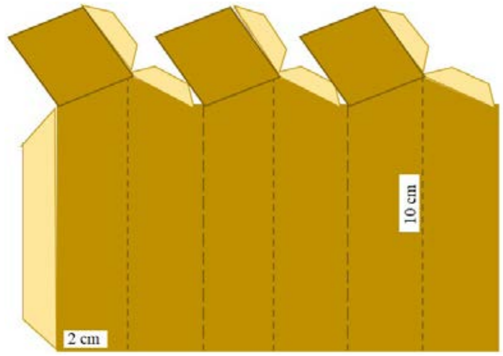


(b)

Figura 1: (a) Alvéolos hexagonais (Fonte: https://www.publico.pt/2020/05/30/infografia/mundo-abelhas) (b) Potes elipsoidais (Fonte: https://vidasustentavel.wordpress.com/2011/04/21/abelhas-nativas-sem-ferrao-2/).

Abelhas com ferrão: A arquitetura dos favos chamou a atenção de vários geômetras, como Pappus de Alexandria (350 a.C. – 290 a.C.), Johannes Kepler (1571-1630), Jean-Dominique Maraldi (1709 – 1788), entre outros. Os alvéolos destas abelhas têm a forma de prismas hexagonais regulares, abertos em uma extremidade (por onde as abelhas entram) e fechado em outra por três losangos congruentes, com ângulos diédricos medindo $\beta = 109°28'$ e $\alpha = 70°32'$. Estes valores foram determinados por Maraldi (Vaiano et al., 2015) e, independentemente do tamanho da abelhas, os valores não mudam. A união dos três losangos forma um ápice triédrico, cuja extremidade serve de fundo para outros três alvéolos. Essas abelhas vão construindo uma série de ápices triédricos a partir de um plano vertical, simultaneamente para ambos os lados, de cima para baixo. Em seguida, constroem alvéolos paralelos, projetados com uma inclinação de 9º a 13º sobre o plano horizontal, com intuito de diminuir a vazão do mel, conforme a Figura 2a.

(a)



(b)

Figura 2: (a) Inclinação dos favos encaixados (Fonte: http://www.apiariosbonadio.com.br/favo-de-mel/). (b) Planificação do alvéolo de abelha apis melífera.

Abelhas sem ferrão: Os ninhos dos meliponíneos são construídos com cerume – um composto de diversos materiais encontrados na natureza, misturados com a cera secretada por elas e com uma resina (própolis), feita de materiais recolhidos de árvores ou arbustos. Elas costumam nidificar em diversos locais, como em troncos de madeira, a partir de cavidades já existentes (cupinzeiro), em copas de árvores, em postes de luz ou até mesmo abaixo do solo.

As células de cria têm um formato elipsoidal e agrupadas em forma de discos sobrepostos e unidos com pilastras de cera ou construídos com uma disposição espiralada. Em algumas espécies, estas células se assemelham a um cacho de uvas, unidas com filamentos finos de cerume (Kerr et al., 2001). Já os potes de alimento são maiores e em forma elipsoidal, conforme mostra a Figura 1b. Algumas espécies, como a Lambe-olhos, constroem pequenos potes que se assemelham a octaedros truncados quando estão sobrepostos.

Atividades pedagógicas

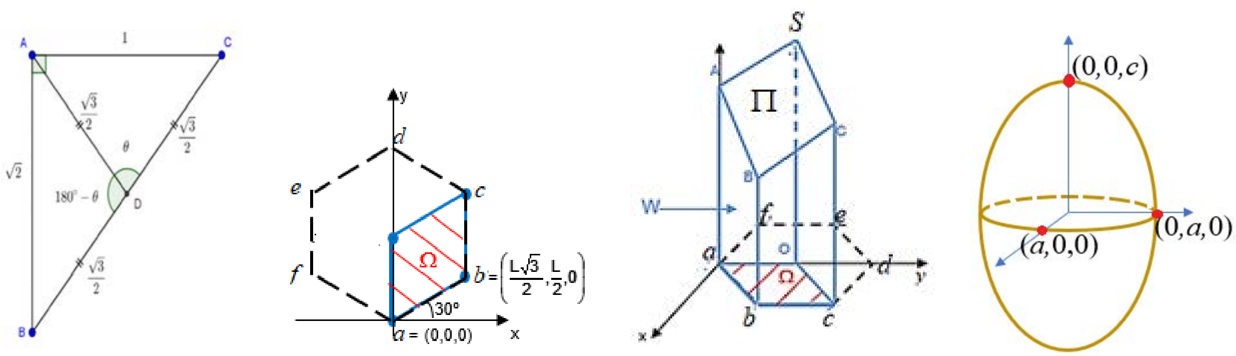
A seguir listamos algumas atividades pedagógicas para vários níveis educacionais que visam a prática da interdisciplinaridade através da presença da matemática na natureza. Antes de iniciar as atividades, é interessante que o professor, em conjunto com o professor de Biologia, converse com a turma sobre a importância das abelhas na natureza e desperte sua curiosidade quanto à organização de uma colmeia e da construção dos favos. O professor pode também tratar de aspectos relacionados à atividade econômica de apicultura e meliponicultura (criação das abelhas sem ferrão), juntamente com o professor de Geografia. O professor de Redação também pode ser incluído nesse tipo de trabalho interdisciplinar, para que se gere uma pesquisa escrita.

Atividade 1: Considerando triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, determine o menor perímetro e a maior área abrangida para ladrilhar o plano euclidiano.
Objetivo: Mostrar que o hexágono regular é a figura ideal, lembrando que a estrutura dos alvéolos das abelhas apis são hexagonais.

Procedimento: Determinar, junto com os alunos, as condições de ladrilhamento e concluir qual polígono regular (de 3 lados, 4 lados ou 6 lados) possui menor perímetro, uma vez fixada sua área. Sugere-se ao professor expor previamente uma aula sobre ângulos internos e áreas dos principais polígonos regulares. Para maiores detalhes veja Menezes (2017).
Público-alvo: 1º ou 2º ano do Ensino Médio.

Atividade 2: Usando a planificação dos favos hexagonais (Figura 2b), imprima em cartolina, recorte e forme um alvéolo. Reúna e cole os alvéolos formando um favo da colmeia.
Objetivo: Manipular e explorar os favos hexagonais, auxiliando a construção e a fixação dos conceitos geométricos envolvidos de maneira lúdica.
Público-alvo: Ensino Fundamental.

Atividade 3: Sabe-se que uma colônia de abelhas mandaçaia (*Melipona quadrisfaciata*), com aproximadamente 500 abelhas operárias, é capaz de produzir até 2,5 litros de mel por ano, enquanto um enxame de abelhas africanizadas, com 60 mil abelhas produz até 20 litros de mel por ano. Qual é a proporção de mel entre as abelhas citadas?
Objetivo: Trabalhar a regra de três simples.
Procedimento: Através da regra de três simples, pode ser determinada a quantidade necessária de operárias de cada espécie para produzir um litro de mel. Depois comparar os resultados, mostrando que as abelhas nativas produzem 15 vezes mais mel que as apis.
Público-alvo: Ensino Fundamental



(a) (b) (c) (d)

Figura 3: (a) Segundo triângulo retângulo do dispositivo de Teodoro. (b) Projeção do prisma hexagonal no plano XY. (c) Um terço do prisma hexagonal. (d) Esquema de pote elipsoidal.

Atividade 4: Considerado o triângulo da Figura 3a, verifique que o valor do ângulo agudo θ é 70°32' e de seu complementar é 109°28'.
Objetivo: Observar que os ângulos θ e 180°- θ, formados pela mediana relativa à hipotenusa e a hipotenusa de um triângulo retângulo encontrado no conhecido dispositivo de Teodoro, coincidem com os ângulos do triedro dos alvéolos das abelhas apis (Menezes, 2017).
Procedimento: Sabendo que a mediana relativa de qualquer triângulo retângulo à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa, então $\overline{AD}$ mede $\overline{BC}/2$ (Figura 3a). Aplicando a lei dos cossenos ao ΔADC, tem-se o valor de θ.
Sugere-se ao professor expor previamente uma aula sobre triângulos retângulos.
Público-alvo: 1º ou 2º ano do Ensino Médio.

Atividade 5: Supondo que o lado de um hexágono mede L cm, identifique um dos vértices com a origem (Figura 3b) e escreva as coordenadas dos outros vértices.
Objetivo: Descrever as coordenadas dos pontos do hexágono regular no plano XY.
Procedimento: Identificar cada ponto, observando a figura dada (veja a resposta na atividade 8).
Público-alvo: 3º ano do Ensino Médio ou alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

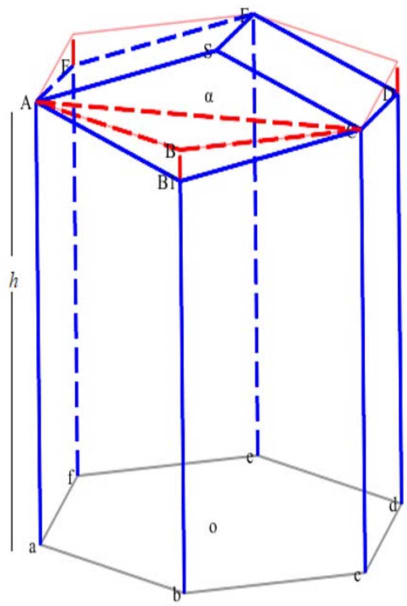
Atividade 6: Verifique que o volume do alvéolo (Figura 3c) é $V = 3W = \dfrac{3L^2h\sqrt{3}}{2}$.
Objetivo: Determinar o volume de mel de um alvéolo da abelha apis, através de integrais triplas.
Procedimento: O volume da região $W = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{IR}^3 \;/\; 0 \le z \le \Pi \quad \text{e} \quad (x, y) \in \Omega\right\}$, onde $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathrm{IR}^2 \;\Big/\; 0 \le x \le \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + L\right\}$ e Π é o losango *ASCB₁* (Figura 4), pode ser obtido por meio de integrais triplas.
Público-alvo: Alunos de Cálculo de Várias Variáveis.

Atividade 7: Sabe-se que os potes de mel de uma espécie de abelha nativa são semelhantes a elipsoides. O volume de um elipsoide de revolução é dado por $V(E) = \dfrac{4\pi a^2 c}{3}$, onde a é a metade do diâmetro e c a metade da altura do pote (Figura 3d). (a) Encontre o volume de mel desse pote, sabendo que um pote de mel das abelhas Uruçus amarela tem 3,5 cm de diâmetro e 4,0 cm de altura. (b) Utilizando integrais triplas, verifique que o volume deste elipsoide de revolução E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ é dado por $V(E) = \dfrac{4\pi a^2 c}{3}$.
Objetivo: Determinar o volume de mel que cabe em um alvéolo da abelha melípona. No Ensino Médio o professor pode utilizar a fórmula dada; no Ensino Superior pode ser uma aplicação das integrais triplas.
Procedimentos: (a) O professor pode auxiliar na determinação dos valores de *a* e *c*, utilizando a calculadora para obter o volume aproximado dos potes de mel das Uruçus amarelas de 25,656 cm^3. Lembre-se que cada sachê de mel contém 4 cm^3.
(b) Considerar o elipsoide de revolução E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$, onde *a* e *c* são constantes reais positivas e representam as medidas dos semieixos das três elipses obtidas no corte do elipsoide pelos planos coordenados $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente. O volume de E é obtido por $V(E) = \iiint_E dxdydz$. Utilizando coordenadas esféricas, temos $V(E) = \iiint_{\tilde{E}} a^2 c \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$, $0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < \pi$ (Andrade, 2020; Guidorizzi, 2015).
Público-alvo: (a) Ensino Médio; (b) Alunos de Cálculo de Várias Variáveis.

Atividade 8: Supondo que a altura de um alvéolo de uma abelha apis mede *h* cm e o lado do hexágono mede *L* cm, verifique as coordenadas espaciais dadas na Figura 4.
Objetivo: Descrever as coordenadas espaciais dos vértices de um alvéolo.
Procedimento: O professor pode utilizar algum aplicativo, como o Geogebra, Maple, etc., para mostrar a figura em IR^3 ou formar um alvéolo (Atividade 2) para melhor entendimento.
Público-alvo: Alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

Atividade 9: Considere os vetores $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{AB_1}$ (Figura 4).

a) Encontre o ângulo entre estes vetores.
b) Determine a equação do losango Π*: ASCB₁*.



$a=(0,0,0)$ $A=(0,0,h)$

$b=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},0\right)$ $B=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h\right)$ $E=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},h\right)$

$c=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},0\right)$ $B_1=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h-m\right)$ $F=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h\right)$

$d=(0,2L,0)$ $C=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},h\right)$ $F_1=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h-m\right)$

$e=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},0\right)$ $D=(0,2L,h)$ $S=(0,L,h+m)$;

$f=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},0\right)$ $D_1=(0,2L,h-m)$ onde $m=\sqrt{3\tan^2\frac{\theta}{2}-1}$

$o=(0,L,0)$

Figura 4: Alvéolo hexagonal e vértices.

Objetivo: Aplicação de um problema real, com álgebra vetorial.
Procedimento: A equação do plano que passa por *ASCB₁* é dada por $\Pi:(P-P_o)\cdot\vec{\eta}=0$, onde η é o vetor normal definido por $\vec{\eta}=\overrightarrow{AS}\times\overrightarrow{AB_1}$, $P=(x,y,z)$ e $P_o=A$. O valor de *m* é determinado utilizando relações trigonométricas.
Público-alvo: Alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

Atividade 10: Admitindo que as dimensões dos potes de abelhas mandaçaia medem 2,5 cm de diâmetro e 3 cm de altura, (a) determine o volume desses potes; (b) calcule a quantidade de cerume utilizada na construção do pote de alimento, supondo que ele tem uma espessura de 1 mm (área superficial) (Andrade, 2020).
Objetivo: Aplicação de integral de superfície e integral tripla.
Procedimento: O volume de mel é determinado utilizando a fórmula obtida na Atividade 7: $V(E)=\frac{4\pi a^2 c}{3}$. Para determinar a área da superfície E, usamos a representação paramétrica $r(u,v)=(a\cos u\,\mathrm{sen}v, a\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v, c\cos v),(u,v)\in T$. A área da superfície de revolução é $A(E)=\iint_T \|r_u\times r_v\|du\,dv; T=[0,2\pi[\times[0,\pi[$. Respostas: V=9,82 cm^3, A(E)=22,29 cm^2.
Observação: Independentemente da espécie de abelhas, pode ser notado que elas minimizam a quantidade de cera ou cerume para a construção de seus favos de cria, mel e/ou pólen.
Público-alvo: (a) Ensino Médio; (b) Ensino Superior.

Considerações finais

Problemas contextualizados evidenciam a importância da Matemática junto às demais disciplinas do currículo escolar, como por exemplo Geografia, Ciências e Português, rompendo as barreiras criadas entre as disciplinas, além de gerarem um processo de pesquisa e conhecimento por parte do aluno.

Com este trabalho esperamos despertar nos leitores um maior interesse no estudo de problemas práticos e, em particular, na arquitetura dos alvéolos das abelhas e sua conexão com a geometria. Pretendemos contribuir também para o processo de conscientização ambiental. Algumas espécies de abelhas nativas possuem menos de 5 mm e infelizmente são confundidas e aniquiladas como se fossem mosquitos, portanto sugerimos que nos livros escolares sejam divulgadas algumas fotografias das abelhas nativas.

Referências e bibliografia

Andrade, R. V. (2020). *Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de abelhas nativas*. [Dissertação de Mestrado, PROFMAT, FFP, UERJ]. https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5773&id2=171030928

Bueno, J. F. (2010). *Sistema automatizado de classificação de abelhas baseado em reconhecimento de padrões*. [Tese de Doutorado em Engenharia, Escola Politécnica, USP]. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3141/tde-10012011-114124/publico/Tese_Jesus_Franco_Bueno.pdf

D´Ambrosio, U. (1997). *Transdisciplinaridade.* (3a ed.). Palas Athena.

Guidorizzi, H. L. (2015). *Um curso de Cálculo*. (5a ed., *Vol. 3*). LTC.

Kerr, W. E., Carvalho, G. A., da Silva, A. C., & de Assis, M. G. P. (2001). Aspectos pouco mencionados da biodiversidade amazônica. *Parcerias estratégicas, 12*, 20-41.

Menezes, F. R. (2017). *A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos*. [Dissertação de Mestrado, PROFMAT, IME, UERJ]. https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/4865

Michener, C. D. (1990). Classification of the Apidae. *University of Kansas Science Bulletin*, 54, 140 − 152.

Pires, C. S. S., Pereira, F.M., Lopes, M.T.R., Nocelli, R.C.F., Malaspina, O., Pettis, J. S., & Teixeira, E. W. (2016). *Enfraquecimento e perda de colônias de abelhas no Brasil: há casos de ccd?. Pesq. Agropec. Bras*, 51(5), 422-442.

Rasmussen, C., & Castillo P. (2003). Estudio preliminar de la meliponicultura o apicultura silvestre en el Perú (Hymenoptera: Apidae: Meliponini). *Rev. Per. Ent*., 43, 159 -164.

Vaiano, A. Z., Márquez, R. G., & Araújo, J. (2015). Abelhas Africanizadas e Construções Geométricas. *Anais do VIII Congresso Scientiarum História.* HCTE/UFRJ.

Vieira, M. I. (1986). *Apicultura Atual: Abelhas Africanizadas - melhor adaptação ecológica, maior produtividade, maiores lucros.* Editora Nobel.

Contexto, Matematización y Visualización Matemática. El caso de las Esculturas Andaquíes para el Aprendizaje de la proporcionalidad

Mauricio **Penagos**
Licenciatura en Matemáticas, Universidad Surcolombiana
Colombia
mauriciopenagos@usco.edu.co
Augusto **Silva** Silva
Licenciatura en Matemáticas, Universidad Surcolombiana
Colombia
augusto.silva@usco.edu.co
Karen Tatiana **Barreiro** Másmela
Licenciatura en Matemáticas, Universidad Surcolombiana
Colombia

Resumen

La enseñanza de las matemáticas tradicionalmente se ha basado en la memoria, la repetición y el instrumentalismo, produciendo actitudes aversivas en el aprendizaje. Los estudiantes al avanzar grado tras grado sus actitudes hacia las matemáticas se hacen más negativas (Núñez et al. (2005). Investigadores en educación matemática han diseñado marcos para la enseñanza que proponen estrategias educativas activas buscando promover el interés de los estudiantes. Las nuevas tecnologías han resultado motivantes, pero su implementación depende del conocimiento del docente y los recursos tecnológicos de las instituciones (Díaz, 2017). En San Agustín (Huila) - Colombia, se encuentra un parque arqueológico (patrimonio histórico de la humanidad) con construcciones megalíticas, estatuas, tumbas y petroglifos. Tomando en cuenta la cercanía del municipio de Gallardo de este parque, se diseñó una secuencia didáctica utilizando la estatuaria agustiniana para enseñar el concepto de proporcionalidad a los estudiantes de grado décimo de secundaria.

Palabras clave: Educación Secundaria, Matematización, Visualización; Contexto; Proporcionalidad, Ministerio de Educación Nacional; Colombia.

Introducción

En Colombia, en las zonas rurales es difícil implementar estas estrategias dadas las escasas condiciones y falta de recursos, por lo que los docentes muchas veces se ven obligados a implementar otras estrategias. En el municipio de San Agustín (Huila) - Colombia, se ubica el parque arqueológico de San Agustín (patrimonio histórico de la humanidad UNESCO – 1995). Los vestigios de esta cultura ancestral son: construcciones funerarias megalíticas, estatuas, sarcófagos, tumbas, terraplenes, montículos y petroglifos. Tomando en cuenta la cercanía del municipio de Gallardo del parque de San Agustín, se diseñaron actividades utilizando la estatuaria agustiniana para enseñar el concepto de proporcionalidad a los estudiantes de grado décimo de secundaria.

En relación con la estatuaria y en general con el arte, hay muchas investigaciones que se han enfocado en estudiar la matemática involucrada. Coronado (2007) muestra ejemplos de existencia de proporciones matemáticas en la pintura, la arquitectura y la escultura. Rengifo (1966), encontró que las estatuas Agustinianas fueron construidas bajo el concepto de proporción armónica, a partir del concepto de planigrafía, y que los elementos básicos en la estatuaria son el rectángulo y el cuadrado. Urbano (2010), con del Cabri Geometry II Plus encontró que en el diseño de las estatuas agustinianas se manejaron conceptos geométricos como traslaciones, rotaciones, simetrías y ejes perpendiculares. Velandia-Jagua (2015), encontró, que el diseño de la estatuaria se fundamenta en la proporción armónica, aunque en algunos casos no se cumple de forma estricta.

En lo que respecta a la enseñanza de las razones y proporciones también se encuentran importantes aportes relacionados con el arte y la estatuaria. Ferrado y Segura (2013), diseñaron una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporción a partir de los diferentes usos y significados que se le han otorgado a través de la historia del arte. Urbano (2018), se enfocó en el diseño de tareas utilizando ambientes de geometría dinámica y las representaciones geométricas de las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial, logrando que los estudiantes visibilizaran elementos del conocimiento matemático de la esta civilización.

Marco Teórico

Las actividades se diseñaron con base en el modelo de matematización propuesto por Freudenthal (1991), quien mostró la necesidad de conectar la enseñanza de la matemática con la realidad cercana del estudiante. La matematización es el proceso mediante el cual el estudiante confronta un problema de su realidad (Mundo Real), para transformarlo en estructuras matemáticas conocidas (Mundo Matemático) y posteriormente entrar a solucionar la situación problema (OCDE, 2005). Sumado a esto, Rico (2007), propone dos fases para la matematización: una horizontal, la cual el estudiante traduce los problemas de su contexto al mundo matemático y, posteriormente, la matematización vertical, en la que el estudiante utiliza conceptos y destrezas matemáticas para afrontar la problemática a la que se enfrenta.

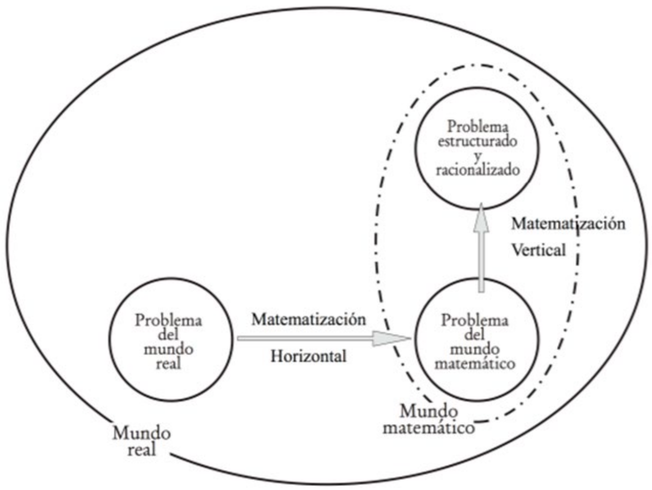


Figura 1. Proceso de Matematización propuesto por Luis Rico

De esta manera, las actividades se diseñaron tomando el modelo de matematización, con la intención de que el estudiante transite del mundo real al matemático y así obtenga un aprendizaje relevante para él, significativo.

Metodología

El enfoque de investigación es mixto, de tipo descriptivo. Se diseñó una secuencia didáctica de actividades sobre proporcionalidad utilizando algunas de las estatuas. Se realizó un estudio Pre y Post-Test y se implementó una secuencia de tres actividades de matematización de las esculturas Andaquíes para la enseñanza de la proporcionalidad en estudiantes de secundaria.

Se empleó el modelo instruccional ADDIE, que Branch (2009), define como un prototipo que integra cinco etapas (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación) para la creación de recursos educativos, con el fin de mantener una alineación entre las diferentes necesidades, propósitos, objetivos, metas, estrategias y evaluaciones durante todo el proceso. Para el diseño de la secuencia didáctica, se tuvo en cuenta lo propuesto por Díaz-Barriga (2013) quien resalta que, se trata de un instrumento que requiere del conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y de la experiencia y visión pedagógica del profesor.

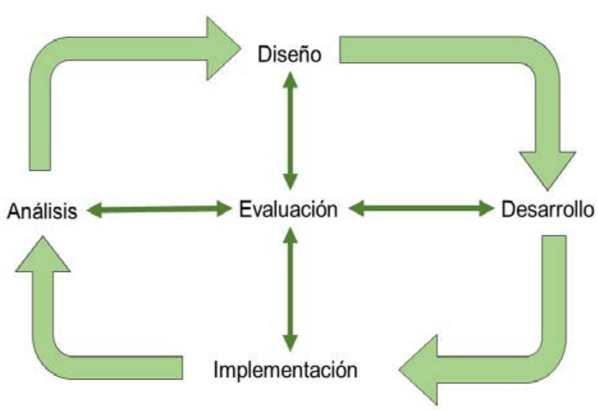


Figura 2. Proceso ADDIE con base en Branch (2009)

Población y Muestra

La población la constituye los estudiantes de la Institución Educativa Gallardo de Suaza-Huila-Colombia. La muestra está conformada por 22 estudiantes de grado décimo de secundaria, sus edades oscilan entre 14 y 17 años. Estos sujetos de estudio se caracterizan por ser individuos que viven en la zona rural y conocen su contexto cultural relacionado con la cultura Agustiniana.

Resultados

La secuencia de actividades basada en la matematización de las estatuas Andaquíes favoreció significativamente el aprendizaje de los estudiantes en los temas de razón, proporcionalidad directa e inversa. Se evidenció un aumento del resultado promedio de los estudiantes en las pruebas realizadas antes (Pre-Test) y después de la implementación de la secuencia (Post Test).

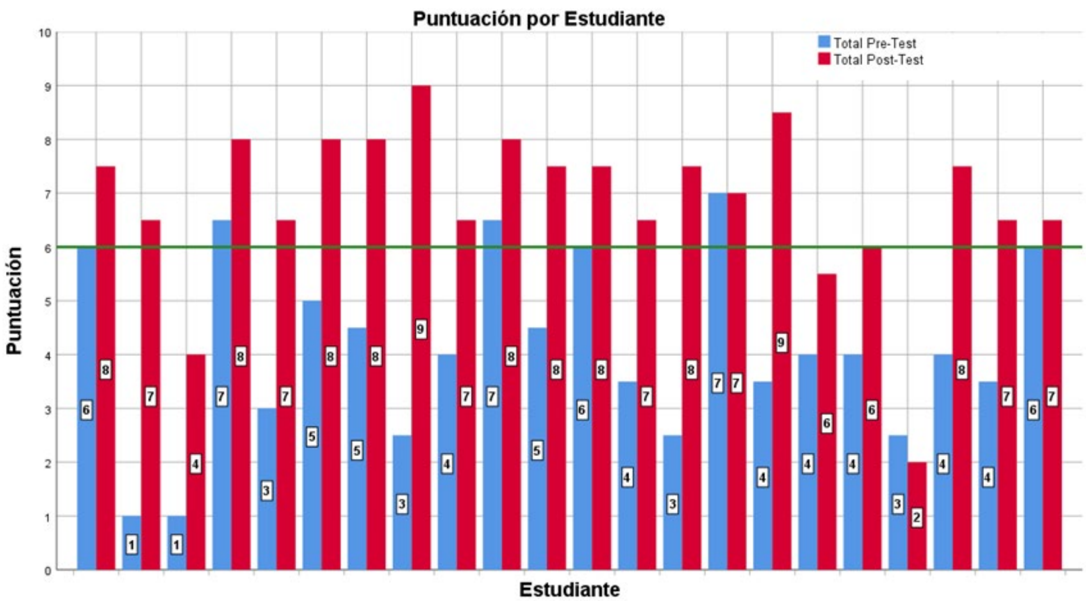


Figura 3. Distribución de puntajes de los estudiantes en Pre y Post test. Elaboración propia

Las estatuas agustinianas constituyen una parte de la cultura de la región que les es familiar a los estudiantes, favorece su responsabilidad y los motiva a la solución de problemas. Los estudiantes abordaron los problemas de razón y proporcionalidad directa e inversa, mediante la identificación de los elementos de las estatuas, la matematización de sus longitudes, la relación entre ellas y el cálculo de las proporciones y constantes de proporcionalidad. En general los estudiantes desarrollaron un conjunto amplio de habilidades y competencias relacionadas con el tema y que están en la misma ruta que los estándares planteados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

El presente trabajo pone en evidencia la importancia de la contextualización de las actividades, el uso de problemas en lugar de ejercicios tradicionales, la justificación en los procedimientos de solución y el carácter comprensivo y explicativo de los procesos más allá del puramente mecanicista.

Esta investigación se puede extender hacia el uso de la geometría dinámica y así fomentar en los estudiantes la comprensión de los conceptos en un nivel de dominio mayor, eliminando de paso posibles concepciones de unicidad de las respuestas. El uso de las TIC puede facilitar los cálculos para la resolución de los problemas, dinamizar los planteamientos para llegar a otros niveles más avanzados y expandir las experiencias del estudiante en el aprendizaje del tema.

Se recomienda enfocar estas actividades de matematización a diferentes temáticas de aprendizaje dentro de las matemáticas como el álgebra de polinomios, la geometría analítica y la trigonometría; estas ramas pueden beneficiarse de la contextualización con elementos reales del entorno de los estudiantes y del análisis de las características inmersas en figuras, objetos, situaciones o fenómenos. No cabe duda de que, dejar de lado estos procesos de matematización implica la pérdida de una oportunidad para el avance del conocimiento de los estudiantes, del dominio de las técnicas y procedimientos, y de la comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

Bibliografía y Referencias

Branch, R. M. (2009). Instructional design: The ADDIE approach (Vol. 722). Springer Science & Business Media.

Coronado, J. P. (2007). Las matemáticas y las artes liberales. Dibujo técnico y matemáticas: una consideración interdisciplinar, 91.

Díaz, J. E. M. (2017). Tecnologías emergentes, reto para la educación superior colombiana. Ingeniare, (23), 35-57.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. UNAM, México, consultada el, 10(04), 1-15.

Ferrando, I., y Segura, C. (2013). Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte. Modelling in Science Education and Learning, 6(1), 61-71.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Kluwer, Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Gómez-Collado, M. C., Puchalt, J., Sarrió, J., y Trujillo, M. (2013). Modelización de esculturas en la enseñanza de las matemáticas. Modelling in Science Education and Learning, 6(2), 33-41.

Núñez, J. C., González-Pienda, J. A., Alvarez, L., González-Castro, P., González-Pumariega, S., Roces, C., y Rodrigues, L. S. (2005). Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. In Actas do VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagoxía (pp. 2389-2396).

Rengifo, L. (1966). La proporción Armónica en la estatuaria Agustiniana. Universidad Nacional. Imprenta nacional.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1(2), 47-66.

Urbano, R. A. (2010). Geometría en la Esculturas del Parque Arqueológico de San Agustín. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 3(1), 45-66.

Urbano, R. A. (2018). Un diseño de tareas que integra AGD y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto (tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Contribuições de uma intervenção cognitiva computadorizada: um estudo de caso de uma estudante com Discalculia do Desenvolvimento

Isabel Cristina Machado de **Lara**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS
Brasil
isabel.lara@pucrs.br
Lanúzia Almeida Brum **Avila**
Educinter
Brasil
lanuzia.avila@gmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática. Tem como objetivo refletir sobre as habilidades matemáticas de uma estudante na avaliação e seu desempenho após a intervenção cognitiva computadorizada. A avaliação foi constituída pelos seguintes instrumentos: anamnese com os responsáveis; Teste de Transcodificação; Prova de Aritmética e, Subteste de Aritmética. Foi desenvolvida com a estudante, a intervenção, com a utilização do *software* Calcularis®. Após a realização da intervenção, foram reaplicados os testes utilizados anteriormente, na intenção de realizar a reavaliação das habilidades matemáticas. Para analisar os resultados obtidos, seguiu-se o indicado pela literatura de cada teste. Os resultados evidenciam que a intervenção contribuiu para potencializar as habilidades aritméticas em relação ao processamento numérico, adição e subtração, multiplicação e resolução de problemas.

Palavras-chave: Discalculia do Desenvolvimento; Habilidades matemáticas; Avaliação; Potencialização; Intervenção Cognitiva Computadorizada.

Introdução

Historicamente, a Matemática tem sido considerada uma disciplina de difícil entendimento, o que acaba por justificar as Dificuldades de Aprendizagem em Matemática – DAM –

apresentadas por alguns estudantes. Todavia, conforme Haase (2017), essa percepção de que é normal apresentar DAM, vem sendo questionada, no Brasil, desde o início do século passado, quando iniciaram estudos priorizando a Matemática, levando pesquisadores à busca da compreensão das dificuldades, na intenção de diagnosticar e elaborar intervenções eficazes.

Conforme Santos (2017), alguns estudantes com DAM conseguem superar suas dificuldades com aulas de reforço e muito estudo. Contudo, para outros são insuficientes essas estratégias, pois apresentam Transtorno de Aprendizagem em Matemática – TAM, o que acaba por comprometer habilidades matemáticas, necessitando de intervenções que objetivem potencializar as habilidades em defasagem (Santos, 2017).

Em relação ao TAM, mais conhecido como DD, a prevalência, baseada em estudos epidemiológicos, encontra-se entre 3% e 6,5% (Devine; Fawcett; Szucs; Dowker, 2013). Entretanto, os autores (2013) destacam que ainda há controvérsias em relação à definição de DD, notas de corte, possíveis origens genéticas e sobre o perfil cognitivo dos estudantes. Sendo assim, as informações sobre esse transtorno, segundo Santos (2017) e Lara (2022), ainda são ambíguas quanto ao conceito, aos critérios para diagnosticar e, principalmente, à maneira mais adequada de realizar as intervenções. Consciente dessa problemática, este artigo tem como objetivo refletir sobre as habilidades matemáticas de uma estudante, que possui DD, na avaliação e seu desempenho após a intervenção com o *software* Calcularis® (Käser; Baschera; Kohn; Kucian; Richtmann; Grond; Markus; Von Aster, 2013).

Discalculia do Desenvolvimento

Estudos sobre a DD vêm sendo desenvolvidos internacionalmente desde a década de 1940. Gerstmann (1940 apud Myklebust; Jhonson, 1962) e Cohn (1961 apud Myklebust; Jhonson, 1962) referem-se à DD como sendo uma disfunção cerebral, com prejuízos significativos para reconhecer e manipular os números. Entre as definições acerca de DD existentes, destaca-se a de Košč (1970 apud KOŠČ, 1974, p. 165), na qual o autor define:

> […] is a structural disorder of mathematical abilities which has its origin in a genetic or congenital disorder of those parts of the brain that are the direct anatomico-physiological substrate of the maturation of the mathematical abilities adequate to age, without a simultaneous disorder of general mental functions.[1] (1970, p. 192 apud Košč, 1974, p. 165).

Lara (2022) e Avila (2022) mostram em seus estudos que a DD acomete as habilidades matemáticas, necessitando de avaliação e tratamento multidisciplinar, no intuito de possibilitar ao estudante potencializar as habilidades apresentadas e estimular a superação das habilidades que estão em defasagem. Todavia, Avila, Lima e Lara (2019) realizaram uma Revisão Sistemática da Literatura, acerca das produções desenvolvidas no Brasil sobre a DD, identificando um número reduzido de pesquisas, sobre a avaliação e intervenção.

---

[1] *[...] é uma disfunção estrutural de habilidades matemáticas, que tem sua origem numa deficiência genética ou congênita dessas partes do cérebro, que são os substratos anatômico-fisiológicos diretos da maturação das habilidades matemáticas de acordo com a idade, sem uma disfunção simultânea de funções mentais gerais (tradução nossa).*

Dentre as propostas de intervenção, de acordo com Santos (2017), destaca-se a abordagem pedagógica e a abordagem cognitiva. A abordagem pedagógica prioriza o uso de materiais manipulativos e com *feedback* aos estudantes, informando seu desempenho (Iuculano, 2016). Dentre esses materiais, Butterworth; Varma; Laurillard (2011) mencionam a utilização do Cuisenaire, faixas numéricas e jogos de cartas. No que tange a abordagem cognitiva, Santos (2017) refere-se a treinos adaptativos, por meio de intervenções computadorizadas, com o objetivo de estimular o senso numérico e a aritmética. Dentre alguns *softwares*, destaca-se o Calcularis® (Käser *et al.*, 2013).

Procedimentos Metodológicos

Na pesquisa, a qual originou o artigo, optou-se pelo método misto de pesquisa, com o intuito de analisar os resultados de cada estudante nos instrumentos de avaliação, pré e pós-intervenção. Vale ressaltar, que o projeto original foi aprovado pelo Comitê de Ética e os termos de consentimento e de assentimento assinados. Trata-se de estudo prospectivo de delineamento experimental de caso único, em que cada estudante foi analisado individualmente, servindo como seu próprio controle. Para realizar a avaliação psicopedagógica, utilizou-se como instrumentos: Teste de Transcodificação (Moura; Madeira; Chagas; Lonnemann; Krinzinger; Willmes; Haase, 2013); Prova de Aritmética (Seabra; Montiel; Capovilla, 2013); Subteste de Aritmética – versão 1º ao 5º ano (Stein; Giacomoni; Fonseca, 2019), na avaliação pré e pós-intervenção. Neste artigo, apresentam-se os resultados da estudante Bruna.

O processo de intervenção, foi realizado com a estudante utilizando-se de 25 sessões[2] com o *software* Calcularis® (Käser *et al.*, 2013), três vezes por semana, com cerca de 20 minutos, com dias e horários estabelecidos. Devido ao contexto pandêmico, as sessões de intervenção foram realizadas por meio de vídeo chamada. Calcularis® (Käser *et al.*, 2013), baseia-se na teoria neurocognitiva de cognição numérica, estudada por Kohn, Rauscher, Kucian, Käser, Wyschkon, Günter, von Aster (2020). Conforme Kohn *et al.* (2020), tem como objetivo automatizar representações de números, melhorar o acesso à reta numérica mental e treinar operações aritméticas, por meio de jogos que se adaptam ao desempenho dos estudantes.

Ao participar da pesquisa, Bruna tinha 11 anos e estava cursando o 5º ano do Ensino Fundamental. Durante a anamnese, os pais mencionaram que desde o 2º ano do Ensino Fundamental a estudante apresentava dificuldades em leitura e em Matemática. Além disso, destacaram que mesmo tendo acompanhamento psicopedagógico, aulas de reforço e aulas particulares, teve poucos avanços. Bruna tem QI Total de 89, com classificação Média Inferior, com diagnóstico de transtornos relacionados a F90.0 (predomínio da desatenção), R48.0 (Dislexia) e F81.2 (Transtorno específico da habilidade em aritmética - Discalculia).

Análise dos resultados

Com o objetivo de comparar o desempenho da estudante, a seguir, destacam-se os resultados obtidos por Bruna nas avaliações realizadas pré e pós-intervenção em cada um dos instrumentos de avaliação. Com o objetivo de avaliar os aspectos relacionados à transcodificação

[2] *Conforme recomendado no Guia do tutor Calcularis.*

numérica, em particular às habilidades envolvidas na leitura e na escrita de 28 números de um a quatro dígitos, realizou-se com a estudante o Teste de Transcodificação (MOURA *et al.*, 2013). Na avaliação pré-intervenção, na etapa de leitura dos números, Bruna leu corretamente 14 números. A estudante apresentou dificuldade na leitura de números com dois, três e quatro dígitos. Em relação à escrita dos números, obteve êxito na escrita de 19 números. Bruna teve dificuldades na escrita de números com três e quatro dígitos. Após, a intervenção realizada, Bruna obteve êxito na leitura de 20 números, apresentando dificuldade somente na leitura de números com quatro dígitos. Na etapa dois do teste, escrita dos números, Bruna escreveu corretamente 22 números, obtendo avanços na escrita de números com três e quatro dígitos.

Para avaliar a competência aritmética, incluindo os componentes processamento numérico e cálculo, aplicou-se a Prova de Aritmética (Seabra; Montiel; Capovilla, 2013), a qual tem como pontuação máxima 60 pontos. Na avaliação realizada antes da intervenção, Bruna obteve 27 acertos. A partir da correção e análise da Prova de Aritmética, foram observadas dificuldades no desempenho da estudante. A saber: escrita por extenso de números com quatro dígitos, na ordem crescente e decrescente; operações de adição com números a partir de um dígito na primeira e na segunda parcelas, com e sem transporte; subtração de números a partir de um dígito no minuendo e no subtraendo, com e sem retorno; multiplicação com números a partir de dois dígitos no multiplicando e um dígito no multiplicador; dificuldades acentuadas em divisão; e, resolução de problemas. Na reavaliação, após o período de intervenção, a estudante obteve 43 acertos, sendo possível averiguar a potencialização das habilidades matemáticas referente à adição, subtração, multiplicação e resolução de problemas.

E por fim, para complementar o protocolo dos instrumentos de avaliação, e avaliar as habilidades aritméticas, foi aplicado o Subteste de Aritmética (Stein; Giacomoni; Fonseca, 2019) versão 1º a 5º ano, no qual a pontuação máxima é de 37 pontos. Na avaliação pré-intervenção, Bruna obteve 18 acertos. Porém, a partir da correção e análise qualitativa do desempenho da estudante no Subteste, observou-se prejuízos nas habilidades relacionadas à enumeração de quantidades maiores do que dez; resolução de problemas; posicionamento de um número na reta numérica; dificuldades na subtração de números a partir de dois dígitos no minuindo e no subtraendo, com e sem retorno; subtração de equalização com números de três dígitos; multiplicação com números a partir de dois dígitos no multiplicando e um dígito no multiplicador; divisão com números a partir de um dígito no dividendo e no divisor; e, frações. Após a intervenção com Calcularis®, dos 37 pontos, Bruna obteve 23 acertos, mostrando avanços, embora persistissem defasagens em algumas das habilidades matemáticas.

Considerando a análise qualitativa das avaliações realizadas com a Bruna, é possível concluir que, após o período de intervenção com o Calcularis®, a estudante manteve algumas habilidades matemáticas e potencializou outras. Referente ao domínio de transcodificação numérica, em específico no Teste de Transcodificação, a estudante apresentou avanços na leitura de números de dois e três dígitos. Na escrita dos números, escreveu corretamente três números nos quais havia apresentado erros no teste pré-intervenção. As sessões de intervenção possibilitaram a potencialização de algumas habilidades de leitura e escrita dos números, por meio de exercícios sobre a representação numérica, possibilitando o treinamento de estímulos numéricos, com diferentes representações dos números na forma arábica e verbal. Contudo, devido ao número de sessões, a estudante teve a oportunidade de treinar apenas com números de 0 a 20, isso justifica a permanência das defasagens em relação aos números de quatro dígitos.

Sobre o domínio senso numérico, a estudante manteve as habilidades referente ao reconhecimento de grandezas, potencializando habilidades referentes à enumeração de quantidades maiores que dez e à posição de um número na reta numérica. No período em que a estudante realizou as intervenções com o Calcularis®, uma variedade de jogos treinou essa habilidade, por meio de exercícios acerca da percepção, compreensão e estimativa de quantidades. Além da localização de números na reta numérica, com o propósito de potencializar habilidades básicas para a construção e acesso à linha numérica mental.

Em se tratando do domínio operações aritméticas com números naturais, em específico nas habilidades matemáticas relacionadas à resolução de cálculos de adição com números a partir de um dígito na primeira e na segunda parcelas, sem e com transporte, Bruna apresentou avanços na resolução. Em relação às habilidades que envolvem à operação de subtração, verificou-se uma potencialização dos algoritmos com números a partir de dois dígitos no minuendo e um dígito no subtraendo, com e sem retorno. Portanto, observam-se avanços significativos na resolução das operações aritméticas de adição e subtração com números naturais. Esse progresso pode ser justificado pelo modo como foi proposto o treinamento no Calcularis®. Em um primeiro momento, a estudante resolveu operações de adição e subtração, representando os resultados por meio de esferas; operações com números na forma arábica, as quais foram resolvidas usando-se da representação de unidades e dezenas e por meio de uma linha numérica. Somente após, ter adquirido as habilidades mencionadas anteriormente, os jogos passaram a praticar o cálculo mental.

Referente às operações de multiplicação, Bruna obteve pequenos avanços, mas continuou oscilando entre erros e acertos. Convém salientar, que nas 25 sessões de intervenção com o Calcularis®, Bruna realizou jogos que possibilitaram praticar somente as operações aritméticas de adição com números de um dígito e subtração com números de um e dois dígitos, o que pode justificar a permanência de dificuldades em operações de multiplicação.

No que tange ao domínio de resolução de problemas, Bruna na avaliação pós-intervenção, teve avanços em dois problemas, um envolvendo adição e o outro subtração, ambos com números de um dígito. No Calcularis® não há nenhum jogo específico sobre esse domínio, contudo alguns jogos possibilitam potencializar habilidades necessárias para resolver problemas.

Considerações finais

Analisando o desempenho da estudante na avaliação pré e pós-intervenção, é possível concluir que devido ao curto período de intervenção estabelecido, por tratar-se de uma pesquisa, com a intenção de verificar os efeitos do Calcularis® em um período delimitado a todos os estudantes, mesmo diante dos avanços significativos em habilidades aritméticas, Bruna permaneceu apresentando algumas defasagens em habilidades no domínio transcodificação numérica, na leitura e na escrita de números com quatro dígitos, no domínio operações aritméticas com números naturais e resolução de problemas, em específico nas operações de multiplicação e divisão. A permanência das dificuldades em ambos os domínios reforça a importância dos estudos de Kohn *et al.* (2020), desenvolvidos com um número de 42 sessões do Calcularis®, em que, segundos os autores, um número maior de sessões poderia resultar na potencialização de outros domínios, os quais em apenas 25 sessões de intervenção não são suficientes, como é o caso de Bruna, em que treinou somente jogos envolvendo o domínio adição e subtração, com números de um dígito e subtração com números de um e dois dígitos.

Adicionado a esses fatores, convém salientar que mesmo não estando descrito em seu laudo, Bruna tem DD secundária, sendo considerados seus prejuízos de grau grave, devido à comorbidade com Dislexia e TDAH, ocasionando dificuldades acentuadas em Matemática. Assim, justificam-se as defasagens na realização de cálculos mentais, o que de certo modo interferiu em seu progresso no Calcularis®, não sendo suficiente as sessões para potencializar todas as habilidades. As dificuldades na execução de cálculos mentais, podem ser relacionadas aos déficits no processamento numérico, interferindo na automatização das habilidades de raciocínio lógico e, consequentemente, defasagens na aquisição de habilidades mais avançadas (Kucian; Grond; Rotzer; Henzi; Schönmann; Plangger; Gälli; Martin; Von Aster, 2011).

Referências e bibliografia

Avila, L. A. B. (2022). *Intervenção cognitiva computadorizada para estudantes com Discalculia do Desenvolvimento resistentes a tratamentos prévios.* Porto Alegre. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Lara, I. C. M. (2022). Discalculia do Desenvolvimento: alguns estudos sobre definições, diagnósticos e intervenções pedagógica. *Com a Palavra o Professor,* 7(17), Vitória da Conquista, 235-253.

Avila, L. A. B.; Lima, V. M. R.; Lara, I. C. M. (2019) Intervenções psicopedagóogicas e Discalculia do Desenvolvimento: uma revisão Sistemática da Literatura. *Revista Educação Especial,* Santa Maria, 32, 1-21. 2019.

Butterworth, B.; Varma, S.; Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education. *Science,* 332, 1049-1053.

Devine, A.; Fawcett, K.; Szucs, D.; Dowker, A. (2013). Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction,* 27, 31-39.

Haase, V. G. Prefácio Brasileiro. (2017). In: Santos, F. H. *Discalculia do Desenvolvimento.* São Paulo: Pearson, 15-18.

Iuculano, T. Neurocognitive accounts of developmental dyscalculia and its remediation. (2016). *Progress in Brain Research,* 227, 305-333.

Käser, T.; Baschera, G-M.; Kohn, J.; Kucian, K.; Richtmann, V.; Grond, U.; Gross, M.; Von Aster, M. (2013). Design and evaluation of the computer-based training program Calcularis for enhancing numerical cognition. *Frontiers in Psychology,* 4, 1- 13.

Kohn, J.; Rauscher, L.; Kucian, K.; Käser, T.; Wyschkon, A.; Günter, E.; Von Aster, M. (2020). Efficacy of a Computer-Based Learning Program in Children With Developmental Dyscalculia. What Influences Individual Responsiveness? *Frontiers in Psychology,*11, 1-14.

Košč, L. (1974). Developmentol Dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities can be found at,* 7(3), 163-177.

Kucian, K.; Grond, U.; Rotzer, S.; Henzi, B.; Schönmann, C.; Plangger, F.; Gälli; M.; Martin, E.; Von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage,* 57, 782-795.

Moura, R.; Madeira, G.; Chagas, P. P.; Lonnemann, J.; Krinzinger, H.; Willmes, K.; Haase, V. G. (2013). Transcoding abilities in typical and atypical mathematics achievers: The role of working memory and lexical competencies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 707-727.

Santos, F. H. (2017). *Discalculia do Desenvolvimento.* São Paulo: Pearson.

Seabra, A. G.; Montiel, J. M.; Capovilla, F. C. (2013). Prova de Aritmética. In: Seabra, A. G.; Dias, N. M.; Capovilla, F. C (Orgs.). *Avaliação neuropsicológica cognitiva:* leitura, escrita e aritmética. São Paulo, SP: Memnon, 3. 97-104.

Stein, L. M.; Giacomoni, C. H.; Fonseca, R. P. (2019). Livro de aplicação TDE II Subteste de Aritmética. In: Stein, L. M.; Giacomoni, C. H.; Fonseca, R. P. *TDE II:* Teste de Desempenho Escolar. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Contribuições do geoplano para a educação inclusiva
Um instrumento mediador no ensino de Geometria Plana para alunos com deficiência visual

Ana Vitória de **Freitas** Domingos
Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
anavitoriafdomingos@gmail.com
Keli **Cristina** Conti
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
keli.conti@gmail.com

Resumo

No Brasil, a LDB, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, garante o acesso das pessoas com deficiência (PCD) aos níveis de ensino, com currículo adaptado às necessidades específicas de cada estudante. Com isso, o ensino de Matemática também deve garantir um currículo adaptado para os estudantes que possuem deficiência visual. Com o objetivo de apresentar as contribuições do geoplano para o ensino de Matemática no contexto da Educação Inclusiva, apresenta-se uma ação de pesquisa realizada na disciplina de Fundamentos e Metodologia do ensino da Matemática I, ministrada na Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, desenvolvida qualitativamente. Foi analisada a utilização do geoplano como instrumento mediador para o ensino da Geometria Plana e sua função de auxiliar no desenvolvimento da percepção visual e do reconhecimento de figuras geométricas. Os resultados obtidos ressaltam a importância de metodologias de ensino pautadas na acessibilidade através de materiais adaptados.

Palavras-chave: *Geometria; Deficiência Visual; Geoplano; Materiais Adaptados.*

Introdução

Este trabalho integra o projeto de pesquisa em desenvolvimento intitulado “Contribuições do Laboratório de Ensino de Matemática para a formação inicial do professor que ensina

Matemática" da Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, e busca, entre outros objetivos, analisar e interpretar práticas de formação e de atuação de futuros professores de forma a compreender e ressaltar a importância de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) para a formação inicial do professor que ensinará Matemática e seu reflexo no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes.

Neste trabalho, objetiva-se, a partir do LEM, apresentar as contribuições do geoplano para o ensino de Matemática no contexto da Educação Inclusiva. De forma mais específica, descreve-se uma experiência da utilização do geoplano como instrumento facilitador do ensino de Geometria Plana para uma estudante com deficiência visual do curso de Pedagogia.

Tanto na formação de professores quanto no LEM, assumimos que o conteúdo de Geometria é reconhecido como de extrema importância para a construção e para a formação do aluno enquanto um ser social, uma vez que esse estudo desenvolve habilidades de abstrair e de resolver problemas do cotidiano, como senso de direção e localização; além de ajudar no aprendizado do reconhecimento de formas e padrões.

De acordo com Abreu (2014), o estudo de geometria "leva o aluno a investigar, descrever e perceber propriedades, pré-requisitos estes importantes no desenvolvimento da atitude científica e na elaboração de uma linguagem escrita clara e sucinta, envolvendo vários conceitos aprendidos".

O ensino de Geometria é um conteúdo obrigatório no documento brasileiro intitulado Base Nacional Comum Curricular (BNCC), devendo ser abordado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (estudantes de 1 a 14 anos) até o Ensino Médio (15 a 17 anos). Esse tema é comumente discutido na disciplina de Matemática por meio das formas geométricas planas e espaciais. Dessa forma, práticas que envolvem desenhos, formatos e cores são muito utilizadas.

Segundo Niven (1994 apud Dias; Santos 2010) "a geometria é uma matéria visual, de modo que as figuras são de fundamental importância para o seu aprendizado". Considerar a geometria como uma matéria visual e propor atividades que usem exclusivamente desse recurso resulta na exclusão dos alunos com Deficiência Visual, uma vez que as práticas visuais não irão atender às suas necessidades durante o processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, uma forma de promover estratégias inclusivas no ensino de matemática é recorrer ao uso de materiais concretos, adaptados ao conteúdo a ser ensinado.

Educação Inclusiva

No Brasil, a LDB, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), no Capítulo V, garante o acesso das pessoas com deficiência (PCD) aos níveis de ensino, com currículo adaptado às necessidades específicas de cada estudante com alguma deficiência. A Resolução CNE, Conselho Nacional de Educação n°. 02, de 11 de setembro de 2001, aborda as Diretrizes para a Educação Especial na Educação Básica que, semelhante à Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (Brasil, 2008), tem como objetivo estruturar os sistemas de educação, a fim de defender o direito à educação e de assegurar a inclusão escolar de estudantes com diferenças e deficiências físicas e cognitivas.

> Estratégias de ensino opostas são encontradas nos poucos relatos de experiência sobre ensino de matemática para pessoas com Deficiência Visual. Para essa população, ressaltam que a alfabetização matemática se dá pelo uso de materiais concretos e de recursos pedagógicos adaptados. (Costa, 2022).

Nesse sentido, é necessário buscar novas estratégias para tornar o ensino mais acessível e inclusivo em sala de aula, assim como incentivar a utilização dos materiais manipulativos e adaptados, a fim de facilitar o processo de aprendizagem de estudantes com deficiência visual, como destaca Costa (2022). Mas a escassez de discussões relacionadas à Educação Inclusiva durante o período da graduação em Licenciatura em Matemática leva à reflexão sobre os possíveis impactos que essa falta tem provocado nos graduandos do curso e em suas práticas como docentes. Assim, faz-se necessário refletir e discutir esse assunto no momento da formação.

Para a maioria dos estudantes da Educação Básica, a disciplina de Matemática é encarada como um desafio que os acompanha do início da vida escolar até a sua conclusão e exige um esforço e tempo demasiados para a sua compreensão. Ao direcionar essa questão a estudantes com deficiência visual, percebem-se entraves ainda maiores em relação ao ensino de Matemática, uma vez que as estratégias citadas acima recorrem, em sua maioria, a recursos visuais, o que as torna inviáveis para estudantes com baixos níveis de acuidade visual. A partir disso, faz-se necessário buscar metodologias e práticas de ensino fundamentadas na Educação Inclusiva adaptadas ao ensino de Matemática.

Geoplano

Atualmente, a importância da discussão a respeito dos materiais didáticos e o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) entraram novamente em evidência devido aos estudos na área de Educação Matemática que visam discutir sobre as concepções tanto de materiais didáticos quanto do LEM, sobre seus objetivos, sobre o papel na formação dos futuros professores e sobre seu reflexo no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes. O geoplano, material presente no LEM da instituição, foi criado pelo matemático Calleb Gattegno, por volta de 1960, e se constitui por uma placa marcada com uma malha, que pode ser pontilhada ou quadriculada. Em cada ponto, é fixado um prego onde os elásticos podem ser presos e usados para formar desenhos sobre o geoplano.

O Geoplano atua como um recurso matemático excelente, uma vez que pode ser utilizado para auxiliar o processo de ensino de vários conteúdos, como formas geométricas e suas propriedades, equações e frações. Segundo Costa, Pereira & Mafra (2011, p. 47), esse material serve como estímulo para a criatividade e auxilia no aprendizado dos conceitos e conteúdos matemáticos de maneira divertida", sendo uma alternativa para os métodos tradicionais de ensino e, por isso, “percebe-se sua indubitável importância no ensino da Matemática".

A função desse material é auxiliar na construção e na observação das formas geométricas ou desenhos. Durante a observação desse trabalho, foi utilizado o Geoplano Retangular (Figura 1) como um instrumento para percepção das figuras geométricas planas por meio do tato.

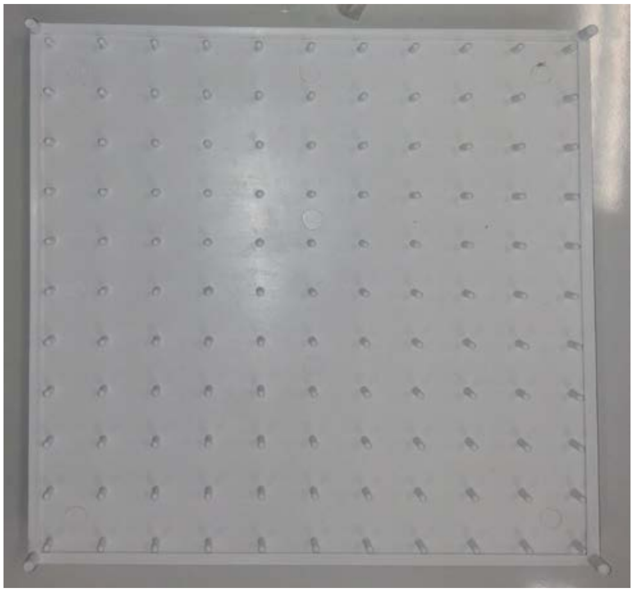


Figura 1: Geoplano Retangular

Metodologia

No âmbito do LEM da Faculdade de Educação da UFMG, a pesquisa foi desenvolvida numa abordagem qualitativa (Bogdan; Biklen, 1994). Optamos por essa abordagem a fim de analisar e de valorizar todos os dados qualitativos (descrição detalhada das situações, contextos, sujeitos, interações, comportamentos, falas dos futuros professores, atitudes, concepções, pensamentos, entre outros) como importantes para assegurar o compromisso com a produção de conhecimento. Todos os cuidados éticos foram tomados.

Entre outras ações da pesquisa, temos estudado o tema por meio de levantamentos bibliográficos e estudo sistemático, mas, para este texto, selecionamos uma ação de pesquisa que ocorreu durante uma aula da disciplina Fundamentos e Metodologia do ensino da Matemática I, ministrada pela professora Keli Cristina Conti, também orientadora deste trabalho. Essa disciplina é direcionada aos alunos do curso de Pedagogia da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

Durante a aula, foram abordadas atividades envolvendo estratégias de ensino de Geometria Plana para a Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nesse contexto, foi apresentado o geoplano como ferramenta potencializadora para o ensino das formas geométricas básicas, tais como triângulos e quadriláteros.

Nessa turma, há uma aluna, estudante de Pedagogia, que possui Deficiência Visual, com baixa acuidade visual, a qual será identificada como "EC” no decorrer deste trabalho.

Além de auxiliar os estudantes em geral com a construção das figuras geométricas, o material do geoplano foi utilizado como instrumento que possibilitou à aluna EC visualizar, mediante o tato, as figuras desenhadas.

Trabalhando com o Geoplano

Inicialmente, foi pedido à estudante EC para construir, no tabuleiro do geoplano, formas geométricas quaisquer (Figura 2). A estudante optou por construir as formas retângulo, quadrado e triângulo.

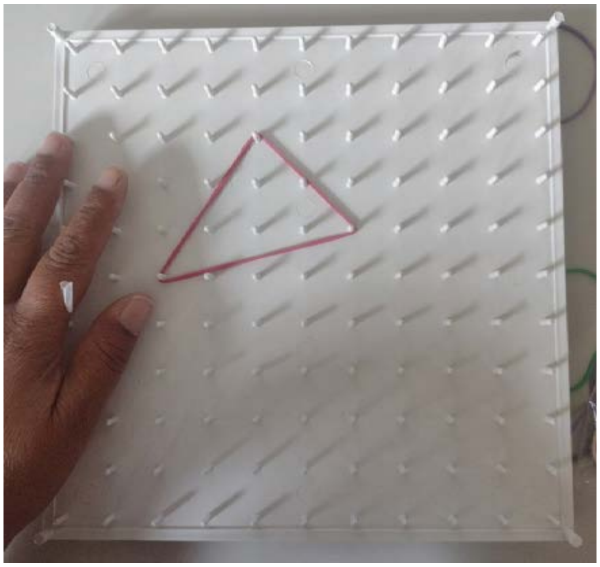


Figura 2: A imagem acima contém o triângulo feito pela aluna EC

Em seguida, foi desenhada a forma de cinco quadriláteros, sendo eles: quadrado, retângulo, losango, trapézio e paralelogramo (Figura 3). Foi pedido à estudante que tentasse reconhecer as figuras presentes no geoplano, as quais ela identificou corretamente após tatear cada um dos elásticos.

Figura 3: Figuras de quadrado, retângulo, losango, trapézio e paralelogramo desenhados com elásticos no geoplano.

Após a realização das atividades, a fim de entender mais sobre a funcionalidade e sobre a eficácia do geoplano quando utilizado com estudantes que possuem baixa acuidade visual, algumas perguntas foram direcionadas à estudante EC, que, como destacado anteriormente, possui deficiência visual.

> Pesquisadora: "Você já conhecia o geoplano? Já tinha ouvido falar dele antes?" EC: "Então, eu fiquei conhecendo esse jogo, esse material, aquele dia. Eu, até então, não conhecia."
> Pesquisadora: "E você acha que ele atendeu à proposta da atividade? Acha que ele vai ser útil se for usado com crianças que não enxergam?" EC: "Acredito que ele vai atender tanto a criança que enxerga quanto a criança que não enxerga, tá? Porque pelo que eu lidei com ele, ele atende sim aos requisitos com relação à geometria. Ele atende sim, tranquilamente. Porque a criança vai começar com poucas figuras, algumas coisas assim. A partir do primeiro ano que já começa, né? Esse entendimento, mas acredito sim que ele atende totalmente as expectativas para a geometria".

Pode-se perceber que, de fato, o geoplano atingiu os objetivos esperados durante as atividades realizadas na aula e cumpriu a função de mediar e de tornar acessível o conteúdo para a estudante. De maneira semelhante, foi possível reconhecer que, entre os estudantes presentes na sala de aula, a atividade utilizando o geoplano foi considerada eficiente para o ensino na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, reforçado a pontuação feita pela estudante EC.

Considerações finais

O ensino de Matemática é, na maioria das vezes, desafiador e requer o uso de estratégias que aproximam o conteúdo do cotidiano do aluno e que facilitam a construção e a assimilação do conhecimento.

No contexto da Educação Inclusiva, no ensino de Matemática, o que se percebe é que há a necessidade de incentivo e de investimento, com o intuito de preparar as instituições de ensino e os professores para que o conhecimento seja transmitido a fim de garantir a equidade do ensino-aprendizagem a todos, promovendo, assim, a inclusão em sala de aula. Nesse sentido, os materiais manipulativos pedagógicos têm um papel importante ao atuar como instrumento de ensino adaptado para as especificidades de cada estudante.

Baseado no pensamento de Costa, Pereira & Mafra (2011, p. 47), vimos que o geoplano é uma alternativa para os métodos tradicionais de ensino, assim como desenvolvido anteriormente. Dessa forma, o geoplano se destaca como um instrumento eficaz para mediar as atividades de Geometria Plana com estudantes que possuem deficiência visual, uma vez que pode ser adaptado para diferentes idades e níveis educacionais, a fim de possibilitar explorar e reconhecer diversas formas geométricas e suas propriedades.

Referências

Abreu, L. A. F. (2014). *Geometria para deficiente visual: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos*. (Dissertação de Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes, Rio de Janeiro.

Bogdan, R. C., Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria dos métodos*. Portugal: Porto Editora.

Costa, A. B. (2022). *Alfabetização matemática para crianças com deficiência visual: um protocolo de avaliação*. Saõ Carlos: Editora de Castro.

Costa, D. E., Pereira, M. J., & Mafra, J. R. S. (2011). Geoplano no ensino de matemática: Alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 7*(13), pp. 43-52. Recuperado de: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/1695

Dias, M. O., Santos, M. S. (2010). O geoplano como recurso de aprendizagem da geometria plana para deficientes visuais: uma experiência com os alunos do Instituto Benjamin Constant. *Boletim GEPEM*, 56, pp. 105-116, jan. / jun.

Ministério da Educação. (1996). *Lei nº 9394/96*. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Recuperado de: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

Ministério da Educação. (2008). *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Recuperado de: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/politicaeducespecial.pdf.

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Dificultades del Aprendizaje en Matemática
Estrategias de una didáctica inclusiva

Mariana Andrea **Aragón**
Colegio Goethe Buenos Aires
Argentina
mandrearagon@gmail.com

Resumen

Las Dificultades del Aprendizaje en Matemática constituyen una problemática presente en las aulas ordinarias como obstaculizadoras del quehacer matemático. En un viraje hacia una pedagogía transformadora, se abandona la pedagogía tradicional, dando espacio a pedagogías flexibles que atienden la diversidad en las aulas. Se requiere una reorientación de la praxis docente que fomente la práctica reflexiva, sostenga propuestas de aulas heterogéneas a partir de la singularidad y logre aprendizajes profundos en favor del despliegue del razonamiento matemático.
La aplicación de adecuaciones simples y configuraciones de apoyo como dispositivos de ajuste de una oferta didáctica inclusiva, resulta habilitante de nuevos modos de enseñar para el acceso al aprendizaje pleno. Esta transformación además está enriquecida por la incorporación de alternativas de enseñanza contextualizada que permiten lograr un aprendizaje significativo promotor tanto del desarrollo de competencias matemáticas como de la construcción de aprendizajes matemáticos.

Palabras clave: Dificultades del Aprendizaje en Matemática; Didáctica inclusiva; Perspectiva de la práxis; Aulas heterogéneas; Pedagogías flexibles; Aprendizaje significativo.

Modalidad

El Taller propone un espacio de Práctica Reflexiva acerca de las Dificultades del Aprendizaje en Matemática y de los modos de abordaje en el aula para un aprendizaje pleno que favorezca y desarrolle las capacidades de los estudiantes en esta disciplina. Capacidades que como atributos psico-cognitivos de los individuos se logran a través de la integración de aprendizajes significativos en base al despliegue y crecimiento de habilidades o competencias. (Catalano et al, 2004, como se citó en Mastache, 2007).

Inicia con una breve introducción teórica que fundamenta la propuesta con un análisis multicausal del origen de las Dificultades del Aprendizaje en Matemática como entramado complejo de dimensiones psicológicas, pedagógicas y sociales. Continúa con trabajo en grupos para un análisis de casos y de propuestas didácticas, posibilidades de abordaje y alcance de los contenidos a lograrse a través de estas alternativas. Cierra con un espacio para una puesta en común y retroalimentación de la experiencia.

Se ofrece material didáctico en soporte de papel y digital, material manipulativo, apps, blog para consultas y sugerencias de bibliografía.

Objetivos

- Generar un espacio de Práctica Reflexiva docente.
- Comprender las causas y consecuencias de las Dificultades de Aprendizaje en Matemática como problemática del desarrollo de las competencias matemáticas.
- Abordar los lineamientos fundamentales de las aulas heterogéneas y las pedagogías flexibles.
- Considerar estrategias didácticas inclusivas con configuraciones de apoyo para la sistematización de su uso en el aula.
- Analizar propuestas didácticas contextualizadas.
- Resignificar el aprendizaje de la matemática para promover en los alumnos el interés y las destrezas matemáticas.

Marco de referencia

Las Dificultades del Aprendizaje en Matemática generan un quiebre entre la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina. Constituyen no sólo un obstáculo para el desarrollo de las destrezas matemáticas que devienen en fracaso de los alumnos sino también para los docentes que evidencian en sus estudiantes un conocimiento inerte en contraposición al aprendizaje profundo que pretenden para ellos. En este aprendizaje profundo, como sostiene Furman (2021), se busca que los alumnos aprendan a entender, a construir una base imprescindible para levantar el resto del edificio del aprendizaje y logren hacer transferencia.

Según La pedagogía tradicional del Siglo XVII fundada en el principio de *enseñar todo a todos* y en la homogeneidad, deja escaso espacio a las diferencias y particularidades evidenciadas en cada uno de nuestros alumnos. Para dicho paradigma pedagógico, los estudiantes resultan los únicos responsables y artífices de su fracaso escolar. Esta mirada reduccionista no habilita respuestas y deviene en una pedagogía sustancialmente distante de las pedagogías flexibles ya emergentes en el Siglo XX basadas en la singularidad de cada alumno como núcleo esencial de las aulas que resultan heterogéneas. Se evidencia una ruptura entre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en perjuicio del desarrollo del pensamiento y el hacer matemático de los alumnos.

En este sentido Anijovich (2014) con su enfoque de Aulas Heterogéneas, reconoce la existencia de las diferencias entre las personas, las experiencias, los estilos de aprendizaje, los tipos de inteligencia, los intereses y los modos de enseñar, entre otras. Se fundamenta en el principio que *todos pueden aprender* y el logro de este propósito requiere de acciones inclusivas y alineadas con las pedagogías flexibles.

El cambio necesita la puesta en funcionamiento de una Práctica Reflexiva acerca de los modos de enseñar y de aprender. “Se trata de una práctica de una opción formativa que parte de la persona y no del saber teórico, que tiene en cuenta la experiencia personal y profesional para la actuación y mejora de la tarea docente” (Domingo Roget y Gómez Serés, 2014, p.90).

En situaciones de conflicto presentes en el aula emergen de sentimientos de descontento y frustración entre dos planos: el del alumno con la Matemática, y el del docente con los síntomas que observa en el alumno que no logra aprender. Se pone en tensión el principio *todos pueden aprender*. La revisión de la propia práctica docente permite reorientar propuestas didácticas para la mejora de los aprendizajes de aquellos alumnos que no se consideran exitosos por medio de nuevas alternativas que abren el juego para que los alumnos desplieguen sus destrezas, en este caso de la Matemática.

Desarrollo

Se presenta un análisis de diversos factores vinculados a la problemática, que van desde la dimensión docente con las consecuentes lógicas pedagógicas hasta la dimensión alumno con las Dificultades Específicas del Aprendizaje.

Las lógicas pedagógicas

Las pedagogías tradicionales no proporcionan modalidades y enfoques alternativos a las situaciones de Dificultades del Aprendizaje en Matemática. Por un lado, el carácter homogeneizante no ofrece una diferenciación de los modos de aprender para una enseñanza diferenciada. Por otro, la responsabilidad del fracaso que recae en el alumno, con ausencia de interpelación alguna de la praxis docente como cuestionamiento para un posible cambio en la propuesta de enseñanza.

Las propuestas didácticas

En las propuestas didácticas más tradicionales suelen presentarse, entre otros, tres núcleos duros como barreras de aprendizaje: el lenguaje simbólico, la matemática considerada principalmente como el quehacer del cálculo, el aprendizaje descontextualizado.

El lenguaje simbólico. Diversas formas de lenguaje se utilizan en las clases de Matemática: escrito u oral, simbólico o coloquial, formal o informal y la habilidad de su manejo resulta esencial en el despliegue del aprendizaje y el desarrollo de las competencias matemáticas. Los pensamientos se exteriorizan a través del lenguaje. Según Vygotsky (2016) existe una fuerte relación entre la palabra, el significado y el pensamiento, y lo enuncia: “El significado de una palabra representa una amalgama tan estrecha de pensamiento y lenguaje que es difícil decir si es un fenómeno del habla o un fenómeno del pensamiento” (p.279).

Particularmente, en cuanto al lenguaje simbólico, para el alumnado es frecuente la confusión entre símbolo, significado y objeto matemático. En este sentido es habitual que un docente para enunciar alguna propiedad, por ejemplo, en el campo numérico de los números naturales exprese "Sea *n* un número natural si …", seguramente encontramos alumnos que allí, no reconocen número alguno, sino que identifican una letra. Aquí se evidencia la imposibilidad de diferenciar el grafismo del significado que el mismo adquiere en el contexto que se lo está utilizando. La distorsión emerge en el instante en que el alumno queda aferrado al símbolo sin la capacidad de discernir lo que ese símbolo representa. "La claridad del lenguaje evita que el alumno tenga que suponer lo que debe ser interpretado" (Fernández Bravo, 2010, p.51).

La matemática considerada principalmente como el quehacer del cálculo. Existen textos escolares con predominio de ejercicios para el cálculo con la certeza de que el dominio de las matemáticas se alcanza en base a la habilidad en el manejo del cálculo fundamentalmente.

Así, la destreza matemática queda reducida a la repetición de extensas nóminas de ejercicios que habilita el registro de un algoritmo en sí mismo mediante la reiteración que entrena la memoria mecánica, en perjuicio de la memoria lógica. "Concebir el aprendizaje como simples reiteraciones estereotipadas de grafismos y algoritmos obtura la posibilidad de aprender conceptos" (Boggino, 2013, p.164).

En contraposición, se considera el saber matemático como un entramado de saber interpretar, comparar, diferenciar, resolver, estimar, formular, calcular y aplicar. Al respecto Fernández Bravo (2010) sostiene que la Matemática es una actividad mental cuyo instrumento no es el cálculo sino el razonamiento y que consiste principalmente en el descubrimiento y aplicación de estructuras.

El aprendizaje descontextualizado. El aprendizaje matemático toma mayor sentido cuando se presenta una enseñanza contextualizada. Ya, a mediados del siglo pasado, Santaló (1966) expresaba:

> Los profesores de hoy tienen la difícil misión de enseñar a tener curiosidad, a pensar por uno mismo y a perderle el miedo a los problemas, mucho más que a enseñar unos cuantos teoremas y unas cuantas reglas operativas que el alumno, si ha mantenido su mente ágil y una sólida preparación básica, podrá leer sin dificultad de cualquier libro o manual el día que lo necesite (p.55).

Una propuesta basada en habilidades y en competencias, en un "*saber hacer*" se logra a través del contenido como medio y no como un fin en sí mismo. Boggino (2013) también se manifiesta en favor de la contextualización "No parece fácil saber para qué sirve un conocimiento si se presenta descontextualizado y aislado" (p.59).

Creencias y actitudes

Las *creencias* matemáticas constituyen un dispositivo subjetivo del individuo tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de las matemáticas. Para los docentes, influye en sus modos de enseñar. Para los aprendices influye en sus modos de aprender y los afecta en dos campos: como objeto - la Matemática como disciplina difícil que los estudiantes deben dominar – y como creencia sobre sí mismos, relativas a la confianza y autoestima en relación a las propias habilidades y competencias matemáticas.

Las *actitudes* están referidas al interés por la disciplina y su aprendizaje y en ello subyacen más las componentes afectivas que las cognitivas.

Cuando la influencia afectiva interfiere negativamente en el proceso de aprendizaje, ubica al alumno en una posición desfavorable que no resulta facilitadora del proceso de adquisición de los conocimientos matemáticos. Se requiere la intervención del docente como agente regulador para que pueda mejorar la perspectiva del alumno que lo ayude a salir del estado de bloqueo ante la actividad matemática.

Las Dificultades Específicas del Aprendizaje

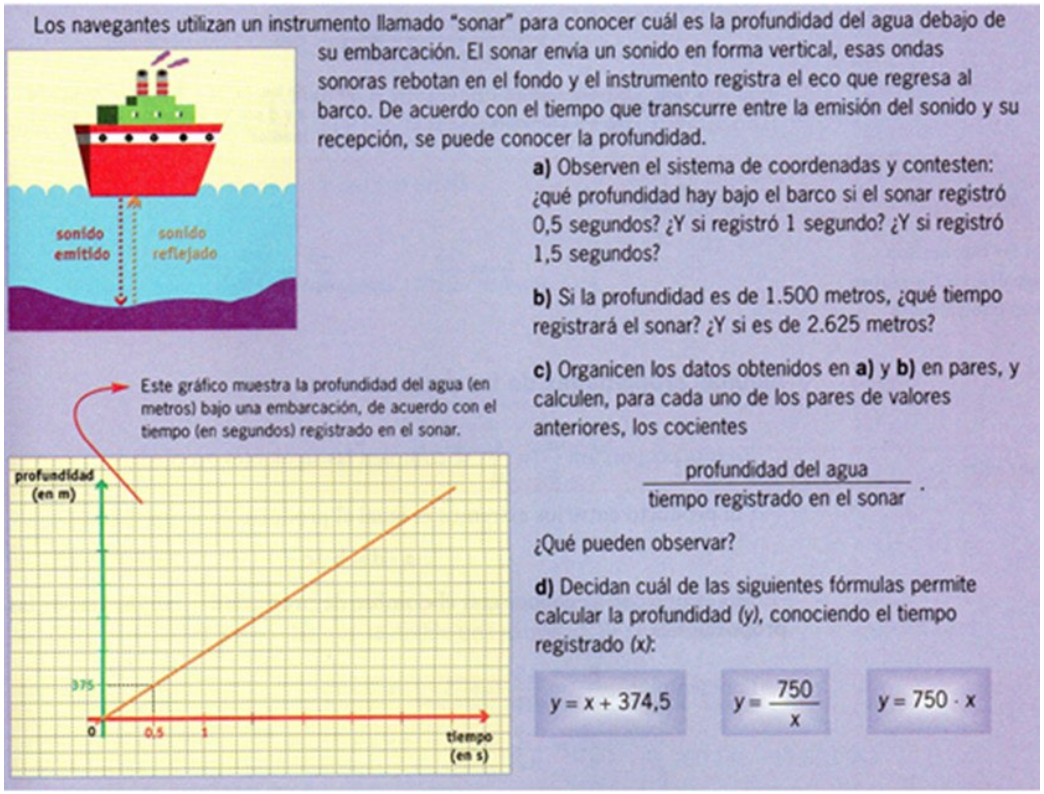
Las Dificultades Específicas del Aprendizaje (DEA) es la denominación asignada al grupo de dificultades compatibles con Dislexia, Discalculia, Trastorno de Déficit Atencional e hiperactividad, dificultades con la memoria de trabajo, proceso lento de decodificación simbólica, entre otros. Aquellos alumnos que presentan alguno de estos trastornos del aprendizaje requieren de un acompañamiento pedagógico específico como alternativa que habilite a superar estas barreras que impiden desplegar sus habilidades matemáticas para avanzar con los aprendizajes. Ciertos países cuentan con reglamentaciones que orientan y pautan la enseñanza en casos de alumnos diagnosticados con DEA. Estas normativas ofrecen dispositivos y propuestas del ámbito pedagógico denominadas, ajustes, configuraciones de apoyo o adecuaciones curriculares simples que generan condiciones propicias habilitantes de alternativas de acceso al conocimiento matemático, en nuestro caso.

Alternativas para trabajar Propuestas didácticas contextualizadas

En el desarrollo del taller se analizarán situaciones contextualizadas para introducir algún concepto matemático en particular.

Ejemplo 1: Sistema SONAR de navegación. Situación introductoria para proporcionalidad.

En la Figura 1 se presenta una actividad para trabajar en grupos como introducción al concepto de proporcionalidad a partir del sistema de navegación SONAR que permite conocer la profundidad del agua debajo de una embarcación.



Los navegantes utilizan un instrumento llamado "sonar" para conocer cuál es la profundidad del agua debajo de su embarcación. El sonar envía un sonido en forma vertical, esas ondas sonoras rebotan en el fondo y el instrumento registra el eco que regresa al barco. De acuerdo con el tiempo que transcurre entre la emisión del sonido y su recepción, se puede conocer la profundidad.

a) Observen el sistema de coordenadas y contesten: ¿qué profundidad hay bajo el barco si el sonar registró 0,5 segundos? ¿Y si registró 1 segundo? ¿Y si registró 1,5 segundos?

b) Si la profundidad es de 1.500 metros, ¿qué tiempo registrará el sonar? ¿Y si es de 2.625 metros?

c) Organicen los datos obtenidos en **a)** y **b)** en pares, y calculen, para cada uno de los pares de valores anteriores, los cocientes

$$\frac{\text{profundidad del agua}}{\text{tiempo registrado en el sonar}}.$$

¿Qué pueden observar?

d) Decidan cuál de las siguientes fórmulas permite calcular la profundidad (y), conociendo el tiempo registrado (x):

$y = x + 374{,}5$ $\quad$ $y = \dfrac{750}{x}$ $\quad$ $y = 750 \cdot x$

Este gráfico muestra la profundidad del agua (en metros) bajo una embarcación, de acuerdo con el tiempo (en segundos) registrado en el sonar.

Figura 1. Ejercicio introductorio. Fuente: Entender Matemática 8. (Aragón et al., 2003, p.171)

Este ejemplo se enriquecerá con material de video explicativo como así también con charlas de divulgación respecto de la utilización de este sistema por personas no videntes.

Ejemplo 2: Plegado de papel. Situación introductoria para sucesiones.

En este caso se trabajará con material manipulativo, con el supuesto que la medida del lado del cuadrado de papel es 1 unidad. Tomamos un cuadrado de lado unidad. Llevamos los vértices a su centro. Queda formado un nuevo cuadrado. Volvemos a hacer lo mismo con el nuevo cuadrado y así sucesivamente. El procedimiento se muestra en la Figura 2.

Analicen como varía el área de los cuadrados "centrales" que se obtienen con los plegados respecto del área original $A = 1u^2$.

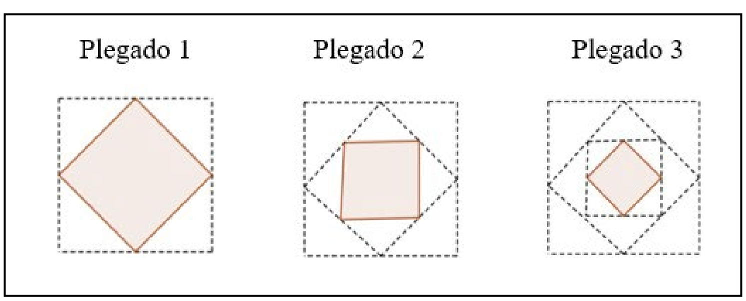


Figura 2. Esquema de plegados de papel.

Completar la Tabla 1 considerando el número del plegado y el área del correspondiente cuadrado central.

Tabla 1
Cuadro que relaciona el número de plegado con el área de cuadrado central

N° de plegado	1	2	3	4	5
Área cuadrado central (u^2)	1/2	1/4			

Se pide:

a. Encontrar la regularidad de los valores de las áreas obtenidos al completar la tabla.
b. Definir una expresión general que represente a dichos valores.
c. Determinar cuál será su décimo término

Estrategias y recursos didáctico - inclusivos

Se ofrece una nómina de herramientas para utilizar en situaciones de enseñanza en donde se presenten Dificultades Específicas de Aprendizaje. Constituyen dispositivos de ajuste que funcionan como configuraciones de apoyo tanto en el trabajo en clase y tareas, como en las evaluaciones escritas. Estas adecuaciones surgen de las indicaciones de los profesionales de la Psicopedagogía y de las normas vigentes para los centros escolares en la Argentina.

Configuraciones de apoyo, ajustes y adecuaciones que se pueden utilizar

- Ubicación del alumno en un lugar cercano al docente y al pizarrón.
- Diseño del material de trabajo/ consignas escritas / evaluaciones atendiendo a: distribución espacial clara y ordenada del texto, fuente Dyslexie /Arial, tamaño 14/16, diseño a simple faz, consigna completa en una misma página, posibilidad de desarrollo de las consignas en hojas por separado.
- Consignas breves y precisas.
- Comprobación, por parte del docente, de la comprensión de las consignas en evaluaciones / ejercicios escritos, ofreciendo aclaraciones adicionales.
- Disposición de las fórmulas en forma escrita.
- Uso de tablas de multiplicar/ Pitagóricas, en casos específicos.
- Uso de dispositivos electrónicos (laptop, calculadora, celular, etc.)
- Anticipación de textos en caso de situaciones de evaluación que requieren del análisis del mismo.
- Uso de audiolibros.
- Tiempo extra en las evaluaciones escritas.
- Disponibilidad de un glosario específico en asignaturas dictadas en otras lenguas, que no sea la materna.
- Acotar y reducir la extensión de la propuesta de trabajo (guías de ejercicios, cuestionario, etc.)

Estos son algunos de los recursos que pueden utilizarse para habilitar el acceso al aprendizaje en aquellos alumnos que, dadas sus dificultades específicas, se enfrentan a obstáculos que interfieren en el desarrollo de las habilidades matemáticas.

Conclusiones

El taller envuelve una lógica flexible dentro del campo de la pedagogía y propone una didáctica inclusiva. El análisis reflexivo de ciertos factores, que interfieren en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática como barreras, resulta una oportunidad para atender la singularidad de los estudiantes y aquellas causas que lo ubican en una posición desfavorable frente al proceso de aprendizaje. Tiene como foco el reconocimiento de que cada individuo puede hacer su propio recorrido acompañado de una propuesta didáctica con estrategias que favorezcan además el desarrollo de la competencia matemática y el aprendizaje profundo.

Con una mirada crítica Vilanova et al. (2005) sostiene "saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea y la "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente" (p.426).

La intensión de intervención del taller interpela esta cultura instalada en numerosas aulas.

Referencias y bibliografía

Anijovich, R. (2014). *Gestionar una escuela con aulas heterogéneas. Enseñar y aprender en la diversidad*. Paidós. Aragón, M., Laurito, L., Net, G., Trama, E. (2003). *Entender matemática 8*. Editorial Estrada.

Boggino, N. (2013). *El constructivismo en el aula*. Ediciones Homo Sapiens

Catalano, A.; Avolio de Cols,S. y Sladogna, M. (2004). *Diseño curricular basado en normas de competencia laboral. Conceptos y nociones metodológicas.* Banco Interamericano de Desarrollo.

Domingo Roget, À. y Gómez Serés. (2014). *La práctica reflexiva. Bases, modelos e instrumentos.* Narcea.

Fernández Bravo, J. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. IECR.

Furman, M. (2021). *Enseñar distinto.* Siglo XXI editores.

Mastache, A. (2007). *Formar personas competentes. Desarrollo de competencias tecnológicas y psicosociales.* Ediciones Novedades Educativas.

Santaló, L. (1966). *La matemática en la escuela secundaria*. EUDEBA. Vigotsk , L. (2016). *Pensamiento y lenguaje*. Paidós.

Vilanova, S., Rocerau, M., Medina, P., Astiz, M., Vecino, S., Valdez, G. (2005). Concepciones de los Docentes sobre la Matemática. Su Incidencia en la Enseñanza y el Aprendizaje. *Acta de Matemática Educativa. Vol.18,426.* https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Discalculia do Desenvolvimento e diagnóstico: uma Revisão Sistemática da Literatura

Isabel Cristina Machado de **Lara**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Brasil
isabel.lara@pucrs.br
Ana Lúcia Purper **Thiele**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Brasil
ana.purper@edu.pucrs.br

Resumo

Este estudo apresenta uma análise de artigos no âmbito nacional e internacional, com o objetivo de analisar critérios, contribuições e instrumentos para a elaboração do diagnóstico de Discalculia do Desenvolvimento - DD. Utiliza a Revisão Sistemática da Literatura, com base em Pickering e Byrne, como método de pesquisa e como método de análise, inspira-se na Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi. Trata-se de um recorte de uma revisão mais aprofundada, para o qual conta com duas plataformas de busca: *EMBASE* e *Web of Science*. Por meio da análise identifica quatro categorias emergentes: critérios para o diagnóstico de DD; níveis estruturais do diagnóstico; instrumentos para avaliar a DD; potencialidades e obstáculos no diagnóstico de DD. Evidencia que, embora pesquisas vem sendo desenvolvidas e aprimoradas, ainda não existe um consenso frente aos instrumentos específicos para o diagnóstico do transtorno, que levem em consideração as diferenças individuais de cada estudantes.

Palavras-chave: Matemática; Discalculia do Desenvolvimento; Transtorno de aprendizagem em Matemática; Critério de diagnóstico; Instrumentos de avaliação.

Introdução

O transtorno de aprendizagem específico da Matemática, é conhecido como Discalculia do Desenvolvimento - DD. A DD é definida por Kosc (1974) como um transtorno estrutural na maturação das habilidades matemáticas caracterizado por dificuldades crônicas e persistentes que afetam as habilidades de processamento numérico e cálculo (KOSC, 1974).

Conforme Lara (2022), essas dificuldades não estão associadas à complexidade dos conceitos estudados, ao ensino inadequado, a questões socio-motivacionais ou psicológicas ou à desmotivação do estudante, mas a déficits de origem endógena. O diagnóstico diferencial entre dificuldades de aprendizagem e DD é muito importante. No entanto, ele é dificultado pelo fato de não existirem marcadores biológicos ou cognitivos para o transtorno (Haase, 2012).

A partir dessas considerações, uma análise de artigos que abordam a temática diagnóstico de DD no âmbito nacional e internacional, usando-se como método de pesquisa a Revisão Sistemática da Literatura – RSL, pode possibilitar novas evidências acerca de critérios e instrumentos que possibilitem avanços em pesquisas na Educação Matemática[1].

Esta RSL está baseada nos estudos de Pickering e Byrne (2014), seguindo todas as etapas previstas pelo autor. Como trata-se de um recorte de uma revisão mais aprofundada, optou-se, para compor o *corpus* de análise pela busca apensa em duas bases: *EMBASE*; e, *Web of Science*; as quais disponibilizam uma seleção de artigos científicos publicados nacional e internacionalmente. Para análise do *corpus*, realiza-se uma Análise Textual Discursiva – ATD – com base em Moraes e Galiazzi (2011).

Alguns aportes teóricos

A DD é definida por Bakwin (1960) como uma "dificuldade de contar" e como uma "[...] falha em reconhecer números ou manipulá-los de forma avançada.”. O autor descreve DD como uma “[...] incapacidade isolada para realizar operações aritméticas simples ou complexas e uma deficiência de orientação na sequência de números e suas frações".

Autor 1 (2022) afirma que Kosc (1987), em seus estudos, refere-se a déficits determinados de forma endógena e exógena. Dessa forma, o autor designa como disfunção mais séria os “transtornos específicos do desenvolvimento”, no caso da DD. Enquanto que para os transtornos do desenvolvimento menos sérios e de causas exógenas, a denominação mais apropriada permaneceria como “dificuldades específicas de aprendizagem” (KOSC, 1987).

Haase (2012) destaca que a DD afeta aproximadamente 3% a 6% da população em idade escolar, e apresenta alta comorbidade com outros transtornos, tais como Dislexia do Desenvolvimento e Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH). Conforme os autores, a DD é um transtorno de aprendizagem caracterizado por uma dificuldade persistente em aprender Matemática (Kosc, 1987; Haase, 2012; Lara, 2022).

Em relação ao diagnóstico, trata-se de um processo longo, que, segundo o Autor 1 (2022) é feito por uma equipe multidisciplinar que observe as etapas essenciais desse processo e verifique os critérios de diagnóstico da DD. Lara (2022), identifica, em seus estudos sete etapas como critérios diagnósticos: a) Rendimento Escolar; b) Anamnese com responsáveis; c) Teste de

[1] Esse artigo é produto de uma pesquisa financiada pela FAPERGS – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul.

Quociente de Inteligência; d) Parecer neurológico; e) Realização de Testes Padronizados; f) Intervenções Psicopedagógicas; g) Resposta à intervenção. Tais critérios convergem aos parâmetros estabelecidos internacionalmente, os quais, segundo Haase et al. (2011) e Santos et al. (2012), são:

> i) apresentar pelo menos dois anos de discrepância no desempenho das habilidades matemáticas, quando comparado com o ano escolar frequentado; ii) possuir desempenho em Matemática com 1,5 desvios-padrão abaixo da média esperada para a faixa etária e escolaridade; iii) comprovar QI dentro do esperado para idade cronológica; e iv) evidenciar resistência ao processo de intervenção. (Lara, 2022).

Destaca-se ainda, a necessidade de exaurir as dificuldades advindas de deficiências sensoriais e intelectuais.

Procedimentos Metodológicos

Como método de pesquisa optou-se pela RSL fundamentada por Pickering e Byrne, (2014). Trata-se de um método sistemático, quantitativo e abrangente e eficaz, por meio do qual ao "[...] mapear os limites da literatura existente é possível identificar onde ocorrem generalizações e também os limites dessas generalizações." (Pickering; Byrne, 2014, p. 3). Por meio da RSL será constituído o *corpus* de análise. Como método de análise inspirou-se na ATD, de acordo com Moraes e Galiazzi (2011) a partir da unitarização, categorização e interpretação dos dados coletados.

Etapas percorridas na Revisão Sistemática da Literatura

Conforme Pickering e Byrne (2014), a primeira etapa consiste em definir o tema central da revisão, neste caso critérios, contribuições e instrumentos para a elaboração do diagnóstico de DD. Na etapa 2, definiu-se a questão central de pesquisa: "*Quais os objetivos das publicações sobre DD que abordam o diagnóstico desse transtorno e quais suas contribuições para a avaliação da aprendizagem de Matemática*?".

As *keywords* foram estabelecidas na etapa 3: *Dyscalculia*; e *Dyscalculia AND diagnostic*. Depois de estabelecer os descritores, no quarto passo, definem-se os bancos de dados nos quais será realizada a busca: *Web of Science*; e *Embase*. Na etapa 5 foram estabelecidos critérios de inclusão e exclusão das produções, a saber: 1) a produção deverá ter como tema principal a DD; 2) apontar critérios e parâmetros para o diagnóstico de DD; 3) avaliar instrumentos diagnósticos para DD. Os critérios de exclusão, são a negativa dos critérios de inclusão.

Para chegar até as produções selecionadas, percorreu-se a etapa seis que consiste no desenvolvimento do banco de dados, de acordo com Pickering e Byrne (2014). As etapas 7, 8 e 9 dizem respeito à busca nos bancos de dados e um estabelecimento primário do *corpus* de análise. Em uma primeira busca, utilizou-se o termo escrito da seguinte forma: (*dyscalculia).* Essa busca resultou em 1.020 produções na base *EMBASE* e 1.252 produções na *Web of Science*. A partir da filtragem com os descritores (*dyscalculia*) AND (*diagnostic*), obteve-se um total de 117 e 141 produções, respectivamente. Ao utilizar o filtro acesso aberto, esse número se reduziu a 50 produções. Após a leitura do resumo dessas produções, foi possível categorizá-las em 22 categorias iniciais das quais, ao serem aproximadas por suas semelhanças, emergiram quatro categorias finais: I) Dificuldades de aprendizagem em Matemática; II) Transtornos de aprendizagem e do neurodesenvolvimento; III) Doenças neurológicas ou psiquiátricas associadas à DD; IV) Diagnóstico de DD.

A partir da categorização final é possível perceber que apenas as produções das quais emergiram da categoria IV convergem aos critérios de inclusão estabelecidas. Desse modo, foram selecionadas 18 produções para a leitura integral das quais cinco foram excluídas por se tratarem de revisões da literatura.

Quadro 1
Produções selecionadas para constituir o corpus de análise.

Cod.	**Título**	**Autor/periódico/ano**
A1	Predicting Mathematical Learning Difficulties Using Fundamental Calculative Ability Test (FCAT)	Sawako Ohba,* Tatsuya Koeda,† Masayoshi Oguri,‡ Tohru Okanishi§ and Yoshihiro MaegakiActa Medica 2022
A2	Developmental dyscalculia	Karin Kucian & Michael von Aster European Journal of Pediatrics volume 174, pages1–13 (2015)
A3	The Diagnosis and Management of Dyscalculia	Liane Kaufmann, Michael von Aster Dtsch Arztebl Int 2012
A4	Diagnostics of dyscalculia	L. Tischler & F. Petermann Monatsschrift Kinderheilkunde (2012)
A5	Causes and diagnosis of developmental dyscalculia	F. Petermann & J. Lemcke Monatsschrift Kinderheilkunde (2005)
A6	A systematic procedure for identifying and classifying children with Dyscalculia among primary school children in India	S. Ramaa,I.P. Gowramma DYSLEXIA (2002)
A7	Validity and reliability of the Arabic dyscalculia test in diagnosing Egyptian dyscalculic school-age children	Abdou, RM; Hamouda, NH and Fawzy, AM The Egyptian Journal of Otolaryngology - 2020
A8	Dtsch Arztebl Int 2013 The Diagnosis and Management of Dyscalculia	Liane Kaufmann, Michael von Aster in volume 45/2012. Calia, G Dtsch Arztebl Int 2013
A9	The Diagnosis and Management of Dyscalculia	Liane Kaufmann, Michael von Aster Dtsch Arztebl Int 2012
A10	The Diagnosis and Treatment of Dyscalculia	Haberstroh, S; Schulte-Körne, G Dtsch Arztebl Int 2019; 116: 107-14.
A11	Dyscalculia: Clinical manifestations, evaluation and diagnosis. Current Perspectives of educational intervention	Benedicto-Lopez, P; Rodriguez-Cuadrado, S 2019 |
A12	Link between cognitive neuroscience and education: the case of clinical assessment of developmental dyscalculia	Rubinsten, O Front. Hum. Neuroscience - 2015
A13	The added value of eye-tracking in diagnosing dyscalculia: a case study	Sietske van Viersen, Esther M. Slot, Evelyn H. Kroesbergen*, Jaccoline E. van't Noordende and Paul P. M. Leseman. Frontiers in Psychology, 2013

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Apresentar os resultados da RSL, é a décima etapa. A décima primeira etapa, conforme Pickering e Byrne (2014), refere-se à definição do método de análise, mencionado anteriormente, e as etapas, 12, 13, 14 e 15, dizem respeito à escrita e apresentação dos resultados.

Considerando o objetivo dessa RSL, foi feita a fragmentação de cada um dos objetivos dos 13 artigos, que ao serem ressignificados e aproximados por semelhança originaram quatro categorias de análise: 1) critérios para o diagnóstico de DD; 2) níveis estruturais do diagnóstico; 3) instrumentos para avaliar a DD; 4) potencialidades e obstáculos no diagnóstico de DD.

A primeira categoria emergiu a partir dos artigos A2, A3, A4, A5, A6, A8, A 9, A10. Foi possível identificar diferentes critérios diagnósticos. É importante realizar uma detalhada descrição dos pontos fracos e forte na área de números e cálculos (A2, A3, A9). Os diagnósticos devem incluir dados sobre o desenvolvimento sócio-emocional, histórico médico, educacional e familiar (A2, A3, A6 e A9). A avaliação das habilidades de domínio não-numérico deve ser aferida (A2, A3 e A9). Quando possível, é indicado incluir dados de neuroimagem funcional (A2 e A9). As dificuldades na matemática devem ser persistentes (A2 e A9). A discrepância entre inteligência e habilidades matemáticas é critério para o diagnóstico da DD e pode ser medida por testes padronizados - dois desvios padrão (A4) e um desvio padrão (A9). O critério de exclusão mais comum é o QI não verbal abaixo de 70. Além disso, devem ser descartados outros distúrbios ou transtornos, lesão ou doença neurológica e deficiência sensorial ou motoras (A5 e A6).

O processo diagnóstico da DD, categoria 2, conforme as pesquisas selecionadas, pode ser estruturado em quatro níveis, a saber: 1) entrevista anamnésica: coleta de dados sobre o histórico médico, desenvolvimento inicial e exploração das dificuldades (A2 - A3 e A5); 2) aplicação de testes psicométricos (por exemplo: Wisc – IV) (A9); procedimentos adicionais podem ser um importante elemento de diferenciação: Teste de Transcodificação, contagem, ou ainda, avaliação de habilidades visuo-espaciais (A9); 3) aplicação de questionários específicos para avaliação de transtornos e diagnóstico neuropsicológico, para avaliação de atenção e memória (A9 e A4); 4)discussão dos achados e elaboração de intervenções individualizadas (A4 - A9).

Quanto à terceira categoria, instrumentos para a avaliar a DD, os autores da pesquisa A3 apontam que podem ser utilizados instrumentos de dois tipos: curriculares ou neuropsicológicos. O *Fundamental Calculative Ability Test* (FCAT), apresentado no A1, é um teste simplificado e avalia três componentes numéricos básicos: ordinalidade, cardinalidade, e mecanismo de compreensão de fatos numéricos. Foi desenvolvido no Japão e sua aplicação é breve (em torno de dez minutos) e pode ser utilizado por professores após breves orientações. O *Basis-Math* 4-8 (Moser Opitz et al., 2010), é um dos poucos instrumentos que avalia estudantes no nível fundamental II na Alemanha (A3).

Quanto à categoria: Dificuldades e potencialidades para a elaboração do laudo de DD, destaca-se o processamento de informações visuais como uma importante habilidade básica subjacente ao desenvolvimento da contagem básica. No artigo A13, o rastreamento ocular no diagnóstico foi avaliado. Na língua árabe, existe poucos instrumentos para avaliar auxiliar o diagnóstico de DD. Os autores do A7 traduziram e adaptaram o *Test of Mathematical Abilities – Third Edition* (TOMA- 3), para o diagnóstico de DD em crianças árabes, devido à carência de instrumentos diagnósticos egípcios. A adaptação foi considerada significativa para a triagem do transtorno (A6). Os autores do A8 destacam que a observação cuidadosa dos processos comportamentais é essencial durante a aplicação dos testes psicométricos (A8).

Diante da categorização realizada, é possível verificar que os achados vão ao encontro dos critérios citado pelo Lara (2022) e dos parâmetros nacionais e internacionais supracitados. Além disso, verifica-se que a discussão sobre os critérios diagnósticos de DD vem sendo discutidos e aprimorados. A avaliação diagnóstica completa e detalhada envolve não apenas testes psicométricos, mas exame clínico, anamnese completa e avaliação psicossocial. É importante que leve em consideração a complexidade do transtorno bem como a identificação das habilidades em defasagem, possibilitando uma base segura para o planejamento eficaz de intervenções.

A DD é um transtorno complexo e heterogêneo que afeta o neurodesenvolvimento. As representações numéricas e domínios cognitivos mais gerais, como o controle da atenção e do comportamento, estão entrelaçados com experiências individuais e ambientais. É essencial que esses aspectos sejam considerados durante a avaliação.

Diante disso, evidencia-se que estudos vem sendo desenvolvidos e aprimorados para a detecção da DD. No entanto, ainda não existe um consenso frente as ferramentas e instrumentos específicos para o diagnóstico do transtorno, que levem em consideração as diferenças individuais de cada estudantes.

Considerações finais

Este estudo apresenta uma RSL, analisando artigos, com o objetivo de analisar critérios, contribuições e instrumentos para a elaboração do diagnóstico de Discalculia do Desenvolvimento - DD. Considerando a análise realizada sobre diagnóstico de DD, verificou-se que ainda existe uma carência de instrumentos diagnósticos para a DD, ou pelo menos um consenso em relação a eles. Isso evidencia a necessidade de que pesquisadores se dediquem ao desenvolvimento de pesquisas que tenham como objetivo a elaboração de instrumentos de avaliação capazes de propiciarem com precisão que tipo de habilidade está em defasagem na DD. Nesta RSL, foram selecionadas 13 pesquisas para análise, ressalta-se que se os descritores e as plataformas de busca fossem outras, seria possível encontrar outras categorias de análise. Contudo, a escassez de literatura e a falta de instrumentos padronizados para a avaliação dificulta o processo de intervenção do psicopedagogo, impedindo-o muitas vezes, de realizar intervenções que de fato reabilitem as habilidades debilitadas.

Referências

Abdou, R. M., Hamouda, N. H., & Fawzy, A. M. (2020). Validity and reliability of the Arabic dyscalculia test in diagnosing Egyptian dyscalculic school-age children. *The Egyptian Journal of Otolaryngology*, *36*(1), 18. https://doi.org/10.1186/s43163-020-00020-6

Benedicto-López, P., & Rodri-guez-Cuadrado, S. (2019). Discalculia: Manifestaciones clínicas, evaluación y diagnóstico. Perspectivas actuales de intervención educativa. *RELIEVE - Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, *25*(1). https://doi.org/10.7203/relieve.25.1.10125

Haase, V. G., Costa, A. J., Antunes, A. M., & Alves, I. S. (2012). Heterogeneidade cognitiva nas dificuldades de aprendizagem da matemática: Uma revisão bibliográfica. *Psicologia em Pesquisa*, *6*(2), 139–150. https://doi.org/10.5327/Z1982-12472012000200007

Haberstroh, S., & Schulte-Körne, G. (2019). The diagnosis and treatment of dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt international*. https://doi.org/10.3238/arztebl.2019.0107

Kaufmann, L., & von Aster, M. (2012). The diagnosis and management of dyscalculia. *Deutsches Arzteblatt International*, *109*(45), 767–777; quiz 778. https://doi.org/10.3238/arztebl.2012.0767

Kaufmann, L., & von Aster, M. (2013). In reply. *Deutsches Ärzteblatt international*. https://doi.org/10.3238/arztebl.2013.0146c

Kosc, L. (1974). Development Dyscalculia. Journal of Learning Disabilities can be found at, 7 (3), 163-177

Košč, L. (1987). Learning disabilities: Definition or specification? A response to kavale and forness. *Remedial and Special Education*, *8*(1), 36–41. https://doi.org/10.1177/074193258700800107

Kucian, K., & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics*, *174*(1), 1–13. https://doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Lara, I. C. M. Discalculia do Desenvolvimento: alguns estudos sobre definições, diagnósticos e intervenções pedagógicas. Com a Palavra, O Professor, 7(17), 235-253.

Moraes, R. & Galiazzi, M. C. Análise Textual Discursiva. 2. ed. Ijuí, 2014.

Ohba, S., Koeda, T., Oguri, M., Okanishi, T., & Maegaki, Y. (2022). Predicting mathematical learning difficulties using fundamental calculative ability test(Fcat). *Yonago Acta Medica*, *65*(3), 238–243. https://doi.org/10.33160/yam.2022.08.010

Petermann, F., & Lemcke, J. (2005). Ursachen und Diagnostik von Rechenstörungen im Kindesalter. Monatsschrift Kinderheilkunde, 153(10), 981–990. https://doi.org/10.1007/s00112-005-1239-6

Pickering, C., & Byrne, J. (2014). The benefits of publishing systematic quantitative literature reviews for PhD candidates and other early-career researchers. *Higher Education Research & Development*, *33*(3), 534–548. https://doi.org/10.1080/07294360.2013.841651

Ramaa, S., & Gowramma, I. P. (2002). A systematic procedure for identifying and classifying children with Dyscalculia among primary school children in India. *Dyslexia*, *8*(2), 67–85. https://doi.org/10.1002/dys.214

Rubinsten, O. (2015). Link between cognitive neuroscience and education: The case of clinical assessment of developmental dyscalculia. *Frontiers in Human Neuroscience*, *9*. https://doi.org/10.3389/fnhum.2015.00304

Tischler, L., & Petermann, F. (2012). Diagnostik von Rechenstörungen. *Monatsschrift Kinderheilkunde*, 160(10), 1001–1012. https://doi.org/10.1007/s00112-012-2755-9

Van Viersen, S., Slot, E. M., Kroesbergen, E. H., van't Noordende, J. E., & Leseman, P. P. M. (2013). The added value of eye-tracking in diagnosing dyscalculia: A case study. *Frontiers in Psychology*, 4. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00679

Discussão de tarefas matemáticas: ações de professores que apoiam o raciocínio matemático

Eliane Maria de Oliveira **Araman**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
eliane.araman@gmail.com
André Luis **Trevisan**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
andreluistrevisan@gmail.com

Resumo

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é um dos grandes objetivos do ensino de matemática, pois trata-se de um processo central para a aprendizagem matemática. Nesta perspectiva, a escolha de tarefas e o modo de aplicá-las e discuti-las em sala de aula são ações importantes desempenhadas pelo professor. Assim, o objetivo desta pesquisa foi identificar as ações de uma professora durante a discussão de uma tarefa exploratória aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira e analisar de que modo tais ações contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a aprendizagem da Matemática dos alunos. A pesquisa foi realizada numa perspectiva qualitativa e os dados foram coletados por meio da gravação de áudio da discussão da tarefa. Como um dos resultados principais, destacamos a presença de ações da professora distribuídas em quatro categorias de análise: convidar; guiar/apoiar; informar/sugerir e desafiar.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Médio; Tarefas Exploratórias; Raciocínio Matemático; Ações de Professores; Brasil.

Introdução

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é considerado um objetivo importante da disciplina de Matemática nos diferentes níveis da escolaridade, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior (Jeannotte & Kieran, 2017, Mata-Pereira & Ponte, 2018, Stylianides, 2009).

Destacamos os documentos curriculares brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN (Brasil, 2002) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), nos quais o raciocínio é apresentado como relevante no processo de escolarização.

Os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocinar apenas pela memorização de conceitos e procedimentos, portanto, as ações dos professores são relevantes para tal desenvolvimento, e vão desde estabelecer um ambiente de aprendizagem desafiador e selecionar boas tarefas. É fundamental que o professor selecione boas tarefas exploratórias, questionando o estudando sobre o que ele fez, e como fez (Wood, 1997), levando-o a apresentar justificativas para suas escolhas e, com isto, proporcionando a aprendizagem matemática. Para além de selecionar boas tarefas, a forma de conduzí-las junto aos alunos merece aqui um papel de destaque. Dessa forma, este artigo relata os resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi identificar as ações de uma professora durante a discussão de uma tarefa exploratória aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira e analisar de que modo tais ações contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a aprendizagem da Matemática dos alunos. Para isso, definimos raciocínio matemático e seus processos, apoiados em autores como Stylianides (2009), Jeannotte e Kieran (2017) e Mata-Pereira e Ponte (2018). Com relação às ações de professores, recorremos ao quadro de análise de ações elaborado por Araman, Serrazina e Ponte (2019). Apoiados nesse referencial teórico, trazemos, como exemplar de análise, dados oriundos de um dos grupos, ao resolverem a tarefa proposta.

Raciocínio Matemático

De acordo com Mata-Pereira & Ponte (2018), o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos deve ser visto como um dos grandes objetivos do ensino de matemática, uma vez que se trata de um processo central para a aprendizagem matemática. Para isso, a forma como o professor organiza o ensino é relevante e vai além dos métodos de ensino tradicionais. Nesta perspectiva, a escolha de tarefas e o modo de aplicá-las e discutí-las em sala de aula merecem atenção de professores e pesquisadores.

Com relação a definição de Raciocínio Matemático, no entendimiento de Stylianides (2009), ele é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. De forma similar, Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) definem-no como o “processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Por sua vez, Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2), definem o raciocínio matemático como “um processo de inferência que inclui procurar semelhanças ou diferenças, validar e exemplificar”. Desde modo, raciocinar é criar inferências, ou seja, usar conhecimento adquirido para alcançar novas conclusões.

Na perspectiva de Jeannotte e Kieran (2017), Raciocínio Matemático é um processo de comunicação com outros e consigo mesmo que permite inferir novos enunciados matemáticos a partir de outros já conhecidos. Para elas, o Raciocínio Matemático pode ser estudado em duas perspectivas: com relação à sua estructura (podendo ser dedutivo, indutivo ou abdutivo) e com relação aos seus processos (Jeannotte & Kieran, 2017). As autoras identificam oito processos do raciocínio matemático divididos em duas categorias – validação (justificação, a prova e a prova formal), e busca por semelhanças e diferenças (formulação de conjecturas, generalização, identificação de padrões, comparação e classificação) –, e um nono processo, o de exemplificar, que dá suporte aos processos dessas duas categorias (Jeannotte & Kieran, 2017).

Embora a literatura defina todos esses processos, para este artigo discutimos apenas a formulação de conjecturas, a generalização, a identificação de padrões e a justificação, pois foram estes que emergiram na análise dos dados.

Ações de professores que apoiam o Raciocínio Matemático

Como já assinalamos, a seleção de tarefas e o modo de aplicá-las e discutí-las em sala de aula contribui para que os alunos desenvolvam o Raciocínio Matemático. Com relação as tarefas exploratórias, Brodie (2010) considera que elas têm potencial para o raciocínio matemático, uma vez que elas podem proporcionar diferentes maneiras de chegar a uma conclusão verdadeira, possibilitam a discussão de ideias matemáticas, propiciam o estabelecimento de conexões matemáticas, a comunicação matemática e a argumentação, oferecendo aos alunos oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar (Brodie, 2010).

Para além de selecionar boas tarefas, as ações do professor durante a condução das tarefas também é um aspecto importante a ser investigado. Araman, Serrazina e Ponte (2019) avançaram nos estudos sobre as ações do professor a partir de outros estudos como os de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e elaboraram um quadro de análise que descrevem as ações previstas em cada categoria de ação, a saber: convidar; guiar/apoiar; infomar/sugerir e desafiar, conforme constam na figura 1a seguir:

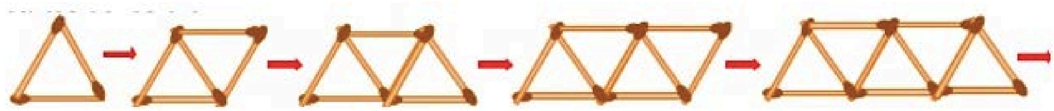
<table>
<tr><td rowspan="4">CATEGORIAS</td><td>Convidar</td><td>- Solicita respostas para questões pontuais.
- Solicita relatos de como fizeram.</td><td rowspan="4">AÇÕES</td></tr>
<tr><td>Guiar/Apoiar</td><td>- Fornece pistas aos alunos.
- Incentiva a explicação.
- Conduzo pensamento do aluno.
- Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes.
- Encoraja os alunos re-dizerem suas respostas.
- Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.</td></tr>
<tr><td>Informar/Sugerir</td><td>- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos.
- Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos.
- Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos.
- Fornece informações e explicações.
- Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.</td></tr>
<tr><td>Desafiar</td><td>- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas).
- Propõe desafios.
- Encoraja a avaliação.
- Encoraja a reflexão.
- Pressiona para a precisão.
- Pressiona para a generalização.</td></tr>
</table>

Figura 1. Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático (Araman et al., 2019, p. 476)

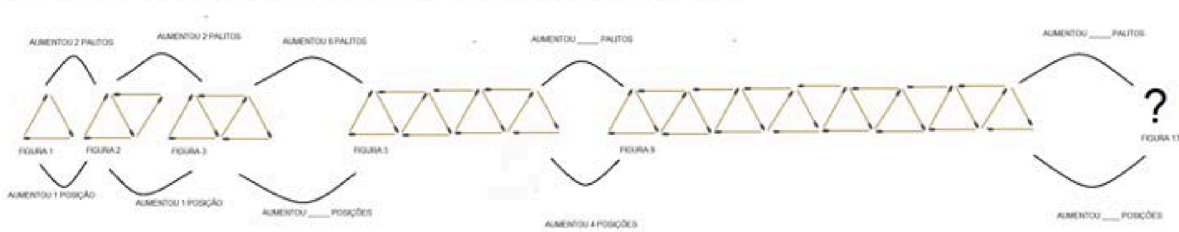
Metodologia

A investigação que deu origem a este artigo assume uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Os participantes foram alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira. A tarefa aplicada em grupos de 3 integrantes propunha uma situação envolvendo uma sequência de figuras (os termos da sequência) formadas por palitos que obedeciam a uma regra de formação, conforme a figura 2.

Darlini construiu uma sequência de figuras utilizando palitos de fósforo, dispostos da seguinte maneira:



Responda as seguintes perguntas registrando seus pensamentos, por símbolos, cálculos, esquemas ou palavras:
a) Represente a 6ª e a 7ª figura desta sequência
b) Quantos palitos, no total, tem a 12ª figura?
c) Construa uma tabela que relacione a quantidade de palitos em cada figura, da 1ª até a 7ª figuras.
d) Observe o esquema a seguir e complete as sentenças incompletas.



e) Descreva como o esquema anterior foi completado.
f) Qual a quantidade de palitos da 29ª figura?

Figura 2. Tarefa dos Palitos (Trevisan, Rebiero & Ponte, 2020, p. 7)

O objetivo da tarefa é que os alunos consigam definiar o número de palitos usados para formar cada uma das figuras sem a necessidade de contagem, recorrendo a essa regra de formação. No momento da resolução, houve a gravação em áudio das discussões realizadas entre os integrantes do grupo e a professora, que circulava entre os grupos fazendo questionamentos. Ao final, a professora chama alguns grupos à lousa para explicarem como fizeram e realiza a discussão da tarefa. Consideramos como material de análise a trasncrição do áudio de um dos grupos, devido a limitação de páginas. Considerando o objetivo deste trabalho, procurou-se identificar as ações da professora e alguns dos processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa.

Resultados

A professora convida o Grupo 1 (composto pelos alunos C, D e E), a explicar o que fizeram para toda turma e como haviam determinado o número de palitos da 29ª figura.

> *[...] Professora: Iremos começar com as discussões das atividades. Vamos começar com o grupo do Aluno E, pois, eles fizeram um raciocínio diferente. Aluno E, queria*

que você falasse como você fez para descobrir qual a quantidade de palitos na 29ª figura. (Convidar)
Aluno E: Então, a gente sabia que a figura 17 tinha um total de 35 palitos. Então, a figura 19 tinha que dar mais 4 palitos, então daria 39. Sabemos que na figura 19 seriam 39 palitos. Então se a gente aumenta 10 posições aumenta 20 palitos. Que cada posição que aumenta, aumenta 2 palitos.
[...]Professora: Você tinha pensado nisso desde início? Ou pensaram em algo diferente? (Guiar/Apoiar)
Aluno E: A gente pensou assim desde o começo. Então a figura 29, será a figura 19 mais 10 posições, então se 10 posições são 20 palitos, então seria 39 mais 20 palitos. Por isso, 59.

A professora inicialmente convidou o grupo do aluno E a apresentar suas soluções, pois haviam resolvido de uma forma que ela considerou diferente do restante da turma. O aluno então apresentou as conjecturas que haviam utilizado para resolver. A professora, numa ação de Guiar/Apoiar, questionou aos alunos se pensaram da mesma forma desde o início da resolução, pois ela gostaria que as outras conjecturas (mesmo que incorretas) fossem compartilhadas com todos. Entretanto, o aluno respondeu que sim (ou porque não reconheceu a intenção da professora, ou porque não se sentiu à vontade naquele momento em apresentar algo que estava "errado". No trecho a seguir a professora optou por ela mesma explicitar a primeira conjectura que eles haviam elaborado, buscando valorizar outras formas de pensar que, mesmo incorretas, foram gradativamente refinadas e ampliadas, até chegar a algo "correto".

Professora: Qual posição vocês somaram para chegar à posição 29? (Guiar/Apoiar). Você tinha pensando assim, que tinham me falado, pegaram a figura 17 e somaram com a figura 12, não era isso que vocês tinham feito para descobrir a figura 29? (Informar/Sugerir)
Aluno E: Que a gente sabia que a figura 17 tinha 35 palitos...
Professora: Na posição 12 tinha quantos palitos? Vocês acharam na posição 12? (Guiar/Apoiar)
Aluno E: Ah, 25...
Professora: 35+25 daria quantos? (Guiar/Apoiar). O primeiro raciocínio deles era pegar a figura da posição 17 e somar com a figura da posição 12 que tinha na primeira folha [referindo-se ao item (b) da tarefa]. Como 17+12 daria a posição da figura 29, pegaram lá 35 palitos da figura 17 e 25 palitos da posição 12, somando daria quantos? (Informar/Sugerir)
Aluno E: 60.
Professora: Por que vocês viram que não era 60? (Desafiar)
Aluno E: Porque a progressão sempre tinha números ímpares e não números pares.
Professora: Perceberam que eram ímpares, como 60 é par perceberam que não poderia ter feito daquele jeito. (Informar/Sugerir)

Neste trecho o objetivo da professora foi mostrar que os alunos elaboram outras conjecturas e que, ao tentar validá-las, perceberam que não estavam corretas. Logo, precisaram criar novas conjecturas e validá-las. Nesse trecho da discussão, ela mobilizou ações da categoria Guiar/Apoiar, ao realizar questionamentos pontuais, da categoria Informar/Sugerir, ao relatar algumas conjecturas do grupo, e de Desafiar, ao questionar por que o 60 não era um valor válido, solicitando deles uma justificativa.

Conclusões

Os resultados conseguidos indicam que as ações realizadas pela professora estão distribuídos pelas quatro categorias, conforme Araman, Serrazina e Ponte (2019). As ações da professora iniciaram sempre na categoria convidar, pois essa categoria tem a função de iniciar os alunos na discussão. Gradativamente, foram substituídas por ações de guiar/apoiar, seja por meio de questionamentos que conduziram o pensamento dos alunos, seja chamando a atenção para fatos importantes ou, ainda, solicitando que os alunos explicassem como fizeram. Ela também desempenhou ações da categoría informar/sugerir. Essas ações foram importantes, pois validaram os pensamentos corretos dos alunos, auxiliando-os a reelaborarem outros que não estavam corretos.

As ações das categorias guiar/apoiar e informar/sugerir conduziram os alunos a validarem ou não as conjecturas que elaboraram ou, ainda, a refinarem as mesmas. Essas ações da professora contribuem para o que está estabelecido na literatura que define raciocínio matemático como a capacidade de usar informações já conhecidas para obter, de forma justificada, novas conclusões (Jeannotte & Kieran, 2017; Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Com as ações de desafiar, a professora conseguiu que os alunos refletissem e reavaliassem suas formas de pensar, levando-os a tentar generalizar a conjectura, em geral testando-a em outro exemplo, e também a apresentarem algumas justificativas para o que fizeram. Segundo Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), tal ação coloca o aluno na situação de avançar em seu entendimento por meio da formação de conexões, da argumentação e da avaliação.

Em relação ao raciocínio matemático, as ações da professora auxiliaram em alguns processos. Ao questionar constantemente o que acontecia de uma figura para outra, os alunos puderam identificar um padrão, de que sempre aumentava de dois em dois, e gradativamente refiná-lo, estabelecendo entre o modo de se determinar o total de palitos em várias posições (Jeannotte & Kieran, 2017).

As ações da professora tiveram contribuições para os alunos, que estabeleram um modo de se determinar o total de palitos em várias posições, auxiliaram a elaborar e validar suas conjecturas, conduzindo-o a elaborar uma fórmula geral que se constitui numa possibilidade de generalização (Jeannotte & Kieran, 2017). Por fim, tais ações da professora contribuíram que que os alunos usassem informações já conhecidas para obter, de forma justificada, novas conclusões, de acordo com o que establecem as pesquisas em Raciocínio Matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Referências e bibliografia

Araman, E. M. O.; Serrazina, M. L. & Ponte, J. P. (2019) “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 21*(2)*, 466–490.

Bogdan, R, C.& Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Portugal: Porto Editora.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.

Brasil (2022). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer, 1.ed.

Ellis, A., Özgür, Z., Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 30*(2)*, p. 1-26.

Lannin, J., Ellis, A. B. & Elliot, R. (2011). Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Jeanotte, D.& Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 96*(1)*, 1-16.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32*(62)*.

Ponte, J. P.; Mata-Pereira, J. & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22*(2)*, 55-81.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinkingand Learning*, 11*(4)*, 258-288.

Trevisan, A. L.; Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15, 1-14.

Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional

Luis Miguel **Amador** Silva
Departamento de Matemáticas, Maestría en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
a221230134@unison.mx
José Ramón **Jiménez** Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Posgrados en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
joseramon.jimenez@unison.mx

Resumen

Se presentan los avances[1] de un proyecto de intervención didáctica que pretende atender ciertas deficiencias curriculares, relacionadas con la formación en los estudiantes de maneras variacionales de pensar, mediante el desarrollo de una propuesta didáctica sustentada en el enfoque del pensamiento variacional. Para lograr este objetivo, metodológicamente se considera imprescindible apoyarse en una interpretación del concepto "pensamiento variacional" que, además de ser clara y unívoca, sea coherente con su génesis y evolución, que permita generar hipótesis plausibles sobre cómo fomentar este tipo de pensamiento en los estudiantes. El análisis crítico de la literatura especializada sugiere que el pensamiento variacional exige una manera dinámica de pensar, en la cual el papel principal lo ocupan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos esencialmente distintos de las funciones. La realización didáctica se centra en el estudio de la covariación exponencial discreta en el bachillerato, desde la perspectiva de las sucesiones numéricas.

Palabras clave: Pensamiento variacional; Razonamiento variacional; Razonamiento covariacional; Magnitud variable; Cambio en progreso; Covariación exponencial.

---

[1] *Nota*: Al momento de la redacción de este reporte el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la fase de planeación y proceso de la implementación preliminar del diseño de intervención didáctica.

Justificación y planteamiento de la problemática

La Secretaría de Educación Pública (2017), en los Planes de Estudio de Educación Media Superior en el campo disciplinar de matemáticas, plantea una red de competencias que deben desarrollar los estudiantes, entre ellas, "construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos variacionales" (pp. 78-79). Sin embargo, en tales documentos no se proporciona al docente ninguna explicación sobre qué procedimientos son considerados variacionales o no y porqué, y mucho menos se le proporcionan ejemplos de tales procedimientos. Tampoco en la literatura especializada de investigación en Matemática Educativa encontramos fácilmente tales explicaciones y ejemplos claros, ni una descripción desprovista de ambigüedades del significado de términos que son amplia y libremente usados, como "pensamiento variacional", "procedimientos variacionales", "estrategias variacionales", etcétera. En muchas ocasiones se les utiliza sin preocupación alguna por, al menos, caracterizarlos, no digamos definirlos con cierto rigor o precisión. En estas condiciones, tanto el docente como el investigador se guían por sus propias interpretaciones, no necesariamente concordantes con las de sus colegas.

Hace tiempo, Vasco (2003) reflexionaba sobre la forma incorrecta en la que se ha interpretado al pensamiento variacional, enfatizando que éste no consiste en la memorización de fórmulas, menos en saberse la definición de función, debido a su tratamiento estático; ni tampoco consiste en dibujar por el procedimiento de punteo gráficas cartesianas, al contrario, estos aspectos obstaculizan y dificultan el pensamiento variacional en los estudiantes, paralizan la covariación al restringirse a la forma estática de una gráfica. Aspecto que entra en contradicción con la dinamicidad que exige el pensamiento variacional.

Antecedentes

En las investigaciones relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional, es fácil percatarse que el término ha sido utilizado con diferentes significados y desde distintas perspectivas. A nuestro juicio, sin embargo, no presentan una descripción que sea coherente con la génesis (epistemológica y cognitiva) y evolución de dicho tipo de pensamiento matemático. Para algunos investigadores (Báez et al., 2017; Posso Torres, 2020), el desarrollo del pensamiento variacional está relacionado con el estudio de las funciones numéricas, la construcción de gráficas cartesianas conjuntistas, el análisis de tales gráficas y su representación tabular. Otros investigadores (Caballero y Cantoral, 2013) conciben que el desarrollo del pensamiento variacional debe suceder mediante la interacción de los elementos característicos del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar); para Mariño et al. (2021) el pensamiento variacional se caracteriza como un flujo de acciones e interacciones permanentes entre subprocesos de particularizar, conjeturar, relacionar, formalizar y probar. Sin embargo, las actividades que utilizan los autores en sus propuestas se enfocan principalmente en relaciones entre números en tablas y en el análisis de gráficas cartesianas de funciones conjuntistas, esto contradice la dinamicidad que exige el pensamiento variacional (Vasco, 2003; Jiménez, 2020; Jiménez et al., en prensa).

Como resultado de nuestro análisis crítico de la literatura especializada sobre el tema, hemos llegado a concebir que el pensamiento variacional está directamente relacionado con el estudio de las *magnitudes variables*. Concebimos a las magnitudes variables como aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicos. Las magnitudes variables realmente varían. Están por doquier presentes en los así llamados fenómenos o procesos de variación y cambio. En el pensamiento variacional el papel protagónico lo desempeñan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos de una naturaleza esencialmente distinta a la de las funciones, mientras que éstas figuran sólo como actores secundarios, como una de las herramientas emergentes para la matematización de las magnitudes variables y de los procesos en que ellas intervienen (Jiménez et al., en prensa).

Al estudiar el cambio nos enfocamos en la manera en cómo una magnitud variable cambia o varía con respecto a otra. Thompson et al. (2019) consideran que el uso que se le da a este término resulta ser ambiguo en contextos matemáticos. Afirman que la manera adecuada de interpretarlo consiste en concebir que el cambio que experimentan las magnitudes variables en procesos o fenómenos de variación está sucediendo de manera progresiva en ese momento, es decir, que tiene la connotación de “cambio en progreso”. Las magnitudes variables varían teniendo un trasfondo temporal, aun y cuando el tiempo no sea una variable relevante. Esta manera de concebir los fenómenos de variación hace imprescindible recurrir al uso de tecnologías dinámicas para su estudio en el salón de clase.

En el estudio presentado por Jiménez et al. (en prensa), así como por Thompson y Carlson (2017), los autores conciben que el pensamiento variacional está constituido por dos componentes: el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, ambos tienen que ver con la conceptualización matemática de las magnitudes variables. En el primer caso, se despliega el razonamiento y trabajo matemático sobre una sola magnitud variable en la recta numérica, y en el segundo, el razonamiento simultáneo y el trabajo matemático sobre dos magnitudes variables en el plano cartesiano.

Objetivo

La intención primaria de nuestro trabajo consiste en elaborar una propuesta didáctica basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial, para desarrollar maneras variacionales de pensar en los estudiantes, superando las visiones estáticas, procedimentales y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se sustenta en la concepción de Harel (2008), quien afirma que el objetivo principal de la educación matemática consiste en desarrollar en el estudiante el pensamiento matemático, y que éste se compone de un conjunto de *maneras de entender* y *maneras de pensar*. El autor define a las maneras de entender como el producto cognitivo particular de un acto mental realizado por una persona, y a las maneras de pensar como las características cognitivas de un acto mental realizado por una persona, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras de entender.

Por lo tanto, concebimos que para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes se deben diseñar estrategias de aprendizaje que le permitan generar maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar. A las *maneras variacionales de entender* las definimos como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características o propiedades esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de cambio en progreso, y a las *maneras variacionales de pensar* como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas realizadas por el estudiante, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras variacionales de entender.

Por ejemplo, si un estudiante formula una interpretación, similar o igual, argumentando que "las variables algebraicas son símbolos que escogemos de manera conveniente para representar aspectos cuantitativos esenciales de cierta realidad que intentamos comprender", está evidenciando una manera variacional de entender, porque es un producto cognitivo particular de su acto mental de interpretar una característica importante de las magnitudes variables. Y si sostiene más de una manera variacional de entender es probable que posea, además, la manera variacional de pensar que "las magnitudes variables pueden estar representadas por diferentes símbolos o literales, según convenga".

En nuestro trabajo, hemos identificado y caracterizado una serie de maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar, en los términos más generales, esto es, referidas a cualquier proceso de variación. A partir de ellas, hemos identificado y caracterizado una serie de maneras variacionales de entender más específicas, relacionadas con los procesos de variación exponencial, las cuales orientarán el diseño de nuestra secuencia de actividades didácticas, para que los estudiantes del nivel medio superior desarrollen un conjunto de imágenes, ideas y herramientas variacionales, estudiando situaciones extra matemáticas relacionadas con la covariación exponencial. Lamentablemente, no hay espacio aquí para analizar con detalle este punto. Más adelante en este documento, en las Tablas 1 y 2, se presentan de manera resumida algunas de dichas maneras variacionales de entender la covariación exponencial.

Descripción general de la propuesta preliminar de intervención didáctica

El diseño didáctico comprende tres etapas, cada una de ellas enfocadas en algunas de las *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial (MVdE-CExp)* que se espera desarrollar en los estudiantes. Obviamente, se abordan en primer término las maneras de entender consideradas como las más simples o elementales. En las dos primeras etapas se consideran situaciones que involucran casos de covariación discreta, tanto creciente como decreciente, y en la tercera etapa se consideran situaciones que involucran covariación continua.

Etapa Introductoria

En la etapa introductoria se espera promover la imagen dinámica de la fenomenología del crecimiento y decrecimiento exponencial, así como la identificación del comportamiento exponencial que tiene una magnitud variable y su representación dinámica en el plano cartesiano. Las actividades cognitivas que se plantean en esta etapa involucran las siguientes *MVdE-CExp.*

Tabla 1
Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial.

MVdeE-CExp1	Una magnitud variable de comportamiento exponencial se caracteriza por el hecho de que su factor de crecimiento o decrecimiento es igual a una constante positiva (mayor o menor que la unidad).
MVdeE-CExp2	Los valores numéricos consecutivos de una magnitud variable de comportamiento exponencial forman una sucesión geométrica (creciente o decreciente), $y_{n+1} = ry_n$, r es la razón de la sucesión geométrica.

Fuente: Elaborado por los autores.

Etapa Intermedia

En la etapa intermedia se pretende que los estudiantes identifiquen, analicen y expresen de manera algebraica importantes relaciones cuantitativas entre los valores numéricos de las magnitudes variables (independiente y dependiente), involucradas en cada una de las situaciones planteadas en la etapa introductoria. Entre ellas, las relaciones suma-multiplicación, resta-división considerando cambios unitarios y arbitrarios, positivos y negativos. Estas relaciones cuantitativas en buena medida caracterizan la esencia de la covariación exponencial, y subyacen al entendimiento del concepto de logaritmo y sus propiedades. Las actividades cognitivas que se plantean en esta etapa involucran las siguientes *MVdE-CExp.*

Tabla 2
Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial.

MVdeE-CExp3	Si la magnitud variable independiente x aumenta (disminuye) una unidad, entonces la magnitud variable dependiente se incrementa (decrementa) por un factor constante r, y ese factor constante es la base de la expresión algebraica exponencial para esa relación de covariación.
MVdeE-CExp4	Si la magnitud variable independiente x aumenta (disminuye) n unidades, entonces la magnitud variable dependiente aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior en forma proporcional: $m(x \pm n) = m(x) \cdot r^{\pm n}$.
MVdeE-CExp5	Una magnitud variable m covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable x, sí para dos valores cualesquiera de ésta $x_1 y\ x_2 = x_1 + h$, los correspondientes valores de m satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 + h) = m(x_1) \cdot m(h)$.
MVdeE-CExp6	Una magnitud variable m covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable x, sí para dos valores cualesquiera de ésta $x_1 y\ x_2 = x_1 - h$, los correspondientes valores de m satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 - h) = \frac{m(x_1)}{m(h)}$.

Fuente: Elaborado por los autores.

Hasta esta etapa se ha llegado en el momento de escritura de este reporte.

Etapa final

En la etapa final se espera introducir la noción de función exponencial como modelo de la covariación exponencial, pero ahora a partir de situaciones realistas de covariación continua.

Resultados esperados

La intención primaria de nuestro trabajo es presentar una propuesta didáctica basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial, para desarrollar maneras variacionales de pensar en los estudiantes, superando las visiones estáticas, procedimentales y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase. En virtud de ello, el resultado más importante que se espera consiste en obtener evidencia sólida que permita valorar si nuestra propuesta contribuye o no a promover en el estudiante el desarrollo de maneras variacionales de pensar en un contexto centrado en el estudio de la covariación exponencial. Esperamos poder constatar si fue o no posible lograr que el estudiante identifique y formule algunas de las características cuantitativas esenciales de la covariación exponencial, a partir de la coordinación conjunta y simultanea entre los valores numéricos de magnitudes variables que intervienen en fenómenos, y que se modelan mediante sucesiones aritméticas y geométricas.

Los avances presentados hasta el momento dan lugar a que posteriormente pueda llevarse a cabo el refinamiento del diseño didáctico, la implementación oficial del mismo, y abordar las acciones relacionadas con la fase de valoración y análisis, para continuar con el desarrollo del proyecto de intervención didáctica.

Referencias y bibliografía

Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, Olga L., y Pérez, R. (2017). Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería. Formación universitaria, 10(3), 93-106. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010

Caballero, M., y Cantoral Uriza, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/4217/

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. EMA, 8, 121-156 http://funes.uniandes.edu.co/1520/1/98_Carlson2003Razonamiento_RevEMA.pdf

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf

Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics / El nivel cero del razonamiento covariacional en la educación secundaria. https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR-1655990-Jimenez.pdf

Jiménez Rodríguez J. R., Grijalva Monteverde A., Milner, F. A., Dávila Araiza M. T., y Romero Félix C. F. (en prensa). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora. México.

Mariño, L.F, Falk de Losada, M., y Hernández, R.V, (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. Eco Matemático, 12 (1), 13-25. http://funes.uniandes.edu.co/23412/

Posso Torres, J. (2020). Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática. Universidad del Valle. http://hdl.handle.net/10893/17958

Secretaría de Educación Pública, SEP (2017). Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. http://sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Thompson, P. W., Ashbrook, M., y Milner, F. (2019). Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology. Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Vasco Uribe, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010). http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/index.html

Divertimientos Geométricos: Una Propuesta para la Clase de Matemáticas

Carmen Rosa **Giraldo** Vergara
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
carmita@mat.ufmg.br

Resumen

El aprendizaje de las Ciencias, y de las Matemáticas en particular, no es exclusivo de la educación formal. Las "actividades informales", desarrolladas en y por espacios de ciencia, en particular por museos universitarios, acercan la ciencia a diferentes públicos, ayudando a estimular su aprendizaje y creando vocaciones científicas. En ese sentido, el Museo de Matemáticas de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG), en Brasil, busca promover las Matemáticas a través de actividades lúdicas que despierten el interés de los visitantes, especialmente de profesores, llevándolos a reflexionar sobre propuestas que transmitan una visión positiva de las Matemáticas entre sus estudiantes. En este taller presentaremos algunas actividades desarrolladas en el Museo y que pueden ser utilizadas en las clases para mostrar que las Matemáticas pueden ser una experiencia divertida y agradable.

Palabras clave: Matemática recreativa; Actividades lúdicas; Juegos matemáticos; Espacios de Ciencia; Enseñanza de las matemáticas.

Introducción

En su historia, el Departamento de Matemáticas de la Universidad Federal de Minas Gerais - UFMG ha trabajado con profesores y alumnos de la escuela primaria e secundaria a través de diversos proyectos. Estas acciones tienen un objetivo común, que justifica su existencia: divulgar las Matemáticas, haciéndolas accesibles a un público más amplio, y contribuir para mejorar su enseñanza y aprendizaje en las escuelas y promover una mayor articulación entre ellas. En ese contexto, el Museo de Matemáticas UFMG fue creado en 2018 para promover las Matemáticas a través de actividades lúdicas que despierten el interés de los visitantes, especialmente de estudiantes y professores, llevándolos a reflexionar sobre propuestas que promuevan una visión positiva de las Matemáticas. En marzo de 2020, este espacio pasó a formar parte de la Red de Museos y Espacios de Ciencia y Cultura de la UFMG.

Según Maceira (2007), los espacios museológicos se han convertido en los últimos tiempos en un potencial educativo, por reunir en su totalidad, experiencias, interrogantes y hechos conjugando emoción, percepción, conocimiento y educación. Los argumentos que utiliza están relacionados con la forma en que el museo involucra al público en sus exposiciones y cómo se abordan los objetos y contenidos expuestos.

En ese sentido, el Museo de las Matemáticas UFMG, a lo largo de sus 4 años de funcionamiento, busca, a través de sus actividades, crear condiciones favorables para un cambio de comportamiento en relación a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. El Museo de las Matemáticas UFMG trabaja en tres líneas principales: a) realización de actividades para democratizar, difundir y popularizar el conocimiento matemático; b) creación, producción y exhibición de materiales concretos que despierten el interés de los visitantes y fomenten el gusto por las Matemáticas e c) actividades de formación inicial y continua para docentes de la enseñanza secundaria, buscando así mostrar diversas estrategias que posibiliten una reflexión constante sobre las Matemáticas y ofrezcan condiciones favorables para un cambio de comportamiento positivo en relación a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Una Propuesta para Sala de Clase

En esta actividad pretendemos presentar a los profesores de la educación secundaria, actividades de las matemáticas recreativas que se ofrecen en el Museo y que pueden ser utilizadas en el aula con el objetivo de promover un cambio de actitudes hacia las Matemáticas y su enseñanza. Se darán también orientaciones para su construcción e indicaciones para su uso en el salón de clases, analizándose el potencial de cada objeto y/o actividad para el estudio de diversos conceptos matemáticos.

En las últimas décadas, las Matemáticas Recreativas han asumido un papel importante como instrumento de difusión y popularización de las Matemáticas a través de la comunicación de aspectos históricos y culturales y su relación con otras áreas del conocimiento y como herramienta didáctica que se puede explorada en las clases de matemáticas.

Las matemáticas recreativas son una rica fuente de modelos matemáticos y un espacio para la practica de pensamientos y razonamientos propios de la Aritmética, la Topología, la Geometría, el Análisis Combinatorio y las Matemáticas en general. Un ejemplo de eso son los juegos de azar practicados durante la Edad Media, que llevaron a los matemáticos Blaise Pascal y Pierre de Fermat a desarrollar la Teoría de la Probabilidad, base para la creación de las compañías de seguros en la segunda mitad del siglo XVIII. También cabe señalar que la Teoría de Grafos, actualmente muy aplicada en el mundo tecnológico, nació con el Problema de los Siete Puentes de Königsberg, que consiste en determinar si una persona puede cruzar siete puentes específicos pasando solo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de partida. Este problema fue resuelto por el matemático Leonhard Euler en 1763.

Nuestro interés por las Matemáticas Recreativas fue inspirado principalmente en los trabajos del divulgador Martin Gardner, aunque muchos de los avances, especialmente en el campo de los acertijos, derivan de trabajos de principios del siglo XX, de Lewis Carroll, Sam Loyd y Henry Dudeney.

El valor de las matemáticas recreativas radica en el hecho de que puede ser el punto de partida para la investigación matemática y puede utilizarse con fines educativos. La naturaleza interdisciplinaria de las Matemáticas Recreativas ha llevado a descubrimientos importantes e interesantes y ha presentado algunos problemas inusuales. Algunos ejemplos notables son las simetrías en las obras del artista holandés M. C. Escher y The Game of Life de J. H. Conway.

El objetivo del Museo es, por tanto, difundir los principios, interacciones, reflexiones y descubrimientos que ofrece la Matemática Recreativa. De hecho, los juegos, dada la actividad mental que estimulan, son un buen punto de partida para la enseñanza de las Matemáticas y pueden servir de base para una posterior formalización del pensamiento matemático. Así, el uso de juegos y la organización de actividades lúdicas en torno a las Matemáticas es un elemento educativo importante que puede incidir en la visión que los estudiantes construyen sobre las Matemáticas, llegando a considerarla como una ciencia que puede causar placer y diversión.

Para Gardner (1998), uno de los principales divulgadores de las Matemáticas en el siglo XX, los juegos se presentan en diferentes formas y tipo: rompecabezas geométricos, juego de estrategia, magia, acertijos aritméticos, recortes de papel, pasatiempos o simplemente, matemáticas con un toque de curiosidad o diversión.

La organización de actividades lúdicas en las clases de Matemáticas resulta ser una herramienta didáctica para mostrar a los estudiantes que esta materia pueden ser una experiencia divertida y placentera. En este taller se trabajará sobre materiales didácticos concretos con los que se podrá trabajar diversos conceptos geométricos. Cada una de estas actividades tiene sus características y trabaja con habilidades específicas. Esto le permite al docente seleccionar, adaptar y explorar los recursos que mejor se adapten a las demandas que implica el proceso de enseñanza-aprendizaje de su clase.

El propósito de este taller es presentar a los participantes, objetos matemáticos tangibles y visualmente atractivos que estimulen el interés por temas avanzados de Matemáticas y realizar actividades que proporcionen la oportunidad de promover en los estudiantes una visión positiva de las Matemáticas. Cada actividad combina diversión con un rico contenido matemático y en la ejecución de la misma se pueden abordar temas que fomentan el razonamiento lógico y facilitan, por ejemplo, el estudio de patrones geométricos, simetrías, visualización espacial, resolución de problemas, entre otros.

En particular, se presentarán: disecciones de polígonos (como rompecabezas geométricos), construcciones de caleidociclos, los sólidos platónicos (construidos a partir de polígonos de encajar) e la cúpula de Leonardo da Vinci entre otros.

Comenzaremos el taller construyendo el rompecabezas geométrico "Del cuadrado a la cruz de Sam Loyd". Este rompecabezas es el resultado de diseccionar un cuadrado en 5 piezas.

Su historia sigue siendo un misterio, pero se cree que Loyd inventó este enigma como publicidad de una empresa. El rompecabezas (Ver Figura 1) consiste en formar un cuadrado usando las 5 piezas. Con él se pueden formar otras figuras como una cruz, un rectángulo, una T, un trapecio o un rombo (Gardner p. 104). Así, este rompecabezas es un material muy rico en cuanto recurso didáctico, ya que el profesor pode explorar diversos tópicos como la clasificación de algunas figuras geométricas, medidas de largura, pontos medios de segmentos, ángulos, comparación de de área, construcciones geométricas , entre otros. Además de este rompecabezas, presentaremos otras disecciones de polígonos en particular, la disección de Perigal como demostración del demostrar el Teorema de Pitágoras.

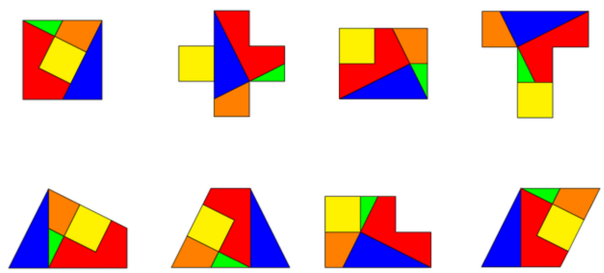


Figura 1. Rompecabezas del Cuadrado a la Cruz de Sam Loyd

El uso de rompecabezas y juegos matemáticos en la clase de Matemática se justifica no solo por la curiosidad natural que despiertan, sino también por el hecho de que facilitan el desarrollo de habilidades geométricas (plano-espaciales) como la visualización y reconocimiento de figuras, percepción de posición , comparación de distancias, áreas y volúmenes, organización de estrategias, capacidad de análisis, enriquecimiento del vocabulario geométrico, razonamiento lógico, entre otras habilidades.

En este contexto, el uso de los rompecabezas en el ámbito escolar debe ir más allá del simple “ensamblaje de piezas”; este recurso debe proporcionar la mejora de las técnicas de resolución de problemas, inducir al descubrimiento de las relaciones entre los elementos que lo componen y explora con naturalidad conceptos matemáticos como: lado, vértice, ángulo, centro, punto medio, área, así como nombres y características de figuras planas y espaciales.

La segunda actividad a ser realizada será la construcción de caleidociclos. Los caleidociclos son mecanismos móviles compuestos por tetraedros conectados por bisagras giratorias. Destacamos que a diferencia de los clásicos caleidociclos que están formados por un número par de tetraedros, generalmente seis u ocho, el Caleidociclo de Möbius que se muestra en la Figura 2, está formado por nueve tetraedros y fue creado por un grupo de investigadores del Instituto de Ciencia y Tecnología de Okinawa (OIST). El caleidociclo de Möbius tiene la propiedad de tener una sola cara, obteniendo un objeto similar a la cinta de Möbius. Esto nos permitió montar la Metamorfosis de Escher en su superficie y lograr crear una obra que relaciona Matemáticas y Arte.

Figura 2. Caleidociclo de Möbius

Este caleidociclo no surgió por casualidad, sino a través de un proceso de investigación e innovación. En 2018 investigadores del OIST demostraron que es posible construir una figura geométrica tridimensional formada por siete o más sólidos idénticos de tal forma que podamos recorrer todas las caras de los tetraedros sin tener que cambiar de dirección, dando la idea de que la figura solo tiene una cara. Además, puede girar de forma continua y suave sobre sí mismo, resolviendo así un problema clásico de la Geometría del Movimiento. Las figuras geométricas construidas por ellos son exactamente los Caleidociclos de Möbius.

También se presentará parte de la geometría que se encuentra en los sólidos platónicos, explorando su historia y características. Los sólidos perfectos, también conocidos como sólidos platónicos, son cuerpos convexos en los que todas las caras son polígonos regulares congruentes y el mismo número de polígonos afecta a cada vértice. Platón fue el primer matemático conocido en describir tales sólidos, con un total de cinco: tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro.

En este sentido, llevaremos a cabo la construcción del icosaedro dentro de la actividad titulada “triángulos de encajar”. El objeto a construir está hecho de trozos de papel idénticos que se encajan entre sí sin utilizar pegamento ni cinta adhesiva. Este es un rompecabezas de lógica que funciona muy bien como ejercicio de resolución de problemas, desarrollo del razonamiento espacial y descubrimiento de patrones geométricos y coloridos. Además de construcción de regla y compás en el momento de construir las "alas" de los triángulos con que será construido el icosaedro.

Figura 3. Sólidos Platónicos

Finalmente trabajamos con la construcción de la Cúpula de Leonardo da Vinci. De todos los diseños de puentes de Leonardo, el puente autoportante es sin duda el más ingenioso por la sencillez de su estructura y construcción. Es una estructura compuesta por vigas cilíndricas, que se ensamblan sin el uso de fijaciones o juntas de enclavamiento. Una vez ensamblado, el peso del puente debe ser suficiente para ejercer la presión necesaria para que las vigas longitudinales bloqueen las vigas transversales, evitando así que la estructura se derrumbe. Así, cuanto mayor sea la presión sobre la parte superior del puente, mayor será su estabilidad.

El mismo principio que se usa en los puentes se puede usar en dos dimensiones para construir las cúpulas de Leonardo. Estas estructuras se construyen a partir de un solo tipo de pieza y sin ataduras, únicamente mediante el acoplamiento **t**ridimensional de las piezas, que se sostienen y sostienen entre sí, siguiendo unos patrones geométricos determinados. En la colección de documentos de Leonardo da Vinci, en las hojas 899v y 899r del Codex Atlanticus, se presentan algunos de estos patrones.

Esta actividad tiene como objetivo: Reconocer y analizar patrones geométricos; desarrollar nociones espaciales y habilidades manuales y de trabajo en equipo; estudiar los componentes histórico-artísticos inherentes a la actividad.

Figura 3. Cúpula de Leonardo

Conclusión

El Museo de las Matemáticas UFMG, a lo largo de sus 4 años de funcionamiento, se ha convertido en un espacio de democratización, difusión y popularización del conocimiento matemático, que busca, a través de sus actividades, crear condiciones favorables para un cambio de comportamiento en relación a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Consideramos que las actividades prácticas creativas pueden introducir de manera informal a los estudiantes al pensamiento matemático y entusiasmarlos con la formalización de conceptos matemáticos. Los niños y jóvenes tienen una curiosidad inherente y un deseo de explorar, que es característico de hacer ciencia.

Consideramos que la difusión de las Matemáticas Recreativas, como práctica pedagógica, contribuye al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y promueve una estrecha articulación entre alumnos y profesores de matemáticas de la escuela con profesores y alumnos del curso de Matemáticas de la universidad. En ese sentido, el Museo desarrolla actividades de formación de profesores ofreciendo la asignatura "Matemáticas Recreativas: una propuesta para las clases de Matemáticas" para alumnos del Curso de Matemáticas de la Universidad Federal de Minas Gerais en Brasil, y actividades de formación continua de profesores.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del Decanato de Extensión de la UFMG, de la Red de Museos de la UFMG y del grupo PET del Curso de Matemáticas de la UFMG.

Referencias y bibliografía

Gardner, M. Divertimentos Matemáticos. São Paulo: Ibrasa, 1998. 189p.

Grando, R. O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula. Campinas: UNICAMP, 2000. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Campinas, Campinas, 2000.

Maceira, L.M. El museo: espacio educativo potente en el mundo contemporáneo. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-109X2009000100007

Educação Estatística na proposta curricular de um Curso Técnico Integrado em Administração

José Fernandes da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia localizado de Minas Gerais
Brasil
jose.fernandes@ifmg.edu.br
Rodrigo Pablo Oliveira Machado
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia localizado de Minas Gerais
Brasil
rodrigo.pablo@ifmg.edu.br

Resumo

O objetivo desse artigo é apresentar e discutir a abordagem da Estatística na proposta curricular de um Curso Técnico Integrado em Administração. O suporte teórico constitui-se pela Educação Estatística e formação integral do ser humano. É uma pesquisa qualitativa com uso de análise documental de um Projeto de Curso e de Planos de Unidade de Ensino. Os dados analisados evidenciam que a Educação Estatística não se faz presente, explicitamente, no currículo do citado curso. A parca abordagem dos conteúdos estatísticos revela a subserviência desta como ciência instrumental das outras áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Educação Estatística; Formação Integral; Pensamento Estatístico; Literacia Estatística.

Introdução

O objetivo desse artigo é apresentar e discutir a abordagem da Estatística na proposta curricular do Curso Técnico Integrado em Administração (CTIA) de um campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia localizado no Estado de Minas Gerais (IFMG).

Em uma sociedade altamente globalizada, na qual são veiculadas informações pelos diversos meios de comunicação os cidadãos necessitam de uma formação que os possibilitem ler e compreender dados que se apresentam de diferentes formas. Essa capacidade segundo Cazorla

(2002), requer o desenvolvimento do pensamento estatístico que contribui para a cidadania assim como o ato de ler e escrever.

Nesse sentido, a escola possui o papel fundamental de formar cidadãos críticos com a capacidade de "lutar com, nos e pelos discursos que circulam nessa sociedade injusta e de privilégios e seja capaz de desmontar essas armadilhas, pelas quais se perpetua a injustiça, a desigualdade e todas as mazelas da nossa sociedade" (Cazorla; Castro, 2008, p. 47). Ainda, o ensino de forma geral necessita reconhecer que a Estatística é uma ciência multidisciplinar que abarca todas as outras ciências e que seus recursos possibilitam e solucionam problemas de diferentes áreas como aponta Ramos (2007). Destarte, é fundamental a articulação e a integração desse campo do conhecimento nas estruturas curriculares da educação básica, em especial no âmbito da Educação Profissional e Tecnológica (EPT), que é o campo desta investigação.

Assim sendo, é importante destacar que as bases conceituais da EPT concebem a formação do cidadão numa totalidade (Ciavatta, 2005), compreendendo as partes em seu todo ou da unidade no geral, considerando os aspectos sociais, históricos, políticos e econômicos no desenvolvimento dos processos educativos. A citada autora, sobre os processos formativos, explicita que a escola deve [...] "garantir ao adolescente, ao jovem e ao adulto trabalhador o direito a uma formação completa para a leitura do mundo e para a atuação como cidadão pertencente a um país, integrado dignamente à sua sociedade política" [...] (Ciavatta, 2005, p. 2-3).

Com base nessas discussões estabelecemos para este artigo a seguinte questão norteadora: "Qual é o espaço da Educação Estatística no currículo de um Curso Técnico Integrado em Administração?".

Marco teórico

A Estatística surge, naturalmente, através de práticas humanas, como a realização de censos, coleta de dados e tentativas de tratamento de informações e, portanto, é possível apontar que sua história está intrinsecamente ligada às questões do desenvolvimento das sociedades. Dessa construção histórica, temos, hoje, a possibilidade de sintetizar informações, especialmente, em tabelas e gráficos que possibilitam importantes análises de diferentes contextos. Na contemporaneidade, este campo acadêmico culminou em uma área específica da Matemática muito importante para o estabelecimento de diagnósticos sociais, análises econômicas e muitas outras. Esta disciplina, conforme exposto por Batanero (2001), teve seu reconhecimento formal e mundial a partir de 1970, inicialmente valorizando o raciocínio probabilístico e a dimensão política e ética.

A Educação Estatística surgiu da dificuldade de professores em ensinar a Estatística. Esta é uma área de pesquisa, cujo objetivo principal é estudar e entender como as pessoas ensinam e aprendem estatística (Cazorla, Kataoka e Silva, 2010; Pereira, 2013). Corroborando com essa abordagem Campos, Wodewotzki, Jacobini (2013), destacam que a EE surge como "uma nova área de atuação pedagógica", de tal forma que essa concepção se aproxime da vida real e do convívio social dos estudantes em direção à sua formação ampla.

O processo de ensinar exige que o professor saiba estatística e, além disso, tenha a consciência que essa ciência faz parte da vida do aluno em seu contexto social. Tal perspectiva, nos leva a refletir sobre a importância das abordagens de EE na prática docente pois esta tem como objetivo "Valorizar uma postura investigativa, reflexiva e crítica do aluno, em uma sociedade globalizada, marcada pelo acúmulo de informações e pela necessidade de tomada de decisões em situações de incerteza. (Campos, Wodewotzki e Jacobini, 2011, p. 12).

Assim, a EE busca ir além da concepção de que a Estatística se trata de uma mera aplicação de fórmulas e exercícios mecanizados sem contextualização. Para tal, três competências são fundamentais para o desenvolvimento do aluno: literacia estatística, raciocínio estatístico e pensamento estatístico.

Conforme Campos (2007), a literacia estatística se evidencia quando o aluno consegue ler e interpretar as linguagens estatísticas representadas de várias formas, por meio de gráficos, tabelas, os símbolos entre outras terminologias. Tal perspectiva, na abordagem de Lopes e Fernandes (2014) está descrita de forma mais explicita quando relacionam a literacia estatística à leitura correta de jornais, revistas, internet, entre outras mídias. Isso, de fato, contribui para o desenvolvimento crítico do indivíduo, devido ao fato de as informações estarem relacionadas ao cotidiano.

O raciocínio estatístico para Lopes e Fernandes (2014) se manifesta quando o aluno dá sentido aos dados estatísticos, compreende e explica os resultados, faz resumos das ideias, relacionando-as a situações concretas e conceitos estatísticos.

Sobre o pensamento estatístico, na visão de Campos (2007), significa pensar em um todo, enxergando os dados além dos que se apresentam nos textos e ainda fomentando situações ou questões que não estejam previstas.

Para o desenvolvimento das habilidades supracitadas, Lopes e Fernandes (2014) destacam a importância de resolução de problemas em detrimento da aplicação de exercícios mecanizados e uso de fórmulas, pois aquelas englobam um ciclo investigativo explorando mais a criatividade, o pensar do indivíduo, além de fomentar um debate, contribuindo dessa forma para o pensamento estatístico.

Diante do exposto, acreditamos que a abordagem da Educação Estatística coaduna e corrobora para o desenvolvimento da formação integral e politécnica que entende o trabalho como atividade vital, autônoma e emancipadora dos cidadãos (Antunes; Pinto, 2017). Tal perspectiva está preconizada pelas bases conceituais da Educação Profissional e Tecnológica, em particular, dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia - IF.

Vale destacar que os IF foram criados a partir da Lei n° 11.892, de 29 de dezembro de 2008, a qual instituiu a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. A partir dessa Lei, a temática sobre Currículo Integrado" ou "Integração Curricular" tem ganhado relevância no Brasil, pois nesse ambiente dos IF as diretrizes curriculares defendem que a formação em nível médio se dê por "Cursos Técnicos Integrados".

Segundo Frigotto (2012), o Ensino Médio Integrado (EMI) na concepção de politecnia permite a formação de indivíduos emancipados, criativos e leitores críticos da realidade onde vivem e com condições de agir sobre ela. Sendo assim, o EMI se difere da formação profissional fragmentada, unilateral, subordinada ao mercado e formadora de trabalhadores alienados.

No mesmo sentido, Ramos (2012) esclarece que, dentro da proposta de um currículo integrado, os processos de ensino devem estar articulados à realidade do sujeito que aprende, pela proposição de desafios, problemas e/ou projetos, tais como as atividades de pesquisa e estudo de situações, a elaboração de projetos de intervenção, dentre outros, desencadeando, por parte do aluno, ações resolutivas.

Metodologia

Para esta investigação, realizamos uma análise documental, tendo como base as abordagens de Macdonald e Tipton (1993). Segundo os citados autores há dois importantes grupos de documentos, que são:

- Os escritos, constituídos por documentos oficiais públicos, a imprensa escrita e os documentos de caráter privados, e
- Os visuais, que são constituídos por fotografias, pinturas, arquitetura e esculturas.

Valemo-nos de documentos escritos da administração pública, neste caso do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) (instrumento norteador da organização e gestão dos cursos, com vistas a garantir o processo formativo) e dos Planos de Unidade de Ensino (PUE) - planejamento das ações pedagógicas a serem executadas numa disciplina ao longo de um período específico, sendo construído a partir do PPC para o 1º, 2º e 3º anos - do Técnico Integrado em Administração de um campus do IFMG, buscando assuntos mais relevantes para a investigação.

O recorte temporal foi de 2017 (data de criação e implantação do CTIA) até 2019 (ano de integralização da primeira turma.

Encontramos em Ludke (2013) as características de uma pesquisa qualitativa, visto que a mesma ocorre em um contexto no qual o pesquisador é o principal artefato, sendo que a coleta de dados é predominantemente descritiva e a preocupação com o processo é bem maior que o resultado.

A análise dos documentos foi desenvolvida por meio de análise de conteúdo na qual nos amparamos em Moraes (1999) que propõe cinco etapas, a saber:
1° etapa: preparação das informações: leitura e organização do PPC dos PUE, dos documentos oficiais e dos referenciais teóricos;
2° etapa - unitarização ou transformação dos conteúdos em unidades: leitura dos temas que envolvem: Educação Estatística; Educação Profissional e Tecnológica Integrada ao Ensino Médio e Ensino de Estatística no curso Técnico em Administração;
3° etapa - categorização ou classificação das unidades: Organização curricular do CTIA; Metodologia e objetivos do CTIA; EE no Projeto Pedagógico do CTIA e EE nos Planos de Unidade de Ensino do CTIA;

4 ° etapa - descrição: elucidação teórica dentro de cada unidade, exposição dos dados e a debate dentro das seções e;
5° etapa - interpretação: as discussões e interpretações de cada seção são apresentadas.

Análise dos dados

Segundo o PPC (2017), o currículo do CTIA foi criado após o diagnóstico feito a partir da realidade social, econômica, política, cultural e educacional do entorno da instituição. Sobre à estrutura pedagógica do CTIA a organizada se deu por *núcleos politécnicos*. Estes núcleos buscam estabelecer condições mais efetivas para promover a interdisciplinaridade, bem como a integração de conhecimentos científicos e experiências profissionais.

Para facilitar a leitura, organizamos o quadro 1 sintetizando os principais dados da matriz curricular.

Quadro 1
Estrutura curricular do CTIA

Núcleos politécnicos	**Disciplinas 1°ano**	**Disciplinas 2°ano**	**Disciplinas 3°ano**
ESTRUTURANTE (NE) Conhecimentos do ensino médio (linguagens, códigos e suas tecnologias; ciências humanas e suas tecnologias; e ciências da natureza, matemática e suas tecnologias).	Artes	Artes	-
	Biologia	Biologia	Biologia
	Educação Física	Educação Física	Educação Física
	Filosofia	Filosofia	Filosofia
	Física	Física	Física
	Geografia	Geografia	Geografia
	História	História	História
	Inglês	Inglês	Inglês
	Matemática	Matemática	Matemática
	Língua Portuguesa e Literatura	Língua Portuguesa e Literatura	Língua Portuguesa e Literatura
	Química	Química	Química
	Sociologia	Sociologia	Sociologia
ARTICULADOR (NA) Conhecimentos do ensino médio e da educação profissional, que destacam mais propriamente o caráter interdisciplinar da formação.	Informática Aplicada	Sustentabilidade e Responsabilidade	Empreendedorismo e Inovação
	Administração	Ambiental	
		Trabalho, Ciência e Tecnologia na Contemporaneidade	Gestão Inclusiva da Diversidade Sociologia
TECNOLÓGICO (NT) Conhecimentos da formação técnica específica, de acordo com o campo de conhecimentos do eixo tecnológico, com a atuação profissional e as regulamentações do exercício da profissão.	Teoria Geral da Administração	Introdução à Produção e Logística	Administração Financeira
		Noções de Contabilidade	Gestão de Pessoas
		Práticas Comerciais	Gestão Pública
	Economia e Mercado	Fundamentos da Matemática Financeira e Estatística	Marketing de Produtos e Serviços
		Noções de Direito aplicado à Gestão	Planejamento e Controle da Produção
PRÁTICA PROFISSIONAL (PP) Relativo às práticas e recursos que sustentam a construção de propostas de intervenções nas realidades profissionais.	Seminário de Iniciação à Pesquisa	Seminário de Orientação para Prática Profissional	Desenvolvimento do Projeto Integrador
Carga Horária por série/ano	975	1095	1030

Fonte: Elaborado pelos autores

Em relação as metodologias de ensino, o PPC destaca práticas pedagógicas que aproximam os alunos de um contexto real e, principalmente, estabeleçam situações que os estimulem a busca e ampliação dos seus saberes e conhecimentos, mas que não se restrinjam a uma preparação exclusiva para o mercado de trabalho.

Ainda sobre a proposta metodológica do CTIA, três importantes pontos nos chamaram a atenção: as habilidades e os conhecimentos prévios dos alunos, as capacidades e a busca pela autonomia de forma progressiva e os valores e concepção de mundo dos alunos. No que concerne aos objetivos do CTIA, o PPC assim os expressa:

Quadro 2
Objetivos do PPC do CTIA

Objetivo geral
O Curso Técnico em Administração integrado ao Ensino Médio do IFMG – *campus* xxxx tem por objetivo formar profissionais-cidadãos técnicos de nível médio, competentes técnica, ética e politicamente e com elevado grau de responsabilidade social. A partir dessa premissa, espera-se que os profissionais concluintes do curso sejam capazes de executar as funções de apoio administrativo: protocolo e arquivo, confecção e expedição de documentos administrativos e controle de estoques, bem como compreender conceitos essenciais, princípios, técnicas e processos relacionados aos modelos modernos de gestão no âmbito das organizações, sejam elas de comércio, indústria ou de serviços, públicas ou privadas.
Objetivos específicos
• capacitar os (as) técnicos (as) para o desenvolvimento dos procedimentos gerenciais na esfera pública, privada e no terceiro setor, considerando as demandas do mundo do trabalho local e regional; • fornecer embasamento teórico e profissional pertinente aos conhecimentos, habilidades e atitudes imprescindíveis ao exercício das atividades executadas na área de Administração; • incentivar a produção e a inovação científico-tecnológica relacionada aos procedimentos gerenciais; • contribuir para uma formação crítica e ética frente às inovações tecnológicas, de modo a que o (a) estudante concluinte seja capaz de avaliar o impacto delas no desenvolvimento e na construção da sociedade; • estabelecer relações entre trabalho, ciência, cultura e tecnologia e suas implicações para a educação profissional e tecnológica; • possibilitar reflexões acerca dos fundamentos científicos e tecnológicos da formação técnica; • relacionar teoria e práticas nas diversas áreas da formação; • proporcionar desenvolvimento pessoal e profissional por meio do conhecimento científico; • criar parcerias, visando à atualização constante dos (as) estudantes.

Fonte: (IFMG, 2017, p. 30).

Analisando os objetivos geral e específicos, observamos que os mesmos convergem com os princípios da EE, pois esta busca uma abordagem que possibilite ao cidadão se desenvolver levando em consideração os aspectos técnicos, éticos e políticos atuando na sociedade de forma ativa e crítica.

No 1° ano são previstas 16 disciplinas distribuídas nos 4 núcleos politécnicos, conforme apresentado na tabela XX. Realizamos uma análise geral do currículo buscando identificar a presença da Estatística nessa etapa do Ensino Médio e constamos que não há abordagem da Estatística de forma explícita como tópico de alguma ementa e nem como disciplina propriamente dita.

Dando sequência à análise, no currículo do 2° ano são previstas 20 disciplinas distribuídas nos 4 núcleos politécnicos, conforme mostrado na tabela 2, e a disciplina que menciona de forma explícita a Estatística é *Fundamentos de Matemática Financeira e Estatística* pertencente ao NT. Já a disciplina de *Matemática* pertencente ao NA não prevê tópicos específicos de Estatística.

Por fim, em relação ao 3° e último ano do CTIA são previstas 19 disciplinas. A disciplina de Matemática pertencente ao NE, cuja carga horária anual são 90 horas, menciona em sua ementa o tópico “Estatística” de uma forma geral: “*Geometria Analítica. Circunferência. Cônicas. Números Complexos. Polinômios. Estatística*”. Analisando os objetivos geral e específicos, verificamos que em dois dos objetivos específicos estão diretamente coerentes com os princípios da EE, quais sejam: “Tomar decisões diante de situações-problema que envolvam dados estatísticos “e “Compreender e fazer juízo de informações estatísticas de diferentes naturezas”.

Quadro 3
Objetivos dos PUE do CTIA

1° Ano/2017 – Matemática
Objetivo Geral: Desenvolver a capacidade (habilidade) de construir novos conhecimentos através do raciocínio lógico e indutivo, aplicando conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas às diversas situações, no contexto das ciências humanas e tecnológicas, respeitando-o como um cidadão ativo, crítico e ético, preparando-o assim para a prática da cidadania.
Objetivos Específicos • Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreensão e transformação, em aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema; • Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático; • Identificar diferentes representações e significados de números e operações no contexto social; • Compreender o conceito de função para associar exemplos do cotidiano e modelar situações problemas; • Construir gráficos e associar a eles suas respectivas funções; • Identificar uma sequência de números que obedecem a uma determinada lógica; • Desenvolver sequências numéricas utilizando o raciocínio lógico; • Identificar regularidades em uma sequência de valores numéricos; • Associar situações do cotidiano a padrões que podem gerar uma progressão; • Resolver problemas que envolvam progressão aritmética e geométrica; • Utilizar os recursos de Matemática Financeira em situações do cotidiano; • Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como, dedução, analogia, estimativa e, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.
2° Ano/2018 – Matemática
Objetivo Geral: Desenvolver a capacidade (habilidade) de construir novos conhecimentos através do raciocínio lógico e indutivo, aplicando conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas às diversas situações, no contexto das ciências humanas e tecnológicas, respeitando-o como um cidadão ativo, crítico e ético, preparando-o assim para a prática da cidadania.
Objetivos específicos • Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreensão e transformação, em aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema; • Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático; • Compreender a trigonometria como um caminho para descobrir medidas inacessíveis; e deste ponto saber usar de modo sistemático as razões fundamentais trigonométricas em diferentes contextos; • Utilizar a linguagem matricial e as operações com matrizes como instrumento para interpretar dados, relações e equações; • Conceituar determinantes de uma matriz; • Construir, identificar e classificar equações lineares e sistemas lineares; • Conhecer e utilizar áreas de figuras planas, relações métricas nos polígonos regulares; • Reconhecer, definir e analisar prismas, pirâmides, cone, cilindro e troncos, bem como suas propriedades e seus elementos; • Calcular áreas e volumes das figuras espaciais; • Desenvolver o entendimento dos resultados e conceitos em Análise Combinatória e Probabilidade; • Realizar cálculos utilizando Binômio de Newton; • Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como, indução, dedução, analogia, estimativa e, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.
2° Ano/2018 - Fundamentos de Matemática Financeira e Estatística
Objetivo Geral: Desenvolver a habilidade de interpretar situações empresariais, operar os cálculos financeiros e tomar decisões de investimentos.
Objetivos Específicos • Utilizar calculadoras e softwares financeiros; • Proporcionar o entendimento da matemática financeira e suas aplicações no ambiente de negócios; • Estudar e praticar cálculos de capitalização simples e composta e de empréstimos com pagamento unitário ou parcelado; • Estudar a inflação e sua influência no mercado financeiro; • Estudar e praticar métodos de amortização e de análise de investimentos; • Estudar os princípios básicos da Estatística descritiva aplicada à Administração.

3° Ano/2019 – Matemática
Objetivo Geral: Estabelecer conexões e integração entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do currículo e de conhecimento. Expressar-se em linguagem oral, escrita e gráfica diante de situações matemáticas. Desenvolver atividades positivas na construção do seu conhecimento matemático.
Objetivos Específicos • Apresentar os conceitos básicos de Matemática, apresentando ao estudante as principais ferramentas para a elaboração e condução de projetos de pesquisa; • Propiciar o domínio dos conceitos fundamentais da matemática elementar e suas relações com os conteúdos estudados; • Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam adquirir uma formação científica geral e avançar em estudos posteriores; • Aplicar os conhecimentos matemáticos nas atividades cotidianas, na atividade tecnológica, raciocínio, de resolver problemas, de comunicação, bem como sua criatividade.

Fonte: Adaptado de (IFMG, 2017, 2018, 2019).

Os objetivos descritos no PUE são os mesmos previstos na matriz curricular do PPC da referida disciplina. Analisando todos os objetivos, destaca-se que aqueles relacionados ao conteúdo de funções apresentam estreita relação com a EE, permitindo ao professor explorar dados e situações que podem ser representadas em gráficos e tabelas.

Observando-os, no quadro 3, dentre todos elencados, um merece destaque em nossa análise, pois contempla de forma geral o ensino da Estatística, ou seja, *"Estudar os princípios básicos da estatística descritiva aplicada à Administração"*. Neste, notamos uma prevalência da formação profissional (direcionada para um Administrador) em detrimento à formação geral. Entendemos que tal objetivo não está em consonância com os pressupostos pedagógicos de uma formação integral pois o principal objetivo do processo formativo integrado é permitir ao educando os conhecimentos profissionais e gerais ao mesmo tempo, visando o efetivo exercício de sua cidadania.

Por fim, no 3° ano identificamos a presença de tópicos relacionados aos conteúdos estatísticos, fato que demonstra um alinhamento em relação ao PPC. A ementa do PUE definida *"Estatística Básica: Termos de uma pesquisa estatística. Tabelas de frequência. Representações gráficas. Medidas de tendência central e de dispersão"*, se apresenta importante, no entanto, é necessário que a mesma seja desenvolvida buscando uma formação crítica e reflexiva do aluno em relação ao uso da Estatística na sociedade atual (Batanero; Díaz, 2011).

Em relação a esses objetivos, nos chamou a atenção o último objetivo específico definido como *"Aplicar seus conhecimentos matemáticos nas atividades cotidianas, na atividade tecnológica, raciocínio, de resolver problemas, de comunicação, bem como sua criatividade."*, uma vez que as mais recentes propostas curriculares, em especial a BNCC (Brasil, 2018), destacam a importância do enfrentamento de problemas e suas interrelações com as questões sociais, políticas, econômicas e culturais.

Conclusões

Dada a importância da Estatística, em particular da Educação Estatística, na sociedade contemporânea, o PPC carece de atualizações no sentido de contemplar este campo do conhecimento em todas as séries do CTIA, bem como apresentar uma proposta clara dessa temática voltada a uma formação integral que esteja em consonância com as demandas da sociedade atual.

Outro ponto importante é que o ensino de Estatística possui contribuição para a formação científica, profissional e humana na Educação Básica. É necessário que este vá além da concepção propedêutica – aquela voltada para o ensino das disciplinas tradicionais no campo da formação geral - e que se caminhe para uma perspectiva de formação científica, interdisciplinar, contextualizada e articulada com conhecimentos de outras disciplinas. Assim, os tópicos de Estatística devem ser explícitos minuciosamente, para que as práticas de interdisciplinaridade sejam favorecidas.

Referências

Antunes, Ricardo; Pinto, Geraldo Augusto. (2017). *A fábrica da educação: da especialização taylorista à flexibilização toyotista*. Coleção Questões de nossa época, Volume 58. São Paulo: Cortez Editora.

Batanero, Carmen. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación em Educación Estadística.

Batanero, Carmen; Díaz, Carmen (Ed.). (2011). *Estadística con proyectos*. España: Universidad de Granada.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC.

Brasil. Ministério da Educação. (2008). Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica e cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Brasília.

Campos, Celso Ribeiro. (2007). *A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação*. [Tese doutorado] - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Campos, Celso Ribeiro; Wodewotzki, Maria Lúcia Lorenzetti; Jacobini, Otávio Roberto. (2013). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Campos, Celso Ribeiro; Wodewotzki, Maria Lúcia Lorenzetti; Jacobini, Otávio Roberto. (2011). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Coleção tendências em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Cazorla, Irene Maurício. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. [Tese Doutorado] – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Cazorla, I. M., & Castro, F. C. de. (2008). O papel da estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico - *Publicatio UEPG: Ciências Humanas, Linguistica, Letras e Artes, 16*(1). https://doi.org/10.5212/publ.humanas.v16i1.617.

Cazorla, Irene Maurício; kataoka, Verônica Yumi; Silva, C. B. (2010). Trajetória e Perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT-12. In: Lopes, C. E.; Coutinho, C. Q. S; Almouloud, S. A. (Eds). *Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. São Paulo: Mercado das Letras.

Ciavatta, M. (2005). A formação integrada a escola e o trabalho como lugares de memória e de identidade. *Revista Trabalho Necessário, 3*(3). https://doi.org/10.22409/tn.3i3.p6122

Frigotto, Gaudencio. Educação Politécnica. (2012). In: Caldart, R. S.; Pereira, I. B.; Alentejano, P.; Frigotto, G. (Orgs.) *Dicionário da Educação do Campo* (267-274). Rio de Janeiro, São Paulo: Expressão Popular.

IFMG. (2017). *Instituto Federal de Minas Gerais. Projeto Pedagógico de Curso. PPC Curso Técnico em Administração – Nível Médio Integrado.* Pró-reitoria de Ensino.

Lopes, P. C., & Fernandes, E. (2019). Literacia, Raciocínio e Pensamento Estatístico com Robots. *Quadrante*, *23*(2), 69–94. https://doi.org/10.48489/quadrante.22907.

Lüdke, Menga. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* 2. ed. Rio de Janeiro: EPU.

Macdonald, Kelly; Tipton, Charles. (1993). Using documents. In: Gilbert, N. (eds.) *Researching social life*. London: Sage.

Moraes, Roque. (1999). Análise de Conteúdo. *Revista Educação*, Porto Alegre, 22, (37), 7-32.

Pereira, Luciana Boemer Cesar. (2013). *Ensino de estatística na escola do campo: uma proposta para um 6º ano do ensino fundamental*. [Dissertação de Mestrado] - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa.

Ramos, Edson Marcos Leal Soares. (2016). *Estatística: poderosa ciência ao alcance de todos*. Jornal da Universidade Federal do Pará, ano XXX, n. 130. Disponível em: https://bit.ly/2KJ8SdF. Acesso em: 03 nov. 2021.

Ramos, Marise. (2012). Possibilidades e desafios na organização do currículo integrado. In: FRIGOTTO, Gaudêncio *et al*. (Orgs.) *Ensino médio Integrado: concepções e contradições* (107-127). Cortez.

Educação financeira crítica e a contemporaneidade: uma proposta para o ensino médio

Ieda Maria Giongo
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
igiongo@univates.br
Julio César Rossetto
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
julio.rossetto@universo.univates.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo examinar de que forma o desenvolvimento de tarefas embasadas na Educação Financeira Crítica e direcionadas a estudantes do Novo Ensino Médio brasileiro contribui para aprimorar o pensamento crítico e melhorar a qualidade de suas vidas. Os sujeitos de pesquisa foram constituídos por uma turma de estudantes do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública situada num município do Estado do Mato Grosso, Brasil. Os referenciais teóricos que sustentam a investigação são relativos à educação matemática crítica. Os materiais de pesquisa abarcam o diário de campo do pesquisador, aulas gravadas e posteriormente transcritas e materiais produzidos pelos estudantes. Os resultados iniciais apontam a produtividade de operar com tais tarefas, evidenciando, em sala de aula, potentes discussões acerca de aspectos matemáticos e sociais no âmbito da economia na contemporaneidade.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Educação Financeira; Ensino Médio; Educação Matemática Crítica; Design-Based Research.

Introdução: do que trata a temática

O presente trabalho tem por objetivo examinar de que forma o desenvolvimento de tarefas embasadas na Educação Financeira Crítica e direcionadas a estudantes do Novo Ensino Médio contribui para aprimorar o pensamento crítico e melhorar a qualidade de suas vidas. A justificativa da pesquisa está alicerçada em dois pilares. O primeiro aponta a criação do assim chamado novo ensino médio brasileiro que contempla, dentre outros, as trilhas de aprendizagem. Nestas, há a possibilidade de desenvolver elementos de educação financeira, considerada por estudantes, pais e professores, necessária para a formação do jovem estudante. O segundo pilar, decorrente do primeiro, evidencia o viés crítico aqui defendido, que propõe uma educação financeira voltada para contribuições na tomada de decisão dos estudantes, capacitando-os a enfrentar criticamente os desafios apresentados pela sociedade. Essa rapidez com que tudo se transforma evidencia-se na oscilação da economia brasileira nos últimos anos, interferindo diretamente na situação financeira dos estudantes, uma vez que em períodos de fluidez econômica e de recessão não é possível manter a mesma postura de consumidor.

Nesse sentido, entendemos a relevância da Educação Financeira Crítica, como meio de conscientização, que pode contribuir na percepção de momento econômico e também na tomada de decisão por parte do indivíduo; assim, a desmistificação desses diferentes momentos econômicos sobre os efeitos da economia no cotidiano de cada pessoa surge como pilar a ser proposto. Dessa maneira, ao falar de conscientização, nos referimos “à abordagem da realidade mais crítica possível, desvelando-a para conhecê-la, e para conhecer os mitos que enganam e ajudam a manter a realidade da estrutura dominante” (Freire, 2016, p. 60).

Podemos também aferir que a Base Nacional Curricular Comum (Brasil, 2017), vigente no Brasil, aborda aspectos da Educação Financeira nas diferentes disciplinas. Esse trabalho comum pode ser produtivo para se alcançar as competências previstas pela base. Dessa forma, a temática da Educação Financeira foi contemplada pelos redatores da BNCC como um dos quinze Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) a serem abordados pelos Estados e Municípios. Nessa linha, os TCTs têm por finalidade proporcionar aos estudantes o estudo de forma transversal de temas pertinentes a sua atuação no cotidiano como indivíduo inserido em uma sociedade em constante transformação. Na BNCC, os TCTs foram ampliados de seis para quinze temas, distribuídos em seis macro áreas temáticas, que são apresentadas nas laudas subsequentes juntamente com os TCTs da DRC-MT.

Sendo assim, na BNCC, a Educação Financeira com a Educação Fiscal e o Trabalho compõem a macroárea denominada Economia. Por sua vez, este documento se subdivide em duas etapas: DRC-MT do Ensino Fundamental homologado no ano de 2018, e o DRC-MT do Ensino Médio homologado pela Portaria nº 356, de 20 de maio de 2021 (Mato Grosso, DRC-MT, 2021), sendo que este trabalho concentra seus estudos na etapa do Ensino Médio, uma vez que o cerne da pesquisa é a Educação Financeira no “Novo Ensino Médio”.

Tendo como premissas as ideias até aqui apresentadas, a seguir evidenciamos os aspectos metodológicos que foram centrais para a emergência dos materiais de pesquisa.

Aspectos metodológicos

A investigação, qualitativa, está embasada em ideias de Moreira (2017, p.3) ao delimitar que a pesquisa com foco na Educação em Ciências busca "[...] respostas a perguntas sobre ensino, aprendizagem, currículo e contexto educativo em ciências e sobre professorado de ciências e sua formação permanente, dentro de um quadro epistemológico, teórico e metodológico consistente e coerente, no qual o conteúdo específico das ciências está sempre presente". Corroborando Moreira (2017) acerca da pesquisa qualitativa, Minayo (2017) destaca que uma pesquisa deste tipo descreve as características/atributos da relação e das atitudes do transcorrer do processo investigativo, bem como retrata em capacidade e veemência a ocorrência das múltiplas dimensões dos fenômenos a serem estudados. Logo, entende-se que a pesquisa de natureza qualitativa prioriza a liberdade dos envolvidos e a descrição minuciosa dos fenômenos e dos elementos que a envolvem.

É mediante esse contexto empírico que um coletivo de autores propôs estudos voltados à metodologia *Design-Based Research* (DBR), ou seja, os professores e pesquisadores buscaram examinar, melhorar e praticar a DBR na área da Educação. Dessa forma, Nobre *et al.* (2017, p. 130) afirmam:

> DBR é uma tipologia de pesquisa científica, na qual pesquisadores em educação desenvolvem, em colaboração com os participantes, soluções para os desafios/problemas identificados no contexto escolar. [...] A DBR tem-se qualificado como uma aposta nas pesquisas que possuem propósitos práticos associados à produção teórica, produzindo mecanismos de inovação educacional a curto e médio prazo.

Dessa forma, salientamos que a primeira interação foi desenvolvida no segundo semestre de 2021, com alunos de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio, de uma Escola Pública do município de Vera/MT. A escolha por desenvolver esta prática pedagógica com uma turma do 1º Ano se justifica porque em 2022 a Escola está implantando o "Novo Ensino Médio" de forma gradual, atendendo somente os alunos desta série/ano escolar na nova modalidade de ensino, isso para garantir a terminalidade dos discentes já inclusos no processo de ensino desta etapa.

É importante destacar que os responsáveis assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), tendo em vista a importância de questões atinentes à ética em pesquisa. A direção e supervisão da escola também estavam cientes e assinaram o Termo de Anuência. Por conta disso, os estudantes foram nomeados por números: 1, 2, 3, e assim sucessivamente.

Sinteticamente, as tarefas desenvolvidas com os estudantes estão descritas no Quadro a seguir:

Quadro 1
Cronograma da organização da pesquisa

Encontro (Carga Horária)	Tarefas	Objetivos
1º (2 horas/aula)	**Tarefa 1** Desigualdade Social	Discutir diferentes contextos sociais presentes no Estado do Mato Grosso, por meio de reportagens.
	Tarefa 2 Controle Financeiro	Dialogar com os alunos, formas de organização de recursos financeiros que possam contribuir para o desenvolvimento de projetos de vida. Sendo assim, será proposto aos alunos que pesquisem formas para controlar as finanças pessoais e/ou familiares.
2º (2 horas/aula)	**Tarefa 3** Minha Família	Viabilizar discussões em grupo referentes à tomada de decisão financeira de cinco famílias e cinco situações-surpresa que as afetam.
	Tarefa 3.1 Tomada de decisão	
3º (2 horas/aula)	**Tarefa 3.2** Apresentação das decisões tomadas pelas famílias	Propiciar a apresentação das tomadas de decisões dos grupos, possibilitando um espaço para que sejam feitas considerações e contribuições dos demais grupos.
4º (2 horas/aula)	Continuação da tarefa 3.2	Propiciar a apresentação das tomadas de decisões dos grupos, possibilitando um espaço para que sejam feitas considerações e contribuições dos demais grupos.
5º (2 horas/aula)	**Tarefa 4** Porcentagem e Regra de três	Contribuir para a construção de conceitos de Porcentagem e Regra de Três.
6º (2 horas/aula)	Continuação da tarefa 4	Contribuir para a construção de conceitos de Porcentagem e Regra de Três.
7º (2 horas/aula)	**Tarefa 5** Juros abusivos	Por meio de uma situação-problema, debater a temática dos juros abusivos, possibilitando análises de taxas por meio de ferramentas (Gerenciamento de Séries Temporais e Calculadora cidadã) disponibilizadas pelo Banco Central do Brasil (BCB).
8º (2 horas/aula)	**Tarefa 6** Análise dos gráficos	Possibilitar análises, compreensões e discussões de gráficos oriundos de reportagens sobre a virtualização da economia - Compras Online *E-commerce*, Virtualização do Dinheiro.
9º (2 horas/aula)	**Tarefa 7** Virtualização da economia	Viabilizar discussões referentes à virtualização da economia e suas consequências.
	Tarefa 7.1 A virtualização da economia em nosso contexto	Por meio de um debate, evidenciar os hábitos da virtualização da economia em nosso contexto socioeconômico.
	Tarefa 7.2 Entendimentos e os “E-golpes”	Possibilitar, por meio do estudo de reportagens, alguns cuidados e entendimentos recorrentes sobre a virtualização da economia.
10º (3 horas/aula)	**Tarefa 7.3** Apresentação das considerações	Propiciar a apresentação das tomadas de decisões dos grupos, possibilitando um espaço para que sejam feitas considerações e contribuições de todos.
	Tarefa 8 Roda de conversa	Suscitar um momento de discussão sobre a pesquisa realizada a fim de elencar possíveis contribuições.

Para fins de análise, na próxima seção apresentaremos os resultados obtidos com o desenvolvimento da atividade 3.1, a cargo de um grupo de cinco estudantes.

Sobre um resultado

Dentre as várias tarefas, uma delas consistiu em analisar o caso de uma família de agricultores recém assentados, que foi surpreendida com o recebimento de uma herança. Eis a situação:

A família Silva está passando por um momento de equilíbrio financeiro. A mãe ganhou R$140.000,00 referentes a uma herança.

a) Discutam o que fazer com esse dinheiro.
b) Após decidirem o que comprar ou como investir, pesquisem taxas, preços e as melhores opções. Busquem situações próximas da realidade, ou seja, vocês precisarão consultar o comércio e os bancos para buscar informações, tais como amortização de dívidas, ativos passivos e ativos negativos.

Os estudantes iniciaram apresentação por meio do diálogo a seguir:

> Aluno 1: Pensamos em plantar soja e milho, porém temos pouca terra e o maquinário, adubos, sementes e venenos teriam um custo muito alto.
> Aluno 2: Só um trator usado custa mais que os R$140.000,00.
> Aluno 1: E fora que é muito arriscado pros pequenos encararem isso, se der uma safra ruim, então, quebra.
> Aluno 3: Aí pensamos, gado seria uma boa, pois o pai poderia continuar trabalhando na fazenda e garantindo a renda e assim arriscar menos.

Evidenciamos que a atividade vem ao encontro do contexto dos estudantes, pois possuem uma boa noção dos altos custos e riscos envolvidos no agronegócio, mostrando, assim, que conhecem o meio no qual estão inseridos, fato este que fez com que imediatamente refutassem a ideia inicial e partissem para uma outra possibilidade mais segura, porém ainda inserida no campo do agronegócio. Skovsmose (2013) afirma que para alcançarmos uma Educação Crítica, devemos seguir alguns pontos chaves, entre eles desenvolver problemas voltados ao contexto dos sujeitos e aos seus objetivos, atribuindo uma competência crítica. Corroborando Skovsmose (2013), Freire (2020, p.38) afirma que: “Quando o homem compreende sua realidade, pode levantar hipóteses sobre o desafio dessa realidade e procurar soluções. Assim, pode transformá-la e com o seu trabalho pode criar um mundo próprio: seu eu e suas circunstâncias”.

O grupo ainda optou por apresentar a segunda alternativa em forma de um teatro, não transcrito, pois a maioria das falas eram em uma linguagem própria, simulando a “língua inglesa” – que se tornou compreensível por meio de auxílio dos gestos/sinais. A representação teatral foi composta por três personagens: um Americano, o proprietário do sítio (Família Silva) e, por fim, o intermediário. Assim, na representação, os dois primeiros personagens possuíam um amigo em comum que é o intermediário; logo, o americano propôs um acordo para uma sociedade na área da agropecuária para o confinamento de bois. Ainda, ao final da apresentação, os alunos esclareceram o contexto da encenação e responderam aos questionamentos dos espectadores. Desta maneira, o americano - Aluno (**II**) - esclareceu que propôs um acordo, sendo que cada um deles investiria R$280.000,00 (em uma sociedade de 50% cada) na compra de bezerros da raça Nelore. Entretanto, os possíveis lucros da criação seriam divididos da seguinte maneira: 25% para o americano e 75% para o agricultor. Tal ideia se daria em função do agricultor entrar no negócio com o capital financeiro, além de ceder o espaço para a criação e o agricultor também seria responsável pelo manejo dos animais. Consideramos, frente aos esclarecimentos do grupo, que os participantes optaram por investir em uma área de seu conhecimento e não correr muitos riscos, decisão coerente, quando levados em consideração conceitos da Educação Financeira. Outro aspecto importante a se destacar é a matematização da problemática apresentada, em que a tomada de decisão dos envolvidos foi estabelecida por uma matemática rica em associações implícitas com os conceitos da matemática escolar. Desse modo, "matematizar significa, em princípio, formular, criticar e desenvolver maneiras de entender" (Skovsmose, 2013, p.26), e isso pode ser potencializada pelas relações com a realidade vivida, evidenciado pelos alunos que são inseridos no contexto da agropecuária.

Algumas considerações finais

Neste contexto, buscamos a reconstrução de conceitos de Educação Financeira Crítica, baseada na construção de significados, por intermédio do diálogo entre os envolvidos – o professor na posição de mediador – e os estudantes. O desenvolvimento desses significados ocorre a partir da utilização de conceitos teóricos que sustentam as ideias de como operar suas finanças. Posto isso, entendemos que no campo da Educação Financeira, a busca pela "liberdade" freiriana é dada por meio da autonomia na tomada de decisão, não ficando na "sombra" de regramentos ou convencionalidades, como, por exemplo, a obrigatoriedade de direcionar periodicamente um percentual do salário para incrementar a reserva financeira. Assim, procuramos desenvolver com os alunos o hábito de (re)pensar suas ações (ação-reflexão), visando aos impactos que as mesmas trarão em sua vida financeira.

Ademais, o ato de (re)pensar permeou o caminho várias vezes, tendo em vista que nosso entendimento sobre a Educação Financeira foi reconstruído no decorrer de estudos teóricos desenvolvidos no Mestrado. Assim, fundamentado nas ideias de Educação Crítica proposta por Freire (2016) e na Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2013), emerge a "Educação Financeira Crítica" que se alinha com os principais objetivos/conceitos propostos pelo Novo Ensino Médio.

As contribuições para os processos de ensino e de aprendizagem na Educação Financeira Crítica e a virtualização da economia são os focos principais desta intervenção. Além disso, outro foco é a elaboração de um Produto Educacional que possibilite a replicação desta prática em outros cenários, via metodologia DBR.

Em consonância com os ditames da DBR, no segundo semestre de 2022, as tarefas serão desenvolvidas com outra turma de estudantes, do turno vespertino. Também é importante destacar que, ao final da prática pedagógica, por meio de um roda de conversa, os estudantes tiveram a oportunidade de explicitar suas opiniões acerca das tarefas desenvolvidas. Os excertos a seguir expressam algumas ideias apontadas:

> Aluno 9: Conversei com meus pais em casa, eles acharam legal trabalhar a educação financeira.
> Aluno 6: Foi muito interessante, temos diferentes situações que as pessoas estão passando, é algo legal de trabalhar, algo interessante, algo que pra mim me fez focar mais, porque nunca tinha trabalhado nessa área e nem visto isso. Nenhum professor tinha comentado com a gente ainda.

Aluno 15: Você aprende a não entrar em golpes.
Aluno 3: E também a não dar golpes. Na matemática a gente aprende a fazer contas, na educação financeira eu vou fazer a conta e já ver como usar ela para fazer outras coisas, já com um assunto no meio dia.

Nesse sentido, buscamos, ao final do processo cíclico desta pesquisa, além de colaborar para com a solução do problema evidenciado neste contexto, contribuir para outros pesquisadores/professores desenvolverem este "produto/cartilha" com seus estudantes em diferentes contextos, observando suas especificidades e, consequentemente, refinando a proposta inicial. Em meio ao processo, também é possível se basear em diversas metodologias e teorias de aprendizagem, para preencher lacunas da investigação, que nesta pesquisa em específico optamos pela Educação/Matemática Crítica.

Bibliografia

Brasil, MEC (2017). Base Nacional Curricular Comum. Brasília, Ministério da Educação e Cultura.

Freire, P. (2016). Conscientização. 1a Edição. São Paulo: Cortez.

Freire, P. (2020**).** Educação e mudança. 41a Edição. São Paulo: Paz e Terra.

Minayo, M. C. (2017) Amostragem e saturação em pesquisa qualitativa: consensos e controvérsias. Revista Pesquisa Qualitativa, São Paulo, v. 5, n. 7, p. 1-12, abr. 2017.

Moreira, M.A. (2017). Ensino e aprendizagem significativa. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Nobre A. M. F et al (2022). Princípios teórico-metodológicos do design-based research (DBR) na pesquisa educacional tematizada por recursos educacionais abertos (REA). Revista San Gregorio, Equador, n. 16, p. 128-141, mar. 2017. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6132792. Acesso em: 5 maio 2022.

Skovsmose, O. (2013). Educação matemática crítica: a questão da democracia. São Paulo: Papirus.

Educação Financeira na Ótica da Educação Matemática Crítica

Paulo Henrique Marçal
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo
Brasil
paulo.m.m.souza@usp.br
Marcos D. Maschio
Escola Nossa Senhora das Graças
Brasil
prof.marcosdmaschio@gmail.com
Raquel Milani
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo
Brasil
rmilani@usp.br

Resumo

Esta comunicação é um recorte do Projeto de Ensino apresentado pelo primeiro autor a uma disciplina da Licenciatura em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Apresentaremos uma experiência de sala de aula: uma atividade investigativa que visou discutir a Educação Financeira com estudantes do Ensino Médio. Para o desenvolvimento deste trabalho, nos fundamentamos na Educação Matemática Crítica (EMC) e na Educação Financeira. Tivemos como objetivo de pesquisa: perceber como algumas preocupações da teoria da EMC se comportam empiricamente ao executar uma atividade investigativa e como objetivo de ensino: proporcionar aos discentes uma experiência mais crítica da Matemática Financeira e que não ficasse calcada apenas na aplicação de fórmulas. Com a realização da atividade investigativa, conseguimos evidenciar aos/às estudantes a possibilidade de pensar em como a pandemia de Covid-19 afetou de diferentes formas pessoas de diferentes realidades sociais na cidade de São Paulo.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica; Educação Financeira; Matemática Financeira; Cenários para Investigação; Atividade Investigativa.

Introdução

A presente comunicação é um recorte do Projeto de Ensino apresentado pelo primeiro autor deste texto a uma disciplina de graduação (que representa o Trabalho de Conclusão de Curso), da Licenciatura em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, a terceira autora deste texto foi a orientadora do Projeto em questão. Neste recorte será apresentada uma experiência de sala de aula que se trata de uma atividade investigativa que visou discutir a Educação Financeira junto com estudantes do Ensino Médio. O primeiro autor deste texto atuou como estagiário e o segundo autor como professor titular das turmas envolvidas. Com a divulgação desta experiência, visamos compartilhar estratégias para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

A Educação Financeira é um assunto que tem ganhado repercussão tanto dentro quanto fora dos muros das escolas. Cidadãos e cidadãs brasileiros/as apontam quão importante seria ter tido aulas de Matemática mais voltadas para a Educação Financeira, aulas que dentre tantas possibilidades, sensibilizassem os/as estudantes sobre boas práticas de consumo, sobre como de fato funciona um investimento na realidade e não apenas como naquelas aulas tradicionais de Matemática Financeira, onde se simula vários tipos de aplicação de Capital, para se obter os Juros e por fim descobrir o Montante da aplicação. Procurando romper com o paradigma do exercício que envolve o ensino tradicional da Matemática Financeira, desenvolvemos esta atividade de cunho investigativo. Com a realização desta atividade investigativa, tivemos:

- Como objetivo de pesquisa: perceber como algumas preocupações da teoria da EMC se comportam empiricamente ao executar uma atividade investigativa com estudantes da Educação Básica;
- Como objetivo de ensino: proporcionar aos discentes uma experiência mais crítica da Matemática Financeira e que não ficasse calcada apenas na aplicação de fórmulas.

O conteúdo desta comunicação está dividido em três seções. Na primeira delas, apresentaremos aspectos da base teórica que utilizamos para fundamentar o nosso objetivo de pesquisa. Na segunda seção, detalharemos como se deu o cenário para investigação que tinha por objetivo proporcionar aos discentes uma experiência mais crítica da Matemática Financeira. Por fim, nas considerações finais, apresentaremos algumas conclusões, sabendo que não conseguimos exaurir a discussão a respeito das preocupações da EMC no contexto de uma atividade investigativa baseada na Educação Financeira, pois a respeito desta temática muito se tem a pensar, pesquisar, discutir etc. E em outros trabalhos ou pesquisas e até mesmo outros/as autores/as e pesquisadores/as ou com a ajuda de outros/as autores/as e pesquisadores/as essa discussão pode ser apresentada novamente elencando outros elementos sobre as estratégias para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

A Educação Matemática Crítica e a Educação Financeira

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa sobre uma prática de ensino, nos fundamentamos na Educação Matemática Crítica (EMC) e na Educação Financeira. Ao conhecer mais do campo de pesquisa de EMC, do Ole Skovsmose, fica evidente que, para ele, pensar educação é pensar preocupações e discursos que permeiam por um certo lugar ou por uma população, seja por meio de currículos, diretrizes, políticas etc. e que na educação tradicional há inúmeras preocupações e inúmeros discursos que precisam ser revistos e até mesmo mudados.

Por isso, da maneira que Skovsmose (2014) concebe a EMC, ela não se reduz a uma subárea da Educação Matemática; assim como ela não se ocupa de metodologias e técnicas pedagógicas ou conteúdos programáticos. Para o autor, a EMC é a expressão de preocupações a respeito da Educação Matemática. Para Skovsmose (2014, p. 12), "uma concepção crítica da matemática é apresentada com base na ideia de matemática em ação e nas consequências do emprego da matemática na sociedade moderna, seja nas questões econômicas, administrativas, seja na tecnologia e todos os tipos de atividades humanas".

Skovsmose acredita que um dos principais desafios da Educação Matemática é proporcionar aos/às alunos/as uma aprendizagem mais significativa. O pesquisador pontua que não há receitas prontas, nem fórmulas mágicas, tampouco procedimentos infalíveis para tal proposição ser executada. "No entanto, nada disso é motivo para desânimo: devemos insistir na busca de caminhos para desvendar o que poderia ser uma educação matemática mais significativa" (Skovsmose, 2014, p. 45).

Como alternativa de fugir do tradicional e das infindáveis listas de exercícios, surgem as atividades investigativas, propostas por Skovsmose e por alguns outros pesquisadores da área de Educação Matemática, essas atividades se dão em um cenário para investigação e, para Skovsmose (2014, p. 45), "um cenário para investigação é um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem".

Para fazer a ponte entre EMC e Educação Financeira, iniciemos com uma citação de Kistemann (2011, p. 190), onde o pesquisador aponta que "fica evidente nos depoimentos que o ensino, quando este ocorre, de juros simples e compostos, muito pouco educa ou possibilita a gênese de indivíduos consumidores para lidar com o cotidiano econômico da sociedade líquido-moderna".

Dessa forma, para Kistemann (2011), o objetivo de levar a Educação Financeira para os/as educandos/as não é simplesmente apresentar ou promover o acesso dos indivíduos-consumidores às regras de cálculos mecânicos para sua tomada de decisão em suas práticas de consumo, mas promover a análise e reflexão das situações de consumo, desde as mais básicas que sejam, que se apresentam ao indivíduo-consumidor, promovendo a participação crítica desses indivíduos, por meio de acesso a uma educação também voltada para o contexto financeiro-econômico.

Feita a ponte entre EMC e Educação Financeira, vamos para algumas definições no campo da Educação Financeira e da Matemática Financeira, para que fique claro o que pretendemos abordar quando pensamos em Educação Financeira neste artigo.

Queiroz e Barbosa (2016), entendem como Matemática Financeira qualquer prática que envolve o estudo, cálculo ou procedimentos com valores datados. A expressão valores datados significa que o valor de um capital varia temporalmente (Assaf Neto, 2008; Drake; Fabozzi, 2009 Apud Queiroz; Barbosa, 2016). Para Queiroz e Barbosa (2016, p. 1281), "são objetos da Matemática Financeira os juros, os descontos, as equivalências de capitais, as anuidades e as amortizações, dentre outros, visto que relacionam a variação de valores monetários em função do tempo".

Segundo Assis (2019 apud Assis; Coutinho, 2020), a Educação Financeira, de modo amplo, visa discutir as situações de tomadas de decisões financeiras em âmbito pessoal ou coletivo, buscando compreender as consequências em curto, médio ou longo prazo, levando em conta as incertezas e riscos dessas ações, a fim de prover as necessidades da vida assim como a realização de desejos que dependem direta ou indiretamente das questões financeiras.

Pensando nessas necessidades da vida apontadas por Assis (2019), nos questionamos junto com os/as estudantes do Ensino Médio que participaram da atividade investigativa que será descrita na seção a seguir: como a pandemia de Covid-19 afetou os/as cidadãos/ãs da cidade de São Paulo, levando em consideração suas condições sociais, localidade de moradia etc.?

O Cenário para Investigação: Uma simulação da divisão de verbas para as Subprefeituras da cidade de São Paulo

A atividade investigativa aqui relatada foi realizada com três turmas da 2ª série do Ensino Médio de um colégio particular localizado em São Paulo - SP. A atividade foi realizada entre os dias 24/08/2021 e 01/09/2021. Demandando seis aulas de 45 minutos para ser realizada. A referida atividade teve duas grandes etapas, na primeira os/as estudantes fizeram levantamentos de dados sobre algumas subprefeituras da cidade de São Paulo e na segunda etapa, os/as estudantes discutiram entre si para dividirem uma determinada verba entre as subprefeituras escolhidas por cada grupo. Foi na segunda etapa da atividade que o cenário para investigação ocorreu, o cenário teve referência à semirrealidade.

Skovsmose (2000) considera que diferentes tipos de referência são possíveis em atividades de Matemática. Primeiro, ele considera que as questões e as atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, ele aponta que é possível se referir a uma semirrealidade, referência essa que não se trata de uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de Matemática. Finalmente, ele indica que alunos/as e professores/as podem trabalhar com tarefas com referências às situações da vida real.

Ferreira e Coutinho (2020, p. 160) consideram que:

> Tradicionalmente, a disciplina Matemática Financeira é oferecida aos discentes durante o curso por meio de lista de exercícios propostos para aplicação de fórmulas, sem uma reflexão sobre o contexto e significados dos resultados obtidos, o que favorece uma aprendizagem técnica e mecanizada. Isso pode provocar a construção de conhecimentos apenas procedimentais, que dificultam ou mesmo impedem a aplicação de tais conhecimentos fora do contexto escolar.

Nos moldes do nosso objetivo de ensino e do pontuado por Ferreira e Coutinho (2020), esta atividade investigativa visou proporcionar aos/às discentes do Ensino Médio uma experiência mais crítica da Matemática Financeira e que não ficasse calcada apenas na aplicação de fórmulas. A atividade foi desenvolvida como "Projeto de Série - Direito à Cidade", onde o tema principal era "O novo coronavírus: impactos na sociedade".

Figura 1. Tema do Projeto de Série - Fonte: Elaborado pelos autores

Além do objetivo de ensino, tivemos um objetivo de pesquisa e com ele pretendemos perceber como algumas preocupações da teoria da EMC se comportam empiricamente ao executar uma atividade investigativa com estudantes da Educação Básica. Por exemplo: Como a zona de risco acontece e como é a experiência de lidar com ela? Como a intencionalidade dos/as estudantes interferem na execução do cenário para investigação? Caso o aceite de participação não seja feito, o que professor e estagiário podem fazer para contornar esta situação e conseguir fazer que o convite para participar do cenário para investigação seja aceito? Já que, conforme teoriza Skovsmose, o cenário só se torna um cenário para investigação se os/as alunos/as aceitam o convite.

No Projeto de Série, objetivamos analisar, junto com os/as alunos/as, dados numéricos de diferentes regiões da cidade de São Paulo e a partir desses dados estudar os impactos do novo coronavírus na região. Para início do Projeto, foi apresentado aos/às estudantes alguns dados referentes à cidade de São Paulo, dados como população, área total e densidade demográfica da cidade, para todos/as terem claras as dimensões da cidade que iríamos analisar. Em seguida, dados sobre Covid-19 da cidade de São Paulo foram apresentados aos/às alunos/as, através do Boletim Diário COVID-19 da cidade de São Paulo. Por fim, foi exibido um mapa da divisão das subprefeituras da cidade de São Paulo aos/às estudantes e foi solicitado aos/às estudantes que eles/as montassem grupos de até 5 integrantes e escolhessem uma das subprefeituras presentes no mapa.

Cada grupo teve que levantar dados a respeito da subprefeitura escolhida por sua equipe e estudá-los, pois estes dados seriam utilizados na segunda etapa do Projeto de Série, ou seja, estes dados serviram de base para tomada de decisão da divisão da verba (moedas) entre as subprefeituras escolhidas por todos/as os/as estudantes. Foi solicitado que os/as estudantes analisassem indicadores dessas subprefeituras, como o IDHM, renda média, percentual de emprego formal e percentual de negros, mais três indicadores que cada grupo se sentisse à vontade para pesquisar. Solicitamos também para os/as estudantes analisarem uma reportagem sobre a pandemia na subprefeitura escolhida pelo grupo.

Por fim, a partir das observações dos indicadores sociais, solicitamos para os grupos redigirem um texto de 10 a 20 linhas explicando como esses indicadores sociais afetaram a população da subprefeitura, que eles/as escolheram, durante a pandemia. Trazemos aqui um exemplo de redação feita por um grupo de estudantes em uma das turmas. As estudantes que compunham este grupo, que trabalhou com a subprefeitura da Capela do Socorro, resumiram a situação do Covid-19 na perspectiva dos indicadores sociais levantados da seguinte forma:

> A pandemia desde 2020, vem expondo a fragilidade de diversos lugares: onde ocorriam mais mortes, indicava a maior precariedade do sistema de saúde da região e a baixa infraestrutura. Um exemplo disso é a situação da Capela do Socorro em São Paulo, que durante o início de 2020 contava com um total de 509 leitos de UTI em hospitais públicos, o que causou uma grande dificuldade em lidar com o novo Coronavírus, uma vez que não havia leitos suficientes para os pacientes em situações graves da doença, o que consequentemente gera um número mais alto de mortes. É possível notar que a Capela do Socorro se encontra em situações de baixa qualidade de vida, uma vez que o IDHM da região é um dos mais baixos da cidade, sendo 0,750, um completo contraste entre os bairros centrais de São Paulo. Isso evidencia cada vez mais o quanto a pandemia afeta os diferentes grupos socioeconômicos de maneiras distintas, e as regiões e populações mais pobres são desproporcionalmente afetadas. O melhor exemplo disto é que enquanto a região de Pinheiros, que tem o maior IDHM da cidade, ocorreram 160 óbitos por COVID-19, a Capela do Socorro registrou 909.

Na segunda etapa da Atividade, uma semirrealidade foi criada. Nós, primeiro e segundo autor desta comunicação (Vice-prefeito e Prefeito da cidade de São Paulo, nesta semirrealidade), disponibilizamos para cada turma, 100 moedas, para os grupos dividirem entre suas subprefeituras. Os/as estudantes tiveram uma aula de 45 minutos para realizar a divisão das moedas e escrever uma justificativa do porquê cada subprefeitura ficou com determinada quantidade de moedas. Na segunda aula do dia (mais 45 minutos), antes de confirmar a divisão das moedas, anunciamos que do total de 100 moedas, 8 delas seriam destinadas à melhoria do transporte da cidade, sendo assim, os grupos precisar am realizar um ajuste de última hora considerando que teriam agora como verba apenas 92 moedas.

Na divisão das moedas, os/as estudantes discutiram bastante. Houve momentos em que a alternativa era dividir as moedas de forma igual entre as subprefeituras. Mas logo foram levantados vários pontos de que esta não seria a melhor alternativa, dado que havia subprefeituras com maior vulnerabilidade socioeconômica do que outras. Um grupo, ao analisar os dados levantados na primeira etapa do Projeto de Série concluiu que com a pandemia o emprego formal na subprefeitura selecionada pelo grupo caiu muito, sendo assim, a subprefeitura escolhida por este grupo precisaria de mais verba para investir, por exemplo, em novos negócios que iriam gerar empregos para aqueles que estão desempregados no momento pandêmico. Um outro grupo analisou que o IDHM de sua subprefeitura era baixo e ao mesmo tempo essa subprefeitura possuía uma densidade demográfica alta, sendo assim, esses fatores motivaram o grupo a solicitar uma maior destinação de moedas para a sua subprefeitura. Estudantes que selecionaram subprefeituras ricas e com poucos habitantes em relação às outras subprefeituras se sensibilizaram a aceitar menos moedas, para que mais moedas pudessem ser destinadas para as subprefeituras de maior vulnerabilidade.

Para subsidiar o que foi compartilhado nesta comunicação sobre a divisão da verba (moedas) de forma justa entre as subprefeituras, apresentamos mais alguns excertos do que os estudantes escreveram para justificar suas solicitações de mais moedas devido às necessidades sociais de suas subprefeituras e justificar a “abdicação” de certa quantidade de moedas, por entenderem que havia subprefeituras em situações mais vulneráveis. Estudantes que compunham um grupo, que trabalhou com a subprefeitura do Butantã, justificaram a redução da sua quantidade de moedas da seguinte forma:

> Temos a maior renda média entre as subprefeituras e o segundo maior IDHM (muito próximo da subprefeitura da Mooca), por isso concordamos em doar parte de nossas moedas para outras subprefeituras mais necessitadas, no entanto, devido a nossa grande população e extensão territorial precisamos de uma verba destinada ao cuidado dessa área, além dos cuidados para o Distrito Raposo Tavares, uma área de vulnerabilidade social.

Na oposição da redução da quantidade de moedas, estudantes que compunham um grupo, que trabalhou com a subprefeitura do Campo Limpo, solicitaram a destinação de mais moedas para sua respectiva subprefeitura com a seguinte justificativa:

> Possuímos uma renda média e o IDHM extremamente baixos e o número de habitantes que vivem em nossa subprefeitura é muito alto. Com isso é pertinente que recebemos uma maior quantidade de moedas em comparação às outras subprefeituras.

Por fim, o sentimento de equidade foi o sentimento final que predominou entre os/as estudantes ao finalizarem as divisões das moedas, ou seja, ficou claro para os/as alunos/as que para a cidade de São Paulo enfrentar bem a pandemia de Covid-19 seria necessário destinar mais recursos para aqueles que mais precisavam.

Considerações Finais

Quanto à atividade investigativa, ela foi desenvolvida com estudantes que Skovsmose chamaria de estudantes em posições economicamente confortáveis. Skovsmose (2017) afirma que a EMC tem importância não somente para estudantes em situações desfavoráveis, como também para outros grupos de estudantes. O autor indica que é possível considerar um grupo de estudantes em posições economicamente confortáveis. E que em relação a esse grupo, a Matemática também pode ser efetivamente usada para ensinar e aprender sobre questões de injustiça social. É nessa perspectiva que foi considerada a atividade investigativa relatada nesta comunicação, pois na escola em que realizamos esta atividade quase todos/as os/as estudantes são de posições economicamente confortáveis (a exceção são alguns bolsistas).

Como a escolha pelas subprefeituras ocorreu de forma autônoma pelos/as estudantes, uma zona de risco foi criada, pois não tínhamos como prever que os/as alunos/as iriam escolher apenas subprefeituras mais periféricas e com população de baixa renda, ou se eles/as iriam escolher apenas subprefeituras mais centrais e com menos impacto da desigualdade social presente na cidade de São Paulo. Sendo assim, passou a existir várias possibilidades de discussão, essas possibilidades dependiam das escolhas das subprefeituras feitas pelo/as alunos/as. Esta experiência possibilitou-nos vivenciar uma das preocupações da EMC, que foi sair da zona de conforto onde tudo já estaria determinado e deixar os/as estudantes terem mais autonomia e participação ativa no desenvolvimento do Projeto de Série. Um outro elemento da

EMC que esteve presente no decorrer de todo o desenvolvimento do Projeto de Série foi o diálogo. Os/as estudantes dialogaram entre si dentro dos grupos, os grupos estabeleceram diálogos durante as negociações da divisão da verba (moedas) e os/as estudantes dialogaram com estagiário e professor ao solicitar ajuda quando alguma parte da atividade não tinha ficado clara o suficiente, ajuda para encontrarem certos dados no momento da realização do diagnóstico das suas subprefeituras etc.

Em suma, com a referida atividade, conseguimos alcançar nosso objetivo de ensino também. Ao desenvolver habilidades da Educação Financeira, em que o bem-estar coletivo da população de algumas subprefeituras da cidade de São Paulo pudesse ser analisado e entendido. Além disso, conseguimos evidenciar aos/às estudantes a possibilidade de pensar em como a pandemia de Covid-19 afetou de diferentes formas pessoas de diferentes realidades sociais na cidade de São Paulo. Dessa maneira conseguimos proporcionar aos/às alunos/as uma aprendizagem mais significativa, utilizando a Matemática para ensiná-los/as sobre questões de injustiça social.

Referências e bibliografia

Assis, M. R. da S. e Coutinho, C. de Q. e S. (2020). A importância das crenças sobre educação financeira na formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática. In C. R. Campos e C. Q. e S. Coutinho (Org.), Educação Financeira no contexto da Educação Matemática: pesquisas e reflexões (1ª edição). Taubaté: Editora Akademy.

Ferreira, V. D. T. e Coutinho, C. de Q. e S. (2020). A educação financeira e a modelagem matemática na escola básica. In C. R. Campos e C. Q. e S. Coutinho (Org.), Educação Financeira no contexto da Educação Matemática: pesquisas e reflexões (1ª edição). Taubaté: Editora Akademy.

Queiroz, M. R. P. P. P. de e Barbosa, J. C. (2016). Características da Matemática Financeira Expressa em Livros Didáticos: conexões entre a sala de aula e outras práticas que compõem a Matemática Financeira disciplinar. Revista Bolema - Boletim de Educação Matemática, 30(56), 1280-1299.

Kistemann Júnior, M. A. (2011). Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores (Tese de Doutoramento não editada, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. Revista Bolema - Boletim de Educação Matemática, 13(14), 66-91.

Skovsmose, O. (2014). *Um convite à educação matemática crítica* (1ª ed.). Campinas, São Paulo: Papirus.

Skovsmose, O. (2017). O que Poderia Significar a Educação Matemática Crítica para Diferentes Grupos de Estudantes?. Revista Paranaense de Educação Matemática, 6(12), 18-37.

Educación Matemática Crítica, Teorema de Pitágoras y estudiantes rurales

María José **Buelvas** Lans
Universidad de Sucre
Colombia
mariabuelvas694@gmail.com
Sandra Patricia **Rojas**
Universidad de Sucre
Colombia
sandra.rojas@unisucre.edu.co
Isabel María **Dávila** Cruz
Universidad de Sucre
Colombia
isabeldavilacruz14@gmail.com

Resumen

La presente investigación busca describir los resultados de aprendizaje relacionados con el teorema de Pitágoras a partir de ambientes de aprendizaje propuestos por la Educación Matemática Crítica en estudiantes de un contexto rural. El tipo de investigación es cualitativo de carácter descriptivo, se empleó el estudio de caso como estrategia investigativa. Las técnicas empleadas fueron la observación participante y la entrevista abierta y semiestructurada, los instrumentos fueron una guía de observación y una prueba pedagógica. Se destaca como resultado que las actividades pertenecientes al ambiente de aprendizaje del escenario investigativo que involucra situaciones de la semirrealidad facilitó que los participantes se apropiaran del uso del Teorema de Pitágoras.

Palabras clave: Ambientes de Aprendizaje; Educación Matemática Crítica; Estudiantes rurales; Resolución de Problemas; Teorema de Pitágoras.

Introducción

En los últimos años, la investigación en educación matemática ha identificado necesidades típicas de aprendizaje matemático para estudiantes en riesgo (por ejemplo, los estudiantes rurales) (Prediger et al.,2022). Por lo general, los estudiantes rurales presentan bajas habilidades para tener éxito en matemáticas y bajo dominio de preconocimientos matemáticos básicos. Al respecto, existe un consenso creciente de que las habilidades deben estar entrelazadas con la comprensión de los conceptos básicos (Moser Opitz,2007; Maccini et al.,2007; Anderson, 2010; Cobb y Jackson, 2021; citado en Prediger et al.,2022).

A nivel internacional, los estudiantes indígenas remotos en el contexto australiano son a menudo los estudiantes más vulnerables de la nación y esto se refleja en sus bajos resultados de aprendizaje en matemáticas (Jorgensen, 2020; Wittmann 2021). Por su parte, en Colombia los estudiantes de establecimientos educativos rurales tienen un desempeño educativo inferior en las pruebas estandarizadas frente a los estudiantes de los establecimientos urbanos (Ministerio de Educación Nacional, MEN 2018). Al respecto, Skovsmose y Valero (2007) en Pochulu (2012) plantean que “dependiendo del contexto y de cómo se organice la educación matemática, puede apoyar a la justicia social o crear y perpetuar procesos de exclusión” (p.49).

Por su parte, Gómez (2021) analizó el uso del contexto rural- agropecuario en el diseño de actividades didácticas para favorecer el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica. Con relación a la Resolución de problemas Fuentes et al. (2019) manifiesta que la resolución de problemas ha sido uno de los retos en el aprendizaje de las matemáticas, no solo en lo operacional y motivacional, sino también en la comprensión y análisis de una situación. Por parte, Zamorra (2017) tuvo como objetivo mejorar las actuaciones de los alumnos frente a la resolución de problemas matemáticos. Así mismo, Galván (2020) aporta en cuanto a los escenarios, tendencias y horizontes de investigación en la Educación rural en América Latina y Carrero y González (2016) presentan reflexiones acerca de experiencias y perspectivas de la educación rural en Colombia.

De modo que la motivación por esta investigación, surge por el interés de aportar a disminuir la brecha entre lo que MEN (1998; 2006) plantea y lo que ocurre en la práctica. También surge al analizar las carencias en el acceso a oportunidades de aprendizaje de los estudiantes pertenecientes a una localidad rural en Colombia, quienes históricamente han presentado bajos resultados de aprendizaje en esta área. Para llevar a cabo la investigación se escogió el teorema de Pitágoras, siguiendo los trabajos de Contreras et al. (2019) y Ávila (2019) quienes desde diferentes ópticas señalan la importancia del aprendizaje de este objeto para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático. Como resultado de la prueba de conocimientos relacionados con el Teorema de Pitágoras, los estudiantes manifestaron no poder identificar un triángulo rectángulo, lo cual es un pre saber matemático para comprender el Teorema de Pitágoras; asimismo se evidenció que los estudiantes desconocían este teorema, y menos aún como puede ser utilizado en la vida cotidiana.

Dado lo anterior se plantea la siguiente pegunta de investigación ¿Cuáles son los atributos de los ambientes de aprendizaje en el marco de la Educación Matemática Crítica y su relación con la con el aprendizaje del Teorema de Pitágoras en estudiantes rurales?

Marco Teórico

Ambientes de aprendizaje de la EMC

Skovsmose (2000) plantea que un escenario de investigación es una situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo investigativo o de indagación y para señalar las prácticas educativas matemáticas que se diferencian de aquellas relacionadas con la clase tradicional ubicadas dentro del paradigma del ejercicio. Particularmente el ambiente de investigación 3 está ubicado en el paradigma del ejercicio relacionado a la semirrealidad y vincula situaciones problemas con situaciones artificiales donde el estudiante explora haciendo uso de su contexto y el único propósito de estos ejercicios es encontrarle una solución. Además, la semirrealidad se define en términos de los datos dados en cada situación problema y en este proceso existe constante comunicación entre docente y estudiantes.

Así mismo, Skovsmose (2000) plantea que el ambiente de investigación 4 presenta situaciones donde se hacen preguntas y se permite dar respuestas que alientan a los estudiantes a pensar y a indagar sobre lo que están estudiando. Se puede construir una semirrealidad a partir de los objetos del lugar de trabajo que permiten simular dicha realidad. La organización de las actividades permite explorar, buscar explicaciones y discutir los resultados entre todos los participantes ver

Resolución de problemas

La meta de esta investigación tiene de manera implícita favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. En línea con la postura de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985).

Metodología

Tipo y diseño de investigación

Dada la naturaleza del propósito de la investigación se optó por escoger un enfoque cualitativo, con carácter descriptivo. De allí que el método inductivo resultó ser el más adecuado para el diseño; dado que, la opinión, reflexión y significados de los participantes son importantes porque “hay una realidad que descubrir e interpretar” (Baptista et al., 2014, p. 10).

Estrategia investigativa

Se empleó la estrategia estudio de caso siguiendo a Camargo (2021, p.66).

Participantes y unidades de análisis.

Como la investigación es de tipo cualitativa, no se requiere de muestras representativas determinadas probabilísticamente, sino de una muestra dirigida, de participación voluntaria (Baptista et al., 2014). Es decir, se hizo un muestreo a conveniencia ver tabla 1. Las Unidades de análisis: corresponden a la actividad matemática de los estudiantes subyacente a la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Tabla 1.
Descripción de los informantes

Estudiante	Institución Educativa	Edad	Genero
1	Heriberto García	17 años	Femenino
2	Palmira	14 años	Masculino
3	Heriberto García	15 años	Masculino

Fuente: autoría propia.

Técnicas instrumentos de recolección y de análisis de la información

Estos registros se obtuvieron mediante las **técnicas**: observaciones participantes y entrevistas semiestructuradas y abiertas. **Instrumentos:** se empleó una guía de observación y un cuestionario que consistió de una prueba diagnóstica tomada de Conde y Fontalvo (2019) y las actividades enmarcadas en los ambientes de aprendizaje 3 y 4 propuestos por la EMC, específicamente por Skovsmose (2000).

Discusión de resultados

Análisis de los resultados de la prueba diagnostica

La información obtenida deja ver que los estudiantes no poseen ningún tipo de conocimiento acerca del Teorema de Pitágoras (ver figura1), e incluso les costó realizar algún tipo de imaginarios sobre el mismo, siendo este un reto para la enseñanza de este tópico, pues denota a su vez que no hay existencia de las necesidades al respecto. Estos resultados sirvieron de insumo para el diseño de ambientes de aprendizaje para propiciar la comprensión del Teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas con estudiantes de noveno grado.

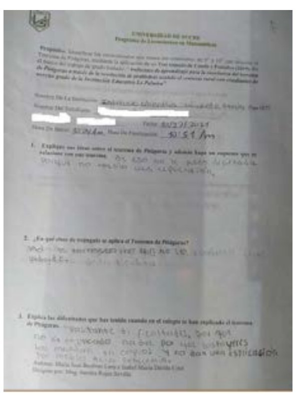


Figura 1. Respuesta de un estudiante prueba diagnóstic

Análisis correspondiente al ambiente de aprendizaje 3 y 4

De manera general, se puede afirmar que las dificultades relacionadas con la comprensión del Teorema de Pitágoras identificadas en la prueba diagnóstica fueron superadas por los estudiantes mediante las tareas propuestas en el marco de los ambientes de aprendizaje 3 y 4. La participación activa por parte de los estudiantes en la solución de tareas enmarcadas en el ambientes 3 (tipo de referencia de la semi realidad y el paradigma del ejercicio) y el ambiente 4 (que corresponden al cruce entre tipo de referencia de la semi realidad y el escenario de investigación) permitió dar cuenta de la compresión que lograron los estudiantes del teorema de Pitágoras, dado que lograron identificar situaciones de su contexto donde se aplicaba dicho teorema (ver figura2). Además, fueron capaces de detectar si iban en la dirección correcta a la hora de resolver un problema y lograron proponer un problema relacionado con el objeto de estudio, favoreciendo así a la habilidad de resolución de problemas, de modo que los estudiantes hicieron uso de las fases planteadas por Schoenfeld : análisis, exploración, ejecución, comprobación de la solución obtenida (ver figura 3).

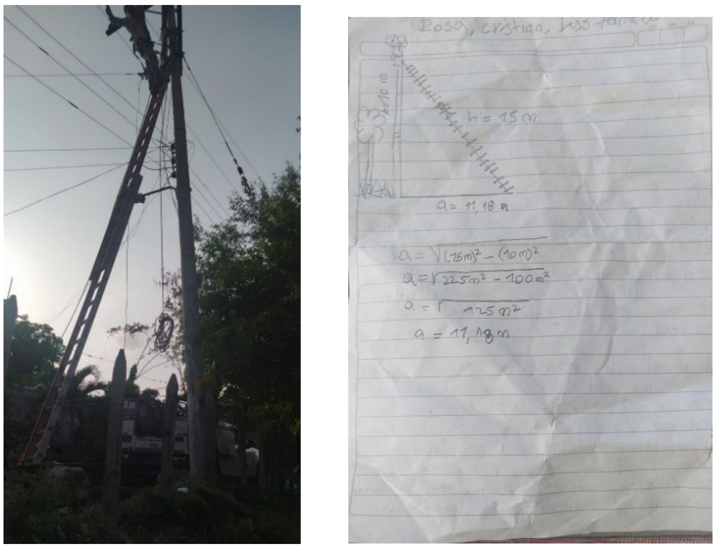


Figura 2. Relación de aprendizaje caso real-teoría.

Figura 3. Evidencias del desarrollo de las actividades

Conclusión

A pesar que se evidenció que los estudiantes no poseían ningún tipo de conocimiento acerca del teorema de Pitágoras, se pudo observar que al abordar problemas enmarcados en los Ambientes de Aprendizaje de la EMC se logró promover el aprendizaje del teorema de Pitágoras, toda vez que los estudiantes lograron por ejemplo identificar situaciones de su contexto donde se puede utilizar el teorema de Pitágoras, formularon problemas a partir de datos dados, fueron son capaces de identificar errores y hacer la corrección de estos en el proceso de resolución de problemas.

Bibliografía

Alvis-Puentes, J. F., Aldana-Bermúdez, E., & Caicedo-Zambrano, S. J. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 10(1), 135–147.

Ávila, M. (2019). El Teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello. Zona Próxima, 30, 1-19. http://www.scielo.org.co/pdf/zop/n30/2145-9444-zop-30-33.pdf

Baptista Lucio, P., Fernández Collado, C., & Hernández Sampieri, R. (2014). Metodología de la Investigación. Editorial McGraw Hill.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos, 1, 1-9. file:///E:/Descargas/6971-Texto%20del%20art%C3%ADculo-9555-1-10-20130124.pdf

Betrián Villas, E., Galitó Gispert, N., García Merino, N., Monclús, G. J., & Macarulla Garcia, M. (2016). La Triangulación Múltiple como Estrategia Metodológica. REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia Y Cambio En Educación, 11(4). https://revistas.uam.es/reice/article/view/2869.

Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Pedagógica Nacional, en evaluación. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1061/568

Carrero, M. & González M. (2016). La educación rural en Colombia: experiencias y perspectivas. Praxis Pedagógica. (19). 79-89. https://revistas.uniminuto.edu/index.php/praxis/article/view/1377

Conde-Carmona, R. & Fontalvo-Meléndez, A. (2019). Didáctica del Teorema de Pitágoras mediada por las TIC: el caso de una clase de Matemáticas. Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad, 11(21), 255-281.

Contreras, N. P., Contarlo, G. N., Canales, G. A., & Cruces, T. (2019). Análisis sobre situaciones de enseñanza del Teorema de Pitágoras entre universidad y escuela. In XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Chile

Díaz González, C. V. (2018). Dificultades y obstáculos en la resolución de problemas en un curso de álgebra, con estudiantes del grado 8º de la Institución Educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo del Municipio De Jamundí. https://repositorio.utp.edu.co/server/api/core/bitstreams/1c65fab8-35b9-41b2-947d-1049014dd7ba/content

Fuentes. C, Páez. P y Prieto. D. (2019). Dificultades de la resolución de problemas matemáticos de estudiantes de grado 501 Colegio Floresta Sur, sede B, jornada tarde, Localidad de Kennedy. Universidad Cooperativa de Colombia.

Galván, L. (2020). Educación rural en América Latina: escenarios, tendencias y horizontes de investigación. Márgenes Revista de Educación de la Universidad de Málaga. 1(2), pp. 48-69.

Gómez, E (2021). Integración del contexto rural en el diseño de actividades didácticas desde la perspectiva de la educación matemática crítica (EMC) en el grado séptimo.

Guerrero & Hernández (2018) cuyo título es "Un acercamiento a la relación pitagórica a través del cálculo de ternas" https://www.uaeh.edu.mx/campus/icbi/oferta/maestrias/ciencias-en-matematicas-y-su-didactica/

Jorgensen, R. (2020). Creating opportunities for vulnerable indigenous learners to succeed in vocational education. ZDM, 1-10. https://www.researchgate.net/publication/338744521_Creating_opportunities_for_vulnerable_indigenous_learners_to_succeed_in_vocational_education

Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., van Boven, S., Kaenders, R., & Heckman, G. (2022). Making sense of student mathematical thinking: the role of teacher mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 1-22.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos Matemáticas. Colegio Santa María

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá

Ministerio de Educación Nacional. (2018). Plan especial de educación rural.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, *23*(71), 158-180.

Pochulu, D. y Rodríguez, M. (Comp.). (2015). Educación matemática, aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento; Villa María: Universidad Nacional de Villa María. http://docplayer.es/160123390-Educacion-matematica-marcel-d-pochulu-y-mabel-a-rodriguez-compiladores-aportes-a-la-formacion-docente-desde-distintos-enfoques-teoricos.html

Prediger, S., Dröse, J., Stahnke, R., & Ademmer, C. (2022). Teacher expertise for fostering at-risk students' understanding of basic concepts: conceptual model and evidence for growth. Journal of Mathematics Teacher Education, 1-28.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press. https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=0cbSBQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Schoenfeld,+A.+(1985).+Mathematical+Problem+Solving.+New+York:+Academic+Press.&ots=82qBQB_R44&sig=ZVLIZVi7E2pI1gNEaQ44cvwuLaI#v=onepage&q=Schoenfeld%2C%20A.%20(1985).%20Mathematical%20Problem%20Solving.%20New%20York%3A%20Academic%20Press.&f=false

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA, 6(1), 3-26. http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Wittmann E. (2021) Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education. In: Connecting Mathematics and Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_2

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Educación matemática en el aula: contextos 24 - 7

María Isabel **González** Buitrago
Colegio San Carlos San Gil Santander
Secretaría De Educación De Santander
Colombia
maria.gonzalez64@colsancarlossangil.edu.co

Resumen

Ser maestro de matemáticas en el aula, es un reto para quien desea aceptarlo, ya que para la mayor parte de jóvenes esta ciencia se limita a ser una materia más para aprobar el año escolar. Buscando cambiar esta perspectiva, surge este proyecto llamado “Contextos 24-7”, con el cual se busca que los estudiantes vean la matemática como una herramienta útil en la vida cotidiana. Para ello, la autora plantea guías de aprendizaje basadas en la metodología de indagación guiada, donde hace uso de laboratorios y experiencias centradas en la solución de problemas en diferentes contextos, además, la maestra publica videos de la temática en sus canales de youtube y tiktok , disponibles a toda hora. Este trabajo inicia en el año 2013 y se ha enriquecido año tras año, logrando que los estudiantes cambien su percepción de la matemática, disminuyendo la apatía que sienten hacia su estudio.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Secundaria; Enseñanza Bimodal; Mediación Pedagógica; Enseñanza de la Trigonometría; Laboratorios; Resolución de problemas; Colegio San Carlos; Colombia.

De la teoría a la práctica

Ser docente de matemáticas es una tarea a la que muy pocos quieren dedicar su vida, pero, una vez tomada esa decisión, existe una diferencia abismal entre ser estudiante de licenciatura y llegar a ser maestro de aula, en especial de colegios públicos, donde un sinnúmero de variables influyen en su quehacer académico para llevarlo a feliz término: los lineamientos y estándares curriculares planteados por el estado proponen una gran cantidad de temáticas que no se alcanzan a trabajar en un año escolar, escasos recursos, la gran cantidad de estudiantes por salón, apatía de los niños y en especial los jóvenes hacia el estudio de las matemáticas, hacen que un buen docente replantee su labor.

Entre las variables anteriores, el presente trabajo busca despertar el interés en los estudiantes de secundaria por el estudio de las matemáticas, para ello, la autora se basa en los planteamientos de Martin-Hansen (2002) para quien el profesor en su mediación pedagógica, plantea un problema y va guiando al estudiante por medio de preguntas, facilita materiales si es necesario y le lleva a dar solución al problema, mientras se apropia de nuevos conceptos. Vale la pena, resaltar la importancia de desarrollar en los educandos habilidades como indagar, explicar y comunicarse de manera efectiva.

Es así como la autora diseña guías de aprendizaje basadas en la metodología de indagación guiada con la siguiente estructura:

Figura 1. Esquema de las guías de aprendizaje

Las guías planteadas inician con una etapa de focalización (trabajo individual), donde al estudiante se le plantea una situación problema tomada si es posible de la realidad, a la cual tiene que plantear hipótesis de solución, que socializa con sus compañeros. En una segunda etapa se encuentra la experimentación (trabajo en grupo en clase o con la familia), donde el estudiante desarrolla un laboratorio o vive experiencias significativas haciendo uso de materiales concretos, toma datos, replantea sus hipótesis y llega a conclusiones, que serán socializadas y analizadas en la etapa de reflexión donde se comparan teorías y se llega a la adquisición y apropiación de nuevos conceptos. Para finalizar, en la etapa de aplicación el estudiante utiliza el nuevo aprendizaje en la solución de problemas en otros contextos.

El trabajo a desarrollar por cada estudiante, se les presenta por medio de Guías de Laboratorio, donde el joven por medio de un experimento (para lo cual hace uso de materiales de fácil acceso que tienen en casa), va haciendo uso del método científico, el cual lo llevará a adquirir un nuevo conocimiento a partir de una experiencia significativa. También buscamos que el joven enriquezca cada día su lenguaje y haga uso de conceptos más elaborado al plantear sus hipótesis y argumentos.

Teniendo en cuenta que es el mismo educando quien hace su experimento, los datos recolectados dependen de sus materiales y es casi imposible hacer fraude, ya que los resultados nunca van a ser iguales. Con ello buscamos evitar tanta copia, donde los estudiantes se envían los trabajos y tan solo transcriben las respuestas de sus compañeros.

Contextos 24 – 7

¿Por qué Contextos 24 – 7?, contextos porque al revisar la historia, la matemática nace como una necesidad del hombre por conocer y comprender el mundo que le rodea, por ende, la educación matemática debe hacer uso de situaciones que involucran el entorno y que son significativas para los educandos. Entre los contextos trabajados en las guías se tienen: contexto de la vida cotidiana, de la matemática misma y de otras ciencias.

24 – 7 porque la modalidad educativa usada es bimodal: enseñanza presencial y virtual asincrónica. El trabajo presencial se hace en el aula, en constante interacción entre estudiantes y docente, fuera del aula al vivir la experiencia, en casa cuando los familiares ayudan al educando a desarrollar actividades y virtual asincrónica porque la docente graba y publica videos en sus canales de youtube (Divermatematicas) y tiktok (@matematicasensegundos) relacionado con las temáticas del área, los cuales están disponibles las 24 horas de los 7 días de la semana. Este trabajo ha gustado a los padres de familia, quienes aseguran que sus hijos y ellos mismos tienen acceso a la docente y la temática todo el tiempo.

En la etapa de aplicación los estudiantes graban videos donde explican conceptos o la solución de problemas de la vida cotidiana en diferentes contextos.

Solución de problemas.

En el presente trabajo se tienen en cuenta los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional MEN (2005) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, donde resalta que un problema no es un ejercicio de solución inmediata, es una situación que desencaja el pensar del estudiante y por medio del cual se generan buenas preguntas que conlleven a crear nuevos conceptos. Por otro lado, vale la pena resaltar que las pruebas externas que se aplican en Colombia, las cuales facilitan o limitan el acceso de los jóvenes a la educación superior, están centradas en la solución de problemas matemáticos.

Por ende el pilar fundamental de Contextos 24 – 7 es la solución de problemas en diferentes contextos, basados en lo que plantea Polya (1965) para quien la estrategia de solución de problemas parte de comprender realmente el problema, luego identificar los datos conocidos y la o las preguntas a responder, posteriormente concebir un plan a seguir, el cual se ejecuta para llegar a una solución, esta posible respuesta se analiza para identificar si es la solución buscada, de no ser así se inicia un nuevo camino que conlleve a la solución buscada.

Laboratorios, guías, libros, redes sociales.

Dentro de las guías de aprendizaje que se han planteado en el proyecto, se cuenta con los siguientes laboratorios: laboratorio de palancas, laboratorio de razones, laboratorio de seno, laboratorio de coseno, laboratorio de parábolas, laboratorio de elipse, laboratorio de límites.

También la autora ha escrito los siguientes libros que están por publicar, pero los cuales trabaja en el aula: libro de preconceptos, libro de fracciones, libros de funciones, libro de proporciones.

La docente cuenta con los canales de youtube, tiktok y los blocks "piensa matemáticamente" y "mayordomo de mi vida":

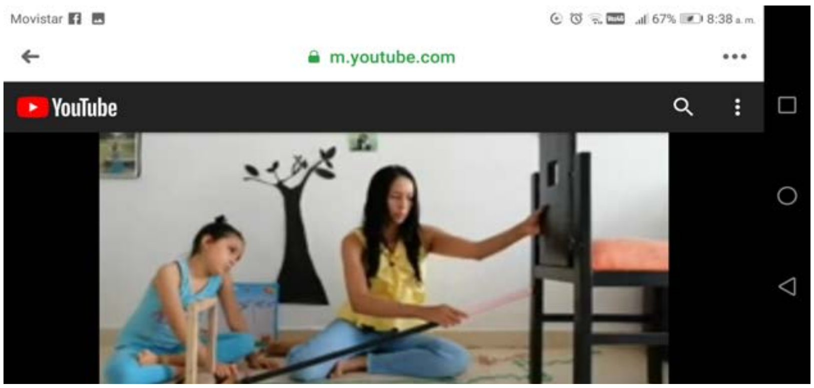


Figura 2. Canal de youtube: Divermatematicas

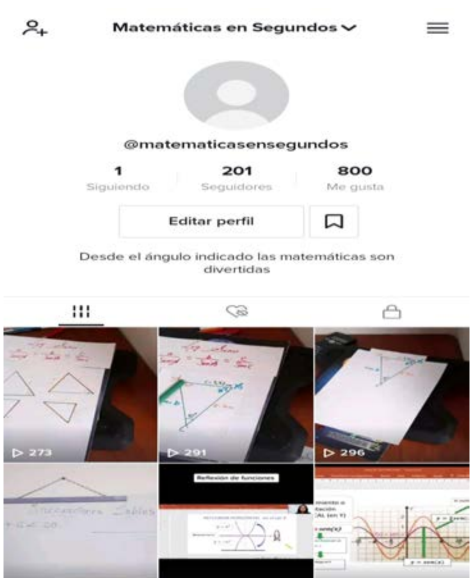


Figura 3. Canal de Tiktok: @matematicasensegundos

Y los blogs

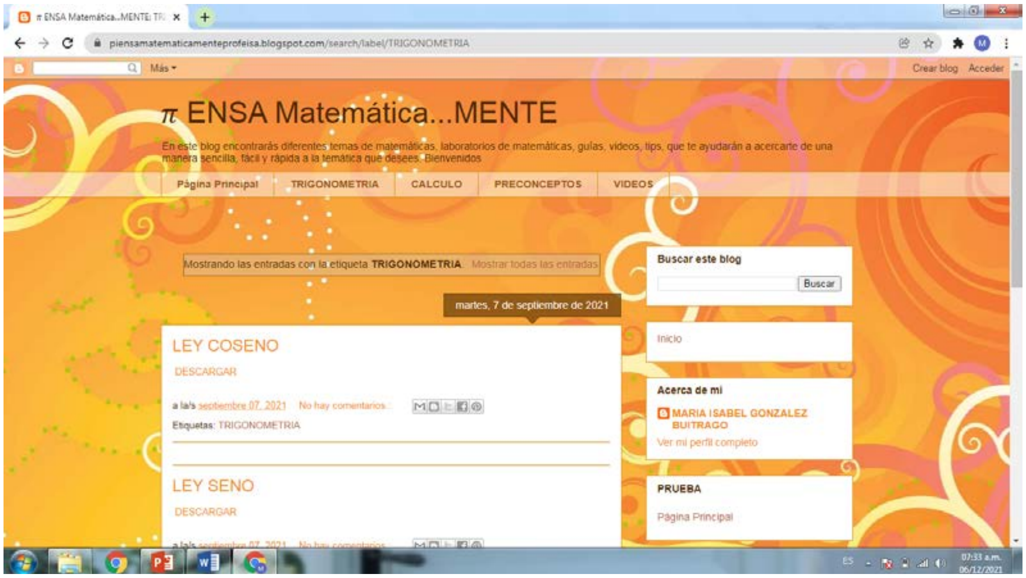


Figura 4. Blog piensa matemáticamente https://piensamatematicamenteprofeisa.blogspot.com/

Y el blog Mayordomo de mi vida

Figura 4. Blog Mayordomo de mi vida

http://mantisatics.blogspot.com/search/label/PROYECTO%20DE%20VIDA

Referencias y bibliografía

Ministerio de Educación Nacional (2005). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp. Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento, vol. 3, núm. 8, pp. 419-420, 2015 Universidad Nacional Autónoma de México

Martin-Hansen, L. (2002). Defining Inquiry, The Science Teacher, 69(2), 34-37

Tareas para el desarrollo de los pensamientos aleatorio y variacional a través del ajedrez

Rubiela Sánchez Penagos
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
rsanchezp@upn.edu.co
Cesar Guillermo Rendón Mayorga
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
cgrendonm@upn.edu.co

Resumen

Se presenta una secuencia de tareas para promover la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares utilizando el ajedrez en el aula. A partir de una indagación de referentes teóricos y antecedentes que emplean el ajedrez en la educación matemática escolar, se crearon cuatro tareas para contribuir al desarrollo los pensamientos aleatorio y variacional abordando conceptos específicos como patrones, plano cartesiano, probabilidad, diagramas de árbol entre otros, según lo dispuesto en los documentos curriculares de matemáticas escolares de Colombia. Se llevó a cabo una implementación inicial de las tareas con un grupo de estudiantes de grado séptimo de la educación básica secundaria colombiana. Al respecto, se relacionan avances de los estudiantes en la determinación de secuencias, el hallazgo de espacios muestrales, en el manejo del plano cartesiano, en el cálculo de probabilidades simples, entre otros.

Palabras clave: Ajedrez; Pensamiento aleatorio; Pensamiento variacional; Pensamiento algebraico; Probabilidad; Tareas de enseñanza; Educación secundaria.

Introducción

Se presenta un conjunto de cuatro tareas dirigidas a la enseñanza de las matemáticas escolares y que involucran el juego del ajedrez en el aula. Estas tareas se elaboraron específicamente para desarrollarse en grado séptimo de la educación básica secundaria del sistema educativo escolar colombiano, con el objetivo de llevar una experiencia de enseñanza al aula que fuera distinta de lo convencional, integrando el ajedrez como medio de aprendizaje para potenciar el desarrollo de los pensamientos variacional y aleatorio.

Para la realización de esta secuencia de tareas, previamente se hizo una indagación de documentos relacionados con el uso de los juegos en la enseñanza y aprendizaje, así como de la enseñanza de las matemáticas por medio de juegos, y el ajedrez como herramienta en el aula de matemáticas, los cuales sirvieron para fundamentar e inspirar la realización de este trabajo. También, fueron de gran importancia los documentos curriculares que plantea el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (MEN, 1998; MEN, 2016), los cuales orientan aspectos generales de la organización curricular de las matemáticas escolares a nivel nacional.

El ajedrez y los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas

Previo a comentar concretamente el caso de las relaciones entre el ajedrez y las matemáticas, se considera relevante señalar algunos aspectos más generales de la relación que hay entre la acción de jugar y la de aprender (en particular aprender matemáticas). La idea de integrar el juego y las matemáticas permite crear un ambiente idóneo para el aprendizaje, siempre y cuando se tenga un objetivo claro de conceptos matemáticos y procesos que se quieren desarrollar antes de implementar el juego, como lo señala Bishop (1998) quien alude a Huizinga (1949), esta interacción entre juego y matemáticas proporciona un contexto emocional y afectivo en el que considera a los juegos, y al juego en la educación matemática, como una acción que, por ejemplo, no responde a las características de un deber, sino que resulta voluntario y libre; tiene orden y reglas; se puede relacionar con el ingenio y creatividad de los jugadores; entre otros elementos que se pueden advertir como tierra fértil para desarrollar procesos de enseñanza de las matemáticas a través de un contexto que resulta de interés natural para los niños y jóvenes.

Además, en la clasificación de Bishop (1998) de las seis actividades matemáticas importantes, está jugar y se señala además que los juegos han sido fuente de las principales actividades matemáticas que actualmente se aceptan como una parte central de las matemáticas, por ejemplo, en Probabilidad o Teoría de Números.

Por otra parte, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas por medio del ajedrez es una actividad que se viene desarrollando en el aula con más frecuencia en los últimos años, se sabe que el ajedrez brinda muchos beneficios en la educación de los niños y niñas, y algunos autores como Gairín y Fernández (2010) destacan la influencia del ajedrez tanto a nivel cognitivo (atención, memoria, concentración, percepción, razonamiento lógico, orientación espacial, creatividad, imaginación) como a nivel personal (responsabilidad, control tenacidad, análisis, planificación, autonomía, discusión, control, tenacidad) y expresan su importancia en los sistemas educativos de muchos países. Otros autores como Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) indican que algunos de los componentes de la práctica del ajedrez son la concentración y el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas y del pensamiento lógico, todos ellos necesarios para las matemáticas. Por su parte, Guik (2012) indica que el tablero de ajedrez, las piezas y el propio juego se utilizan frecuentemente para ilustrar conceptos, ideas y problemas matemáticos.

A continuación, se relacionan algunos de los documentos encontrados que abordan la relación entre ajedrez y enseñanza de las matemáticas, y que contribuyeron al diseño de las tareas propuestas:

Tabla *1*
Documentos e investigaciones de ajedrez y enseñanza de las matemáticas basado en Fernández (2008)

Año	País	Autor	Tema de Investigación
2001	(Barcelona) España	Ferran García Garrido	Educando desde el ajedrez
2008	(Barcelona) España	Joaquín Fernández Amigo	Tesis Doctoral Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio sobre sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2° de primaria.
2010	(Barcelona) España	Joaquín Gairín Sallán y Joaquín Fernández Amigo	Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez
2013	(Avilés) España	Daniel Sánchez Repullo	Posibilidades didácticas en matemáticas del ajedrez – TG Análisis de las posibilidades del ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: Estudio de caso en 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria del Colegio San Fernando de Avilés
2014	(Murcia) España	Rosa Nortes Martínez-Artero y Andrés Nortes Checa	El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas
2020	España	Noelia López Sáez	Ajedrez y Matemáticas para socializar dentro y fuera del aula, en primer ciclo de ESO
2020	Cuba	Roelvis Sosa Benítez, Julia Fiol Machin Yarileidys y Leyva Frómeta	Tareas docentes integradoras en la asignatura Ajedrez Básico
2021	Cuba	Joaquín Fernández Amigo	Material didáctico para la enseñanza de las matemáticas utilizando recursos de Ajedrez

Elementos curriculares

En 1998 el MEN propone el documento denominado "Lineamientos Curriculares de Matemáticas" derroteros para el desarrollo de la educación matemática en el país para el contexto escolar. En tal documento se describen, entre otros, asuntos relacionados con la epistemología del saber matemático y se trazan sendas líneas para el trabajo de las matemáticas en la escuela, concretamente se propone un sistema de cinco "componentes", a saber: variacional, numérico, geométrico (métrico), aleatorio, espacial. Además, se propone un sistema de competencias las cuales son: formulación y resolución de problemas, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos e interpretación. Finalmente, se establece también un sistema de contextos para la resolución de problemas: matemáticos, de otras ciencias y cotidianos.

Adicionalmente, en el 2006 el MEN publica los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los cuales tienen como función orientar la organización curricular matemática de las instituciones escolares a través del establecimiento de estándares mínimos que debe garantizar el sistema educativo escolar del país a sus estudiantes. Además, organiza por ciclos el sistema escolar (los ciclos en la educación colombiana son: primer ciclo: grados primero, segundo y tercero de primaria; segundo ciclo: cuarto y quinto de primaria; tercer ciclo: sexto y séptimo de básica secundaria; cuarto ciclo: octavo y noveno de básica secundaria y el último ciclo: décimo y undécimo de educación media) y por pensamientos (pensamiento variacional, geométrico, aleatorio, numérico y espacial).

Para la elaboración de este trabajo se focalizaron los esfuerzos en el desarrollo de tareas que, a través del ajedrez, permitan desarrollar los pensamientos aleatorio y variacional en el tercer ciclo escolar. La selección de estos pensamientos no fue aleatoria. Por una parte, el grupo de estudiantes que se tenía disponible para realizar este trabajo se proyectaba para iniciar su tránsito por el álgebra escolar, por lo cual se consideró oportuno atender aspectos del pensamiento variacional como el hallazgo de patrones, la representación de secuencias, el uso de lenguaje algebraico sencillo, entre otros que les sirvieran cuando tuvieran que enfrentarse al estudio del álgebra. Por otra parte, el pensamiento aleatorio se seleccionó debido a que, al menos en la institución educativa en la que se desarrollaría el trabajo, los asuntos correspondientes a estadística y probabilidad eran dejados de lados en el currículo para ser abordados solo hasta el final del año escolar y muchas veces de manera apresurada, con lo cual se deseó aportar a que los estudiantes tuvieran un acercamiento temprano a conceptos como evento probabilístico, espacio muestral y a procesos como calcular probabilidades simples o determinar los elemento de un espacio muestral.

Aspectos metodológicos

Como se ha esbozado previamente, un primer asunto metodológico por atender para la elaboración de las tareas fue una revisión documental que permitiera, en primer lugar, identificar si se habían diseñado tareas que tuvieran el mismo propósito que las proyectadas; y en segundo lugar, que los documentos que fueran encontrados, sirvieran como marcos de referencia para la elaboración de las tareas propias.

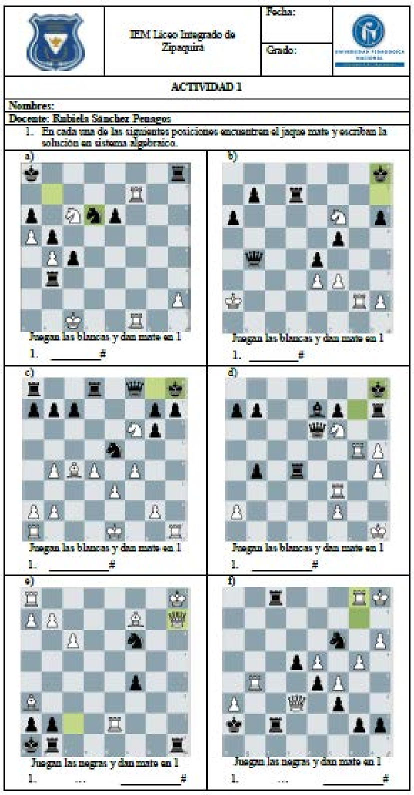
A continuación, se debió pensar en el pilotaje de las tareas. El grupo de estudiantes con el que se realizó la primera implementación de las tareas pertenece a una institución pública del municipio de Zipaquirá (Colombia), el grupo consta de 37 estudiantes de grado séptimo que estaban entre los 11 y los 13 años. Algunos de ellos ya tenían nociones sobre cómo jugar ajedrez, aunque no todos. Al respecto, previo a la implementación de las tareas, se les realizaron algunas tutorías para que aprendieran los movimientos básicos de las piezas del juego, la terminología y el uso del lenguaje simbólico que usa el ajedrez (dado que todas las filas están numeradas del 1 al 8, las columnas están etiquetadas con las letras de la A a la H y, por tanto, para hacer, por ejemplo, mención de una casilla se habla de “b5”, “c7”, etc. Asimismo, las piezas del juego se escriben con la inicial de su nombre, es decir: T: torre; R: rey, etc.). Además, en todo caso, los estudiantes no habían tenido acercamientos ni con el hallazgo de secuencias y patrones, ni uso del plano cartesiano, ni tampoco conceptos asociados a la probabilidad.

Los resultados de la primera versión implementada en el aula de clase se sistematizaron y analizaron a partir de viñetas, Camargo (2021) caracteriza una viñeta como una narración en la cual los investigadores exhiben explícitamente los hallazgos, usándolos como hilo conductor, reviviendo el escenario, pero sin ser una descripción de este sino enfocando la atención en lo significativo, en el fenómeno producto del análisis.

Tareas diseñadas

A continuación, se muestran cada una de las tareas diseñadas:

Tarea 1



IEM Liceo Integrado de Zipaquirá

Fecha:

Grado:

ACTIVIDAD 1

Nombres:

Docente: Rubiela Sánchez Penagos

1. En cada una de las siguientes posiciones encuentren el jaque mate y escriban la solución en sistema algebraico.

2. Para los seis diagramas anteriores:

   a. Indiquen las piezas que intervienen en el mate.

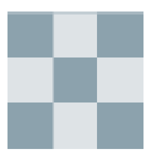
   b. ¿Qué condiciones debe tener la posición de las piezas identificadas en la anterior pregunta?

   c. ¿Qué tienen en común las posiciones del rey?

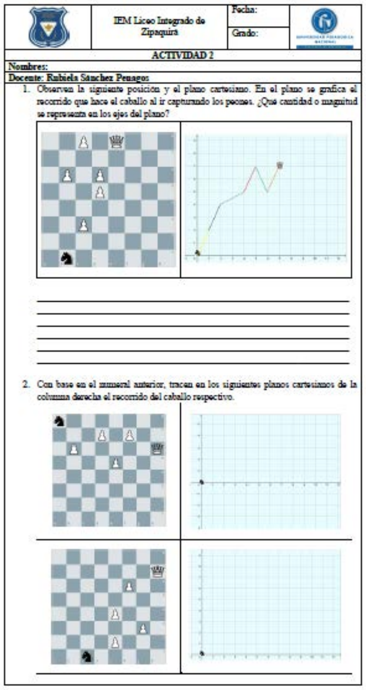
   d. ¿Qué tienen en común las piezas que intervienen en el mate?

3. Con base en lo que encontraron en las preguntas anteriores, ¿hay algún otro elemento (pieza o posición) que sea relevante para poder obtener el mate? Justifiquen su respuesta.

4. En el siguiente tablero de 3x3, y utilizando lo que encontraron en las preguntas 2 y 3, recreen una posición de un mate similar a los del primer numeral y describan con detalle la función de cada pieza en la situación planteada.



Tarea 2



IEM Liceo Integrado de Zipaquirá | Fecha: | Grado:

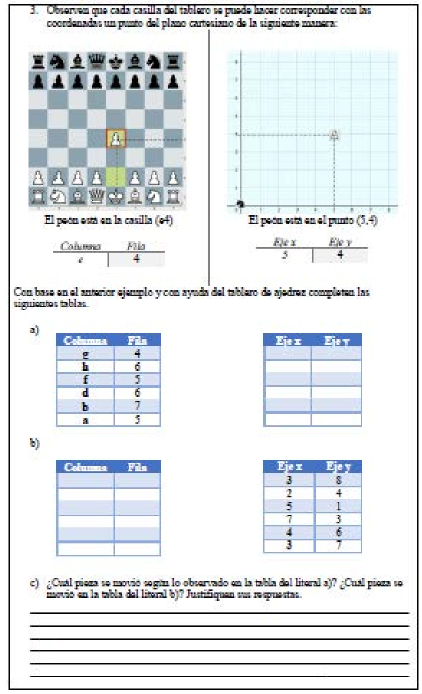
ACTIVIDAD 2

Nombres:

Docente: Rubiela Sánchez Penagos

1. Observen la siguiente posición y el plano cartesiano. En el plano se grafica el recorrido que hace el caballo al ir capturando los peones. ¿Qué cantidad o magnitud se representa en los ejes del plano?

2. Con base en el numeral anterior, tracen en los siguientes planos cartesianos de la columna derecha el recorrido del caballo respectivo.



3. Observen que cada casilla del tablero se puede hacer corresponder con las coordenadas un punto del plano cartesiano de la siguiente manera:

El peon está en la casilla (e4)

Columna	Fila
e	4

El peon está en el punto (5,4)

Eje x	Eje y
5	4

Con base en el anterior ejemplo y con ayuda del tablero de ajedrez completen las siguientes tablas.

a)

Columna	Fila
g	4
h	6
f	5
d	6
b	7
a	5

Eje x	Eje y

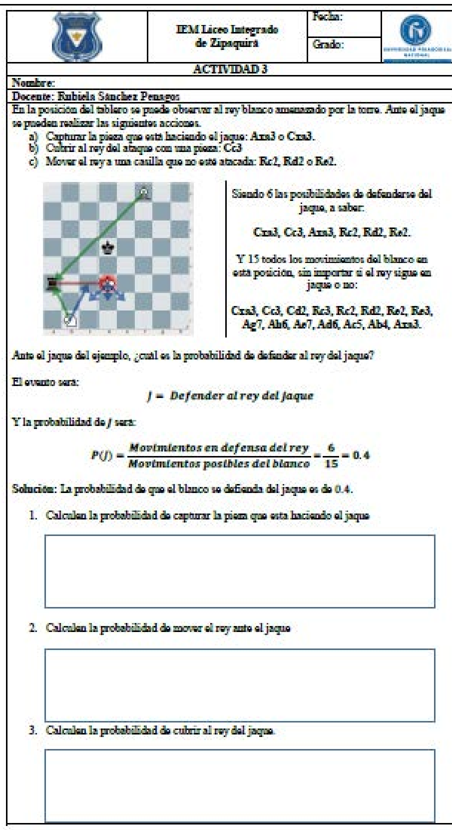
b)

Columna	Fila

Eje x	Eje y
3	8
2	4
5	1
7	3
4	6
3	7

c) ¿Cuál pieza se movió según lo observado en la tabla del literal a)? ¿Cuál pieza se movió en la tabla del literal b)? Justifiquen sus respuestas.

Tarea 3



IEM Liceo Integrado de Zipaquirá | Fecha: | Grado:

ACTIVIDAD 3

Nombre:

Docente: Rubiela Sánchez Penagos

En la posición del tablero se puede observar al rey blanco amenazado por la torre. Ante el jaque se pueden realizar las siguientes acciones.

a) Capturar la pieza que está haciendo el jaque: Axa3 o Cxa3.
b) Cubrir al rey del ataque con una pieza: Cc3
c) Mover el rey a una casilla que no esté atacada: Rc2, Rd2 o Re2.

Siendo 6 las posibilidades de defenderse del jaque, a saber:

Cxa3, Cc3, Axa3, Rc2, Rd2, Re2.

Y 15 todos los movimientos del blanco en esta posición, sin importar si el rey sigue en jaque o no:

Cxa3, Cc3, Cd2, Rc3, Rc2, Rd2, Re2, Re3, Ag7, Ah6, Ae7, Ad6, Ac5, Ab4, Axa3.

Ante el jaque del ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de defender al rey del jaque?

El evento será:

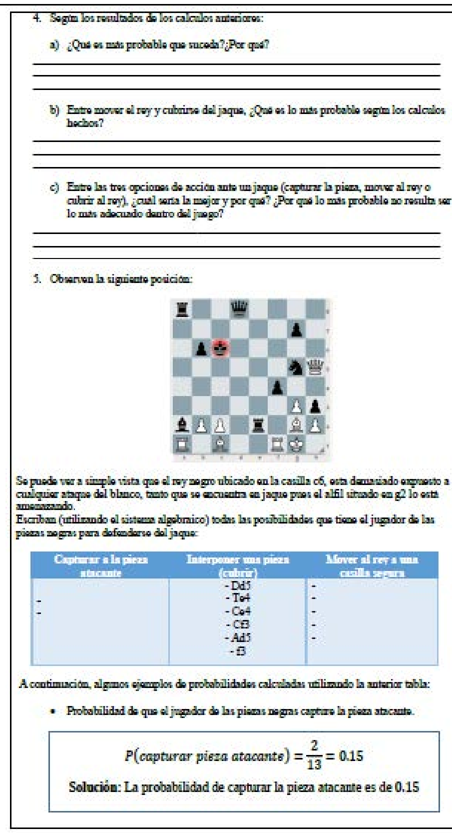
$$J = \text{Defender al rey del jaque}$$

Y la probabilidad de J será:

$$P(J) = \frac{\text{Movimientos en defensa del rey}}{\text{Movimientos posibles del blanco}} = \frac{6}{15} = 0.4$$

Solución: La probabilidad de que el blanco se defienda del jaque es de 0.4.

1. Calculen la probabilidad de capturar la pieza que esta haciendo el jaque
2. Calculen la probabilidad de mover el rey ante el jaque
3. Calculen la probabilidad de cubrir al rey del jaque.



4. Según los resultados de los calculos anteriores:

a) ¿Qué es más probable que suceda? ¿Por qué?

b) Entre mover el rey y cubrirse del jaque, ¿Qué es lo más probable según los calculos hechos?

c) Entre las tres opciones de acción ante un jaque (capturar la pieza, mover al rey o cubrir al rey), ¿cuál sería la mejor y por qué? ¿Por qué lo más probable no resulta ser lo más adecuado dentro del juego?

5. Observen la siguiente posición:

Se puede ver a simple vista que el rey negro ubicado en la casilla c6, esta demasiado expuesto a cualquier ataque del blanco, tanto que se encuentra en jaque pues el alfil situado en g2 lo está amenazando.
Escriban (utilizando el sistema algebraico) todas las posibilidades que tiene el jugador de las piezas negras para defenderse del jaque:

Capturar a la pieza atacante	Interponer una pieza (cubrir)	Mover al rey a una casilla segura
- -	- Dd5 - Te4 - Ce4 - Cf3 - Ad5 - f3	- - - - -

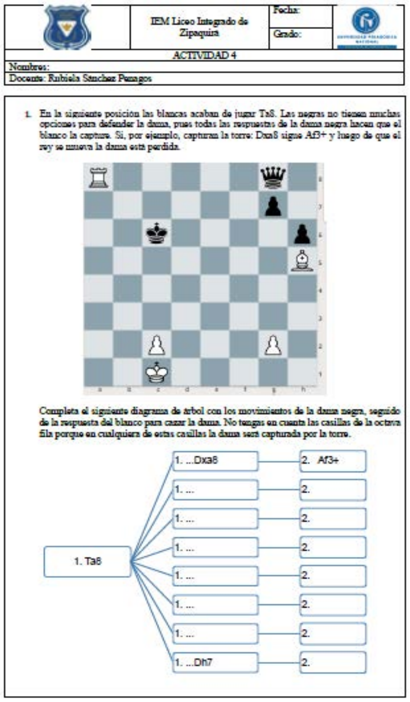
A continuación, algunos ejemplos de probabilidades calculadas utilizando la anterior tabla:

- Probabilidad de que el jugador de las piezas negras capture la pieza atacante.

$$P(\text{capturar pieza atacante}) = \frac{2}{13} = 0.15$$

Solución: La probabilidad de capturar la pieza atacante es de 0.15

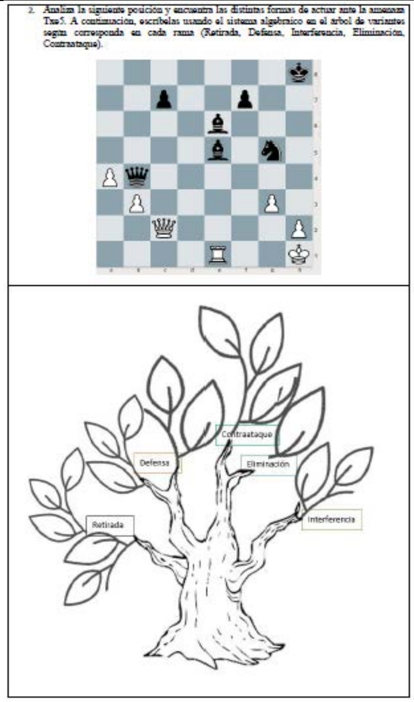
Tarea 4



IEM Liceo Integrado de Zipaquirá	Fecha: / Grado:
ACTIVIDAD 4	
Nombres:	
Docente: Rubiela Sánchez Penagos	

1. En la siguiente posición las blancas acaban de jugar Ta8. Las negras no tienen muchas opciones para defender la dama, pues todas las respuestas de la dama negra hacen que el blanco la capture. Si, por ejemplo, capturan la torre: Dxa8 sigue Af3+ y luego de que el rey se mueva la dama está perdida.

Completa el siguiente diagrama de árbol con los movimientos de la dama negra, seguido de la respuesta del blanco para cazar la dama. No tengas en cuenta las casillas de la octava fila porque en cualquiera de estas casillas la dama será capturada por la torre.



2. Analiza la siguiente posición y encuentra las distintas formas de actuar ante la amenaza Txe5. A continuación, escríbelas usando el sistema algebraico en el árbol de variantes según corresponda en cada rama (Retirada, Defensa, Interferencia, Eliminación, Contraataque).

Análisis de los resultados

El diseño de Tareas aquí planteadas tuvo fundamento principalmente en cumplir con unos objetivos de correlación entre los conceptos, procesos y componentes matemáticos, por esto fue indispensable asignar para cada tarea uno o varios estándares de las competencias básicas de aprendizaje de las matemáticas, específicamente para el ciclo de sexto y séptimo, enfocadas en el pensamiento aleatorio y variacional, en el cual se pudiera evidenciar un aprendizaje significativo por medio del ajedrez.

Durante la revisión de las respuestas dadas por los estudiantes en sus guías de trabajo, se pudo evidenciar: en la Tarea 1, que los estudiantes hallaron regularidades a partir de la comparación y solución de los ejercicios de mate en una jugada propuestos en la guía de trabajo que permitieron con ayuda de las preguntas llegar al patrón. Con esta Tarea se quería desarrollar el razonamiento algebraico, siendo este como indica Godino y Font (2000, p.8) el que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar. Así mismo, en la Tarea 2 se evidencia como los estudiantes lograron graficar en el plano cartesiano una situación dentro de un contexto propuesto, en este caso el ajedrez, representando el recorrido de un caballo sobre el tablero.

Las tareas 3 y 4 como se dijo anteriormente fueron enfocadas a desarrollar el concepto matemático de probabilidad utilizando diferentes representaciones, como tablas y diagramas de árbol que permitieron a los estudiantes en esta primera intervención calcular probabilidades simples, comparar y analizar lo más o menos probable, además organizaron y clasificaron información, y comunicaron con términos matemáticos de forma verbal y escrita sus ideas y comprensión del tema.

Conclusiones

El ajedrez y las matemáticas permiten llevar al aula de clase dinámicas diferentes con el objetivo de desarrollar en los estudiantes su pensamiento lógico matemático, estas tareas solo son una puerta abierta a la construcción de muchas más, se ha pensado, por ejemplo, en crear secuencias de tareas de los otros tres pensamientos contemplados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) y complementar este trabajo. Asimismo, se reconoce como otra posibilidad de proyección el poder implementar las tareas de una forma más sistemática, es decir, atendiendo a una metodología de investigación propiamente dicha, con el fin de evaluar la eficacia de las tareas con un nivel de rigurosidad investigativa mucho más profundo que el realizado en este trabajo, por supuesto ese trabajo requerirá que cada una de estas tareas parte de un trabajo nuevo que vaya enfocado a un solo concepto a desarrollar durante una unidad de un curso determinado.

Referencias y bibliografía

Bishop, A. (1998). *El papel de los juegos en educación matemática*. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18, 9-19.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Medellín – Bogotá D.C.: Universidad de Antioquia – Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2° de primaria.* Barcelona. Universidad Autónoma de Barcelona. (Tesis Doctoral).

Gairín, J., y Fernández, J. (2010). Enseñar Matemáticas con recursos de Ajedrez. *Tendencias pedagógicas, Vol. 1*(N° 15), 58–90.

Huizinga, J. (1949). *Homo Ludens*. Londres. Routledge and Kegan Paul.

Klein, M. (1929). *La personificación en el juego de los niños.* Buenos Aires: Hormé S.A.

Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Gutiérrez-Arenas, P., Adrián, C., Vallejo, M., y Adamuz-Povedano, N. (2012). Estudio bibliométrico de la investigación educativa en las universidades de Andalucía en el SSCI (2002-2010). Revista Iberoamericana de Psicología y Salud, 3(2), 125-136.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.

El Anglomento, una Herramienta Didáctica para la enseñanza de Segmentos y Ángulos

Ivonne Andrea Ramírez Oviedo
Facultad de Educación-Universidad Surcolombiana
Colombia
ivonne.ramirez@usco.edu.co
Miguel Sebastian Cachaya Viscaya
Facultad de Educación-Universidad Surcolombiana
Colombia
u20171157368@usco.edu.co

Resumen

Este trabajo se centra en la creación e investigación de un instrumento didáctico innovadorllamado "Anglomento" con el objetivo de mejorar la comprensión de ángulos y segmentos en estudiantes de cuarto y quinto grado de instituciones educativas rurales. Con un enfoquesociocrítico y una estrategia de investigación basada en el diseño, se busca validar el "Anglomento" como una herramienta que permita vincular el aprendizaje activo con algunas prácticas rurales comunes en las escuelas de zonas cafeteras del Huila.

Con respecto al diseño, el instrumento contiene una herramienta manipulativa concreta deinnovación propia junto dos actividades con las que se pretende que los estudiantes haganuso de dicha herramienta en el momento de aplicación.

Para evaluar las dificultades y fortalezas del proceso de aprendizaje de la población de estudio, se logró una estrategia metodológica de observación mediante el estudio de casos. Para validar el instrumento, se realizaron dos pruebas: una antes de aplicar la herramienta yotra posterior. Los resultados de estas pruebas se compararon usando la prueba de Wilcoxon. Los resultados mostraron mejorías en relación con la comprensión de algunos conceptos relacionados con ángulos y segmentos, junto con las ventajas y desventajas del instrumento aplicado. Se resalta este instrumento que contiene el artefacto innovador que no existe en la revisión de antecedentes.

Palabras clave: Anglomento; innovación; ángulos; segmentos; escuelas rurales; Aprendizaje Activo.

Introducción

Esta comunicación resume el proceso y los resultados del proyecto de investigación denominado "El Anglomento", que busca responder a la pregunta: ¿Cómo se puede diseñar e implementar unaherramienta didáctica que permita mejorar la comprensión de ángulos y segmentos en los estudiantes de cuarto y quinto grado de escuelas rurales cafeteras?

Para responder a esta pregunta de investigación, se construyó un artefacto manipulable y se diseñaron actividades adaptadas al contexto de cuatro Instituciones Educativas rurales del departamento del Huila (Colombia) teniendo en cuenta los principios del Aprendizaje Activo. Los resultados de la aplicación de la herramienta se evaluaron desde una perspectiva cualitativa y se compararon los conocimientos obtenidos antes y después de la intervención para validar el instrumento. Lo anterior, permitió obtener una visión de los conocimientos de los alumnos sobre los objetos matemáticos desarrollados, la pertinencia al aplicar la herramienta en ese contexto y evaluar las ventajas, desventajas y algunas recomendaciones al usar la herramienta.

Planteamiento del Problema

Esta iniciativa surgió a partir de diversas experiencias vivenciadas durante la pandemia, donde losinvestigadores durante labores sociales en sus lugares de procedencia en zonas rurales, evidenciaron que el apoyo académico a los estudiantes de las escuelas del sector rural, se quedaba corto especialmente de aquellas zonas alejadas de difícil acceso en zonas cafeteras. En el Huila se les suministraron a los alumnos por parte de las I.E guías de aprendizaje que en muchas ocasiones eran descontextualizadas o no tenían acceso a internet para atender las asesorías. Esta situación económica obligaba a los niños a ayudar en la economía del hogar y no priorizar la escuela. Es de resaltar que el Huila a nivel de Colombia es el eje cafetero del país en los últimos años.

Antes de la emergencia sanitaria y después, se evidenció el acceso limitado a tecnología y recursosdidácticos innovadores en escuelas rurales de Colombia, siendo una problemática generalizada queafecta el proceso de enseñanza-aprendizaje y limita la posibilidad de adaptar el contenido de la malla curricular al contexto de los estudiantes. Bernal y Piedra, 2013 afirman que: Mirando el panorama de la escuela rural, de las escuelas multigrado, se puede decir que las principales dificultades son: la falta de recursos humanos y educativos, al igual que servicios básicos; la deserción escolar; la fragmentación por áreas y por grados; la resistencia de los maestros a abandonar los métodos tradicionales; la deslegitimación por parte de la comunidad del trabajo agrario y activo en el colegio; la organización del tiempo y del espacio. Esto también se reafirma,además de las brechas y propuestas que existen en la educación rural en el informe del plan especialde educación rural mencionado en el 2018 por parte del Ministerio de Educación Nacional y el informe de gestión departamental del Huila 2016-2019.

Además, se percibió, que los conocimientos matemáticos, especialmente en lo relacionado con elpensamiento espacial eran usados por parte de los alumnos con base en los criterios de las prácticasagrarias, de instrumentos mecánicos de las labores diarias y no con base en la matemática enseñadaen la escuela. También, durante las observaciones previas a esta investigación, el poco conocimiento de los estudiantes en torno a los temas son consecuencia de que el currículo, al ser multigrados, sea bastante extenso y difícil de abordar, en su totalidad, por el docente.

Con la perspectiva anterior, los planteamientos y posibilidades que D´Ambrosio, (2014) nos posibilita para pensar de otros modos la Educación Matemática Rural, se resalta la pertinencia deeste trabajo que permite otras formas de comprender y habitar el mundo, reconociendo que las prácticas sociales en las zonas cafeteras producen diferentes matemáticas, esto es, […] un conjuntode modos, estilos, artes y técnicas para explicar, aprender, conocer, relacionar los ambientes naturales, sociales, culturales e imaginarios de una cultura, por ende, contextualizadas en distintosambientes naturales y culturales. (D`Ambrosio 2014 p. 103). Por tanto, es posible pensar otras formas de enseñanza, que consideren la multiplicidad de usos de las matemáticas, que es lo que sepropone en esta creación del Anglomento.

Marco Teórico

Tal y como hemos señalado en Colombia en las escuelas rurales, las dificultades del acceso a Internet, el enfoque pedagógico de escuela nueva (Cardona, 2022),y las diversas problemáticas deacceso y cobertura a estás escuelas son factores determinantes que afectan de manera negativa losprocesos de pensamiento de los niños que se encuentran cursando básica primaria en esas escuelas.Agregando, de una dimensión curricular que desconoce el contexto; junto con el abandono estatalcrónico en las zonas rurales más alejadas (Ministerio de Educación Nacional, 2020).

Sumado a lo anterior, la falta de recursos, aumenta la complejidad de la actividad docente, la cualrequiere un alto sentido y capacidad de resolución de problemas en escenarios educativos, en ocasiones, impredecibles. (Carrascal y Magro, 2019).

Para el diseño las actividades que acompañan a la herramienta, se usó el enfoque de enseñanza Aprendizaje Activo, según el Cambridge Internacional Assessment Education (s.f.), es un enfoquede enseñanza en el que los alumnos participan del proceso de aprendizaje mediante el desarrollo del conocimiento y la comprensión. Para que los alumnos otorguen sentido a la información y a las ideas nuevas, deben conectarlas con saberes previos a fin de poder procesar y luego comprenderel nuevo material. El Aprendizaje Activo requiere que los alumnos reflexionen y practiquen utilizando nuevos conocimientos y habilidades a fin de desarrollar recuerdos a largo plazo y una comprensión más profunda. Esta última también les permitirá conectar distintas ideas entre sí y pensar de manera creativa. (párrs. 1-3)

Adicional a lo anterior, uno de los aspectos importantes en la exploración de los conocimientos previos es identificar como lo asevera Andrade (2011), quien manifiesta que los obstáculos didácticos se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes. […] estos errores provienen de dificultades que se originan en la enseñanza por alguno de estos erroresdidácticos: metodológicos, curriculares o conceptuales.

Para mejorar los procesos de aprendizaje, reconocer el error o errores presentados coinciden en que el lenguaje matemático por sí mismo es una fuente de errores debido a su complejidad. Lo cual coincide con experiencias en investigación relacionadas en las asignaturas de geometría. El docente en muchas oportunidades se encuentra frente a estudiantes que, en mayor o menor grado,tienen dificultades para expresarse adecuadamente utilizando el lenguaje geométrico. Dificultadesque se asocian con el uso e interpretación incorrecta de dicho lenguaje, los símbolos y notaciones;lo cual se debe, probablemente, a los conflictos que se producen entre este lenguaje y el de uso cotidiano, a la precisión que se requiere en el uso del lenguaje matemático o, simplemente, a que no estudian lo suficiente.

Con respecto a la elaboración del artefacto o instrumento mecánico, el instrumento denominado Anglomento, se encuentra enmarcado como innovación tecnológica y es creación propia, motivadapor recursos comunes que se usan en el campo para la elaboración del mismo. La siguiente ilustración muestra en artefacto en mención y éste es el link donde se explica su funcionamientodel artefacto. **https://www.youtube.com/watch?v=czgAk50EfZg.**

Para la intervención educativa, Palomares, Moyano y Sánchez la mencionan (como se cita en Palomares y García, 2016) […] como un conjunto de acciones interrelacionadas y holísticas que se realizan, fundamentalmente, en el contexto escolar, junto a otros agentes educativos, con el finde potenciar todas las capacidades del alumno y propiciar su educación integral. Consecuentemente, la respuesta educativa conviene realizarla –siempre que sea posible- en el entorno natural del alumno/a, respetando sus distintos tipos de aprendizaje y la propia realidad escolar. Todo ello exige un cambio en las actitudes, una mayor flexibilidad organizativa, actividades que potencien una motivación continua, formas de trabajar más innovadoras, creativas, activas y participativas que desarrollen su autonomía y desarrollo integral. La intervención educativa de calidad debe proporcionar experiencias, vivencias y recursos para que el alumnado pueda desarrollar armónicamente su potencial en todas sus dimensiones. (p.92)

Por lo anterior, con este trabajo de investigación se pretende analizar los conocimientos matemáticos relacionados con ángulos y segmentos, motivado por las prácticas desarrolladas en actividades relacionadas con el café, articuladas con el instrumento de creación propia denominada el Anglomento en escuelas rurales de difícil acceso: Sede Praga. I.E. Agropecuaria de Aipe municipio de Aipe, I.E. Anacleto García, sede Puertas del Sol, municipio de Neiva, las sedes El Moral y el Dave de la I.E Pacarní, municipio de Tesalia.

Metodología

Esta investigación se desarrolló bajo una perspectiva cualitativa (Camargo, 2021) basada en el diseño del instrumento denominado Anglomento, bajo un enfoque socio – crítico, centrado en losconocimientos previos de los niños y sus evocando algunas de sus prácticas agrícolas relacionadas con el café, mirar cómo evolucionan los conceptos de ángulos y segmentos. A continuación, se ilustra la población de la presente investigación distribuida por Edades correspondientes a las escuelas sedes Praga del municipio de Aipe, sede Puertas del Soldel municipio de Neiva, el Moral y el Dave del municipio de Tesalia.

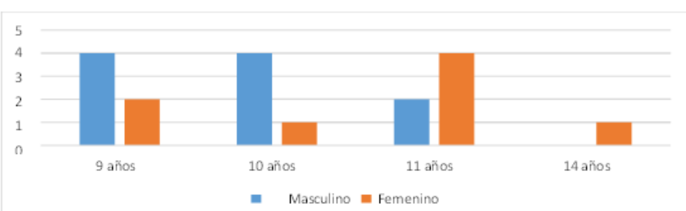


Figura 1 Ilustración de la población presente investigación distribuida por edades.
Fuente: elaboración propia. 2022

A continuación, se ilustra la prueba diagnóstica que determinan el nivel de conocimiento de los niños en relación a los conceptos de ángulos, segmentos y el manejo del transportador y regla como instrumento de medición. La prueba final se diseñó no con las mismas preguntas de la pruebadiagnóstica, pero se relacionaron preguntas con el mismo objetivo de la prueba inicial.

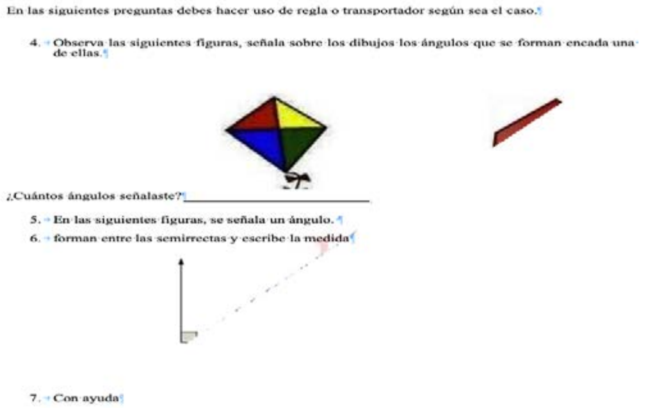
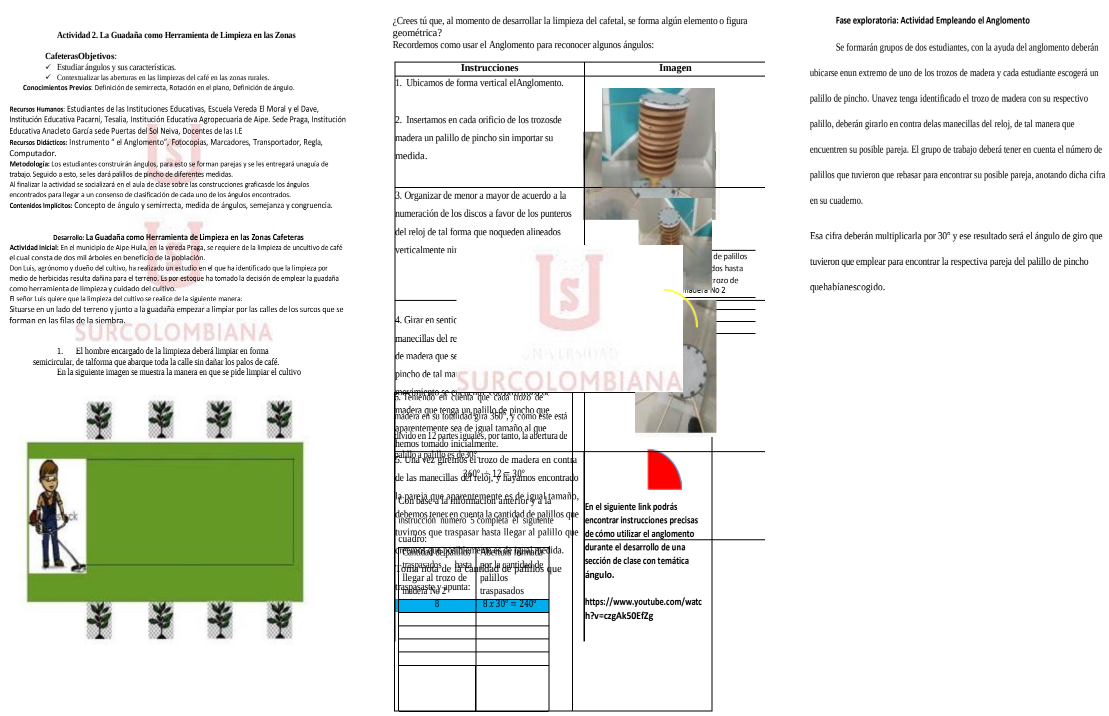
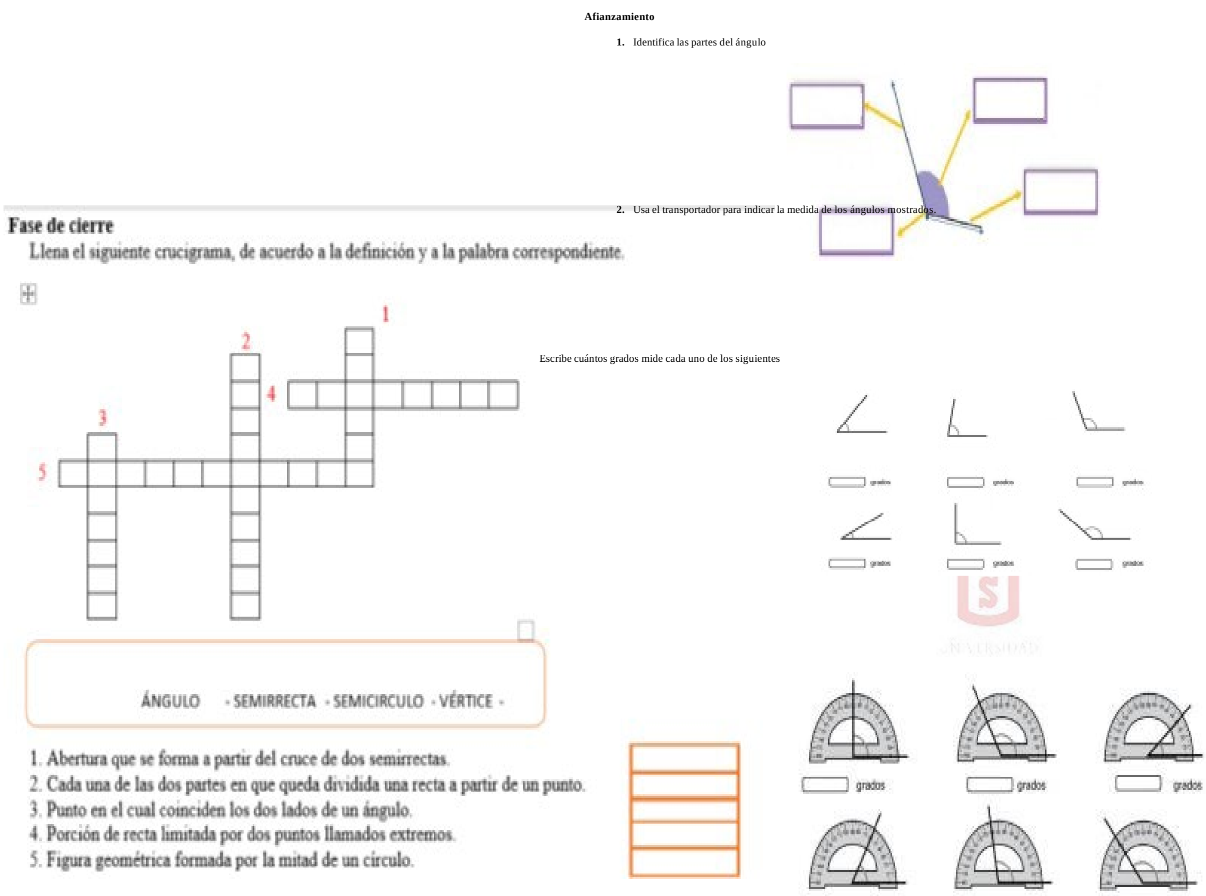


Figura 2. Ilustración de la prueba diagnóstica.
Fuente: elaboración propia. 2022

Con respecto a las actividades del Anglomento, la primera actividad está enfocada a mejorar la comprensión de conceptos y razonamiento en relación con segmentos a través de la siembra de café y la segunda actividad con relación a ángulos. A continuación, se ilustra la segunda actividad.

Figura 3.
Ilustración actividad 2: La Guadaña como Herramienta de Limpieza en las Zonas Cafeteras





Fuente: elaboración propia. 2022

Para el análisis de la información, se usó un enfoque mixto, esto es, cualitativo- cuantitativo. Desdela perspectiva cualitativa se propusieron preguntas abiertas en la prueba diagnóstica, el implementode actividades didácticas y la prueba final. Ello, atendiendo a los planteamientos de Strauss y Corbin (2002).

Con respecto al análisis de la información, se realizó estudio de caso de acuerdo a la observacióny actividades que se implementaron en la intervención, junto con elementos básicos de laestadística descriptiva: promedios y desviación estándar. Además, el desarrollo de las actividadespor escrito de los niños, junto con las fotos de los productos relacionados con los objetos matemáticos. Para validar el Anglomento se hizo necesario comparar dos muestras relacionadas usando la prueba conocida como Wilcoxon Signed-Rank Test, que permite contrastar poblacionescuando sus distribuciones (normalmente interpretadas a partir de las muestras) no satisfacen las condiciones necesarias para otros test paramétricos.

Esta funge como una alternativa a la prueba “t-student” de muestras dependientes cuando dichas muestras no siguen una distribución normal (evidencian asimetría o colas) o cuando tienen un tamaño demasiado reducido para poder determinar si proceden de poblaciones normales (Rodrigo,2016).

Resultados

Tabla 1.

Resultados prueba diagnóstica.

Institución Educativa Agropecuaria de Aipe sede Praga										
Diagnostica	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	A	C	C	C	B	3	90°-100°-90°	10cm-7cm-5cm	4	4
Estudiante 2	A	C	C	C	B	3	90°-100°-120°	10cm-6cm-5cm	4	4
Estudiante 3	A	C	C	C	A	3	90°-100°-80°	10cm-7cm-5cm	6	2
Estudiante 4	C	A	B	C	B	8	90°-180°-330°	10cm-7cm-5cm	3	5
Estudiante 5	A	C	B	C	B	10	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	5	3
Estudiante 6	D	C	C	A	A	10	90°-90°-90°	10cm-7cm-5cm	6	2
% De bien	17%	83%	67%	83%	33%	100%	17%	83%	58%	0%
% De mal	83%	17%	33%	17%	67%	0%	83%	17%	0%	42%

Institución Educativa Anacleto García sede puertas del sol										
Diagnostica	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	B	B	B	A	B	2	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	3	5
Estudiante 2	C	A	A	B	D	9	65°-55°-88°	18cm-14cm-5cm	1	7
Estudiante 3	C	B	B	A	D	3	90°-80°-130°	18cm-8cm-6cm	2	6
Estudiante 4	B	C	A	A	C	3	0°-0°-0°	0cm-0cm-0cm	2	6
Estudiante 5	C	A	B	B	A	6	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	4	4
Estudiante 6	B	B	B	A	C	3	60°-50°-90°	14cm-12cm-16cm	1	7
% De bien	0%	17%	0%	0%	17%	100%	50%	33%	27%	0%
% De mal	100%	83%	100%	100%	83%	0%	50%	67%	0%	73%

Institución educativa Pacarni-Tesalia sede vereda el Dave										
Diagnostica	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	C	B	C	A	C	4	90°-100°-130°	0	2	6
Estudiante 2	B	C	D	A	C	9	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	4	4
Estudiante 3	B	C	B	C	C	20	90°-100°-130°	10cm-7cm-5cm	4	4
Estudiante 4	C	C	C	D	A	10	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	6	2
% De bien	0 %	75%	50%	25%	25%	100%	50%	75%	50%	0%
% De mal	100%	25%	50%	75%	75%	0%	50%	25%	0%	50%

Institución educativa Pacarni-Tesalia sede vereda el Moral										
Diagnostica	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	B	C	C	B	A	6	90°-80°-60°	10cm-7cm-5cm	5	3
Estudiante 2	B	C	D	A	D	8	90°-80°-130°	10cm-7cm-5cm	4	4
% De bien	0%	100%	50%	0%	50%	100%	50%	100%	56%	0%
% De mal	100%	0%	50%	100%	50%	0%	50%	0%	0%	44%

Fuente: elaboración propia. 2022

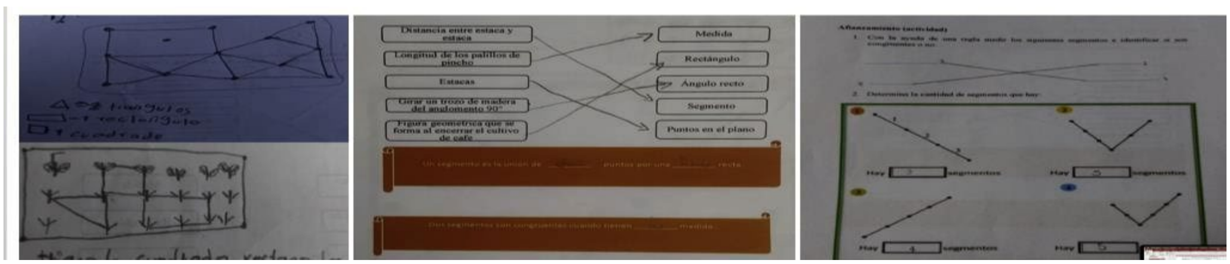


Figura 4. Resultados actividad uno.

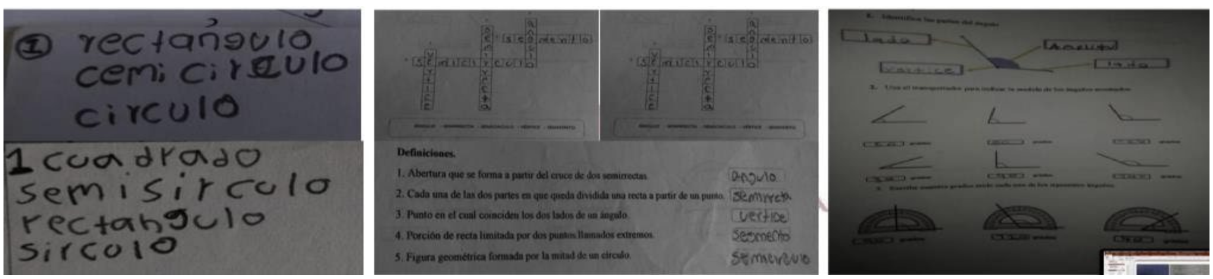


Figura 5. Resultados actividad dos.

Tabla 2

Resultado prueba final.

Institución educativa Pacarni-Tesalia sede vereda el Dave										
Final	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	D	D	B	C	D	4	40°-130°-180°	13cm-7.5cm-10cm	8	0
Estudiante 2	D	D	A	C	D	3	40°-130°-180°	10cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 3	D	C	A	C	D	7	40°-130°-180°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 4	D	D	B	C	D	8	40°-130°-180°	13cm-7.5cm-10cm	8	0
% De bien	100%	75%	100%	100%	100%	100%	100%	75%	94%	0%
% De mal	0%	25%	0%	0%	0%	0%	0%	25%	0%	6%

Institución educativa Pacarni-Tesalia sede vereda el Moral										
Final	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	D	D	A	C	D	7	40°-130°-180°	13cm-7.5cm-10cm	8	0
Estudiante 2	B	D	A	C	D	9	40°-130°-180°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
% De bien	50%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	94%	0%
% De mal	50%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	6%

Institución Educativa Agropecuaria de Aipe sede Praga										
Final	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	D	D	C	C	D	12	35°-170°-180°	13cm-8cm-10cm	6	2
Estudiante 2	D	B	B	C	D	3	37°-130°-180°	13cm-7cm-10cm	5	3
Estudiante 3	D	D	B	C	D	9	35°-50°-180°	13cm-7cm-10cm	6	2
Estudiante 4	A	A	C	D	D	4	50°-130°-180°	14cm-8cm-11cm	3	5
Estudiante 5	D	D	C	C	D	8	190°-130°-180°	13cm-8cm-10cm	6	2
Estudiante 6	D	D	B	C	D	8	31°-130°-180°	13cm-8cm-11cm	6	2
%De bien	83%	67%	50%	83%	100%	100%	17%	33%	67%	0%
%De mal	17%	33%	50%	17%	0%	0%	83%	67%	0%	33%

Institución Educativa Anacleto García sede puertas del sol										
Final	Preguntas									
Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	No. bien	No. mal
Estudiante 1	D	A	A	C	D	3	220°-130°-80°	13cm-7.5cm-10cm	6	2
Estudiante 2	D	D	A	C	D	5	40°-125°-180°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 3	D	D	A	C	D	4	40°-125°-180°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 4	D	D	A	C	D	6	30°-120°-180°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 5	D	D	A	C	D	16	142°-120°-80°	13cm-7.5cm-10cm	7	1
Estudiante 6	D	D	A	C	C	6	35°-125°-180°	13cm-7.5cm-10cm	6	2
%De bien	100%	83%	100%	100%	83%	100%	0%	100%	83%	0%
%De mal	0%	17%	0%	0%	17%	0%	100%	0%	0%	17%

Fuente: elaboración propia. 2022

Conclusiones

Para lograr el diseño de la herramienta el Anglomento con sus actividades fue necesario realizarvarios prototipos para obtener una manipulación óptima para la implementación de las actividades.

Al realizar el proceso de diagnóstico y aplicarlo en los estudiantes de las cuatro escuelas ruralesque participaron en esta investigación, junto con la indagación de los conocimientos previos delas actividades propuestas, se evidenció que los estudiantes presentan las siguientes problemáticas comunes, como se ilustra en la figura:

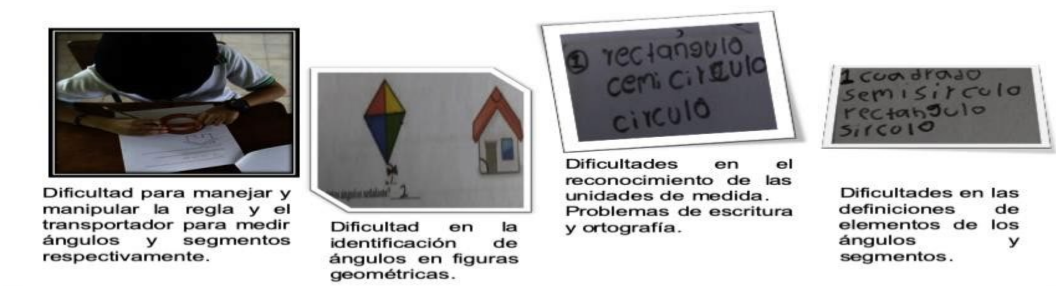


Figura 4. Problemáticas observadas durante la investigación.

Con respecto al impacto en la implementación del instrumento, este fue positivo en el proceso, toda vez que al ser una herramienta didáctica innovadora generó mayor motivación e interés en los estudiantes y docentes a cargo, permitió de la mano de las actividades planteadas y la estudiantes, y la exploración se centró en relacionar el uso de dicho instrumento con las fases de consolidación y cierre con temáticas propias de sus prácticas cafeteras como la siembra de café yla limpieza con guadaña.

El instrumento denominado Anglomento tiene unas ventajas en relación con otros instrumentos (como por ejemplo el transportador), pues el hecho estar construido con elementos agrícolas, la elaboración del artefacto, aunque tiene un nivel de complejidad, es fácil de manipular, y a travésdel aprendizaje activo fomenta el trabajo colaborativo, fortalece el reconocimiento de ángulos principales, giros en sentido o en contra de las manecillas del reloj desde otra perspectiva, además de relacionar elementos del contexto cafetero.

El instrumento fue validado gracias a la comparación de la prueba diagnóstica y la prueba final.Después de aplicar las actividades diseñadas, se pudo observar un avance de las nociones y definiciones trabajadas con respecto a ángulos y segmento.

Finalmente, de acuerdo a los resultados obtenidos y a las conclusiones arrojadas, se hicieron algunas recomendaciones con el objetivo de contribuir al fortalecimiento de algunos procesoseducativos pueden mediarse con herramientas didácticas innovadoras.

Referencias y bibliografía

Andrade, E. C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 999-1007). Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://bit.ly/3CKvaUr

Arco, A. (24 de Marzo de 2020). Una generación digital, pero con carencias tecnológicas. *Magisterio*. https://bit.ly/3ERmsq8

Bernal, J, y Piedra, P. (Septiembre de 2013). *La educación matemática crítica: una alternativa para Potenciar las caracteristas de la escuela multigrado*. Comunicación Breve. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo. Uruguay. http://funes.uniandes.edu.co/18598/1/Bernal2013La.pdf

Cardona Echeverry, C. (2022). Revisión bibliográfica del modelo pedagógico y de evaluación en Escuela Nueva en Colombia. Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación, 6(25), 1337–1354. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i25.416

Carrascal, S. y Magro, G. M. (5 de Junio de 2019). ¿Llega la innovación educativa a las escuelas rurales? *The Conversation*. https://bit.ly/3EJR3WJ

D´Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática Revista Latinoamericana de Etnomatemática Cambridge Innternational Assessment Education.(s.f.). *Aprendizaje activo.* https://bit.ly/3sd7sLz

Innovación y creatividad para favorecer la intervención educativa del alumnado con altas capacidades *Ascensión Palomares Ruiz, Ramón García Perales* https://revistaeducacioninclusiva.es/index.php/REI/article/view/73

Ministerio de educación Nacional. *Plan especial de educación rural hacia el desarrollo rural y la construcción de paz ministerio de educación nacional* https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-385568_recurso_1.pdf

Villa, C. J; Hurtado de González, M. (2019*). Informe de gestión*, Departamento del Huila 2016 – 2019. file:///C:/Users/Aleja/Downloads/Rendicion%20publica%20%20de%20cuentas%202016%20%202019.pdf

El aprendizaje cooperativo en los trabajos de investigación del curso de Estadística Básica Aplicada a los Negocios

Ernesto **Zeña** Raya
Universidad de Lima
Perú
ezenar@ulima.edu.pe
Elisa **Montoya** Cantoral
Universidad de Lima
Perú
emontoya@ulima.edu.pe
Alexander Filadelfo **Peña** Nevado
Universidad de Ingeniería y Tecnología
Perú
apena@utec.edu.pe

Se tomaron cinco elementos fundamentales para que pueda darse la cooperación (Johnson, Johnson, y Holubec,2013) en el aula, estos cinco elementos fueron adaptadas en un instrumento que mide el constructo del AC (Fernandez-Rio, Cecchini, et. al, 2017). La interdependencia positiva, permite que el estudiante utilice el éxito propio y el de sus compañeros de grupo para alcanzar el objetivo común; interacción promotora, el contacto directo y mutuo entre los integrantes con el propósito de apoyarse; responsabilidad individual, tal como indica su nombre, es el compromiso de cada integrante en el trabajo que le corresponde; procesamiento grupal, el proceso de la información mediante la comunicación y la reflexión; y habilidades sociales, consecuencia de las anteriores, busca el desarrollo de la comunicación interpersonal, la capacidad para gestionar y ser un líder.

Metodología

La investigación se llevó a cabo durante el semestre 2022-2, y se aplicó el AC en 4 secciones del curso de Estadística Básica Aplicada a los Negocios. En la segunda y tercera semana, se formaron los grupos y seleccionaban el tema que les motiva investigar. En las siguientes semanas, presentan avances de acuerdo al cronograma de actividades, y son monitoreadas y retroalimentadas por el docente. En la semana trece entregan el informe final, y elaboran un vídeo explicativo del trabajo. El mejor video de cada aula es seleccionado para el concurso “Descubre con la Estadística”. Finalmente, se aplicó un cuestionario con 20 reactivos en la escala de Likert con 5 niveles, desde muy en desacuerdo hasta muy de acuerdo.

Resultados

El resultado de la aplicación de la encuesta nos muestra que, de los cinco elementos, la responsabilidad individual fue el componente del AC que más estuvieron de acuerdo, representado por el 77% de los estudiantes, seguido por el procesamiento grupal con 73% y 72% por las habilidades sociales; sin embargo, en la interdependencia positiva y la interacción promotora presenta un 18% y 20% de estudiantes respectivamente que no están de acuerdo. Otro resultado importante, es que un grupo de 14% y 10% de estudiantes no están ni de acuerdo ni en desacuerdo en los componentes de interdependencia positiva y la interacción promotora respectivamente.

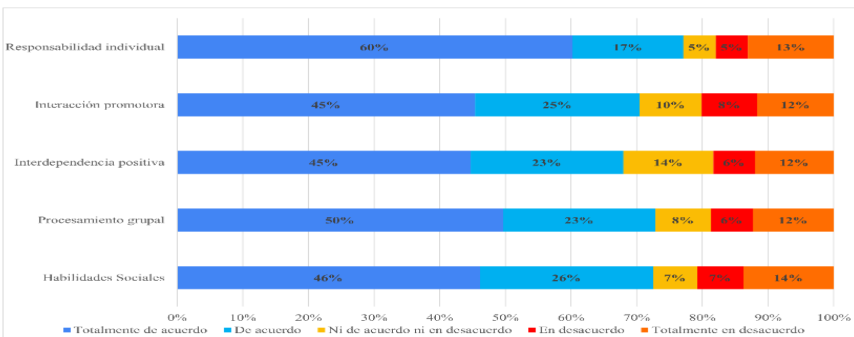


Figura 1 Porcentaje de estudiantes que están de acuerdo o desacuerdo según los componentes del aprendizaje cooperativo

Discusiones y Conclusión

Se encontró en todos los componentes un porcentaje de acuerdo por encima del 68%; sin embargo, en la interdependencia positiva considerada por Johnson, Johnson y Holubec como uno de los componentes principales del AC, presenta mayores porcentajes en desacuerdo con respecto a los otros cuatro componentes, si bien no supera el 32%, esto podría reducirse implementado otras estrategias para mejorar la interdependencia positiva y que los integrantes comprendan que es importante el éxito propio y el de sus compañeros de grupo para lograr el mismo fin. Asimismo, se obtuvo mejores resultados en la responsabilidad individual. Además, se evaluó los mejores videos del concurso “Descubre con la Estadística” y se encontró que dos de las cuatro secciones donde se aplicó el AC obtuvieron el primer y tercer lugar.

Referencias y bibliografía

Fernandez-Rio, J., Cecchini, J. A., Méndez-Giménez, A., Méndez-Alonso, D., & Prieto, J. A. (2017). Design and validation of a questionnaire to assess cooperative learning in educational contexts. Anales de Psicología, 33(3), 680-688. https://www.redalyc.org/pdf/167/16752019026_1.pdf

Jiménez-Barrera, Maricelys, Meneses-La-Riva, Mónica Elisa, De la Cruz, Yullio Cano, Cabanillas-Chavez, María Teresa, & Cabrera-Olvera, Jorge Leodan. (2022). Experiencia docente en la aplicación de metodologías activas de aprendizaje en la educación superior enfermera. Index de Enfermería, 31(2), 134-138. Epub http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1132-12962022000200018&lng=es&tlng=es.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1994). Cooperative Learning in the Classroom. Edina. MN: Interaction Book Company. https://www.guao.org/sites/default/files/biblioteca/El%20aprendizaje%20cooperativo%20en%20el%20aula.pdf

Yallico Calmett, R. M., & Hernández Huaripaucar, E. M. (2021). El aprendizaje cooperativo como estrategia metodológica para desarrollar habilidades investigativas específicas en estudiantes universitarios. Horizonte de la Ciencia, 11(21), 283-295

El Contraejemplo como Herramienta Didáctica en el Curso de Topología General

Rodrigo Yoel **Combe** Aparicio
Universidad de Panamá
Panamá
rcombe11@gmail.com

Palabras clave: contraejemplo, demostraciones, topología, proposiciones.

Uso del Contraejemplo como Herramienta Didáctica

Como docente de la Licenciatura en Matemática soy consciente de las limitaciones que presentan los estudiantes en la realización de demostraciones de teoremas y otros resultados. El contraejemplo en la asignatura de topología es una herramienta fundamental para refutar resultados importantes tanto para los espacios métricos como para muchos resultados dentro de los espacios topológicos tales como la continuidad de funciones, los axiomas de separación y numerabilidad, la compacidad y la conexidad, entre otros.

Un contraejemplo no es más que un ejemplo donde se expone la falsedad de una proposición. El uso de un contraejemplo como método para demostrar que una proposición es falsa facilita la construcción de conocimientos matemáticos abstractos de forma significativa y contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, ya que permite visualizar una situación donde se verifican las hipótesis, pero la conclusión es falsa.

Contraejemplos y Representaciones como Recurso Didáctico en las Clases de Topología General

a. Si A y B están en un espacio métrico (X, d), entonces
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$
Contraejemplo: En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ se define $A = (-3,1)$ y $B = [1,2)$. Es claro que $\overline{A} = [-3,1]$ y $\overline{B} = [1,2]$. Así pues, $\overline{A \cap B} = \emptyset$ que difiere de $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

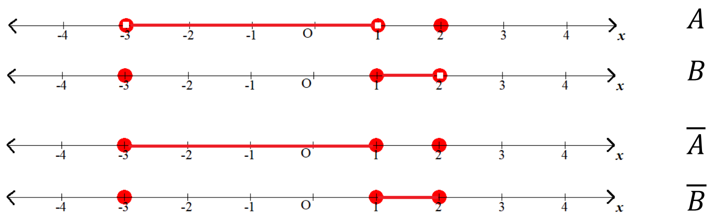


Figura 1: Representación gráfica de los conjuntos A y B y sus adherencias.

b. Si (X,τ) es un espacio topológico T_1, entonces (X,τ) es un espacio topológico T_2.
Contraejemplo: El espacio de Sierpinski $X = \{0,1\}$, con $\tau = \{\emptyset,\ \{0\},\ \{0,1\}\ \}$ es T_1, pero no es T_2 ya que $\{0,1\}$ es una vecindad de 1 y contiene al 0.

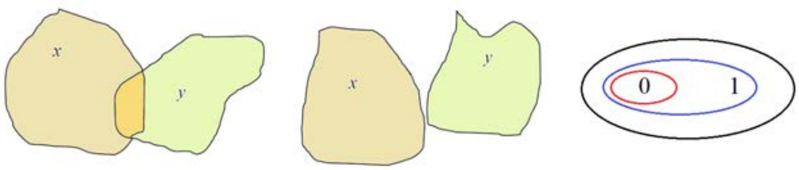


Figura 2: Representación los axiomas de separación T_1, pero no es T_2 y del espacio de Sierpinski

c. Si (X,τ) es un espacio topológico regular, entonces (X,τ) es un espacio topológico T_3.
<u>Contraejemplo</u>: Para $X = \{a,b,c\}$ se considera $\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b,c\}\}$. No es difícil ver que X es un espacio regular. Sin embargo, (X,τ) X no es un espacio T_3, ya que $\{b\}$ y $\{c\}$ no son conjuntos cerrados.

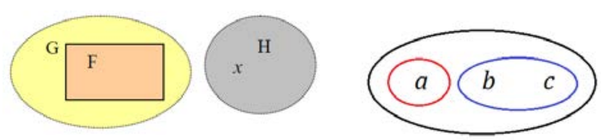
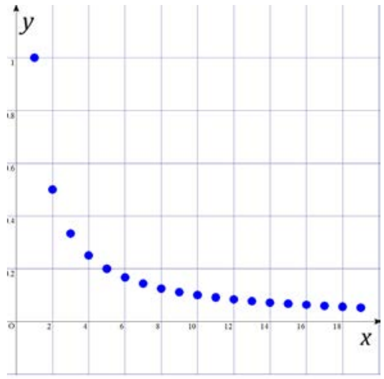


Figura 3: a. Propiedad de un espacio topológico regular. b. Espacio topológico (X,τ).

d. La propiedad de ser una sucesión de Cauchy en espacios métricos es un invariante topológico.
<u>Contraejemplo</u>: Consideremos $X = Y = (0,+\infty)$. La función $f: X \to Y$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es claramente un homeomorfismo de X en Y. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}:\ n \geq 1\right\}$ es una sucesión de Cauchy en X, pero bajo el homeomorfismo f, a esta sucesión le corresponde la sucesión $\{n:\ n \geq 1\}$ la cual no es una sucesión de Cauchy.



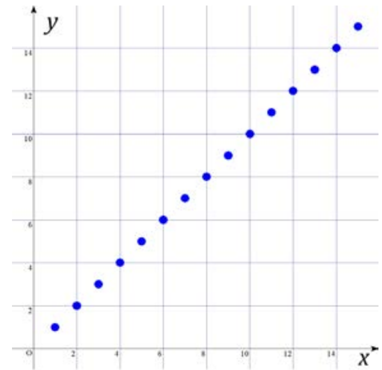


Figura 4: a. Sucesión $\left\{\frac{1}{n}:\ n \geq 1\right\}$. b. Sucesión $\{n:\ n \geq 1\}$.

Es importante resaltar que la construcción de contraejemplos no es una tarea fácil, ya que en asignaturas como Topología, Análisis y Variable Compleja el vislumbrar un contraejemplo no siempre es tan sencillo y requiere de cierto nivel de abstracción debido a que es un proceso que no sigue ninguna regla en particular.

Referencias y Bibliografía

Mederos, O. y Mederos, B. (2009). Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 257–266.

Morales, L., y García, O. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9(35), 161–175

Rosales, A. (2015). Contraejemplos en Matemáticas. Pensamiento Matemático, V(2), 61–78.

El Desarrollo del Pensamiento Variacional

Martha Cecilia **Palafox** Duarte
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
México
martha.palafox@unison.mx
Agustín **Grijalva** Monteverde
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
México
agustin.grijalva@unison.mx
Ramiro **Ávila** Godoy
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
México
ramiro.avila@unison.mx

Resumen

El Cálculo como rama de las matemáticas que estudia el cambio y la variación nos permite contar con herramientas que favorecen la descripción y modelación de fenómenos. En este documento se presentan algunas dificultades relacionadas con el aprendizaje del Cálculo, como la complejidad de sus objetos básicos entre los que aparecen las funciones. Enseguida se presenta una versión simplificada y resumida del desarrollo histórico-epistemológico de los procesos de cambio y cómo estos fueron evolucionando hasta llegar al concepto de función, presentándose cada vez más abstracto, de manera formal y alejándose de las magnitudes variables y sus relaciones, enfocándose en procesos algorítmicos y mecanizados que no dejan ver su carácter dinámico, lo que nos lleva a la importancia que tiene el fomentar o promover el desarrollo del pensamiento variacional.

Palabras clave: cambio y variación; aprendizaje del Cálculo; abstracto; carácter dinámico; pensamiento variacional; magnitudes variables.

Introducción

La educación es una actividad fundamental para el desarrollo de la sociedad. En la actualidad se pone cada vez un mayor énfasis en la necesidad de que los aprendizajes escolares puedan vincularse con situaciones reales en la vida cotidiana. La matemática como ciencia que se interesa por entender el mundo que nos rodea puede contribuir en ello. El Cálculo como rama de las matemáticas que estudia el cambio y la variación nos permite contar con herramientas que favorecen la descripción y modelación de fenómenos naturales, sociales, económicos y otros, para profundizar en las relaciones de las magnitudes variables involucradas. Sin embargo, los cursos tradicionales del Cálculo no fomentan esto a pesar de que debiera ser la parte central en la que se sostenga la enseñanza de esta materia. En cambio, es común que se imparta la asignatura de manera abstracta, enfocándose en algoritmos y mecanizaciones, sin darle importancia al carácter dinámico y el pensamiento variacional que se debe tener al momento de trabajar las situaciones reales y las relaciones de las magnitudes variables involucradas. Por lo anterior, en el presente trabajo se propone otra manera de introducir la relación entre las magnitudes variables por medio del pensamiento variacional.

Algunos investigadores afirman que “el aprendizaje del Cálculo [tiene] que basarse en el estudio del cambio y la acumulación cuantificables y en la relación entre los dos” (Kaput, 1992 citado en Artigue, 1995, p. 119); sin embargo, en los cursos tradicionales del Cálculo se pone énfasis en el estudio de las funciones como relación de pares ordenados que satisfacen ciertas condiciones, presentándola de manera estática, ocultando el papel de la variación y no permitiendo el desarrollo de un potente pensamiento variacional. También, oscureciendo el carácter variacional de la razón instantánea de cambio y de los procesos de acumulación, para dar pie a una preponderancia algorítmica-algebraica en el tratamiento de objetos como la derivada y la integral de una función, haciendo que parezca que lo más importante, por ejemplo, sea que el estudiante pueda decir que la derivada de $f(x) = sen\,x$ es $f'(x) = \cos x$, o que la integral de $f(x) = x^2$ es $\frac{1}{3}x^3 + c$, en lugar de abordar estos elementos mediante una interpretación de fenómenos de variación. Tal como se asegura:

> Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Se fomenta el desarrollo de estrategias y conocimientos procedimentales y memorísticos que, aunque son necesarios, no dejan ver el carácter variacional del Cálculo, y no propician la construcción de una concepción rica en significados. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del Cálculo. (Caballero y Cantoral, 2013)

Dificultades del aprendizaje del Cálculo

En la literatura se pueden encontrar muchas dificultades en el aprendizaje del Cálculo, Artigue las agrupó en tres grandes categorías:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del Cálculo (números reales, sucesiones, funciones)
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos (Artigue, 1995, pág. 107).

Cabe señalar que esta visión de los conceptos básicos del Cálculo no es única pues con anterioridad ya se han mencionado otros fundamentales como la razón instantánea de cambio y la acumulación, los cuales, para comprender estos objetos, en los cursos tradicionales de Cálculo se centra la atención en el estudio de las funciones de forma estática, a través de la definición conjuntista utilizando parejas ordenadas sin presentar el carácter dinámico de los procesos de cambio.

Pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada… saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional. (Vasco, 2010, pág. 5)

Sierpisnka relacionó los actos de entendimiento se encuentran relacionados con algunos obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función, a continuación, se muestran algunos relevantes para este trabajo:

> Un esquema inconsciente del pensamiento: las leyes de la física y las funciones de las matemáticas no tienen nada en común; pertenecen a diferentes dominios (compartimentos) del pensamiento, Sierpinska (1992).

A continuación, se presenta una reseña histórica con algunos acontecimientos importantes de cómo evolucionaron los procesos de cambio a través del tiempo:

Tabla 1
Desarrollo histórico-epistemológico de los procesos de cambio

2000 a.C. – 600 a. C. Babilonios	Se da con el registro de tablas y papiros con información respecto al conocimiento matemático acerca del movimiento de los astros.
Siglo IV-VII Griegos	Existía la idea del cambio y la relación entre magnitudes variables, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables.
Siglo XIV Nicholas Oresme	Se presentaron las primeras representaciones gráficas de magnitudes variables para representar cómo varía la velocidad con respecto al tiempo.
Siglo XVII Galileo Galilei	Con los estudios sobre el movimiento busca relacionar el tiempo con la distancia, la velocidad y la aceleración por medio de la experimentación.
Siglo XVII Fermat y Descartes	Creación de la representación analítica, se determina un método de expresión de las relaciones numéricas por el método de coordenadas.
Siglo XVII-XVIII Newton	Relacionó las variables que denominó fluentes, las cuales describían movimientos continuos en el tiempo y la razón de cambio instantánea (fluxiones).
Siglo XVII-XVIII Leibniz	Utiliza por primera vez la palabra función y la usó para referirse a "cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva".
Siglo XVIII-XX Bernoulli, Cauchy, Dirichlet	Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable "x" si a cada valor de "x" le corresponde un solo y determinado valor de "y". Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Ruíz Higuera (1994); Ugalde (2014) y Vega (2019). Elaboración propia

La definición de función está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, "se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático". (Freudenthal, 1983, p.497) citado en (Ruíz Higuera, 1994, pág. 188)

Pensamiento Variacional

Se requiere tratar al Cálculo con un enfoque más dinámico, menos estático donde se refleje el estudio y comprensión de la variación y el cambio, la relación entre magnitudes variables en contextos reales. Una de las perspectivas de este pensamiento variacional se presenta a continuación:

> Desde mi actual filosofía de las matemáticas y desde mi concepción del mundo del Siglo XXI, pienso que es necesario impulsar decididamente el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas, del pensamiento de las verdades matemáticas eternas e inmutables al pensamiento variacional, y de la idea tradicional de aplicar las matemáticas a la matematización y modelación de la realidad para construir nuevas matemáticas o reconstruir las antiguas. (Vasco, 2010, pág. 1)
>
> El desarrollo del pensamiento variacional ha conducido a la necesidad de concebir los cambios de una magnitud variable con relación a los cambios que sufre otra magnitud variable de la cual depende, esto es "la manera de pensar que exige el Cálculo es un ente complejo constituido por dos componentes: *razonamiento variacional y razonamiento covariacional*" (Thompson y Carlson, 2017).

Razonamiento Variacional

Hablar de razonamiento variacional implica identificar la existencia de propiedades o características en un fenómeno natural que puedan ser medibles y que se encuentren presentes en situaciones de cambio. Estas cualidades se les denomina cantidades o magnitudes y pueden representarse con números.

Al pretender cuantificar una característica se debe tener en cuenta tres consideraciones: percibir al objeto, identificar la característica medible y concebir un método de medición para la característica. Existen tres tipos de magnitudes en una situación de cambio: constante, la cantidad tiene un valor que no varía nunca; parámetro, valor que puede cambiar de una situación a otra, pero que no varía dentro de una misma situación y variable, es una cantidad que varía dentro de una misma situación. (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila y Romero, En prensa)

Razonamiento Covariacional

Es un elemento fundamental dentro del pensamiento variacional ya que se trata de entender las relaciones que las magnitudes variables presentan en los fenómenos físicos, biológicos, económicos y demás que nos ayuda a comprender el mundo que nos rodea. Al trabajar con este tipo de razonamiento se trata de identificar en el fenómeno al menos dos cantidades que están cambiando, las cuales están relacionadas de alguna forma y que los valores numéricos que toman estas varían simultáneamente.

A la capacidad de coordinar el cambio entre dichos valores numéricos de las magnitudes variables se le denomina *razonamiento covariacional* y lo caracterizan como el conjunto de todas "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se considera la forma en que cambian en relación mutua". (Carlson, 2002) Es decir, es imprescindible para el desarrollo del Cálculo ya que implica la relación entre las magnitudes variables que cambian de manera sincrónica.

El pensamiento variacional tiene dos elementos fundamentales: el razonamiento variacional y el covariacional. El razonamiento variacional, en el cual se identifican las magnitudes variables con un carácter dinámico, después se determina cómo están cambiando dichas magnitudes; al comprender el razonamiento variacional se introduce el razonamiento covariacional que son situaciones en las cuales ya se involucran al menos dos variables cuyos valores varían simultáneamente y se encuentran relacionados entre sí, siendo una de estas la que toma los valores arbitrariamente y los valores de la otra variable quedan condicionados a estos, es decir, sólo una variable puede tomar valores libremente y la otra dependerá de estos valores.

Reflexiones

En este trabajo se ha señalado que el cálculo estudia el cambio y la variación para el análisis y modelación de diversos fenómenos que permite el estudio a través de las relaciones de las magnitudes variables, pero los cursos tradicionales de esta asignatura no promueven la esencia dinámica de los procesos de cambio, se centran en algoritmos y mecanizaciones, tratando de comprender los objetos básicos de este mediante el estudio de las funciones de manera estática, con la definición formal conjuntista a través de parejas ordenadas. También, se presentaron algunas dificultades con el aprendizaje del Cálculo y una versión simplificada y resumida del desarrollo histórico-epistemológico de los procesos de cambio que permitieron ver cómo se fue perdiendo su carácter dinámico. Por lo anterior, se propone la realización de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional, centrando la atención en el estudio de las relaciones entre magnitudes variables.

Asimismo, es importante mencionar la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional desde temprana edad, incluyéndolo en los currículos de todos los niveles escolares para fomentar el estudio del cálculo bajo este enfoque lo cual puede proporcionar el análisis, descripción o modelación de fenómenos naturales, físicos, biológicos, económicos, sociales, entre otros, en contextos reales que presentan alguna situación de cambio y se pueda entender el carácter dinámico de la naturaleza y no solamente el uso simbólico, algebraico o mecanizado de los procesos matemáticos. Como se asevera "El estudio y la comprensión de la variación y el cambio cumplen un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional en todos los niveles educativos en la educación matemática escolar" (Posso, 2020, pág. 32).

Referencias y Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y L. Moreno, *Ingeniería Didáctica en Eduación Matemática* (págs. 97-140). Bogota: Grupo Editorial Iberoamerica.

Caballero, P. M., y Cantoral, U. R. (2013). El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional entre profesores de bachillerato. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa*, Vol 26, págs. 1585-1593.

Carlson, M. J. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Jiménez, J. R., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, T. y Romero, C. (En prensa). *Reconceptualización Didáctica del Cálculo.* Hermosillo: En prensa.

Posso, T. J. (2020). *Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática.* Colombia: Universidad del Valle.

Ruíz Higuera, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* Granada: Universida de Granada.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). *Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically.* Tempe, Arizona: Arizona State University.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, Vol. 14 No. 1 págs. 1-48.

Vasco, C. E. (2010). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Docplayer. Recuperado el 9 de enero de 2023 de https://docplayer.es/5486686-El-pensamiento-variacional-y-la-modelacion-matematica.html

Vega, A. S. (2019). *El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

El juego con cartas estructuradas y la enseñanza del sistema binario

Carlos Díaz Serruche
Universidad de Ciencias y Humanidades.
Perú
cardiaz_27@yahoo.es

Resumen

La experiencia pedagógica desarrollada mediante el juego con cartas estructuradas tuvo como objetivo mejorar la comprensión del sistema binario y estimular la motivación de los estudiantes por el estudio de la Matemática. Para ello, se elaboraron las cartas binarias lo cual constituyó el material principal que sirvió de base para el desarrollo de la sesión y las fichas de aprendizaje. Y para conocer la efectividad del juego con cartas binarias en el aprendizaje del sistema binario, se aplicó un test y pos test en cual dio como resultado que el 80% de los estudiantes mejora en su rendimiento académico, mientras que el 100% de los estudiantes se involucran activamente en las actividades, mejorando su atención y motivación. Finalmente, para el desarrollo de esta experiencia pedagógica, se consideró la teoría socio cultural, el rol mediador del docente propuesto por Vigotsky, con la intención de promover el desarrollo potencial de los estudiantes, a partir de su nivel de desarrollo real.

Palabras clave: Juegos matemáticos; mediación docente; Enseñanza de la Matemática; Sistema binario; Aprendizaje de la Matemática.

Introducción

Quién no ha jugado en su vida, sin duda alguna todos hemos jugado y aún jugamos cuando tenemos la oportunidad de hacerlo, jugar nos permite interactuar con los demás, compartir nuestras emociones, integrarnos a una colectividad, reconocer sus reglas y aceptarlas, pero sobre todo tenemos la posibilidad de aprender. Del juego se ha escrito bastante, es más se le reconoce como una actividad que forma parte de la historia de cada mujer u hombre, en otras palabras, el juego es parte de la historia de la humanidad.

Con el desarrollo social, el juego también se ha diversificado, en tal sentido, el concepto de juego es polisémico y su realización tiene diferentes finalidades y entre ellas lo que más reconoce son las naturaleza recreativas y competitivas, y las que pasan un tanto desapercibidas son las de carácter educativa, y son justamente estas últimas a las que Guzmán (1989), citando a Garner menciona.

> Con seguridad el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante, un puzzle, un truco mágico, una paradoja, un modelo o cualquier otra de entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienden a evitar por que parecen frívolas. (Carnaval matemático prologo).

El juego ya es considerado una estrategia didáctica para introducir en el estudio de un tópico matemático a los estudiantes, teniendo en cuenta que la función principal del maestro es mediar entre la cultura y los sujetos que aprenden, de esta forma se moviliza, motiva y se logran mejores aprendizajes en los estudiantes.

El juego

Desde el enfoque socio cultural, el juego es la expresión de la imaginación, de los deseos, tendencias, necesidades, impulsos, intereses, etc, producto de la interacción de los niños con los adultos, y por medio del juego, los niños asumen diferentes roles, gracias a la libertad que les da su imaginación. Por tanto, el rasgo esencial de la actividad del juego es la imaginación y la creatividad, la participación en las actividades del juego aun siendo imaginarias está sujeto a reglas, para Vigotsky (1988). No existen juegos absolutamente libres; es más, los niños en el juego aceptan voluntariamente las reglas.

Para el enfoque cognitivista, el juego es una manifestación del nivel cognitivo de los niños, que se forma a partir de la interacción con el medio, a través de los procesos de asimilación y acomodación. La estructura del juego evoluciona paralelamente a las fases de evolución por las que atraviesa la inteligencia del ser humano, el juego no es más que una parte de un proceso mental incluido dentro de los componentes de la propia inteligencia del ser humano.
Según Piaget (1959). En desarrollo evolutivo, los juegos simples se corresponden con el nivel intelectual sensorio motor que va de 0 a 2 años de edad, los juegos representativos con el nivel de inteligencia de transición representativa que va de los 2 a 7 años; los juegos reglados con el nivel de inteligencia reflexiva que va de 7 a los 12 años, finalmente, los juegos de alto nivel de formalización o demanda cognitiva, con el nivel de inteligencia operaciones formales que va de los 12 años a más.

El juego y el desarrollo del pensamiento lógico

En los años 70, ya se consideraba a los juegos exploratorios manipulativos como una de las primeras estrategias en la enseñanza aprendizaje de la matemática, toda vez, que los niños de forma natural tienden a manipular los objetos tal como lo menciona Dienes (1971) “ A los niños les gusta el tacto con los objetos; les gusta deslizar sus dedos sobre las superficies, reunir las cosas y separarlas” (p.3).

A partir de este juego exploratorio, los niños reconocen las propiedades básicas del objeto, como la dureza de su estructura, la rugosidad de la superficie, el peso y el tamaño, la forma, el color, entre otros. Seguidamente se desarrollan los juegos representativos, estos juegos se estructuran teniendo como base la manipulación de los objetos, pero con el agregado del componente de la imaginación que se torna fundamental, por ello, cuando veamos a un niño meterse dentro de una caja de cartón, no debe ser un hecho sin importancia, ya que para el niño es un evento significativo, la caja de cartón es para él, una nave espacial, un submarino, un automóvil, una cueva que está explorando, etc. Pero no solo es imaginación por imaginación, todo lo contrario están fundadas en sus experiencias y conocimientos adquiridos y sobre todo tienen como base las propiedades físicas que ha descubierto de los objetos que manipula, cuando los niños juegan ordenan los objetos con sentido lógico, que a simple vista no tiene sentido, pero si le preguntas comprenderás que ese pedazo de madera en realidad hace la función del televisor en la sala, y la hoja de papel la alfombra, y demás sustentan porque no podría ser al revés, ya que diferencias un sólido de una figura plana.

Los juegos reglados, están en íntima relación con los juegos representativos ya que surgen en el proceso de reconocer propiedades y funciones de los objetos, estas propiedades y funciones en realidad son regularidades que el niño reconoce y utiliza para organizar un espacio y dar funcionalidad a los objetos, estas regularidades en el juego, se traducen en reglas, tal es así, que si la caja es un submarino, la caja tendrá agujeros que representen las ventanas, ya que por donde ingresa en niño es la puerta. si el papel es una alfombra tendrá una ubicación y desde luego no podría ubicarse en cualquier lugar, en otras palabras, reconocen las reglas y las utilizan, en esta etapa la idea de colección o magnitud ya forma parte de las condiciones o reglas a tener en cuenta en el juego.

Los juegos en la enseñanza de la matemática

El aprendizaje de la matemática como todos sabemos, requiere de la atención, razonamiento y ejercitación, pero la atención está asociada a la motivación, sin motivación el nivel de atención del estudiante será el mínimo necesario, así mismo, el razonamiento es metódico que puede ir de lo particular a lo general o de lo general a lo particular, pero este razonamiento solo tiene sentido y se forma en el pensamiento si hay la atención adecuada; por otro lado, la ejercitación implica reconocer y aplicar las relaciones entre magnitudes, identificar el núcleo de patrones, los algoritmos de las operaciones, propiedades, entre otros, pero la aplicación de todos estos elementos requiere razonamientos inductivos, deductivos y heurísticos. Como podemos notar todo empieza con la atención.

Es en este contexto que los juegos, despiertan interés, motivación, capta la atención de los estudiantes, tal como lo menciona Guzmán (1989). “El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado también jugado y contemplando su juego y su ciencia. ¿Por qué no tratar de aprenderlas y comunicarlas a través del juego y de la belleza?”.

Queda claro que el juego en la matemática tiene por función despertar el interés del estudiante, pero teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática no puede quedarse solo en lo lúdico del jugo, es necesario que el juego sirva para analizar y desarrollar también el campo temático, lo cual requiere el dominio disciplinar del maestro. Tal como lo propone Dienes (1971) No debe moverse un bloque, quien no este saturado de lógica simbólica. No debe meterse en el maremágnum de los juegos dienesianos quien no conozca a fondo el movimiento de la forma de la matemática moderna.

Mediación docente

La mediación es la función principal del docente, en el proceso enseñanza aprendizaje, entendiendo la mediación como la intervención, apoyo, guía pedagógica que realiza el docente al estudiante en el desarrollo de diferentes tareas, con la finalidad que el estudiante en el futuro próximo realice dichas tareas de forma independiente.

> La mediación, como proceso para lograr el avance del desarrollo, actúan como apoyo, interponiéndose entre el niño(a) y su entorno para ayudarles a organizar y a ampliar su sistema de pensamiento. De esta manera se promueve la aplicación de las nuevas capacidades a los problemas que se le presenten. Si los estudiantes aún no han adquirido las capacidades para organizar lo que perciben, el mediador le ayuda a resolver la actividad que se le plantea, tomando en cuenta sus propias competencias intelectuales (Vigotsky. 1997).

Metodología

La experiencia pedagógica se desarrolló en 3 sesiones de aprendizaje, en la primera sesión se presentó las cartas binarias y se realizó varios juegos, primero dirigido por el profesor y luego por grupos dirigidos por estudiantes, a partir de esta experiencia se explicó matemáticamente como están estructuradas las cartas. La segunda sesión analizamos el sistema binario y por grupos elaboraron sus propias cartas binarias, la tercera sesión desarrollaron problemas, ejercicios y la evaluación correspondiente.

A partir de lo analizado veamos cómo se desarrollaría un juego matemático.

Desarrollo general de la actividad

Presentamos a los estudiantes el juego con caratas binarias, al desarrollar un juego, el 100% de los estudiantes se motiva y presta atención, se interesan por las reglas del juego:

El profesor les presenta a los estudiantes las cartas estructuradas con imágenes numeradas y las reglas del juego.

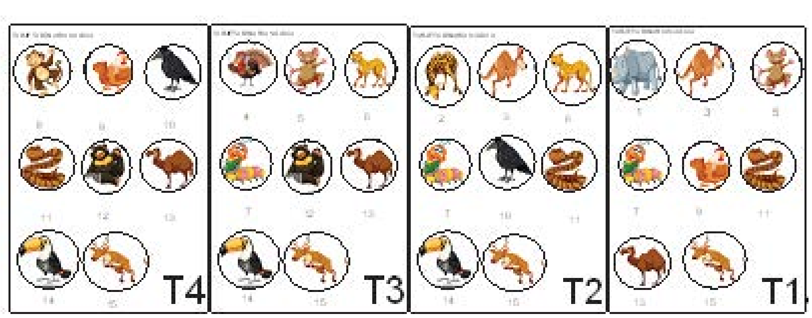


Figura 1. Imagen de las tarjetas estructuradas.

Reglas del juego;

- Los estudiantes tienen que elegir una imagen de una las cartas mostradas, y luego lo registran en una hoja y lo muestran a sus compañeros pero no al profesor. (supongamos que eligió el oso).

- El profesor, pide a los estudiantes del aula que respondan las siguientes preguntas.
  ¿la imagen que eligió está en la tarjeta 4?, respuesta de los estudiantes es : si.
  ¿la imagen que eligió está en la tarjeta 3?, respuesta de los estudiantes es : si.
  ¿la imagen que eligió está en la tarjeta 2?, respuesta de los estudiantes es : no.
  ¿la imagen que eligió está en la tarjeta 2?, respuesta de los estudiantes es : no.

- El profesor ordena las respuestas de los estudiantes;

Respuestas	Si	Si	No	No
Equivalencia en el sistema binario	1	1	0	0

- El profesor concluye que la imagen que eligió es estudiante es la figura correspondiente al número 12 (el oso). Este proceso se repite otras veces, para que los estudiantes comprueben que se utiliza un método.

- Frente a ello, los estudiantes preguntan cómo se hizo para conocer la imagen que eligió. Se explica que $1100_{(2)}$ esta en el sistema binario, que significa que puede convertirse al sistema decimal: $1100_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0\ .2^0 = 8 + 4 + 0 + 0 = 12$

- De esta forma se puede conocer cualquier imagen que elijan, siempre que respondan si la imagen está o no, en cada una de las tarjetas mostradas, para facilitar el cálculo de la descomposición polinómica de los números en base 2.
- $1111_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$
- $1111_{(2)} = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
- $1111_{(2)} = 8 + 4 + 2 + 1 \rightarrow 1_{(2)} = 1;\quad 10_{(2)} = 2;\quad 100_{(2)} = 4;\quad 1000_{(2)} = 8$

Con esta información podemos determinar la equivalencia de cualquier número binario al sistema decimal.
- $1001_{(2)} = 8 + 1 = 9$
- $0101_{(2)} = 4 + 1 = 5$
- $1101_{(2)} = 8 + 4 + 1 = 13$
- $1001_{(2)} = 8 + 1 = 9$

A partir de ello, podemos explicarles cómo se construye las tarjetas estructuradas.

Tabla 1
Composición de las tarjetas estructuradas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Números decimales</th><th colspan="4">Equivalencias de los números decimales, en el sistema binario.</th><th>Composición de las tarjetas</th></tr>
<tr><th>Tarjeta 4</th><th>Tarjeta 3</th><th>Tarjeta 2</th><th>Tarjeta 1</th><td rowspan="16">Para la composición de las tarjetas, se consideran los 1 de la columna:

Ejemplo
Tarjeta 1:
El primer 1 le corresponde a 1, el siguiente le corresponde 3 y el siguiente le corresponde 5.

En T1, está conformado por
1,3,5,7,9,11,13 y 15.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente se pasó a formalizar conceptos y propiedades del eje temático del sistema binario, evidenciado gratamente la predisposición de los estudiantes y mayor claridad en el manejo de algoritmos de cálculo, evidenciándose una mejora significativa del 80% de los estudiantes en el desarrollo de los test de evaluación.

Las actividades pueden diversificarse, pero lo importante que reconozcan a los números binarios y su equivalencia en el sistema decimal.

Conclusiones

- La presentación de los números binarios mediante el juego de cartas estructuradas, genera expectativa y motivación en los estudiantes desde el primer momento y se mantiene durante la clase.

- Mediante el juego con cartas estructuradas, se logra la participación del 100% de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas de forma individual y grupal, a diferencia de cuando solo se desarrolla la clase sobre sistema binario de forma convencional.

- El 80% de los estudiantes mejorar su desempeño académico en el manejo del sistema binario, mediante el juego con cartas estructuradas.

Referencias y bibliografía

Dienes, Z.(1971). *El aprendizaje de la matemática, un estudio experimental* (1era ed.). Estrada.

Guzman, M. (1989). Juegos y matemáticas. Barcelona. SUMA, 4(70), 61-64. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/4/061-064.pdf

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño*. F.C.E.

Vigotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (1er ed.). Grijalbo.

Vigotsky, L. (1997). *El aprendizaje escolar (*2da ed.). Aique.

El juego para la enseñanza de la geometría euclidiana (del punto al icosaedro)

David Saúl **Guadalupe** Zulbarán
Universidad Cuauhtémoc
México
david.guadalupe@ucq.edu.mx
Ana Karen **Robles** Garza
Prim. Fray Martín de Altamirano
México
ana_karenrg95@hotmail.com

Resumen

El objetivo del taller es analizar y proponer en los asistentes, principalmente en docentes de primaria y secundaria, así como de formación inicial, una forma didáctica y de implementación para la enseñanza de aprendizaje de los temas: punto, línea, tipos de línea, conformación de figuras geométricas regulares y sus características, y conformación de figuras tridimensionales (pirámide, cubo, dodecaedro e icosaedro). Tomando como base el punto y su desarrollo hasta llegar al dodecaedro, de tal manera que el recurso didáctico presentado sea para el estudiante atractivo, agradable y novedoso, sin la necesidad de la utilización de medios tecnológicos.

El taller permitirá a los asistentes conocer una forma didáctica, diferente y analógica de la enseñanza del punto, línea, tipos de línea, conformación de polígonos regulares y sus características, así como su conformación de figuras tridimensionales (pirámide, cubo, dodecaedro).

Palabras clave: Educación Matemática; Recurso Didáctico; Polígonos, Figuras planas, Tridimensionalidad, Materiales concretos, Aprendizaje significativo, desarrollo de habilidades manuales, Geometría.

Marco teórico

El presente documento tiene la finalidad de explicar la importancia que proporciona el uso de recursos didácticos concretos en la enseñanza de la geometría euclidiana. Se menciona en la investigación "La geometría, su enseñanza y su aprendizaje (2012). La geometría contribuye a resolver problemas prácticos como la medición de longitudes, áreas y volúmenes, o el trazo de linderos en la tierra. Además, desempeña un papel instrumental para el desarrollo de la arquitectura, la geografía y la astronomía.

En relación con el taller a desarrollar, Freudenthal (1973, citado por Villarroya, 1994), citando a J. J. Sylvester (s.f.), decía: La Geometría sólo puede tener sentido si explota su relación con el espacio vivenciado […] La Geometría es una de las mejores oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad. Es una ocasión única para hacer descubrimientos. Los descubrimientos realizados por uno mismo, con las propias manos y con los propios ojos, son más convincentes y sorprendentes. Hasta que de alguna forma se puede prescindir de ellas, las figuras espaciales son una guía indispensable para la investigación y el descubrimiento (p. 95).

Las premisas anteriores sustentan a la investigación Sentido numérico: más allá del estudio formal de los números (2017) donde se plantea la necesidad urgente de diseñar medios efectivos para la enseñanza de la matemática. Las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la teoría excesiva por la que se llegan a la falta de comprensión, se debe hacer un proceso practico en donde los problemas matemáticos sean la forma en la que el alumno adquiera la integración de nuevos conocimientos que le ayuden en su vida cotidiana.

Butterworth (1999) y Dehaene (1997), citados en Gutiérrez Ayala & Becorral Hinostroza, (2012) sugiere a los enseñantes de la Matemática desarrollar el razonamiento, trabajar con materiales concretos y dinámicos para interactuar con el pensamiento del alumno. Por ello, el material principal en la secuencia son los palitos de madera, ya que es un material que está al alcance de todos. Este recurso didáctico ayuda a los estudiantes a comprender los conceptos y desarrollar habilidades.

El juego puede ser un recurso didáctico útil para enseñar o reforzar conocimientos y destrezas. Ayuda a aprender más rápidamente, a recordar más información, a desarrollar habilidades y a aplicar conceptos nuevos. Esto se debe a que los juegos son una forma divertida de interactuar con el contenido, lo que puede ayudar a los estudiantes a involucrarse mejor y a trabajar juntos. De acuerdo con Boretto, Ferri, & Maccario, (2017), juego es una forma divertida de pensar y sentir; ayuda a las personas a desarrollar su pensamiento, les da la oportunidad de explorar, descubrir, inventar y aprender. Las actividades lúdicas permiten que el alumno integre la información nueva de una manera más satisfactoria, porque son en ellas en las que pueden comprender socializando y comunicando sus ideas.

El aprendizaje significativo y el juego mantienen una estrecha relación. Sirve a los estudiantes a relacionar los conceptos y a recordar la información de una manera significativa, lo que les permite utilizar la información para situaciones nuevas. Como menciona González de la Roca y otros, (2021) las experiencias significativas son esenciales para garantizar un aprendizaje profundo y duradero. El proceso de reconstrucción de los conocimientos ya existentes con los que se está adquiriendo, se consigue mejor mediante el juego. Esto ayuda a "conectar" las redes neuronales involucradas en el pensamiento analógico, la memoria, la metacognición, la motivación y la recompensa, lo que contribuye a mejorar el aprendizaje (Liu, y otros, 2017). Además, la dinámica promueve el trabajo en equipo y la colaboración, lo que fomenta el aprendizaje significativo a través de la discusión y el diálogo.

La forma didáctica a emplear será el juego para generar un aprendizaje significativo. El juego pone en juego funciones cognitivas y afectivas, juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento, permite al ser explorar, crear, conocer y aprender Boretto, Ferri, & Maccario, (2017). Las actividades lúdicas permiten que el alumno integre la información nueva de una manera más satisfactoria, porque son en ellas en las que pueden comprender socializando y comunicando sus ideas.

Utilizando material analógico, de fácil acceso para una cantidad infinita de estudiantes, que no siempre tienen acceso a materiales digitales, así mismo fomentando la exploración por medio del juego y el aprendizaje propia en el estudiante. Se mostrará la evolución del punto a través de diversas figuras hasta llegar a la conformación del dodecaedro, por medio de palitos de paleta, tapas, hilos y cintas de colores con pegamento.

Propuesta didáctica

El proceso a seguir en el taller consta de 6 momentos, los cuales se van entrelazando con el fin de generar en el estudiante un aprendizaje significativo por medio del juego y la creación de diversas figuras geométricas, a continuación, se presenta una tabla con los diferentes momentos que se presentan en la clase.

Momento	Objetivo	Descripción
1. Punto	Comprender el concepto de punto, siendo este un elemento abstracto.	En medio del pizarrón se dibuja un punto y se hace la pregunta ¿Qué es?, posteriormente se presenta una ficha de madera y se realiza nuevamente la pregunta, después se explica la importancia del punto y por medio de un video el cual es un fragmento de la película “Intensamente” se explica cómo es que el punto es un elemento abstracto, el cual no se puede tocar.
2. Líneas	Qué el alumno estudie la conformación de una línea, sus tipos y movimientos	Por medio de la colocación de y sucesión de diferentes puntos de madera, se conforma una línea la cual se explica de acuerdo con la RAE su conceptualización, posteriormente se menciona que existen diferentes tipos de línea y sus características.
3. Líneas	Identificación de líneas en el contexto cercano	Al estudiante se le menciona que nos encontramos rodeados de por líneas, por lo que se solicita buscar en su entorno líneas rectas, curvas y secantes. Así mismo se pide que en conjunto con sus compañeros y utilizando su cuerpo, ejemplifiquen los diferentes tipos de líneas y sus características. Ver fotografía 1.1
4. Secuencias	El alumno una vez identificadas las líneas y sus características, aprenderá cómo es que estás pueden realizar sucesiones geométricas y numéricas	Una vez que el alumno comprende los conceptos de línea, se explica el concepto de sucesión y cómo es que existen sucesión de forma natural a nuestro alrededor, un ejemplo, es la secuencia Fibonacci. La actividad consta de dos partes, la primera por medio de palitos de madera donde se forma secuencias con los diferentes tipos de línea y la segunda, con cinta se realiza sobre el piso la representación geométrica de la secuencia Fibonacci. Ver imagen 1.2 y 1.3

5. Polígonos regulares	Identificar los polígonos regulares, conformación, análisis de las propiedades y relaciones geométricas	Con base a las secuencias, el alumno se da cuenta que, al cruzar diferentes elementos lineales, se empiezan a conformar diferentes tipos de figuras, por lo que se empiezan a analizar los polígonos regulares, por medio de la conformación hecha con los palitos de madera antes utilizados, con las cuales posteriormente se generarán figuras como mándalas, con el objetivo de reforzar el tema anterior de secuencias. Ver imagen 1.4, 1.5, 1.6 y 1.7
6. Figuras 3D	Demostrar la relación que existe entre las figuras 2D y 3D	Con ayuda de las figuras anteriormente realizadas (triangulo, cuadrado, pentágono, etc.) Se explica como cada una ellas ayudan a la conformación de figuras en 3D, así mismo, se explican sus características principales. Ver imagen 1.8 y 1.9

Conclusión

La geometría está inmersa en todo lo que nos rodea y es algo de la vida cotidiana, podemos encontrar líneas, secuencias y figuras en casi todo. Contextualizar este aprendizaje favorece a la adquisición de los conocimientos nuevos con los previos y al ser los estudiantes los protagonistas de ello buscando y creando secuencias y figuras permite generar un aprendizaje significativo.

Con la secuencia de actividades expuestas en el taller se demuestra de forma didáctica y promoviendo un aprendizaje significativo, la apropiación de los conceptos de punto y línea, formando relaciones entre ellas llegando a formar figuras geométricas y figuras tridimensionales, que permiten al alumno el estudio, análisis y aplicación dentro de su contexto social.

Además, es una secuencia que se puede aplicar desde nivel inicial hasta nivel medio superior ya que permite que el estudiante explore y aprenda jugando, es por ello que si el docente acompaña o se estimulará el uso de juegos didácticos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje es posible intervenir de manera oportuna, en los conocimientos a adquirir por el estudiante.

Referencias y bibliografía

Boretto, M., Ferri, M. C., & Maccario, G. B. (2017). *Juego y neurociencia en el nivel inicial, una intervención posible desde la psicopedagogía. ¿Cuánto se estimulan los Dispositivos Básicos de Aprendizaje al momento de jugar en el jardín de infantes?* VII Congreso Nacional de Educación y Salud : lo lúdico-expresivo en el marco de las intervenciones, (págs. 35-38). Córdoba.

Camargo, L., Acosta, M. (2012). *La geometría, su enseñanza y su aprendizaje*. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. Retrieved March 07, 2022, from http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es.

González de la Roca, C., Chocoj González, M., Guzmán Pérez, M., Alfaro Méndez, I., & Ríos Ramírez, A. (2021). *Neurociencia: el juego como conector del aprendizaje*. Revista Académica CUNZAC 4(1), 47-51.

Gutiérrez Ayala, D., & Becorral Hinostroza, A. (2012). *Aplicación de la neurociencia en el aprendizaje de las figuras geométricas en el plano cartesiano.* Huacho, Perú: Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión.

Hernández, O., López, J., Quintero, A., y Velázquez, A. (2017) *Sentido numérico: más allá del estudio formal de los números*. *Disponible en Researchgate*. pp 1. Rescatado de: https://www.researchgate.net/publication/315792219

Liu, C., Solis, S., Jensen, H., Hopkins, E., Neale, D., Zosh, J., y otros. (2017). *La neurociencia y el aprendizaje a través del juego: un resumen de la evidencia (reporte técnico)*. The LEGO Foundation, DK.

Modesto, A. (1998). *Revista de Psicodidáctica, volumen 5, 107-114*, https://www.redalyc.org/pdf/175/17517803011.pdf

Villarroel, S., Sgreccia, N. (2011) *Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen* 78, 73-94.https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/03/DOC1-didactica-geometria.pdf

Figuras

Imagen 1.1 identificación de líneas en el entorno

Imagen 1.2 Sucesión de líneas

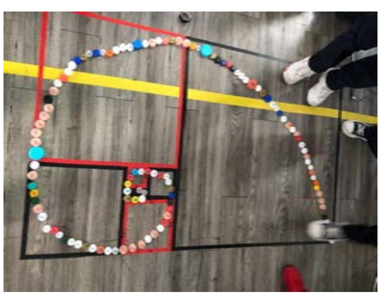


Imagen 1.3 Secuencia Fibonacci

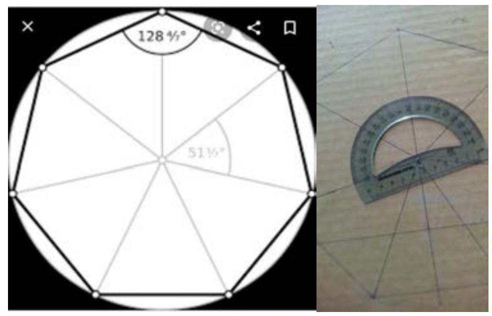


Imagen 1.4 Conformación de figuras mediante ángulos

Imagen 1.5 Conformación de figuras por medio de palitos

Imagen 1.6 Figuras realizadas

Imagen 1.7 Mándalas realizados mediante las figuras

Imagen 1.8 Realización de figuras tridimensionales

Imagen 1.9 Producto final

Enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la Ingeniería Naval

Ana Maria **Torres** Blanco
Doctorado en Educación Matemática,
Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla y Universidad Antonio Nariño
Colombia
atorres16@uan.edu.co
Osvaldo **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co
Mitchel Alexander **Girón** Palacio
Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla y Universidad Antonio Nariño
Colombia
Mitchel.giron@enap.edu.co

Resumen

La enseñanza aprendizaje de las matemáticas en las carreras de ingeniería constituye parte fundamental de la formación y desempeño profesional del Ingeniero, en particular en Ingeniera Naval. Esta investigación busca implementar un enfoque metodológico de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en contextos navales de la Estabilidad del Buque. Este proceso se desarrolla a partir de una actividad que tiene por objetivo: modelar sistemas físicos a través del manejo de datos, formulación matemática y variables establecidas de modo empírico partiendo de las bases adquiridas durante su formación, relacionados con el movimiento unidimensional de un buque en el laboratorio "Canal de Pruebas hidrodinámicas de Modelos" de la Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla (ENAP). Como hallazgos principales de la investigación se resalta la evidencia de avances en la comprensión de conceptos matemáticos, por medio de la argumentación e interpretación de modelos matemáticos obtenidos a partir de datos experimentales de contextos navales.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Constructivismo; Educación matemática realista; Resolución de problemas; Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla; Colombia.

Introducción

El proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática tributa a una adecuada formación y desempeño profesional del ingeniero, en particular del Ingeniero Naval. Esto permite implementar un enfoque metodológico de enseñanza en las asignaturas del área de matemática en el contexto de las carreras de ingeniería para contribuir al aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y sus aplicaciones ha sido abordada por diferentes investigadores en reuniones y congresos, en particular se destacan las investigaciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), entre otros. En estas reuniones se ofrecen cursos, conferencias y ponencias que reflejan las dificultades y avances de la temática referida en la Educación Matemática Universitaria.

Diferentes investigadores han realizado aportes a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática en las carreras de Ingeniería Naval. Akapos, (2016) investiga la relevancia (valor de utilidad) de las matemáticas en las tendencias cambiantes de los negocios, educación y capacitación marítima. Donde aborda los conceptos de matemáticas industrial, en los negocios y en la industria marítima. También, precisa que las matemáticas deben reflejarse en los currículos de las universidades, de tal forma que respondan a las exigencias de los desarrollos tecnológicos actuales.

Además, se puede destacar el trabajo de Vidal, Muriel, Alonso, Casas, Rodríguez, Ruíz, y Díaz (2014) donde desarrollan talleres para mejorar la habilidad lógica y la capacidad de análisis en la comprensión de conceptos de Teoría del Buque a partir de la experimentación de fenómenos físicos y la conceptualización matemática de estos. Para el desarrollo del trabajo los autores consideran importante tener una base física y matemática, la cual permite desarrollar habilidades de abstracción y de formalismos, lo que ayuda al estudiante a construir conocimientos específicos fundamentales para el desarrollo de software, manejo de equipos y resolución de problemas específicos de la Ingeniería Naval.

En este mismo sentido, Stanivuk, Galić, & Bojanić, (2017) en su investigación, tienen como objetivo examinar de cerca el desarrollo histórico de las matemáticas en los asuntos marítimos, y mostrar cómo el conocimiento de las matemáticas puede convertirse en una herramienta poderosa en manos de un marino.

En cada una de las investigaciones mencionadas anteriormente, también se encontraron algunas debilidades en la enseñanza de las matemáticas, tales como: escaso nivel de aplicaciones específicas del contexto naval en el proceso de enseñanza aprendizaje, el alto índice de prácticas pedagógicas tradicional, entre otras.

De acuerdo con la revisión de la literatura, se plantean las siguientes oportunidades de mejoras con respecto a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Naval en la ENAP.

- Base conceptual matemática de los estudiantes al cursar las asignaturas que involucran la teoría del buque.
- Habilidades de representación y visualización para la resolución de problemas en el contexto de la ingeniería naval.
- Habilidades para la comprensión de los procesos lógicos de las simulaciones.
- Interés y motivación de los estudiantes por los contenidos matemáticos universitarios.

Los resultados de las valoraciones anteriores y del análisis epistemológico inicial realizado inciden en los logros académicos en matemáticas de los estudiantes de la ENAP, lo cual conlleva a que se plantee el siguiente objetivo: modelar sistemas físicos a través del manejo de datos, la formulación matemática y variables establecidas de modo empírico partiendo de las bases adquiridas durante su formación, relacionados con el movimiento unidimensional de un buque en el laboratorio "Canal de Pruebas hidrodinámicas de Modelos" de la ENAP.

Marco teórico

La presente investigación asume la Educación Matemática Realista (EMR) de (Freudental,1964), y sus fundamentos epistemológicos (matematización, la reinvención guiada y la fenomenología didáctica). Además, la Resolución de Problemas de (Polya, 1965), y sus fases de Orientación hacia el problema, Trabajo en el problema, Solución del problema, Evaluación de la solución y de la vía. También se considera la visualización matemática de Arcavi (2003) y la modelación matemática desde las perspectivas realistas y epistemológica (Abassian, Bush, and Bostic, 2020). Estos referentes teóricos se integran para lograr un robusto proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la inclusión de contextos realistas navales relacionados con la Estabilidad del Buque.

Metodología

Esta investigación se sustenta en un paradigma de investigación de tipo cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo y un diseño de investigación acción. El enfoque de investigación cualitativo "… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados" (Sampieri, 2014, p.358). Además, cabe destacar que "… el proceso cualitativo no es lineal, sino iterativo o recurrente; las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente" (Sampieri, 2014, p.358).

Por otra parte, Minerva (2006) plantea que el diseño de investigación acción es un "… proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría" (Minerva, 2006, p.116).

Con este enfoque se busca investigar el proceso de enseñanza aprendizaje de temas de cálculo diferencial, calculo integral, calculo vectorial, ecuaciones diferenciales, entre otros, base fundamental para un buen desempeño de los estudiantes en la asignatura Estabilidad del Buque en la ENAP.

La población la constituyen estudiantes de Ciencias Navales e Ingeniería Naval de la ENAP y la unidad de análisis formada por 22 cadetes del curso 2.1 C de cálculo integral.

A continuación, se presenta la propuesta de actividad:

Actividad 1. Análisis de movimiento rectilíneo variado mediante sumas de Riemann y cálculo de integrales. Análisis aceleración contra tiempo.

Objetivo: modelar sistemas físicos a través del manejo de datos, la formulación matemática y variables establecidas de modo empírico partiendo de las bases adquiridas durante su formación, relacionados con el movimiento unidimensional de un buque en el laboratorio "Canal de Pruebas hidrodinámicas de Modelos" de la ENAP.

Los siguientes problemas se resuelven con base en los datos obtenidos por experimentación relacionado con el movimiento unidimensional de un buque en el laboratorio. Cada grupo debe trabajar con la velocidad máxima alcanzada por la embarcación. A continuación, escriba dicha velocidad.

VELOCIDAD LIMITE ______

Problema 1. ¿Cuál es el mejor ajuste de los datos aceleración contra tiempo, explore en GeoGebra y seleccione el ajuste que mejor explique los datos? Escribir la función de ajuste y su gráfica.

Problema 2. Calcule la integral indefinida sin el uso de dispositivos electrónicos de la función de ajuste de los datos. ¿Que representa el resultado de esta integral?

Problema 3. Encuentre el valor de la constante de integración del punto anterior tomando como valor inicial el primer tiempo y la primera velocidad de la base de datos. Escriba la expresión del resultado de la integral indefinida con el valor de la constante de integración.

Problema 4. Evalué la función del punto anterior con el último tiempo de la base de datos en la hoja de velocidad y compáralo con el valor empírico correspondiente. ¿Qué se puede decir con respecto a esta comparación?

A continuación, se realiza el análisis de la actividad 1 a partir del desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de esta, los logros y las dificultades.

El desarrollo de la actividad inicia a partir de la realización de preguntas orientadoras por parte de la docente. Esto con el fin de activar conocimientos previos, llevando a los estudiantes a establecer la relación entre derivación e integración por medio de la visualización de problemas relacionados. Se lleva a cabo la resolución de problemas de modelación matemática afines con las aplicaciones en la física y se motiva a los grupos avanzar en el desarrollo de la actividad 1 (ver Figura 1).

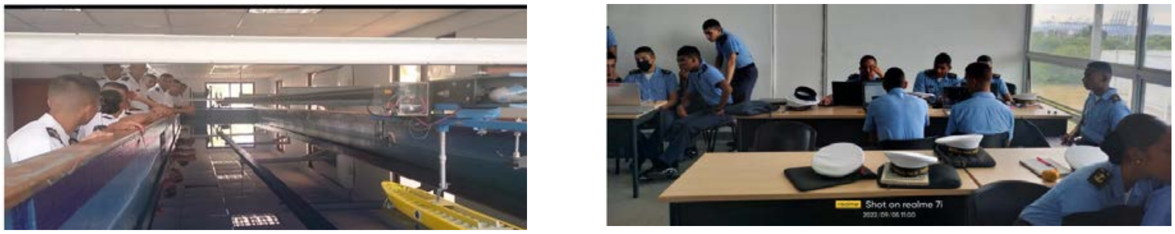


Figura 1. Estudiantes del curso 2.1C de la ENAP a la izquierda en el laboratorio del "Canal de Pruebas hidrodinámicas de Modelos" de la ENAP, y a la derecha en el desarrollo de la actividad1 en grupos en el aula.

Es importante mencionar, que el desarrollo de la actividad se hace con acompañamiento de la docente, quien orienta a los estudiantes cuando se les presenta una dificultad atendiendo a los principios de la EMR y la modelación matemática.

Se evidencia dentro del proceso evaluativo comprensión en la implementación y manejo del software GeoGebra principalmente en el problema 1 de la actividad 1, donde se requiere el uso de la modelación matemática. El 100% de los estudiantes puede establecer el modelo matemático que ajusta los datos aceleración contra tiempo de los datos experimentales. Los estudiantes identifican la función de ajuste que modela la aceleración de la embarcación (ver Figuras 2 y 3).

$f(x) = \text{AjustePolinómico}(l1, 9)$

$\rightarrow\ 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0.1x^3 + 3.97x^2 - 62.82x + 119.72$

Figura 2. Ajuste polinómico dado por el grupo de Estudiantes del curso 2.1C de la ENAP que trabajo con la velocidad máxima 0,2 m/s.
Fuente: elaboración propia

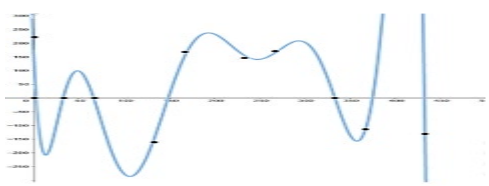


Figura 3. Grafica ajuste polinómico dado por el grupo de Estudiantes del curso 2.1C de la ENAP que trabajo con la velocidad máxima 0,2 m/s.
Fuente: elaboración propia

Todos los grupos de estudiantes logran resolver el problema 2 de la actividad correspondiente al cálculo de la integral de la función de ajuste de los datos experimentales a partir de las técnicas de integración discutidas en clase.

Del mismo modo, el 75% de los grupos logran establecer la constante de integración de acuerdo con las condiciones iniciales asumidos en cada caso. Pero, se les dificulta dar la interpretación de los resultados, y por ende establecer la integral de la función aceleración como el resultado de la función velocidad de la embarcación.

Se propició el escenario de contrastar ideas para llegar a la resolución de los problemas planteados. Además, los estudiantes en varias ocasiones abordan a la profesora con cuestionamientos sobre el desarrollo de la actividad, que dan cuenta de su interés por comprender y presentar una buena actividad.

Logros

- A partir del desarrollo de la actividad, los estudiantes comprenden la aplicabilidad del contenido matemático de derivadas y antiderivadas producto de una situación real.
- Se puede evidenciar, en relación con la fenomenología didáctica tomada del marco teórico concerniente a la EMR, la modelación matemática, la visualización matemática, que el concepto matemático “antiderivada o integración”, pude ser introducido a partir de una situación concreta, que facilita su comprensión.
- La modelación matemática relacionada con la función de ajuste de aceleración de la embarcación permite que los estudiantes puedan escribir fórmulas a partir de la visualización de la representación gráfica del modelo de ajuste de la función.

Dificultades

- El tiempo para el desarrollo de la actividad es limitado.
- Los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas, debido a la no familiarización con este enfoque.
- Al inicio fue un poco desafiante la integración del empleo de herramientas tecnológicas o software matemáticos, pese a las habilidades de los estudiantes con estas.
- Los estudiantes ponen un poco de resistencia a los problemas en los que deben argumentar sobre los resultados dados matemáticamente y su relación con el contexto.

Conclusiones

Se evidencia avances en la comprensión de conceptos matemáticos a partir de la argumentación que los estudiantes dan a la relación que existe entre el modelo de ajuste de la función aceleración y la función resultante que representa la función velocidad de la embarcación.

Constituye una tendencia de los estudiantes resolver problemas procedimentales sin dar ninguna explicación, esto debido a la limitación de las prácticas pedagógicas tradicionales predominantes.

La actividad resulta motivante para los estudiantes, ya que les encontraron sentido a los datos obtenidos de forma experimental.

Se evidencia la participación de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, propiciándose el escenario de contrastar ideas para llegar a la resolución de los problemas planteados.

Referencias y bibliografía

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65.

Akakpo, GS (2016). The role and relevance of mathematics in the maritime industry. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Science, 12*,75-86.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Barreiro, P. (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Eduvim, Editorial Universitaria Villa María.

Blomhøj, M. (2009). *Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling*. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, 1.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.

Kaiser, G., Schwarz, B., & Buchholtz, N. (2011). Authentic modelling problems in mathematics education. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 591-601.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116

PEI, Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla. Recuperado el 18 de noviembre de 2020 de la URL: www.enap.edu.co

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

Stanivuk, T., Galić, S., & Bojanić, M. (2017). Mathematics as a Science and Marine Activity Follow Each Other Throughout History. *Transactions on maritime science, 6*(01), 55-60.

Vidal, J., Muriel, C., Alonso, J. J., Casas, M., Rodríguez, V., Ruíz, A., & Díaz, J. Taller integrado de física--matemáticas con aplicaciones a la Ingeniería Naval y Oceánica. Proyectos de Innovación y Mejora Docente.Escuela de Ingeniería Naval y Oceánica. España.

Enseñanza de la función exponencial desde la teoría de Nociones Básicas

Nicolás **Alarcón-Relmucao**
Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld
Alemania
nicolas.alarcon@uni-bielefeld.de

Resumen

Diversas investigaciones referentes a la enseñanza de la función exponencial dan cuenta, por un lado, que el aprendizaje de este objeto matemático suele ser mecánico y centrado en la repetición de definiciones, propiedades y procedimiento, y por otro, que hay poca conexión con la realidad. Es por esto que esta investigación busca establecer las representaciones mentales fundamentales que los estudiantes deberían desarrollar, para tener una mayor comprensión de este objeto. Con el apoyo de la teoría de Nociones Básicas y a través del análisis temático con orientación didáctica, se pudo establecer dos nociones básicas propias de la función exponencial con las que los estudiantes pueden conectar la matemática y la realidad, además de establecer un puente entre la matemática formal y la matemática que se enseña en la escuela.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación; Educación matemática realista; Modelación; Resolución de problemas; Investigación teórica; Función exponencial; Chile-Alemania.

Introducción

Distintas investigaciones latinoamericanas dan cuenta de que las problemáticas con respecto a la enseñanza de la función exponencial tienen distintas aristas o diferentes factores a considerar, los cuales permiten inferir que existe una falta de comprensión de este objeto matemático tanto a nivel de estudiantes como profesores. Como lo menciona Álvarez (2017), muchas veces los estudiantes en formación de profesores de matemáticas no logran un aprendizaje adecuado de la función exponencial o, dicho de otra manera, los futuros docentes reciben una formación teórica-mecánica que luego se replica cuando éstos ejercen la profesión, generándose una suerte de círculo vicioso. Las investigaciones de González (2013), Sureda y Otero (2013), Pezoa y Morales (2016) y Ortega, Nesterova, Ulloa, y Mendoza (2009), reafirman que la enseñanza de este objeto matemático es de carácter teórico-mecánico y que predominan los procesos algebraicos. Además, estas investigaciones mencionan que existen carencias de conexión entre la matemática escolar y la realidad, es decir, la enseñanza es descontextualiza. Por otro lado, los textos escolares a los que estudiantes tienen acceso muestran un mismo patrón mecánico, así, las investigaciones realizadas por Advíncula (2010) en Perú y Morales (2011) en Colombia, muestran que los libros plantean en una primera instancia una definición, en una segunda características y propiedades, y finalmente, se muestra una representación gráfica y algunos fenómenos asociados. Todo esto ha causado que los estudiantes memoricen muchas veces propiedades, fórmulas y que aplique características de la función exponencial en ejercicios tipos, sin tener un vínculo que permita dar sentido a lo que se está haciendo. Se puede observan ya en trabajos de Félix Klein, a principios del siglo XX, la necesidad de conectar la matemática con acciones familiares, es así que por ejemplo se puede ver en Klein (1928) como se familiarizaba el cálculo de la integral definida, dibujando, recortando y midiendo superficies en una hoja de papel, para después dar sentido a procesos más sistemáticos. Es aquí la razón del por qué esta investigación utiliza como marco teórico las nociones básicas (Grundvorstellungen en su lengua de origen, Alemania; desde ahora abreviado NB), ya que esta busca establecer las representaciones mentales fundamentales que deberían desarrollar los estudiantes con las que se capture la esencia de un objeto matemático a través de acciones concretas (reales o imaginarias) y les permita comprender características fundamentales de la función exponencial.

Esta investigación buscó responder la interrogante ¿Qué NB deberían activar y/o desarrollar los estudiantes para tener una mejor comprensión de la función exponencial?

Marco teórico

Tal como ya fue mencionado el marco teórico utilizado en esta investigación es el de las NB. Esta teoría tiene una larga tradición en la didáctica alemana, la cual se considera que es iniciada con el desarrollo conceptual de la formación de visualizaciones mentales, realizada por Pestalozzi en el año 1803, y culmina con la caracterización de las NB del contenido matemático propuestas por vom Hofe en el año 1995 (vom Hofe & Blum, 2016).

Vom Hofe (1995) plantea que las NB tienen tres características esenciales, las cuales permiten identificarlas desde la mirada del investigador. Estas son:

- La constitución del sentido, es decir, las nociones permiten constituir el(los) significado(s) de un contenido matemático a través de la vinculación de éste con experiencias familiares o acciones concretas (a nivel real o simbólico).
- La internalización (en el sentido de Piaget) de una representación mental correspondiente al concepto, es decir, que permita la acción operativa a nivel de pensamiento.
- Volver a reconocer la estructura presente en la constitución (primera característica) en diversos contextos con la ayuda de estructuras matemáticas.

Así, se puede definir las NB desde dos miradas distintas. Si el foco está puesto en el individuo, las NB describen la relación entre el contenido matemático y la formación de conceptos individuales (aspecto descriptivo de las NB). Por otro lado, desde el punto de vista del contexto de aprendizaje, las NB caracterizan conceptos o procedimientos matemáticos con posibles interpretaciones en situaciones de la vida real, el cual es denominado por la literatura como el aspecto normativo de las NB. Una distinción entre estos aspectos, es que cuando uno hace referencia a lo normativo, habla de la conexión entre la matemática y la realidad de manera ideal, en cambio el aspecto descriptivo muestra lo que realmente está sucediendo en la cabeza de los estudiantes, es decir, nos refleja la realidad. Las NB, como teoría, buscan acercar las diferencias entre estos aspectos, por lo que se establece el aspecto constructivo de las nociones, el que (desde una mirada didáctica) busca que los estudiantes puedan desarrollar estas nociones ideales y que estén presentes en la realidad de los alumnos y que sean utilizables en distintas situaciones (vom Hofe, 1995; vom Hofe & Blum, 2016).

Desde el marco teórico hay algunas preguntas esenciales, cuyas respuestas (a posteriori) permitieron orientar la investigación y responder la pregunta mencionada anteriormente. Para poder establecer las NB de la función exponencial es necesario preguntarse desde la matemática ¿Qué caracteriza a la función exponencial? ¿Cuál es la esencia de esta función? y ¿Qué contextos de aprendizajes capturan ésto? Desde el punto de vista didáctico, es necesario preguntarse ¿Cómo los estudiantes pueden desarrollar estas NB? Las respuestas a estas interrogantes, utilizando la metodología de Salle & Clüver (2021), permitió establecer las NB de la función exponencial desde el aspecto normativo y nos brindó elementos basales para poder construir esta función en la sala de clases.

Metodología

Para poder establecer las NB de la función exponencial se utilizó la metodología de investigación del análisis temático con orientación didáctica (didaktisch orientierte Sachanalyse en su lengua de origen, Alemania) propuesto por Salle & Clüver (2021). Esta investigación propone directrices metodológicas para establecer NB desde una mirada normativa. Así, Saller & Clüver (2021) establecen cinco pasos importantes, con las cuales se puede NB, estos son:

1. La determinación de conceptos centrales, es decir, los conocimientos previos que se deben tener para poder trabajar con el objeto matemático, en nuestro caso, los elementos previos que se necesitan para trabajar con la función exponencial.

2. Un análisis temático sustentado en la formación de categorías, las cuales se forman sobre la base de definiciones matemáticas pertinentes, fenómenos y resultados empíricos. Este paso propone un análisis histórico de la construcción de la función exponencial, del cómo se aborda este objeto en la escuela (textos escolares y planes de estudio) y cómo se aborda a nivel matemático.

3. Formulación concreta de las NB a partir del análisis de las relaciones establecidas en el paso (2).

4. Relación entre las NB concretas establecidas en (3) con otras nociones ya existentes.

5. Explicación de la relevancia didáctica de estas nociones.

Como se puede observar, con la ayuda de los primeros tres puntos es posible sustentar la identificación de NB y es lo que presentamos en este trabajo.

Resultado de la investigación

Con la ayuda del análisis temático con orientación didáctica de Salle & Clüver (2021), se pudo identificar dos NB de la función exponencial. Las cuales son:

1. **Noción de crecimiento (decrecimiento) porcentual:** La función exponencial describe un crecimiento (decrecimiento) en el que los valores de la función siempre van aumentando (disminuyendo) en el mismo porcentaje en cada paso, a partir de un valor inicial. Un ejemplo típico donde se encuentra esta noción es al trabajar tareas de interés compuesto.

   Existen dos formas de trabajar esta noción, la primera es a través de la suma sucesiva, esto hace referencia matemáticamente a $f(n+1) = f(n) + k \cdot f(n)\ \forall n \in N$. La segunda forma de trabajar es esta noción es entendiendo en profundidad el significado del porcentaje, por lo que se construye el factor porcentual, lo que matemáticamente alude a $f(n+1) = f(n) \cdot (1+k)\ \forall n \in N$.

   Esta noción se sustenta históricamente en el desarrollo establecido por la civilización babilónica y el trabajo de Leonhard Euler, ambos muestran la importancia de la variación porcentual constante, tanto en el ámbito económico como el crecimiento poblacional.

   Una representación gráfica del trabajo con esta noción es la que se muestra a continuación:

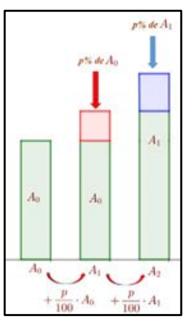


Figura 1. Adición sucesiva de un valor porcentual

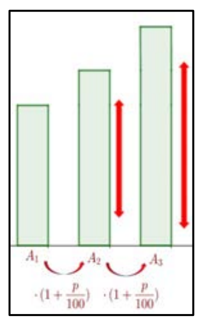


Figura 2. Adición sucesiva de un valor porcentual

2. **Noción de crecimiento (decrecimiento) por un factor constante:** La función exponencial describe un crecimiento (decrecimiento) en el que los valores de la función se van multiplicando por un factor constante en cada paso, a partir de un valor inicial. Un ejemplo típico donde se puede observar esta noción es cuando se trabaja tareas sobre el crecimiento de bacterias.

   Esta noción hace referencia a la función como una operación, lo que matemáticamente hace referencia a $f(n+1) = p \cdot f(n)\ \forall n \in N$.

El sustento histórico de esta noción se encuentra en el desarrollo establecido por los egipcios, griegos, chinos y principalmente, por los trabajos de Nicolás Oresme y Nicolás Chuquet.

Una representación gráfica del trabajo con esta noción es la que se muestra a continuación:

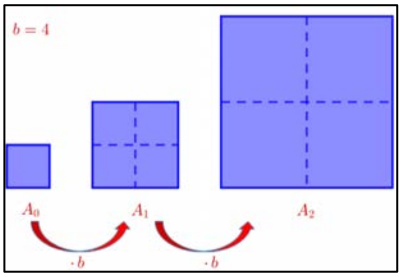


Figura 3. Crecimiento porcentual por un factor constante

De esta manera, al poner énfasis en el proceso cognitivo que hay detrás de cada uno de estos contextos, los estudiantes pueden construir de mejor manera (desde el punto de vista de este marco teórico) la función exponencial. Por un lado, se conecta este objeto matemático con la realidad y por otro, se centra la enseñanza en el proceso y sus significados, en vez de un aprendizaje repetitivo, mecánico y memorístico. Es importante mencionar que, si bien ambos procesos se describen matemáticamente por la misma ecuación funcional, la construcción a nivel cognitivo es totalmente distinta. Es aquí la importancia de mostrar a los estudiantes estas diferencias, para que luego éstos pueden desarrollar representaciones mentales adecuadas y que les permita construir, con sentido (comprendiendo), la función exponencial.

Referencias y bibliografía

Advíncula, E. (2010). *Una Situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades.* (Tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Álvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

González, C. (2013). *Una resignificación de lo exponencial a través del binomio modelación-graficación.* (Tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Klein, F. (1928). *Präzisions- und Approximationsmathematik*. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, vol. 3. Berlin: Springer.

Morales, A. (2011). Un breve estudio histórico y epistemológico de la función exponencial y análisis de algunos libros de texto. *Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística,* (10), 123-129.

Ortega, M., Nesterova, E. y Mendoza, S. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con el empleo de diferentes registros de representación semiótica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, (22), 561-571.

Pezoa, M., y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 11*(2), 52-64.

Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien-Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 553-580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación matemática*, *25*(2), 89–118.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225-254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Ensino Exploratório: Introdução à educação financeira em turmas de 9º ano do ensino regular e na Educação de Jovens e Adultos

Raquel Carneiro **Dörr**
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldorr@unb.br
Adeilson Nunes dos **Santos**
Universidade de Brasília
Brasil
anunes.adeilson@gmail.com
Danielly de Souza **Figueiredo**
Universidade de Brasília
Brasil
daniellyheitor@gmail.com
Márcia Vieira França **Vargas**
Universidade de Brasília
Brasil
marciavfvargas@gmail.com
Mariana Modesto Prates **Beltrão**
Universidade de Brasília
Brasil
mari.guiga@gmail.com
Paulo Rodrigo Alves dos **Reis**
Universidade de Brasília
Brasil
paulorodrigoounico@gmail.com

Resumo

Este texto apresenta a aplicação em sala de aula de uma mesma tarefa matemática desenvolvida em três turmas, na qual é analisada a compra de um fone de ouvido à vista ou a prazo. A referida tarefa foi desenvolvida pelos autores no contexto da disciplina de mestrado Tópicos de Matemática. Com relação aos objetos matemáticos associados à tarefa, podem ser usados tanto na introdução quanto na revisão de porcentagem, juro simples e taxa de juros. A aplicação ocorreu no 9º ano do Ensino Fundamental e no 4º período do 2º segmento da Educação de Jovens e Adultos, sendo realizada à luz dos preceitos teóricos do Ensino Exploratório, em que os estudantes devem trabalhar em pequenos grupos e construir estratégias de solução. Foi observado que o diálogo para a elaboração de estratégias de resolução é fundamental, elevando, assim, a participação dos estudantes no decorrer do processo.

Palavras-chave: Ensino Exploratório; Tarefa Matemática; Educação Financeira; Ensino Fundamental; EJA.

Introdução

Uma dificuldade encontrada pela maioria dos professores de matemática é: como transcender o modelo tradicional de ensino, baseado na repetição de conteúdos, para um modelo em que de fato os estudantes obtenham uma aprendizagem significativa?

Nesse sentido, entendemos que o Ensino Exploratório da Matemática permite que os estudantes construam o seu próprio conhecimento ao desenvolver uma tarefa, que deve ser cuidadosamente planejada e escolhida pelo professor. É dessa maneira que a aprendizagem do aluno se torna significativa. Nessa metodologia, um dos papéis do professor é acompanhar o desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, observando e ouvindo as dificuldades deles, fazendo apontamentos e intervenções quando necessário (Canavarro, 2011; Oliveira, Araman & Trevisan, 2022).

Este texto é uma comunicação científica que relata uma experiência vivida em sala de aula ao aplicar uma tarefa matemática baseada no Ensino Exploratório. A tarefa foi construída ao longo de um semestre na disciplina de Tópicos de Matemática, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade de Brasília (UnB) no segundo semestre de 2022.

O público-alvo da tarefa aqui descrita foi o 9º ano do Ensino Fundamental e o seu equivalente na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Com o público-alvo bem definido, buscamos uma tarefa que pudesse ser interessante, que motivasse os alunos e estivesse contida no conteúdo programático a ser estudado de acordo com as Diretrizes Curriculares do Currículo em Movimento da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, 2018, p. 201). Assim, o conteúdo matemático escolhido foi a Matemática Financeira, uma vez que ele está presente no dia a dia de todos, sendo usado cotidianamente, e, por isso, gera entusiasmo e engajamento por parte dos estudantes.

Nossa intenção com esse trabalho foi observar como os alunos, em diferentes realidades, reagem a uma nova metodologia de ensino e como suas aprendizagens podem ser influenciadas positivamente por essa prática.

Referencial teórico

A Matemática Financeira é um conteúdo matemático de extrema importância e relevância para a formação de cidadãos financeiramente conscientes. Por meio da apropriação de seus conceitos, as pessoas podem tomar melhores decisões a respeito de sua vida financeira.

Atualmente, a matemática está presente em todos os níveis da educação básica e não se pode relegar a segundo plano sua importância para a compreensão das relações econômicas e financeiras atuais. Desse modo, a apropriação dos significados dos conceitos da área da matemática financeira é fundamental na vida cotidiana (Grando & Schneider, 2010).

Além de um conteúdo relevante, uma metodologia que desperte a curiosidade e o interesse do estudante é fundamental para o sucesso do aprendizado do mesmo. Dessa forma, o Ensino Exploratório pressupõe que o aluno se aproprie do conhecimento, tornando sua aprendizagem significativa. A base teórica para a construção da tarefa que aplicamos em sala de aula está fundada na didática de que "o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva" (Canavarro, 2011, p. 11).

Diante da construção do raciocínio matemático e da consolidação do conhecimento, o professor deve, durante a comunicação, fazer perguntas, a fim de estabelecer o diálogo junto aos estudantes para condução do raciocínio matemático. Acerca da mobilização desses diferentes processos, a utilização de tarefas exploratórias tem se mostrado uma escolha pedagógica bastante promissora. Ponte (2005) diz que "as práticas de ensino exploratório contribuem para a construção de generalizações matemáticas, promovendo aos alunos a descoberta e disseminação de conhecimento".

Na perspectiva do Ensino Exploratório na EJA, observamos que na

> [...] pluralidade de contextos sociais nos quais os alunos da EJA estão imersos, nos questionamos quanto à potencialidade dessas abordagens de ensino para seus processos de aprendizagem, minimizando possíveis dificuldades que são recorrentes nesse contexto no ensino tradicional. A perspectiva do Ensino Exploratório, pode ser uma alternativa nesse sentido e possibilita, dentre outros aspectos, a construção não só de conceitos ou conteúdos matemáticos, mas também de ideias matemáticas [...] (Baldini, Rodrigues & Oliveira, 2015, p. 2).

Metodologia

Este texto é uma comunicação científica que relata uma experiência desenvolvida em duas turmas de 9º ano do Ensino Regular e em uma turma do 4º período do 2º segmento da Educação de Jovens e Adultos (EJA) (similar ao 9º ano do Ensino Fundamental II). Com o intuito de facilitar a apresentação da tarefa desenvolvida em sala de aula e a análise dos resultados obtidos, dividimos o presente texto em duas partes: o Relato 1 apresenta a experiência vivida com as duas turmas do Ensino Regular e o Relato 2 expõe a experiência vivida com a turma da Educação de Jovens e Adultos – EJA.

Para o Relato 1, a tarefa foi aplicada no Centro de Ensino Fundamental 05 de Sobradinho, escola pública do Distrito Federal, em duas turmas de 9º ano com horários duplos de aula de matemática.

O 9º ano A era composto por 33 alunos, dos quais dois estudantes tinham necessidades especiais (Deficiência Intelectual – DI). O horário duplo nessa turma era dividido pelo intervalo. O 9º ano B era composto por 30 alunos, não havendo entre eles estudantes com necessidades especiais. Nessa turma, tivemos os dois últimos horários do dia sem interrupções para o intervalo.

Em ambas as turmas, as professoras Danielly e Márcia assumiram o papel de professoras regentes, enquanto a professora Mariana o de observadora. Os registros dos estudantes foram coletados em uma folha de papel A4 com o enunciado da tarefa proposta.

Para o Relato 2, a tarefa foi aplicada na Escola Municipal José Fernandes da Silva Neto, na Cidade Ocidental – Goiás, escola pública, para uma turma do 4º período do 2º segmento da Educação de Jovens e Adultos (EJA) em horário duplo à noite.

Com o objetivo de conhecer o público-alvo do Relato 2, foi aplicado, anteriormente à aula, um questionário socioeducacional para 24 alunos, sendo 54% do sexo masculino e 46% do sexo feminino. Em relação à faixa etária, 54% tinham entre 16 e 18 anos, 8% tinham entre 19 e 28 anos, 4% tinham entre 29 e 38 anos e 34% tinham mais de 39 anos, sendo que a aluna mais velha tem 54 anos. Foi constatada essa disparidade entre as faixas etárias pesquisadas, sendo perceptível que a maioria da turma é de adolescentes que vieram do Ensino Fundamental II e que, por questões de indisciplina e de disparidade de idade, foram matriculados no período noturno para cursarem a EJA.

Um professor, Adeilson, assumiu o papel de professor regente, enquanto outro o de observador. Os registros dos estudantes também foram coletados em uma folha de papel.

A tarefa aplicada foi baseada no Ensino Exploratório descrito por Canavarro (2011) com o intuito de analisar as aprendizagens dos alunos por meio do desenvolvimento de uma tarefa bem elaborada, em que as ideias matemáticas são sistematizadas em uma discussão em grupo. Para a apresentação desses dados, estruturamos o relato em três momentos: planejamento da tarefa, desenvolvimento da tarefa matemática em sala de aula e discussão dos resultados.

Planejamento da tarefa matemática

A ideia de aplicar uma tarefa matemática a partir do ponto de vista do Ensino Exploratório partiu das nossas professoras regentes da disciplina de Tópicos de Matemática do Profmat – UnB[1].

[1] O curso foi ministrado em docência compartilhada pelas professoras doutoras Raquel Carneiro Dörr e Regina da Silva Pina Neves.

A escolha da Matemática Financeira como objeto de estudo se deu porque ela melhor se encaixaria em nossos objetivos, uma vez que é um conteúdo que desperta bastante o interesse dos alunos. A partir daí, passamos a buscar uma tarefa que fosse bem elaborada e que atraísse a atenção dos estudantes. A tarefa escolhida encaixou-se em nossa proposta e foi retirada da Revista Espacios (Moreira, et al. 2007), com algumas adaptações.

A tarefa matemática

Objetivo geral

Aplicar uma tarefa matemática à luz do Ensino Exploratório e analisar como os alunos em diferentes realidades sociais reagem a essa metodologia de ensino e de que forma as suas aprendizagens se tornam significativas.

Objetivos específicos

Mostrar como os juros são cobrados e de que forma os cálculos são efetuados nos produtos que são vendidos a prazo, ou que pedem uma entrada e que se parcele o restante. Especificamente, conceituar e introduzir o cálculo de juro simples e de montante, argumentando que o fato de se pagar em muitas parcelas em que se pagam juros, por mais que sejam acessíveis, fará com que o bem saia mais caro ao final.

Tarefa matemática

Uma loja de aparelhos eletrônicos anuncia a venda de um fone de ouvido, com duas possibilidades de pagamento, conforme o anúncio abaixo: À vista: R$250,00. A prazo: entrada de 30% e R$190,00 para 30 dias. Quanto você pagaria de juros se adquirisse o produto a prazo? Qual seria a taxa de juros cobrada?

Resolução da tarefa matemática

Ao pagar a entrada de 30% de R$250,00, obtemos: 0,30. 250 = 75. Ou seja, o comprador paga de entrada R$75,00. Para saber qual o valor que ainda falta pagar, fazemos o seguinte: $250 - 75 = 175$. Dessa forma, o comprador assume uma dívida de R$175,00 e é sobre esse valor, denominado de saldo devedor, que os cálculos devem ser realizados. Os juros cobrados devem ser calculados considerando o aumento de R$175,00 para R$a190,00. Assim: $190 - 175 = 15$. A taxa de juros, levando em consideração os R$15,00 cobrados a mais (juro) será: $15 : 175 = 0{,}085714$. Logo, a taxa de juros é de aproximadamente 8,5%.

Desenvolvimento da tarefa matemática em sala de aula

Para a aplicação da tarefa em sala de aula, iniciamos de forma similar em todas as turmas: em horário duplo; alunos divididos em trios; enunciado da tarefa projetado no Datashow para leitura; e questionamentos aos alunos de maneira geral, com o intuito de que os alunos estivessem devidamente esclarecidos sobre a tarefa a ser desenvolvida.

Relato 1 - 9º ano do ensino regular

Entregamos a tarefa impressa aos trios, de modo que fizessem uma nova leitura silenciosa e passassem a desenvolver o que era proposto. Avisamos aos alunos aque eles não poderiam utilizar a calculadora e que deveriam realizar todos os cálculos explicando o raciocínio desenvolvido na folha (o nosso objetivo era verificar se os alunos dominavam algumas operações básicas, como a divisão).

Ao longo do desenvolvimento do trabalho em grupo, observamos que alguns trios tiveram problemas na interpretação, mas com a mediação, percebiam o erro que estavam cometendo e passavam a fazer os cálculos corretamente. No entanto, apesar dessa dificuldade apresentada por alguns, a grande maioria dos alunos não teve dificuldade para calcular a entrada e o juro pago se adquirisse o produto a prazo. O resultado encontrado por eles foi obtido de diversas maneiras.

O desafio maior veio na segunda pergunta, uma vez que nunca haviam estudado o conceito de taxa de juros. Como no 9º ano A somente um trio conseguiu desenvolver o conceito de taxa de juros e calculá-la corretamente, vimos que seria interessante mudar o planejamento e, por isso, perguntamos o que os alunos entendiam por taxa de juros naquelas perguntas introdutórias, gerando uma discussão coletiva antes dos grupos trabalharem entre si.

Ao final do primeiro horário, demos início à discussão das resoluções dos grupos. Para isso, escolhemos três trabalhos a serem apresentados no Datashow para toda a turma. Optamos por escolher os grupos que melhor desenvolveram um raciocínio matemático para a resolução da tarefa. Esse momento de discussão dos resultados encontrados foi surpreendente, pois os alunos não tiveram vergonha de explicar o que haviam produzido, enquanto os outros alunos ficaram em silêncio para ouvir os colegas explicando o raciocínio matemático ao encontrar a solução da tarefa proposta.

Após essa discussão, fizemos uma síntese das aprendizagens matemáticas, mostrando que havia uma fórmula matemática para facilitar os cálculos da taxa de juros.

Relato 2 - 4º período do 2º segmento da EJA

Aplicamos a tarefa nessa turma com o intuito de que os alunos revisassem o conteúdo matemático, uma vez que o mesmo foi ministrado no semestre anterior. Optamos aqui por imprimir a questão juntamente com a fórmula de juro simples para revisão, e o professor fez a leitura em voz alta e pediu aos alunos a resolução da questão.

Informamos aos alunos que poderiam utilizar a calculadora para realizar os cálculos, mas que deveriam explicar o raciocínio desenvolvido na folha. Também explicamos que eles teriam o restante do primeiro horário para o desenvolvimento e a resolução da tarefa. Os alunos então, coletivamente, começaram a pensar e a desenvolver um raciocínio matemático a respeito da tarefa proposta, enquanto o professor os observava, caminhando entre os grupos, olhando seus rascunhos e procurando não responder a nenhum questionamento a respeito de o desenvolvimento da tarefa estar certo ou errado. A maior dúvida dos alunos era se o método utilizado estava correto.

Observamos assim que, em sua maioria, os alunos não tiveram dificuldade para responder a primeira pergunta. Foi constatada uma dificuldade maior na segunda questão, pois eles diziam que não se lembravam de como era calculada a taxa de juros.

Finalmente, após o término da tarefa, iniciamos o terceiro momento da aula, com a explicação e a resolução da questão no quadro pelo professor regente com a aplicação da fórmula e a síntese dos conhecimentos para sua sistematização coletiva por toda a turma.

Discussão dos resultados

Verificou-se que os alunos gostaram bastante da metodologia aplicada e participaram ativamente da aula, ao contrário da aula tradicional, em que normalmente são apáticos e meros ouvintes. Questionaram-nos a todo momento, discutiram entre eles sobre a tarefa proposta e conseguiram desenvolver o raciocínio matemático necessário. Percebemos que tal metodologia pode ser aplicada sempre que vamos introduzir um novo conteúdo, mas necessita de uma sala de aula que não seja lotada, pois demanda muita atenção por parte do professor para cada grupo de estudantes. Foi muito importante o auxílio de mais de um professor em sala durante a aplicação da tarefa, pois assim atendemos todos os grupos e conseguimos registrar de maneira satisfatória o raciocínio dos alunos.

Considerações finais

Se tivéssemos tido mais tempo, teríamos desenvolvido ainda mais a nossa prática, e poderíamos comparar melhor as ações desenvolvidas em ambientes tão ricos e diferentes como o EJA e o Ensino regular, aos olhos do Ensino Exploratório.

Mas inferimos que, um bom planejamento é essencial para o sucesso do Ensino Exploratório. Notando a importância das antecipações previstas pelo professor, já chegamos preparados para contornar as possíveis dificuldades que surgissem. Além disso, percebemos que o planejamento, por mais detalhado que for, deve sofrer modificações a fim de melhorar a qualidade das próximas aulas. Outro ponto importante é a escolha de uma boa tarefa que motive os alunos a desenvolverem o seu pensamento crítico a partir da exploração. Selecionar e sequenciar as tarefas a serem apresentadas é de fundamental relevância para a construção do raciocínio matemático dos alunos, fazendo com que eles se tornem mais animados e interessados durante as aulas de matemática. Isso porque apenas a elaboração ou a escolha de boas tarefas não caracteriza o ensino e a aprendizagem na perspectiva do Ensino Exploratório (Cyrino & Teixeira, 2016)

Ao refletirmos sobre a tarefa desenvolvida, verificamos a importância de se disponibilizar a formação continuada dos professores de matemática, embasada no Ensino Exploratório, a fim de melhorar a prática dos professores, baseada no ensino tradicional, e a aprendizagem em sala de aula. Uma vez que este tema é ainda desconhecido por muitos professores, assim como era para nós até iniciarmos nossos estudos no Profmat, e este tem o potencial, que achamos faltar, para interessar mais aos alunos, pelo gosto da matemática, tornou-a mais interessante, atrativa e dinâmica.

Referências e bibliografia

Baldini, L. A. F., Rodrigues, P. H., & Oliveira, J. C. R. de. (2015, 2 a 4 de outubro). O Ensino Exploratório na educação de jovens e adultos: A ideia de regra. [Apresentação de trabalho]. *Anais do XIII EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática Ponta Grossa – PR*. UEPG.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Prática e desafios. *Educação e Matemática*, (115), 11–27. https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119.

Cyrino, M. C. C. T., & Teixeira, B. R. (2016). O ensino exploratório e a elaboração de framework para os casos multimídia. *In* M. C. Trindade (Org.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática*: elaboração e perspectivas (pp. 81–99). EDUEL.

Grando, N. I., & Schneider, I. J. (2010). Matemática Financeira: Alguns elementos históricos e contemporâneos. *Zetetiké*, *18*(33), 43–62.

Moreira, S., et al. (2017). Ensino da matemática financeira para alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental: uma proposta na perspectiva da educação matemática crítica. *Espacios,38* (30), 8. https://www.revistaespacios.com/a17v38n30/a17v38n30p08.pdf

Oliveira, L. S. de, Araman, E. M. de O., & Trevisan, A. L. (2022). Processos de raciocínio matemático em uma tarefa exploratória. *Paradigma*, *43*(1), 1–21.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *In* Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). GTI/APM.

Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (2018). *Currículo em Movimento da Educação Básica: Ensino Fundamental: Anos Iniciais – Anos Finais* (2ª ed.). SEEDF.

Entendiendo contextos de nuestro entorno a través de la Estadística Descriptiva

Mercy Lili **Peña** Morales
Universidad Surcolombiana
Colombia
mercy.pena@usco.edu.co
Indira Tatiana **Garcia** Ramírez
Universidad Surcolombiana
Colombia
u20182171204@usco.edu.co
Herbert E. **Quintero** Fonseca
University of the Virgin Islands
US Virgin Islands
herbert.quinterofonseca@uvi.edu

La estadística descriptiva es fundamental en la formación de las competencias básicas de ciudadanos con relación a los sistemas de datos. Sin embargo, el desarrollo por competencias ha sido limitado ya que la enseñanza tradicional de la Estadística, solo se centra en procedimientos de cálculos y análisis, en donde se orienta de forma abstracta. Es esencial que los estudiantes adquieran habilidades y destrezas en esta competencia, pero también que se vean involucrados en una realidad contextualizada en situaciones que sean significativas para que el alumno logre integrar la enseñanza de la estadística con su entorno (Batanero et al. 2011). En efecto, Campos (2016) indica que la alfabetización estadística "refiere a la competencia de discutir, argumentar y comunicar interpretaciones de las informaciones estadísticas referentes a datos presentados en diferentes contextos" (p.3). Adicionalmente, Batanero y Godino (2005) señalan que el trabajo cooperativo de los estudiantes con proyectos o actividades de análisis exploratorio de datos "resaltan el valor de la interacción social y el discurso en la construcción del conocimiento".

El curso de Estadística Descriptiva propuesto en el semestre 2022-2 se desarrolló mediante el enfoque de aprendizajes por proyecto de aula, considerando las características sugeridas por Campos (2007): trabajar con datos reales; relacionar los datos al contexto en que están inmersos; orientar a los alumnos para interpretar los resultados; permitir que los estudiantes trabajen en grupo; fomentar la crítica y el debate de ideas entre los alumnos. El objetivo central del curso fue identificar y articular fenómenos de la cotidianidad y el contexto social del estudiante para aplicar los conceptos estudiados durante el curso, haciendo énfasis en el desarrollo del pensamiento crítico para orientar los procesos de recolección de datos, análisis, interpretación, y presentación de resultados.

Se identificaron seis (6) proyectos de aula, tres (3) de ellos relacionados con el análisis de la temperatura (máxima y mínima) y la precipitación en la ciudad de Neiva, durante los años 2015, 2018 y 2021;y tres proyectos relacionados con aspectos académicos del programa de licenciatura de matemáticas y la facultad de educación, los cuales incluyeron: el análisis de la cancelación de semestre en los programas de la Facultad de Educación para los periodos 2015 al 2022-1; la caracterización de los estudiantes en la licenciatura de matemáticas en el periodo 2015 al 2022-1; y finalmente la caracterización de los centros de prácticas pedagógicas y sociales de la licenciatura de matemáticas en el periodo 2017 al 2022-1. Se asignaron cuatro estudiantes a cada proyecto, y se hizo la orientación teórico-practica dentro de la clase, así como con asesorías fuera de clase. Cada proyecto incluyo las siguientes etapas: recolección, organización, análisis de los datos e interpretación de los resultados, y se realizaron debates semanales para socializar los aportes y avances de cada proyecto. En forma paralela, la profesora titular desarrollo un proyecto alterno para analizar el proceso de deserción de estudiantes de la Universidad en tres sedes alternas de la Universidad durante el periodo 2015-2017, para guiar el análisis de datos y la presentación de resultados.

El análisis preliminar del proceso de enseñanza aprendizaje en la clase de estadística descriptiva, fue mediada por la utilización de proyectos de aula como herramienta pedagógica. Este primer estudio exploratorio permitió facilitar un proceso de participación por parte de la mayoría de los estudiantes. Así mismo la gama de proyectos evaluados permitió encontrar diferentes grados de dificultad para los estudiantes, que abarcaron cada una de las etapas del tratamiento estadístico (recolección de datos, el análisis, resumen y presentación de datos), lo cual enriqueció la discusión, comprensión, interpretación y argumentación de los estudiantes. El compromiso de los estudiantes fue notorio con mínimas excepciones. Finalmente se identificaron áreas que necesitan ser fortalecidas en el proceso de enseñanza-aprendizaje específicamente relacionadas con el trabajo en grupo.

Referencias y bibliografía

Batanero, C., Diaz, C., Contreras, J. M., Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En: Batanero, C. & Diaz, C. (Ed.) Estadística con Proyectos. Reprodigital, Universidad de Granada, pp. 1-46.

Batanero, C., Godino, J. D. 2005. Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En: Luengo, R. (Ed.) Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Bajadoz, Universidad de Extremadura, pp. 203-226.

Campos, C. R. (2007). A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação. Tesis (doctorado). Rio Claro: UNESP-IGCE.

Campos, C. R. (2016). La educación estadística y la educación critica. 2º Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. 19 pp.

Episódios de resolução de tarefas em aulas de Cálculo: uma análise das contribuições em cursos de Engenharia

Arnold Vinicius Prado **Souza**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Brasil
arnoldvinicius@alunos.utfpr.edu.br
André Luis **Trevisan**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Brasil
andreluistrevisan@gmail.com
Giane Fernanda Schneider **Gross**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Brasil
giane.fer@gamil.com

Resumo

Utilizando um Mapeamento Sistemático (MS) das dissertações desenvolvidas no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) de uma universidade pública brasileira, este estudo objetivou verificar contribuições evidenciadas nas propostas de trabalho com episódios de resolução de tarefas para a aprendizagem dos estudantes que cursam Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no que tange às competências e habilidades almejadas para o futuro engenheiro. De caráter qualitativo, o estudo analisou pesquisas publicadas entre os anos 2017 e 2022 que se remetessem ao trabalho com tarefas de natureza exploratória em aulas de CDI em cursos de Engenharia. Nos resultados, destacaram-se possibilidades de os estudantes trabalharem de forma colaborativa, envolvendo-se em discussões matemáticas, resolvendo tarefas e, assim, contribuindo para o desenvolvimento do seu Raciocínio Matemático (RM).

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Cálculo Diferencial e Integral Tarefas Exploratórias; Educação em Engenharia.

Introdução

Nos últimos anos, tem-se notado que as taxas de evasão nos cursos de Engenharia no Brasil têm crescido exponencialmente. Segundo o Parecer CNE/CES nº1/2019 (Brasil, 2019), esse crescimento chega a atingir 50% nas graduações de ofertas de alguma Engenharia. Percebe-se ainda que a evasão ocorre principalmente nos dois primeiros anos do curso, quando o recém-chegado à universidade precisa cursar disciplinas de Matemática, como Cálculo Diferencial e Integral (CDI), Geometria Analítica e Álgebra Linear, e reprovações sucessivas podem levar o estudante a abandonar o curso. Essas disciplinas devem contribuir para a desenvolvimento de processos de raciocínio necessárias à formulação e solução de problemas de diversas áreas, à análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação e à comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (Brasil, 2019). Em especial, o CDI, nosso foco de interesse neste artigo, constitui-se como uma importante ferramenta capaz de desenvolver critérios essenciais para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (Guimarães, 2019).

Entretanto, além da defasagem no conhecimento matemático prévio dos estudantes (Ghedamsi & Lecorre, 2021), a estrutura didático-pedagógica dos cursos de Engenharia, na qual prevalece ainda uma metodologia de ensino tradicional que prioriza aulas expositivas e centradas no professor (Cabral, 2015), contribuem para a reprovação nas disciplinas citadas anteriormente e a evasão no curso.

O movimento atual de renovação dos modelos de curso de Engenharia no Brasil propõe um curso onde os estudantes consigam se adaptar às novas realidades globais, com metodologias de ensino mais modernas e a formação por meio de competências que supram as necessidades de mercado. Por um lado, destaca-se das novas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de graduação em Engenharia (DCN-Eng) (Brasil, 2019) que se deve proporcionar, ao longo da formação, o desenvolvimento de competências relacionadas à formulação e concepção de soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas. Por outra, apontam também o desenvolvimento de competências mais amplas, envolvendo aspectos relacionados à comunicação, trabalho em equipes e atitude investigativa. Assim, estimula-se a formação de um profissional que, além da "forte formação técnica", seja também humano, crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético.

Pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da Matemática apontam que abordagens de ensino promissoras são aquelas em que os estudantes trabalham de forma, envolvendo-se em discussões matemáticas, resolvendo tarefas de natureza exploratória. Assim, a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem com tais características assume importância singular no contexto do ensino em Engenharia e, há alguns anos, têm sido implementadas na (nome da universidade omitido), e investigadas no âmbito do grupo de pesquisas da qual os autores deste artigo participam (trabalhos anteriores dos autores omitidos).

A intenção dessa proposta, é apontar, a partir de dissertações já desenvolvidos no âmbito deste grupo de pesquisa, contribuições evidenciadas a partir dessa proposta de trabalho para a aprendizagem dos estudantes que cursam CDI. Trata-se de um recorte inicial da pesquisa de doutorado do primeiro autor, sob orientação do segundo, que almeja, a partir do estudo desses trabalhos, apontar articulações dessa proposta de trabalho com o desenvolvimento de competências e habilidades preconizadas pelas DCN-Eng (Brasil, 2019). Sendo assim, busca-se responder a seguinte questão: quais contribuições evidenciadas a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas para a aprendizagem com estudantes que cursam a disciplina de CDI em cursos de Engenharia?

Procedimentos metodológicos

Para análise, utilizou-se do mapeamento sistemático (MS), seguindo uma abordagem qualitativa tal como propõe Motta (2021). Para o autor "a realização de pesquisas que possuem como característica uma investigação bibliográfica ou documental, mostram-se cada vez mais relevantes e eficientes na identificação de base de dados para uma produção acadêmica" (p.21). O MS proposto por Motta (2021) indica a necessidade de organizá-lo em "quatro fases distintas, recursivas e não desconexas, que são: planejamento, condução, descrição e apresentação" (p.28). Para este mesmo autor, a fase de planejamento é estruturada em seis etapas, no entanto por se tratar de uma pesquisa com dissertações já direcionadas estabeleceu-se o uso de 5 etapas, e já relacionadas aos procedimentos adotados no presente estudo, descritas a seguir:

Etapa I: Estudo de viabilidade e escopo. Constituiu na elaboração de justificativas para a relevância dessa pesquisa, apresentadas na introdução deste artigo.

Etapa II: Definição da questão de pesquisa, também apresentada ao final da seção anterior.

Etapa III: Definição das bases de dados. A base de dados utilizada foi o Repositório da Universidade (nome omitido), no qual estão disponibilizadas todas as dissertações defendidas no Programa de Pós-Graduação em ensino de Matemática (PPGMAT) da (nome da universidade omitido). A busca foi realizada desde 2017, quando foram defendidas as primeiras dissertações no Programa, até 2022.

Etapas IV e V: Definição dos descritores e operadores boleanos de busca e critérios de seleção. Como já se tratava de uma pesquisa direcionada ao "Ensino de Cálculo Diferencial e integral", resultou em 6 dissertações apresentadas no Quadro 1. Esses trabalhos, tiveram como intenção comum, minimizar a defasagem de conceitos matemáticos, apresentada por estudantes (Ghedamsi & Lecorre, 2021), em aulas de cálculos, nos cursos de Engenharia, fazendo uso de episódios de resolução de tarefas. Tratando-se de um estudo inicial, buscou-se analisar quais contribuições que cada uma dessas pesquisas, resultaram para a área de ensino de Matemática ao fazer uso de diferentes abordagens, utilizando episódios de tarefas para ensinar e aprofundar conceitos de CDI.

Quadro 1
Apresentação das dissertações analisadas.

Ano	Autor	Título do Trabalho
2017	Fonseca, M. O. dos. S. da	Dissertação: Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas.
2017	Ramos, N. S	Dissertação: Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência: Episódios de resolução de tarefas.
2018	Gonçalves, W. J	Dissertação: Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo diferencial e integral: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas.
2021	Alves, R. M. de. A.	Dissertação: Análise de um processo avaliativo alinhado a um ambiente de ensino e de aprendizagem de cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas em aulas de CDI.
2022	Volpato, M. A	Dissertação: Ações do professor para promoção do raciocínio matemático em momentos de discussão coletiva em aulas de Cálculo.
2022	Negrini, M. V	Dissertação: Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral em tarefas exploratórias.

Fonte: Autores (2023)

Alguns resultados

Por se tratar de um recorte inicial de uma pesquisa de Doutorado, encontrou-se nas dissertações como resultados, algumas contribuições evidenciadas a partir da proposta de trabalho com episódios de resolução de tarefas para a aprendizagem dos estudantes que cursam CDI.

Na dissertação de Fonseca (2017), trabalhou-se com tarefas matemáticas para introduzir intuitivamente ideias relacionadas ao conceito de derivada em turmas de Engenharia. Os resultados indicaram oportunidades oferecidas aos estudantes para exploração das ideias necessárias iniciais para compreensão de derivada no sentido de entendimento do conceito, do processo e também de suas aplicações. Porém observou-se que os estudantes não estão habituados com estudos investigativos, mas são acostumados com tarefas que utilizem algoritmos que levem a uma única resposta. No entanto, pode-se notar indícios de aprendizagem de derivados, em momentos que os estudantes manipularam e exploraram itens necessários para a compreensão desse conceito, como: sequência de diferenças e quociente de diferenças (taxa de variação média e instantânea), na qual de forma intuitiva estabeleceram o conceito de derivada em um ponto. Nessa proposta criou-se um caderno de tarefas para professores da disciplina de CDI, com sugestão de tarefas para anteceder o conceito inicial de derivadas, contribuindo assim para um ambiente de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas.

Ramos (2017), elaborou uma sequência de tarefas para o estudo inicial de sequências numéricas e critérios de convergência, como ideias desencadeadoras do conceito de limite no infinito. A autora destaca momentos de pró-atividade do estudante na elaboração e desenvolvimento de conceitos, partindo de resolução de tarefas, também interação e liberdade de expressar estratégias de resolução. Pode-se ainda observar que na proposta houve mudança de atitude docente e discente. Destaca-se ainda que o simples fato de ensinar isoladamente não garante a aprendizagem dos estudantes, a garantia ocorre quando existe interação na elaboração de novos conhecimentos. As tarefas propostas nesse estudo, proporcionaram um processo de construção, onde conceitos centrais da disciplina foram estruturados em conjunto com estudantes e docentes. Esse estudo trouxe potencialidades para o curso de CDI e dessa proposta elaborou-se um caderno de tarefas que circunscrevem o conceito de convergência e um material de apoio aos estudantes.

Gonçalves (2018) explora em seu estudo o Raciocínio Covariacional (RC) por meio de episódios de resolução de tarefas. O objetivo foi desvelar ideias do RC mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Buscou-se ainda identificar o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolviam ideias do RC, usando para tal um modelo analítico de sete fases interativas utilizado para estudar aspectos do RC. Nas observações do autor pode-se notar que, em vários momentos, falta de articulação das tarefas com ideias de CDI, que os estudantes estavam trabalhando no semestre da aplicação da proposta, pois em muitos casos esse conhecimento matemático proposto em cálculo não tinha relação com o que foi desenvolvido no ensino médio. Notou-se que os estudantes verbalizavam compreensões referente à situação proposta, reconhecendo a covariação entre as grandezas envolvidas. Entretanto, falhavam nas representações, ou não foram capazes de estabelecer relações explícitas entre ideias do RC e conceitos do CDI, o que indicou a necessidade de reformulação de várias tarefas. Como proposta foi desenvolvido um caderno de atividades, com tarefas escolhidas/pensadas de modo a mobilizar durante sua resolução múltiplas representações do conceito de função (linguagem natural, gráfico, tabelas, expressões algébricas) no viés do RC.

Alves (2021) fez uma análise de uma proposta de avaliação alinhada com ambientes pautados em episódios de resolução de tarefas. A pesquisa se propôs a analisar um processo avaliativo, articulando uma avaliação que oportunizasse a aprendizagem e uma avaliação somativa. A proposta em tela contou com momentos formais de avaliação, por meio de provas realizadas com diferentes configurações (individual, em grupo, com e sem consulta, com e sem uso de recursos tecnológicos, além da organização de um portfólio ao longo do semestre. As análises foram realizadas a partir da produção escrita e diálogos dos estudantes nesses vários momentos. A autora constatou uma articulação da produção devido aos instrumentos que foram elaborados. Nesse processo avaliativo destacaram-se características como: apresentação de uma natureza educativa e didática da avaliação, sua articulação ao cumprimento da ementa da disciplina, uso de vários instrumentos para avaliar. Pode-se ainda observar que espaços de aprendizagem utilizando episódios de tarefas podem possibilitar que os estudantes criem, construam e deem exemplos de um problema envolvendo um conteúdo especifico, que também ocorra a iteração entre os estudantes, possibilitando um trabalho em grupo que destaque a solidariedade, a socialização, o espírito de trabalho coletivo, a troca e a ressignificação de conhecimentos. A autora, propõe um material de modo a auxiliar professores que atuam com a disciplina de CDI, a pensar de forma diferenciada os processos avaliativos da disciplina, possibilitando uma mudança na maneira de pensar, elaborar e aplicar as avaliações com seus estudantes.

A dissertação de Volpato (2022) propôs-se investigar o Raciocínio Matemático (RM) no Ensino Superior, com foco nas ações docente que contribuem para seu desenvolvimento, articulado às discussões coletivas de estudantes e o trabalho com tarefas de natureza exploratórias. Apontou-se que, a partir das ações do professor, houve a oportunidade dos estudantes de expressarem e (re) elaborarem conjecturas e justificativas; também, refletirem seus argumentos de maneira criativa, fortalecendo assim seu raciocínio, fazendo-os pensar, compreender ideias matemáticas e também reconhecer aplicações dos conceitos. Nesse contexto, elaborou-se um caderno com orientações ao professor sobre a promoção de discussões matemáticas, como forma de ilustrar ações do professor para o desenvolvimento do RM.

Por fim, Negrini (2022) analisa processos de raciocínio mobilizados por estudantes em discussões realizadas em pequenos grupos a partir de uma tarefa de natureza exploratória. Seus dados foram protocolos contendo registros escritos das discussões e áudios das discussões nesses pequenos grupos. Os resultados obtidos evidenciaram um movimento cíclico, com avanços e recuos, de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações. Em alguns momentos, esse movimento culminou com o estender, para situações mais gerais, as regularidades observadas em casos particulares (generalizar). Observou-se ainda que a utilização de episódios de tarefas, em aulas de CDI, pode levar os estudantes a explorar intuitivamente e organizar matematicamente situações que conduzem à elaboração de conjecturas e generalizações, bem como a busca por justificativas. Os resultados contribuem ainda para o desenvolvimento do RM. Como proposta para a comunidade a autora organizou um material destacando alguns aspectos relacionados aos processos de RM mobilizados por estudantes a partir do trabalho com uma tarefa de natureza exploratória.

Sendo assim, pode-se observar alguns pontos comuns iniciais, nessa primeira análise de dissertações, conforme destacado na Figura 1.

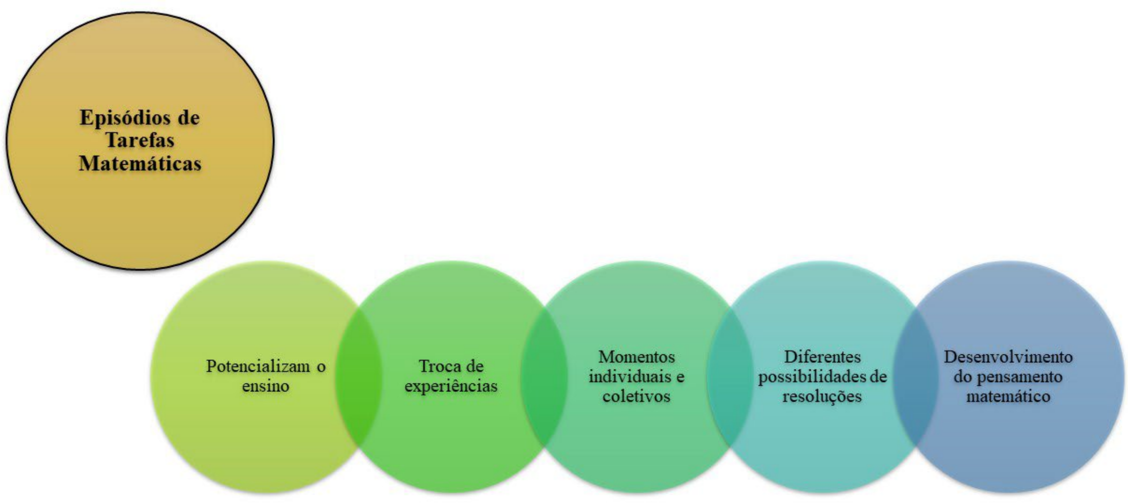


Figura 1. Logo CIAEM-IACME.

Ao considerar as 6 dissertações estudadas verificou-se algumas contribuições para o trabalho com episódios de tarefas matemáticas a partir do seu potencial para o ensino, promovendo a troca de experiências entre docentes e discentes. Desse modo, oportunizam momentos individuais e coletivos entre estudantes, promovendo o reconhecimento de outras possibilidades de resolver uma mesma tarefa a partir dos conhecimentos e experiências. No decorrer dos episódios as pesquisas pontuam o desenvolvimento do pensar matematicamente, envolvendo o pensamento crítico, criativo e o RM.

Conclusões

Com objetivo futuro de investigar o desenvolvimento de competências e habilidades preconizadas pelas DCN-Eng (Brasil, 2019), este trabalho procurou, a partir de um MS, apontar, a partir de dissertações desenvolvidos no âmbito do PPGMAT, contribuições evidenciadas a partir da proposta de trabalho com episódios de resolução de tarefas para a aprendizagem dos estudantes que cursam CDI.

Os resultados apontam que a possibilidade de os estudantes trabalharem de forma colaborativa, envolvendo-se em discussões matemáticas, resolvendo tarefas de natureza exploratória, contribuindo para o desenvolvimento do seu RM. Com exceção do trabalho de Alves (2021), que focou em aspectos relacionados à avaliação, os demais trabalhos analisados traziam propostas de tarefas de natureza aberta, que possibilitavam aos estudantes explorar de forma intuitiva conceitos que ainda eram "novos" para eles (convergência de sequências numéricas, limite no infinito, derivada em um ponto, concavidade do gráfico de uma função). Em especial, puderam raciocinar sobre relações matemáticas, desenvolver conjecturas e elaborar justificativas envolvendo esses diferentes conceitos.

No âmbito das DCN-Eng (Brasil, 2019b), destaca-se que o curso deve proporcionar, ao longo da formação, o desenvolvimento de competências relacionadas à formulação e concepção de soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas. Também, o desenvolvimento de competências mais amplas, envolvendo aspectos relacionados à comunicação, trabalho em equipes e atitude investigativa. Assim, estimula-se a formação de um profissional que, além da forte formação técnica, seja também humano, crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético. O desenvolvimento tanto de competências mais técnicas quanto outras mais gerais apresenta interface direta com os resultados inferidos a partir da proposta de episódios de resolução de tarefas que temos desenvolvido na (nome da universidade omitido).

Referências e bibliografia

Alves, R. M. D. A. (2021). *Análise de um processo avaliativo alinhado a um ambiente de ensino e de aprendizagem de cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/25681

Brasil, Ministério da Educação (2019a). *Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, Brasília, Brasil.* Edição 89. Seção 1, p. 43, 2019

Brasil, Conselho Nacional de Educação (2019b). *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia.* Parecer CNE/CES nº 1/2019. Homologação publicada no DOU de 23/04/2019, Seção 1, p. 109. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/docman/marco-2019-pdf/109871-pces001-19-1/file

Cabral, T. C. B. (2015). Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. *Perspectivas Da Educação Matemática*, *8*(17). Recuperado de https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1397

Fonseca, M. O. D. S. D. (2017). *Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2499

Gonçalves, W. J. (2018). *Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3537

Guimarães, G. G. (2019). Novas tendências de aprendizagem em engenharia: o aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de cálculo diferencial e integral. *Revista de ensino de engenharia*, *38*(1). p. 81-91, ISSN 2236-0158 – DOI: 10.5935/2236-0158.20190008

Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021). Transition from high school to university calculus: a study of connection. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 563-575. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01262-1

Motta, M. S. (2021). Inovação no conhecimento científico por meio de pesquisas inventariantes: uma proposta de percurso metodológico para a realização de um Mapeamento Sistemático de Literatura. In: Motta, M. S & Kalinke, M. A. *Inovações e Tecnologias Digitais na Educação: uma busca por definições e compreensões.* Campo Grande: Editora Life.

Negrini, M. V. (2022). *Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo diferencial e integral em tarefas exploratórias* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29810

Ramos, N. S. (2017). *Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência: episódios de resolução de tarefas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3045

Volpato, M. A. (2022). *Ações do professor para promoção do raciocínio matemático em momentos de discussão coletiva em aulas de cálculo* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) http://riut.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/28931

“¿Es equivalente 3/30 de 3 pizzas a 3/10 de 1 pizza?”

Esther **Esparza** Rodríguez
Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”
México
estherespa25@gmail.com
Eugenio **Lizarde** Flores
Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”
México
life_genio@yahoo.com.mx

Resumen

Esta ponencia tiene el propósito de exponer la reflexión que se hace sobre el Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas que tiene y necesita una profesora de educación primaria, para entender y gestionar situaciones de contingencia, que se presentan al desarrollar una Situación Didáctica que promueve el aprendizaje de la fracción como cociente. Consiste en un estudio de caso de una sesión que forma parte de una Ingeniería Didáctica, cuyo marco analítico es el modelo MTSK. *En la experimentación de una de las situaciones didácticas que conforman la Ingeniería, se manifiesta una situación que se denomina como contingente, desde lo que menciona Rowland (2011) que los profesores experimentados tienen mayor oportunidad de responder a diferencia de los profesores noveles. En este texto se identifica que el conocimiento especializado e interpretativo, en el caso de una profesora, determina la forma en la que entiende y caracteriza los procedimientos, poco usuales o no esperados, que presentan los alumnos.

Palabras clave: MTSK, Fracción, cociente, unidad de referencia, situación de contingencia.

Introducción

La didáctica de las matemáticas permite trazar el proceso de enseñanza, sin embargo, los elementos que interaccionan en una clase de matemáticas pueden ser factores que alteren las condiciones previstas, es decir, siempre está la posibilidad de situaciones de contingencia. El profesor no las puede evitar ni evadir, por lo que la gestión y las decisiones que tome para afrontarlas están indudablemente sujetas a su conocimiento especializado.

En el contenido de esta comunicación se expone la experiencia de enseñanza de una profesora, al aplicar una Ingeniería didáctica sobre Problemas Multiplicativos con Fracciones. El diseño se configura en 13 sesiones, pero se pone atención a la sesión 10, en donde se presenta una situación de contingencia. Al solucionar el problema que se plantea en la sesión, se distingue el caso de Shelsi. La alumna desarrolla un procedimiento adecuado, sin embargo, diferente a los propuestos en el diseño, en consecuencia, distinto a lo esperado por la profesora. El contenido de la sesión 10, es "Fracción como cociente". El planteamiento de esta situación didáctica es el reparto de 3 pizzas entre 10 niños, de manera que les toque la misma cantidad. Los procedimientos que se configuran para el desarrollo de la sesión consisten en dividir cada una de las 3 pizzas en décimos, realizar el reparto y tener como resultado 3/10, considerando como unidad de referencia 1 pizza. Shelsi, propone como respuesta 3/30 pero cambiando su unidad de referencia a las 3 pizzas. Simbólicamente 3/10 no es equivalente a 3/30, sin embargo, la equivalencia tiene sentido, al compararlas desde una perspectiva extractiva que se identifica como: 3/10 de 1 entero y 3/30 de 3 enteros. Ante esta situación de contingencia en la que es imprevisible la idea extractiva de las fracciones, al trabajar la idea de cociente, es preciso identificar la manera en la que la profesora pone en juego el conocimiento especializado e interpretativo para comprender el razonamiento de Shelsi y explicar la equivalencia de ambos resultados. De esta reflexión emergen las oportunidades de conocimiento especializado que es necesario que los profesores tengan cuando el objeto de enseñanza es la fracción como cociente, puesto que puede ser determinante para intervenir en este tipo de contingencia, en la aplicación de una clase.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Shulman (1986), describe 7 categorías en las que caracteriza el conocimiento que los profesores requieren para desempeñar su tarea de enseñanza. En la literatura se encuentran modelos que tienen su base en estas categorías y se focalizan en el conocimiento del profesor de Matemáticas. Ball, Thames y Phelps (2008) presentan el modelo "Conocimiento matemático para la enseñanza(MKT)". Éste está conformado por dos dominios, siguiendo la línea de Shulman; en el dominio matemático distinguen el "Conocimiento Común del Contenido", "Conocimiento Especializado del Contenido" y "Conocimiento en el Horizonte Matemático" y, en el dominio del conocimientodidáctico del contenido están los subdominios "Conocimiento del contenido y los estudiantes", "Conocimiento del contenido y la enseñanza" y "Conocimiento del contenido y el currículo".

Puesto que nos interesa determinar el conocimiento que es propio del profesor que enseña matemáticas, sin considerar el conocimiento común del contenido que puedan utilizar otras profesiones, como se caracteriza en el MKT, tomamos como marco analítico el MTSK. Se centra en el análisis del conocimiento especializado del profesor. Es propuesto por el grupo de investigación del SIDM (SIDM es el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, de Universidad de Huelva(España). En él participan investigadores de universidades de España, Portugal, México, Chile, Perú, Ecuador y Brasil.), Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, entre otros, "…está conceptualizado con base en el hecho de que se usará para la comprensión del conocimiento que el profesor de matemáticas use para enseñar matemáticas…” (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015, p. 595) Sus subdominios y categorías propician un estudio integral del conocimiento especializado, ponen atención al conocimiento que es exclusivo del profesor.

El modelo MTSK está conformado por 2 dominios: Conocimiento Matemático y Conocimientodidáctico del contenido. En el primero se estructuran tres subdominios: Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura Matemática y Conocimiento de la Práctica Matemática.

En el segundo se encuentra el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Conocimientode las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. El conocimiento especializado que la profesora pone en juegoal atender el procedimiento que Shelsi presenta para resolver el problema podemos analizarlo a partir de dos subdominios del modelo MTSK: KoT, (Conocimiento de los Temas) y KSM (Conocimiento de la estructura matemática) por ello se definen en seguida.

a) **Conocimiento de los Temas (KoT** - Knowledge of Topics**):** Describe el conocimiento que elprofesor tiene sobre los temas y contenidos matemáticos que conforman la matemática escolar, “Este conocimiento no se limita al contenido que es objeto de enseñanza y aprendizaje, sino que es un conocimiento profundo del contenido escolar, ya que entendemos que un profesor puede y debe conocer el contenido más allá de lo que sus alumnos aprenden. (Muñoz-Catalán, Contreras,Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015, p.596) En este subdominio se conforman categorías: Procedimientos (¿Cómo se hace?, ¿Cuándo se hace?, ¿Por qué se hace así? Y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; y Fenomenología y aplicaciones.
b) **Conocimiento de la estructura Matemática (KSM):** Analiza las relaciones que se pueden establecer entre los conceptos y/o contenidos matemáticos que conocen los profesores, las cualespueden organizarse para comprender desde el conocimiento fundamental hasta el más avanzado “… permitiendo al profesor comprender las matemáticas escolares desde el punto de vista superior, no solo en cantidad de contenido, sino en percepción de la organización del mismo.” (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015, p. 597) Las categorías son:Conexiones transversales, Conexiones de simplificación, Conexiones de Complejización y Conexiones auxiliares.

Planteamiento del problema

Se reconoce que el papel del profesor es esencial para el logro de los aprendizajes, por lo que resulta interesante investigar la naturaleza de los conocimientos que implica en los procesos para la enseñanza de las matemáticas. Como ya se ha señalado, en la literatura se nombran las dificultades que enfrentan los alumnos en el aprendizaje de las fracciones. Esto indica que se ha privilegiado la investigación de problemas relativos a los procesos de aprendizaje focalizado en los alumnos, por lo tanto, es importante realizar investigaciones en las que su objetivo sea analizar al Profesor. Sobre todo en la enseñanza de contenidos complejos como lo es el contenido matemático de Fracción.

Conocimiento especializado e interpretativo de una profesora en una situación de contingencia (Resultados)

En la situación didáctica, después de la fase de acción donde los alumnos resuelven el problema,se presenta el desarrollo de procedimientos. Su principal propósito es favorecer la construccióndel conocimiento del contenido matemático que parte de procedimientos no convencionales y luego llevan a cierta formalización, caracterizando el saber en juego.

El primer procedimiento consiste en la división de 3 entre 10, usando calculadora; este permite reconocer la división que se puede hacer entre dos números enteros. El segundo, fraccionan cada una de las 3 pizzas en décimos, en su representación gráfica, y realiza el reparto a los 10 niños. El tercer procedimiento se aborda como tal la división de 3 enteros entre los 10 niños; de cada uno de los enteros se obtienen 10 partes, y debido a que son 3 enteros, son 30/10 en total y al ser divididos entre 10, resultan 3/10.

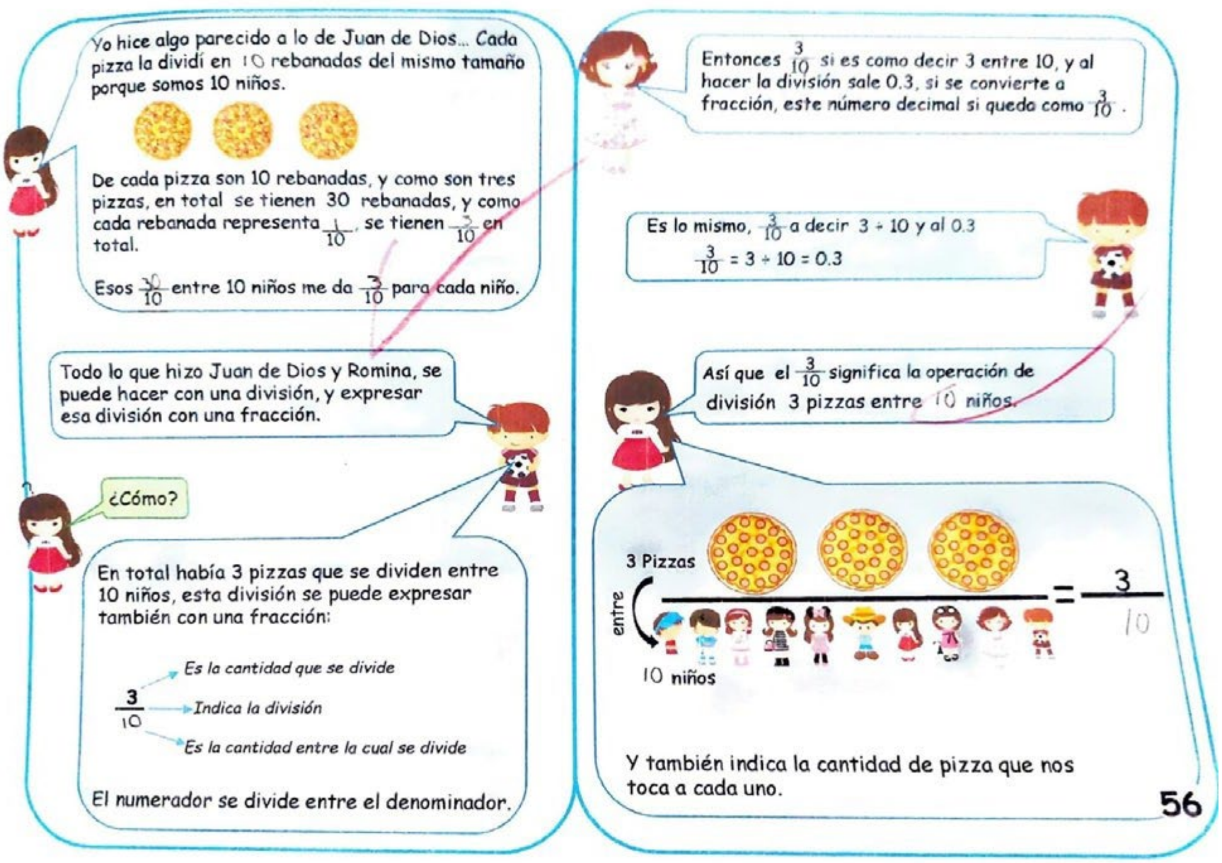


Figura 1. Desarrollo de los procedimientos.

Luego se relaciona el resultado con los dos números enteros delproblema, para expresar el significado de la fracción desde su interpretación como división, como se observa en la *Figura 1. Desarrollo de los procedimientos*. Finalmente se hace una representación gráfica del significado de las dos cantidades que se están dividiendo, indicando ladivisión con una línea fraccionaria. El resultado de Shelsi, se puede abordar desde la fracción como cociente, puesto que cuando en su participación enuncia que les toca 3/30 significa que al dividir las 3 pizzas en 10 partes cada una y contarlas todas son 30 partes, luego ella establece como unidad de referencia el total de las partes y éstas las reparte entre los 10 niños (según solicita el problema propuesto) de tal manera que considera que a cada niño le tocan 3 de las 30 partes, lo cual simboliza como 3/30, haciendo uso de su noción de la fracción como cociente.

En el siguiente fragmento de registro, se reconocen las soluciones al problema que presentan losalumnos.

> Cristian: 3/10
> Ma: 3/10 ¿por qué?
> Cristian: porque son 10 niños y 3 pizzas.Shelsi: también podrían ser 3/30 ¿no?
> Ma: tres ¿qué?
> Shelsi: treintavos.
> Ma: 3/30 ¿por qué?
> Shelsi: porque si se suman todas las partes de la pizza.
> Ma: porque si se suman todas las partes de pizza les da 3/30

Al pasar a las fases de formulación y validación, durante el desarrollo de la clase, Margarita, lacompañera de trabajo de Shelsi, pasa a explicar el procedimiento que les dio este resultado:

> Ma: 3/30, dice Margarita que les tocó en total 3/30, ¿por qué 3/ 30 Margarita?
> Margarita: porque cada pizza está dividida en 10 y de cada pizza les toca de 1 pedazo de pizza
> Ma: de cada pizza les toca un pedazo de pizza.
> Margarita: las dividimos en 10 las tres y fui tomando un pedazo de cada pizza.Ma: a ver Margarita le pasas a dividir esas pizzas… a repartirlas entre los 10.
> Ma: … Bueno Margarita dice que a cada uno le tocan 3/30. A ver, a esa conclusión llegóMargarita. ¿sí? ella sumó todas las rebanadas de la pizza y dice que a cada uno le tocaron 3/30.

A pesar de que la solución de 3/10 es adecuada, se está ante una situación de contingencia, ya que el diseño de la Ingeniería, consideraba con nula posibilidad que el procedimiento de Shelsi,se presentará, debido al cambio de unidad de referencia. Por lo que no se incluye en los procedimientos alternativos. Se debe movilizar cierto conocimiento para asistir el razonamiento de Shlesi. Desde la intervención de la profesora se cuestiona: ¿cómo pone en juego su conocimiento especializado para atender esta situación de contingencia? La profesora refleja un conocimiento sobre la unidad de referencia, al interpretar de dónde se obtienen 3/30, dado que menciona: “…si se toman todas las partes…”, comprende que las alumnas consideran como unidad de referencia el total de las pizzas. Este conocimiento se describe en la categoría de Definiciones, propiedades y sus fundamentos, en el subdominio de KoT. La profesora preguntasi son fracciones equivalentes, es decir, si representan la misma cantidad, para corroborar que ambas respuestas son adecuadas.

> Ma: estaba con 3/30, es una fracción equivalente ¿cómo lo puedo comprobar?
> Shelsi: haciendo una multiplicación.Ma: ¿multiplicando?
> Aos: dividiendo
> Ma: dividiendo, ¿entre cuánto?Aos: entre, 3…. 10
> Ma: ¿cuánto me tiene que dar? … ¿si son 10 niños?
> Edgar: entre 10.

Al escuchar la palabra “equivalente”, tanto los alumnos como la profesora se inclinan por los procedimientos de amplificación y simplificación. Shelsi hace alusión a la amplificación cuandomenciona “multiplicando”, quizá porque ella parte de convertir 3/10 a 3/30. Por otro lado, se reconoce que en la forma como lo realiza la maestra, es pasar de 3/30 a 3/10, es decir, simplificando. El conocimiento que la profesora tiene sobre las fracciones equivalentes, se categoriza en Procedimientos, del subdominio del KoT, puesto que se está discutiendo sobre la amplificación y simplicación.

Al tener el resultado de la simplificación, la maestra no aclara que 3/30 y 3/10 simbólicamente, no son equivalentes, como lo preguntaba Shelsi; sin embargo, si se da cuenta de ello, ya que posterior a esto 1/10 lo relaciona con la multiplicación que Ale realizó en uno de los procedimientos de la fase de acción: 1/10 x 3. Al multiplicar obtiene la representación simbólica de 3/10, que ya es válido para los alumnos, y se justifica el resultado de Shelsi. Entonces el conocimiento que implica la profesora sobre la unidad de referencia, le ayuda a interpretar y validar el procedimiento de Shelsi en la fase de acción, pero no lo refleja para entender y explicar, que 3/10 representa la misma cantidad que 3/30, pero con unidades de referencia diferentes, y no las explicita, en esta parte de validación. Se carece de evidencia para reconocer que la profesora identifica que se multiplica por 3, por que la unidad de referencia, de la cual se está determinado 3/30, es tres veces más grande (tres pizzas), que la unidad de referencia donde se reconocen 3/10 (1 pizza).

El conocimiento sobre el tema (KoT), que se debe poner en juego para atender esta situación decontingencia, es principalmente la unidad de referencia. La maestra logra identificar que la unidad de referencia de Shelsi, no es la misma de los procedimientos indicados en el diseño, lo que le permite interpretar adecuadamente el resultado de 3/30. Pero se encuentra como área de oportunidad, reconocer la manera de demostrar y explicar que el resultado de Shelsi de 3/30, representa la misma porción de pizza que la fracción 3/10.

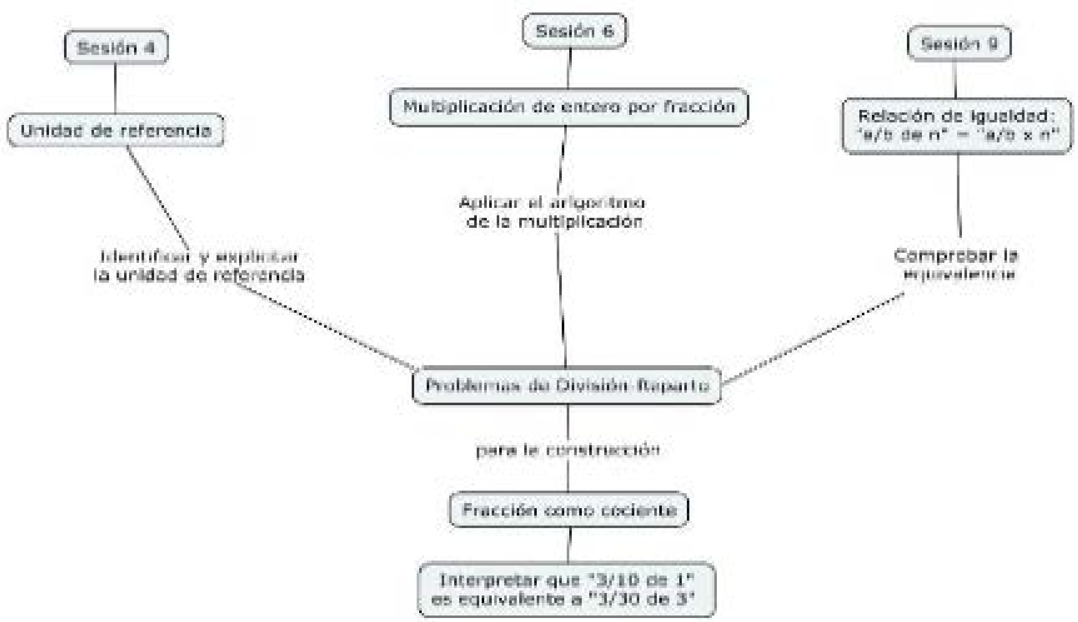


*Figura 2.*Conexión con otras sesiones

Los conocimientos idóneos que se podrían movilizar para proponer la demostración de la equivalencia de ambas respuestas, se encuentran en los contenidos abordados de algunas sesiones anteriores de la Ingeniería Didáctica. En el esquema de la Figura 2. “Conexión con otras sesiones”, se ilustran estas conexiones transversales (KSM). En la sesión 4, se expresan fracciones explicitando la unidad de referencia. El contenido de esta sesión, permite conformar las siguientes aseveraciones en relación a la equivalencia que se quiere demostrar: “3/10 de 1 pizza”, es lo mismo que “3/30 de 3 pizzas”.. Conecta con la sesión 6, en la cual se construyó la multiplicación de una fracción por un número entero. Este conocimiento se emplea en la sesión 9, para entender las expresiones de “a/b de n” y “a/b x n” Freudenthal (1983), al multiplicar. Con la sesión 4, se reconocen las unidades de referencia; la sesión 9, permite expresar la relación de las fracciones con su unidad de referencia (idea extractiva). En las expresiones: “3/10 de 1” y “3/30 de 3”, se encuentra la interpretación de la fracción como operador multiplicativo, y se logra una comprobación simbólica de la equivalencia. Puesto que: “3/10 de 1” es 3/10 x1= 3/10; y “3/30 de 3” es 3/30 x 3= 9/30. 3/10 y 9/30 son fracciones equivalentes. Al simplificar 9/30 por 3 se obtiene 3/10, o bien al expresar en decimal 3/10 = 0.3 y 9/30 = 0.3.

Si interpretamos como cocientes las fracciones de 3/10 y 3/30, no es lo mismo simbólicamente porque no están indicadas sus unidades de referencia. Pero al obtener el número decimal de ambas, se puede reconocer la relación que hay entre sus unidades de referencia, por lo que: 3/10 = 0.3, y 3/30 = 0.1. El 0.3 es tres veces mayor que 0.1, porque la unidad de referencia es tres veces más grande. Otras maneras de reconocer matemáticamente esta equivalencia son: 3/30 aunque simbólicamente es la tercera (1/3) parte de 3/10, al tener una unidad de referencia, tres veces mayor (3/1), que la fracción 3/10, se tiene: 1/3 x 3/1 = 1. También es posible confirmar que 3/30, es lo mismo que 3/10, al indicar de manera simbólica que, 3/30 es un 1/10 de 30/30 y 3/10 es 1/10 de 30/10. Ambas son una décima parte del todo. Por otro lado, cabe la posibilidad de poner en juego conocimiento sobre las conexiones que el contenido de la fracción como cociente puede tener, desde la categoría de conexiones de complejización (KSM). De manera que se relacione con contenidos más avanzados, como el caso de la división de una fracción entre otra fracción. La fracción como cociente, permite comprender uno de los procedimientos que se pueden realizar para la división de fracciones, que se nombra como división de fraccionespor transformación en división de enteros.

Conclusión

Es necesario que los profesores reconozcan la importancia de contar con un conocimiento especializado e interpretativo, sobre el objeto de enseñanza y aprendizaje. Al identificar que este tipo de conocimiento tienen mayores posibilidades de atender oportunamente situaciones de contingencia. Aun cuando en este caso la profesora logra comprender el cambio de unidad de referencia de Shelsi, es importante que el conocimiento sobre la fracción como cociente sea profundo, para explicar a un nivel simbólico la equivalencia de 3/10 y 3/30 en la cantidad de pizza. Conocer en profundidad el tema matemático, le permite a la profesora reconocer relaciones con otros contenidos, y así como con conocimientos matemáticos más avanzados.

Además, emplear el conocimiento para encontrar sentido y explicación a los procedimientos delos alumnos y promover la construcción de un conocimiento matemático.

Referencias y Bibliografía

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textosseleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK): un modelo analitico para el estudio delconocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaseta de la RSME*, 1801-1817.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos*. Libro para el maestro. Sexto grado. Ciudad de México: SEP.

Shulman, L. (2005). *Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma*. 9, 29

Zamorano Vargas, A. (2015). *La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones decontingencia*. Barcelona.

Evaluación de los resultados obtenidos en el rendimiento individual después de la realización de trabajos en grupo, en cursos virtuales de Matemática

María Elena Villanueva Pinedo
Departamento Académico de Matemática, Universidad Nacional Agraria la Molina
Perú
villanuepi@lamolina.edu.pe

Resumen

El estudio se llevó a cabo con estudiantes (n=120) de los ciclos virtuales 2020 - I y II, 2021 - I y II, de diferentes carreras relacionadas con el agro y con diversas habilidades y conocimientos. La actividad consistió en resolución de ejercicios y/o problemas, en grupo, en un aula virtual y en una sesión síncrona, sobre los temas (inecuaciones, funciones y derivadas). ¿Se encuentran diferencias en el rendimiento, medido a través del puntaje obtenido en el Control Individual (CI) después de haber realizado el trabajo en grupo (TG)?. El objetivo fue determinar cómo fue la evolución del rendimiento. Se encontró evidencia de la efectividad de la realización del TG y se debe estar a favor de este tipo de metodología activa porque apoyan el proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática y se recomienda realizar este tipo actividad, con frecuencia, tanto en clases virtuales como presenciales y evaluar.

Palabras clave: trabajo en grupo; clases virtuales; matemática universitaria; estadística no paramétrica.

Introducción

Por esta coyuntura sanitaria (Covid19) se pasó de un ambiente presencial a uno virtual y se tuvo muchos desafíos al afrontar este cambio inesperado de forma casi inmediata. Se empezó a realizar las modificaciones, sin conocimiento teórico ni técnico de cómo llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente virtual, adquiriendo toda la experiencia sobre la marcha. Este trabajo fue elaborado en base a los resultados obtenidos después de haber realizado clases virtuales para los años 2020 y 2021.

Los estudiantes requieren además de conocimientos, el desarrollo de habilidades que les permitan un desempeño eficiente en el ambiente estudiantil y posteriormente en el profesional, y una de estas habilidades importantes es el de resolver problemas (Villanueva, 2009).

Se entiende como problema al conjunto de ejercicios aplicación y ejercicios con texto (matemáticos o no) que se utilizan para aplicar los conocimientos adquiridos y fijados. Para los problemas con texto no se utilizan los signos matemáticos sino medios de lenguaje común y contienen implícitamente el llamado a buscar la solución con los recursos matemáticos como el modelo matemático. En la resolución de estos problemas se hace referencia a la estructuración metodológica general que desde G. Polya se conoce que este proceso tiene cuatro etapas generales: Orientación hacia el problema, trabajo en el problema, Solución del problema y Evaluación de la solución y de la vía (Torres, 2003).

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, bajo una modalidad virtual también se pueden implementar metodologías activas, como el trabajo en grupo (TG) en donde se trabaja cooperativa y colaborativamente e interactuando para un aprendizaje eficaz.

Encontramos el trabajo en grupo en Pimienta (2012) denominado como taller y definido como una estrategia grupal que promueve el aprendizaje colaborativo y en el que los estudiantes trabajan la aplicación de los conocimientos adquiridos en una tarea específica o actividad generando un producto que es el resultado del aporte de cada uno de los integrantes del grupo. Para su realización se requiere tener a disposición un ambiente flexible y contar con los recursos y/o herramientas para lograr el producto esperado. Las ventajas de la utilización del taller permiten encontrar la solución de problemas, realizar tareas de aprendizaje complejas y desarrollar el pensamiento crítico.

Se acepta que trabajando en grupo más estudiantes aprenden y con frecuencia los docentes organizan y realizan determinadas actividades en sus cursos mediante pequeños grupos de estudiantes. Esto se realiza de acuerdo a criterios intuitivos y el docente puede anticipar algunas dificultades en el desarrollo, como la no participación efectiva de todos los estudiantes en el trabajo final realizado. Además, los docentes observan la manifestación de un conjunto de habilidades y conocimientos más complejos (Rué, 2009).

Cualquier estrategia adoptada para el proceso de enseñanza-aprendizaje debería incidir positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes, para el estudio este se midió a través del puntaje obtenido en los Controles Individuales (CI) después de realizar el trabajo en grupo (TG) y las exposiciones orales (EO). ¿Se obtienen diferencias en el rendimiento (puntaje obtenido en el CI) en los diferentes ciclos virtuales después de haber realizado esta actividad?

Los objetivos fueron determinar cómo fue la evolución del rendimiento académico a través de los resultados del CI, si ha ido mejorando a medida que avanzó el tiempo o permaneció igual; si existen diferencias en el rendimiento entre los grupos, de los cuatro ciclos desarrollados de forma virtual y si después del análisis se tiene evidencia para considerar a la actividad TG con EO como estrategia metodológica para mantener o mejorar los resultados del rendimiento en los cursos de matemática en línea.

Materiales y métodos

El trabajo se llevó a cabo con cuatro grupos de estudiantes (n=120), que recién ingresaron a una Universidad pública a diferentes carreras relacionadas con el agro y con diversas habilidades y conocimientos, para los ciclos virtuales 2020-I, 2020-II, 2021-I y 2021-II.

La actividad consistió en resolución de ejercicios y/o problemas, en pequeños grupos, en el aula virtual y en una sesión síncrona, sobre los diferentes temas desarrollados en el primer curso de matemática (inecuaciones, funciones y derivadas). Luego se realizaron Exposiciones Orales (EO), de un integrante de cada grupo, de la solución de un ejercicio y/o problema. Por último, respondieron un cuestionario corto (CI) y con la información de los puntajes obtenidos, se realizó la evaluación del rendimiento.

Se inicia el análisis de los resultados utilizando la organización de datos de la Estadística Descriptiva (Miranda & Salinas, 2012) y después de acuerdo a los objetivos, las variables, las hipótesis planteadas y la cantidad de datos se utilizó una técnica de la estadística no paramétrica, específicamente la Prueba de Kruskal-Wallis que compara una variable para grupos independientes (Quispe & Eyzaguirre, 2004). Para ello se planearon las siguientes hipótesis:

Hipótesis:

H_0: No hay diferencias entre las medianas de los puntajes obtenidos en los CI para los cuatro ciclos virtuales.
H_a: Hay diferencias entre las medianas de los puntajes obtenidos en los CI para los cuatro ciclos virtuales.

Resultados y discusión

A continuación se presentan los siguientes resultados: Puntaje aprobado = APROB ≥ 11

Tabla 1
Tabla de Frecuencias – Control Individual (CI) – Ciclo 2020 I

CI (puntaje obtenido)	Frecuencia Absoluta No de estudiantes f_i	Frecuencia Relativa fr_i	Frecuencia Porcentual P_i
APROB	23*	0,7419	74,19
DESAPROB	8*	0,2581	25,81
Total	31*	1,0000	100,00

Fuente: Acta de notas – 2020 I*

De la Tabla 1, se tiene que 74,19 % de los estudiantes obtienen un puntaje aprobado (APROB).

Tabla 2
Tabla de Frecuencias – Control Individual (CI) – Ciclo 2020 II

CI (puntaje obtenido)	Frecuencia Absoluta No de estudiantes f_i	Frecuencia Relativa fr_i	Frecuencia Porcentual P_i
APROB	17*	0,7727	77,27
DESAPROB	5*	0,2273	22,73
Total	22*	1,0000	100,00

Fuente: Acta de notas – 2020 II*

De la Tabla 2, se tiene que 77,27 % de los estudiantes obtienen un puntaje aprobado (APROB).

Tabla 3
Tabla de Frecuencias – Control Individual (CI) – Ciclo 2021 I

CI (puntaje obtenido)	Frecuencia Absoluta No de estudiantes f_i	Frecuencia Relativa fr_i	Frecuencia Porcentual P_i
APROB	26*	0,7879	78,79
DESAPROB	7*	0,2121	21,21
Total	33*	1,0000	100,00

Fuente: Acta de notas – 2021 I*

De la tabla 3, se tiene que 78,79 % de los estudiantes obtienen un puntaje aprobado (APROB).

Tabla 4
Tabla de Frecuencias – Control Individual (CI) – Ciclo 2021 II

CI (puntaje obtenido)	Frecuencia Absoluta No de estudiantes f_i	Frecuencia Relativa fr_i	Frecuencia Porcentual P_i
APROB	29*	0,8529	85,29
DESAPROB	5*	0,1471	14,71
Total	34*	1,0000	100,00

Fuente: Acta de notas – 2021 II*

De la Tabla 4, se tiene que 85,29 % de los estudiantes obtienen un puntaje aprobado (APROB).

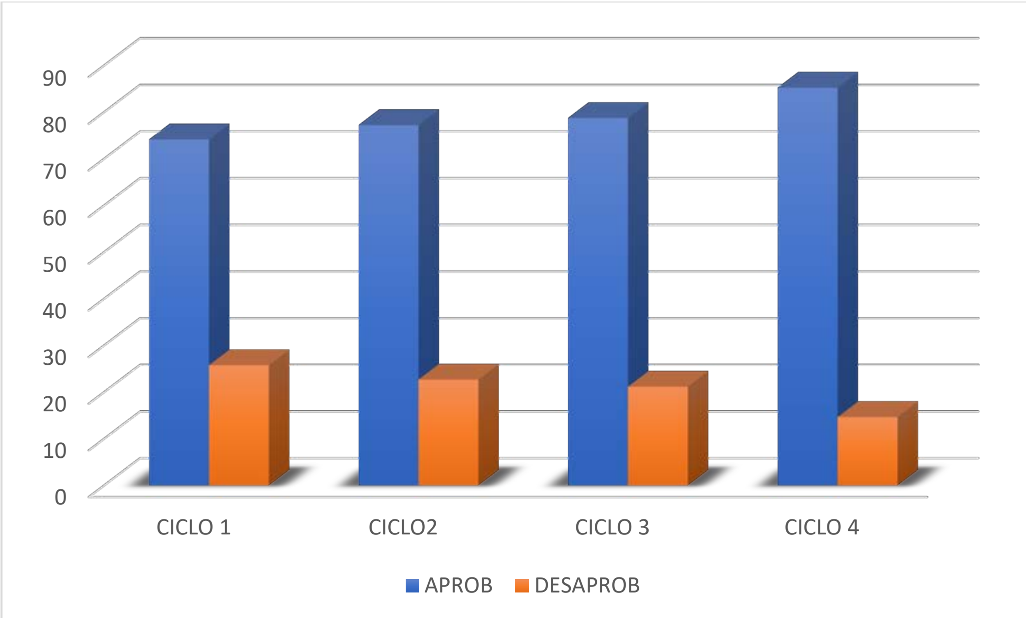


Figura 1. Porcentaje de aprobados y desaprobados en el CI.

Se observa en la *Figura 1*, que el porcentaje de estudiantes aprobados y desaprobados es similar para los cuatro ciclos.

A continuación, las tablas y figuras de las salidas, después de la ejecución, del programa SPSS para la prueba de hipótesis:

Tabla 5

Resumen de la información (No de estudiantes / Ciclo)

CICLO	Casos					
	Válido		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
2020 I	31	100,0%	0	0,0%	31	100,0%
2020 II	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%
2021 I	33	100,0%	0	0,0%	33	100,0%
2021 II	34	100,0%	0	0,0%	34	100,0%

Fuente: Acta de notas - De la salida del SPSS.

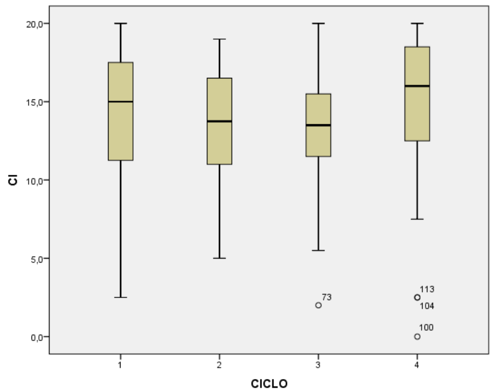


Figura 2. Diagrama de Cajas (Ciclo - Puntaje Obtenido (CI)).

El segmento que divide a la caja en dos partes es la mediana y permite identificar si la distribución de los datos es simétrica o asimétrica. En la *Figura 2*, se observa que este segmento, para los cuatro casos, casi divide en la mitad a las cajas por lo que la distribución de los datos o información se puede considerar simétrica.

Prueba de normalidad, para cada uno de los grupos – Hipótesis:
H_0: La variable tiene distribución normal ($p > 0,05$)
H_a: La variable no tiene distribución normal ($p < 0,05$)

Tabla 6
Pruebas de normalidad

CICLO	Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig,	Estadístico	gl	Sig.
2020 I	0,252	31	0,000	0,845	31	0,000
2020 II	0,112	22	0,200	0,953	22	0,370
2021 I	0,124	33	0,200	0,970	33	0,482
2021 II	0,161	34	0,026	0,861	34	0,000

Fuente: De la salida del SPSS.

Para analizar la normalidad de los datos se realizan las pruebas que aparecen en la Tabla 6. Como se tiene menos de 50 datos (para cada grupo) se utiliza la Prueba de Shapiro-Wilk y se obtiene que para dos ciclos, los datos se distribuyen normalmente y para los otros dos no.

Aplicación de la técnica de la estadística no paramétrica, la Prueba de Kruskal-Wallis:

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de CI es la misma entre las categorías de CICLO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,285	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significación es ,05.

Figura 3. Resumen del contraste de hipótesis.

De la *Figura 3*, el p-valor = 0,285 > 0,05. La H_0 no se rechaza, por lo tanto, no hay diferencias entre las medianas de los puntajes obtenidos en los CI, para los cuatro grupos (Ciclos Virtuales).

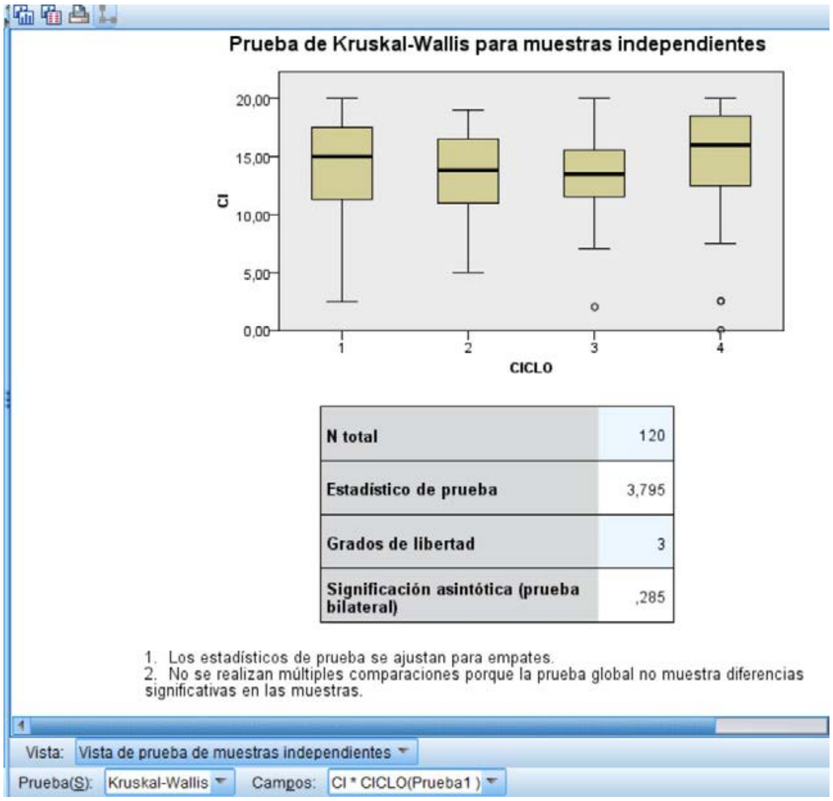


Figura 4. Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes.

No se realizan las comparaciones de las medianas entre muestras porque estas son similares. Ver *Figura 4*.

Conclusiones

El trabajo en grupo (TG) para la resolución de ejercicios y/o problemas y las exposiciones orales (EO) en conjunto, es una estrategia metodológica que permite a los estudiantes intercambiar conocimientos y experiencias, interactuar y aprender con sus pares y ejercitar su comunicación eficaz.

Se verifica y obtiene evidencias sobre la efectividad de la realización de la actividad trabajo en grupo (TG) con exposiciones orales (EO). Esto se observa en los resultados obtenidos del rendimiento académico en los Controles Individuales (CI) para los cuatro ciclos estudiados. Sin duda, apoya el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Se recomienda utilizar con frecuencia este tipo de estrategia metodológica, en los cursos de matemática con clases virtuales o presenciales, elaborando tareas o actividades que incluyan la necesidad de trabajar en grupo la resolución de ejercicios y/o problemas presentando lo encontrado, fomentando de esta manera el trabajo en equipo y la comunicación oral, evaluando constantemente para realizar la retroalimentación y la mejora para aplicaciones futuras.

Referencias y bibliografía

Pimienta, J. (2012). *Estrategias de enseñanza-Aprendizaje. Docencia Universitaria basada en competencias*. México: Pearson Educación.

Quispe, J e Eyzaguirre, R. (2004). *Estadística no paramétrica*. Laboratorio de Simulación. Lima: UNALM.

Rué, J. (2009). *El aprendizaje Autónomo en Educación Superior*. Madrid: NARCEA, S. A. de Ediciones.

Torres, P. (2003). *Estrategias de Resolución de Problemas*. Lima: UPC.

Miranda, F. y Salinas, J. (2012). *Estadística General*. Lima: EDIAGRARIA-UNALM.

Villanueva, M. (2009). Relación entre las notas de matemática obtenidas en el nivel secundario y en el curso de matemática de los estudiantes que recién ingresan a la universidad. *Enseñanza de las matemáticas Actas 2009 IV Coloquio Internacional*. Lima: Departamento de Ciencias – PUCP.

Exploración del razonamiento estadístico en estudiantes de las Ciencias de la Salud mediante entrevistas cognitivas

Jaime Andrés **Gaviria** Bedoya
Universidad de Antioquia
Colombia
jaime.gaviria@udea.edu.co
Difariney **González** Gómez
Universidad de Antioquia, Facultad Nacional de Salud Pública
Colombia
difariney.gonzalez@udea.edu.co
Jhony Alexander **Villa** Ochoa
Universidad de Antioquia, Facultad de Educación
Colombia
jhony.villa@udea.edu.co

Resumen

Las entrevistas en voz alta se han utilizado generalmente en la revisión de instrumentos que evalúan conceptos específicos en estadística. Un uso poco explorado de estas entrevistas es el de proveer evidencia de los procesos de razonamiento estadístico de los estudiantes a nivel universitario. El objetivo de este estudio es mostrar el uso de las entrevistas en voz alta como una estrategia para explorar los procesos de razonamiento de estudiantes de posgrado de las Ciencias de la Salud de una universidad colombiana, cuando diligencian un cuestionario diseñado para evaluar el razonamiento estadístico. Se presentan los resultados parciales del pretest en cuanto a la evidencia de la validez de la respuesta a los procesos de los estudiantes mediante entrevistas en voz alta. Estas mostraron ser una estrategia que permitió evidenciar los razonamientos estadísticos correctos e incorrectos de los estudiantes frente a una muestra de 26 ítems del instrumento.

Palabras clave: Educación matemática; Educación superior; Aprendizaje; Evaluación; Investigación educativa; Estadística; Razonamiento estadístico; Medellín, Colombia.

Introducción

El razonamiento estadístico es considerado una de las metas de aprendizaje importantes en la formación de los estudiantes que toman cursos de estadística (Ben-Zvi et al., 2018; Garfield & Ben-Zvi, 2004). Es mediante este razonamiento que las personas pueden elaborar procesos de razonamientos abstractos e identificar patrones que les permita realizar inferencias y obtener conclusiones más allá de lo que revelan los datos (delMas, 2004). Distintas revisiones de literatura coinciden en la importancia de usar instrumentos validados para medir este razonamiento (Langrall et al., 2017; Zieffler et al., 2008).

En el proceso de diseño y validación de un instrumento de medida, generalmente los investigadores realizan entrevistas con estudiantes de la población objetivo con la finalidad de poner a prueba el instrumento y realizar correcciones de redacción que permitan mayor claridad de los enunciados. En particular, las entrevistas en voz alta han sido utilizadas para validar procesos de pensamiento en distintos campos, entre los que se incluyen muchas áreas de la investigación educativa (Leighton, 2017; Reinhart et al., 2022).

Las entrevistas en voz alta también pueden servir para proveer evidencia de la validez de los procesos de respuesta de los estudiantes (Sabbag, 2016). Es así como Reinhart et al. (2022) plantean que este tipo de entrevistas cognitivas pueden servir como una herramienta para que los investigadores exploren el razonamiento estadístico de los estudiantes que toman cursos de estadística. El objetivo de este estudio es mostrar el uso de las entrevistas en voz alta como una estrategia para explorar los procesos de razonamiento de estudiantes de posgrado de las Ciencias de la Salud de una universidad colombiana, cuando diligencian un cuestionario diseñado para evaluar el razonamiento estadístico.

Método de investigación

El método de investigación utilizado fue cualitativo, basado en un paradigma pragmático y una epistemología interpretativa (Creswell, 2014). La muestra se seleccionó por conveniencia, dadas las características del curso y el escaso número de estudiantes de posgrado matriculados. El diseño de investigación correspondió a un estudio de caso, donde se realizó un análisis en profundidad de los procesos de razonamiento estadístico de un grupo de estudiantes de posgrado de las Ciencias de la Salud (Gillham, 2000).

La evidencia de la validez de la respuesta a los procesos de los estudiantes se realizó mediante entrevistas cognitivas. En particular se realizaron entrevistas en voz alta, las cuales han sido utilizadas en la investigación en educación estadística con el fin de estudiar conceptos erróneos de los estudiantes, mejorar instrumentos de medida y materiales de clase entre otros (Leighton, 2017; Reinhart et al., 2022). Para realizar las entrevistas se seguirá el siguiente procedimiento (Reinhart et al., 2022):

Primero, se diseñó un plan de investigación y de los recursos. Dado que ya se cuenta con el aval del comité de ética investigación área de Ciencias Sociales, Humanidades y Artes de la universidad, se solicitó la autorización mediante una comunicación oficial por correo electrónico a los directores de programas de posgrado, informando sobre la importancia del proyecto y los beneficios para los estudiantes. Para el instrumento se eligió un formato de prueba objetiva de opción múltiple con única respuesta y verdadero-falso y las áreas de contenido a evaluar se corresponden con el programa de estudios de los cursos de bioestadística de primer año de los estudiantes de maestría y doctorado, e incluyen estadística descriptiva, probabilidad, inferencia estadística paramétrica y no paramétrica.

En cuanto a los recursos tecnológicos, el instrumento se aplicó de forma online mediante la plataforma Moodle de la universidad y las entrevistas se realizaron y grabaron online mediante Microsoft Teams. Los estudiantes leyeron y aceptaron el consentimiento informado. El investigador principal realizó las entrevistas y contó con el apoyo y supervisión de los asesores en la revisión de los cambios en los ítems del instrumento si fuesen necesarios.

Segundo, se eligieron los ítems a incluir en las entrevistas mediante dos tipos de fuentes: 1) instrumentos para el razonamiento estadístico reconocidos, publicados y validados y 2) se construyeron ítems nuevos de investigaciones publicadas en las áreas de las Ciencias de la Salud. Se incluyeron 26 ítems para las entrevistas en voz alta.

Luego, se definió el tipo de muestra y la forma de acceder a los participantes. Se usó una muestra no probabilística intencional debido a que la escogencia de los participantes es por su concocimiento especializado en biostadísitca a nivel de posgrado. La selección de los participantes se realizó mediante el envió de invitación por correo electrónico a los coordinadores de los programas de maestría y doctorado, a los profesores encargados de los cursos de bioestadística en los niveles de posgrado de la facultad y a los estudiantes de maestría y doctorado de algún programa de posgrado de las Ciencias de la Salud. Se contó con la participación de cuatro estudiantes voluntarios, a quienes se les dio a conocer el consentimiento informado con la información del proyecto de investigación, los procedimientos, los beneficios y riesgos, así como el manejo de la confidencialidad de los datos del participante. Para respetar el anonimato, en los resultados los estudiantes se identificaron con un número.

Finalmente se procedió a la realización de las entrevistas. El investigador principal fue el entrevistador y seleccionó un grupo de ítems del instrumento para que fueran analizadas por los estudiantes voluntarios. Durante la entrevista se les solicitó a los estudiantes que verbalizaran todo lo que estaban pensando mientras diligenciaban el instrumento. Esto incluía leer instrucciones, explicar soluciones a preguntas y describir cuestiones que encuentren confusas. Este tipo de entrevista es una parte muy importante del desarrollo del instrumento, porque ayudará a exponer las fallas en el instrumento que deben reescribirse o rediseñarse, además de brindar información que informará las consideraciones de puntuación para el uso futuro del instrumento. Además, con los resultados de las entrevistas se buscó indagar por la comprensión de los estudiantes acerca de las preguntas del instrumento y proporcionar evidencia de validez del proceso de respuesta (Sabbag, 2016).

Análisis de la información

El análisis de las entrevistas siguió estas etapas (Creswell, 2014): Primero se organizaron y prepararon de los datos. Esto implicó la transcripción de las entrevistas, organización de las videograbaciones y sistematización de las respuestas al cuestionario. Luego, se procedió a la lectura de todos los datos. Para ello se revisaron las videograbaciones de las entrevistas y los investigadores tomaron nota de los aspectos más relevantes en cuanto a los razonamientos de los estudiantes sobre los ítems del instrumento. Por último se realizó la codificación de los datos. Para facilitar el análisis de las entrevistas se utilizó el siguiente sistema de codificación de las respuestas de los estudiantes, el cual fue tomado de Reinhart et al. (2022): ¿Cuál fue la respuesta del estudiante? (ingrese la opción de letra) y ¿Qué usó para obtener su respuesta? (Razonamiento estadístico correcto, Razonamiento estadístico incorrecto, Suposición aleatoria, Redacción de la respuesta, Conocimiento del área temática, Eliminación u Otro).

Con este sistema de codificación, se compararon las respuestas de los estudiantes a los ítems y se determinó si era necesario realizar cambios al ítem en específico. El investigador principal y al menos uno de sus asesores revisaron las grabaciones de las entrevistas y asignaron códigos a cada ítem. Por cuestiones de espacio solo se muestra el análisis de dos de las 26 preguntas analizadas en las entrevistas.

Resultados

A la fecha cuatro estudiantes de posgrado han aceptado participar en las entrevistas en voz alta y se presentan los resultados parciales de dos de ellas. Los estudiantes oscilan en edades entre 36 y 50 años, son estudiantes activos del doctorado en salud pública y están entre el sexto y el noveno semestre. Han visto en su formación posgraduada entre cuatro y cinco cursos de estadística. En relación con el instrumento para el razonamiento estadístico, el estudiante 1 obtuvo un porcentaje de respuestas correctas de 58%, mientras que el estudiante 2 obtuvo un 46%, evidenciando una diferencia en sus puntuaciones. Las estrategias más usadas por el estudiante 1 para responder el cuestionario fueron el razonamiento correcto, el conocimiento del área y eliminación. Por su parte el estudiante 2 usó principalmente el conocimiento del área y la suposición aleatoria. A continuación, se muestra el análisis para algunos ítems del instrumento.

Enunciado común preguntas 1 a 2

Los investigadores de un estudio de cohorte querían determinar si la ingesta de grandes cantidades de vitamina E protegía contra el cáncer de próstata en los varones de Finlandia. Los participantes pertenecían a un total de 290.406 varones residentes en el suroeste de Finlandia, todos ellos fumadores con edades comprendidas entre los 50 y los 69 años. Un total de 29.133 finlandeses se ofrecieron a participar en el estudio y fueron divididos aleatoriamente en dos grupos: 14.564 tomaron un suplemento de vitamina E y 14.569 no lo hicieron (grupo placebo). Los investigadores siguieron a todos los hombres durante ocho años y determinaron cuántos habían desarrollado cáncer de próstata (Heinonen et al., 1998).

Pregunta 1: ¿Cuál es la población de este estudio?

a. Los 29.133 hombres de Finlandia fueron reclutados con edades comprendidas entre los 50 y los 69 años.
b. Los 290.406 hombres de Finlandia con edades comprendidas entre los 50 y los 69 años.
c. Los 14.564 hombres finlandeses de entre 50 y 69 años que tomaron vitamina.

Para esta pregunta ambos estudiantes seleccionaron la respuesta incorrecta c, lo que muestra un razonamiento erróneo sobre la identificación de la población del estudio. Cuando se les indagó a ambos estudiantes por la razón de haber seleccionado la opción de respuesta, ambos coincidieron en que habían pensado que esa debería ser la población de estudio dado que el interés de la investigación estaba enfocado a solo el grupo que tomó la vitamina E, lo que evidencia una falta de comprensión en cuanto a los ensayos clínicos en medicina. Identificar la población de un estudio es fundamental en la formación de los estudiantes de las Ciencias de la Salud, dado que es uno de los primeros pasos en el plan de análisis de un problema de investigación (Ocaña-Riola, 2016).

Pregunta 2: ¿Cuál es la razón principal por la que el estudio utilizó la asignación aleatoria?

a. Para garantizar que los grupos sean similares en todos los aspectos, excepto en el nivel de vitamina E.
b. Para garantizar que una persona no sepa a que grupo fue asignado.
c. Para garantizar que los participantes del estudio sean representativos de la población en general.

Mientras que el estudiante 1 respondió correctamente (opción a), el estudiante 2 respondió incorrectamente con la opción b. Los razonamientos erróneos encontrados en este estudio son consistentes con lo encontrado por Fry (2018) en la investigación sobre la distinción entre muestreo aleatorio y la asignación aleatoria. Ella afirma que, en un estudio cualitativo con estudiantes universitarios de un curso introductorio de estadística, una pequeña pero notable porción de estudiantes continuó mostrando confusión entre los dos tipos de diseño de estudio.

Conclusiones

El presente estudio se enmarca dentro de la investigación en educación estadística en cuanto al uso de las entrevistas en voz alta como una estrategia para explorar el razonamiento estadístico de los estudiantes de posgrado de las Ciencias de la Salud. Los resultados muestran que las entrevistas en voz alta son una herramienta útil que permite no solo la revisión de la redacción de los ítems de un instrumento de medida, sino además permiten evidenciar procesos de razonamiento correcto e incorrecto. Estos resultados muestran que se debe seguir trabajando en estrategias de enseñanza y aprendizaje de la estadística, centradas en el estudiante como lo recomiendan los lineamientos para la instrucción y la enseñanza GAISE (Carver et al., 2016).

Bibliografía y referencias

Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.). (2018). *International handbook of research in statistics education*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-66195-7

Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J., Horton, N., Lock, R., Mocko, M., Rossman, A., Holmes Rowell, G., Velleman, P., Witmer, J., & Wood, B. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education: College Report*. https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/gaisecollege_full.pdf

Creswell, J. (2014). *Research Design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (4°). SAGE.

delMas, R. (2004). A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 79–95). Springer Netherlands. https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-2278-6_4

Fry, E. B. (2018). Students' conceptual understanding of the relationship between study design and conclusions in an introductory statistics course. *The International Conference on Teaching Statistics*. http://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_8C3.pdf

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.)). Springer Dordrecht. https://link.springer.com/book/10.1007/1-4020-2278-6

Gillham, B. (2000). *Case study: research methods*. Continuum.

Heinonen, O. P., Albanes, D., Virtamo, J., Taylor, P. R., Huttunen, J. K., Hartman, A. M., Haapakoski, J., Malila, N., Rautalahti, M., Ripatti, S., Mäenpää, H., Teerenhovi, L., Koss, L., Virolainen, M., & Edwards, B. K. (1998). Prostate cancer and supplementation with α-tocopherol and β-carotene: Incidence and mortality in a controlled trial. *Journal of the National Cancer Institute*, *90*(6), 440–446. https://doi.org/10.1093/jnci/90.6.440

Langrall, C., Makar, K., Shaughnessy, M., & Nilsson, P. (2017). Learning and Teaching Mathematics Content: Probability and Statistics. In J. Cai (Ed.), *Compendiium for research in mathematics education* (pp. 490–525). National Council of Teachers of Mathematics.

Leighton, J. P. (2017). *Using think-aloud interviews and cognitive labs in educational research*. New York: Oxford University Press.

Ocaña-Riola, R. (2016). The Use of Statistics in Health Sciences: Situation Analysis and Perspective. *Statistics in Biosciences*, *8*(2), 204–219. https://doi.org/10.1007/s12561-015-9138-4

Reinhart, A., Evans, C., Luby, A., Orellana, J., Meyer, M., Wieczorek, J., Elliott, P., Burckhardt, P., & Nugent, R. (2022). Think-Aloud Interviews: A Tool for Exploring Student Statistical Reasoning. *Journal of Statistics and Data Science Education*, *30*(2), 100–113. https://doi.org/10.1080/26939169.2022.2063209

Sabbag, A. (2016). *Examining the relationship between statistical litaracy and statistical reasoning(Tesis de doctorado)* [University of Minessota]. https://conservancy.umn.edu/handle/11299/182193

Zieffler, A., Chang, B., Holleque, K., Garfield, J., Dupuis, D., & Alt, S. (2008). What Does Research Suggest About the Teaching and Learning of Introductory Statistics at the College Level? A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education*, *16*(2), 26. https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889566

Fortaleciendo el pensamiento numérico con juegos matemáticos

Manuel Fdo. **Alva-Alejos**
Universidad Autónoma de Chiapas
México
manu3l.alva@gmail.com

Resumen

Se realizará una serie de ejercicios dinámicos apoyados con material didáctico (palillos, tapas de botellas y plastilina). Para fomentar el pensamiento numérico por a través de situaciones (propuestas) con diferentes grados de dificultad; para emplear conceptos matemáticos como: comparar, estimar, sumar, reconocimiento de patrones, entre otros. A fin de crear una atmosfera adecuada para generar el aprendizaje y la enseñanza al mostrar distintas soluciones ante un mismo problema planteado; para contextualizar los conceptos requeridos y empleados al momento ante la resolución de los mismos.

Palabras clave: Pensamiento numérico; conceptos matemáticos; aprendizaje; resolución; contextualizar.

Introducción

El taller pretende enseñar y demostrar diferentes alternativas ante la resolución de un mismo problema, además de iniciar el interés en los alumnos del nivel básico con la ayuda de los juegos matemáticos por medio de las destrezas y bondades en un determinado contexto (Caneo, 1987), dado en cada una de las diferentes situaciones planteadas; para desarrollar y fomentar el pensamiento numérico (Castro, 2008) a la vez que se trabaja para fortalecer el pensamiento geométrico.

Propósitos y Alcances

En cada una de las diferentes situaciones seleccionadas para poner en práctica conocimientos matemáticos como es el comparar (cantidades grandes y pequeñas), estimar (cuánto me falta o cuánto me pasé, aproximarnos a la suma que piden), sumar (¿Me da lo que piden?), reconocimiento de patrones (aproximación a una estrategia de solución) percibidos por la resolución previa de un problema similar.

Con las nociones de la geometría al emplear conceptos sencillos, pero importantes para resolver los problemas selectos (catetos, hipotenusa, tipos de triángulos y sus características).

Método

Con la ayuda de una presentación en diapositivas de un software específico o por medio de la impresión de los problemas planteados (seis situaciones seleccionadas), tres referentes al acomodo de números. De los cuales dos son en forma de triángulo y el tercero en forma de una estrella formada por la unión de dos cuadrados de cuatro puntos; sobre puestos entre sí como se muestra en la figura.

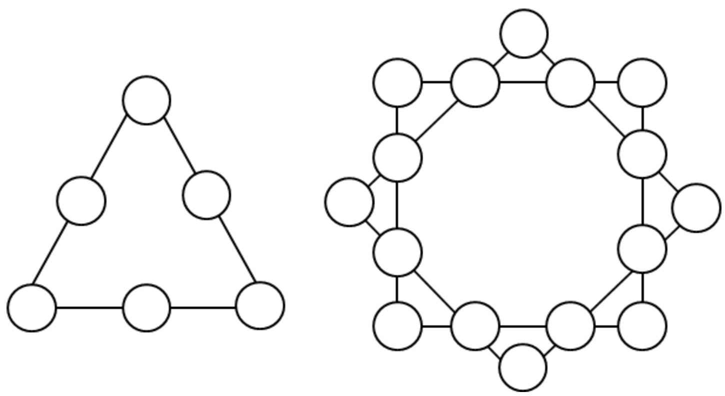


Figura 1. Referencia de las situaciones 1, 2 y 3 con respecto a la figura formada.

Posteriormente se utilizarán lápices o palillos y plastilina como materiales, para manipular y dimensionar las situaciones propuestas. La primera con 6 lápices deberá formar cuatro triángulos del mismo tamaño o moverán tres lápices para formar 4 cuadrados del mismo tamaño a partir de 5 cuadros.

En cada momento de las actividades y con el desarrollo de cada participante se espera generar la compresión (finalidad) pretendida en los ejercicios a resolver

Tabla 1
Secuencia y grado de dificultad de los ejercicios.

Momento	Desarrollo	Forma Geométrica	Grado de dificultad
1	Del 1 al 6, en ternas que sumen 10	Triángulo	Bajo
2	Del 1 al 9, en ternas que sumen 20	Triángulo	Medio
3	Del 1 al 16, en cuartetos que sumen 34	Estrella de 8 picos	Alto

Diseños Didácticos

En las primeras situaciones se utiliza material como las tapas de botellas a manera que sea interactiva y dinámica, para fortalecer el pensamiento numérico, así como el conteo y formas de representar un mismo número, de esta manera conocerán los números en su máxima contextualización. Por ejemplo, comúnmente escribimos el símbolo 5 para hacer referencia al cinco, pero este es igual a decir 4+1, 3+2 y el inverso de los mismos 1+4 o 2+3 de acuerdo con Castro (2008), en su artículo "Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica". Con ello se abarcando de manera completa la suma y resta, aunque Castro (2008), lo maneja como descomposición y composición de los números.

Así mismo trabajaríamos lo que llama Vergnaud (1993) "Campos Conceptuales", menciona que son situaciones complejas que se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias. Y en cada situación propuesta se aumenta el grado y dificultad; pero partiendo de lo básico y elemental.

Estas situaciones o ejercicios, se tuvo oportunidad de llevar en escena a docentes del nivel básico (primaria y secundaria). Teniendo aceptación por los contenidos trabajados en cada una de las situaciones, tal es el caso del conteo, suma, estimación, reconocimiento de patrones o geometría.

Además, existió la retroalimentación, para fomentar el pensamiento numérico con cada ejercicio práctico; que parecen un juego para matar el tiempo o entretenerse en un rato libre. Sin embargo, en el trasfondo existe más, en el sentido de la "Teoría de las Situaciones Didácticas" de Brousseau (1998).

Se logró ver los alcances de las dinámicas propuestas y considerando en cada objetivo la permanecía, por ejemplo, con los primeros ejercicios podemos plantearos para el nivel medio superior; específicamente en la estadística con los conceptos de permutaciones y combinaciones, con el hecho de cambiar el contexto de los ejercicios. Al componer o descomponer un número, podemos enfocarlo a ¿cuántas combinaciones son posibles para formar el número 5? Esto a modo de ejemplo.

Con esto estaríamos esperando dar elementos valiosos para generar y fortalecer el pensamiento numérico, por medio de actividades lúdicas, que en el fondo ayudan a mejorar la comprensión de los números y sus diferentes interpretaciones; está es una característica del pensamiento numérico de acuerdo con Castro (2008).

Referencias Bibliográficas

Brousseau G. (1998): Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Caneo, M. (1987). *El juego y la enseñanza de la Matemáticas*. Tesis para obtener un título de profesor. Universidad Católica de Temuco.

Castro E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. *En J.M. Cardeñoso y M. Peñas Conferencia en XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (p 1-32), Granaga.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Funções Executivas: implicações para o ensino e para a aprendizagem de matemática

Jader Otavio **Dalto**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Brasil
jaderdalto@utfpr.edu.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma breve discussão sobre as possíveis implicações das funções executivas (FE) para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, de modo a justificar nossa proposta de realização de oficina no XVI CIAEM. As FE são responsáveis pelo direcionamento de ações e estratégias para atingir objetivos específicos e, de acordo com a literatura na área da Psicologia Cognitiva, há evidências de que as FE estão relacionadas com o desempenho em matemática. Na oficina os participantes realizarão análises de tarefas de matemática, de situações de ensino e de aprendizagem de matemática e de produções escritas de matemática com o objetivo de identificar que/como as FE (controle inibitório, memória de trabalho e flexibilidade cognitiva) são mobilizadas em cada uma destas situações.

Palavras-chave: Educação Matemática; Funções Executivas; Tarefas de Matemática; Formação de Professores; Psicologia Cognitiva.

A aprendizagem de matemática depende de muitos fatores, como os motivacionais e cognitivos. A Psicologia Cognitiva, embora tenha avançado muito nos últimos anos no que se refere a criação de teorias e modelos explicativos da cognição humana, ainda trilha um longo caminho para obter uma explicação mais adequada e detalhada dos mecanismos de controle dos processos cognitivos (Santana, Roazzi, Melo, Mascarenhas & Souza, 2019). Entretanto, a investigação nesta área tem mostrado que o desempenho em matemática depende de um conjunto de habilidades cognitivas associadas especificamente à matemática e outro conjunto de habilidades associadas à aprendizagem em geral (Gilmore, Cragg & Simms, 2020).

De acordo com Gilmore, Cragg e Simms (2020), a maior parte das pesquisas que se propõem a investigar os aspectos cognitivos da performance em matemática tem como foco a aritmética e habilidades de processamento numérico. Neste contexto, o desempenho em matemática depende de um conjunto de habilidades, de domínio específico da matemática, como as relacionadas a representações de quantidades, de procedimentos de realização de operações, à compreensão conceitual, ao conhecimento de fatos numéricos. Igualmente importante para o desempenho em matemática são habilidades cognitivas gerais, dentre as quais podem ser citadas as habilidades visuoespaciais, habilidades verbais e as funções executivas.

Entretanto, como a maior parte das pesquisas fornecem informações sobre a performance em matemática dos alunos e não sobre a aprendizagem de matemática dos mesmos, nesta oficina debruçamo-nos sobre as funções executivas de modo a, partindo da conceituação das mesmas e dos resultados de pesquisas sobre o desempenho de matemática dos estudantes, discutir sobre possíveis implicações das funções executivas para o ensino e para a aprendizagem de Matemática.

Funções Executivas

O termo *Funções Executivas* (FE) em geral é utilizado para designar uma gama de habilidades complexas integradas e processos autorregulatórios que possibilitam o direcionamento do comportamento, flexibilizar estratégias, pensamentos, controlar impulsos, tomar decisões, avaliar a eficiência de ações para atingir metas e objetivos pré-definidos e resolver problemas imediatos, de médio e longo prazo. (Diamond, 2013, Malloy-Diniz, de Paula, Sedó, Fuentes & Leite, 2014, Santana et al., 2019, Dias e Malloy-Diniz, 2020)
.

São diversos os modelos teóricos que definem FE, que se diferenciam no que se refere à considerá-la(s) como um construto único ou um conjunto de construtos integrados, bem como os elementos que a(s) constituem (Malloy-Diniz et al., 2014). Entretanto, de acordo com Dias e Malloy-Diniz, (2020) existem alguns pontos em que os diferentes modelos convergem, como considerar sua "natureza multidimensional, havendo uma tendência na literatura em considerar três componentes específicos: controle inibitório, memória operacional e flexibilidade cognitiva ou *shifting*" (p. 37-8, grifo dos autores). Para Diamond (2013), estes três componentes específicos das FE são considerados núcleos centrais, a partir dos quais outras FE são derivadas, como o raciocínio, solução de problemas, planejamento.

O Controle Inibitório (CI) está relacionado à capacidade de controlar a atenção, pensamentos, comportamento, emoções, em detrimento a impulsos, velhos hábitos, ações ou estímulos ambientais que nos fazem agir de uma forma inadequada à situação. Pode ser dividido em dois tipos: controle de interferência e autocontrole. O controle de interferência envolve o Controle Inibitório da Atenção, que permite direcionar seletivamente a atenção para o que é relevante e ignorar outros estímulos irrelevantes. Além deste, envolve a inibição cognitiva, que consiste em suprimir representações mentais prepotentes, o que envolve desconsiderar pensamentos ou memórias estranhos ou indesejados. O autocontrole está relacionado ao controle sobre o próprio comportamento e o controle das emoções a serviço do comportamento. (Diamond, 2013).

A memória operacional ou memória de trabalho (MT), segundo núcleo das FE, consiste na capacidade de armazenar e manipular informações em um determinado período de tempo. Sem ela seria impossível, por exemplo, o cálculo mental, uma vez que envolve a manipulação de informações numéricas. A flexibilidade cognitiva (FC), terceiro núcleo das FE está relacionada à capacidade de mudar de perspectiva, de modo a considerar uma situação sob diferentes ponto de vista; mudar a forma como pensamos sobre algo, bem como a capacidade de executar tarefas de forma flexível tendo em vista um objetivo a ser alcançado. Esta FE desenvolve-se a partir das outras duas (Diamond, 2013).

Em relação ao desenvolvimento destas FE, cabe ressaltar que o CI é aquele cujo desenvolvimento se dá primeiro (por volta dos 6 meses de idade). Além disso, embora possam ser observados de modo individual, quando estão em ação, todos atuam de forma integrada. Deste modo, CI e MT estão à serviço um do outro, por exemplo, como a capacidade da MT é limitada, deve-se manter sempre o objetivo em mente para saber o que é relevante e o que precisa ser inibido quando se enfrenta uma situação. Da mesma forma, para relacionar várias ideias ou fatos (MT), deve-se ser capaz de resistir em focar em apenas uma delas.

Funções Executivas, Desempenho em Matemática e implicações pedagógicas

Estudos na área de Psicologia Cognitiva tem investigado cada vez mais as relações entre FE e o desempenho em Matemática. Em um estudo de revisão realizado no Brasil, Santana et al. (2019), com o objetivo de identificar as relações estabelecidas entre FE e matemática nos estudos publicados nos últimos 18 anos, encontraram uma escassez de estudos brasileiros e um aumento do número de estudos internacionais. De acordo com os autores, a tríade executiva formada pela memória de trabalho (MT), controle inibitório (CI) e flexibilidade cognitiva (FC) foi avaliada na maioria dos trabalhos, de modo que a MT foi o componente mais analisado quando se pretendia relacionar FE com a matemática, sendo que a relação entre a capacidade de MT e o desempenho em matemática já está bem estabelecida de acordo com os resultados de pesquisa, enquanto que no que se refere ao CI, muitas questões ainda estão em aberto (Gilmore, Cragg & Simms, 2020).

De acordo com Gilmore, Cragg e Simms (2020), o que a pesquisa nesta temática ainda não fornece de informação é qual o papel das FE na aprendizagem de Matemática. Nesta direção, para as autoras, a identificação de habilidade associadas com o desempenho em matemática pode ser informativo para que os professores compreendam as dificuldades dos alunos, de modo a fazer adaptações nas atividades e/ou recursos utilizados tendo em vista a superação destas dificuldades (Gilmore, Cragg & Simms, 2020).

A importância que professores atribuem às FE para a aprendizagem de matemática foi avaliada por Gilmore e Cragg (2014) a partir de um questionário on-line com professores do Reino Unido. Os resultados revelam que, embora poucos demonstraram conhecimento do termo “funções executivas”, a maioria deles demonstrou conhecimento das habilidades de FE, de modo que o valor atribuído a elas para a aprendizagem de matemática cresceu conforme o aumento da experiência de ensino do professor. Os professores atribuíram maior importância das FE para o desempenho em matemática aos componentes controle inibitório e flexibilidade cognitiva (Gilmore & Cragg, 2014).

Braga e Dalto (2022) realizaram um estudo com alunos brasileiros do oitavo ano do Ensino Fundamental em que foi investigada a mobilização das FE na resolução de uma tarefa com o uso do Mapa Mental. Tarefa aplicada aos alunos foi a seguinte: *Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. Em cada dia, a partir do segundo, ele entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas foram entregues em cada dia?*

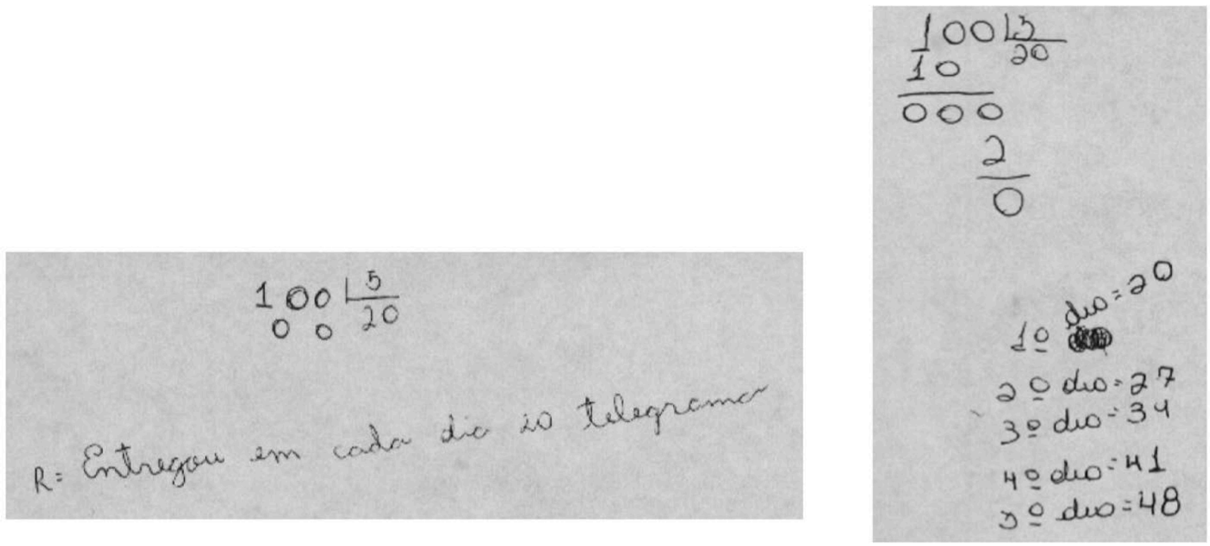
Em um primeiro momento, os alunos resolveram a tarefa sem o auxílio do mapa mental. De acordo com os autores, os alunos apresentaram dificuldades de controle de interferência (inibição cognitiva e controle da atenção) e autocontrole (controle do comportamento). Estas dificuldades resultaram em outras, como a dificuldade de tomar "múltiplas decisões, observar as representações matemáticas na tarefa proposta e interpretar os dados matemáticos que deveriam ser retirados do enunciado da situação-problema para resolução ou, ainda, descrever através da linguagem verbal o pensamento para resolução dos problemas" (Braga & Dalto, 2022, p. 4). Como o trabalho foi realizado em grupos, os alunos apresentaram dificuldades em analisar a situação-problema da tarefa sob outro ponto de vista, o que demonstra dificuldades em flexibilidade cognitiva. De acordo com os autores, após a utilização do mapa mental, estas dificuldades foram minimizadas e os alunos foram capazes de resolver a tarefa de modo adequado.

Dado o exposto, percebe-se que é importante que o professor conheça as FE e como são mobilizadas a partir das atividades e recursos utilizados por ele, de modo a ser capaz de identificar se as dificuldades enfrentadas pelos alunos estão relacionadas a conceitos ou habilidades específicas da própria matemática ou de habilidades gerais como as FE. Tal identificação faz-se necessária para que sejam executadas formas adequadas de ajuda à superação das dificuldades dos alunos.

Por exemplo, pode-se considerar as resoluções apresentadas na Figura 1, referentes à tarefa aplicada por Braga e Dalto (2022). Na figura são apresentadas duas resoluções diferentes, sendo ambas incorretas.

A partir dos registros escritos feitos pelos alunos, é possível refletir sobre a mobilização de FE na resolução da tarefa. Na resolução A, parece que, embora o aluno tenha realizado uma divisão de modo correto (o que demonstra boa mobilização da memória de trabalho), há indícios de que foram inibidas informações do enunciado da tarefa (diferença do número de telegramas entregues entre os dias) que são relevantes para a situação, o que pode ser resultado de dificuldades no CI.

Na resolução B, também incorreta, há evidências de que o aluno é capaz de realizar corretamente as operações de divisão e adição, ou seja, aparentemente o aluno tem domínio dos conceitos matemáticos que são necessários e suficientes para que a tarefa fosse resolvida corretamente. Entretanto, parece que o aluno tem dificuldades com o CI, uma vez que utilizou uma informação importante do enunciado (número de telegramas entregues) e a inibiu nas etapas seguintes, o que o levou a apresentar uma quantidade de telegramas em cada dia, cuja soma supera o número de telegramas entregues pelo carteiro.



Resolução A ***Resolução B***

Figura 1 – Duas resoluções de alunos para uma mesma tarefa

Este é apenas um exemplo de como o professor pode inferir sobre a mobilização de FE em sua prática diária. A partir da observação das FE na sala de aula de matemática, o professor terá condições de propor tarefas que mobilizem mais ou menos as FE, de acordo com seus objetivos para sua aula.

Algumas Considerações

Neste trabalho procuramos apresentar uma breve discussão sobre as possíveis implicações das FE para o ensino e para a aprendizagem de Matemática, de modo a justificar nossa proposta de realização de oficina no XVI CIAEM. A partir da conceituação das FE, durante a realização da oficina, serão realizadas e discutidas pelos participantes análises de tarefas de matemática, de situações de ensino e de aprendizagem de matemática e de produções escritas de matemática (como a da Figura 1) para que os participantes desenvolvam a habilidade de identificar a mobilização das FE nas aulas de matemática e reflitam sobre as implicações pedagógicas das FE para suas práticas. Espera-se, com a oficina, que os participantes possam ter novas ferramentas que contribuam para o sucesso de suas práticas pedagógicas.

Referências e bibliografia

Braga, D. G. A. & Dalto, J. O. (2022). Mobilização das Funções Executivas na resolução de uma Tarefa Matemática com o uso de Mapa Mental. In *Anais do I Encontro Nacional de Neurociência Cognitiva e Educação Matemática: Todos(as) podem aprender matemática?* (pp. 1-9). Caicó, RN.

Diamond, A. (2013). Executive functions. *Annual review of psychology*, 64, 135-168.

Dias, N. M. & Malloy-Diniz, L. F. (2020). *Funções Executivas:* modelos e aplicações. São Paulo: Pearson Clinical Brasil.

Gilmore, C., & Cragg, L. (2014). Teachers' Understanding of the Role of Executive Functions in Mathematics Learning. *Mind Brain Educ*., 8(3), 132-136. DOI: 10.1111/mbe.12050

Gilmore, C., Cragg, L. & Simms, V. (2020). What can cognitive psychology tell us about the challenges of learning mathematics (and what do we still not know)? *Impact: Journal of the Chartered College of Teaching*, 8, 22-25.

Malloy-Diniz, L. F., Paula, J. J., Sedó, M., Fuentes, D. & Leite, W. B. (2014). Neuropsicologia das Funções Executivas e da atenção. En D. Fuentes, L. F. Malloy-Diniz, C. H. P. Camargo e R. M. Cosenza (Eds). *Neuropsicologia:* teoria e prática. (pp. 115-138). São Paulo: Artmed.

Santana, A. N., Roazzi, A., Melo, M. R. A., Mascarenhas, S. A. N. & Souza, B. C. (2019). Funções Executivas e Matemática: explorando relações. *Revista AMAzônica*, 23(1), 130-151.

Generalización de patrones y resolución de problemas como estrategias para el desarrollo de pensamiento algebraico

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Ligia A. **Torres** Rengifo
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

En este taller se analizan con los asistentes producciones de jóvenes estudiantes (9 a 11 años de edad) cuando desarrollan tareas sobre generalización de patrones y resolución de problemas, diseñadas para promover el desarrollo de pensamiento algebraico temprano. Para ello, se presentan los enfoques conceptuales que fundamentan el diseño de las tareas y que brindan categorías analíticas para estudiar el pensamiento algebraico que los estudiantes manifiestan al enfrentarlas, seguidamente, se exhiben las tareas que propician las producciones de los estudiantes, las cuales se analizan con los asistentes al taller. Se mostrará evidencias de la toma de conciencia que van logrando los estudiantes de las relaciones entre cantidades, lo indeterminado, los procesos de generalización y analíticos, entre otros rasgos distintivos de este modo de pensamiento. Se espera que el taller genere reflexiones sobre la posibilidad y necesidad de auspiciar estrategias didácticas que promuevan el pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación primaria; Enseñanza presencial; Implementación curricular; Pensamiento algebraico.

Introducción

La investigación sobre la caracterización del pensamiento algebraico y su desarrollo en estudiantes de los primeros grados de escolaridad ha favorecido que surjan distintos enfoques y perspectivas para estudiar la transición de la aritmética al álgebra, lo que ha permitido aceptar posturas que se opone a la idea que el álgebra inicia con la enseñanza del simbolismo alfanumérico, poniendo el énfasis en aspectos sintácticos, y que para pensar algebraicamente no es condición necesaria, ni suficiente, el simbolismo algebraico (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Radford, 2018, 2021). Investigaciones muestran evidencias que los estudiantes desde edades tempranas logran pensar sobre lo desconocido, operar con ello, identificar patrones, generalizar, deducir, describir variables, identificar y establecer relaciones funcionales, emplear el signo igual como relación de equivalencia, entre otros aspectos de índole algebraico (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Morales, Cañadas, Brizuela, y Gómez, 2018; Radford, 2013, 2018; Vergel, 2014).

Investigaciones en didáctica del álgebra han mostrado que la resolución de problemas y la generalización de patrones son dos estrategias de trabajo en el aula que apoyan la introducción del álgebra temprana en el currículo de educación primaria. La primera, porque propicia el estudio de relaciones entre cantidades, tanto conocidas como desconocidas, el estudio del signo igual como relación de equivalencia, y el uso de ecuaciones como estructuras que modelizan situaciones en las que aparecen incógnitas (Kieran, 1992; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Godino et al, 2012; Radford, 2021). La segunda, porque favorece procesos de deducción, de identificación de variables, procesos de co-variación y en general de relaciones funcionales, (Vergel y Rojas, 2018; Radford, 2013, 2021).

En este taller nos proponemos presentar y analizar producciones de jóvenes estudiantes como resultado de su actividad matemática cuando enfrentan dos tareas, una de resolución de problemas y otra de generalización de patrones, para dar cuenta del desarrollo de pensamiento algebraico que ponen en juego al enfrentarlas. Los datos empleados para ello, han surgido de trabajos de grado realizados en programas tanto de maestría como de pregrado en educación matemática, en los cuales los autores de este taller fungen como formadores.

Marco de referencia conceptual

Sobre el pensamiento algebraico

Coincidimos con Radford (2011, 2021) cuando sostiene que una característica del pensamiento algebraico es su *carácter analítico*, lo que refiere a la posibilidad de operar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas, sin distinción ontológica entre unas y otras, y que implica procesos de deducción. De acuerdo con Vergel (2014), el *pensamiento algebraico* en tanto *saber*, “es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente” (p.78). Radford (2011), precisa tres componentes relacionados entre sí de esta forma de pensamiento, a saber: i) el *sentido de indeterminancia*, que refiere a objetos desconocidos como incógnitas o variables, ii) la *analiticidad*, esto es, el carácter operatorio de los objetos indeterminados, y iii) la *expresión semiótica*, es decir, la manera como se nombran o designan los objetos.

Sobre la generalización de patrones

Entendemos, de acuerdo con Zapatera y Callejo (2011), las tareas de generalización de patrones como aquellas en las que se presenta un gráfico o números en secuencia que parten de un término inicial f(1) y se dan los siguientes a él f(2),f(3),… y se solicita calcular términos cercanos y lejanos, para, finalmente, hallar la regla general que viene dada por un modelo de función, comúnmente lineal o afín. La *tarea* es una categoría teórica en tanto posee un estatus epistemológico, por cuanto su abordaje propulsa procesos de deducción, generalización, abstracción, planteamiento y verificación de hipótesis, en definitiva, promueve pensamiento matemático (Vergel y Rojas, 2018; Vergel 2019).

Para Radford (2013), este tipo de tareas implica tres cuestiones: i) un asunto *fenomenológico*, en el que la intención, atención, y percepción interactúan con los objetos dados en la secuencia, para, a través de determinaciones sensibles, identificar aspectos comunes y no comunes en ella, tanto espaciales como numéricos; ii) un asunto *epistemológico*, en el que, a partir de la identificación de la comunalidad o característica común, esta se extrapola a los siguientes términos de la secuencia no dados en ella, y iii) un asunto *semiótico*, por el cual se expresa la generalización, se materializa. Tal materialización, se realiza a través de una *actividad multimodal* en la que participa la observación, los gestos, los símbolos, el lenguaje natural, entre otros. La generalización de la *comunalidad* o *abducción*, según como opere toma estatus epistémicos distintos. Si la abducción se usa solamente para pasar de un término particular de la secuencia al otro, la *generalización es aritmética*. Empero, si se deduce una fórmula para hallar cualquier término de la secuencia la *generalización es algebraica*.

Sobre la resolución de problemas

La emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico en contextos de resolución de problemas pasa por la reflexión sobre naturaleza de los problemas propuestos y su dificultad relativa a los procedimientos y saberes disponibles para abordarlos. Teniendo como referencia las investigaciones de Bednarz & Janvier (1996) y experiencias en trabajos de grado de pregrado y maestría (Castañeda, C., Castañeda, S. y Torres L., 2019), en esta propuesta se considera la experiencia aritmética que los estudiantes han adquirido en la resolución de problemas y un análisis de los problemas en el dominio aritmético y algebraico.

Por lo general, la naturaleza de estos problemas involucra la composición de varias relaciones (aditivas, multiplicativas o combinadas), que puede motivar a los estudiantes para una transición al álgebra. Es más, el tipo de relaciones permite anticipar una graduación posible de estos problemas pensando en términos de su enseñanza. La estructura general de un problema propone cantidades conocidas y desconocidas, y relaciones entre ellas. Estas relaciones se dan más o menos explícitas en el enunciado del problema y deben ser reconstruidos por los estudiantes, con la ayuda de las cantidades conocidas de otros conocimientos matemáticos y conocimiento contextual previo a la solución. Es así, como en las investigaciones que establecen este tipo de propuesta, se deben establecer criterios que permitan analizar esta transición para entender mejor el paso que se requiere en los estudiantes para la resolución de problemas aritméticos a la resolución de problemas algebraicos.

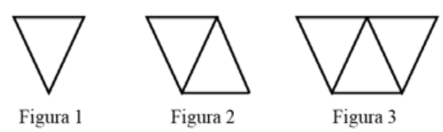
Diseño metodológico del taller

Este taller, cuyo propósito es analizar con sus asistentes producciones de actividad matemática de estudiantes de educación básica primaria cuando desarrollan tareas de generalización de patrones y de resolución de problemas para dar cuenta del pensamiento algebraico que ponen en juego al enfrentarlas, está mediado por la lectura y análisis tanto de las tareas como de las producciones de los estudiantes al desarrollarlas. Para ello, se ha organizado así: en un primer momento se contextualiza el taller y presentan los principales referentes conceptuales que lo fundamenta, seguidamente se presentan y analizan las tareas promotoras de la actividad matemática de los estudiantes, una de generalización de patrones y la otra de resolución de problemas, posteriormente, se presentan y analizan algunas producciones de estudiantes al enfrentar las tareas, las cuales se han obtenido de trabajos de investigación de pregrado y maestría. Para estos dos últimos momentos los asistentes se organizan en grupos de 3 o 4 integrantes, algunos analizaran la tarea de generalización y otros la de resolución de problemas. Finalmente, se realizará una plenaria para socializar los análisis de los grupos y así reflexionar y discutir sobre el pensamiento algebraico manifestado por los estudiantes en sus producciones.

Desarrollo del taller

Se presentan parte de las tareas y algunas producciones de estudiantes a analizar, junto con preguntas que se espera orienten la discusión con los grupos de trabajo:

Observa la siguiente secuencia de figuras y responde las preguntas:



a. ¿Cuántos triángulos y palillos forman las figuras 1, 2 y 3?
b. Dibuje las Figuras 4, 5 y 6 de la secuencia ¿Cuántos triángulos hay en cada figura? ¿Cuántos palillos se necesitan en cada figura?
c. Encuentra a través de un cálculo el número de triángulos y palillos de la Figura 10, sin graficar las Figuras 8 y 9. Justifica tu respuesta.
d. Explica cómo harías para encontrar la cantidad de palillos de la Figura 100.
e. Toma una de las balotas al azar, la cual contiene un número de figura. Sin mirarlo escribe un mensaje a un compañero de tu clase para expresarle como encontrar el número de palillos para ese número de figura que está dentro de la balota.

Figura 1. Tarea de generalización de patrones (Carmona y Velasco, 2018, p.64).

Algunos elementos que orientan la discusión con los asistentes sobre el diseño de la tarea: (i) ¿Qué intensiones y diferencias epistémicas logran identificar en los ítems *b* y *c* de la tarea, y entre los ítems e y d? (ii) Indique algunas observaciones sobre la pertinencia de este tipo de tareas para el desarrollo de pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes.

> ***PM:*** ¿Cuántos palillos hay en la Figura 5?
> ***Paula:*** Aquí había nueve palillos [señalando la Figura 4] entonces aquí debería haber once [Paula realiza un conteo para comprobar su hipótesis, continúa dibujando la Figura 6].
> ***Paula:*** Entonces aquí hay trece [señala la Figura 6 y realiza un conteo para comprobar nuevamente su hipótesis].
> ***PM:*** Paula, según el dibujo que tú has hecho ¿Qué podemos decir con respecto a los palillos y a los triángulos?
> ***Paula:*** Que se le agregan dos palillos cada vez que va avanzando [refiriéndose al número de figuras] y un triángulo.
> [Más adelante, discutiendo con Paula el ítem c]
> ***Paula:*** Si en la seis hay 13 palillos, a 13 se le suman dos para la siete [realiza el cálculo numérico en la hoja de tarea] 15, más dos [vuelve y hace el cálculo] 17, más dos [vuelve y hace el cálculo] 19, más dos [vuelve y hace el cálculo] 21.
> ***PA:*** ¿Y cuántos triángulos?
> ***Paula:*** Serian 10.
> ***PM:*** ¿Por qué son 10 triángulos?
> ***Paula:*** Porque como dije ahorita, se le iban agregando más triángulos, entonces aquí se iba agregando un

Figura 2. Dialogo entre investigadoras (PM y PA) y Paula (estudiante de 10 años de edad) al desarrollar el ítem *b* y *c* de la tarea (Carmona y Velasco, 2018, p.110 -111).

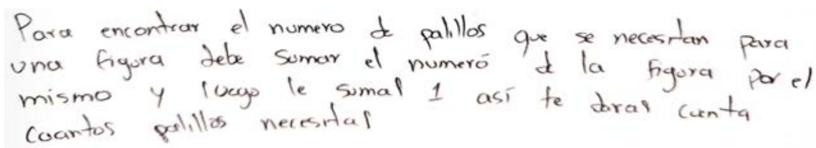


Figura 3. Mensaje de Paula como respuesta al ítem *e* de la tarea (Carmona y Velasco, 2018, p.122).

Algunos elementos que se proponen para orientar la discusión sobre las producciones son: (i) ¿Qué caracteriza las generalizaciones logradas por Paula al enfrentar la tarea? (ii) ¿Cuáles son indicios de pensamiento algebraico que se evidencian en las producciones de Paula?

> **Problema 1:** La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?
>
> **1.** Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.
>   **a.** De acuerdo con el problema, indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
>   **a.** Sí Mariana, estudiante de grado 4°, afirma que: “la cantidad de estudiantes de grado 5° es de 20 estudiantes”, indica si es válida o no esta afirmación.
> **2.** Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.
> **3.** Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 3°.
> **4.** Escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4°.

Figura 4. Tarea de resolución de problemas (Castañeda, C., Castañeda, S. y Torres L., 2019, p.69).

Resultados esperados

Se espera que el desarrollo de este taller se configure como un espacio de reflexión y discusión conjunta con los asistentes en torno a: la pertinencia y necesidad de desarrollar pensamiento algebraico en edades tempranas, bondades y limitaciones que tienen la generalización de patrones y resolución de problemas para motivar el desarrollo de este pensamiento, el papel del diseño de tareas con intenciones epistémicas, y el papel que juega el análisis de las producciones de estudiantes como elemento sustancial para poder identificar, interpretar y tomar decisiones sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Además de lo anterior, se espera también poder nutrir la labor investigativa y pedagógica de los asistentes en aras de brindar elementos para promover el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad.

Referencias y bibliografía

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA*, 15 (3), 211-241.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool:continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra .Perspectives for Research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Carmona, A. y Velasco, M. (2018). *Características de pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación primaria en tareas de generalización de patrones* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Tuluá, Colombia.

Castañeda, C., Castañeda, S. y Torres L. (2019). *Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26 (46), p. 483-511.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Macmillan Publishing Company. New York.

Morales, R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, 11 (4), 233-252.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36 (3), 59-78.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.

Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da ágebra na teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoría histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)* (Tesis doctoral). Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá- Colombia.

Vergel, R. (2019). Una posible zona de formas de pensamiento aritmético"sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. Actas del XV CIAEM, 1-18.

Vergel, R. y Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: Editorial UD.

Zapatera, A. & Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En Marín, M., Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). Ciudad Real: SEIEM.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Inclusão Cognitiva no Campo Conceitual Multiplicativo de um Estudante Cego

Luiza Ojeda **Hoffmann**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
luizaojeda@hotmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este trabalho apresenta um recorte da dissertação de mestrado intitulada “Sequência didática sobre operações de multiplicação e divisão no conjunto dos Números Naturais: um estudo com estudante cego”, estudo que foi desenvolvido e aplicado à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, como instrumento para o planejamento e construção de recursos para práticas pedagógicas. O estudo tem como objetivo investigar como um estudante cego conceitualiza o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, especificamente na classe de produto de medida. A pesquisa foi realizada com um estudante cego congênito que frequenta o 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede municipal de Canoas/RS, e teve uma abordagem qualitativa, descritiva e exploratória de um estudo de caso. O estudo demonstra o potencial da TCC como referencial teórico para o planejamento didático e para a construção de recursos que envolvam ativamente o estudante nos processos de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Campo conceitual multiplicativo; Educação matemática inclusiva; Estudante cego.

Introdução

Dados fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2012), por meio do censo demográfico, mostram que 18,6% da população brasileira possui algum tipo de deficiência visual. Neste contexto, este artigo – que é um recorte da dissertação de mestrado, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) – apresenta uma pesquisa com abordagem qualitativa, descritiva e exploratória, constituindo um estudo de caso envolvendo um estudante cego congênito do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Canoas, do estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A pesquisa aqui descrita contempla fatos colhidos da própria realidade deste estudante, em processo de desenvolvimento do campo conceitual aditivo e multiplicativo dando ênfase ao produto de medida, apoiando-se nas ideias dos Campos Conceituais de Vergnaud (1998), com o objetivo de incluí-lo nas aulas de Matemática.

Teoria dos Campos Conceituais (TCC)

Vergnaud (1998) defende que o Campo Conceitual é composto por um grupo informal e heterogêneo de desafios, conceitos, situações, estruturas, relações, conteúdos e mecanismos de compreensão, os quais se ligam e se comunicam durante o processo de aquisição de conceitos de modo geral. Os estudos de Vergnaud na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) sobre definições matemáticas com estruturas aditivas e multiplicativas dão suporte para várias teorias e temas ligados a essa área. Sendo assim, a TCC é uma importante ferramenta de planejamento de ensino para os professores.

Vergnaud (1993, p. 9) considera o Campo Conceitual como um “conjunto de situações, problemas, relacionamentos, estruturas, conceitos e teoremas inter-relacionados”. Isso se insere, por exemplo, em um domínio conceitual da estrutura de multiplicação, no qual o conjunto de situações pode exigir multiplicação, divisão ou uma combinação dessas operações.

Após um consistente trabalho no campo conceitual das estruturas aditivas, em que o estudante resolvia diversos tipos de situações-problemas, nas quais mostrava seus esquemas e comunicava seus resultados com clareza, com apoio de materiais táteis e oralidade, no campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O campo conceitual multiplicativo é definido como um conjunto de problemas e situações que requerem multiplicação ou divisão para resolvê-los. De acordo com Nunes *et al*. (2005), esse campo conceitual é formado pela existência de uma relação constante entre duas variáveis de diferentes tamanhos (ou quantidades). A multiplicação e a divisão são definidas como operações irmãs porque compartilham a mesma relação constante, sendo uma o inverso da outra (Lerner & Sadovsky, 1996; Mandarino & Belfort, 2005).

Vergnaud (2006) indica duas categorias em sua TCC no campo multiplicativo: o isomorfismo de medida e o produto de medida. Na pesquisa, para este artigo, desenvolve-se exclusivamente o segundo caso, essa relação é uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto de outras duas ao mesmo tempo, no plano numérico e no plano dimensional.

Metodologia da Pesquisa

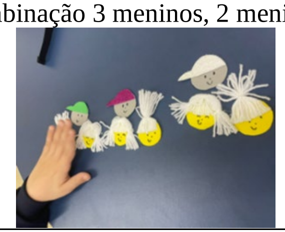
A pesquisa[1] aqui descrita apoia-se em uma abordagem qualitativa, descritiva e exploratória de um estudo de caso. Sendo assim, contempla a realidade de G, estudante cego congênito de 11 anos, cursando o do 5º ano do Ensino Fundamental. Neste trabalho, a preocupação com o processo é predominante ao resultado, e a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, de caráter descritivo (Ludke & André, 2013).

A pesquisa teve início em 2021, com intervenções pedagógicas *in loco* no Laboratório de Estudos de Inclusão do Programa de Pós-Graduação, com encontros semanais com duração média de 50 minutos. Ao longo desses encontros, foram utilizados materiais concretos e tecnologias digitais para o desenvolvimento das atividades sobre o Campo Conceitual Multiplicativo.

Resultados

Vergnaud (1998) define o Campo Conceitual Multiplicativo como sendo, em primeiro lugar, um conjunto de situações cuja esfera, por sua vez, requer outra esfera de vários conceitos de natureza diferente.

Em consequência dessa concepção, a estrutura das atividades práticas foi planejada considerando-se o conjunto teórico de Vergnaud. Assim, tendo como objetivo trabalhar o Campo Conceitual da estrutura multiplicativa, especificamente o produto de medidas na multiplicação, iniciamos com a apresentação e manuseio do material, cabeças de meninos com diferentes tipos de bonés de diferentes texturas, e cabeças de meninas com diferentes tipos de penteados, como está representado na figura 1.

<table>
<tr><td>Analisando o material.
</td><td>Combinação 3 meninos, 2 meninas.
</td><td>Combinação de 4 meninos com 2 meninas.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">P- Forma pares de um menino e uma menina.
G- Vou pegar o material! Deu um monte!
P- Vamos pegar 3 meninos com bonés diferentes (textura), e 2 meninas com penteados diferentes.
G- Estou pensando e organizando. Formei os pares, estão aqui na mesa.
P- Como ficou?
G- Contei 6 pares, só fazer 3x2=6. Nem precisei fazer montinhos aqui, contei pelas cabeças.
P- Ótimo, agora escolhe 4 meninos de bonés diferentes e faz pares com meninas com penteados diferentes.
G- 2 meninas, né, para cada boné?
P- Sim.
G- Vou pegar o material, dá 8 pares, não precisa contar é só multiplicar 4x2=8.
P- Sim. Agora vamos formar pares com 3 meninos e 3 meninas.
G- Pronto! 3x3=9, mas vou pegar o material para conferir.
P- Com 4 meninos e 3 meninas?
G- Agora nem as cabecinhas vou pegar. Só fazer a multiplicação. Pronto! 4x3= 12.
P- Vamos fazer mais uma hoje, com 12 pares, com 2 meninas, quantos meninos eu preciso para formar os pares?
G- 12 pares com 2 meninas. 12:2=6, 1 menina e 6 meninos. Achei legal! É só multiplicar e dividir.
P- Tenho 10 pares de meninos e meninas, quantas meninas precisa para formar pares?</td></tr>
</table>

[1] A pesquisa passou por avaliação ética pelo Sistema CEP/CONEP e foi aprovada sob o protocolo número 4.867.536/2021.

G- Para cada menino 2 meninas, 5x2=10, 10:2=5 meninos. Ah já entendi, é só pensar, fazendo de conta, cada menina tem 5 meninos para formar o par.

Figura 1 - Diálogo referente à atividade para efetuar a multiplicação no produto de medida discreto-discreto.
Fonte: a pesquisa

Nesta atividade, após apresentadas e encontradas soluções para as situações-problemas que envolviam um isomorfismo de medidas na multiplicação e divisão, o estudante G aplicou corretamente a TCC da estrutura multiplicativa na classe produto de medidas: produto discreto-discreto.

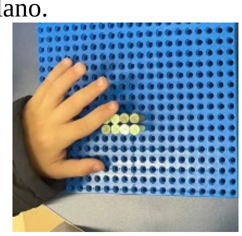
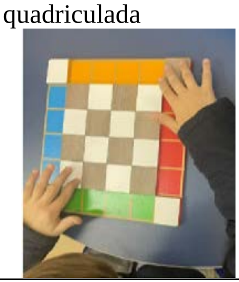
Para a atividade, foi usado material tátil, a preferência que ele tem fica explícita sempre que diz "vou pegar o material", "Não vou fazer montinhos". No momento em que está conceitualizando, diz: "Estou pensando", isto é, relacionando seus invariantes operatórios, "vai aumentar é multiplicação", "vai diminuir é divisão", seus teoremas-em-ação.

No seu "estou pensando", ele está analisando um conjunto de situações, relacionando seus teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Na comunicação do que pensou, "esquema feito", comunica oralmente, manipulando o material, ou ainda escrevendo em Braille. Escrever em Braille não é a sua preferência, diz ele: "demora muito para registrar".

A forma de relação trabalhada neste dia "consiste em uma relação ternária entre 3 quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional" (Vergnaud, 2009, p. 253).

No exemplo 3 meninos de boné, 2 meninas penteadas e quantos pares formam, G organizou manipulando o material e conseguiu formar o esquema. Cada menino com uma menina, como eram 3 meninos e 2 meninas, formou os pares, observou e contou os pares, conclui que era uma multiplicação de 3x2 ou 2x3 e encontrou 6. Todos os exemplos similares indicavam uma multiplicação ou uma divisão do tipo discreto-discreto. G achou fácil, percebeu e analisou cada situação utilizando suas próprias estratégias.

Neste momento, com o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas já conceituado junto com o isomorfismo de medidas e o produto de medidas discreto-discreto, passamos então para o produto de medida: contínuo-contínuo. Aqui a atividade consiste em propor situações de multiplicação e de divisão aplicando produtos de medidas: produto contínuo-contínuo (Figura 2).

<table>
<tr>
<td>Analisando o material dourado, 6x6x5
</td>
<td>Formando retângulo 2x4, no multiplano.
</td>
<td>Malha quadriculada
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">P- Hoje nós vamos trabalhar com material dourado, malhas quadriculadas de madeira e multiplano, para resolvermos algumas situações.
G- Tá bom!
P- Analisa bem o material.</td>
</tr>
</table>

G- Bem legal, né? Parece alguma coisa, são plaquinhas?
P- Sim. Quantas unidades têm no comprimento e na largura?
G- Comprimento tem 10 e na largura também tem 10. Vou pensar.
P- Qual o total de unidades?
G- 100.
P- Como sabemos, se nós não contamos, que tipo de estratégia você usou para descobrir?
G- Fiz o 10x10=100, tem dez quadradinhos aqui e dez quadradinhos ali, então dentro tem 100.
P- O que nós podemos definir desse comprimento e dessa largura nesta barra?
G- Tem um vezes o outro, né? Que temos comprimento vezes largura.
P- Nossa! Muito bem! E se agora nós colocarmos duas placas das centenas juntas, quanto teremos?
G- 200. É comprimento vezes a largura.
P- Certo!
G- 20x10= 200
P- E o cubo? Conta?
G- Espera eu contar, eu não posso me perder.
P- Está bom!
G- 10x10x10= 1.000
P-Temos comprimento x largura x altura. Passa o dedo e sente!
G- Sim, é isso. Acho que é.
P- Vamos pegar essas peças que são partes do material dourado, são menores.
G- Este parece um cubo, mas não é.
P- Por quê?
G- Porque não tem nem um lado igual ao outro.
P- Vamos contar?
G- Sim, 6x6x5 = é um monte! 36x5. Tenho que pensar! 36+36+36+36+36=180.
P- Olha esse agora. E me responde quanto tem de largura e comprimento?
G- 6 de largura e 10 de comprimento, que dá 60. 6x10=60 unidades.
P- E esta?
G- Comprimento 4, largura 4, então é 16. Comprimento x largura= 4x4=16 unidades.
P- Vamos pegar o multiplano para formar figuras retangulares.
G- Sim. Já vou montar.
P- O que montou aí?
G- Comprimento 3, largura 4, mas pra formar toda a figura vou precisar de 12 pinos. Me dá mais pinos.
P- Por quê?
G- Porque 3x4=12, 12 pinos.
P- E este agora? Olha?
G- Comprimento 3, largura 3. Vou precisar de 9 pinos, 3x3=9
P- E este?
G- Comprimento 2, largura 4. Vou precisar de 8 pinos. 2x4=8 pinos.
P- E agora?
G- Vou fazer comprimento 5 e largura 3. Vou precisar de 15 pinos.
P- Então monta como pensou?
G- 5x3=15 ou 3x5 dá 15 também. Olha aqui!
P – Muito bem. Passa a mão nessa placa, é uma sala com cerâmica (faz de conta), quantas cerâmicas tem na parte mais alta? Consegue sentir?
G – Sim, consigo. 4 de largura e 4 de comprimento, deu 16 placas: 4x4=16 cerâmicas.
P- Se eu tiver 16 pinos, e quiser um retângulo de base 8. Qual será altura?
G- 8x2=16. E pra conferir divide 16:2=8. 8 de base e 2 de altura.
P- Parabéns! Se for 28 pinos com altura igual a 7?
G- Vou pegar 28 pinos, botar a altura 7 para encher direito, vou só completar. Deu 4 de base porque 4x7=28, tenho 7 e o 28 vou fazer 28:7=4, fechou, 4 é base mesmo. Muito fácil, é só distribuir o material.

Figura 2 - Diálogo referente à atividade para efetuar a multiplicação no produto de medida- contínuo-contínuo.
Fonte: a pesquisa

Na atividade, entendemos que o Campo Conceitual da estrutura multiplicativa está dominando. De acordo com Vergnaud citado por Zanella e Barros:

> O estudo das estruturas multiplicativas apresenta diversificados tipos de multiplicação e de divisão, e essa variedade de situações-problemas devem ser cuidadosamente abordadas em sala de aula, para que os estudantes tenham contato e reconheçam uma estrutura que compõe estas situações, e, consequentemente, desenvolvam estratégias de resolução. É a variedade de situações que o educando enfrenta, bem como os invariantes e representações que podem contribuir para a formação e o desenvolvimento de conceitos envolvidos na estrutura multiplicativa. (Zanella & Barros, 2014, p. 70)

Para solucionar as situações apresentadas, G repetia poucas vezes “vou pensar”, “tô pensando”, quer dizer, estava analisando as situações e usando seus teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. a comunicação do que pensou demonstrava através da fala ou do manuseio de material tátil. Ele foi muito rápido nas construções. No uso de materiais táteis, como o similar ao material dourado, encontrou muita facilidade, com os pinos no multiplano montava a base, a altura e preenchia, contava as colunas e linhas e multiplicava. O trabalho com as placas foi muito fácil para G, calculou tudo corretamente.

A pesquisa está em fase de finalização da apropriação do campo conceitual das estruturas multiplicativas, com a aplicação e reforço de situações-problemas envolvendo os conceitos.

Considerações finais

O trabalho desenvolvido com o estudante indica alguns caminhos que podem ser levados em consideração ao se trabalhar com estudantes que necessitam de atenção específica, no caso, com cegueira. Ao se articular o ensino da Matemática aos preceitos da TCC de Vergnaud, pode-se inferir um desenvolvimento contínuo no processo de ensino e aprendizagem deste estudante.

O Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, no que tange ao produto de medida, oferece indicativos de sequências didáticas que podem fornecer os elementos fundamentais para o desenvolvimento de uma ação pedagógica. Essa ação precisa produzir resultados satisfatórios e extremamente necessários para a compreensão e desenvolvimento cognitivo das significações associadas à multiplicação e divisão no conjunto dos Números Naturais.

Portanto, a TCC de Vergnaud, mais especificamente o Campo Conceitual Multiplicativo no produto de medidas: discreto-discreto, e também no contínuo-contínuo, orientou as intervenções realizadas ao longo da pesquisa aqui destacada, salientando que o trabalho se apoiou em toda a TCC, nas estruturas aditivas e multiplicativas, concomitantemente, porque trabalhamos com a ideia de que o conhecimento acontece em uma rede de conceitos, seguindo Vergnaud (1998). Entendemos que não se esgotam as discussões e possibilidades de aplicação da TCC com crianças que necessitam de atendimento especializado, permitindo assim o aprofundamento das questões relacionadas ao desenvolvimento cognitivo por meio da TCC.

Referências e Bibliografia

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE (2012). *Censo Brasileiro de 2010*. Rio de Janeiro: IBGE.

Lerner D.; Sadovsky P. (1996). O Sistema de Numeração: um problema didático. Parra C. *et al. Didática da matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, pp.73-155.

Lüdke, Menga; André, Marli E. D. A. (2013). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Mandarino M.; Belfort E. (2005). *Números naturais:* conteúdo e forma. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, LIMC.

Nunes, T.; Campos, T. M. M.; Magina, S.; Bryant, P. (2005). *Educação matemática: números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez.

Vergnaud, G. Teoria dos campos conceituais (1993). Nasser. L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.* SBEM – RJ. pp. 1-26.

Vergnaud, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria (1998). México: Trillas.

Vergnaud, G. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas de ensino da matemática na escola elementar (2006). Tradução de Maria Luiza Faria Moro; Revisão técnica de Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR.

Zanella, M. S.; Barros, R. M. O. *Teoria dos campos conceituais*: situações-problema da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais (2014). Curitiba: CRV.

Indagación como estrategia de aprendizaje de la matemática en la formación inicial de profesores

Ivette Marie **León** Lavanchy
Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile
ileonl@uc.cl
María Constanza **Ripamonti** Zañartu
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
m_constanza.ripamonti@umce.cl

Resumen

La enseñanza de la matemática en el siglo 21 se instala desde el paradigma de una disciplina científica y se integra con otras disciplinas en núcleos de conocimientos tales como el STEM o su versión más amplia de STEAM. El modelo de aprendizaje basado en la indagación (AMBI) podría constituirse en una herramienta que propicie y potencie las competencias y habilidades matemáticas en los estudiantes de Enseñanza Básica a través del desarrollo de ciclos de investigación en el aula. Este modelo de aprendizaje que busca construir conocimiento matemático y científico de calidad, podría ser un gran aporte en la formación de profesores. Se reseña la experiencia internacional en relación con este modelo y sus implicancias. Se describen y fundamentan las etapas del diseño de situaciones dentro del modelo AMBI y se analiza un ejemplo de experiencia con profesores en formación de Educación Básica, describiendo sus etapas, hallazgos y conclusiones.

Palabras clave: Educación Matemática; Indagación; competencias matemáticas; construcción del conocimiento, STEAM.

El aprendizaje de la matemática, como disciplina científica, en el S XXI

Estamos en un momento en que la sociedad, en forma global, plantea demandas a la educación y plantea objetivos y principios para el futuro, como se señala en la declaración de Incheon 2030: "Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos" (UNESCO, 2016).

Según Augustine (2021), presidente del consejo de gobierno de la UNESCO en la introducción del documento *Caminos hacia 2050 y más allá* señala que:

> (…) vivimos en una época en la que a veces parece que el futuro se puede prever más que nunca, al reducir la brecha entre lo que conocemos hoy y lo que puede venir mañana". Los rápidos avances de la tecnología y la investigación han impulsado transformaciones en la educación. La ciencia y los conocimientos que sustentan estos cambios les brindan esperanza a muchos: esperanza para una vida mejor, esperanza de comunidades más pacíficas y conectadas, esperanza de un mundo más sostenible.

Luna (2015) describe parte de este proceso de cambio desde el punto de vista educativo:

> Este proceso representa una profunda transformación, para la cual las escuelas actuales han de estar preparadas. La pedagogía del siglo XXI debe emplear estrategias docentes innovadoras y respaldadas por la investigación, por las tecnologías del aprendizaje y por las aplicaciones tomadas de la vida real (Saavedra y Opfer, 2012). También es esencial para una comprensión más profunda que las y los estudiantes tengan oportunidades de aplicar las habilidades del siglo XXI en distintas áreas de contenido. En particular, el aprendizaje basado en competencias, combinado con métodos innovadores de aprendizaje que hagan uso de las tecnologías y con enfoques basados en la investigación y en problemas, contribuirá a que las personas desarrollen "capacidades de reflexión de alto nivel" (p 3).

Artigue (2020) describe los procesos que se han ido desarrollando en la DDM el último decenio:

> Aunque las ciencias matemáticas tienen especificidades innegables, el hecho de destacar su dimensión experimental las acerca a otras ciencias y a sus propios enfoques de investigación. Por lo tanto, no es casualidad que, en el último decenio, expresiones como "enfoque de indagación", IBL (Inquiry Based Learning), IBE (Inquiry Based Education), que se han utilizado durante mucho tiempo en los trabajos relativos a la enseñanza de las ciencias, hayan migrado a la enseñanza de las matemáticas. (p 89)

Artigue (2020) señala asimismo que este proceso ha multiplicado el número de proyectos educativos basados en la indagación matemática en todos los niveles. Por ejemplo, de proyectos desarrollados en el Espacio Europeo está el proyecto PRIMAS (Resolución de Problemas e Indagación en Ciencia y Matemática) y el Proyecto Fibonacci. En el espacio de cooperación Asia Pacífico (APEC) se han desarrollado a su vez proyectos que fortalecen el aprendizaje de las matemáticas y el STEAM como por ejemplo el proyecto InMside (APEC, 2018-2020).

Desde una perspectiva más amplia, el modelo de aprendizaje STEM (Science, Technology, Engineering y Mathematics) desarrollado en los 90´s desde las políticas de desarrollo o el más actual STEAM de 2011, incluyendo la integración de las artes y el diseño, ofrece a la indagación en matemática un espacio de trabajo interdisciplinario, conectando con la realidad y la diversidad de intereses de los estudiantes (Corfo-FCH, 2017).

Modelo de aprendizaje de la matemática basado en la indagación (AMBI)

La ciencia es un sistema bien organizado de definiciones, axiomas y teoremas que es el resultado de un largo período de investigación sobre problemas, relaciones con otras disciplinas, generalización y afinación de notaciones y lenguaje.

Según Artigue et al. (2020) cuando la educación considera ese sistema organizado como punto de partida para la enseñanza, es anti didáctica, porque se invierte la ruta de investigación, es decir, se comienza con definiciones y teoremas sin necesidades claras para los estudiantes, y termina con aplicaciones que podrían haber sido problemas de los cuales se originaron las nociones matemáticas, no proporciona a los estudiantes ninguna necesidad y propósito para las matemáticas que les presentamos, y quizás peor aún, no los involucra en el trabajo de los matemáticos, es decir, en tratar de organizar los fenómenos matemáticamente.

Al tomar las matemáticas como una actividad humana, una disciplina científica que permite organizar fenómenos naturales, sociales, culturales, económicos, entre otros, el modelo de indagación se convierte en un mejor camino para el aprendizaje sostenible (UNESCO, 2016).

La definición de AMBI en Artigue et al. (2020), enfatiza la importancia de usar tipos de problemas o preguntas que permitan el uso de múltiples estrategias de solución y se relacionen con experiencias cercanas o científicamente relevantes; así como un perfil de docentes que fomenten la curiosidad y el razonamiento y conecten el aprendizaje con las experiencias de sus estudiantes. El aula de matemática organizada según el AMBI promueve el desarrollo de mentes abiertas valorando el error y las contribuciones de todos los estudiantes, el trabajo colaborativo, el diálogo y el aprendizaje con sentido, a través de la argumentación. Los estudiantes hacen preguntas, colaboran, se comprometen, exploran, explican, extienden y evalúan.

Sala y Font (2019), señalan que el AMBI se organiza en coordinación con el ciclo de modelización matemática, presentando distintas fases:

a) **Formulación de una tarea** que está relacionada con una realidad percibida e influenciada por los intereses del investigador. En esta etapa, se construye el objeto del proceso de modelización.
b) **Selección y construcción de los objetos relevantes** del dominio de indagación, y transformación de éstos para hacer posible una representación matemática.
c) **Transformación de los objetos y relaciones seleccionados** desde su estado de apariencia inicial hacia la matemática, mediante una mayor abstracción e idealización.
d) **Uso de métodos matemáticos** para obtener resultados matemáticos y conclusiones.
e) **Interpretación de los resultados y conclusiones** obtenidos con respecto al dominio de indagación.
f) **Evaluación de la validez del modelo** por comparación de los datos y/o con los conocimientos establecidos.

Este ciclo de modelización organiza las relaciones e interacciones entre dos sistemas: un sistema extra matemático y un sistema matemático. Cada uno tiene su propia lógica y, en consecuencia, el proceso de indagación no sólo está sujeto a las reglas de la racionalidad matemática. En AMBI, sin duda es importante sensibilizar a los estudiantes y darles la oportunidad de experimentar la diversidad de dominios que, además del mundo natural, son accesibles a la indagación matemática a través de procesos de modelización (Artigue, 2017).

Diseño de situaciones para la implementación de AMBI en la formación de profesores de Enseñanza Básica

Como parte de la metodología se consideran las etapas que propone el Modelo de Diseño de Ciclo de actividades AMBI (León, Ripamonti, Flores, 2020) en la figura 1, donde el asombro y la curiosidad son el punto de partida para la indagación, ya que permiten generar las preguntas y motivar a la acción a los estudiantes.

Figura 1. Modelo de diseño de ciclo de actividades de Indagación (León, Flores, Ripamonti, 2020, p 236)

En este modelo cada etapa se describe a partir de las experiencias de aprendizaje (Tabla 1):

Tabla 1

Descripción de los momentos del ciclo del diseño AMBI para profesores en formación

Momento 1 Despertando la curiosidad (Experiencia asombrosa)	Cada ciclo inicia con una experiencia que despierte la curiosidad, un experimento, un desafío, una exploración de fenómenos físicos, un cuento, un video, una exploración digital o con material concreto; es una vivencia personal de descubrimiento, no hay respuestas esperadas ni tareas específicas, hay una puesta en común abierta a descubrimientos tanto cognitivos como afectivos.
Momento 2 Levantamiento de preconceptos (actividad de indagación colaborativa)	Este momento incluye actividades colaborativas de indagación con material concreto; hay tareas propuestas que dirigen la exploración de manera flexible con múltiples soluciones, el objetivo es levantar y descubrir los conocimientos previos de los futuros docentes, producir desequilibrios cognitivos que permitan la resignificación de los conceptos involucrados.
Momento 3 Inductivo-deductivo (desarrollo de conceptos por descubrimiento)	Se proponen tareas que permiten ir sistematizando los descubrimientos del grupo para poder alcanzar algunas generalizaciones y ponerlas a prueba, realizando así un proceso inductivo-deductivo.
Momento 4 Asimilación (comunicación de los aprendizajes)	Este momento busca fortalecer la habilidad comunicativa de los estudiantes y el reconocimiento metacognitivo de los aprendizajes tanto conceptuales/disciplinares como didácticos/pedagógicos.

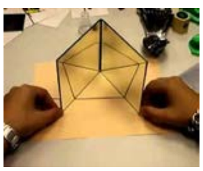
Momento 5 Funcionalidad (Transferencia al Aula)	Se refiere a la reproducibilidad de la enseñanza y a la posibilidad que tienen los futuros profesores de transferir sus experiencias y aprendizajes a la realidad de las aulas escolares. Las tareas relacionan el trabajo del ciclo de actividades con el currículo, los niveles de aprendizaje de sus estudiantes, la diversidad dentro de las aulas, entre otras

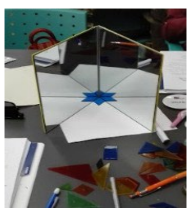
Fuente: León, Flores y Ripamonti, 2020, p 236.

Experiencia de AMBI en Formación de profesores de Enseñanza Básica

En la experiencia de aprendizaje AMBI que se presenta a continuación, el ciclo inicia con una historia extraída de la novela "Señor Dios soy Anna" (Hopkins, 1974) donde se relata un juego con espejos y una línea. La pregunta que activa la curiosidad es ¿Qué creen que vio Anna? Se les pide a los estudiantes/docentes un dibujo con lo que imaginaron al leer la historia.

En el segundo momento los estudiantes/ docentes, exploran con libros de espejos, papel, lápices y regla para reproducir la situación descrita en la lectura. Exploran las diferentes respuestas dependiendo de las posiciones de la línea y los espejos. Ponen en común sus descubrimientos.





En el tercer momento exploran con diferentes figuras 2D (triángulos, paralelogramos, hexágonos, entre otros) y se les pide que observen y dibujen lo que pasa al interactuar con el libro de espejos. Comentan en grupo y responden preguntas. ¿Qué nuevas figuras se forman? ¿Qué pasa con los ángulos de abertura de los espejos? Resuelven problemas que involucran las figuras disponibles y no disponibles.

En el cuarto momento se les pide analizar el trabajo colaborativo, sus aprendizajes y los conceptos geométricos relacionados con la actividad de indagación con el espejo y las figuras 2D (transformaciones isométricas, composición y descomposición de figuras 2D, polígonos, triángulos y ángulos).

En el quinto y último momento los estudiantes/docentes relacionan el trabajo realizado en el ciclo de AMBI con el currículum nacional, los niveles de aprendizaje de sus estudiantes, la diversidad dentro de sus aulas, la selección y adaptación de los materiales y las actividades propuestas en su contexto, entre otras.

Principales hallazgos o conclusiones

El desarrollo de la dimensión experimental de la matemática con los estudiantes/docentes, abre una ventana a la comprensión de una nueva forma de enseñanza aprendizaje de las matemáticas por la vía de la experiencia personal y colaborativa (Artigue, 2020). Comenzar una clase de matemática, con un texto literario, genera el asombro, un motor de la motivación por indagar. Este modelo de aprendizaje de la matemática aporta valiosos resultados para la sociedad del conocimiento: prepara a los estudiantes para un futuro cambiante e incierto, aprendizaje durante toda la vida, desarrollo de la curiosidad y comprender la naturaleza de la ciencia y la matemática.

El AMBI se muestra como una herramienta apropiada para propiciar y potenciar las competencias y habilidades matemáticas en los futuros profesores, tales como la comprensión profunda de conceptos matemáticos básicos, la modelación y argumentación, así como la creatividad e innovación, favoreciendo desde su experiencia el diseño de ciclos de investigación en el aula. Como señalan los autores en el Proyecto Fibonacci, (2012), la estrategia AMBI requiere el desarrollo de metodologías de enseñanza en la práctica, que tengan en cuenta la experimentación.

La encuesta de evaluación de cierre de esta experiencia generó otros hallazgos.

El primero fue el efecto positivo que produjo en los profesores en formación, el trabajo de indagación con materiales concretos, motivando su participación y compromiso con el aprendizaje y construcción de conocimientos matemáticos y didácticos. Además, se produce una resignificación de la importancia de dichos materiales para la construcción de los conocimientos matemáticos fundantes en los niños; más del 80% de los profesores en formación incluyó comentarios relacionados a este tema.

Cabe destacar lo que señalan distintos autores, sobre el uso de material manipulativo en esta etapa escolar, facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, pues ellos experimentan situaciones de aprendizaje de forma manipulativa, que les permite conocer, comprender e interiorizar las nociones matemáticas estudiadas, por medio de la experiencia y los sentidos.

Otra de las fortalezas en el diseño AMBI fueron las preguntas implicadas en las actividades de exploración autónoma, indagación colaborativa y reflexión de transferencia al aula, que fueron valoradas por los profesores en formación en más de un 70%, ya que, según estos, aportan al proceso de comprensión y construcción del conocimiento matemático, propio y al de sus (futuros) estudiantes.

Uno de los aspectos que más se valora en esta experiencia es la posibilidad que tienen los profesores en formación de aprender conceptos y habilidades matemáticas desde la indagación, en un ambiente inclusivo, motivador, desafiante y seguro (con bajos niveles de ansiedad). A su vez, esta experiencia les permite proyectar su actividad docente futura y transferir al aula de matemática esta metodología de enseñanza -aprendizaje.

Referencias y bibliografía

APEC (2018-2020). *Inclusive Mathematics for Sustainability in a Digital Economy (InMside)*-HRD 01

Artigue, Michele (2017). *¿Qué es la educación matemática basada en la indagación?* La Gaceta de la RSME, Vol. 20 (2017), Núm. 3, Págs. 593–609. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1416

Artigue, Michele (2020). *El desarrollo de la didáctica de las matemáticas, una mirada internaciona*l. RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 12(3), pp. 83-95.https://www.sochiem.cl/rechiem/

Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., & Maass, K. (2020). *Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectorie*s. Teaching Mathematics and Computer Science, 18(3), 63–89. https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0505

Augustine, Andrew. (2021). *Caminos hacia 2050 y más allá*. Unesco https://www.iesalc.unesco.org/wp-content/uploads/2021/11/Pathways-to-2050-and-beyond_ESP-1.pdf

Corfo-Fundación Chile (2017). *Preparando a Chile para la sociedad del conocimiento. Hacia una coalición que impulse la Educación STEAM.* https://www.ecosisteam.cl/wp-content/uploads/2019/10/Coalicion-educacion-STEAM.pdf

Fibonacci Project (2012). *Learning through Inquiry*. En http://www.fibonacci-project.eu/

Hopkins, S. (1974). *Señor Dios soy Anna.* Editorial Pomaire. Santiago.

León, I., Ripamonti, C., Flores, B. (2020). *Geometría Dinámica: Despertando el asombro a través de la indagación.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 33, Número 1, febrero 2020, Sección 2 https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

Luna, Cynthia (2015). *El Futuro del aprendizaje 3: ¿Qué tipo de pedagogías se necesitan para el siglo XXI?* UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000243126_spa?posInSet=1&queryId=N-EXPLORE-000e2974-03c7-4a13-bb77-bc0db78159be

Sala, G., Font, V. (2019). *El papel de la modelización en una experiencia de enseñanza de matemáticas basada en indagación*. AIEM - 2019, 16, 73–85 https://www.researchgate.net/publication/336934374_Papel_de_la_modelizacion_en_una_experiencia_de_ensenanza_de_matematicas_basada_en_indagacion

UNESCO (2016). *Educación 2030: Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4: Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656_spa

Investigação Baseada em *Design*: descrição de uma trajetória de pesquisa

Henrique Rizek **Elias**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
henriqueelias@utfpr.edu.br
Laís Cristina Viel **Gereti**
Universidade Federal de Santa Catarina
Brasil
laisgereti@gmail.com
Susana de Fátima **Lopes**
Fundação Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Mandaguari
Brasil
susanaflopes@yahoo.com.br
Suiane Priscilla Perez Felício da **Silva**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
suianefelicio@alunos.utfpr.edu.br

Resumo

Este artigo apresenta a trajetória de um projeto de pesquisa, ainda em andamento, que busca promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com Potenciação. Para tanto, o projeto fundamenta-se na metodologia da Investigação Baseada em *Design* (IBD), uma abordagem de pesquisa que visa promover intervenções por meio de produtos educacionais que buscam soluções para problemas em sala de aula. Nessa linha, apresentam-se duas pesquisas de mestrado que juntas compõem o primeiro ciclo de uma IBD, que envolve a preparação, a realização e a análise retrospectiva de uma experiência de *design*. Por fim, indica-se a continuidade do projeto com previsão de novas pesquisas a fim de elaborar teorias locais a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico em tarefas exploratórios para a introdução do tema Potenciação no 6º ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Educação Matemática; Investigação Baseada em *Design*; Potenciação; Pensamento Algébrico; Ensino Exploratório; Ensino Fundamental; Brasil.

Neste trabalho, apresentamos o desenvolvimento de um projeto de pesquisa que está sendo realizado pelo grupo MEPPE (Matemática Escolar: práticas, pesquisas e estudos), vinculado à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR - *campus* Londrina), composto por professores da Educação Básica, professores do Ensino Superior, estudantes de graduação e estudantes do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT). O projeto visa, entre outras ações, realizar pesquisas pautadas na metodologia da Investigação Baseada de *Design* (IBD) que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes da Educação Básica. Assim, durante os anos de 2020, 2021 e 2022, duas pesquisas de mestrado profissional, feitas por membros do MEPPE, foram dedicadas a realizar uma IBD buscando promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao aprenderem Potenciação.

O presente artigo, portanto, tem como objetivo descrever a experiência de uma IBD, ainda em andamento, e indicar os passos futuros do projeto de pesquisa. Para tanto, na próxima seção, apresentamos, resumidamente, as características de uma IBD; em seguida, descrevemos as ações realizadas até o momento, indicando resultados parciais das duas pesquisas realizadas; e, por fim, comentários finais indicando a continuidade do projeto.

Investigação Baseada em Design - IBD

Ponte et al. (2016, p. 77-78) apontam cinco aspectos fundamentais de uma IBD:

> 1. Incide sobre os problemas que se colocam aos profissionais (professores ou formadores) no seu trabalho de ensino, procurando promover a aprendizagem dos alunos ou de formação dos professores; 2. É baseada em intervenções, para transformar processos que ocorrem no mundo real; 3. Tem simultaneamente uma forte orientação teórica e pragmática; 4. Envolve testar e, se necessário, rever ou rejeitar conjeturas sobre os processos de aprendizagem dos participantes e os meios de os promover; 5. Dada a sua preocupação teórica, visa a generalidade.

Em síntese, uma vez identificado um problema (educacional) a ser enfrentado, a IBD visa gerar uma intervenção que deve ser materializada por meio de algum tipo de Produto Educacional. Esse Produto Educacional passa pelo processo de implementação, análise e refinamento, de modo que, ao fim da investigação, possa ser utilizado por outras pessoas em outros contextos (Barbosa & Oliveira, 2015).

De acordo com Ponte et al. (2016, p. 80), a IBD “inclui diversos ciclos envolvendo as fases de preparação, realização e análise retrospectiva de uma experiência de design”. A fase de preparação é fundamental para o desenvolvimento de uma IBD, pois é quando os investigadores clarificam as questões teóricas que envolvem o problema educacional a ser enfrentado. Ponte et al. (2016) consideram que, nesta fase, é essencial a elaboração de uma conjectura (sugere-se uma conjectura em duas dimensões: conteúdo e didático-pedagógica) a ser testada e aperfeiçoada no percurso da investigação. O objetivo não é validar a conjectura, mas, sim, produzir uma conjectura mais forte.

Na segunda fase, realização de uma experiência de *design*, é fundamental sempre estar atento e perseguir, ao longo de todo o processo, os percursos de aprendizagem dos estudantes (Ponte et al., 2016). Nessa fase, a conjectura elaborada na preparação está em constante análise. A terceira e última fase do ciclo, análise retrospectiva, envolve refletir sobre todo o processo realizado, sempre colocando a experiência de *design* em um contexto teórico mais amplo (Ponte et al., 2016) e, se for o caso, refinar a proposta para o desenvolvimento de um novo ciclo.

Dada essa característica cíclica e a possibilidade de se realizar diversos ciclos, Ponte et al. (2016) consideram o tempo como uma dificuldade para se realizar pesquisas pautadas na metodologia da IBD. Tempo esse que, muitas vezes, uma pesquisa de mestrado não tem. No entanto, os autores indicam uma forma de contornar essa dificuldade:

> [...] é muito difícil de enquadrar nas restrições temporais de um trabalho num doutoramento e ainda mais num mestrado. No entanto, já não o é se os trabalhos de mestrado ou doutoramento forem feitos no quadro de um programa mais amplo conduzido por um investigador responsável (Ponte et al., 2016, p. 87).

Pensando nisso, o grupo MEPPE decidiu que a realização de uma IBD deveria se dar em um projeto de pesquisa que englobasse mais do que uma pesquisa de mestrado, para que fosse possível realizar uma cuidadosa fase de preparação (primeira fase de IBD), seguida das fases de realização e de análise retrospectiva e, enquanto for necessário, do desenvolvimento de novos ciclos.

Até o presente momento, duas pesquisas de mestrado foram dedicadas a realizar uma IBD visando promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com Potenciação. Uma dissertação iniciada em 2020 e defendida em 2022, que teve como objetivo iniciar a fase de preparação dessa IBD e outra dissertação, iniciada em 2021 e que ainda está em andamento, que tem como objetivo avançar na preparação e realizar as fases de realização e análise retrospectiva da IBD. Dessa maneira, as duas pesquisas juntas completam um ciclo da IBD. Na próxima seção, descrevemos cada uma dessas pesquisas.

A experiência com a IBD

A fase de preparação da IBD

A primeira pesquisa foi realizada pela terceira autora deste artigo e orientada pelo primeiro autor. Os dados da pesquisa foram produzidos nos encontros do Grupo MEPPE. O grupo destinou oito encontros (realizados remotamente, pelo *Google Meet*) exclusivamente para estudar e discutir, teoricamente, diferentes aspectos que envolvessem o tema Potenciação. Esses encontros foram gravados e analisados pela pesquisadora em sua dissertação.

As reuniões ocorreram quinzenalmente (aos sábados, das 9h às 11h30) durante os meses de setembro de 2021 a março de 2022. Na época da produção de dados para a pesquisa, o grupo era composto por 11 pessoas com atuações em diferentes contextos: professores do Ensino Superior, professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e um estudante de graduação. Em termos de formação, três integrantes com doutorado em Educação Matemática, dois com mestrado profissional em Ensino de Matemática, quatro estavam cursando o mestrado profissional em Ensino de Matemática, um com Licenciatura em Matemática (ingressou no PPGMAT em 2022, após o início da produção dos dados) e outro estava cursando Licenciatura em Química.

Durante os encontros, o grupo tinha como objetivo estabelecer alguns princípios de *design* que pudessem sustentar teoricamente a fase de realização da intervenção. Uma vez que o tema matemático a ser investigado (Potenciação) já estava definido, era preciso elaborar esses princípios de *design* que norteariam a elaboração "do que será ensinado" (conjectura na dimensão do conteúdo matemático) e "de como será ensinado" (conjectura na dimensão didático-pedagógica):

> [...] os *princípios de design* norteiam o processo e fazem parte da dimensão teórica. Eles funcionam como pilares ou hipóteses fortes apoiadas em uma teoria qualquer. A metodologia DBR [Design Based Research] não se apoia em uma única teoria. Muito pelo contrário, ela pode adotar vários elementos de várias teorias de modo a eleger os princípios de design que irão nortear toda produção, implementação e avaliação. (Kneubil & Pietrocola, 2017, p. 4, destaques dos autores).

Os encontros visavam aprofundamentos teóricos que permitissem a elaboração da conjectura (na dimensão do conteúdo e na dimensão didático-pedagógica) e, também, a elaboração de uma avaliação diagnóstica que fosse capaz de fornecer informações a respeito do ponto de partida de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, em termos dos seus conhecimentos, que permitam/favoreçam a aprendizagem do conteúdo de Potenciação. O Quadro 1 descreve os oito encontros, que foram gravados e analisados na pesquisa de mestrado.

Quadro 1
Planejamento dos encontros do grupo

	Ações realizadas	**Materiais utilizados**	**Finalidade**
Primeiro encontro	Discussão e análise coletivas de documentos curriculares sobre Potenciação.	Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP).	Elaboração da conjectura na dimensão do conteúdo.
Segundo encontro	Discussão coletiva e apresentação (feita pela mestranda) de pesquisas científicas sobre Potenciação encontradas no levantamento bibliográfico realizado pela mestranda.	Dissertações de mestrado: Paias (2009) e Melo (2020); Tese de doutorado: Paias (2019).	Elaboração da conjectura na dimensão do conteúdo.
Terceiro encontro	Discussão coletiva sobre o Pensamento Algébrico.	Artigo científico: Canavarro (2007).	Elaboração da conjectura na dimensão do conteúdo.
Quarto encontro	Discussão coletiva e apresentação (feita pela mestranda) de livros didáticos para o 6º ano do Ensino	Livros didáticos: Bongiovani, Leite e Laureano (1992); Giovanni	Elaboração da conjectura na dimensão do conteúdo.

	Fundamental, dando maior atenção às seções que se referem à Potenciação.	e Castrucci (1992); Andrini e Vasconcellos (2015) e Giovanni Júnior e Castrucci (2018).	
Quinto encontro	Discussão coletiva sobre uma proposta de teste diagnóstico para o 6º ano do Ensino Fundamental.	Primeira versão de um teste diagnóstico elaborado pela mestranda.	Elaboração dsa avaliação diagnóstica.
Sexto encontro	Discussão coletiva sobre uma proposta de teste diagnóstico para o 6º ano do Ensino Fundamental.	Primeira versão de um teste diagnóstico elaborado pela mestranda.	Elaboração da avaliação diagnóstica.
Sétimo encontro	Discussão coletiva sobre Ensino Exploratório.	Artigo científico: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013).	Elaboração da conjectura na dimensão didático-pedagógica.
Oitavo encontro	Discussão coletiva sobre Pensamento Algébrico e Ensino Exploratório.	Artigo científico: Alves e Canavarro (2018).	Elaboração da conjectura na dimensão didático-pedagógica.

Fonte: os autores

Como pode ser observado no Quadro 1, para o pensamento algébrico, foi adotado, principalmente, o trabalho de Canavarro (2007). Já para o Ensino Exploratório, o trabalho de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013). Por limitações de espaço, não iremos apresentar, neste texto, a avaliação diagnóstica elaborada[1].

Após a análise das discussões realizadas pelos membros do grupo nos oito encontros, foram elaboradas, como resultado da pesquisa de mestrado, a conjectura na dimensão do conteúdo e na dimensão didático pedagógica. A conjectura na dimensão do conteúdo de Potenciação para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental já foi publicada em Elias et al. (2022) e considera que

> i) a potenciação dever ser incluída no contexto mais amplo do pensamento algébrico, na medida em que a notação (convencional ou não) é parte constituinte do conceito e, também, considerando que a generalização é uma característica importante para sua compreensão; ii) a potenciação ora pode ser interpretada como uma operação (nesse caso, a potenciação é a multiplicação de fatores iguais) ora pode ser interpretada como uma representação (nesse caso, a potenciação "é uma representação no registro algébrico do objeto matemático potência" (Paias, 2019, p. 38)). (Elias et al., 2022, p. 425).

A conjectura na dimensão didático-pedagógica considera que: i) as tarefas exploratórias (Ponte, 2014), por serem do tipo abertas e de desafio reduzido, permitem aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, um ano de transição entre os anos iniciais e os anos finais do Ensino Fundamental, retomarem o trabalho com identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas e de generalização desses padrões (trabalho este iniciado nos anos iniciais), conectando-o à (nova) noção de Potenciação. Com isso, busca-se evitar um ensino pautado pela apresentação da simbologia e pela explicação da técnica de operação; ii) uma abordagem de

[1] A avaliação diagnóstica elaborada está em processo de publicação como um Produto Educacional resultante da pesquisa de mestrado da segunda autora. Em breve, estará disponível no repositório da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

ensino que favorece o trabalho com tarefas exploratórias, visando o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, é o Ensino Exploratório, uma vez que a aprendizagem dos estudantes decorre "da possibilidade de trabalharem com tarefas matemáticas ricas e de poderem partilhar com os colegas e o professor as suas ideias" (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p. 3).

A formulação da conjectura nas dimensões do conteúdo e didático-pedagógica foi o principal resultado da primeira dissertação de mestrado e foi fundamental para a sequência do projeto de pesquisa, permitindo-nos avançar na preparação da IBD na segunda pesquisa de mestrado, resultando na realização e análise retrospectiva.

A fase de realização e análise retrospectiva da IBD

A segunda pesquisa foi realizada pela quarta autora deste artigo, orientada pelo primeiro autor e coorientada pela segunda autora. Com a conjectura (princípios de *design*) encaminhada pela primeira pesquisa de mestrado, partimos para concluir a etapa de preparação e avançar para a etapa de realização da IBD. Novamente com o auxílio do grupo MEPPE e com base no que foi estudado nos oito encontros mencionados, selecionamos/reformulamos duas tarefas exploratórias (Ponte, 2014) que foram utilizadas em cinco aulas (de 50 minutos cada) com 28 alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no Paraná. A intervenção foi pautada na abordagem do Ensino Exploratório e o foco foi abordar aspectos do pensamento algébrico, possivelmente trabalhados em anos escolares anteriores, que pudessem favorecer a aprendizagem de Potenciação sem ter como foco a manipulação de símbolos e notações até então desconhecidos dos estudantes do 6º ano.

Levamos em consideração o fato de que a própria BNCC indica a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e, também, a necessidade de se trabalhar aspectos desse pensamento desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, quando considera "[…] imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (Brasil, 2018, p. 270). Assumimos a caracterização que Canavarro (2007) faz para pensamento algébrico e consideramos que o foco do pensamento algébrico está na generalização, que irá, gradualmente, sendo representada na forma de símbolos usuais.

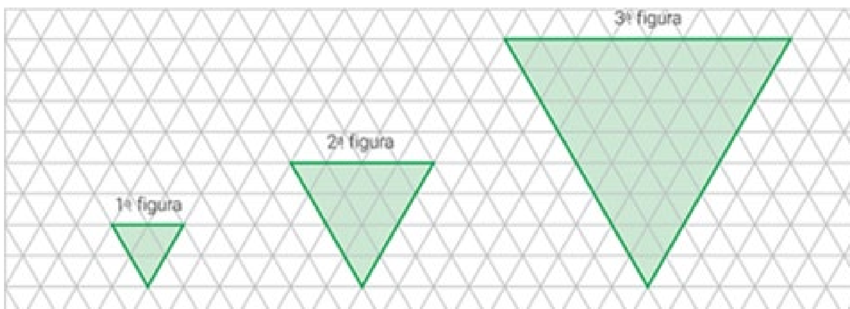
Compreendemos os termos padrão e generalização da mesma forma que Vale (2012). Para essa autora, a "ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança" (Vale, 2012, p. 186), sendo possível identificar dois tipos de padrão: "Um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. Um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior" (Vale, 2012, p. 186). Além disso, tarefas que abordam padrões podem envolver dois tipos de generalização:

> [...] a *generalização próxima* que se refere à descoberta do termo seguinte e que podem ser obtidos por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela e que normalmente envolve relações recursivas, e a *generalização distante* que envolve a descoberta do padrão e que requer uma compreensão da lei de formação, ou seja, uma regra geral através de uma expressão matemática, e requer a procura de relações funcionais (Vale, 2012, p. 190).

O objetivo das duas tarefas exploratórias era que os estudantes trabalhassem com sequências numéricas, reconhecessem padrões e chegassem a uma generalização. Foi somente após o trabalho com essas tarefas que a professora abordou, formalmente, a Potenciação. Apenas uma dessas tarefas será apresentada neste texto, no Quadro 2. Para o trabalho com essa tarefa, foram utilizadas três das cinco aulas.

Quadro 2
A tarefa dos triângulos

A imagem abaixo contém diversos triângulos pequenos. A partir desses triângulos pequenos, podemos formar triângulos maiores, como os que estão pintados de verde nas figuras 1, 2 e 3 da imagem:



a) Quantos triângulos pequenos há em cada triângulo verde?
b) Quantos triângulos pequenos terão na Figura 4? E na Figura 5? Por quê?
c) Como a quantidade de triângulos pequenos está mudando de uma figura para a outra? Escreva o que você e seu grupo descobriram.
d) Quantos triângulos pequenos terão na Figura 10? Por quê?

Fonte: os autores

Na primeira figura (triângulo verde), é possível notar quatro triângulos menores; na segunda, 16 triângulos menores; na terceira figura, 64 figuras. A percepção de um padrão (de crescimento), que permita compreender qual a quantidade de triângulos terá a próxima figura, e a busca por uma generalização (*próxima* ou *distante*) é o centro do desenvolvimento do pensamento algébrico. Por isso, entendemos que esta tarefa poderia fazer com que os estudantes chegassem a uma generalização, por exemplo 4^n, sem, necessariamente, utilizar essa notação convencional. Assim, ao invés de focar a realização do “cálculo” ou na representação $a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\ vezes}$, é possível que se promova o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da busca pelo padrão percebido na quantidade de triângulos pequenos em cada figura (triângulo verde) e somente ao final, nas últimas aulas, seja introduzida a notação convencional de potenciação e apresentada a nova operação.

As análises dos dados produzidos nas discussões dos estudantes da turma de 6º ano ainda estão sendo feitas. Não temos espaço neste texto para apresentar as análises dos dados[2] feitas até

[2] Uma parte dessas análises foi apresentada no XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), ocorrido em novembro de 2022, e, em breve, será publicada nos anais do evento.

o momento. Cabe mencionar, entretanto, que o grupo de estudantes analisado não manifestou estabelecer uma relação direta entre o número da figura e a quantidade de vezes que o fator 4 aparece na multiplicação, fato que permitiria a eles determinarem uma regra para encontrar a quantidade de triângulos para uma figura n, chegando a uma *generalização distante.* Com base em Vale (2012), podemos dizer que os estudantes chegaram a uma *generalização próxima*, uma vez que descobriram os termos seguintes envolvendo relações recursivas (já que os estudantes perceberam que a quantidade de triângulos de uma figura é igual ao quádruplo da quantidade de triângulos da figura anterior).

Os dados das cinco aulas ainda estão sendo analisados na segunda pesquisa de mestrado e a previsão é que a defesa dessa dissertação ocorra em 2023. Para a defesa, a pesquisa incluirá a terceira fase da IBD, a análise retrospectiva.

Comentários Finais

Neste texto, descrevemos a trajetória de uma IBD que envolveu duas pesquisas de mestrado e que pretende envolver outras pesquisas futuras a fim de realizar novos ciclos da IBD de modo a fortalecer a conjectura nas duas dimensões, refinar as tarefas exploratórias e o planejamento das aulas. Com isso, espera-se, no futuro, formular teorias locais (Ponte *et al*. 2016) a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico em tarefas exploratórias para a introdução do tema Potenciação no 6º ano do Ensino Fundamental.

Referências e bibliografia

Alves, B. S. & Canavarro, A. P. (2018). Desenvolvimento do pensamento algébrico de jovens crianças: potencialidades da exploração de padrões, no contexto do ensino exploratório da matemática. *Debates em Educação*, *10*(22), 247-270. https://doi.org/10.28998/2175-6600.2018v10n22p247-270

Andrini, A., & Vasconcellos, M. J. (2015). *Praticando a Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil.

Barbosa, J. C., & Oliveira, A. M. P. (2015). Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 526-547.

Bongiovani, V., Leite, O. R. V., & Laureano, J. L. T. (1992). *Matemática e Vida*: Trabalhando com Números, Medidas e Geometria. São Paulo: Ática.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**.** *Quadrante*, *16*(2), 81-118. https://doi.org/10.48489/quadrante.22816

Elias, H. R., Martelozo, D. P. S., Gereti, L. C. V., & Lopes, S. F. (2022). Conocimiento Especializado de Potenciación movilizado por docentes a partir de una Investigación Basada en Design. *Revista Paradigma*, *43*(2), 404-431. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p404-431.id1232

Giovanni, R, J., & Castrucci, B. (1992). *A Conquista da Matemática*. São Paulo: FTD.

Giovanni Junior, R, J., & Castrucci, B. (2018). *A Conquista da Matemática*. São Paulo: FTD.

Kneubil, F. B., & Pietrocola, M. (2017). A pesquisa baseada em Design: visão geral e contribuições para o ensino de ciências. *Revista Investigações em Ensino de Ciências, 22*(2), 1-16. http://dx.doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2017v22n2p01

Melo, M. C. P. (2020). *A Resolução de Problemas: Uma Metodologia Ativa no Ensino de Matemática para a Construção dos Conteúdos de "Potenciação e Radiciação" com Alunos do Ensino Fundamental.* (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, Brasil.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29-54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

Paias, A. M. (2009). *Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos os Ensinos Fundamental e Médio.* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Paias, A.M. (2019). *Obstáculos no Ensino e na Aprendizagem do Objeto Matemático Potência.* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P. (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp.13-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P, Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação Baseada em Design para Compreender e Melhorar as Práticas Educativas. *Quadrante*, 25(2), 77-98. https://doi.org/10.48489/quadrante.22934

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 8(20), 181-207. https://doi.org/10.25755/int.493

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

La construcción de un isomorfismo de espacios vectoriales con $\mathbb{R}^n$: El caso del profesor en formación que interpreta desde lo funcional, matricial y geométrico-figural

Claudio Zamorano Sánchez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
claudio.zamorano@mail.pucv.cl
Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), Analizamos las construcciones y mecanismos mentales que se evidencia cuando se construye un *isomorfismo de espacios vectoriales* (IEV) con $\mathbb{R}^n$, a través, del ciclo metodológico de APOE en una problemática situada, con la cual, se ponen a prueba los esquemas previos que contienen para interpretar desde una perspectiva funcional, matricial y geométrica-figural al IEV. Ello permitió investigar sobre su naturaleza unificadora al interior del álgebra lineal (AL). Resultados preliminares de la investigación dan cuenta de la importancia del contexto y las tareas para el reconocimiento de los objetos del AL en otros contextos y la existencia de relaciones entre los esquemas IEV-Funcional, IEV-Matricial y IEV-geométrico-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo del IEV. Esto último se fundamente a través de Descomposición Genética (DG), que pone de relieve los mecanismos mentales asociados a la construcción del IEV como un esquema.

Palabras clave: Educación Matemática; Matemáticas; Educación universitaria; Formación Docente Inicial; Teoría APOE; Resolución de Problemas; Didáctica del Álgebra Lineal; Valparaíso, Chile.

Introducción

El presente reporte de investigación es un aporte a la enseñanza del álgebra lineal (AL) desde la perspectiva de APOE, aplicada a un contexto para que el profesor de formación inicial se enfrente a situaciones problemáticas que no están situadas en contextos tradicionales y pueda desarrollar un proceso de construcción conceptual. En este sentido, el objetivo principal del reporte de investigación es mostrar las construcciones mentales de un profesor en formación cuando construye un IEV, a través, de una situación contextualizada en la que el estudiante deberá enfrentarse a diversas tareas para evidenciar sus estructuras mentales cuando interpreta desde un perspectiva funcional, matricial y geométrica figural el IEV.

En este sentido, es necesario que los estudiantes puedan reconocer que los objetos del AL evolucionan en su complejidad, esto es, los sistemas de ecuaciones, matrices, espacios vectoriales, bases, junto con las transformaciones lineales, interactúan para construir nuevos objetos. Por lo tanto, para llevar a cabo el reporte de investigación sobre el IEV, se diseñó una actividad exploratoria contextualizada que, a partir del reconocimiento de un conjunto solución de un sistema de ecuación, se aplicarán acciones sobre los esquemas de transformación lineal (TL) interpretada como una función para (1) analizar las estructuras mentales cuando se construye el IEV y, así, (2) determinar los mecanismos mentales involucrados en la construcción del esquema funcional, matricial y geométrico-figural para interpretar al IEV.

En general, Para alcanzar el objetivo anterior, nos preguntamos cómo se construye el IEV y con ello, qué mecanismos mentales permiten unificar los esquemas —funcional, matricial y geométrico-figural del IEV— a través del ciclo metodológico de APOE que considera (1) a partir de un estudio teórico sobre el objeto IEV, el diseño de una descomposición genética (DG) hipotética que será puesta a prueba en un profesor en formación a través de (2) un instrumento que valide las construcciones declaradas en la DG hipotética, para luego, (3) analizar las respuestas entregadas por el profesor en formación y, así, validar o refinar la DG de IEV.

Finalmente, los resultados muestran que el IEV se desarrolla con base en tres interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural— a través de las cuales la presente investigación busca identificar la existencia de un esquema que interprete desde estas tres perspectivas del IEV.

Antecedentes

Sobre el diseño de situaciones

Cuando un profesor en formación cursa la asignatura de AL, utiliza las definiciones y propiedades para solucionar situaciones problemáticas. Sin embargo, cuando debe aplicar en contextos no tradicionales, el uso de ellas va más allá de un algoritmo aprendido

En este sentido, la importancia del AL radica no solo en la aplicación de sus conceptos en la resolución de problemas propios de la línea sino también, la posibilidad de ser una herramienta concreta para resolver problemáticas contingentes en otros contextos ligados al desarrollo del Pensamiento Científico. En este sentido, investigadores de la Didáctica de la Matemática (DM) (Trigueros y Oktaç, 2019) han reportado en diversas ocasiones que, la enseñanza del AL carece de contextos donde el estudiante pueda aplicar, de forma concreta, cómo los conceptos del AL son un pilar fundamental, para resolver situaciones problemáticas en otros contextos donde se desarrolle el conocimiento científico.

Por consiguiente, la realización de actividades contextualizadas en situaciones problemáticas no tradicionales contribuye a visualizar la comprensión que tienen los estudiantes sobre el cómo se construye un objeto matemático. En este sentido, Trigueros (2019) argumenta que las actividades con un contexto real contribuyen a la comprensión de conceptos abstractos del AL y, junto con ello, proporcionar información sobre el cómo están estructurados los conocimientos para la identificación de factores que ayuden a su evolución.

Hay que mencionar que el diseño de actividades, desde la perspectiva de APOE considera, no solo la búsqueda de situaciones ficticias para la aplicación de un teorema o una propiedad, sino que, la posibilidad de que el profesor en formación pueda mostrar las estructuras y mecanismos mentales que tiene sobre un objeto matemático y el cómo, a través, de tareas ─en el contexto de APOE, acciones─ permitirá la asimilación para la generación de un nuevo esquema como una evolución más compleja. Por tanto, estas acciones sobre esquemas previos, según Trigueros y Oktaç (2019), permitirá medir el razonamiento de los estudiantes sobre un objeto matemático, así como la articulación con dominios que no son propios de la matemática.

En consecuencia, el diseño de actividades contextualizadas es un camino viable para mostrar las construcciones mentales en un grupo de profesores en formación. En este sentido y, en lo particular, junto con responder ¿Cuál es el rol del IEV para la articulación de los conceptos del AL? También será analizar ¿Cómo las tareas contribuyen para el análisis de las construcciones y mecanismos mentales que tiene sobre el objeto IEV?

Por lo tanto, el objetivo de este reporte de investigación es investigar sobre el IEV como un concepto unificador del AL, a través de un problema contextualizado con distintas tareas, para evidenciar los mecanismos mentales asociados a una DG hipotética.

Sobre el objeto de *isomorfizar*[1]

Una noción importante para la construcción de la matemática es determinar si existe un *isomorfismo* entre estructuras algebraicas. Saber cómo se comporta una estructura en conocimiento de otra, es de gran utilidad para poder analizar sus características y propiedades. En este sentido, la revisión bibliográfica en libros especializados de álgebra abstracta nos muestra que, para determinar que dos estructuras son *isomorfas*, se precisa de un homomorfismo biyectivo entre las estructuras y, con ello, una construcción conceptual que subyace a la noción de función. Este punto de vista nos muestra la naturaleza abstracta del *isomorfismo* entre estructuras y, por tanto, que requiera un mayor esfuerzo para su comprensión.

Estas observaciones que están alojadas en el estudio de los homomorfismos de grupos, nos suponen dos consideraciones importantes para cuando estudiemos el *isomorfismo* entre espacios vectoriales. La primera, considera el estudio sobre las dimensiones de las bases que generan los espacios vectoriales, debido a que se puede intuir la existencia de un *isomorfismo* solo observando la cardinalidad de ellas y, en el caso que no se pueda probar o intuir, poder construir un *isomorfismo* entre espacios vectoriales.

Por lo tanto, estas consideraciones generan el cuestionamiento sobre las condiciones que se deben cumplir para que un estudiante pueda *isomorfizar* espacios vectoriales, que interpretado desde APOE equivale a preguntar *¿cuáles son los mecanismos mentales que muestran los estudiantes cuando construyen estructuras Isomorfas*?

[1] Isomorfizar. Acción de construir un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Marco teórico

La teoría APOE, es un modelo que describe desde una perspectiva cognitiva como un individuo aprende un concepto matemático, describiendo cómo estos son construidos mentalmente (Arnon et al., 2014), a través, de mecanismos mentales como la *interiorización, la encapsulación, desencapsulación, coordinación y reversión,* que permiten que las estructuras mentales evolucionen según el nivel de construcción del individuo (Oktaç, 2019).

Es así, como APOE nos proporciona elementos y fundamentos teóricos para describir el nivel de construcción que muestra un estudiante, con base en las producciones y respuestas que entrega, cuando se enfrenta a un objeto del AL desde una perspectiva cognitiva.

De acuerdo con ello, para el presente reporte de investigación, se han considerado unas preguntas de evaluación relacionada con la solución general (S_g) de un sistema de ecuación, para realizar una acción que afecta a los esquemas de TL interpretada como una función, el de matrices y el geométrico para explorar aquellos aspectos que articulan un esquema multinterpretativo del IEV. En relación con esto último, consideramos que el estudiante debe mostrar los siguientes componentes que serán el soporte de una DG de IEV que mostramos a continuación:

- Sistemas de ecuaciones lineales como un objeto, dado que el estudiante debe poder plantear una situación desde un contexto, determinar el conjunto solución del sistema de ecuación y poder visualizarlo desde una interpretación matricial y geométrica-figural
- Conjunto solución de un sistema de ecuación S_g cómo un proceso que le permita calcular el conjunto generador.
- La noción matemática de Función como un esquema, con la cual se evidencie la comprensión de los conceptos de función, dominio, recorrido, imagen y preimagen. Además, propiedades y teoremas ligadas a la inyectividad, sobreyectividad.
- La noción de Transformación Lineal (TL) cómo un esquema, tal que el estudiante a través de las bases α, β pueda asociar un vector $v \in \alpha$ a un vector $w \in \beta$, tal que: $T(v) = w$, para coordinarlo con el teorema de la unicidad de TL.
- La noción de base como un proceso para coordinar con el proceso de matriz para construir la matriz cambio de base.

Dado que se espera que los profesores en formación muestren las construcciones y mecanismos mentales mencionados, él deberá plantear y resolver el sistema de ecuación, para que pueda identificar al conjunto solución S_g como un conjunto de vectores que determinan a un espacio vectorial y, así, permita identificar los vectores que lo generan para ser *isomorfizados* con otro espacio vectorial, digamos $\mathbb{R}^n$.

En este sentido al coordinar el conjunto solución S_g con las propiedades de la función, podrá coordinar para construir un proceso de caracterización del conjunto solución, con la finalidad de comprenderlo como el dominio de una TL. Luego, este proceso de coordina con la noción de base de un espacio vectorial para encapsularlo en la TL. Ello propone que, al realizar una acción de analizar las propiedades de los espacios identificados sobre el dominio y recorrido de TL, se podrá tematizar en un esquema de IEV.

Cabe destacar, que otra forma de presentar el IEV (Figura 1) puede ser a través de la matriz cambio de base $[T]_\alpha^\beta$ cuando se solicita al estudiante analizar las propiedades de la TL construida. Así puede identificar los conceptos que determinan la construcción de un esquema multinterpretativo de IEV.

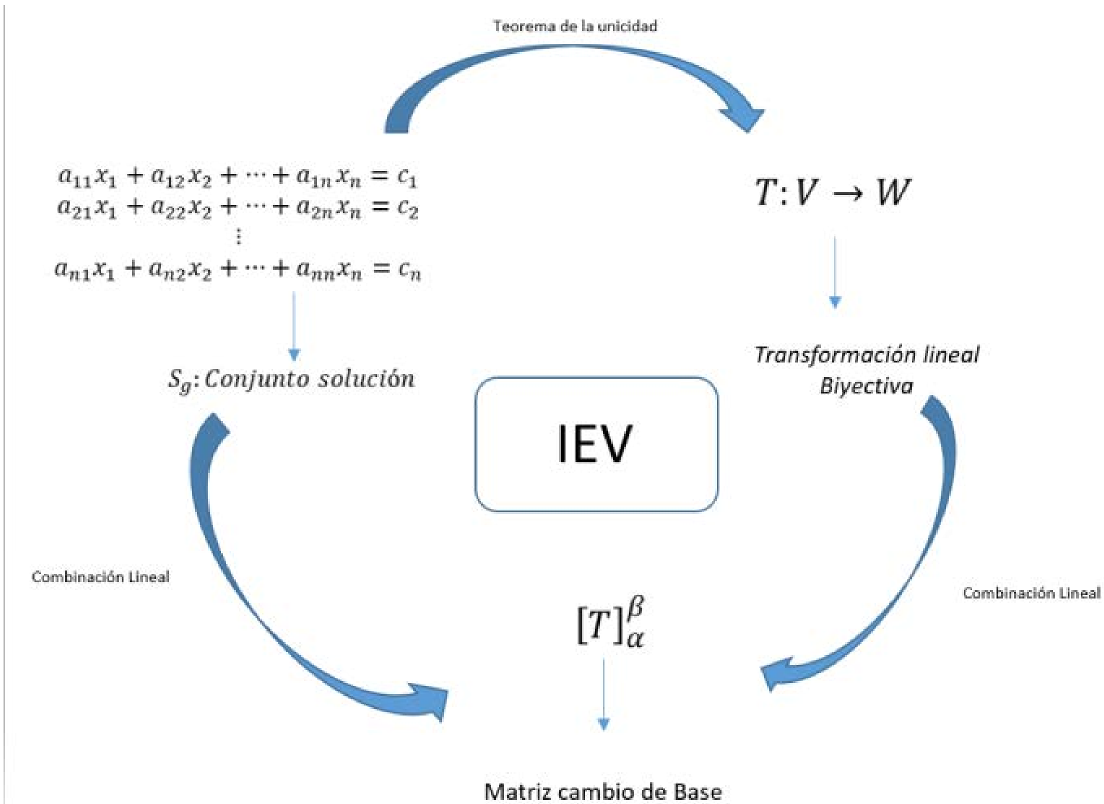


Figura 1. Construcción conceptual del IEV

Luego, según Piaget y García (1989) existen tres tipos de esquemas, el Intra, Inter y Trans. En este reporte de investigación, el nivel esquema Intra de IEV se evidencia cuando el estudiante establece conexiones parciales entre los esquemas de sistemas de ecuación y matrices, es decir, esta conexión es producto de un conocimiento práctico, por ejemplo, que un sistema de ecuación está relacionado con una representación matricial. Así mismo, un nivel esquema Inter de IEV se establecen relaciones de equivalencia más concretas, es decir, el estudiante vincula al esquema de funciones, sistemas de ecuaciones de manera completa o parcial. Finalmente, en un nivel esquema Trans de IEV, se han establecido esquemas entra las relaciones de equivalencia, entre sistemas de ecuaciones, TL y Matrices, mostrando una coherencia completa para la construcción del IEV.

Metodología

Para este reporte de investigación se ha considerado aplicar el ciclo metodológico de APOE. Ello conlleva (1) analizar y proponer un modelo de DG viable, que permita mostrar hipotéticamente cómo un estudiante construye el IEV desde una perspectiva multinterpretativa (funcional, matricial y geométrica-figural). Luego, (2) diseñar un instrumento que permita validar los mecanismos y estructuras mentales planteados en la DG hipotética y, por último, (3) analizar las respuestas de los estudiantes para validar o refinar la DG hipotética que muestra las construcciones mentales de los estudiantes. Finalmente, se espera poder identificar desde APOE aquellos componentes que permitan diseñar un modelo multinterpretativo para el IEV.

La situación problemática

Para este reporte de investigación se han seleccionado las respuestas de un grupo de profesores en formación de un curso de AL de una carrera de Pedagogía en Matemática, y que están relacionadas con el IEV.

Se ponen de relieve en el análisis de las respuestas, las justificaciones que utilizan los profesores en formación para aplicar y resolver problemas, utilizando conceptos que propicien la construcción de los esquemas de las interpretaciones funcional, matricial y geométrica-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo de IEV. A continuación, se muestra una situación contextualizada:

El contexto*: La ley de Kirchoff para circuitos paralelos (Figura 2), indica que la sumatoria de los voltajes en una malla es igual a cero. Considerando que una malla es un camino cerrado por la cual la corriente sigue un camino y que, en cualquier resistencia, la caída de voltaje se determina por la ley de Ohm (V=R*I), determinar las corrientes involucradas en el siguiente circuito:*

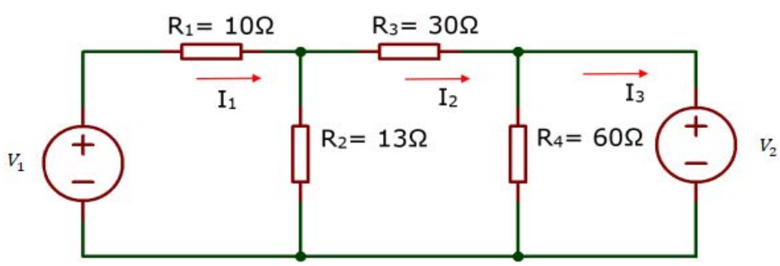


Figura 2. Circuito paralelo

Luego de plantear el problema, responde preguntas como: Plantear el sistema de ecuación; determinar el conjunto solución, *isomorfizar* con algún $\mathbb{R}^n$, entre otras. Con ello, se busca validar el desarrollo del esquema que se caracteriza por la DG hipotética para construir el esquema de IEV.

Resultado

En el siguiente apartado se muestran algunos resultados obtenidos al analizar las respuestas de dos estudiantes. El análisis está en concordancia con los niveles de esquema *Intra, Inter y Trans*, descritos en el apartado anterior y que, muestran la construcción conceptual del IEV como un modelo multinterpretativo de IEV.

En este sentido, cuando uno de los estudiantes responde a las preguntas planteadas, observamos (Figura 3) que puede establecer conexiones de correspondencia entre elementos del sistema de ecuación y las matrices. Ello se debe a que teóricamente el estudiante comprende que un sistema de ecuación tiene una representación matricial, tal como se evidencia en la Figura 3.

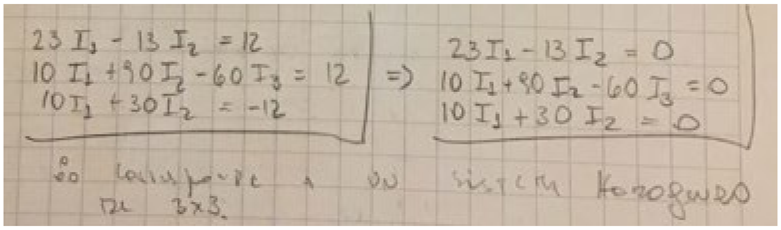


Figura 3. Sistema de ecuación asociado al contexto problemático.

A continuación, al seguir indagando en las respuestas del estudiante, el conjunto solución determinado corresponde a un subespacio de $\mathbb{R}^3$, esto es, está determinado por un subespacio de dimensión 2.

Luego, al estudiante se le solicita *isomorfizar* el conjunto solución con algún $\mathbb{R}^n$, para evidenciar la construcción de una TL que cumpla el teorema de la unicidad de TL. Para realizar esta acción, deberá buscar en sus esquemas previos una coordinación entre las bases que determinen la TL y, así, la existencia de un *isomorfismo* con algún $\mathbb{R}^n$.

La interpretación del conjunto solución, como un subespacio vectorial S de dimensión dos, es el inicio para la construcción de la TL del subespacio con el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, considerando para ello la base canónica (Figura 4).

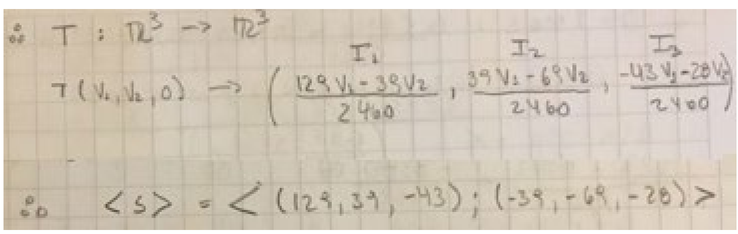


Figura 4. Determinación de la base del conjunto solución y la TL asociada.

Por lo tanto, se evidencia que el estudiante puede construir el IEV desde distintos esquemas, lo que muestra la necesidad de avanzar a la construcción de un esquema multinterpretativo de IEV.

Discusión de los resultados y conclusiones

De acuerdo con los datos recopilados en las respuestas de los estudiantes, podemos reportar que el nivel de *esquema Intra-IEV* es el que predomina. Ello se debe a que, las acciones solicitadas sobre el conjunto solución indican que las conexiones que realizan los estudiantes son con la intención de llegar a una construcción del IEV a nivel procedimental, es decir, construida por un conocimiento específico de una TL y, como consecuencia, probar la existencia de un IEV, verificando la inyectividad y sobreyectividad.

Un componente emergente importante, para verificar el IEV, es la posibilidad de indagar en las interpretaciones del conjunto solución como un plano, para poder *isomorfizarlo* con $\mathbb{R}^2$, es decir, a través del estudio de las dimensiones, podrá construir la TL del conjunto solución con la base canónica incorporando otros elementos y poder avanzar a un *esquema Inter-IEV*. Ahora, para seguir indagando hacia el *esquema Trans-IEV*, se sugiere ampliar la muestra a más estudiantes.

Con respecto a las acciones solicitadas, es necesario incorporar una entrevista para profundizar en las respuestas de los estudiantes, pero se sugiere avanzar en el planteamiento de acciones concretas que profundicen aún más en la forma que se interpreta un IEV desde una interpretación geométrica-figural.

Agradecimientos

Beca Doctorado Nacional N° 21221645 de su Beca y FONDECYT N°1180468

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory*. New York: Springer.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM, 51(7),* 1043-1054.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM, 51(7),* 1055-1068.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55.

Enseñanza problémica de las probabilidades mediante paradojas

Luis **Maraví** Zavaleta
I.E. Salaverry, Alto Salaverry
Perú
a20146949@pucp.pe

Resumen

El presente trabajo tiene como propósito describir los elementos del enfoque problémico advertidos en la enseñanza de la probabilidad durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana en el nivel secundario. Para lograr tal propósito se diseñó una actividad donde el núcleo fue el problema mencionado, mientras que la estructura fue diseñada en base al enfoque de Enseñanza Problémica. Entre los principales hallazgos se encontraron la creación de la situación problémica, la definición del problema docente, así como la utilidad de los impulsos heurísticos para resolver el problema y, así, aprender aspectos de la probabilidad. Se precisan, por otro lado, mayores investigaciones en torno a factores que generaron dificultades, tales como el uso del tiempo, el tamaño del grupo escolar y el propio contenido docente, así como en el estatus didáctico del factor que provoca la situación problémica.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Mediación pedagógica; Resolución de problemas; Investigación exploratoria; Enseñanza de la probabilidad.

Introducción

Debido al impacto causado por la pandemia de Covid-19 en la enseñanza-aprendizaje se precisa explorar diferentes enfoques para desarrollar dicho proceso (Reimers, 2022). En este contexto, que además plantea variados desafíos, Maraví (2021) propone la necesidad de dominar conceptos estadísticos y elementos de incertidumbre y probabilidad (Wild et al., 2018). Dentro de los últimos aspectos mencionados, tópicos importantes constituyen la identificación de la situación de incertidumbre, el experimento aleatorio y la determinación del espacio muestral. Al respecto Malquichagua (2019) indica que lo último podría generar conflictos y confusiones que se encontrarían vinculadas con la comprensión que se posea acerca de la concepción clásica de la probabilidad, tal como lo muestra el caso del problema del Gran Duque de Toscana, estudiado en su momento por Székely (1986), Maistrov (1974) y Perero (1994). Empero, este problema histórico que también es una de las paradojas de la probabilidad, posee múltiples potencialidades didácticas que necesitan ser canalizadas (Contreras et al., 2011; Borovcnik & Kapadia, 2014). Por ello, este trabajo se plantea describir los rasgos relacionados con la enseñanza problémica que se advirtieron durante la solución del mencionado problema en el nivel secundario, dadas las particularidades de esta paradoja que lo vinculan con tal enfoque de enseñanza. En específico, se desea explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Para lograr dicho propósito, primero se realiza un breve examen de los elementos teóricos vinculados con el problema mencionado y con el enfoque de enseñanza problémica. Luego, se mostrarán los métodos empleados durante el estudio, así como los resultados obtenidos. Por último, se consignarán las consideraciones finales del trabajo.

Elementos teóricos

Esencia de las paradojas. El problema del Gran Duque de Toscana

La incertidumbre es una categoría que muestra cómo se interrelacionan los polos contradictorios de lo posible y lo real en el mundo objetivo (Rosental & Straks, 1965; Rosental & Iudin, 1973; Tabak, 2004). Un ejemplo de tal relación lo brindan las paradojas de la probabilidad. Estas reflejan una disparidad entre la intuición y el desarrollo conceptual existente sobre un concepto (Borovcnik & Kapadia, 2014; Batanero et al., 2005). Tal es el caso del problema del Gran Duque de Toscana (David, 1962; Maistrov, 1974; Székely, 1986) que se desarrolla en el presente trabajo y que, debido a su esencia, debería permitir que los estudiantes reformulen sus concepciones primarias sobre los conceptos teóricos asociados a él (Leviatan, 2002).

El problema del Gran Duque de Toscana proviene del siglo 16 y está relacionado con el juego de los dados. Estudiado y resuelto por Galileo Galilei bajo la muy probable instancia de su protector financiero, el Gran Duque de Toscana (David, 1962), consiste en lo siguiente: al lanzar tres dados y sumar los resultados, las posibilidades de obtener 9, 10, 11 y 12 se consiguen con seis ternas de sumandos en cada caso. Ahora bien, agrega Galilei, es conocido por la experiencia de los jugadores que obtener 10 y 11 es más ventajoso (es decir, más probable) que tener 9 y 12 (David, 1962). Para probar esta afirmación y resolver la paradoja, resulta importante considerar el orden en que se obtienen los puntajes de cada dado, como lo indicaron Cardano y Galilei (Székely, 1986; Tabak, 2004) pues dos procedimientos de conteo distintos pueden arrojar diferentes probabilidades. De esta forma se constata que 9 puede ser obtenido de 25 formas, mientras que 10 de 26 formas, por lo que es más probable obtener este resultado. Se observa la dificultad que genera el problema para determinar todos los elementos del espacio muestral y así calcular las probabilidades (Borovcnik & Kapadia, 2014).

Enfoque problémico de la enseñanza y su aplicación a la didáctica de la probabilidad

El carácter contradictorio dialéctico intuición-realidad que se revela en la paradoja del Gran Duque de Toscana permite justificar la adopción de un enfoque de enseñanza pertinente a él. En el presente trabajo, se considera que tal enfoque es el de la enseñanza problémica. En este enfoque, el concepto de contradicción es importante debido a que es la fuerza motriz que genera el cambio de la realidad (Dafermos, 2018), algo que acontece también en el campo cognitivo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje (Torres, 1993). En ese sentido, además, la enseñanza problémica tiene por finalidad capacitar sistemáticamente a los alumnos para la resolución independiente de cualquier problema durante la enseñanza, mediante la interacción de los elementos de enseñanza-aprendizaje productivos con los reproductivos (Torres, 1999).

Para desarrollar el mencionado enfoque se consideran cuatro categorías dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, cuyo carácter didáctico y esencia filosófica son abordados por Maraví (2020): a) situación problémica, b) problema docente, c) tareas y preguntas problémicas y, d) lo problémico. De acuerdo con Torres (1999), la primera categoría refleja en el ámbito cognitivo del estudiante la contradicción entre lo conocido y lo desconocido que se plantea durante el desarrollo de la clase de matemáticas, mientras que el problema docente precisa aquello que debe ser buscado para resolver la situación problémica. Entre tanto, las tareas y preguntas problémicas son actividades e impulsos, respectivamente, dirigidos a resolver el problema docente (Torres, 2013). Finalmente, lo problémico es el nivel de complejidad considerado en las tareas, preguntas y habilidades de los estudiantes para resolver el problema. Existen varias experiencias antiguas y relativamente recientes con el empleo del enfoque problémico en enseñanza de la matemática (Danilov, 1968; Jungk, 1979; Torres, 1993; Torres, 1999). Empero, hasta el momento no se han encontrado referencias acerca de los vínculos existentes entre dicho enfoque y la enseñanza de las probabilidades. Precisamente, ese pretende ser uno de los aportes del presente trabajo, mediante la metodología que se reseña a continuación.

Elementos metodológicos

La experiencia se desarrolló a mediados de agosto de 2022 en una sección de quinto grado de educación secundaria perteneciente a una institución educativa pública de la periferia de Trujillo. La sección estuvo conformada por cincuentaitrés estudiantes entre varones (49%) y mujeres (51%), entre 16 y 17 años de edad, quienes se reencontraban después de dos años de ausencia física de las aulas debido a la pandemia de Covid 19. Su identidad fue preservada mediante letras mayúsculas. En especial, se enfocó la atención en las evidencias brindadas por tres estudiantes del grupo de investigación, A, B y C. Esto se realizó dada su pertenencia a diferentes segmentos de la sección: La primera (A) es una estudiante quien posee bajas calificaciones en el área de matemáticas, en tanto que B es un estudiante con altas calificaciones quien, además, estudia en las mañanas en un centro de preparación preuniversitario. El estudiante C también posee altas calificaciones, pero tiene carga familiar propia y debe dedicar medio día a trabajar en su propia empresa.

Cabe indicar que en el presente trabajo se emplea una metodología basada en el estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1999), donde se recogen aspectos de la propuesta metodológica de Lee (2002), quien considera al conocimiento como una producción colectiva de profesor y alumnos en la que él no es un investigador extraño al grupo. En ese sentido, la actividad planteada en este trabajo posee similitudes con las mostradas por Contreras et al. (2011), así como por Batanero y Borovcnik (2016) para la enseñanza de las probabilidades mediante paradojas. Así, la actividad aplicada consideró una versión adaptada del problema del Gran Duque de Toscana presentado por Borovcnik y Kapadia (2014). Las primeras redacciones de dicha versión fueron validadas por un grupo de profesores y alumnos extranjeros vía grupo de mensajería por internet. Como resultado, el problema fue planteado a los alumnos durante la experiencia bajo la siguiente redacción: *Sea el experimento "lanzar tres dados y observar la suma de los resultados obtenidos". Se afirma que las probabilidades de obtener 10 u 11 son mayores que las de obtener 9 o 12. ¿Esto es verdad?*

Por otro lado, la estructura de la actividad consideró las etapas de la situación típica de enseñanza de sucesión de indicaciones de carácter algorítmico, que es una de las formas en las que se estructura la enseñanza de la matemática con empleo de recursos heurísticos como sustrato de la enseñanza problémica (Majmutov, 1983). Por ello, el procedimiento empleado comprende las fases de orientación hacia el problema (con el aseguramiento del nivel de partida y la motivación y orientación hacia el objetivo), el trabajo en el problema para buscar la secuencia de pasos del procedimiento, la solución del problema mediante la formulación de la sucesión de indicaciones y, por último, la evaluación de la solución y de la vía (Torres, 2002). En el transcurso de las fases mencionadas se analizaron las producciones de los estudiantes, así como sus testimonios con ayuda de los elementos provenientes de la enseñanza problémica. Como procedimiento para asegurar la validez de los hallazgos observados se recurrió a la triangulación de analistas (Mok & Clarke, 2015), así como a la presentación de los hallazgos a las personas sobre las que se realizó el estudio (Patton, 1990).

Resultados

Este trabajo se planteó describir los elementos del enfoque problémico advertidos en la enseñanza de la probabilidad durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana en el nivel secundario. En específico decidió explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Para ello, desarrolló la experiencia donde se pudieron apreciar, entre otros, los siguientes resultados.

Tras haber planteado el problema en clase, se suscitó incertidumbre en algunos estudiantes, como en el caso de B. Obsérvese lo indicado por él en la figura 1:

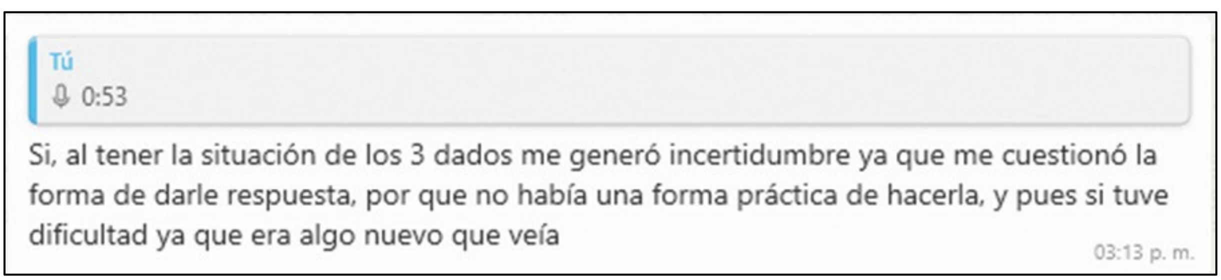


Figura 1. Testimonio del estudiante B

Este momento inicial de incertidumbre, empero, pudo haber sido superado por el estudiante B y otros compañeros suyos cuando, después del primer encuentro con el texto del problema, ellos comenzaron a calcular la suma de los resultados al lanzar dos dados. Esta estrategia, por su parte, permitió a otros compañeros encontrar el camino para la solución del problema. Empero, como la incertidumbre persistía en algunos otros estudiantes, se recordó la importancia de la determinación del espacio muestral en problemas sobre probabilidades, así como se indagó con ellos acerca de la cantidad y forma de los eventos en este problema específico (216 ternas). Dado que el interés por arribar a la respuesta se incrementó, junto con el decrecimiento de la incertidumbre para los alumnos, se tomó la decisión de plantear preguntas que deberían permitir el arribo a respuestas más explícitas, tales como: "¿cuáles son las sumas de resultados que dan 9, 10, 11 o 12, respectivamente? ¿Podemos calcularlas en forma organizada en una tabla?". En esa línea, la estudiante A elaboró una tabla (Figura 2), que fue comparada con el resultado inicialmente obtenido por la mayoría de alumnos (donde se tenía 15 eventos equiprobables, el mínimo valor de la suma de las ternas era 3 y el máximo, 18). A partir de la tabla quedó claro cuál era el evento más probable durante el lanzamiento de los tres dados y la suma de los puntajes obtenidos.

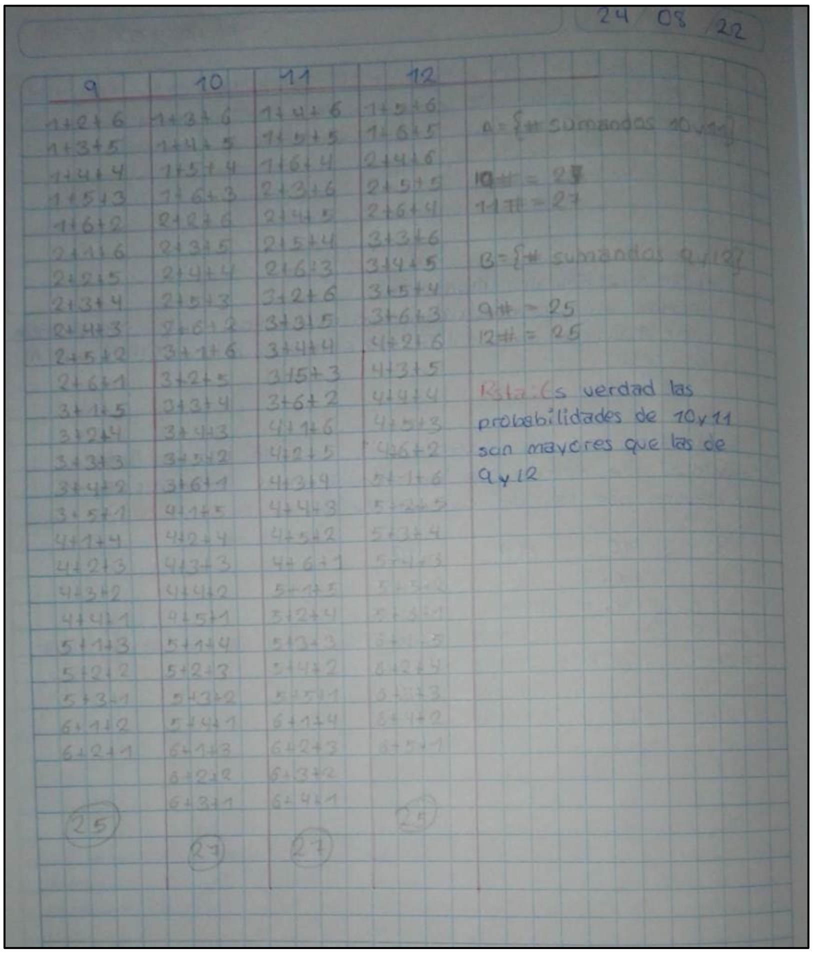


Figura 2. Tabla elaborada por la estudiante A

Finalmente, como una muestra del impacto generado por la clase, obsérvese lo indicado por el estudiante C en la figura 3:

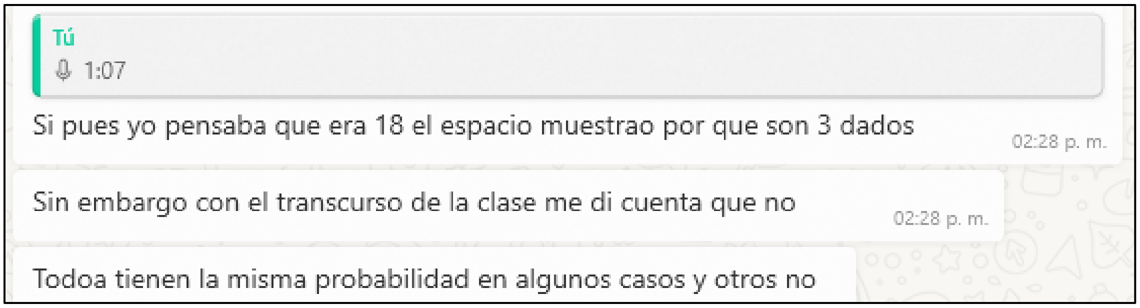


Figura 3. Testimonio del estudiante C

Lo manifestado por el estudiante C estaría indicando, en forma resumida, los cambios producidos en él debidos a la organización de la clase.

Consideraciones finales

Para explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del Problema del Gran Duque de Toscana, se analizaron los resultados anteriormente mostrados mediante las categorías de tal enfoque que se mencionaron en un apartado precedente. Con ese fundamento, el presente trabajo sostiene que la situación problémica habría sido creada a partir de lo indicado por el estudiante B (Figura 1), pues de acuerdo con lo afirmado en su testimonio, se generó contradicción entre lo conocido y desconocido por él (Torres, 1999). Asimismo, el cálculo de la suma de cada uno de los resultados obtenidos tras el lanzamiento de dos dados (primero) y de tres dados (después) que realizaron el estudiante B y otros compañeros suyos, mostraría la presencia de la definición del problema docente (Torres, 1999) pues es una actividad orientada a la solución de la incertidumbre planteada, mediante la constitución del espacio muestral. En ese sentido, tales cálculos, así como las preguntas planteadas para perfilar el problema docente y, por ende, a resolverlo, habrían jugado el rol de las tareas y preguntas problémicas (Torres, 2013), tal como lo muestra la tabla elaborada por la estudiante A (Figura 2). En ellas, lo problémico poseyó un nivel de complejidad mínimo. Sin embargo, ello no habría impedido la reformulación de los conceptos primarias sobre probabilidad que indica el estudiante C (Figura 3) y que constituye, precisamente, uno de los propósitos de la introducción de las paradojas sobre la probabilidad en la enseñanza (Leviatan, 2002).

El análisis de algunos aspectos del impacto de la enseñanza problémica durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana presenta los cimientos de la enseñanza de las probabilidades desde tal enfoque, las mismas que permitirían abordar las dificultades detectadas por Malquichagua (2019), como la presencia de respuestas diferentes al constituir el espacio muestral en un problema relacionado con las paradojas de la probabilidad. De este modo, se brindan procedimientos organizados para resolver la contradicción generada por este fenómeno, así como la incertidumbre que podría suscitarse a partir de él en cada uno de los estudiantes de la clase. Por ello, con la creación de la situación problémica, la definición del problema docente y el empleo de preguntas problémicas, se registraría la contribución didáctica del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Sin embargo, debería ser motivo de una investigación ulterior el establecimiento del estatus didáctico de las paradojas probabilísticas pues, como se ha podido observar en el problema del Gran Duque de

Toscana, no parece sencillo el tránsito y empleo de recursos aritméticos (como los del conteo) en el campo de la probabilidad para determinar el espacio muestral. Asimismo, también constituye de especial interés la cuestión acerca de cómo perfeccionar las tareas y preguntas problémicas, en tanto que impulsos planteados a los estudiantes para la determinación del espacio muestral en el problema ya mencionado. Finalmente, en línea con lo anterior, es necesario estudiar otros aspectos que surgieron durante la experiencia, como la graduación en dificultad de los impulsos didácticos, o el uso del tiempo para el manejo del contenido y del grupo escolar, que constituyeron limitaciones durante la experiencia. Por todo esto, es necesario continuar con la experimentación para enriquecer la propuesta de enseñanza problémica de las probabilidades.

Referencias y bibliografía

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school, challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking, advances in mathematics education* (pp. 35-74). Springer.

Contreras, J., Batanero, C., Arteaga, P., y Cañadas de la Fuente, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilón, 28*(2), 1-11.

Dafermos, M. (2018). *Rethinking cultural-historical theory: a dialectical perspective to Vygotsky*. Springer.

Danilov, M. (1968). *El proceso de enseñanza en la escuela*. Grijalbo.

David, F. (1962). *Games, gods, and gambling*. Hafner.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 1*. Pueblo y Educación.

Lee, J. (2002). An analysis of difficulties encountered in teaching Davydov's mathematics curriculum to students in a U.S. setting and measures found to be effective in addressing them (tesis de doctorado, State University of New York at Binghamton). https://www.researchgate.net/publication/267595843_Ji-Eun_Lee_An_analysis_of_difficulties_encountered_in_teaching_Davydov's_mathematics_curriculum_to_students_in_a_US_setting_and_measures_found_to_be_effective_in_addressing_them

Leviatan, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability. *Proceedings of ICOTS 6.* IASE. https://iase-web.org/documents/papers/icots6/6g3_levi.pdf?1402524962

Maistrov, L. (1974). *Probability theory, a historical sketch*. Academic.

Majmutov, M. (1983). *La enseñanza problémica*. Pueblo y Educación.

Malquichagua, M. (2019). *Análisis de situaciones-problema para la enseñanza de la probabilidad en la educación básica* (tesis de maestría, PUCP). https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/15486/MALQUICHAGUA_FERN%c3%81NDEZ_MANUEL_AUGUSTO_FRANCISCO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Maraví, L. (2020). La teoría del reflejo de V. I. Lenin en la tradición dialéctica de L. S. Vygotsky y sus vínculos con la educación matemática: error y fantasía en la enseñanza problémica de la geometría. En C. Gaita (Ed.), *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemática, actas* (pp. 693–702). Pontificia Universidad Católica del Perú. https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568

Maraví, L. (2021). Emergent curriculum in basic education for the new normality in Peru: orientations proposed from mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *108*, 291-305. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10100-w

Mok, I. y Clarke, D. (2015). The contemporary importance of triangulation in a post – positivist world: examples from the learner's perspective study. En A. Bikner – Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 403 –425). Springer.

Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Sage.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. Iberoamérica.

Reimers, F. M. (2022). Learning from a pandemic. The impact of COVID-19 on education around the world. En F. Reimers (Ed.), *Primary and Secondary Education During Covid-19* (pp. 1–37). Springer.

Rosental, M. y Iudin, P. (Eds.). (1973). *Diccionario filosófico*. Universo.

Rosental, M. y Straks, G. (1965). *Categorías del materialismo dialéctico*. Grijalbo.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Székely, G. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Reidel.

Tabak, J. (2004). *Probability and statistics: the science of uncertainty*. Facts on file.

Torres, P. (1993). *La enseñanza problémica de la matemática del nivel medio general* (tesis de doctorado no publicada). ISP Enrique José Varona.

Torres, P. (1999). *Métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática*. Academia.

Torres, P. (2002). *Didáctica de las matemáticas*. Universidad en Ciencias Pedagógicas Enroque José Varona.

Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de matemática. En C. Flores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores* (pp. 201-216). Díaz de Santos.

Wild, C., Utts, J. y Horton, N. (2018). What is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield. (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*, (pp. 5–36). Springer.

La historia de las Matemáticas en la enseñanza de la probabilidad

Jesús **Salinas-Herrera**
Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México
México
jesus.salinas25@gmail.com
Ulises **Salinas-Hernández**
Eindhoven School of Education, Eindhoven University of Technology
The Netherlands
ulisessh@ciencias.unam.mx

Resumen

Reportamos resultados de un experimento de enseñanza de carácter exploratorio que usa la historia de las matemáticas en temas de probabilidad, en el nivel medio superior. El objetivo de la investigación fue establecer, a través de la implementación de un cuestionario con cuatro ítems, la relevancia de usar un enfoque histórico como recurso didáctico al enseñar un tema de probabilidad. Así, incorporamos (1) la perspectiva social de la historia de la ciencia de Thomas S. Kuhn y (2) el contexto cultural y político de los siglos XVI y XVII, al abordar el tema del enfoque clásico de la probabilidad. Los resultados del cuestionario indican una alta valoración positiva de los estudiantes respecto del uso de la historia de las matemáticas; lo cual respalda su pertinencia como recurso didáctico en contenidos temáticos de la asignatura de estadística y probabilidad.

Palabras clave: Experimento de enseñanza; Enfoque clásico de probabilidad; Historia de la probabilidad; Recurso didáctico; Estudiantes de bachillerato.

Abstract

We report results of an exploratory teaching experiment using the history of mathematics in probability topics at the upper secondary level. The aim of the research was to establish, through the implementation of a questionnaire with four items, the relevance of using a historical approach as a didactic resource when teaching a probability topic. Thus, we incorporated (1) the social perspective of Thomas S. Kuhn's history of science and (2) the cultural and political context of the

16th and 17th centuries when addressing the topic of the classical approach to probability. The results of the questionnaire show a high positive evaluation among students regarding the use of the history of mathematics, which supports its relevance as a didactic resource in the thematic content of the subject of statistics and probability.

Keywords: Teaching experiment; Classical approach to probability; History of probability; Didactic resource; High school students.

Introducción

Diversos autores han argumentado que la historia de las matemáticas es un tema importante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Fauvel & Maanen, 2000; Radford, 2000; González Urbaneja, 2004; Collete, 2006; Jankvist, 2009; Salinas, 2010; Salinas y Maz, 2011). Las razones son diversas, entre otras, diferentes autores han argumentado que puede contribuir en una mejor comprensión de las matemáticas, así como incorporar una visión más humana de la imagen abstracta que se suele brindar a los alumnos Jankvist (2009).

Sin embargo, en la literatura de investigación prácticamente no hay reportes sobre el uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza de temas de estocástica. Consideramos que esta situación requiere ser atendida. Por ello, este estudio se propone aportar algunos elementos que contribuyan a ulteriores investigaciones, sobre el uso de la historia en la enseñanza de la probabilidad y la estadística.

Podríamos afirmar con Fauvel (1991) que tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas la historia de las matemáticas ha sido un aspecto desdeñado o muy poco abordado. Puesto que, "durante décadas, si no siglos, algunas voces en cada generación han argumentado el valor y la importancia de usar la historia en la enseñanza de las matemáticas, pero hasta ahora sin que esta idea se haya arraigado de manera firme y generalizada en la práctica de la enseñanza" (Fauvel, 1991, p.3). Por otra parte, en el ámbito de la formación y la actualización del profesorado de matemáticas, tampoco se suele considerar el uso de la historia de las matemáticas como un aspecto relevante.

En contraparte, ha predominado más bien un enfoque instrumental en la docencia y en la formación del profesorado de matemáticas. Este enfoque se centra en los contenidos conceptuales y procedimentales orientados a la resolución de problemas, al margen de la relación de las matemáticas con otras disciplinas, en particular, al margen de su desarrollo histórico, el cual, además, tiende un puente con la cultura general.

Por lo anterior, consideramos importante ampliar el enfoque instrumental de las matemáticas que hemos descrito, el cual privilegia la instrucción centrada en habilidades matemáticas específicas, y tomar en cuenta otros aspectos para propiciar la reflexión y discusión del papel que ha tenido el desarrollo histórico de las matemáticas en el entendimiento que el ser humano ha ido construyendo acerca del mundo; el cual ha influido también en su forma de pensar y de vivir (González Urbaneja, 1991; Kline, 2009). Restivo (1993) ha reconocido que difícilmente se puede entender el desarrollo y los cambios en el conocimiento matemático sin analizar los factores sociales y culturales subyacentes.

Con la intención de atender lo antes expuesto, en este escrito se reportan y analizan parte de los resultados de un *experimento de enseñanza* (Steffe y Thompson, 2000), llevado a cabo por uno de los autores de este trabajo, a partir del diseño y aplicación de una estrategia que utiliza la historia de la probabilidad como recurso didáctico. El propósito central del experimento fue explorar qué opinión valorativa pudiera generar en alumnos de bachillerato la incorporación de aspectos históricos y culturales de la probabilidad al estudiar temas de estocástica.

El enfoque que se sigue en esta investigación es tomar en cuenta las ideas que desarrolló Thomas S. Kuhn, en su trascendente libro *La estructura de las revoluciones científicas*, publicado inicialmente en 1962, para abordar la historia de las matemáticas, considerando que las matemáticas son un fenómeno cultural (White, 2000) que se desarrolla un cierto contexto histórico, social y político; y no solamente son un sistema de conceptos abstractos. De esta manera, se busca hacer emerger una idea de las matemáticas distinta de la concepción platónica que ha predominado en ellas desde la antigüedad, la cual enfatiza el aspecto formal.

El problema e hipótesis de investigación

Para conocer la opinión de los estudiantes cuando se incorpora el uso de la historia de las matemáticas en clases de probabilidad, definimos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál fue el grado de aceptación de los alumnos ante el uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza de la probabilidad?

A partir del contexto y las necesidades planteadas en la sección anterior, conjeturamos que un experimento de enseñanza con el enfoque que se describe sucintamente en este trabajo podría resultar de interés para los alumnos y, por consiguiente, mostrar la relevancia y pertinencia del uso de la historia de las matemáticas para la enseñanza de la probabilidad y la estadística.

Marco conceptual

El experimento de enseñanza que se realizó se enmarca en la concepción de la historia de la ciencia de Tomas S. Kuhn quien, a partir de una crítica a la posición formalista del positivismo acerca de la ciencia y de la historia de la ciencia, propuso una visión de la historia de la ciencia que promovió un fuerte interés en la producción de estudios sociológicos de esta disciplina.

Contrario a la idea de una historia de la ciencia que considera el desarrollo científico como un proceso gradual de acumulación debido a contribuciones individuales, Kuhn propone reconstruir dicha historia considerando otras directrices, de las cuales destaca el carácter sociológico del desarrollo de la ciencia. Como señala Ian Hacking, en el ensayo preliminar del libro, su impacto fue profundo. Y, añade, "después de Kuhn mucha o casi toda la reflexión verdaderamente original en torno a las ciencias ha sido de carácter sociológico" (Kuhn, 2019, p.49).

En la planeación y diseño de nuestra propuesta tomamos como referencia a la visión de la ciencia de Kuhn y añadimos el contexto cultural y político del desarrollo de las matemáticas. También incorporamos el Enfoque documental de lo didáctico (Trouche et al., 2020) para considerar el experimento de enseñanza como un *recurso* didáctico. En esta consideración es importante el diseño del experimento, su implementación y la reflexión que se hace de él para hacer frente a una situación didáctica: cómo incorporar el uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad y la estadística.

Método

Se trabajó con tres grupos de estudiantes que cursaban la asignatura de estadística y probabilidad en un bachillerato de la Ciudad de México. Las actividades escolares se desarrollaron en línea debido a la pandemia por COVID-19. Se aplicó un experimento de enseñanza abordando algunos aspectos de la historia de la probabilidad, centrada en el surgimiento de una incipiente comunidad de matemáticos precursores de la teoría de la probabilidad, siglos XVI y XVII, que aportaron una nueva perspectiva epistemológica para el estudio del azar.

Para la implementación del experimento de enseñanza se utilizó el método de aula invertida. Los estudiantes dispusieron previamente de material didáctico para su estudio e investigaron previamente y discutieron aspectos distintos del contexto histórico y los aspectos de historia de la probabilidad fueron atendidos y relacionados con el contexto sociocultural y político por el profesor. Se propició un pensamiento reflexivo. Paralelamente, se trataron los contenidos temáticos de probabilidad correspondientes. Las actividades se realizaron de manera individual y por equipo.

Con el propósito de responder a la pregunta de investigación, se aplicó un cuestionario con cuatro ítems, utilizando la escala de Likert modificada, con cinco niveles –completamente en desacuerdo, en desacuerdo, de acuerdo, completamente de acuerdo, ni de acuerdo ni en desacuerdo. El cuestionario se implementó al final del semestre en la plataforma Teams. Fue contestado de manera individual, sin límite de tiempo.

Los estudiantes que respondieron el cuestionario fueron 45 mujeres y 29 hombres con edades entre 17 y 18 años, correspondiente a un total de 76 estudiantes de los tres grupos escolares, quienes concluyeron el curso. Hubo una deserción similar en cada grupo de 37%, (entre 13 y 15 estudiantes de 40) debido fundamentalmente a carencia de recursos para contar con equipo de cómputo.

Experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se centró en el tema del enfoque clásico o teórico de la probabilidad. Nos interesó mostrar el conocimiento matemático como parte de la cultura que produce una sociedad en determinado momento histórico. Consideramos dicha perspectiva histórica con una doble función: tanto como elemento motivador para un acercamiento a las matemáticas y, como recurso didáctico para propiciar una mejor comprensión de los contenidos que se abordaron. Por lo anterior, diseñamos un tratamiento histórico, de acuerdo con nuestro marco conceptual, en el que se aborda el contexto social, cultural y político en el que aparece el interés por analizar el carácter aleatorio de los juegos de azar y por qué éstos se convirtieron en los medios para iniciar una reflexión sistemática sobre el azar. Aunque los juegos de azar se practicaban desde hacía muchos siglos, con artefactos imperfectos como los astrágalos, en la antigua Roma o en Grecia, no fue sino hasta los siglos XVI y XVII que se empezaron a estudiarse matemáticamente como los primeros fenómenos aleatorios. En este contexto histórico aparece la idea de equiprobabilidad y, es interesante preguntarse, ¿por qué no antes?, también surgen las nociones de espacio muestra y de combinaciones. El contexto histórico permite comprender que los juegos de azar se empezaran a estudiar matemáticamente como los primeros fenómenos aleatorios, también conocer quiénes fueron sus precursores, cómo vivían y por qué se interesaron en esos problemas. Asimismo, cuál fue el contexto social, cultural y político en el que se desarrollaron estas ideas.

Resultados y discusión

Para responder a la pregunta de investigación, se aplicó un cuestionario con cuatro ítems. En la Tabla 1 se muestran el número de respuesta de los estudiantes, participantes en el experimento de enseñanza, a cada uno de los cuatro ítems que se indican a continuación:

Pregunta 1. El tratamiento de aspectos históricos de la ciencia, ¿te pareció interesante y te despertó mayor interés por la asignatura?
Pregunta 2. El aspecto histórico de la ciencia ¿te ayudó a tener una mejor comprensión de la asignatura estadística y probabilidad?
Pregunta 3. ¿Te resultaron interesantes las actividades y tareas que abordaron aspectos históricos?
Pregunta 4. ¿El aspecto histórico que se trató en el curso cambió de alguna manera la imagen que tenías de las matemáticas?

En el análisis *a priori* de los ítems se consideró aludir a los aspectos del enfoque histórico que se aplicaron en el experimento de enseñanza, y conocer acerca de la posible aceptación de tales aspectos por parte de los estudiantes. De esta manera, la primera pregunta se refiere a valorar el tratamiento de aspectos históricos, sociales y políticos y del desarrollo de la ciencia en cuanto al interés que pueden despertar en los alumnos y hacer más interesante el estudio de la asignatura. Tales aspectos fueron los que se tomaron en cuenta en el experimento de enseñanza. La segunda pregunta, explora si los alumnos creen haber obtenido una mejor comprensión de la asignatura. La tercera pregunta, intenta conocer que piensan los alumnos de las actividades y tareas que abordan aspectos históricos, situación novedosa puesto que tradicionalmente están acostumbrados en los cursos de matemáticas a resolver problemas. Y, finalmente, la cuarta pregunta se refiere a conocer si el enfoque histórico, que hace alusión al contexto social, cultural y político en que vivieron los personajes que aportaron al conocimiento de las matemáticas, modifica de alguna manera la imagen que tenían de las matemáticas.

Cada pregunta tiene cinco opciones de respuesta, las cuales son la siguientes: Completamente en desacuerdo (CED); en desacuerdo (ED); de acuerdo (DA), completamente de acuerdo (CDA) y ni de acuerdo ni en desacuerdo (NDANED).

Los datos de la Tabla 1 muestran las respuestas a las cuatro preguntas del cuestionario. Se puede observar que, en la primera pregunta, el número de alumnos y el porcentaje de estudiantes que están completamente de acuerdo o de acuerdo acerca de que el tratamiento de aspectos históricos de la ciencia les pareció interesante y les despertó mayor interés por la asignatura es de 87%, de los cuales más de una tercera parte están completamente de acuerdo y más de la mitad están de acuerdo. En contraste, solamente 3.9% están completamente en desacuerdo o en desacuerdo, es decir, 3 alumnos de 76. Hay un porcentaje menor, 7.8%, es decir, 6 alumnos que son indiferentes.

Similarmente, en la segunda pregunta, 74.4%, un poco menos que el ítem anterior, que representan casi tres cuartas partes de los estudiantes, están completamente de acuerdo o de acuerdo de que el aspecto histórico les ayudó a tener una mejor comprensión de la asignatura de estadística y probabilidad. Sin embargo, en este caso, disminuye el número de estudiantes, que se encuentran completamente convencidos. Y, se incrementa el número de estudiantes indiferentes.

Respecto a la tercera pregunta, también un alto porcentaje de estudiantes, 89.4% les resultó interesantes realizar actividades que abordaron los aspectos históricos mencionados. En este ítem los resultados son muy similares, a los del primer ítem.

Finalmente, en la cuarta pregunta 85.5% de estudiantes consideró que el aspecto histórico que se trató en el curso cambió de alguna manera la imagen que tenían de las matemáticas. Fueron sólo dos alumnos los que tuvieron una percepción desfavorable (CED y ED) y nueve alumnos con una respuesta indiferente acerca de las aportaciones del tratamiento histórico de los contenidos señalados.

Tabla 1
Respuestas de las y los estudiantes al cuestionario

Respuesta	Pregunta 1		Pregunta 2		Pregunta 3		Pregunta 4	
	Núm.	%	Núm.	%	Núm.	%	Núm.	%
CED	1	1.3	1	1.3	1	1.3	1	1.3
ED	2	2.6	4	5.2	1	1.3	1	1.3
DA	40	52.6	40	52.3	27	35.5	27	35.5
CDA	27	35.5	17	22.3	41	53.9	38	50
NDANED	6	7.8	14	18.4	6	7.8	9	11.8
TOTAL	76	100	76	100	76	100	76	100

Conclusiones

Los resultados reportados en este trabajo muestran que, en general los alumnos tuvieron una percepción favorable o completamente favorable del uso del enfoque histórico que se llevó a cabo con la aplicación del experimento de enseñanza. Por consiguiente, en respuesta al problema de investigación, este estudio da indicios para afirmar la relevancia de utilizar un enfoque histórico para la enseñanza de la probabilidad y la estadística.

Los resultados preliminares de este trabajo contribuyen para continuar avanzando en otros proyectos de investigación. Hace falta profundizar en diversos aspectos de lo que piensan los alumnos que respondieron favorablemente a los diferentes ítems, por ejemplo: ¿en qué sentido les pareció interesante el uso de la historia de la ciencia?; ¿por qué dicho enfoque histórico les despertó mayor interés por la asignatura?; ¿por qué los alumnos piensan que dicho enfoque les ayudó a tener una mejor comprensión de la asignatura de probabilidad y estadística; ¿por qué les resultaron interesantes las actividades y tareas que abordaron aspectos históricos?; ¿en qué sentido el aspecto histórico que se trató en el curso cambió la imagen que tenían de las matemáticas?

La propuesta didáctica que aquí se presenta se deriva de la filosofía de la ciencia de Thomas S. Kuhn, de construir y estudiar una historia de las matemáticas que tome en cuenta la dimensión social y, se añadieron, además, aspectos culturales y políticos del desarrollo histórico de las matemáticas. Tales aspectos contribuyen a entender a las matemáticas como un fenómeno cultural, y en consecuencia ayuda a hacer explícitos sus valores. El tratamiento de tales valores permitiría ir más allá del mero adiestramiento en el conocimiento de algunos conceptos y en el manejo de algoritmos para la resolución de problemas y, de esta manera enriquecer la valoración del pensamiento matemático, más allá de su función instrumental.

Así pues, consideramos que este enfoque no sólo proporciona un rasgo más humano a las matemáticas, sino que también puede ser un recurso didáctico para mejorar su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, afirmamos que este enfoque podría abrir otras posibilidades de innovar el diseño de nuevas estrategias didácticas y de investigar acerca del papel de la historia de las matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias y bibliografía

Collete, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics 11*(2) (pp. 13-16).

Fauvel, J. y Maanen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education: the ICMI study*. Kluwer Academic Publisher.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 9*(3) 281-9.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261.

Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. (2ª edición en español). Fondo de Cultura Económica.

Kuhn, S. T. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas* (4ª reimpresión). Fondo de Cultura Económica.

Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. En J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI study* (pp. 143–170, Chapter 5). Kluwer Academic.

Restivo, S. (1993). The social life of mathematics, en: *Math Worlds*, 247- 278. Restivo, S., Bendegem, J. P. van and Fischer, R. (eds.). State University of New York Press.

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida: SEIEM.

Salinas, J. y Maz, A. (2011). La aritmética pitagórica como un recurso para la introducción a la demostración. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* - 2011 (pp. 313-323). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.
Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2020). Documentational approach to didactics. En S. Lerman (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 237-247). Springer.
White, L. A. (2000). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización*. Paidós básica.

La Importancia de la Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas en una Modalidad Virtual

Karla Esther **Pérez** Colan de Bardales
Centro Pre Universitario de la Universidad de Lima
Perú
kperez@ulima.edu.pe

Resumen

Este trabajo expone experiencias educativas que se generaron durante el proceso de enseñanza – aprendizaje, en una modalidad virtual, de un curso de contenidos matemáticos para estudiantes de formación pre universitaria, durante un ciclo académico del año 2022. Estas experiencias se obtuvieron como resultado de una serie de actividades gestionadas por el docente en sus sesiones de clase, en dónde el ingrediente principal fue la motivación. Esta permitió que los estudiantes desarrollaran, habilidades o competencias comunicativas y de resolución de problemas tanto en forma individual como grupal. Generando así un ambiente de clase motivador en dónde los estudiantes fueron los protagonistas del proceso de enseñanza – aprendizaje y el docente fue un facilitador del mismo. Las actividades de gestión en la enseñanza de contenidos matemáticos se tuvieron que adaptar a una modalidad virtual; teniendo en cuenta el nuevo entorno y la nueva realidad educativa.

Palabras clave: enseñanza – aprendizaje; contenidos matemáticos; motivación; actividades de gestión; modalidad virtual; competencias; individual; grupal.

Introducción

El 11 de marzo de 2020 la Organización Mundial de la Salud (OMS) anunció a través de su director, el doctor Tedros Adhanom Ghebreyesus, que la nueva enfermedad por el coronavirus 2019 (COVID-19) se caracterizaba como una pandemia. A partir de ese año el mundo entero se vio sumergido en un confinamiento; las actividades cotidianas de las personas, como ir a trabajar, estudiar, comprar, pasear, etc., dejaron de realizarse como se hacían convencionalmente antes; y, es en el ámbito educativo en dónde se evidenció claramente la necesidad de generar nuevas formas de enseñar ante el cierre de las instalaciones físicas de las instituciones educativas. En el mundo entero fueron millones de estudiantes los que dejaron de recibir instrucción de diferente nivel académico de forma presencial.

Considerando esta situación de cambio, no todos los estudiantes pudieron continuar con sus clases desde sus hogares por diferentes razones. Y el Perú no fue la excepción, el 15 de marzo de 2020 se promulgó el decreto supremo N° 044-2020-PCM que declaró el estado de emergencia nacional por las graves circunstancias que afectan la vida de la nación a consecuencia del brote del COVID-19;y, según datos proporcionados por la Encuesta Nacional de Hogares (ENAHO) del INEI: el porcentaje de estudiantes que continuaron llevando clases en el 2020 a través de cualquier modalidad se redujo cinco puntos porcentuales con respecto a los niveles de asistencia del 2019 al pasar de 92 % a 87 %. Esto significa que más de 400 mil estudiantes dejaron de plano de llevar clases durante el año 2020 a raíz de la pandemia.

Teniendo en cuenta este nuevo contexto, había que garantizar que aquellos estudiantes que pudieron continuar aprendiendo de manera no presencial o virtual no abandonaran esta nueva modalidad de estudio debido a la falta de motivación o interés. Por ello, es importante destacar lo mencionado por Valencia (2021) que indica que el factor motivacional es una razón preponderante para que un estudiante abandone sus estudios y uno de los puntos que destaca, relacionado a este factor, es no tener un acompañamiento adecuado por parte de los docentes. Es por ello que, considerando todo lo antes mencionado, compartiremos la experiencia educativa que se vivenció durante el proceso de enseñanza – aprendizaje de un curso de contenidos matemáticos: aritméticos, algebraicos y geométricos en un ciclo académico del año 2022 para estudiantes de nivel pre universitario. En dónde la gestión docente al diseñar, gestionar y aplicar los medios y/o actividades, en una modalidad de enseñanza virtual, permitieron generar un ambiente o entorno de aprendizaje amigable y motivador para el estudiante.

Marco conceptual

Por muchos años la enseñanza de los diferentes contenidos matemáticos, en diferentes cursos de nivel universitario y pre universitario, han sido desarrollados de forma teórica – práctica, este modelo está basado en el paradigma conductista. Este coloca al docente como el principal actor, aquel que planifica y ejecuta todas las actividades que se llevarán a cabo en el aula y el estudiante asume un rol pasivo en donde almacena en su memoria los conocimientos impartidos por el docente, para responder, posteriormente, las tareas dejadas en el aula (Moreno et al., 2009). Pero en estos últimos años, algunas instituciones educativas de nivel superior han buscado desarrollar una enseñanza de las matemáticas en la que se destaque e incentive una mayor participación del estudiante dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje. En algunos casos, se ha trabajado bajo el paradigma cognitivista y constructivista, buscando generar de esa manera un aprendizaje significativo; perdurable en el tiempo y que le permita al estudiante construir y deconstruir su aprendizaje (Vergara, 2012).

Dado que, el objetivo general del curso desarrollado para esta experiencia es: "Resolver ejercicios y problemas contextualizados mediante la aplicación de conceptos básicos de aritmética, álgebra y geometría"; podemos decir que para abordar el desarrollo de los contenidos se han utilizado situaciones adidácticas (problemas contextualizados en dónde el estudiante puede lograr la concepción de la teoría necesaria para su resolución a partir de la lógica interna del problema, sin necesidad de un medio didáctico) para preparar el camino de situaciones didácticas. De esta manera las situaciones adidácticas que han sido preparadas con fines didácticos pueden permitir que se genere una situación fundamental de aprendizaje (Brousseau, 2007). Es importante resaltar que estas situaciones adidácticas se generaron en el momento asíncrono del proceso de enseñanza – aprendizaje, lo cual generó en algunos estudiantes una desmotivación al no poder producir o modificar de manera coherente el conocimiento necesario para plantear y resolver la situación problemática planteada. Por ello, durante los momentos síncronos de clase se generaron actividades de trabajo cooperativo, siendo este un medio motivador, en el que los estudiantes, agrupados aleatoriamente, trabajaron las situaciones de contexto teniendo la oportunidad de aclarar sus dudas y en total confianza realizar preguntas a sus compañeros teniendo el acompañamiento permanente del docente en cada grupo de trabajo. Además, es conveniente considerar que el programa analítico del curso distribuye de manera ordenada los contenidos del mismo. En primer lugar, se comienza desarrollando problemas de razonamiento matemático; en segundo lugar, temas de aritmética; luego, se abordan temas de álgebra y finalmente temas básicos de geometría plana y del espacio, permitiendo que las situaciones adidácticas formuladas en semanas posteriores consideren temas trabajados en las semanas previas generando así un trabajo concatenado de contenidos (situación didáctica) que resulta en problemas y/o ejercicios retadores para los estudiantes.

Por otro lado, considerando que debido a la pandemia causada por la COVID 19 las instituciones educativas de todo el mundo debieron reinventar su manera de enseñar. La educación virtual se presentó como una alternativa oportuna y eficaz. Esta cuenta con una infinidad de recursos que al implementarse en las sesiones de clase permiten generar un ambiente dinámico y retador. El uso adecuado de las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) permiten al docente generar ambientes propicios para la construcción del conocimiento generando así un aprendizaje significativo. Garduño (2005), menciona que el uso de las TIC en la educación virtual permite, entre otras cosas, tener muchas posibilidades para el diseño de materiales didácticos de manera tal que se garantice el aprendizaje y la adquisición de conocimiento significativo por parte del estudiante. Pero la utilización de un medio virtual por sí solo no garantiza la generación de un aprendizaje significativo ni genera una ambiente motivador o retador para los estudiantes, prueba de ello es la experiencia que se realizó en la Universidad Central del Ecuador, en dónde Marcillo (2021), menciona que luego de aplicar una encuesta en línea a una muestra de 200 estudiantes de diferentes facultades y semestres, los resultados señalan que los estudiantes aprendieron menos, que las clases y tareas fueron extensas y cansadas y que se requirieron mayor dinamismo y motivación docente y manejo de casos prácticos, entre otras cosas. Es por ello, que en esta experiencia se complementa el uso de un medio virtual con el uso de una metodología activa que permite al docente desarrollar actividades participativas de índole individual y grupal en las que, a través de videos motivadores, preguntas guiadoras, reconocimiento de logros y acompañamiento docente permanente se genera un ambiente motivador de trabajo.

Luego, teniendo en cuenta la naturaleza del curso trabajado y los contenidos del mismo, así como el entorno virtual en el que se ha desarrollado; es importante y necesario establecer como un medio favorable, de gestión educativa, la motivación. Considerando que, según Ajello (2003) la motivación es el argumento que sostiene y permite la realización de actividades significativas para la persona y de las cuales esta toma parte. Podemos decir que, desde un punto de vista educativo, la motivación es la actitud favorable desarrollada por el sujeto que participa de actividades de aprendizaje que lo llevan a continuar aprendiendo de manera autónoma y participativa. Y considerando que dichas actividades se han desarrollado en un ambiente virtual, cabe destacar el trabajo realizado para la gestión de los medios y/o instrumentos utilizados para generar el proceso de motivación en los estudiantes del curso. Desde la búsqueda e identificación de videos, la elaboración de instrumentos de recolección de información e identificación de saberes previos, el uso de plataformas web educativas y técnicas educativas enmarcadas dentro de una metodología activa de aprendizaje; así como la elaboración de instrumentos de evaluación formativa y sumativa. Debe considerarse que para generar actividades motivadoras para los estudiantes se tuvo en cuenta en primer lugar sus preferencias e intereses considerando el rango de edades en el que se encuentran, medio extrínseco de motivación. Luego, se consideró como un medio motivador el hecho de que los estudiantes de este curso buscaban alcanzar el ingreso directo a la universidad, es así que el sentido de logro fue un medio intrínseco de motivación para muchos de ellos.

Metodología

El tipo de estudio se enmarca dentro del **análisis cualitativo**. Hernández et al. (2014) mencionan que, a diferencia de una investigación cuantitativa, que es lineal y en dónde las preguntas e hipótesis por lo general se obtienen luego de aplicado la recolección y análisis de datos, la investigación cualitativa es cíclica ya que se pueden desarrollar preguntas o hipótesis antes, durante o después de la recolección y análisis de datos. Considerando lo antes mencionado es importante promover y efectuar este tipo de investigación. Así quedará en evidencia que, aunque no se utilice el método científico se puede producir conocimiento riguroso y evidenciable. Generando un proceso de transferencia activa luego de haber realizado el análisis, comprensión y descripción del ente de estudio.

Podemos afirmar, que en el diseño de la investigación se ha utilizado la sistematización de experiencia. Esta permite relacionar la reflexión de la experiencia vivida con diversas teorías, para comprenderla, yendo más allá de una simple descripción de hechos o sucesos; sino por el contrario genera vínculos con otras prácticas sociales relacionadas a través de lo que vivimos, vemos, sentimos y pensamos. (Jara, 2018, p. 55). Con este fin se han utilizado encuestas referenciales realizadas tanto a docentes como a estudiantes, además de los resultados cuantitativos obtenidos en las evaluaciones de entrada y de salida de las evaluaciones formativas del curso.

Para obtener información relevante, de la experiencia, se ha aplicado la técnica de la observación en base a los videos o registros grabados de las clases que se encuentran en el repositorio de la plataforma virtual Blackboard, esta actividad se llevó a cabo a través de una guía de observación. La observación, es más que una mirada superficial, implica una reflexión permanente de todos los detalles, sucesos y eventos, esta técnica va más allá del sentido de la vista implica el uso de todos los otros sentidos (Hernández et al., 2014).

Por otro lado, se usó el análisis documental que nos permitió recopilar todo el material trabajado durante el ciclo académico correspondiente del curso; que consiste en videos, separatas, presentaciones en diapositivas, evaluaciones, etc. Esta técnica le permite conocer al investigador los antecedentes de un ambiente, las vivencias o situaciones que se producen antes, durante y después de la experiencia. Pero un punto importante es que el investigador verifique que el material recopilado es auténtico y se encuentra en buen estado (Hernández et al., 2014).

Resultados

Dentro de los resultados obtenidos, luego del análisis cualitativo a partir de una sistematización de experiencia, podemos mencionar lo siguiente:

- ✓ Una mejor actitud, por parte de los docentes, frente a la necesidad de adaptar y generar nuevos materiales para el curso. Esto se evidencia a través de los resultados obtenidos en una encuesta realizada a los docentes.

- ✓ Producción de material novedoso y oportuno con el fin de generar ambientes motivadores dentro de las sesiones virtuales de clase. Esto se evidencia a través de los resultados obtenidos en una encuesta realizada a los docentes.

- ✓ El desarrollo y la valoración, por parte de los estudiantes, del proceso de enseñanza – aprendizaje de un curso con contenidos matemáticos. Los estudiantes se sintieron parte importante del proceso y mostraron interés y disposición a participar de las diferentes actividades desarrolladas en las sesiones de clase virtual. Esto se evidencia a través de los resultados de una encuesta referencial que los estudiantes realizan a cada uno de sus docentes.

- ✓ El desarrollo de competencias o habilidades de planificación y organización, por parte del estudiante, con el fin de mejorar su participación individual y grupal dentro de las sesiones virtuales de clase. Esto se obtiene a través de las opiniones dadas por algunos estudiantes a cada docente dentro y fuera de las sesiones de clase.

- ✓ Desarrollo de habilidades o competencias de comunicación efectiva y de resolución de problemas por parte de los estudiantes. Esto se obtiene a través de la observación de algunos videos de las sesiones de clase sincrónicas y de los resultados obtenidos en las evaluaciones formativas de entrada y salida del curso.

- ✓ Mayor seguridad, por parte de los estudiantes, al transmitir en forma individual, o en un trabajo de equipo, los conocimientos matemáticos adquiridos. Esto se obtiene a través de la observación de videos de las sesiones de clase sincrónicas.

Discusiones y conclusiones

La utilidad de las matemáticas es discutible desde diferentes puntos de vista, en el caso de la pedagogía podría decirse que esta la considera útil porque nos enseña a razonar y a pensar con precisión, y con el fin de lograr esto debemos considerar importante la búsqueda de los medios más adecuados que promuevan la enseñanza de las mismas, ya que algunos estudiantes consideran que el estudio de las matemáticas se ha convertido en una carga y no ven la utilidad y/o necesidad de estas. Es por ello que podemos afirmar que la motivación es una componente importante en la enseñanza de cursos con contenidos matemáticos, ya que a través del análisis de esta experiencia hemos podido evidenciar los efectos positivos que se generan, tanto en los docentes como en los estudiantes, al promover un ambiente motivador en las sesiones de clase virtuales. Caba destacar que, el entorno o ambiente virtual no impiden o limitan el uso de técnicas, herramientas o instrumentos que gestionen de manera óptima el proceso de enseñanza – aprendizaje, por el contrario, se puede aprovechar al máximo los medios tecnológicos para promover una actitud favorable por parte del estudiante que lo lleven a continuar aprendiendo de manera autónoma. Aunque un limitante que hemos encontrado en el análisis de esta experiencia es el tiempo que toma llevar a cabo las actividades motivadoras durante las sesiones de clase, ante esto es importante preguntarnos: ¿es válido anteponer el tiempo a cantidad de contenidos?, ¿cómo puedo determinar la pertinencia de contenidos matemáticos versus la gestión del tiempo de trabajo por sesión de clase?, ¿es un limitante el número de estudiantes? Queda como tarea generar los espacios para encontrar y justificar las respuestas a estas preguntas.

Referencias y bibliografías

Ajello, A. (2003). *La motivación para aprender*. En C. Pontecorvo (Coord.), Manual de psicología de la educación. España: Popular.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1a ed.). Traducido por: Dilma Fregona. Editorial Libros del Zorzal.

Garduño, R. (2005). *Enseñanza virtual sobre la organización de recursos informativos digitales* (1a ed.). Investigación bibliotecológica.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6a ed.). Mc Graw Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Jara, O. (2018). *La sistematización de experiencias: práctica y teoría para otros mundos posibles* (1a ed.). Centro Internacional de Educación y desarrollo humano.

Marcillo, C. *Experiencia estudiantil en educación virtual en la Universidad Central*. Revista de Investigación Enlace Universitario, 20 (1), 102-111. https://doi.org/10.33789/enlace.20.1.89

Moreno, C. y García, M. (2009). *La epistemología matemática y los enfoques del aprendizaje en la movilidad del pensamiento instruccional del profesor*. Investigación y Postgrado, *24*(1), 218-240. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=65815763009

Valencia, V. (2021). *Variables psicológicas relacionadas con la deserción universitaria*. [Trabajo de suficiencia profesional para optar el título profesional de Licenciado en Psicología, Universidad de Lima] Repositorio institucional de la Universidad de Lima https://hdl.handle.net/20.500.12724/14026

Vergara, C. (2012). Deconstrucción y equilibración: procesos de construcción del conocimiento. *Acción Pedagógica*, (21), 76-81.

Las tipologías textuales en la enseñanza de las ciencias: Su contribución a la comprensión en Matemáticas

Ana Isabel **Tenjo** Morales
Escuela de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad de La Salle
Colombia
atenj@unisalle.edu.co
Weimar **Muñoz** Villate
Escuela de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad de La Salle
Colombia
wmunoz@unisalle.edu.co

Resumen

Si bien, en las universidades generalmente los docentes de ciencias identifican que una de las mayores dificultades de los estudiantes, particularmente en el área de matemáticas, es la comprensión lectora, no se ha considerado trabajar en la formación en tipologías textuales para resolver esta dificultad.

En este estudio participaron 290 docentes, entre ellos 30 de ciencias y 1104 estudiantes de diferentes programas universitarios. Mediante técnicas estadísticas multivariadas se estudió el tipo de actividades que implementan los docentes en el aula para impulsar los procesos de lectura en ciencias – matemáticas. Se exploró cuales son las tipologías más usuales en esta área, así como los vínculos entre las creencias docentes y las actividades que privilegian en el aula de clase.

Se encontró que hay algunas tipologías textuales más frecuentes en ciencias, y que algunas veces su implementación, está asociada a las falencias que los docentes perciben sobre su propia formación.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación universitaria; tipologías textuales en matemáticas; lectura de textos de matemáticas, formación docente.

Introducción

Particularmente en la enseñanza de matemáticas, se hace necesario admitir que el aprendizaje de esta ciencia implica prácticas conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas al conocimiento propio de esta ciencia. No es igual abstraer las ideas principales en un texto de matemáticas que en otros tipos de textos.

Existen textos narrativos (donde se "cuenta una historia"), o textos expositivos (donde se "habla de"), u otros. En un escrito, el tipo de un texto depende de su propósito, estructura y características del lenguaje. Particularmente en el área de matemáticas es frecuente los tipos de texto expositivos, que pretenden identificar y caracterizar experiencias, hechos, situaciones y acciones en elementos abstractos o reales. Estos tipos de textos tienen por objeto explicar, informar o describir y son los más utilizados para escribir estructuras, lo cual es necesario en ciencias. En la academia esta tipología se puede encontrar en diferentes formatos como: libros de texto, guías estudiantiles, informes científicos, artículos de revistas científicas, artículos de enciclopedia, etc.

Bajo esta perspectiva, el propósito de las actividades de lectura y escritura en la clase de matemáticas debería estar orientada a que los estudiantes reconozcan el lenguaje propio, evidencien donde es aplicable, analicen, interpreten y sean capaces de describir fenómenos y expresar situaciones problémicas mediante lenguaje matemático, así como evaluar las fuentes de información y su validez, competencia que es imprescindible para realizar actividades profesionales e investigativas (Kock. y Possamai, 2022).

Ahora bien, a pesar de que se evidencia necesidad de la lectura en matemáticas, surge la pregunta ¿los docentes de matemáticas saben enseñar a sus estudiantes a leer en matemáticas? ¿realizan actividades de lectura en matemáticas en sus cursos? ¿las tipologías textuales tienen un tiempo particular dentro del intervalo en que cursan los estudiantes su programa? Para realizar un buen acompañamiento en matemáticas, se requiere que el profesor no solo tenga unos conocimientos sólidos en matemáticas, sino que esté cualificado para acompañar al estudiante en la comprensión de los temas con herramientas que van más allá de las didácticas (Rowland ,2008). Con anterioridad se han presentado propuestas para que los maestros instruyan a sus estudiantes sobre cómo leer matemáticas (Shepherd, M., et al. ,2009). Por otra parte, se ha visto que generalmente los libros de texto para los cursos de matemáticas universitarias de primer año, como álgebra universitaria, precálculo y cálculo, parecen estar escritos para que el estudiante los lea en forma completa y precisa.

El objetivo de este trabajo es determinar de qué forma los docentes del área de matemáticas trabajan esa comprensión lectora en el área específica, si se han cualificado para lograr mejores resultados en este sentido y que relación hay entre las creencias del docente respecto al tipo de texto más frecuente para los estudiantes y la forma en que lo abordan.

Este estudio exploratorio, examinó las experiencias y dificultades con que se encuentran los docentes de la universidad cuando asignan a sus estudiantes lecturas de matemáticas.

Se consulto a un grupo de docentes del área de matemática y de otras áreas de conocimiento, así como a un grupo considerable de estudiantes de diferentes programas de formación universitaria que toman asignaturas de matemáticas su pensum.

Los docentes de matemáticas consultados mostraron bastantes dificultades a la hora de determinar cuáles actividades asignan a sus estudiantes para mejorar la comprensión lectora, particularmente de temas específicos de matemáticas, ellos consideran que los procesos de lectura cualquiera sea, son trabajo de los docentes de lenguas y generalmente no han tratado de cualificarse en esta área. Por otra parte, los estudiantes no sienten que se benefician mucho de leer textos de matemáticas como esperarían.

El análisis de los datos, mediante técnicas multivariadas (arboles de clasificación y análisis de residuales estandarizados), permitió evidenciar que los docentes de matemáticas trabajan con frecuencia en sus clases: resúmenes, artículos o informes. Sin embargo, a pesar de que la mayoría afirma que los estudiantes generalmente presentan dificultades al enfrentarse a la lectura de textos de matemáticas, generalmente no trabajan en esta dificultad especifica en sus aulas. Los docentes afirman no haberse formado para enseñar a leer el tipo de texto que solicitan, la experticia en la lectura de las tipologías que usualmente trabajan en las clases se ha ido desarrollando con la experiencia. Su trabajo ha sido empírico.

Aunado a lo anterior, se encontró que las creencias de los profesores de matemáticas sobre las tipologías que ellos mismos quisieran aprender, son las que impulsan en sus estudiantes. Es decir, por un lado, los docentes consideran muy importante aprender a abordar artículos de investigación y por otro lado los estudiantes sienten que sus docentes los han impulsado a escribir esta tipología textual para abordar los contenidos específicos de su asignatura.

Materiales y métodos

Esta es una investigación de tipo exploratoria descriptiva cuyo el objetivo de hacer una aproximación a las formas que tienen los docentes de la universidad para trabajar la lectura en el aula y las tipologías textuales que privilegian para acercar al conocimiento en matemáticas a sus estudiantes. Se describen resultados y se destacan las características particulares que se evidencian con el fin de identificar aspectos de interés para estudios de mayor profundidad en el futuro.

Las dimensiones de interés para este estudio se muestran en la Tabla 1

Tabla 1
Dimensiones del estudio

1.	Información sociodemográfica (Participantes).
2.	Procesos de lecto-escritura propios del docente.
3.	Actividades de los docentes para mejorar la lectura en ciencias en los estudiantes.
4.	Tipos de documentos que se privilegian en el aula.
5.	Relación entre los imaginarios del docente en cuanto a la lectura en ciencias y lo que considera el estudiante que más ha aprendido.

Nota. Elaboración propia.

Participantes

La recolección de los datos para este trabajo se realizó durante el segundo semestre de 2021 y primer semestre de 2022 con una muestra de 295 docentes, 30 de ellos del área de ciencias matemáticas que prestan sus servicios en los diferentes programas de la universidad. 1104 estudiantes de diferentes facultades, distribuidos así: de Ciencias Básicas 10%, de áreas de gestión 28%, de humanidades 21%, de diseño y construcción 22% y de áreas de la salud 19%. En cuanto a las características demográficas de la muestra estudiada, el 39,7% de los docentes eran mujeres y el 60,3% hombres, mientras que en los estudiantes el 60% correspondió a mujeres y el 40% a hombres.

Instrumentos de recolección y análisis de datos

Aparte de la información sociodemográfica, las preguntas del cuestionario, que se usaron en este trabajo, en cada una de las dimensiones de estudio descritas antes, están orientadas a los procesos de lectura en matemáticas, percepciones en torno a las dificultades que evidencia el docente en la lectura de los diversos tipos de textos que sugiere a sus estudiantes.

Respecto a los procesos le lectura propios del docente, se analizan preguntas como ¿Tiene alguna formación particular en tipologías textuales?... Seleccione en qué tipo de texto ha tenido alguna formación. Estas preguntas tienen el propósito de evidenciar si hay conocimiento de las tipologías y géneros textuales, están encaminadas a explicitar la percepción del docente frente a sus propias habilidades y la orientación que da a sus estudiantes para los procesos de lecto escritura.

En la dimensión 3, se trata las sugerencias de los docentes para mejorar la lectura en ciencias en los estudiantes. Esta dimensión profundiza en la práctica en el aula y el desarrollo de propuestas o alternativas para solventar las dificultades que se presentan, la cual a su vez está relacionada con la dimensión 4, que trata los diferentes tipos de documentos que se privilegian en el aula. En esta dimensión se preguntó: en el programa académico en el que se desempeña como docente, ¿qué tipo de textos para leer pide a sus estudiantes con más frecuencia (ensayos, informes, artículos, resúmenes ponencias, relatorías, libros, etc.)? ¿Mediante qué recursos ha orientado a leer a sus estudiantes? (enumere de 1 a 4 siendo 1 el más frecuente)

Como se vio en el párrafo anterior, dicho cuestionario incluyó diferentes tipos de preguntas: cerradas siguiendo la escala de Likert, y también algunas preguntas abiertas, con el propósito de hacer cruces y triangulación de la información para comparar, relacionar e interpretar los resultados obtenidos.

El procesamiento de los datos obtenidos se realizó con el software R versión 4.2.1. El primer paso fue efectuar un análisis estadístico descriptivo de las dimensiones que componen cada dimensión del cuestionario. Se utilizaron algunas técnicas de análisis multivariado (arboles de clasificación y análisis de residuales estandarizados) para describir relaciones entre variables.

Resultados

Respecto a los procesos de lectura y escritura propios del docente se encontró que el 93,3% de los profesores de ciencias en el estudio, aseguran no haber tenido ninguna formación en tipologías textuales. Los docentes de ciencias no han considerado importante la formación en esta área, la mayoría afirmó que a medida que desarrollo sus procesos de aprendizaje y enseñanza fue adquiriendo experiencia en el manejo de las tipologías que frecuenta, así que su aprendizaje no ha sido el producto de formación especializada en el área.

De igual manera, los docentes indicaron que las actividades que usualmente trabajan en el aula para afianzar la lectura de sus alumnos es asignar lecturas a sus estudiantes, recomendar lecturas de fuentes confiables o motivarlos. Sin embargo, ninguno de los profesores participantes menciono el desarrollo de guías o actividades orientadas en el aula con el objetivo de hacer acompañamiento al estudiante en el proceso de lectura para abordar los textos de matemáticas que sugiere, de tal forma que el alumno adquiera la capacidad de identificar y caracterizar experiencias, hechos, situaciones y acciones en elementos abstractos o reales en este tipo de textos.

En el área de ciencias, tanto estudiantes como docentes coincidieron en los tipos de textos que se privilegian en esta área.

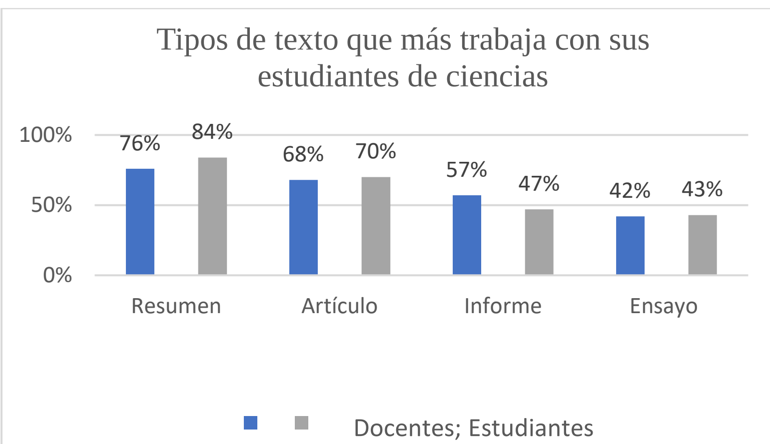


Figura 1. Coincidencias de docentes y estudiantes en tipos de textos que más trabajan

A la pregunta realizada a los estudiantes "***Dentro de su carrera o programa académico, ¿cuál de los siguientes tipos de textos trabaja con más frecuencia?"*** Los encuestados en ciencias coincidieron en identificar "*el Resumen*"**,** ver figura 1, donde se muestra el resultado de la pregunta tanto para docentes como estudiantes de los cursos en ciencias. Se nota el alto porcentaje asociado al Resumen 76% y 84%, para docentes y estudiantes respectivamente. Por otra parte, el artículo de investigación fue un documento que se destacó con más frecuencia en los programas de ciencias, pero no tan notorio en otras áreas de formación.

La clasificación por programas y semestres que cursan los estudiantes, ver árbol de clasificación (figura 2), yendo de arriba hacia abajo, se encuentra que el 70% de los estudiantes marcaron el **informe** como uno de los tipos de texto qué más escriben. En este mismo diagrama en la segunda línea se evidencia que en las facultades donde está incluida Ciencias **Básicas**

(DCB), es muy frecuente este tipo de texto, lo resalto el 94% de este grupo; mientras que en otras facultades se hace uso, pero generalmente sólo en los primeros semestres. El color y su intensidad, indica mayor frecuencia (azul frecuente (1) y verde no frecuente (0)).

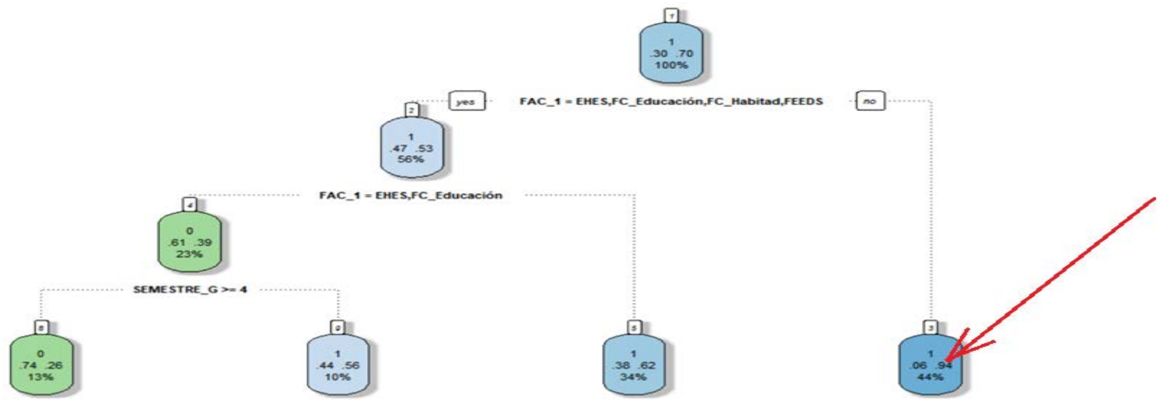


Figura 2. Árbol de clasificación para la tipología "El informe".

El informe es menos usado en las facultades de humanidades y mucho menos en semestres superiores de ese mismo programa. Como se nota en la figura 2, donde se logró determinar los tipos de texto que se privilegian en las diferentes facultades de acuerdo con el semestre que están cursando los estudiantes. En general el ensayo, seguido del informe son los dos tipos de texto más frecuentes para todos los estudiantes, el ensayo es usado por todos los estudiantes, pero el informe depende de otras características como el programa y el semestre donde se encuentre el estudiante.

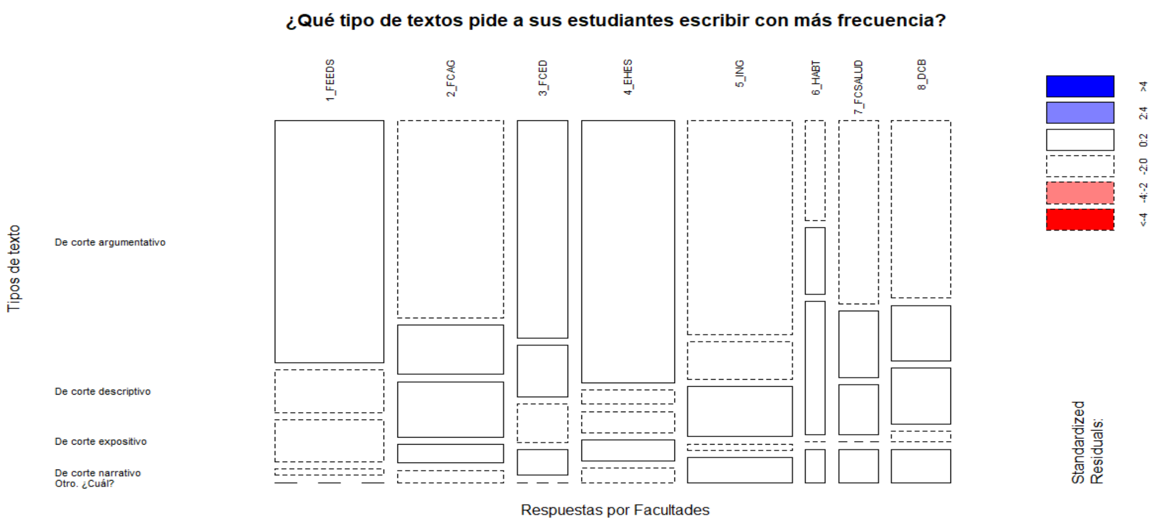


Figura 3. Análisis de residuales estandarizados para identificar la asociación entre los tipos de texto, argumentativo descriptivo, expositivo o narrativo y su uso en las diferentes facultades.

En la figura 3 se muestra el cruce de las facultades y el corte de los tipos de texto. Es interesante resaltar que, en cuanto a la percepción que tienen los estudiantes de la orientación recibida para el trabajo con los diferentes tipos de textos, se trató de identificar si existe alguna relación entre dicha orientación y el programa académico que cursan. Para este análisis se realizaron pruebas de independencia mediante análisis de residuales estandarizados. Se encontró que los estudiantes, tienen una percepción positiva respecto a la orientación recibida para abordar textos de tipo argumentativo, sin embargo, como se nota en la figura, la percepción para estas tipologías de texto no muestra diferencias significativas respecto a los estudiantes de programas diferentes a los de ciencias.

Los docentes de ciencias usualmente no cuentan con recursos didácticos para acercar a los estudiantes a la lectura y escritura en ciencias, no se encontró uso de material específicamente focalizado para la lectura en matemáticas universitarias. Y en cuanto a la formación que han tenido los docentes en tipologías textuales, se percibió que particularmente en el área de ciencias es donde hay menos porcentaje de docentes que han considerado cualificarse en este tema. La mayoría considera que la comprensión lectora y la habilidad en la escritura, la deben obtener los estudiantes con docentes del área de lenguas

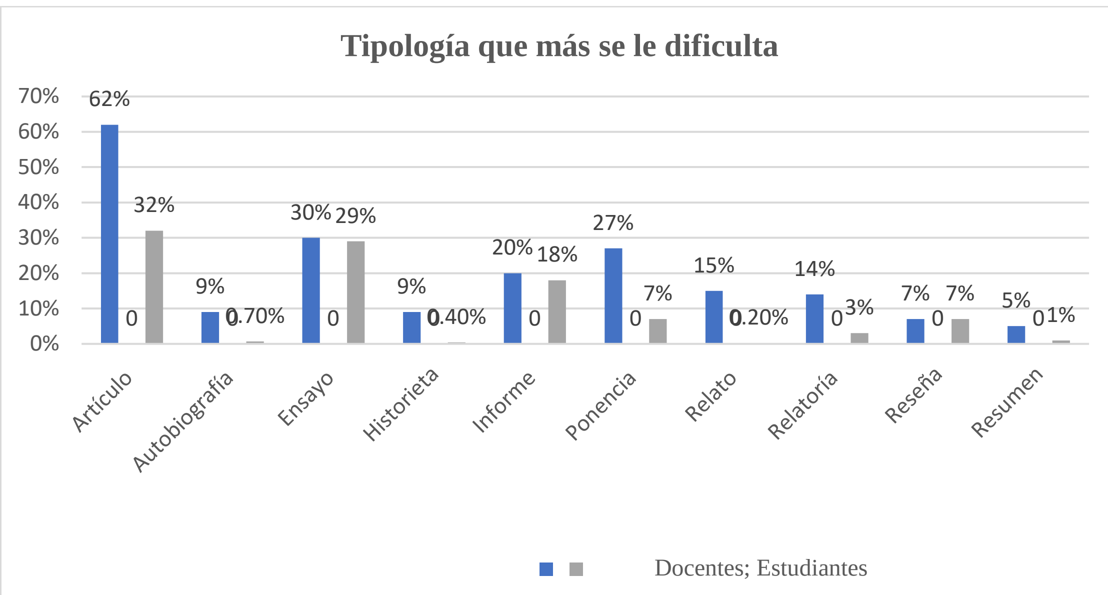


Figura 4. Comparativo de los porcentajes de docentes y estudiantes que identificaron alguna tipología que se les dificulta.

Por último, como se ve en la figura 4, los porcentajes para los dos grupos analizados en las tipologías más usadas en ciencias como lo es el artículo, el informe e incluso el del ensayo, que es común en casi todas las áreas de conocimiento, son parecidos en estudiantes y docentes. Este estudio analiza la relación que muestran las tendencias lectoras de los estudiantes de la universidad y la tendencia del docente. Efectivamente como se ha mostrado a lo largo de este trabajo, la formación en tipologías textuales de los docentes de ciencias es casi inexistente, sin embargo, muchos de los docentes han trabajado en la lectura y elaboración de artículos científicos e impulsan a sus estudiantes en esa línea. Al medir el grado de correlación entre la percepción del estudiante y del docente, se encontró una correlación de 83% en la percepción que tiene el estudiante respecto a la tipología que más trabaja y el deseo que tiene el docente por volverse más experto en esa misma tipología.

Conclusión y discusión

En este trabajo se identificaron las tipologías textuales que privilegian los profesores de ciencias en la universidad, estas clases particulares de tipologías pueden tener implicaciones relevantes para el aprendizaje de los estudiantes y llevan con sigo un propósito, por lo cual, incluso como se vio en algunos casos también dependen del semestre que se esté cursando. Se identifico que las tipologías textuales que se privilegian en el área de ciencias -matemáticas son: el resumen, el articulo y el informe. Además, se indagó a cerca de las actividades que los docentes de ciencias proponen a sus estudiantes para el trabajo con estas tipologías en el aula de clase. La reflexión para el trabajo en el aula debería surgir en la interacción de la matemática que se enseña y el profesor, cuando el profesor planea y analiza con anterioridad las actividades que desea llevar a cabo en el aula, es decir, la forma como el maestro planea la clase comprende la temática de estudio, diseña y selecciona los recursos que implementará (Parada S., et *al* ,2014). En general los docentes de ciencias de la universidad plantean las actividades de matemáticas, pero asumen que el estudiante sabe abordar las lecturas de textos matemáticos, por lo cual trabajan poco en el tema de comprensión lectora.

Ahora, dado lo anterior, se estudió la formación que tiene el docente para enseñar a leer las tipologías textuales que propone a sus estudiantes. Encontramos que los docentes en ciencias y particularmente en el área de matemáticas, no orientan el trabajo de lectura y escritura en su área específica apoyados en una fundamentación teórica o un bagaje de conocimiento, sino que el trabajo es ciertamente empírico.

Generalmente se dice que las matemáticas se usan, siempre con un propósito, por lo cual en las diferentes disciplinas se da una orientación a las matemáticas que se usan, pero no orientación al texto involucrado en las matemáticas. Un científico informático escribe texto matemático para predecir el próximo evento de disturbios (Robinson R., *et al*, 2019), Un ingeniero escribe un texto matemático para hacer que las estructuras sean más resistentes a los elementos (Grayson, M. *et al*, 2012). mientras que un matemático aplicado escribe texto matemático para crear mejores herramientas para la compresión de imágenes (Roach D., 2010). Los procesos de lectura y escritura en los cuales se fundamenta el estudio de las matemáticas no se deberían tomar a la ligera. Es importante comprender la naturaleza, los usos de los tipos de texto matemático que los estudiantes necesitan y su objetivo, esto con el fin de diseñar metodologías para la enseñanza de las matemáticas, que implementen el uso del texto de diversas formas.

Varios estudios muestran que la formación de profesores de matemáticas se enfoca en el análisis de sus conocimientos matemáticos, sus concepciones, actitudes y creencias. Se ha encontrado en la literatura estudios donde se ha evidenciado con anterioridad la relación entre los conocimientos, concepciones y creencias de los profesores, y el interés de los estudiantes por conocer y comprender conceptos matemáticos (Parada S., *et al*., 2014). En este trabajo se encontró relaciones entre las tipologías textuales que se privilegian para favorecer el aprendizaje y lo que aprenden los estudiantes. Los docentes continúan identificando que una de las falencias más graves de los estudiantes es la baja comprensión lectora en matemáticas, sin embargo, indican que las actividades con que promueven la lectura son simplemente lecturas, pero no orientadas a la comprensión del nuevo lenguaje. Es claro que lo principal para enseñar matemáticas es saber matemáticas, pero en ese saber, se debe explorarse el texto y el lenguaje que involucra. Luego de identificar las tipologías textuales que se privilegian, una siguiente fase a este estudio exploratorio es un diseño de clase donde se enseñe al estudiante a leer matemáticas, particularmente en las tipologías textuales que más se frecuentan en ciencias.

Bibliografía y Referencias

Grayson, M., Pang, W., & Schiff, S. (2012). Three-dimensional probabilistic wind-borne debris trajectory model for building envelope impact risk assessment. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 102, 22-35. https://www.researchgate.net/publication/256476004_Three-dimensional_probabilistic_wind-borne_debris_trajectory_model_for_building_envelope_impact_risk_assessment
.

Goñi, J. M. y Planas, N. (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas. En J. M. Goñi (Coord.), Didáctica de las Matemáticas (pp. 167-197). https://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/Go%C3%B1i&Planas_2011.pdf

Kock, T., da Silva, V. C. y Possamai, J. P. (2022). La escritura de los estudiantes en las clases de matemáticas, PNA 16(3), 265-280. file:///D:/Mis%20Documentos/Descargas/Dialnet-LaEscrituraDeLosEstudiantesEnLasClasesDeMatematica-8445707.pdf

Parada Sandra E, Pluvinag Francois (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico, Relime (Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa vol.17 no.1 Ciudad de México mar. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362014000100005

Richard Robinson. Rachael Gabriel. (2019) Providing Undergraduates an Authentic Perspective on Mathematical Meaning-making: A focus on Mathematical Text Types http://sigmaa.maa.org/rume/crume2019/Papers/80.pdf

Roach, D. W. (2010). Frequency selective parameterized wavelets of length ten. Journal of Concrete and Applicable Mathematics, 8(1), 1675-179. https://www.researchgate.net/publication/266540016_Frequency_selective_parameterized_wavelets_of_length_ten

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.). International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development, 273-298. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers. https://research-portal.uea.ac.uk/en/publications/researching-teachers-mathematics-disciplinary-knowledge

Shepherd, M., Selden, A. y Selden, J. (2009), Technical Report: Difficulties First-year University Students Have in Reading Their Mathematics Textbooks. Tennessee Technological University Mathematics Department Technical Report https://eric.ed.gov/?id=ED518599

Estándares Básicos de Competencias n Mátemáticas, Potenciar el pensamiento matemático (MEN, Ministerio de Educación Nacional, Colombia). https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Matemática discreta en aulas multigrado de primaria

Mayra Elizabeth **Parra** Amaya
Universidad Antonio Nariño, Programa Todos a Aprender
Colombia
maparra72@uan.edu.co
Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Este estudio describe una experiencia de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en el aula multigrado de primaria. El objetivo de esta investigación es despertar el interés por aprender temas matemáticos por medio de la resolución de problemas contextualizado a los oficios, particularmente en el oficio de ser astronauta. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo y se estructura bajo un diseño de investigación acción. Las actividades se aplicaron a 10 estudiantes multigrado de primaria que cursan de 3° a 5°. Los resultados evidencian el gran potencial que tienen estas aulas para acelerar el aprendizaje en el desarrollo del pensamiento matemático trabajando entre pares, desde una propuesta general con actividades diferenciadas, despertando la curiosidad y motivación. La aplicación de juegos estratégicos y temas relacionados con la matemática discreta, ayudan a descubrir y tomar decisiones acertadas.

Palabras clave: Educación matemática; Educación primaria multigrado; Evaluación formativa; Constructivismo; Educación matemática realista.

Introducción

La Matemática discreta (MD) es una rama de las matemáticas que no está incluida en los currículos de educación básica primaria y menos para aulas multigrado. En la actualidad, la MD se constituye fundamental para el desarrollo del pensamiento computacional (Tamayo et al., 2021). Por esta razón, es importante implementar espacios en las instituciones que fortalezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje que permita la interacción, el análisis, los juegos estratégicos, y demás actividades retadoras y motivantes que nos brinda la MD.

Algunos investigadores proponen para el aula multigrado articular diferentes asignaturas en base a una propuesta general con actividades diferenciadas (Vithanapathirana, 2006; Juárez, 2012; Le, 2018; Rockwell & Rebolledo, 2016; Belleza & Feliciano, 2018; Block, Ramírez & Reséndiz 2019). Por esta razón, la propuesta vincula la MD en el oficio de ser astronauta como actividad general (elegido por los estudiantes multigrado), aumentando la motivación para aprender matemáticas.

Marco teórico

Freudenthal (1986) criticaba fuertemente las “Matemáticas modernas” por aplicar lo que llamaba él “inversión antididáctica”, situaciones en donde prevalecía iniciar por los conceptos (Heuvel, 2020). La Educación Matemática Realista (EMR) le da un papel protagónico a los datos empíricos e ideas que se generan tras una situación, antes que los conceptos y teorías matemáticas (Freudenthal, 1986), incentivando un aprendizaje significativo e interdisciplinario.

Castro (2022) afirma que la multidisciplinaridad es una de las claves para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado, al igual que Jiménez et al., (2022) valora positivamente las unidades integradas STEM (en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) por su viabilidad y pertinencia. Otra alternativa didáctica y retadora son los juegos (Rockwell & Rebolledo, 2016), potenciando la interacción y conocimientos entre individuos de diferentes edades, fundamental para el aprendizaje (Hargreaves 2001; Abós 2015; Colbert & Arboleda 2016, Jung & Schutte 2018).

Para describir la capacidad que tienen los estudiantes interactuando en la resolución de problemas, se toman algunos indicadores de los componentes commognitivos (Sfard, 2020). Dentro de los indicadores tenemos el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina (Zayyadi et al., 2019), basado en una investigación cualitativa con enfoque descriptivo.

La actividad se basa en seis problemas retadores y dos juegos, un juego de cartas con temas específicos de la propuesta general y el otro adaptado del juego “Toma dos”, llamado “Déjalo sin estrellas”: los estudiantes deben encontrar la estrategia ganadora. Este ejercicio incentiva el pensamiento matemático (Stacey, Burton & Mason, 1982), en el cual, por medio de preguntas orientadoras, se lleva al estudiante del proceso de particularización (identificando aspectos en común de casos particulares), hasta encontrar el camino de la generalización.

Para Mason (1989) generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); donde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema. Algunos educadores matemáticos reconocidos como Polya (1965), Dreyfus (1991) y Radford (2006), entre otros, ven la importancia de la generalización como proceso fundamental para construir matemáticas.

Metodología

La investigación asume un paradigma de investigación cualitativo, ya que se caracteriza por tener un proceso de indagación flexible, basándose en lo lógico y en lo inductivo. En este sentido se estructura bajo el diseño de investigación acción, transformando y enriqueciendo el quehacer del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula multigrado. La muestra es seleccionada por conveniencia de los investigadores. Está conformada por 10 estudiantes de aula multigrado que cursan de 3° a 5° de primaria, en la Institución Educativa San Gerardo, sede el Batán (Garzón-Huila).

El estudio tiene como propósito favorecer la resolución de problemas retadores para motivar al estudiante hacia el aprendizaje de las matemáticas por medio de la interdisciplinariedad, tomando como propuesta general los oficios (particularmente el oficio de ser astronauta). El trabajo en el aula, se concreta por medio de una secuencia didáctica con actividades diferenciadas (misma estructura, pero con diferentes niveles de dificultad). Dentro de la dinámica del aula se desarrolla una agrupación flexible (trabajo individual, por curso y con integrantes de cada grado). Fortaleciendo valores sociales como el cooperativismo, la sana convivencia y la colaboración mediante la interacción lúdica, la teoría de grafos y otras aplicaciones.

En el organizador gráfico se muestran las relaciones con otras asignaturas, mostrando la interdisciplinariedad y articulación con otras áreas (ver *Figura 1*).

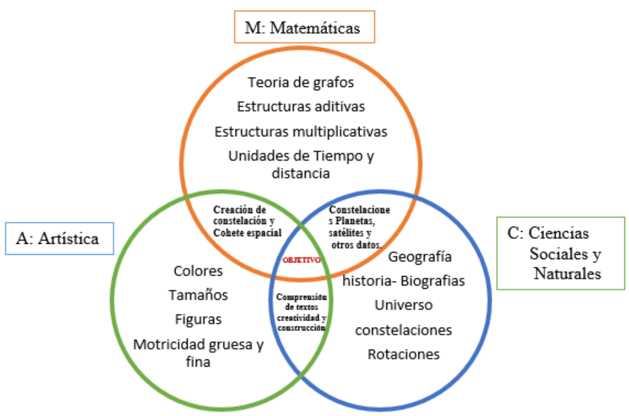


Figura 1. Organizador gráfico de la actividad “Ser Astronauta”.

Podemos observar que las asignaturas que acompañan la secuencia son: Matemáticas (conjunto M), Ciencias Naturales y Sociales (conjunto C) y Artística (conjunto A). Cada uno de ellos lleva en su interior las temáticas a trabajar según el área y en sus intersecciones el producto o evidencia articulada con las otras asignaturas. Por ejemplo:

$M \cap A \cap C=$ {objetivo de la secuencia didáctica}

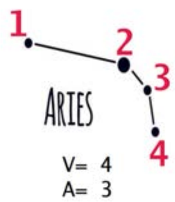
$M \cap A =$ {Creación de constelaciones y cohete espacial}

$A \cap C=$ {Comprensión de textos, creatividad y construcción}

$M \cap C=$ {Constelaciones Planetas, satélites y otros datos}

El proceso en el aula se lleva a cabo en cuatro etapas: conocimientos previos, retos del oficio - cuento pedagógico, extrapolación - actividades libres y análisis de datos. En la *primera etapa*, se realizan algunas preguntas orientadoras (después de la investigación previa por parte de los estudiantes) referentes al oficio de ser astronauta, su diario vivir, fortalezas, dificultades, la NASA, el universo, las constelaciones, representantes masculinos y femeninos del oficio, entre otros.

En la *segunda etapa,* se ofrece información sobre historia, geografía y compartiendo algunos videos sobre la vida de los astronautas, el universo y las constelaciones. Cada constelación la relacionamos como un grafo, en donde las estrellas son los vértices y las conexiones imaginarias son las aristas y la matriz de adyacencia, llamada por los estudiantes, arreglo de vecinos (ver *Figura 2*).



ARREGLO DE VECINOS

ESTRELLA	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0

Figura 2. Relación de la constelación con la teoría de grafos.

En la *tercera etapa,* se realiza la asociación de las constelaciones con la teoría de grafos, se construye la temática, buscando tener un conocimiento, lenguaje técnico y algunas definiciones.

La actividad se evalúa por medio de 6 retos.

- RETO 1: Arreglo de vecinos
- RETO 2: Constelaciones camino Euleriano
- RETO 3: Constelaciones Ciclo Euleriano
- RETO 4: Constelaciones árbol o ciclo
- RETO 5: Constelaciones zodiacales
- RETO 6: Creando constelaciones

Terminado cada reto, el ejercicio es intercambiado con otro compañero para ser revisado, evaluado, retroalimentado por el par y con la supervisión del docente. Cada estudiante, recibe la nota cualitativa de la actividad, un rectángulo de color que contienen el nombre de cada estudiante, reto y el grado (ver *Figura 3*) y una rúbrica. Estos rectángulos serán ubicados en las caritas de colores (rojo, amarillo, verde) que indican los niveles de comprensión (ver *Figura 4*).

Figura 3. Fichas rectangulares de los retos.

En la aplicación de actividades, se proponen dos juegos: "Súper mundos-Constelaciones", y "Déjalo sin estrellas (juego adaptado de "Toma dos)". Para el segundo juego, los estudiantes deben encontrar la estrategia ganadora siguiendo seis preguntas retadoras. Tomando algunos indicadores de los componentes commognitivos como el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina (Zayyadi et al., 2019). Estos indicadores se implementan en el juego "Déjalo sin estrellas".

En la *cuarta etapa* se llevó a cabo el análisis de la recolección de datos por medio de la evaluación formativa (ver *Figura 2, Figura 3 y Figura 4*) y con la entrega de un instrumento para los juegos. Para el proceso de evaluación de los seis primeros retos, se obtuvieron los siguientes resultados:

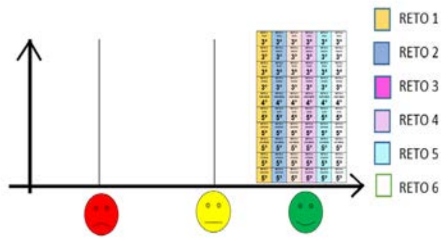


Figura 4. Semáforo del Aprendizaje – Retos por cada estudiante.

Además, dentro de la recolección de datos se llevan registros de campo, grabaciones, rúbrica para cada problema retador y algunas entrevistas.

Resultados

Los resultados obtenidos en la recolección de datos, muestran un proceso muy asertivo y positivo de los retos. Los estudiantes pueden evidenciar que, en las actividades evaluadas, el 100% de ellos entendió muy bien el tema y lo pueden analizar en el diagrama de barras apilado (ver *Figura 4*) y en algunos retos evaluados en sus guías (ver *Figura 5*). Fortaleciendo la lectura e interpretación del análisis de gráficos estadísticos. En cuanto, en la autoevaluación los estudiantes responden de manera positiva en la participación a los desarrollos de los retos, el cumplimiento del material solicitado, trabajo en equipo y actitud en clase, evidenciando un umbral alto de motivación frente a las actividades y temática propuesta del oficio de astronauta.

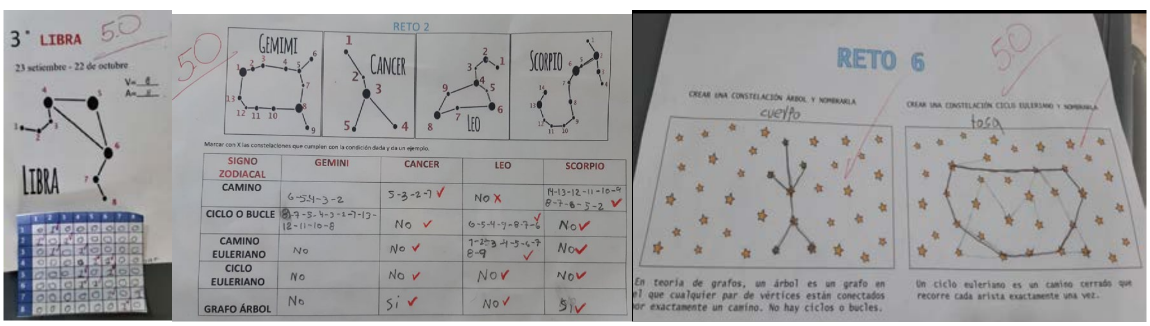


Figura 5. Evidencia fotográfica de problemas retadores sobre MD.

El juego "Déjalo sin estrellas" se analiza teniendo en cuenta los indicadores de los componentes commognitivos como el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina.

Uso de palabras: usando el software Atlas ti, se muestran las coincidencias en las palabras más usadas (ver *Figura 6*).

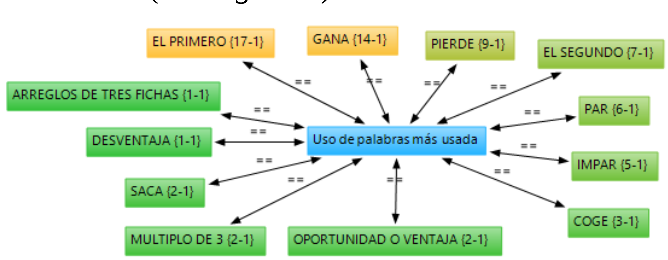


Figura. 6. Uso de palabras más usadas en el Déjalo sin estrellas, usando el software Atlas ti.

Los estudiantes escriben y recitan palabras de su lenguaje cotidiano como gana, el primero, el que empiece o inicia, el segundo, múltiplo de 3, pierde, par, impar, coge, oportunidad o ventaja, saca, desventaja y arreglos de tres fichas, entre otras. No incluyen términos algebraicos, ecuaciones y otros términos utilizados para resolver problemas matemáticos.

En relación, con el *mediador visual* los estudiantes utilizan el material concreto (fichas) y a medida que avanza el juego logran organizarlas para que sea más fácil visualizar las que quedan en la pila. Pero en cuanto, a la parte escrita no utilizan ningún objeto como gráficos, imágenes, diagramas, etc. Solo un estudiante logró ver la importancia de colocar las fichas en arreglos de 3.

Con respecto a la *narrativa l*os hechos matemáticos se evidencian mediante conjeturas dando un orden a las ideas para llegar a la respuesta parcial del PR6. Acerca de la *rutina* los estudiantes explican por medio de ideas sueltas algunas conjeturas y solo 2 de ellos muestran una respuesta generalizada que se acerca a la correcta. Para terminar la actividad y conseguir la estrategia ganadora, se construyó la siguiente tabla, con la participación de todos y a manera de discusión (ver *Tabla I*).

Primer Jugador - A
Segundo jugador – B

Tabla 1
Estrategia ganadora para cualquier número de fichas

Jugador	Número no múltiplo de 3	Múltiplo de 3
A	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.
B	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.

El trabajo organizado en secuencias didácticas enfocado a los oficios, despierta gran interés y curiosidad en los estudiantes. El aula multigrado es un excelente espacio para generar aprendizaje de forma integral. Por medio de la aplicación de la Matemática Discreta y juegos estratégicos, evidenciamos que los estudiantes mejoran su razonamiento en la resolución de problemas.

Generalmente en la institución educativa, no se plantea un trabajo de algebra temprana y esta es la primera vez que lo estudiantes se enfrentan a un problema retador de generalización.

Aunque el ejercicio en la parte escrita se aproximó a algunas ideas en el proceso de generalización, la respuesta es parcial a lo esperado. Los estudiantes lograron construir algunos conceptos de la teoría de grafos como: caminos y ciclos eulerianos, vértice, aristas, la matriz de adyacencia.

Conclusiones

El diseño de la clase de matemáticas basado en la resolución de problemas, fortalece la interacción (Belleza & Feliciano, 2018; Block et al., 2019; Lissabet, 2019; Proenza & Romero, 2020), lo cual se manifiesta en este estudio en el aula multigrado y se potencia con la aceleración del aprendizaje. El trabajo con problemas retadores en el aula multigrado permitió constatar el interés de los estudiantes por aprender matemáticas, por participar y colaborar en la construcción de las actividades, lo cual constituye un impacto positivo para vida de los estudiantes (Ripamonti, 2017; Jung & Schütte, 2018; Schoenfeld, 2016; Thephavongsa, 2018; Naparan & Alinsug, 2021; Parra & Rojas, 2022).

Articular diferentes asignaturas en base a una propuesta general con actividades diferenciadas aumenta la motivación para aprender matemáticas (Vithanapathirana, 2006; Juárez 2012; Le, 2018; Rockwell & Rebolledo; Block et al., 2019).

Resulta apropiado asumir desde la teoría de la EMR, los indicadores de los componentes commognitivos propuestos por Sfard (2020) y el pensamiento matemático de Stacey, Burton & Mason (1982), como sustento teórico de esta actividad, para complementar el objetivo en la investigación. La integración de estas teorías constituye la lupa desde la cual se hace la interpretación de los datos y el análisis de los resultados.

Las secuencias didácticas enfocada a los oficios, despierta gran interés y curiosidad en los estudiantes, propiciando un excelente espacio para generar aprendizaje de forma flexible e integrada. Las diferentes estrategias implementadas y el juego, conforman una metodología apropiada para la clase de matemáticas, que permiten tener estudiantes interesados, motivados y competentes hacia el aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado, logrando la construcción de conceptos sobre la teoría de grafos que los permite visualizarlo dentro de un oficio.

Se recomienda el trabajo de las secuencias didácticas planteando una propuesta general interdisciplinaria con actividades diferenciadas, incentivando el proceso de evaluación formativa, ya que facilita manejar varios grados simultáneamente y esto a su vez potencia la interacción, el trabajo en equipo, la autoevaluación y la aceleración de los aprendizajes.

Gestionar espacios en los centros educativos multigrado para que fortalezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la MD, teniendo en cuenta el juego como estrategia de aprendizaje en aulas multigrado (Vithanapathirana, 2006; Juárez, 2012; Rockwell & Rebolledo 2016; Block et al., 2019; Little, 2006; Jiménez & Espinoza, 2019; Ábos & Boix, 2017; Ripamonti, 2017), implementado para facilitar el trabajo en equipo, la participación, el diálogo e la aceleración del aprendizaje, motivando a los niños más pequeños a enfrentarse con ideas y opiniones de niños de grados superiores. Los juegos estratégicos son una herramienta apropiada para preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico.

Referencias y bibliografía

Abós, P. (2015). El Modelo de Escuela Rural ¿Es un Modelo Transferible a Otro Tipo de Escuela?. *Educação & Realidade*, 40(3), 667-684. Epub May 11, 2015.

Abós, P., & Boix, R. (2017). Evaluación de los aprendizajes en escuelas rurales multigrado. *Aula abierta, 45*, pp. 41-48. https://doi.org/10.17811/rifie.45.1.2017.41-48

Belleza, J. A., & Feliciano, E. L. (2018). Multi-Grade Intermediate Mathematics Teaching Schemes: The Case of Education in the District of Tublay, Benguet. *Mountain Journal of Science and Interdisciplinary Research (formerly Benguet State University Research Journal), 78*(2), 115-136.

Block, D., Ramírez, M., & Reséndiz, L. (2019). ¿Cuánto pesa?, ¿Cuánto mide? Una experiencia didáctica en una escuela primaria unitaria. *Revista mexicana de investigación educativa, 24*(81), 537-564.

Castro, O. L. R. (2022). Multidisciplinariedad, clave de enseñanza del pensamiento espacial en las escuelas rurales multigrado. In *Repensar el currículum de Ciencias Sociales: prácticas educativas para una ciudadanía crítica* (pp. 621-630). Tirant Humanidades.

Colbert, V., & Arboleda, J. (2016). Bringing a student-centered participatory pedagogy to scale in Colombia. *Journal of Educational Change*, 17(4), 385-410.

Dreyfus, T. (1991, June). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In Proc. *15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48).

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Hargreaves, L. (2001). Assessment for learning in the multigrade classroom. *International Journal of Educational Development*, Volume 21, Issue 6,Pages 553-560,ISSN 0738-0593. https://doi.org/10.1016/S0738-0593(01)00015-3

Heuvel, M. (2020). *International reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Visions on and experiences with Realistic Mathematics Education* (p. 366). Springer Nature.

Jiménez-Villarroel, R., Medina-Paredes, J., Castro-Inostroza, A., Chávez-Herting, D., & Castrelo-Silva, N. (2022). Assessment of Multigrade Teachers on a Framework that Guides the Design of Integrated STEM Units. *Revista científica*, (45), 328-344.

Juárez, D. B. (2012). Educación rural en Finlandia: experiencias para México. *Revista CPU-e, (15),* 140-154.

Jung, J., & Schütte, M. (2018). *An interactionist perspective on mathematics learning: conditions of learning opportunities in mixed-ability groups within linguistic negotiation processes*. Springer, 1-11. doi:https://doi.org/10.1007/s1185 8-018-0999-0)

Le, H. M. (2018). The reproduction of 'best practice': Following Escuela Nueva to the Philippines and Vietnam. *International Journal of Educational Development, 62*, 9-16. https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2018.02.005

Lissabet, J. L. R. (2019). Diagnóstico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en la escuela primaria multigrado cubana (Original). Roca. *Revista científico-educacional de la provincia Granma, 15*(2), 65-79.

Little, A. W. (2006). *Education for all: Multigrade realities and histories. In Education for All and Multigrade Teaching* (pp. 1-26). Springer, Dordrecht.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the learning of mathematics, 9*(2), 2-8.

Naparan, G. B., & Alinsug, V. G. (2021). Classroom strategies of multigrade teachers. *Social Sciences & Humanities Open, 3*(1), 100109.

Parra, M. E., & Rojas, O. J. (2022). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado de primaria: Una caracterización. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(3), e202208-e202208.

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

Proenza, Y. C., Romero, R. H. R., & Marrero, H. (2020). Calidad de la educación: reflexiones acerca de las áreas de contenido, dominios cognitivos y nivel de desempeño del aprendizaje de la Matemática. *Opuntia Brava*, *12*(2), 272-283.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. *28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1–21(March 1987), 2–21

Ripamonti, C. (2017). *Orientaciones pedagógicas para el aula multigrado. Matemática*. Ministerio de Educación, Chile. ISBN 978-956-292-686-7

Rockwell, E. & Rebolledo, V. (2016). *Yoltocah Estrategias didácticas multigrado.* México.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38.

Sfard, A. (2020). Commognition. In: Lerman, S. (eds), *Encyclopedia of mathematics education*, 95-101. Springer

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically.* Addison-Wesley.

Tamayo, L. D. P., Lago, I. B., Hernández, W. G., & Abreu, D. R. (2021). Tendencias actuales del desarrollo del pensamiento computacional desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Discreta. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas.*

Thephavongsa, S. (2018). Enhancing the teaching skills of the multi-grade teachers through lesson study. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 17*(4).

Vithanapathirana, M. (2006) Adapting the primary mathematics curriculum to the multigrade classroom in rural Sri Lanka. In: LITTLE A.W. (eds) *Education For All And Multigrade Teaching*. Springer, Dordrecht.

Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, S., Hidayanto, E., & Sulandra, I. M. (2019). A commognitive framework: The process of solving mathematical problems of middle school students. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 18*(2), 89-102.

XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Matemática Recreativa
Ferramenta potencializadora para o Ensino-Aprendizagem da Matemática

Breno Oliveira **Souza**
Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
brenooliveir55@gmail.com
Ana Vitória de Freitas **Domingos**
Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais
Brasil
anavitoriafdomingos@gmail.com

Resumo

A Matemática Recreativa foi um recurso pedagógico elaborado pela necessidade da melhoria do ensino da matemática, que busca, além de fornecer novas metodologias de ensino, materiais para uso em sala de aula. O Museu da Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais atua com o objetivo de contribuir para a formação de professores, bem como, promover e divulgar a Matemática Recreativa, por meio de visitas guiadas ao espaço do museu e em escolas e cidades do Estado de Minas Gerais, Brasil. Portanto, no presente trabalho serão abordadas a historicidade da Matemática Recreativa em conjunto com a sua aplicabilidade, referente às atividades desenvolvidas pelo Museu da Matemática, para demonstrar a importância desse recurso pedagógico no ensino-aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: *Matemática Recreativa; Ensino de matemática; jogos matemáticos*

Introdução

A matemática possui duas perspectivas dialógicas, a primeira é resultado da realidade em que se encontram os discentes, onde passam a considerar essa disciplina, em algum momento de sua vida escolar, como uma matéria difícil e sem aplicabilidade prática. Tais conclusões se mostram representadas em questionamentos feitos por alunos, tais como: “Para que eu vou precisar disso?" e "Eu vou usar isso onde?". A outra faceta surge da justificativa escolhida pelos professores para responder essas dúvidas, uma vez que sua formação acadêmica os leva a fazer uso do argumento de que a matemática está em tudo, contudo, utilizar desse estilo de argumentação perpetua a matemática como uma disciplina tecnicista e mecanizada.

> O tecnicismo mecanicista procura reduzir a matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. Na verdade, esse tecnicismo mecanicista procurará enfatizar ou fazer em detrimento de outros aspectos importantes como o compreender, o refletir, o analisar e o justificar/provar (Fiorentini, 1994).

Os desafios de construir um ensino da matemática que valorize além das habilidades acadêmicas, mas também as habilidades sociais, como trabalho em grupo e liderança, requerem do professor mais do que a sua formação curricular obrigatória, sendo necessária uma formação pedagógica que o auxilie para fomentar reflexões sobre os conhecimentos dos alunos trazidos para a sala de aula, respeitando o processo de aprendizagem de cada aluno. E corroborando com isso, Machado (1990) afirma que os problemas que dificultam a aprendizagem da matemática se relacionam mais com a abordagem pedagógica do que com as características da própria matemática.

Durante meados do século XIX e início do século XX surge a necessidade de buscar um ensino matemático de qualidade a fim de transformar e reinventar as metodologias de ensino tradicionais predominantes, como discutidas anteriormente. Nesse sentido, surge a Matemática Recreativa, em conjunto aos outros recursos didáticos como a Modelagem Matemática e a Etnomatemática. Bártlová (2016) afirma que a melhor definição da chamada Recreational Mathematics[1] é dada por Martin Gardner, que diz que é qualquer parte da matemática com um espírito de jogo. Apesar de concordar com as noções de definições de Martin, Bártlová destaca o ponto da subjetividade existente nesse conceito, uma vez que para alguns, uma atividade divertida pode ser representada por um jogo de xadrez ou por um cubo mágico. Para outros, matemáticos, por exemplo, é representado pelos seus objetos de estudos, como teorias algébricas e topológicas.

A Matemática Recreativa representa infinitas possibilidades para os professores de qualquer disciplina, em específico para professores que lecionam matemática em grau de escolaridade, pois desenvolve habilidades fundamentais para matemática. Smole (2007) assegura que:

> (...) ao jogar os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada, refletir e analisar as regras, e estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos de aprendizagem (...)

O museu da Matemática UFMG é um espaço que busca além de tudo propagar o conhecimento matemático utilizando recursos oferecidos pela Matemática Recreativa, a fim de despertar a curiosidade científica por meio de visitas guiadas de estudantes, principalmente do Ensino Básico (4 a 17 anos). Além de ser um espaço de divertimento científico, o Museu também atua como centro de apoio para a Formação Inicial e Continuada de professores, difundindo assim a Matemática Recreativa como recurso didático.

---

[1] Mathematics Recreational é o termo em inglês para Matemática Recreativa

Neste trabalho iremos discutir e apresentar uma perspectiva histórica e científica da Matemática Recreativa, assim como uma visão prática de sua utilização que ocorre pela nossa atuação no Museu, que proporciona realizar o contato entre os estudantes e a matemática, com o suporte do acervo do museu.

Matemática Recreativa

O termo Matemática Recreativa é de difícil definição, pois se relaciona com o sentimento de subjetividade que cada um possui em relação à matemática. Nesse sentido, Bártlová (2016) destaca 4 aspectos de classificação das atividades referentes a esse recurso didático: o científico-popular, o entretenimento, o pedagógico e o histórico.

O aspecto científico-popular faz com que a Matemática Recreativa cumpra seu objetivo de ser divertida e promover a popularização e divulgação da matemática. Vale ressaltar que muita parte da combinatória surgiu como resultado desse aspecto, pois é com base nele que problemas como a Torre de Hanói se tornaram públicos.

O entretenimento possibilita que a Matemática Recreativa seja um caminho para a diversão. Esse aspecto divide as atividades recreativas em três partes: jogos matemáticos, quebra-cabeças e problemas matemáticos, onde são necessários que as regras, estratégias e resultados tenham um embasamento matemático.

O aspecto histórico da Matemática Recreativa sempre desempenhou um papel importante na história da matemática, sendo responsável pela criação de inúmeras teorias matemáticas.

O aspecto mais importante, segundo Bártlová, é o aspecto pedagógico, ou seja, a possibilidade de utilizar a Matemática Recreativa em sala de aula como recurso didático em busca da consolidação de um conteúdo.

Vale ressaltar que a memorização de fórmulas por parte dos estudantes os leva a criarem um sentimento de aversão à disciplina, e nesse sentido, os professores podem incluir os recursos disponíveis pela Matemática Recreativa em suas práticas de ensino, de maneira a estimuladas discussões em grupos, a coletividade, a liderança, entre outras habilidades sociais importantes para o ser humano.

De uma perspectiva mundial, Martin Gardner é considerado um dos maiores divulgadores da Matemática Recreativa, pois realizou infinitas contribuições para a sua divulgação e popularização.

> Ele (Martin Gardner) apresentou durante 25 anos, na coluna Recreational Mathematics da revista Scientific American, artigos que continham diversões matemáticas, truques de mágica e desafios que inspira(ram) seus leitores. Além disso, escreveu diversos livros como Mathematical Puzzles and Diversions, My Best Mathematical and Logic Puzzles e Mathematics, Magic and Mystery, em que são apresentados problemas atraentes e variados, deixando assim um legado de passatempos fascinantes para matemáticos e para o público geral (Vergara, 2020).

No Brasil, destaca-se o educador e escritor Júlio César de Mello e Souza, sob o pseudônimo de Malba Tahan, que escreveu diversas obras que buscavam a divulgação e popularização da matemática, dentre as quais, algumas são referentes à Matemática Recreativa, como “Matemática Divertida e Curiosa” e “O Homem que Calculava”.

Museu Da Matemática

O ensino da matemática é, frequentemente, visto sob uma perspectiva mecanicista e formal, na qual valida a existência de uma única forma de se fazer e aprender a matemática, isso é resultado das diversas aplicações mecanicistas na educação, em específico no ensino da Matemática. Opostas a essa perspectiva, existem experiências particulares que abordam essa área do conhecimento de forma alternativa e intuitiva, assim como o Museu da Matemática que, além disso, garante aos participantes do projeto uma experiência enriquecedora ao influenciar no despertar de vocações científicas.

A Matemática Recreativa fornece ferramentas para a construção do conhecimento matemático a partir de quebra-cabeças geométricos, jogos de tabuleiro, enigmas aritméticos, dobraduras de papéis, jogos de estratégia, apresentação de fórmulas e teoremas a partir de objetos concretos. Segundo Rino (2004) e Alsina (2004), todos esses artifícios podem ser usados em sala de aula para a promoção de habilidades sociais, estimular a discussão matemática, aprender conceitos e reforçar o raciocínio lógico. A utilização de jogos aumenta a capacidade de resolução de problemas, a motivação e o interesse pelas aulas, além de impactar positivamente na aprendizagem e promover a socialização dos alunos.

> Os jogos matemáticos desenvolvem o raciocínio lógico das crianças e suas habilidades; levam-nas a conceberem a matemática como uma disciplina prazerosa e proporcionam a criação de vínculos positivos na relação professor-aluno e aluno-aluno. Com os jogos matemáticos, os alunos podem encontrar equilíbrio entre o real e o imaginário e ampliarem seus conhecimentos e o raciocínio lógico-matemático. (Marques, Perin & Santos, 2013)

O Museu da Matemática UFMG é um espaço que objetiva envolver e despertar a curiosidade dos visitantes mediante o desenvolvimento de atividades lúdicas. Além disso, o Museu é um centro de apoio para professores, tendo como objetivos difundir a Matemática Recreativa como prática pedagógica, contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e promover a capacitação continuada de professores. A atuação no Museu é proporcionada através do contato dos estudantes da Educação Básica com o acervo do Museu, a partir de visitas ao seu espaço, itinerâncias a diversos municípios do Estado de Minas Gerais (Brasil) e também com a participação em eventos como o Domingo no Campus da UFMG.

A graduação é reflexo de um ensino padronizado, que apesar de apresentar uma visão crítica em relação às abordagens tradicionais de ensino, não fornece recursos suficientes para que os futuros professores adotem práticas inovadoras em sala de aula. Nesse contexto, o Museu da Matemática apresenta aos graduandos e professores que participam de suas atividades uma rica fonte de instrumentos que podem ser utilizados a fim de promover uma aprendizagem mais significativa para seus discentes.

As atividades lúdicas desenvolvidas no Museu incentivam o uso de procedimentos lógicos, um exemplo disso é a Cúpula de Leonardo da Vinci.

> A construção das cúpulas de Leonardo tem um grande valor didático, pois envolve raciocínio lógico, análise de padrões geométricos, noção espacial, capacidades manuais, trabalho em equipe, além dos componentes históricos e artísticos inerentes à atividade. Além de ser uma atividade bem divertida para os visitantes do Museu. (Vergara, 2021)

Figura 1. Montagem da Cúpula de Leonardo da Vinci com estudantes durante uma visita guiada ao Museu da Matemática.

Os jogos utilizados no Museu fomentam o desenvolvimento de outras habilidades socioemocionais. Assim como disse o Vygotsky (1984), "... é através do jogo que a criança aprende a agir, tem a curiosidade estimulada, adquire iniciativa e autoconfiança, além de proporcionar o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração". A construção da cúpula também exemplifica perfeitamente esse aspecto, pois se faz necessário o trabalho em equipe para que toda as partes da cúpula sejam igualmente tensionadas, proporcionando uma estabilidade maior para este objeto.

Considerações Finais

O ensino da matemática atual tem se mostrado cada vez mais rígido em manter a metodologia tradicional de ensino que, como discutido anteriormente, representa para os estudantes uma defasagem matemática, uma vez que esse método de ensino, busca de forma incisiva argumentar os processos matemáticos de forma mecânica e exaustiva. Dessa forma, o que se faz necessário, é a busca pela inovação metodológica em relação a essa disciplina, assim como os recursos ofertados pela Matemática Recreativa.

A Matemática Recreativa, juntamente, com a Etnomatemática, apresenta diversas possibilidades para uma abordagem inovadora da matemática em sala de aula, por parte do professor. Nessa mesma perspectiva, o Museu da Matemática utiliza da Matemática Recreativa, como jogos matemáticos e quebra-cabeças, para fornecer ao professor e aos estudantes um espaço de transmissão de conhecimento. Diante disso, pode-se perceber que o Museu aproxima a ciência de diferentes públicos, por meio de atividades desenvolvidas com o acervo do museu, a fim de favorecer a aprendizagem e criando vocações científicas, além de atuar como um espaço apoio à Formação Inicial e Continuada de professores que buscam conhecer novas práticas pedagógicas.

Consideramos, portanto, que as atividades lúdicas do Museu contribuem para a difusão e democratização do conhecimento matemático, e atuam de forma a fomentar uma articulação entre estudantes e professores de matemática da Escola Básica. Além disso, o Museu representa um espaço de diálogo, construção de conhecimento e de reflexão do ensino e aprendizagem da Matemática, a fim de ampliar as possibilidades para nossa prática nas escolas, sendo assim, são criadas condições favoráveis para uma mudança positiva de comportamento em relação à Matemática por parte dos estudantes.

Referências

Alsina, A. (2004). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos.* Porto: Porto Editora.

Bártlová, T. (2016). History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics.

Broetto, G. C., Santos-Wagner, V. M. P. (2019). O ensino de números irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? *Bolema, 33*, 728-74. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14

Fiorentini, D. (1994). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Revista Zetetiké.*

Machado, N. J. (1990). Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. *São Paulo: Cortez.*

Marques, M.C. P., Perin, C.L. & Santos, E. (2013). Contribuição dos jogos matemáticos na aprendizagem dos alunos da 2ª fase do 1º ciclo da Escola Estadual 19 de maio de Alta Floresta-MT. *Revista Eletrônica Multidisciplinar da Faculdade de Alta Floresta. http://faflor.com.br/revistas/refaf/index.php/refaf/article/view/92/html#:~:text=Os%20jogos%20matem%C3%A1ticos%20desenvolvem%20o,%2Daluno%20e%20aluno%2Daluno*.

Marques, M.C. P., Perin, C.L., Santos, E. & Rino, J. (2004). O Jogo, Interacções e Matemática. *Lisboa: Associação de Professores de Matemática.*

Smole, K. S. (2007). Jogos de Matemática de 1° a 5° ano/ Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz, Patrícia Cândido. *Porto Alegre: Artmed*.

Vergara, C.R.G. (2021). Museu Da Matemática UFMG: Uma Experiência de Diversão e Conhecimento. *Anais do VI Fórum de Museus Universitários Patrimônio Museológico Brasileiro: Experiências e Olhares Diversos. 2.*

Vygotsky, L.S. Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. *São Paulo: Martins.*

Matemática y Arte teniendo como contexto la función trigonométrica coseno

Teodora Pinheiro **Figueroa**
Universidade Tecnológica Federal de Paraná
Brasil
teodorapinheiro@utfpr.edu.br
Maritza **Luna** Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
luna.m@pucp.edu.pe

Resumen

Este taller tiene por objetivo presentar una propuesta para la enseñanza de la función trigonométrica coseno, con el trasfondo del dibujo como expresión del arte combinado con una Actividad del Proceso de Creación del Alumno (APCA) y GeoGebra. Esta propuesta se inserta en el contexto de la interdisciplinariedad y, en la perspectiva de la enseñanza de las Matemáticas de forma lúdica y constructivista. El desarrollo de las Situaciones Didácticas (SD) se basa en la Teoría de las Situaciones Didácticas, planificadas de la siguiente manera: SD1) Discusión sobre el concepto de arte; SD2) Proceso de creación del alumno a partir del diseño de la gráfica de la función coseno, desarrollo de la obra de arte. SD3) Identificación del significado de los parámetros A, B, C y D en $f(x)=A+B\cos(Cx+D)$, SD4) Proceso de relectura de la creación, discusión y análisis de la propuesta por parte de los participantes.

Palabras clave: Funciones Trigonométricas, Función coseno, Actividad del Proceso de Creación del Alumno, Teoría de Situaciones Didácticas, GeoGebra.

Introducción

La temática de este taller se refiere a los resultados de investigaciones sobre el estudio de funciones trigonométricas, tales como, (Brito y Morey, 2004; Pinheiro, 2008; Vazquez, 2010; Ross, et al, 2011; Pedroso, 2012; Corradi, 2013; Feijó, 2018), quienes informan sobre las dificultades de los estudiantes y una serie de obstáculos que impiden aprender de manera efectiva, tales como: cálculos excesivos y falta de sentido; las dificultades de los estudiantes para formular y transponer expresiones algebraicas, y para aprender trigonometría de manera significativa, es necesario cambiar entre representaciones abstractas, visuales y concretas de objetos matemáticos; dificultades en relación con la característica y comportamiento de las funciones trigonométricas; falta de dinamismo e interactividad de los estudiantes con el objeto matemático; y la insuficiente formación del profesorado, principalmente desde el punto de vista didáctico, actuando únicamente como transmisor de conocimientos.

Ante este escenario, este taller es un extracto de un estudio e investigación sobre la posibilidad de establecer conexiones entre la trigonometría y el arte, a partir de una Actividad del Proceso de Creación del Alumno (APCA) que involucra el dibujo a mano alzada como expresión del arte y la función coseno.

A continuación, presentamos un relato de la conexión entre las Matemáticas y el Arte.

Matemática y Arte

Cuando estudiamos la historia de la humanidad, observamos que la evolución del hombre se dio a partir de un proceso de descubrimiento y creación basado en la libertad de expresión. Las primeras incursiones en huesos, y luego en arcillas y papiros, revelan la necesidad de un registro sobre el ordenamiento de cosas u objetos, que pueden ser considerados como expresiones en forma de arte. La escritura cuneiforme es una forma de arte y los registros en cuevas se llaman arte rupestre.

Las matemáticas y el arte están interconectados en las expresiones de muchos artistas. La perspectiva, la proporción y la simetría, por ejemplo, son esenciales en las artes visuales. La creatividad y la universalidad son atributos con los que nos referimos al arte y las matemáticas, así como a la belleza y el rigor.

El arte es abstracto, como las matemáticas. Pero el arte es admirado incluso por aquellos que no entienden de arte, y ese no es el caso de las Matemáticas. La investigación informa que la mayoría de los estudiantes temen las matemáticas escolares. Kunwar (2020), en su investigación, comenta la fobia a las matemáticas, relacionada con la creencia de que las matemáticas son una materia difícil. Según Humphrey y Hourcade (2010) muchos adultos, incluso, tienen fobia a las matemáticas y esto se debe a sus primeras experiencias escolares.

Ante este hecho, este taller busca desmitificar esta creencia de que las matemáticas son difíciles mediante la planificación de situaciones didácticas que presenten conexiones entre las Matemáticas y el Arte en APCA a la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986, apud Almouloud, 2007. p.31), que establece la creación de un modelo de interacción entre el aprendiz, el conocimiento y el milieu (o medio) que proporciona condiciones favorables para que el estudiante aprenda el objeto matemático.

De esta forma, los participantes de este taller podrán experimentar estas situaciones y vislumbrar varias posibilidades de conexiones en sus creaciones de Arte (dibujo a mano alzada), a partir del dibujo de la forma de la función coseno.

Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Según Almouloud (2007, p.32), el objetivo principal de esta teoría no es el sujeto cognitivo, sino la situación didáctica en la que se identifican las interacciones que se establecen entre el docente, el alumno y el saber.

La TSD se basa en tres hipótesis: i) el alumno aprende adaptándose al medio, lo que es un factor de dificultades, contradicciones, desequilibrio (Brousseau, 1986, apud Almouloud, 2007, p.32); ii) el docente es responsable de organizar un milieu capaz de provocar el aprendizaje; iii) el milieu y las situaciones didácticas deben involucrar los saberes matemáticos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Estas interacciones entre el alumno, el conocimiento y el entorno son posibles a partir de situaciones didácticas y/o situaciones didácticas.

Según Brousseau (1978, apud Almouloud, 2007, p.33) la situación didáctica es el conjunto de relaciones que se establecen explícita y/o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos, un cierto milieu y un sistema educativo (el profesor) de manera que estos alumnos adquieren un saber constituido o en constitución.

Según Almouloud (2007, p.33), la situación adidáctica, como parte esencial de la situación didáctica, es una situación en la que la intención de enseñar no se revela al aprendiz, sino que fue imaginada, planificada y construida por el docente para proporcionar, a éste, condiciones favorables para la apropiación de los nuevos saberes que se quiere enseñar.

Para analizar estos tipos de situaciones y las diferentes relaciones entre el saber, el aprendiz y el milieu, se descompone el proceso de aprendizaje en cuatro momentos dominantes, las denominadas dialécticas de la acción, formulación, validación e institucionalización.

La TSD permite planificar las situaciones de este taller, además de permitirnos observar detalles de las interacciones entre alumno, docente y saber.

Metodología

A la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), se realizó la planificación de las Situaciones Didácticas (SD) del taller.

Es importante comentar que a través de esta planificación, la aplicación de la propuesta brindará a los participantes momentos de acción, formulación, validación e institucionalización por parte de los autores de esta propuesta.

La planificación incluye tres reuniones, totalizando cuatro SD:

Encuentro 1: Situación Didáctica 1 (SD1) y Situación Didáctica 2 (SD2)

SD1: Discusión sobre el concepto de arte
Actividad 1: Para usted, ¿qué es el Arte?

Esta situación se caracteriza por la discusión entre los participantes sobre el concepto de arte.

SD2: Proceso de Creación del Alumno a partir de dibujar la gráfica de la función coseno.

Actividad 2: Use su imaginación, sea creativo y produzca su obra de arte en papel cuadriculado (que se entregará a los participantes, con los ejes cartesianos dividiendo el plano cartesiano en cuatro cuadrantes) con referencia a la forma del dibujo presentado (Figura 1),

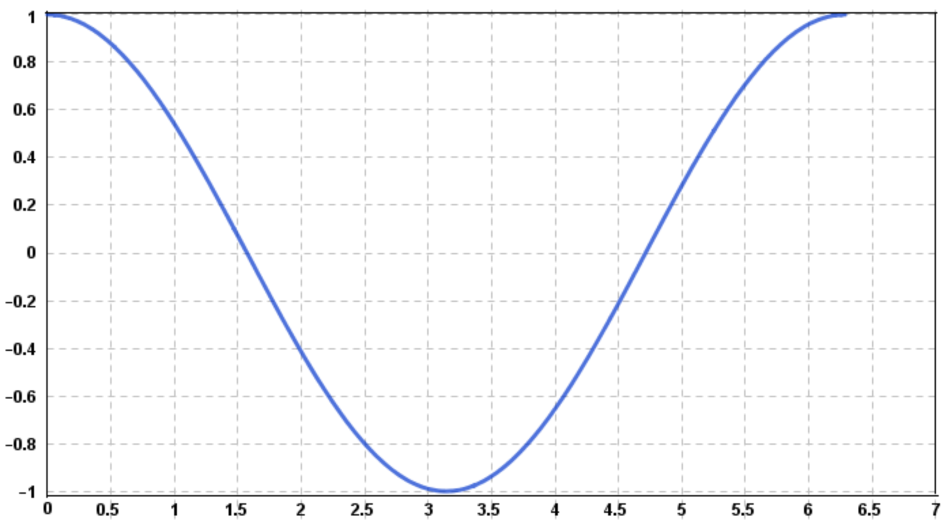


Figura 1. Esboço da forma do gráfico da função cosseno

pudiendo hacer variaciones en la amplitud de la onda, en su longitud y, en su desplazamiento desde el punto de partida, (0,0), en el caso del dibujo presentado, Figura 1, de tal forma que siempre produzcan olas con este formato.

Encuentro 2: Situación Didáctica 3 (SD3)

SD3: Identificación del significado de los parámetros A, B, C y D en la función f(x)= A + B cos (Cx+D).

Actividad 3 (use lápiz y papel y luego el recurso GeoGebra): Sea y(x) = A + B cos (Cx+D).

Primero realiza un bosquejo de la gráfica de y(x) = A + B cos (Cx+D), para A=0, B=1, C=1 y D=0, obteniendo $y_1(x) = \cos(x)$. Usar este gráfico, $y_1(x)$, como referencia para ver qué sucede cuando cambia los valores de A, B, C y D, dibujando en el mismo sistema de ejes cartesianos los gráficos para cada cambio de A, B, C y D.

Realice estas alteraciones dibujando algunos gráficos en lápiz y papel, y luego usando GeoGebra.

Después de este experimento, relata tus observaciones y da significado a cada uno de los parámetros A, B, C y D en la función y(x)= A + B cos (Cx+D).

Encuentro 3: Situación Didáctica 4 (SD4) Proceso de relectura de la creación de los alumnos, a partir de la función coseno; discusión y análisis de la propuesta por parte de los participantes.

Actividad 4: Realizar la relectura de sus creaciones en la Actividad 2 (Reunión 1) a partir de funciones en forma de y(x) = A + B cos(Cx+D), para valores apropiados de A, B, C y D.

A partir de estas situaciones se espera que los participantes reflexionen sobre las posibilidades de conexión entre las Matemáticas y sus procesos de creación artística, es decir, sus dibujos como expresión del arte, y que puedan vivenciar estas situaciones con sus alumnos, para que se apropien del significado de los parámetros A, B, C y D en la ley de formación de la función coseno: $y(x)= A + B \cos (Cx+D)$, a partir de este tipo de conexión.

Consideraciones Finales

Este taller presenta la planificación de situaciones didácticas en la perspectiva de la gráfica de la función coseno, permitiendo a los participantes hacer matemáticas, de tal manera que puedan establecer conexiones entre las Matemáticas y el arte en un APCA.

Además, a partir de las discusiones y análisis de la propuesta, se espera que la misma brinde aportes y reflexiones que impacten tanto en la formación de los estudiantes de las carreras de Matemáticas, como en la formación continua de los docentes de educación básica participantes del taller.

Referencias y bibliografía

Almouloud, S.A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, pp.31.

Brito, A.J.; Morey, B.B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes*, Bragança Paulista, v.22, n.1, p-65-70.

Corradi, D. K. S. (2013). *Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino Média*. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto.

Feijó, R.S.A.A. (2018). *Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometría: um estudo com alunos do ensino médio do distrito federal*. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) – Universidade de Brasília.

Humphrey, H.; Hourcade, J. J. (2010). Special Educators and Mathematics Phobia: An Initial Qualitative Investigation. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, vol.83.

Kunwar, R. (2020). Mathematics phobia: causes, symptoms and ways to overcome. *International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT),* vol.8.

Pedroso, L.W. (2012). *Uma proposta de ensino da trigonometría com uso do software geogebra*, 271 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre –RS.

Pinheiro, E. (2008). *O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico*, 87f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas. Belo Horizonte –MG.

Ross, J.A.; Bruce, C.D.; Sibbald, T.M. (2011). Sequence computer-assisted learning of transformations of trigonometric functions. *Teach. Math. Appl*. 30. P-120-137.

Vazquez, C. M. R. (2010). Trigonometria no Ensino Médio: Construção de alguns conceitos. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, SalvadorDisponível em: http://www.sbem.com.br/ocs/index.php/xenem/xenem/schedConf/presentations

Matemática, comunicación y arte

Michelle Yadira **Castellanos** Reyes
Escuela Nacional Preparatoria No. 1
México
michelle.castellanos@enp.unam.mx
Adriana **Gómez** Reyes
Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Sur
México
orodelsilencio@yahoo.com.mx, adriana.gomez@cch.unam.mx

Resumen

Desarrollar el pensamiento reflexivo no es exclusivo de las ciencias exactas, es en realidad parte natural del ser humano. El objetivo de este taller es que los profesores reconozcan que pueden entrar al mundo de las artes y humanidades y aprovecharlas como herramientas valiosas en la comprensión de los aprendizajes matemáticos, al hacer ver a los estudiantes que tenemos formas de pensar que influyen tanto en la matemática como en el arte. Como parte de la educación formal, es necesaria una evaluación que permita observar en este tipo de actividades el desarrollo del pensamiento reflexivo, tanto como los aprendizajes en matemáticas.

Palabras clave: Educación matemática, Educación preuniversitaria, Evaluación, Pensamiento reflexivo, Infinito, Arte, Comunicación.

Introducción

La misión del bachillerato de la UNAM es dotar a los estudiantes de cultura general, sin embargo, el tercer y último año, en el caso particular de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), los grupos se dividen en cuatro áreas del conocimiento:

1) Ciencias Físico - Matemáticas y de las Ingenierías,
2) Ciencias Biológicas, Químicas y de la Salud,
3) Ciencias Sociales y
4) Humanidades y de las Artes.

Tomando como punto de partida la existencia del área cuatro, donde la mayoría de los estudiantes inscritos han desarrollado habilidades artísticas, en mayor o menor medida, se plantea una estrategia con el objetivo de relacionar la clase de matemática con las artes, como decía Rene Descartes (1996, p. 11) en su texto *El discurso del método*, "…que en las matemáticas hay sutilísimas invenciones que pueden ser de mucho servicio, tanto para satisfacer a los curiosos como para **facilitar las artes todas**…"

El programa de esta área plantea tres unidades: Matemáticas en las artes, Ideas numéricas, y por último Paradojas y acertijos. Dentro de la unidad dos está el contenido *Noción intuitiva de infinito*. Este es el tema que se propone trabajar en el taller dirigido a profesores de nivel preuniversitario que tiene como objetivo analizar la importancia de comprender que los estudiantes exploten sus habilidades artísticas en clase de matemática, para comunicar su interpretación del concepto de infinito.

> El programa de estudios de la ENP del último año (conocido como sexto año) refuerza la manera de planear la clase cuando indica:
> La enseñanza de Matemáticas en el área de Humanidades y Artes constituye un reto, pues aparentemente hay una relación lejana con la Filosofía, la Literatura, la Música, el Teatro o las Artes Visuales. Sin embargo, existe un espacio común de gran relevancia para la formación de los estudiantes: la simbolización, que implica abstracción. En este sentido, el programa de Matemáticas VI área IV recupera dos clases de símbolos: los que permiten representar las ideas numéricas y los que vinculan la geometría con las artes visuales. (ENP, 2008, p. 2).
>
> En particular la unidad 2 tiene como objetivos el alumno:
> - Desarrollará habilidades de abstracción y comunicación oral, escrita y gráfica al contrastar el surgimiento de las ideas numéricas en algunas culturas de la antigüedad, para explicar el contexto histórico y los problemas matemáticos que dieron origen a algunas representaciones simbólicas vigentes en la actualidad.
> - Desarrollará habilidades de razonamiento lógico y comunicación simbólica al trabajar con patrones numéricos y geométricos para acercarse a las ideas intuitivas y numéricas de las matemáticas. (ENP, 2008, p. 5)

Se requiere desarrollar en los estudiantes *el pensamiento reflexivo*, propuesto por John Dewey (1916), más es importante aclarar que como profesores debemos tener claro lo que significa pensar reflexivamente y llevarlo a cabo en la clase. Para evaluar el desarrollo del pensamiento reflexivo debemos nosotros mismos, los profesores, ser reflexivos. Es decir, esperamos que los profesores se abran a la posibilidad de escuchar, leer o mirar las distintas producciones de los estudiantes y consideren la posibilidad de fomentar el pensamiento reflexivo a través de estos medios de comunicación poco usados en el área de matemática (Flores, 2022).

John Dewey (2007) dice que se requiere una orientación educativa para que se adquieran los valores del pensamiento. De acuerdo con esto, hay elementos necesarios para cultivar la reflexión y que podemos usarlos en el salón de clases: *Estado de duda* que debe ser motivado y el *Acto de búsqueda*, sin la duda no hay búsqueda. La curiosidad, las sugerencias y el orden son elementos que podemos trabajar en el aula a través de hábitos.

Ahora bien, no hay un método para llegar a la comprensión de conceptos matemáticos, y una de las actividades como profesores es entender que cada estudiante tiene una forma propia de interpretar contenidos, ya sean lecturas, videos, la propia clase, la explicación del maestro o la intervención de los compañeros. Para ello será necesario observar la forma en que comunican su propia interpretación.

Recordemos que hay distintas formas de observar los aprendizajes de los estudiantes, ya sea escuchándolos, leyéndolos o mirando sus producciones; este trabajo se enfoca en provocar que los estudiantes exploten sus habilidades artísticas para interpretar conceptos matemáticos y comunicarlos. Dichas interpretaciones pueden ser comunicadas a través de: música, composición textual de canciones, versos, cuentos, pinturas, dibujos o esculturas.

Esta estrategia contribuye de manera positiva en el ambiente de aprendizaje, donde se promueve que los estudiantes sientan que el espacio físico (el salón), el espacio abstracto (la reflexión), el espacio emocional (la empatía), les pertenece para el aprovechamiento de los aprendizajes. Deben tener y sentir una zona segura, para aprender, incluso para equivocarse y aprender del error. Permitir que los estudiantes exploren y exploten sus habilidades, jugar con ellas y la matemática permite que se sientan con más confianza y libertad de atreverse a asomarse al mundo de la matemática.

El taller busca que los profesores se atrevan a salir de la zona de confort y se involucren en las interpretaciones de los estudiantes, siempre guiándolos para que no se distraigan de los conceptos matemáticos, y al final puedan evaluar los avances en cuanto al desarrollo del pensamiento reflexivo y la comprensión de conceptos matemáticos.

Marco de referencia

Es importante entender el contexto en que concebimos este taller y su contenido, tanto como los elementos que lo componen por lo que hemos considerado, antes de presentar como se desarrollará, referir lo que entendemos por Pensamiento Reflexivo, el cómo se trabajó en la clase con los estudiantes y reflexionar en torno a la evaluación del aprendizaje; a fin de que se entienda la forma en que se plantea.

Contexto

Las obras de arte con las que trabajaremos fueron desarrolladas por estudiantes del último año de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), plantel 1. Los estudiantes eligen el área de acuerdo con sus intereses personales, así como alguna habilidad en las artes y quizá mucho de ellos llegan incluso huyendo de la matemática, por lo que es necesario una “reconciliación” reflexiva y por qué no relacionarla con el arte.

Esta estrategia se ha trabajado en distintos momentos del programa, se han incluido lecturas para fortalecer el desarrollo del pensamiento reflexivo, además de ayuda para interactuar en el área que les corresponde. En particular tocaremos el tema del infinito, ya que es un concepto muy usado tanto en la cultura científica como en la humanista y artística.

En clase se trabaja primero con el desarrollo del pensamiento reflexivo, con lecturas y actividades de interpretación, como ensayos o expresiones artísticas, en este caso en particular se les pidió un ensayo donde expresaran lo que saben y sienten respecto al infinito. Al darles lectura y compartir en clase sus reflexiones, ellos se sienten incluidos en la construcción de los aprendizajes del grupo, esto les da más confianza para involucrarse en participar al momento de retomar el tema, pero ahora con aplicaciones, paradojas, cuentos, historias, etc., dentro del contexto matemático. Una vez que visualizan las aplicaciones (en particular se hablo de las sumas de Riemann), ellos están más conectados con las otras áreas del conocimiento, la idea es comprender que las áreas no nos separan, sino que nos complementan. Después de esto, se les pidió un trabajo artístico o de las humanidades, donde representen al infinito, que sea una interpretación con el objetivo de divulgación.

Pensamiento reflexivo

De acuerdo con Dewey (2007) en su libro *Cómo pensamos*, lo que se necesita para encaminar a la reflexión es lo que llama: **Estado de duda**, de validación, de perplejidad o de dificultad mental, en la que se origina el pensamiento, seguido del **Acto de indagación**, de caza o de investigación, para encontrar algún material que esclarezca la duda, que disipe la perplejidad.

En este sentido, si lo que deseamos es reforzar que la “duda” no es algo malo, sino al contrario, un elemento necesario para imaginar, para buscar información, para crear argumentos; sin la influencia de creencias externas en la medida de lo posible, para ello es importante no dar de inmediato al estudiante una definición o una solución ante el concepto o situación con el que se quiere trabajar.

Una vez que ya se trabajó de manera autónoma, se comparte y se observa el trabajo de los demás, no con el fin de juzgar sino de mejorar el trabajo propio.

Los hábitos antes mencionados con que trabajan los estudiantes son:

1. Curiosidad, en este sentido es que realmente duden y sientan la curiosidad de poder incluir en su área de trabajo elementos matemáticos.
2. Sugerencias, es el cúmulo de ideas que puedan encontrar en la investigación, ya sea en la red, libros, entrevistas y entre sus pares al trabajar en equipos.
3. Orden, es cuando deben plasmar su trabajo final, con el orden que ellos consideren adecuado para poder comunicarlo al resto del grupo.

Según Dewey (1916), todo pensamiento tiene como resultado un conocimiento, entendemos que se refiere al pensamiento reflexivo, pues en el mismo párrafo dice que “todo conocimiento derivado de la reflexión es retrospectiva.” (p. 178)

La Asociación Filosófica Americana (citada en Facione, 2007) entiende por pensamiento crítico (nosotros lo llamamos reflexivo), al pensamiento auto regulado y con el propósito de dar como resultado interpretar, analizar, evaluar y explicar. Es una herramienta fundamental y poderosa en la vida personal y cívica de cada uno. La persona con este tipo de pensamiento está bien informada, de mente abierta, flexible, justa para evaluar, honesta al confrontar sus sesgos personales, prudente al emitir juicios, dispuesta a reconsiderar o retractarse.

Así al presentar a los estudiantes un concepto abstracto, como el infinito, esperamos que ellos reflexionen sobre él, construyan un conocimiento, así cada uno de ellos lo llevará a su propia interpretación y forma de comunicación, cuando ellos lo comunican con sus propias habilidades artísticas muestran la apropiación que han logrado. Cuando como profesores nos damos la oportunidad de leer, oír o mirar esta comunicación podemos observar y analizar su aprendizaje.

Evaluación

La evaluación se considera un proceso que se desarrolla a la par del proceso de aprendizaje desarrollado por los estudiantes. No debe ser un momento aparte, ni debe generar angustia que rompa el ambiente de comodidad y seguridad que fomentará el aprendizaje deseado en el aula.

Es importante desligar la evaluación del proceso administrativo que nos lleva a la asignación de una calificación y aporta poco o nada al aprendizaje. La evaluación es un proceso que observa, recopila información sobre el objeto o proceso evaluado, sobre la forma en que se logra, y analiza esta información para lograr la mejora, en este caso, del aprendizaje.

Es muy importante aclarar que no se va a evaluar la calidad de las obras de arte de los estudiantes, sino la manera de involucrar ambas culturas: matemática y artística. También se evaluará la interpretación y la forma de comunicar.

El **aprendizaje** es un proceso complejo, que se ve influenciado por múltiples factores, y la evaluación debe considerarlos todos, o al menos todos los que son susceptibles de mejora, como son el desempeño de los estudiantes y del profesor, la eficiencia de las actividades y las cualidades del ambiente.

El desarrollo del pensamiento reflexivo no es fácil de observar, para recopilar información al respecto es necesario buscar algún indicador que nos muestre los cambios o los avances logrados por los estudiantes, el lenguaje o forma en que comunican las ideas es uno de los más eficientes.

Desarrollo del taller

"Mi propósito, pues, no es el de enseñar aquí el método que cada cual ha de seguir para dirigir bien su razón, sino sólo exponer el modo como yo he procurado conducir la mía"

Discurso del método. René Descartes.

En el taller se trabajará primero con el análisis de las *obras de arte* desarrolladas por los estudiantes, se observará el nivel de comprensión del concepto matemático *Infinito*; el desarrollo del pensamiento reflexivo y al final discutir la construcción de un instrumento de evaluación.

De esta manera las actividades se trabajarán en equipos pequeños (dos o tres profesores) y discusiones grupales y se referirán a:

- Inclusión de estrategias artísticas en el trabajo cotidiano
- Análisis de obras de arte hechos por los estudiantes
- Creación de un instrumento de evaluación.

Tabla 1
Planeación.

	Incluye:	A cargo de:	Tiempo estimado:
Introducción	- Presentación ponentes - Descripción taller - Marco de referencia	Ponentes	10’
Estrategias artísticas	- Presentación del trabajo con estudiantes - Discusión con preguntas detonadoras	Ponentes Participantes	20’
Obras de estudiantes	- Presentación de las obras - Discusión	Ponentes Participantes	20’
Instrumentos de evaluación	- Qué, para qué y cómo evaluar - Presentación de instrumentos - Elaboración propuestas	Ponentes Equipos pequeños	40´
Conclusiones	- Discusión de instrumentos - Comentarios de estudiantes - Ejemplos de evaluación - Comentarios generales	Equipos pequeños Ponentes Participantes	20’

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones esperadas

Durante el desarrollo del taller se espera que los profesore participantes reflexionen sobre el ambiente que generamos en el aula y la comunicación que tenemos con los estudiantes, específicamente la oportunidad que nos damos para escucharlos (leerlos u observar su comunicación) y cómo aprovechamos esta comunicación para la evaluación de conceptos tan importantes en matemáticas como es el infinito.

Referencias y bibliografía

Descartes, R. (1996). Discurso del método. Editorial Época. 12ª reimpresión 2010.

Dewey, J. (1916). Democracy y Education. McMillan.

Dewey, J. (2007). Cómo pensamos. Paidos.

Escuela Nacional Preparatoria. (2018). Programa Matemáticas VI Área IV, UNAM. http://enp.unam.mx/assets/pdf/planesdeestudio/6to/1620_matematicas_6_area_4.pdf

Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico: ¿qué es y por qué es importante? Traducción de Ma. Cecilia Bernat de la Rosa, y actualización de EDUTEKA. http://www.eduteka.org/PensamientoCriticoFacione.php

Flores, A. H. (2022). Pensamiento Reflexivo y Aprendizaje: Implicaciones en la Educación. CCH, UNAM. Sin publicar.

Materiais manipuláveis como estratégia de ensino de frações em uma escola no interior do Amazonas

Manoel Augusto Rodrigues de **Lima**.
Secretaria de Estado de Educação do Amazonas
Brasil
manoel.lima@seduc.net
Veneza **Bernardo** da Costa.
Secretaria de Estado de Educação do Amazonas
Brasil
venezabernardo@hotmail.com
Edilanê **Mendes** dos Santos.
Universidade Federal do Amazonas
Brasil
edilanemendes@ufam.edu.br

Resumo

Devido à dificuldade na aprendizagem da matemática por alunos do 6° ano de uma escola pública no interior do Amazonas, houve a necessidade de uma intervenção pedagógica. Para isso, utilizaram-se materiais manipuláveis (peixe, banana e farinha), tendo como objetivo principal, contribuir para a aprendizagem de frações. Foram realizadas atividades antes e após a intervenção, mostrando que os alunos melhoraram seus índices de aprendizagem no assunto, permitindo assinalar que uma mudança no processo de transmissão do conteúdo, pode surtir melhoras na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Material manipulável; Frações; Ensino e aprendizagem.

Introdução

Novas e antigas estratégias de ensino são adotadas por professores com o objetivo de melhorar o aprendizado da matemática devido a grande a dificuldade e desmotivação que os alunos apresentam em relação a esta disciplina (Pietrocola, 2002; Nonno, 2019).

A ideia de trabalhar com materiais manipuláveis no ensino de frações, surgiu devido às dificuldades apresentadas por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental durante as aulas em uma escola estadual do interior do Amazonas.

Deste modo, optou-se por utilizar elementos regionais, que estão presentes na vida dos alunos, como o peixe, a farinha e a banana, para abordar o conteúdo “frações”. Assim, explicar conceitos necessários para a aprendizagem e diferenciação de cada tipo de fração. Um dos objetivos de se trabalhar com materiais manipuláveis é proporcionar aos alunos a oportunidade de integração entre teoria e prática, levando os alunos a desenvolverem o raciocínio e o pensamento crítico.

Elementos teóricos

História e aplicações das frações

É pouco provável que um único homem tenha criado o sistema fracionário, e seu surgimento, possivelmente foi lento e relacionado com a cultura da época. Boyer & Merzbach (2012), contam que o Papiro de Rhind ou de Ahmes (nome do escriba que o copiou em 1650 a.C. a partir de um protótipo redigido na escrita hierática entre 2000 e 1800 a.C.) que contendo matemática do Egito antigo, apresenta uma série de frações tabeladas e com elas operações matemáticas, mostrando o uso milenar desta representação numérica. É provável que o uso se deveu a necessidade de medir terras, colheitas, líquidos e tecidos com exatidão, levando o homem a introduzir as frações e a criar unidades padrão para as medidas.

Estima-se que entre 5000-3000 a.C. no Egito, a cada “seca e cheia” do rio Nilo, marcações (divisões) de terras eram construídas para que os povos cultivassem e plantassem (Sousa, 2008). Essas divisões eram feitas com a utilização de cordas com “nós”.

Por isso, esse “repartir” igualmente, dependia bastante dos lados de determinado terreno para dar um número inteiro de vezes e, quando não acontecia isso, se deparavam com uma anomalia (sobra de pequenas partes de terras) antes jamais vista. Mas, com o passar do tempo, sentiram a necessidade de expressar essas pequenas partes que sobravam em números. Portanto, a origem presumida dessa problemática deu a estruturação para a criação de algo novo, ou seja, uma lei “dos números racionais.

Conforme Brasil (1998), os números fracionários protagonizam diversos atores contextuais como a relação parte/inteiro, divisão e razão, mostrando que um todo (unidade), pode dividir-se em partes proporcionais e umas às outras. As figuras geométricas mostram com clareza a relação existente entre o número de partes e o total das partes. Possibilitar o aluno analisar, consolidar um pensamento crítico/construtivo em determinadas situações problema é válido, porque ele tem a certeza de que os números naturais são diminutos para resolver determinadas situações.

No cotidiano, mesmo sem perceber, pescadores, dezenas de vezes ao dia, medem e pesam o tambaqui, que para ser comercializado a um maior custo, deve estar acima de 55 cm, caso essa medida seja ultrapassada em $(1/2)$ centímetro, esse peixe já é reclassificado, ganhando valor comercial. Para ser utilizado na alimentação, após ser escamado, ele é dividido primeiramente em bandas $(1/2)$ e por último, retalhado, formando vários exemplos de frações. A farinha de mandioca é outro produto que envolve frações, desde sua produção até sua comercialização. Dependendo da região amazônica, ela pode ser vendida em quilograma ou litro. Na zona rural, ainda hoje, é comum, agricultores não terem balanças e a farinha ser vendida em litros, os caboclos souberam se adaptar as evoluções, pois 1 litro e (1/2) de farinha, corresponde a 1 quilograma do produto.

A banana também pode ser utilizada para exemplificar frações. Um cacho de banana tem várias palmas, na medida em que se retira uma palma, está se retirando parte de um inteiro (todo). Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (Brasil, 1998) quando tratam da transversalidade, afirmam que o ato de recorrer aos conhecimentos matemáticos, não são privilégios apenas dos matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas sim, de todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades construtos para contar, localizar, medir, desenhar, representar jogar e explicar. Por isso, sintetizar, elaborar e esmiuçar situações problemas envolvendo frações para os alunos é bastante enfadonho e aversivo, visto que, os conteúdos estão intimamente ligados ao abstrato, e nunca a realidade do aluno.

É evidente que somente o método tradicional, pautado no uso exclusivo do livro didático (abstrato) no ensino de matemática, não proporciona ao educando a maturidade de relacioná-la ao seu cotidiano, dificultando o ensino/aprendizagem. Métodos focados somente nas regras de resolução como: soma, subtração, multiplicação e divisão de frações, não trazem significado ao aluno. Ribeiro (2004) afirma que:

> (...) referindo-se à percepção que os alunos têm com relação a metades, quartos ou terços: "Eles descobrem que para dividir nem sempre precisam contar alguma coisa, mas podem fazer um tipo de medição. E já "antecipam" que o resultado de uma divisão matemática se dá em partes de um todo com a mesma forma e o mesmo tamanho" (p.37).

Mesmo ainda não tendo contato com os números racionais, os alunos conseguem relacionar divisão com tamanho e assim expressar o todo em partes iguais. D'Ambrósio (1997) mostra que o ensino da matemática deve ser parte integrante, não apenas do planejamento, mas sim, de todo o processo de letramento dos discentes, com a reconstrução de conceitos como frações, utilizando-se do material concreto.

De acordo com Scolaro (2008), "o uso destes objetos reais, nomeados de materiais didáticos manipuláveis que levam o aluno a tocar, sentir, manipular e movimentar, acabam por tornarem-se representação de uma ideia". Portanto, reconhecer a utilização dos materiais concretos (manipulável) numa metodologia ativa é trabalhoso para o docente. Porém, os alunos aprofundarão e ampliarão seus conhecimentos a respeito do conteúdo aplicado, construirão conceitos, e enxergarão a aplicação das frações no seu cotidiano. Por isso, o não uso do lúdico no ensino de fração gera a não relação com o cotidiano do educando. Logo, as dificuldades e o desinteresse dos alunos em trabalhar com fração é devido à falta de aplicações nas situações práticas do dia a dia. Magina et al. (2009) escrevem sobre as dificuldades dos estudantes:

> Assim, algumas das causas das dificuldades das crianças com fração residem na complexidade inerente a esse conceito e na abordagem aplicada ao ensino desse conteúdo na escola. Parece haver, então, a necessidade de se explorar formas alternativas de ensino que considerem uma visão mais ampla da fração (tanto em termos de representação como de significado), que encorajem o aluno a adotar seu conhecimento informal sobre frações e que o auxiliem na superação das dificuldades encontradas em relação a esse conceito (p. 415).

É notório o descaso com o ensino dos números fracionários, uma vez que este conteúdo demanda domínio e criatividade para o seu ensino, por estar presente no dia a dia de diversas formas, sendo que grande parte dos alunos não tem nem a metade dos conceitos consolidados que envolvam fração na sua vida escolar e cotidiana. Por isso, não desperdiçar o conhecimento informal dos alunos sobre as frações, ou seja, percepções e conceitos amadurecidos em seu cotidiano, é colocar em prática tudo que aprendeu fazendo a relação entre teoria e prática progredindo para uma aprendizagem sólida e satisfatória.

Metodologia

Esta pesquisa é de caráter qualitativa, pois a fonte direta de dados foi o ambiente natural, sendo maior o interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (Godoy, 1995; Oliveira, 2008). Independentemente do nível de pesquisa ou sua finalidade, é necessário um preparo para a sua realização (Chaer, Diniz & Ribeiro, 2012).

Marconi e Lakatos (1990) esquematizam o planejamento em: (a) preparação da pesquisa; (b) fases da pesquisa e (c) execução da pesquisa. Ao identificar o problema, a ‘preparação da pesquisa’ para a intervenção escolar, iniciou a partir de um levantamento bibliográfico afim de entender se a dificuldade com frações era um problema local ou se outros professores já haviam relatado o mesmo, além disto, este momento serviu para buscar estratégias de ensino a serem utilizadas durante as aulas. Por se tratar de uma ingerência em sala de aula, as ‘fases da pesquisa’ consistiu na observação do ambiente escolar de quatro turmas do 6°ano do ensino fundamental, da Escola Estadual Benta Solart, localizada na zona urbana do município de Maraã-AM, Brasil, no 1° bimestre escolar do ano 2016. As observações contribuíram para entender a realidade escolar e para haver aproximação com os alunos.

Durante a ‘execução da pesquisa’, aplicou-se um questionário com perguntas fechadas, a fim de saber a compreensão dos estudantes sobre matemática, em seguida, um segundo questionário, com problemas voltados a frações, com perguntas retiradas diretamente do livro e outras adaptadas do livro didático de matemática adotado pela escola. Para a intervenção pedagógica, duas aulas em cada turma, foram utilizados materiais manipuláveis. Para o pescado tambaqui, foi realizado um vídeo, que mostrou uma pessoa tratando-o e cortando-o em pedaços, por ser um produto perecível, não foi manipulado diretamente pelos alunos. Também foram utilizadas palmas de bananas e um quilograma de farinha de mandioca. Após a intervenção, foi aplicado um terceiro questionário para quantificar o aprendizado dos alunos.

Análise dos resultados

O primeiro questionário aplicado aos alunos está apresentado na Tabela 1. Por se tratar de adolescentes entre 11 e 13 anos, foi importante conhecer a opinião dos alunos acerca da matemática, visto que, no ano anterior, eles cursavam o 5° ano e eram acompanhados por apenas 1 professor e 1 auxiliar de turma, e no corrente ano, passaram a ter as matérias escolares divididas em tempos de aula de 50 minutos e professores diferentes para cada uma. Pelos resultados, foi possível observar que a maioria teve uma boa experiência com a matemática, tanto que, 91 dos 98 alunos que responderam ao questionário, afirmaram gostar de matemática. Apenas 3 alunos afirmaram não ter estudado o assunto ‘frações’, o que remete a possível ausência as aulas no ano corrente ou até mesmo, se tratar de alunos vindos da zona rural da cidade, cujas aulas são multisseriadas, e o professor dificilmente consegue ministrar todos os conteúdos de todas as séries numa única sala de aula.

Pelo fato de os alunos já terem estudado o assunto 'frações', também foi realizado um questionário com perguntas extraídas diretamente do livro didático do 6º ano adotado na escola (Junior & Castrucci, 2009) e posteriormente adaptadas, vide Tabela 2, para saber o nível de conhecimento dos estudantes. A partir dos resultados tabelados, foi possível verificar que a maioria não soube responder até mesmo a soma de frações com o mesmo denominador. A pergunta contextualizada, retirada do livro, foi a que os alunos mais erraram. É possível diagnosticar que pouco do conteúdo abordado até aquele momento sobre frações foi compreendido, visto que, em torno de 25% do universo de alunos consultados, concluíram com exatidão qual fração era a maior ou menor entre duas, demonstrando assim, falta de domínio em conceitos como numerador e denominador.

Tabela 1
Questionário realizado antes da intervenção pedagógica

Perguntas	Respostas			
	Sim	Não	Talvez	Às vezes
Você gosta de estudar matemática?	91	1	1	5
A matemática é importante para a vida das pessoas?	92	2	1	3
Você já ouviu falar em frações?	95	3	0	0
Você sabe o que estuda neste conteúdo?	62	17	11	8

Fonte: alunos consultados. 2016.

Tabela 2
Problemas adaptados do livro didático e respondido pelos alunos.

Perguntas	Respostas	
	Acertos	Erros
Encontre o resultado da adição: 2⁄3 + 1⁄3	29	69
Some a frações: 7⁄4 + 5⁄12	17	81
Mariana e Viviane combinaram ir de bicicleta de Uberlândia até Uberaba, mas não aguentaram e pararam no caminho. Marina percorreu 7⁄10 da estrada que liga essas cidades, e Viviane, 9⁄11. Qual de las chegou mais perto de Uberaba?	12	86
Identifique a maior fração entre: 1⁄2 ou 1⁄3	25	73
Identifique a menor fração entre: 5⁄7 ou 5⁄12	21	77

Fonte: alunos consultados. 2016.

Em seguida, o conteúdo 'frações' começou a ser desenvolvido em sala de aula utilizando materiais manipuláveis como estratégia. O vídeo mostrando o pescado tambaqui sendo fracionado (Figura 1), foi mostrado aos alunos por meio de um datashow. Após a exibição, foram explicados os tipos de frações: própria, imprópria, aparente e mista. Com o pescado, foi exemplificado a fração imprópria, que é aquela cujo numerador é igual ou maior que o denominador. Nessa exemplificação, também poderiam ser referenciadas às frações aparentes, ou seja, aquelas cujo numerador é um múltiplo do denominador, por exemplo: $\frac{3}{3}, \frac{6}{2}, \frac{9}{1}$ (Kuhn & Bayer, 2018).

Figura 1: Representação fracionária do tambaqui: inteiro (1), banda ($\frac{1}{2}$) e vários pedaços (sentido horário).

Com a palma de banana (Figura 2a), foi possível demonstrar as frações próprias da seguinte forma: 3 bananas foram retiradas da palma que continha 15 bananas, e dadas aos alunos, a partir disso, deveriam representar a fração no quadro branco (Figura 2b), assim, seguiu-se a atividade até a última banana, 15/15, exemplificando novamente uma fração imprópria.

Figura 2: (a) Representação fracionária da palma de banana: 1, $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}$ ou $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{15}$ (sentido horário) (b) alunos resolvendo problemas no lousa durante a aula.

Para a farinha de mandioca (Figura 3), um quilo foi dividido em partes iguais com o auxílio um copo graduado, colocada em pequenas sacolas plásticas e distribuídas aos alunos, desta forma, foi possível fazer alguns exercícios, dois deles foram: 100g de farinha corresponde a uma fração de 1/10 kg, ou ainda, 200g corresponde a 2/10 ou ainda, 1/5 de 1kg, desta forma, foi ensinado simplificação de frações, revisando máximo divisor comum (MDC). As frações foram representadas no quadro pelos alunos.

Figura 3. (a) Materiais utilizados durante as aulas. (b) Exposição do conteúdo. (c) Distribuição da farinha de mandioca.

Posteriormente, aplicou-se o questionário para a coleta final de dados (Tabela 3).

Tabela 3
Problemas elaborados pelos pesquisadores e respondido pelos alunos.

Perguntas	Respostas	
	Acertos	Erros
Manoel foi à feira comprar uma palma de banana. Quando voltava para casa, João e Pedrinho pediram uma banana cada, da palma que continha 16 bananas. Represente a fração que ficou na palma e a fração que saiu?	78	20
Para fazer um almoço, Maria comprou um tambaqui que foi repartido em treze pedaços. Em seguida, fez uma caldeirada e chamou seus 3 filhos para almoçarem, onde cada um comeu 2 pedaços do pescado. Represente a fração que ficou na panela?	76	22
Um quilo de farinha foi dividido em 4 partes, Carlinhos comprou 250g. Represente em fração a parte que restou?	79	19

Fonte: alunos consultados. 2016.

As perguntas contextualizadas, realizadas aos estudantes após a intervenção pedagógica, tiveram maior número de acertos, ficando maior que 77%, uma melhora em relação ao resultado anterior, visto na tabela 2, cujo máximo de acertos foi menor que 30%. Apesar de não alcançar a totalidade, houve uma melhora, visto que as perguntas da Tabela 3, possuíam um grau maior de dificuldade.

Considerações finais

Trilhando por essa linha de pensamento, a instituição escolar deve construir um ambiente inovador, criativo, interativo e dinâmico, para ter resultados positivos diante de conteúdos propostos. Fatores que dificultam o processo de ensino aprendizagem de frações foram identificados, neste sentido, propuseram-se métodos de ensino utilizando materiais manipuláveis e, posteriormente, observou-se um maior interesse pelo conteúdo em estudo.

Percebeu-se que as atividades propostas foram bem aceitas pelos alunos, que passaram a participar das aulas de forma ativa, com interesse e disposição. Portanto, pode ser concluído que para obter êxito em qualquer processo de ensino aprendizagem é necessário que se crie condições para que os educandos mantenham-se motivados e, assim, manifestem suas opiniões.

Referências e bibliografia

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2012). *História da matemática*. Editora Blucher.

Brasil, M. E. C. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*, 29. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Chaer, G., Diniz, R. R. P., & Ribeiro, E. A. (2012). A técnica do questionário na pesquisa educacional. *Revista Evidência*, *7*(7). http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/sociologia_artigos/pesqusia_social.pdf

D'Ambrósio, U. (1997). *A era da consciência*. Editora Peirópolis.

Godoy, A. S. (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de administração de empresas*, *35*, 57-63. https://www.scielo.br/j/rae/a/wf9CgwXVjpLFVgpwNkCgnnC/?format=pdf&lang=pt

Junior, G., & Castrucci, B. (2009). A conquista da matemática. *São Paulo: FTD*.

Kuhn, M. C., & Bayer, A. (2018). As frações nas aritméticas editadas para as escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX. *# Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnología*, 7(2). https://doi.org/10.35819/tear.v7.n2.a3086

Magina, S., Bezerra, F., & Spinillo, A. (2009). Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 90*(225). https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.90i225.517

Marconi, M. D. A., & Lakatos, E. M. (1990). Técnicas de pesquisa. *São Paulo: Atlas*.

Nonno, L. G. (2019). Métodos de Incentivo ao Ensino da Matemática e da Física na Educação Básica. *Revista Form@ re-Parfor/UFPI*, *7*(2). https://revistas.ufpi.br/index.php/parfor/article/view/9203/5835

Oliveira, C. L. (2008). Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. *Travessias, 2*(3).

Pietrocola, M. (2002). A matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno brasileiro de ensino de física*, *19*(1), 93-114. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5165616

Ribeiro, R. (2004). Frações: é preciso ir por partes. *Nova Escola, abril*.

Scolaro, M. A. (2008). O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. *Acedido em*, *6*, 1666-8. http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf

Sousa, R. (2008). Os Mistérios do Além no Antigo Egipto: Questões sobre a exploração museológica de um quadro conceptual. https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/63562

Modelación matemática: Una estrategia de enseñanza-aprendizaje para el álgebra en estudiantes de educación media superior

Karen Gabriela **Tamayo** Pérez
UNAM
México
karenga_35@hotmail.com
Ingrid Chantal **Torres** Ramos
UNAM
México
ingrid-tr@ciencias.unam.mx

Palabras clave: Educación Matemática; álgebra; Modelación matemática; Aprendizaje basado en proyectos.

Introducción

La materia de álgebra pre- universitaria forma parte del currículum que los estudiantes de la preparatoria UPAEP plantel angelópolis, ubicado en la ciudad de Puebla, México cursan en su formación media superior, conceptos como: variable dependientes, independientes, dominio, rango, son algunos que aprenden por la necesidad de pasar la materia pero que su significado e importancia suelen ser irrelevantes para ellos por la total desvinculación de estos en su vida diaria y porque sus significados no llegan a ser entendidos por los estudiantes. Esa es la principal motivación de la aplicación del aprendizaje basado en proyectos, específicamente que los estudiantes desarrollen un modelo matemático vinculado con un tema que sea de su interés, originalmente la propuesta es que sea un modelo matemático que explique un fenómeno que podemos encontrar en alguna carrera universitaria que ellos hayan pensado en estudiar.

En el presente trabajo se presentan los resultados de dicha implementación, además de todo el trabajo que se ha realizado en desarrollo de evaluaciones, rúbricas de calificación y además ejemplos de los modelos matemáticos que realizaron los estudiantes

Aprendizaje basado en proyectos

El principal objetivo de este aprendizaje está basado en el constructivismo, es decir, que el estudiante sea capaz de planear, implementar y evaluar proyectos que no se limitan al aula sino que trascienden a problemas que se encuentran en la vida diaria, estos aprendizajes han sido motivo de gran estudio en el ámbito educativo debido a todas las ventajas que se han observado en el desarrollo de aprendizajes significativos, además de todas las habilidades interdisciplinarias que se pueden desarrollar con este, tales como, aprendizaje colaborativo, diseño de experimentos, investigación de fuentes confiables, etc.

En el área de matemáticas, la implementación de nuevas estrategias de enseñanza aprendizaje, es algo que nuestros estudiantes nos demandan, conforme las generaciones van avanzando y el desarrollo tecnológico va en aumento, mostrarles a los chicos la importancia de las matemáticas en su vida es de suma importancia.

Evaluaciones

Durante la realización de este proyecto se tomaron en cuenta dos tipos de evaluaciones, diagnóstica y formativa, además de incluir la evaluación heterogénea, coevaluación y autoevaluación. Para estas últimas evaluaciones se desarrollaron rúbricas, cuya finalidad es medir los aprendizajes y poder evaluar esta estrategia, contrastar con una enseñanza tradicional, y poder ver el impacto obtenido en los estudiantes.

Resultados

En el autodiagnóstico realizado por medio de una plataforma llamada lexium se puede observar que los estudiantes tienen desarrolladas buenas habilidades matemáticas, sin embargo en la dinámica de la clase se observa mucha dificultad para el aprendizaje de los temas de álgebra, la principal razón que comentan los chicos es que no le ven la importancia de estos temas además de que esos temas no los van a usar en su vida diaria.

Después de la aplicación de esta estrategia se concluye lo siguiente:

Los estudiantes de media superior no tienen claro la diferencia entre trabajo en equipo y colaborativo, hubo demasiados conflictos para la organización y desarrollo del modelo, el cual se vio reflejado en la evaluación colaborativa.

La estrategia de aprendizaje basado en proyectos es una estrategia que favorece a los chicos dado que son estrategias innovadoras en la materia de matemáticas, ya que refieren que jamás había realizado una actividad parecida en específicamente esta materia, lo cual despertó su interés. La transversalidad de esta estrategia propició que los estudiantes reconozcan la importancia delas matemáticas sin importar el área al que se van a dedicar.

Por último, los significados de los conceptos abstractos como son variables, dominio, rango, etc. que inicialmente los estudiantes tenían una vaga noción de ellos, tomaron importancia gracias a este proyecto, integrando el uso de plataformas como GeoGebra, para el entendimiento de este proyecto.

Referencias y bibliografía

Abramson, S., Robinson, R., & Ankenman, K. (1995). Project work with diverse students: Adapting curriculum based on the Reggio Emilia approach. Childhood Education, 71(4),

Bottoms, G., & Webb, L.D. (1998). Connecting the curriculum to “real life.” Breaking Ranks: Making it happen. Reston, VA: National Association of Secondary School Principals. (ERIC Document Reproduction Service No. ED434413)

XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Modelación Matemática en primaria una alternativa para el trabajo en el aula

María Camila **Ocampo-Arenas**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
camila.ocampo@udea.edu.co
Olga Emilia **Botero** Hernández
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia y Colegio Pinares Altoverde
oebotero@gmail.com
Ana María **Jiménez** Echavarría
Colegio Pinares Altoverde
ana.jimenez13@gmail.com

Resumen

La Modelación Matemática en Educación ha venido tomando fuerza en los primeros grados de escolaridad, reconociendo sus posibilidades al estudiar problemáticas en diferentes contextos en los que se propicia la toma de decisiones, las discusiones, las experiencias y el uso de las matemáticas para comprender los fenómenos del contexto. Por esta razón, se propone este taller para docentes con el fin de reflexionar alrededor de los aspectos de la Modelación Matemática en primaria y su gestión en el aula por medio de ambientes de aprendizaje, de manera particular las posibilidades para la formación de sus estudiantes, a partir del análisis de diferentes experiencias que fueron ya fueron implementadas. El uso de la modelación matemática es un reto hoy para los docentes, proponer este tipo de experiencias permiten que los estudiantes y docentes resignifiquen sus prácticas en el aula y el papel de las matemáticas mismas.

Palabras clave: Modelación Matemática; Educación Primaria; Ambiente de aprendizaje; Reflexión conjunta.

Introducción

Algunas investigaciones proponen la implementación de la Modelación Matemática en diferentes grados de escolaridad como una posibilidad de reconocer, analizar y explicar un fenómeno que puede tener lugar en aspectos de la vida cotidiana, en otras ciencias y en las mismas matemáticas y así tomar decisiones frente al mismo (Parra-Zapata, 2015; Biembengut, 2007; 2019 Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; English, 2009; entre otros). De manera particular, en Educación primaria y gracias al interés de los niños por descubrir cosas nuevas y por utilizar su imaginación para hacer preguntas en torno a lo que tienen a su alcance (Biembengut, 2007), la Modelación Matemática en Educación Primaria es comprendida como la matematización de la realidad (Parra-Zapata, 2015), la cual, busca respuestas a dichas preguntas, y posibilita la construcción conjunta, la participación y la discusión.

En un ambiente de Modelación Matemática el docente, el estudiante y el conocimiento son factores que dinamizan los momentos y que interactúan de diferentes maneras para cumplir el objetivo. Los estudiantes y el docente son los protagonistas y quienes trabajan en equipo para utilizar argumentos, conjeturas, propuestas y estrategias que ponen en diálogo entre su experiencia y sus conocimientos en pro de explicar o resolver una problemática (Biembengut, 2019; Parra-Zapata, 2015 y Ocampo-Arenas, 2020). Por su parte el conocimiento matemático puede verse a partir de dos miradas; en una de ellas como aquel que se promueve en el ambiente, y en la otra como aquel que surge en el ambiente (Almeida, 2018 y Ocampo-Arenas, 2020).

Dentro de la Modelación Matemática en Educación Primaria hay varias discusiones con respecto a cómo utilizarla en el aula de clase, dado que para algunos autores es importante llegar a un modelo matemático; sin embargo, se ha demostrado que los modelos a los que llegan los niños y las niñas, se caracterizan por un factor analítico y utilizan las matemáticas para lograr su consistencia, que expliquen completamente el fenómeno y que sean simples para la interpretación desde la infancia (Ocampo-Arenas, 2020).

Gracias a la experiencia de las autoras en la enseñanza a partir de la Modelación Matemática en Educación Primaria y a los logros a corto y largo plazo en las niñas de la institución donde laboran, se propone este taller para reconocer las posibilidades que se generan al implementar la Modelación Matemática como metodología y cómo podría ser la gestión de aula de los docentes para explicar o solucionar problemáticas en diferentes contextos. Al desarrollar el taller, **e**l docente de matemáticas de Educación Primaria contará con herramientas que le permitirán utilizar la Modelación Matemática como metodología de clase que genera en sus estudiantes nuevas ideas, diálogos y escenarios de discusión; de igual forma, reconocerá las bases para la creación de otros ambientes de aprendizaje que pueda suscitar su participación en este espacio de formación.

A continuación, se presenta el método utilizado para el desarrollo del taller y algunos resultados a los que se han llegado gracias a la implementación de los ambientes de Modelación Matemática en Educación Primaria en el aula.

Método

El presente taller se desarrolla en tres momentos en los cuales se busca que los participantes se involucren en la comprensión y análisis de experiencias de modelación en primaria y sus posibilidades en la formación de los estudiantes: En el primero se presentan los principales aspectos teóricos de la Modelación Matemática en Educación Primaria, se identificaran las fases de un ciclo de modelación y se determinaran algunos aspectos esenciales para comprender la idea de modelo en una etapa temprana en el aprendizaje de las matemáticas. En el segundo se propone la interacción de los participantes con diversos ambientes ya implementados, los cuales se presentarán mediante herramientas de gamificación que permitirán identificar los elementos y momentos principales en cada uno de ellos, analizar a la luz de la teoría estos aspectos presentes en los ambientes de modelación, así como reflexionar sobre sus posibilidades para dinamizar los ambientes de aula y resignificar la idea del estudiantes, profesor y el conocimiento matemático. Finalmente, en el tercer momento se sintetizan las reflexiones que los maestros hayan desarrollado por medio de la creación de un ambiente a partir del contexto en el que ejercen su práctica docente adquiriendo herramientas para su gestión de aula, así como la formulación inicial de una experiencia de modelación que pueda desarrollar en su contexto escolar atendiendo a los aspectos analizados en el taller.

Diseños didácticos

El desarrollo del taller se realizará en el marco de cinco ambientes de aprendizaje, los cuales permitirán a los participantes reflexionar en torno a los procesos de Modelación Matemática en Educación Primaria. En la tabla 1 mostramos cada uno de los ambientes propuestos con una breve descripción, sus materiales, algunos asuntos matemáticos trabajados y competencias matemáticas desarrolladas.

Tabla 1
Ambientes de Modelación Matemática en Educación Primaria a trabajar en el taller

Nombre de la tarea	Descripción	Materiales	Asuntos matemáticos
Carrera de Aviones de papel	Propone la construcción de diseños de aviones de papel con el fin de decidir cuál cumple con ciertas condiciones de tiempo y distancia de vuelo. Es en un contexto ficticio.	Hojas de papel Lanas Cronómetro Metro	Medición de distancia y tiempo Figuras y cuerpos geométricos
Azúcar añadido	En este ambiente de modelación, en la cual los estudiantes de manera crítica analizan el consumo de azúcar añadida presente en los alimentos que consumimos diariamente y sus implicaciones para nuestra salud considerando los parámetros dados por los especialistas.	Empaques de alimentos cubos de azúcar	Relaciones multiplicativas Medidas de capacidad Proporciones
La granja escolar	En esta tarea se propone la redistribución de los corrales de una granja escolar a partir de la necesidad	Metro	Medida de área y perímetro

	de mejorar los espacios de los animales que allí se encuentran, este es un contexto real.	Hojas milimetradas Granja escolar	Relaciones de proporcionalidad Regla de tres
Avistamiento de aves	Durante este ambiente de modelación se propone el estudio y registro de la cantidad de aves que visitan un lugar, analizando algunas variables que hacen que haya más o menos aves en algún momento del día, con el objetivo de instalar de manera estratégica unos comederos para los pájaros.	Hojas de papel	Hechos numéricos de 10 Suma Composición y descomposición

Fuente. Los Autores

Estos ambientes de aprendizaje fueron desarrollados con estudiantes de primaria en dos instituciones privadas, favoreciendo en ellos la toma de decisiones, el desarrollo de discusiones y reflexiones en las que se interrelacionan las matemáticas y las necesidades de cada contexto.

Resultados

En la implementación de los ambientes de Modelación Matemáticas, se ha identificado que se movilizan asuntos en torno al conocimiento matemático, el papel de las y los estudiantes, y el papel de las maestras que proponen este taller. Por su parte el conocimiento se convierte en un asunto vivencial y útil para los fenómenos estudiados, en los ambientes se identifica que se pueden articular diferentes pensamientos y competencias que posibilitan una transversalización dentro de las matemáticas y también con otras áreas del conocimiento. En Educación Primaria la experiencia de los y las estudiantes es la base para los procesos analíticos y reflexivos y se enriquecen con el conocimiento matemático que van aprendiendo.

Con respecto al papel de los y las niñas se reconoce que cuando se acercan a esta propuesta, en la que las matemáticas son un campo cercano, y al que son los principales actores, su relación con este conocimiento es más amigable y se deja de lado percepciones y miedos que históricamente han acompañado a la sociedad con respecto a las matemáticas. Los y las estudiantes, se sientes seguros y seguras a la hora de intervenir en procesos analíticos, explicativos y los que tienen que ver con la toma de decisiones. Es así como el maestro participa en el ambiente de diversas maneras, en algunas ocasiones es quien orienta y propone elementos para la participación de los y las estudiantes, en otras es quien aprende de lo que los y las niñas plantean y buscan, y en otras, es quien participa de las discusiones propuestas por los y las estudiantes.

Finalmente, se espera que este taller lleve a los maestros y maestras a reflexionar en torno a los aspectos mencionados en los párrafos anteriores, y que puedan, a partir de lo aprendido, proponer diversos ambientes de Modelación Matemática para la Educación Primaria mediados por la reflexión, el análisis y la toma de decisiones.

Referencias y bibliografía

Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM - Mathematics Education*, *50*, 19–30. doi: 10.1007/s11858-017-0902-4.

Biembengut, M. S. (2007). Modelling and applications in primary education. En *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 14, pp. 451-456). USA: Springer Science.

Biembengut, M. S. (2019). Modelación en la Educación de las Ciencias y Matemática en la Primaria. *XV CIAEM*, 13. Medellín, Colombia.

English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM-The international journal of mathematics education*, *41*, 161-181.

Ocampo-Arenas, M.C. (2020). *Caracterización de la Actividad Matemática de los estudiantes de Educación Primaria en un ambiente de Modelación Matemática* (Tesis de maestría, Universidad de Antioquia), Colombia, Medellín.

Parra-Zapata, M. M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática* (Tesis de maestría, Universidad de Antioquia), Colombia, Medellín.

Parra-Zapata, M.M., y Villa-Ochoa, J.A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(3), 1-27. E-ISSN: 1409-4703

Modelo para a Avaliação de Conceitos Necessários à Aprendizagem de Cálculo

Alex Sandro de **Castilho**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Guarapuava
Brasil
alexs@utfpr.edu.br
André Luis **Trevisan**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
Diego **Marczal**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Guarapuava
Brasil
marczal@utfpr.edu.br

Resumo

Dificuldades enfrentadas por alunos ingressantes nos cursos de Engenharia têm levantado várias questões e recentemente levado à reestruturação desses cursos no Brasil. Em especial, mostra-se relevante refletir sobre essas questões no âmbito da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Este artigo tem por objetivo apresentar, a partir de uma pesquisa bibliográfica, uma proposta de modelo para avaliação de conceitos necessários à aprendizagem de CDI. Tal modelo é organizado a partir de diferentes estratos do conhecimento matemático (numérico, algébrico e funcional). Destaca-se o potencial de aplicabilidade do modelo proposto, seja na organização de instrumentos de avaliação desses conceitos, ou ainda a elaboração de ementas de disciplinas de Pré-Cálculo.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; Pré-Cálculo; Estratos de Conhecimento Matemático; Avaliação.

Introdução

As atuais Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, promulgadas no Brasil no ano de 2019, tem norteado a reorganização dos cursos de Engenharia no Brasil. O documento aponta, em seu artigo 7º, que com "base no perfil dos seus ingressantes, o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) deve prever os sistemas de acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão" (Brasil, 2019, p. 5). Nesse sentido, torna-se relevante compreender "quem é" esse aluno que ingressa nos cursos de Engenharia.

Ao iniciar um curso superior, os acadêmicos parecem deparar-se com um ambiente desconhecido e, muitas vezes, hostil (Mendes et al., 2018). Esse estudante, logo no primeiro semestre se vê frente a definições, demonstrações e propriedades associadas aos diferentes conceitos explorados em disciplinas matemáticas. Tais elementos são desconhecidos, o que gera um abismo na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior (Andrade e Esquincalha, 2020; Trevisan e Mendes, 2018; Alvarenga e Sampaio 2016).

Tanto no Brasil quanto em âmbito internacional tem-se discutido e investigado dificuldades encontradas por alunos ingressantes no Ensino Superior, em particular, nos cursos das áreas de Engenharia. São diversos os motivos, incluindo estratégias de estudo, relação professor-aluno e pares, aulas expositivas e ferramentas de avaliação (Schwarz et al., 2021). Em específico, neste trabalho, trataremos das dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Esta disciplina tem mostrado ao longo dos anos um alto índice de reprovação e pode ser considerada um dos motivadores para a evasão escolar nos cursos de Engenharia no Brasil (Zarpelon et al., 2017). Atrelado a isso, torna-se fundamental refletir sobre o modelo tradicional de ensino de Matemática vigente na universidade, em que o professor expõe o conteúdo, dá exemplos e, em seguida, aplica provas para verificar se o estudante consegue reproduzir o que foi "passado" (Mendes et al., 2018).

Em um contexto local, a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), local de trabalho e de pesquisa dos autores deste texto, a disciplina de CDI I é ofertada no primeiro semestre da grade curricular dos cursos de Engenharia. O fato dessa disciplina ser ofertada já no ingresso na universidade pode ser um dos motivos para o alto índice de reprovações e evasões nessa disciplina (Zarpelon et al., 2017), levando muitos desses cursos a implementarem uma disciplina, denominada Pré-Cálculo, a fim preparar os alunos ingressantes para cursarem o CDI no 2º semestre. Nesse contexto, mostra-se relevante refletir sobre quais seriam os conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem de CDI. Trata-se do tema de pesquisa do primeiro autor, sob orientação dos demais, que objetiva desenvolver objetos de aprendizagem que abordem esses conceitos. Este artigo é um recorte deste trabalho, e seu objetivo é apresentar, a partir de uma pesquisa bibliográfica, uma proposta de modelo para avaliação de conceitos necessários à aprendizagem de CDI.

Que Conceitos Seriam Necessários à Aprendizagem de CDI?

A pesquisa que deu origem a esse artigo é qualitativa de caráter bibliográfico (Gil, 2008), que tem, por objetivo, permitir que o pesquisador realize uma imersão em diferentes materiais no intuito de explorar materiais, livros e artigos científicos elaborados por diferentes autores em diferentes perspectivas. Foram realizadas buscas em diferentes bases de dados (Portal de Periódicos da CAPES - Brasil, Web of Science, ScienceDirect, Scopus, ERIC, Scielo Brasil), com palavras e expressões em português e inglês diversas, que abordassem “aprendizagem de CDI”, “conceitos necessários para CDI”, “instrumentos para avaliação de CDI”, “Pré-Cálculo”,

Dessa busca, constatou-se uma escassez de trabalhos a respeito daqueles que seriam os conceitos matemáticos necessários para aprendizagem de Pré-Cálculo e CDI, ou ainda de instrumentos que possibilitassem a avaliação desses conhecimentos. Destacamos dois deles, a saber: o Instrumento para Prontidão de Conceitos de Cálculo (Carlson et al., 2015) – *Calculus Concept Readiness* (CCR), no contexto norte-americano, e a proposta de estratos do conhecimento matemático de autores no contexto mexicano (Adjiage e Pluvinage, 2012; Cuevas-Vallejo et al., 2018).

Carlson et al. (2015) apresentam uma visão geral da literatura que identifica habilidades básicas de raciocínio no nível de Pré-cálculo e as habilidades que os alunos precisam desenvolver para compreender ideias-chave de CDI. Para tanto, propõem uma taxionomia com 23 itens organizados e distribuídos em cinco categorias: Habilidades de raciocínio; Compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de função; Compreender e usar conceitos com grandeza, variável, taxa de variação e as propriedades de função; Compreender ideias centrais da trigonometria; Resolver, representar e interpretar equações e inequações. A partir desses itens, os autores mencionam a existência de um instrumento de avaliação (um “teste”) que não é de domínio público. Entretanto, algumas questões foram encontradas isoladamente em artigos da autora (Thompson e Carlson, 2017; Carlson et al., 2010). Para os autores proponentes do CCR, os dados obtidos a partir do teste podem ser úteis para avaliar a eficácia de um curso de Pré-Cálculo ou na preparação dos alunos que futuramente cursarão o CDI. Apontam que o CCR é uma boa forma de verificar se os alunos estão preparados para aprender e entender o CDI.

Adjiage e Pluvinage (2012) definem quatro níveis de competência que tratam dos estratos do conhecimento matemático. Os autores descrevem as especificidades desses estratos e as dificuldades ligadas às suas mudanças e apontam uma hierarquia entre eles, correspondendo à ordem em que são apresentados.

1 - Estrato numérico: capacidade de dominar os números inteiros e os números decimais, bem como as quatro operações elementares, formando números, usando as regras de numeração decimal, e expressões aritméticas, produzindo igualdades para resolver um problema.

2 - Estrato racional: dominar as razões e as proporções, bem como o produto e o quociente dos números reais.

3 - Estrato algébrico: inclui cálculo com letras ou cálculo formal.

4 - Estrato funcional: O estudo das funções revela novos problemas em comparação com os da Álgebra.

Fundamentados nos conceitos de estratos do conhecimento, Cuevas-Vallejo et al. (2018), propõem iniciar o curso de CDI com um “reforço de pensamento matemático básico”, segundo expressão utilizada pelos autores, que inclui o pensamento funcional. A pesquisa aponta evidências de que o design de atividades didáticas baseadas nessa proposta promove substancialmente a compreensão do conceito de função real, que é um dos primeiros e principais tópicos a ser abordado em livros de CDI.

Após esta breve apresentação dos dois modelos de instrumentos de avaliação de conhecimento matemático nos EUA e no México, na próxima seção discutiremos brevemente os instrumentos para a análise dos conhecimentos matemáticos do aluno que conclui o Ensino Médio no Brasil.

Exames de Avaliação do Conhecimento Matemático no Brasil

Apresentamos uma breve caracterização dos exames nacionais que avaliam, entre outros, o conhecimento matemático do aluno que concluiu o Ensino Médio. O ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio, tem o objetivo de "avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica" (BRASIL, 2022a). Em 2009, passou a ser utilizado como mecanismo de acesso ao Ensino Superior, por meio do Sistema de Seleção Unificada (Sisu) e do Programa Universidade para Todos (ProUni). A importância de analisar esse instrumento deve-se ao fato de que a forma de acesso aos cursos superiores da UTFPR é feita exclusivamente por sua nota, em substituição do processo vestibular. Assim, compreender o processo avaliativo do ENEM pode contribuir com questões que façam parte de um instrumento de avaliação de conceitos necessários ao CDI.

Diferente do ENEM, que tem caráter classificatório, o Saeb – Sistema de Avaliação da Educação Básica, é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC) realizar um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante (BRASIL, 2022b). O Saeb permite que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da educação oferecida aos estudantes, oferecendo subsídios para a melhoria e o aprimoramento de políticas educacionais com base em evidências. Parte do Saeb, a Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, da qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos (BRASIL, 2022c).

Destacamos também, em nível global, a prova do Pisa – Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), realizada a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O programa proporciona informações sobre o desempenho dos estudantes, dentro da faixa etária dos 15 anos, que já terminaram as fases de educação básica obrigatória na maioria dos países, o que inclui dados sobre seus conhecimentos prévios e suas atitudes em relação à aprendizagem dentro e fora da escola (BRASIL, 2022d).

Proposta de um Modelo para a Avaliação de Pré-Cálculo

Fundamentados na revisão de literatura, nesta seção apresentamos uma proposta de modelo para avaliação de conceitos necessários à aprendizagem de CDI. Tal modelo pode tanto subsidiar a organização de instrumentos de avaliação desses conceitos, quanto embasar a elaboração de ementas de cursos para a disciplina de CDI. No caso da elaboração de um instrumento de avaliação, cada questão escolhida deve ser adaptada para atender a proposta de ser um instrumento que auxilie os alunos em um processo de autorregulação de sua aprendizagem ou uma avaliação diagnóstica sobre os conceitos necessários para o CDI.

Por outro lado, o modelo pode ser utilizado para a estruturação da ementa de uma disciplina de Pré-Cálculo, seja como uma disciplina incorporada à grade curricular de um curso de Engenharia ou até mesmo um curso de curta duração fora do horário de aula. Tal modelo, ilustrado na Figura 1, é estruturado a partir de três estratos de conhecimento matemático, a saber: numérico, algébrico e funcional, descritos a seguir. Trazemos também alguns exemplos de questões (adaptadas dos exames mencionados anteriores) que podem ser utilizadas na organização de instrumentos de avaliação.

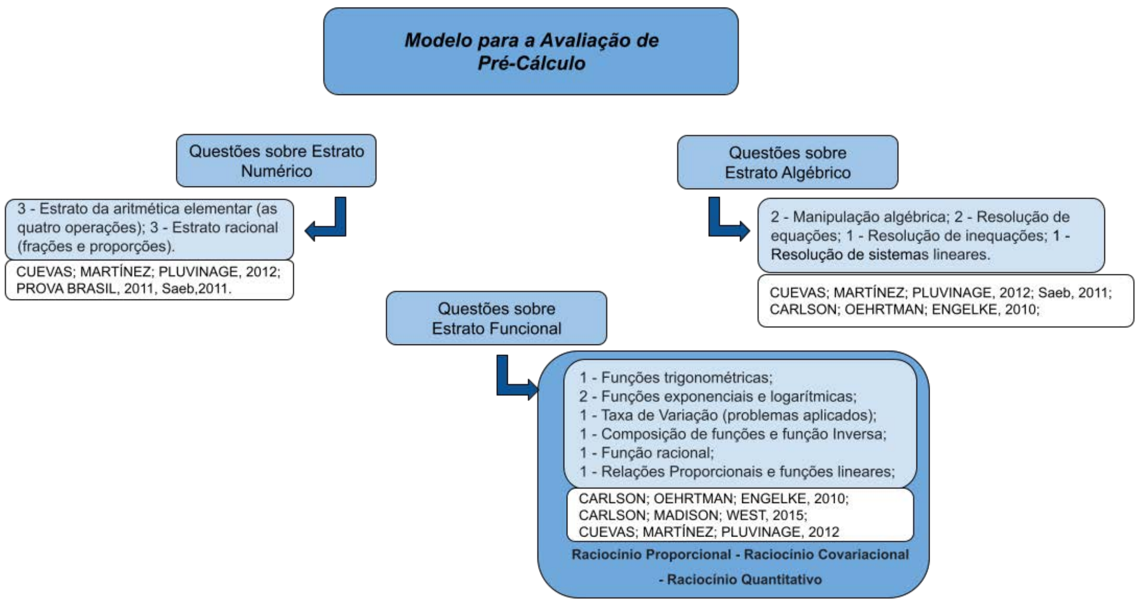


Figura 1. Estrutura do modelo para avaliação de Pré-Cálculo.

Estrato Numérico **–** devem ser abordados conceitos e escolhidas questões que exploram o raciocínio aritmético (RA) do aluno, cujo os objetivos são: efetuar as quatro operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão); efetuar operações que envolvam potenciação e radiciação com números inteiros; resolver problemas simples do cotidiano utilizando as quatro operações com números inteiros.

Exemplo Num - Um vendedor trabalha por comissão, recebendo 3 reais por item vendido. O vendedor trabalha de segunda a sexta-feira. Paga diariamente 20 reais para poder vender no mercado e 12 reais de transporte. Quantos produtos um comerciante deve vender em uma semana para que, subtraindo suas despesas, restem 70 reais para cada dia de trabalho? (Cuevas-Vallejo et al., 2018).

Estrato Algébrico **-** No estrato algébrico podem ser exploradas habilidades como: identificar a expressão algébrica que representa a função que rege os dados indicados em uma tabela ou gráfico; efetuar cálculos de expressões algébricas em diferentes contextos, em particular resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 1º ou de 2º grau; construir a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos ou então a partir de um ponto e de sua inclinação; identificar as expressões algébricas que representam o problema e fazer a mudança de representação adequada (linguagem natural para algébrica), assim como a realização do tratamento (cálculo numérico) para encontrar a solução de uma inequação.

Exemplo Alg - Para um atendimento domiciliar, um técnico em informática X cobra R$ 60,00 a visita e R$ 45,00 a hora de trabalho; um técnico Y cobra R$ 40,00 a visita e R$ 50,00 a hora de trabalho. A partir de quanto tempo de serviço é mais econômico contratar o técnico X? (Iezzi et at. (2013).

Estrato Funcional **-** Para este estrato devem ser escolhidas questões que envolvem habilidades de raciocínio proporcional, covariacional e quantitativo. Tendo em vista que este estrato possui conceitos mais diretamente relacionados ao CDI, as habilidades sugeridas são fundamentadas nas diretrizes da Taxionomia CCR (Carlson et al., 2015), a constar: compreender, representar e resolver problemas envolvendo diferentes tipos de funções (linear, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica); reconhecer a representação algébrica ou gráfica de uma função e associá-la a uma outra função; compreender as propriedades de composição e a inversa de uma função.

Exemplo Fun - Expressar a área, A, de um círculo em função do comprimento, c, de sua circunferência (Carlson et al., 2015).

Para resolver essa questão, os alunos devem relembrar as fórmulas para a área e perímetro de um círculo e ver essas fórmulas/funções como processos que mapeiam valores de uma variável para valores de outra variável real. Segundo Carlson et al. (2015), os alunos que apresentam uma resposta correta a esta questão: (a) possuem uma visão de processo da função, (b) compreendem o que significa avaliar uma função e (c) entenderam como compor duas funções dadas em um contexto de representação gráfica.

Nosso modelo possui um total de 20 questões, sendo 6 questões sobre o estrato numérico, 6 questões sobre o estrato algébrico e 8 questões sobre o estrato funcional.

Considerações Finais

As dificuldades dos alunos com os conceitos de matemática e possíveis soluções para este problema foram o foco e o principal motivador para esta pesquisa. Justificamos sua relevância em função da evasão nos cursos de Engenharia e das discussões atuais de reestruturação destes cursos para atender as demandas do perfil do egresso, segundo os princípios apontados pelas DCN de Engenharia no Brasil (Brasil, 2019).

O objetivo deste artigo foi apresentar considerações que vieram de estudo bibliográfico em termos de identificar, a partir da literatura, conceitos necessários à aprendizagem de CDI. Destaca-se aqui o potencial de aplicabilidade do modelo proposto, seja na organização de instrumentos de avaliação desses conceitos, ou ainda a elaboração de ementas de disciplinas de Pré-Cálculo.

Referências e bibliografia

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2012). Strates de compétences en mathématiques. *Reperes IREM*, Nancy, (88)1, 43-72.

Alvarenga, K.B. & Sampaio, M.M. (2016). Obstáculos referentes às relações de representação aritmética e algébrica de grandezas. In: Fonseca, L. (Org.). *Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 131-144.

Andrade, F. C., & Esquincalha, A. C. (2020). Um estado da arte das pesquisas brasileiras sobre Pré-Cálculo. Revista Boem, 8(16), 91-111.

Brasil (2022a). *Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)*. INEP. https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem

Brasil (2022b). *Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)*. INEP. https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb

Brasil (2022c). *Prova Brasil*. Ministério da Educação. http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/apresentacao

Brasil (2022d). *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)*. Ministério da Educação. https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa

Brasil (2019). *Resolução CNE/CES 2/2019. Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia*. Diário Oficial da União, Brasília, 26 de abril de 2019, Seção 1, 43-44.

Carlson, M. P., Madison, B., & West, R. D. (2015). A study of students' readiness to learn calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(2), 209-233.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113-145.

Cuevas-Vallejo, C. A., Pineda, M. D., & Reyes, M. M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología*, 10(2), 20-38.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. Ediitora Atlas SA.

Iezzi, G. et al. (2010). *Matemática: Ciências e Aplicação. Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva.

Mendes, M. T., Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2018). A utilização de TDIC em tarefas de avaliação: uma possibilidade para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. *Debates em educação*, 10(22), 140-163.

Schwarz, J. C., de Lima Dias, M. S., & de Camargo, D. (2021). Dificuldades encontradas por estudantes no ensino superior e práticas institucionais adotadas para superá-las: uma revisão de literatura. *Quaestio-Revista de Estudos em Educação*, 23(3), 741-761.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11(1), 209-227.

Zarpelon, E., Resende, L. M. M., & Reis, E. F. (2017). Análise do desempenho de alunos ingressantes de engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. *Interfaces da educação*, 8(22), 303-335.

Motivar y aprender matemáticas en el Multiverso matemático: proyecto transversal en primaria

Ana **Lam** Byrne
Colegio Trener
Perú
alam@trener.edu.pe
Rosa **Larrauri**
Marchese Colegio
Trener
Perú
rlarraur@trener.edu.pe
Francisca **Cubillas**
Colegio Trener
Perú
fcubilla@trener.edu.pe

Resumen

Es indudable la importancia de aplicar las matemáticas en la vida diaria y lograr ser matemáticamente competente, pero, muchas veces las matemáticas son asociadas a falta de competencia, creencias negativas y ansiedad, lo que es causa de desmotivación que aumenta cada año escolar.

Así surge la propuesta del proyecto "Multiverso matemático", dirigido a estudiantes de primaria de tercer a sexto grado con la finalidad de despertar la curiosidad, mejorar la autopercepción y la motivación, mientras se logran los objetivos de aprendizaje del área. Este estudio exploratorio de tipo investigación acción se desarrolló entre julio y setiembre de 2022 en un colegio privado de Lima, Perú.

Al finalizar los estudiantes completan una encuesta que evidencia una mayor motivación, mejor actitud afectiva hacia el aprendizaje matemático durante las clases regulares y mayor autopercepción de la capacidad para lograrlo.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; educación; enseñanza presencial; constructivismo; trabajo cooperativo; estrategias matemáticas; pensamiento algebraico; motivación; investigación acción; Perú.

Introducción

El contexto de la pandemia por COVID ha puesto en mayor evidencia la importancia del alfabetismo matemático (OECD, 2022), es decir, el poder aplicar las matemáticas en la vida diaria y de esta manera lograr que la persona sea matemáticamente competente (PISA, 2003) para que pueda interpretar e intervenir en la realidad (Minedu, 2015). Identificar la información necesaria en gráficos y tablas, para luego interpretarla, y comparar el número de hospitalizados o calcular la dosis de vacuna, fue un reto cotidiano en los últimos años. Por ello, en este contexto, y con los vertiginosos cambios en el mundo, es imprescindible tener una mirada cercana para el logro de las competencias matemáticas.

El aprendizaje de las matemáticas y en especial, las estrategias de cálculo y las técnicas operativas son algunos de los contenidos más complejos para los estudiantes. Muchos estudiantes encuentran dificultad en el logro de este aprendizaje, a pesar de que inicia con una adecuada secuencia didáctica (Minedu, 2021) donde el profesor promueve que el estudiante:

1. Se familiarice con la situación y el problema.
2. Indague, investigue, seleccione y aplique las estrategias necesarias.
3. Reflexione e intercambie experiencias y confronte con sus compañeros el procedimiento seguido, las estrategias empleadas, las dificultades y dudas, lo que descubrió, etc.

Debemos destacar que la actitud hacia las matemáticas juega un rol trascendental en la conexión del estudiante con la misma. En ese sentido, Ursin (2004) define actitud como la predisposición aprendida para responder de manera favorable o desfavorablemente, hacia un objeto y sus símbolos. A este escenario podemos agregar que existen estudios que evidencian que el gusto inicial por las matemáticas decae drásticamente a partir de tercer grado (Lotero y Andrade, 2011) debido a la gran presión que los docentes y los padres imprimen en el aprendizaje y practica de las técnicas operativas, especialmente de la multiplicación. Adicionalmente, Justicia-Galiano et al., (2017) indican que muchos estudiantes tienen poco interés por las matemáticas, desconocen sus habilidades matemáticas y experimentan las matemáticas como una materia compleja y desafiante que les genera ansiedad.

Ante lo expuesto, las autoras se cuestionaron cómo lograr una mayor motivación y compromiso en los estudiantes de 3. ° a 6. ° grado de educación primaria hacia el aprendizaje de las matemáticas y plantearon el diseño de un proyecto que promoviera estos aspectos en sus alumnos.

Marco conceptual

Según el Ministerio de Educación del Perú (2015), la finalidad de la matemática es permitir que las personas puedan interpretar la realidad, ello favorecerá ordenar, cuantificar y medir hechos y fenómenos e intervenir conscientemente sobre ello. Con las matemáticas “construimos representaciones del saber y las utilizamos para interpretar experiencias nuevas”, mediante analogías y reflexión; y a partir de estructuras de conocimientos que ya poseemos (Silva, 2009). Por ello, el eje medular del desarrollo de las matemáticas es la resolución de problemas.

Los enfoques actuales sobre el aprendizaje ponen de manifiesto igualmente la necesidad de integrar factores motivacionales en la explicación del rendimiento matemático (Guilbert, 2005 Op't Eynde, De Corte, y Verschaffel, 2006; Sarabia e Iriarte, 2011). Pues, existe relación causal entre la motivación hacia el aprendizaje y el rendimiento matemático en niños de primaria (Pinxten, Marsh, De Fraine, Van Der Noortgate, y Van Damme, 2014; McKenzie, Gow, y Schweitzer, 2004). La motivación hacia el aprendizaje se define como un proceso que impulsa hacia el aprendizaje, una disposición que pone en acción y permite perseverar en el interés hacia los elementos que se presentan (Pintrich y Schunk, 2006; Wigfield y Eccles, 2002). Desde esta perspectiva, una adecuada motivación es necesaria para la regulación de las estrategias cognitivas y metacognitivas hacia un aprendizaje matemático significativo (Ugartetxea, 2002).

El afecto hacia las matemáticas es factor importante en el rendimiento (Caviola et al., 2021, Chang y Beilock, 2016, Cipora et al., 2015, Devine et al., 2012, Suárez-Pellicioni et al., 2013). En el lado opuesto, nos referimos a ansiedad matemática, como aquellos sentimientos relacionados a miedo, tensión y aprensión en situaciones donde intervienen estas (Ashcraft, 2002). Dondio, Gusev y Rocha (2023) precisan la importancia de los juegos colaborativos, puesto que contribuyen a una mayor reducción de la ansiedad matemática.

Hidalgo. Maroto y Palacios (2004) explican en su estudio realizado con tres mil niños de tercer y quinto grado de primaria y de primero y tercero de secundaria, que los niños que tienen una autopercepción de ser hábiles en el cálculo mental disfrutan más de las matemáticas. Ellos plantean una dependencia posible de ida y vuelta entre motivación y rendimiento, ya que las matemáticas son aburridas porque existen dificultades para comprenderlas, así como que, si existe una falta inicial de comprensión de la materia, esta situación ocasiona rechazo. Ellos también concluyen que aquellos alumnos con actitud positiva hacia las matemáticas perciben las dificultades como retos asociados al éxito y este último como consecuencia de su esfuerzo. De este modo su autoconcepto y su motivación mejoran, y son predictores del éxito académico.

Por otro lado, Mercader (2017) precisa que la autopercepción de competencia de los estudiantes se convierte en el mejor predictor capaz de explicar el rendimiento matemático comparado con otras variables analizadas en su estudio con niños de segundo grado de primaria, como la perseverancia y una buena actitud hacia el aprendizaje.

En este contexto encontramos como propuesta para el desarrollo de las habilidades matemáticas, el aprendizaje basado en proyectos (ABP), el cual favorece habilidades necesarias en el presente siglo, como pensamiento crítico y trabajo colaborativo (Hough, 2022). En el ABP los estudiantes realizan un proyecto en un tiempo determinado para resolver un problema real que organice y dirija sus actividades, a partir del desarrollo y aplicación de aprendizajes adquiridos y el uso efectivo de recursos (Díaz, 2005; Blumenfeld et al., 2005). El proyecto concluye con la producción de un prototipo final que ofrece una solución a la problemática.

El ABP, al permitir que los estudiantes tomen decisiones autónomas, impulsa la motivación, tal como lo indican Flunger et al (2022). Ellos enfatizan que el uso de estrategias de apoyo a la autonomía determina la motivación y el compromiso de los estudiantes. Esta idea es ratificada por Flores y Juárez (2017), quienes encuentran una mayor motivación hacia las matemáticas luego de un proyecto realizado en las áreas de Geometría y Trigonometría.

Del mismo modo, Ignacio, N., Nieto, L. y Guerrero, E. (2006) encuentran que los estudiantes consideran que durante el trabajo en equipo se perciben con mayor seguridad y confianza en sí mismos que trabajando individualmente. Vemos entonces que las propuestas de trabajo grupal y colaborativo propician un mejor ambiente afectivo.

El Multiverso matemático sigue el modelo del ABP, favoreciendo interacciones centradas en el estudiante que redundan en mayor involucramiento, repercutiendo en mayor motivación y satisfacción hacia el aprendizaje por parte de los estudiantes (Pelerejo, 2018; Flores-Fuentes, 2017).

Metodología

Este estudio de tipo exploratorio se desarrolló desde el paradigma investigación acción, bajo un enfoque cuantitativo. Se utilizaron criterios de investigación experiencial sobre la realidad educativa y se diseña, realiza y evalúan los resultados del proyecto Multiverso.

El objetivo general de este estudio es presentar el diseño y evaluar los resultados de un proyecto que favorezca e incremente la actitud afectiva y cognitiva hacia las matemáticas. Entre los objetivos específicos determinamos: incrementar la motivación por el aprendizaje matemático, aumentar la autopercepción de la capacidad de lograr los aprendizajes matemáticos y mejorar la percepción de mayor disfrute hacia las matemáticas.

Este trabajo se desarrolló en varias etapas: revisión bibliográfica sobre los campos de la matemática y selección de insumos para ser brindado como ejemplo a los estudiantes, desarrollo del mismo por parte de los estudiantes, monitoreo de los procesos de aprendizaje por medio de fichas de observación, presentación del proyecto por parte de los alumnos y aplicación de cuestionario final sobre la motivación en el campo cognitivo y afectivo (Lin, 2018).

La población (n=336) está compuesta por estudiantes de 3. ° a 6. ° de primaria de educación básica regular, de un colegio privado de Lima. Cada grado consta de 3 grupos con un máximo de 30 niños en cada uno. El estudio se desarrolló entre julio y setiembre del año lectivo 2022. El proyecto fue realizado durante el horario de clases regulares y paralelo al desarrollo curricular de cada grado.

Instrumento de medición

Se usó un cuestionario para evaluar la efectividad del proyecto. El cuestionario es una adaptación de la escala de motivación del estudiante (Andrew, 2001; Lin, 2018). Consta de 14 preguntas y evalúa las dimensiones: compromiso cognitivo y compromiso afectivo (ver tabla 2). Se consideró también, una escala valorativa tipo Likert de 4 puntos: “totalmente cierto”, “bastante cierto”, “bastante falso”, “totalmente falso”. Se eligió esta forma de respuesta a fin de facilitar la comparación y analizar resultados con mayor claridad. Las respuestas fueron posteriormente recategorizadas en la combinación de “totalmente cierto”, “bastante cierto” como positiva hacia un incremento en la motivación; por otra parte, la combinación de “bastante falso", "totalmente falso" se interpretó como falta de eficacia del proyecto en la motivación del estudiante.

Etapas del proyecto

A través de un enfoque motivador y lúdico, los alumnos fueron inducidos a crear "mundos paralelos" para jugar con las matemáticas. El docente consideró como condición importante el generar espacios de autonomía para elegir temas, investigar, leer y aprender lo necesario y luego compartirlos como "expertos" con otros.

El desarrollo del proyecto se dividió en cuatro etapas. En la primera etapa se delimitaron los principios pedagógicos guía para el desarrollo del proyecto, priorizando aprendizajes a través de diferentes vías (trabajo personal, lógico matemático, lingüístico, espacial, artístico, manipulativo) con énfasis en procurar un adecuado ambiente afectivo, considerando:

1. La personalización, ya que el punto de partida es el nivel de desarrollo individual de cada niño, tanto a nivel emocional como y académico.
2. La mentalidad de crecimiento: ya que la habilidad matemática se desarrolla con esfuerzo, tiempo, practica y perseverancia, y el error es componente útil del aprendizaje (Dweck, 2012).
3. Experiencias significativas: situaciones problemáticas reales que promueven aprendizajes (Rodríguez, 2011).
4. Favorecer el juego y el uso de herramientas tecnológicas. (Riveros et al., 2011)
5. Metodología de proyectos.
6. Trabajo cooperativo, hacia el desarrollo de habilidades sociales.

En la segunda etapa: se dividió los campos de la matemática en dos niveles; el primer nivel correspondió a 3. ° y 4. ° grado y el segundo nivel a 5. ° y 6. ° grado. Los docentes inician la búsqueda de propuestas retadoras para los estudiantes que fomente la curiosidad en un contexto lúdico, significativo y cooperativo, la integración de conocimientos previos, la conexión entre los diferentes campos de la matemática.

En la tercera etapa se presentó a los estudiantes del primer nivel y al inicio de cada clase, diferentes juegos lógicos con la finalidad de generar hipótesis matemáticas, reflexionar y buscar estrategias hacia la solución. Luego, se les propuso diseñar en grupos cooperativos de 3 o 4 estudiantes su propio juego matemático. Se les invitó a investigar sobre diferentes campos matemáticos, presentándoles juegos impresos y páginas web sugeridas usando dispositivos electrónicos con acceso a internet. A continuación, la profesora revisó cada propuesta, generando reflexiones que motivaran a los estudiantes a corregir y mejorar tanto sus estrategias como el diseño matemático grupal. Finalmente, los estudiantes prepararon su producto final usando materiales variados. (Tabla 1).

Los estudiantes del segundo nivel buscaron información sobre los diferentes campos de la matemática y eligieron, de manera individual, en el que deseaban profundizar. Luego en grupos cooperativos diseñaron y elaboraron un reto manipulable, aplicaron diferentes habilidades matemáticas (Tabla 1).

Tabla 1
Actividades y situaciones problemáticas según el grado de los estudiantes.

Nivel 1: 3. ° y 4. °				
Juegos lógicos	Estimación	Sistema de Numeración		Pre álgebra
Patrones visuales ¿Cuál no pertenece?	Objetos en un contenedor	Inventar un sistema de numeración		Número misterioso Balanzas Adivinanzas de números Cuadrado mágico
Nivel 2: 5. ° y 6. °				
Paradoja del cumpleaños Paradoja de las tres puertas	Juegos de magia Adivinanzas de números	Transformaciones geométricas Cuerpos geométricos en 3D Cambio en el volumen al cambiar las aristas o forma	Cinta de Moebius Botella de Klein	Actividades de análisis lógico

Fuente. Elaboración propia. 2022

En la cuarta etapa, los estudiantes de ambos niveles presentaron el producto como “expertos” a un público conformado por sus padres y otros estudiantes. Posteriormente, dentro de la misma semana, los estudiantes completaron una encuesta que evaluó la eficacia del proyecto a través del compromiso cognitivo y el afectivo hacia las matemáticas.

Resultados

En la misma semana, luego de la presentación del producto, los alumnos completaron un cuestionario para evaluar la efectividad del aprendizaje. De acuerdo con Andrew (2001), los ítems relacionados con el compromiso cognitivo (ver tabla 2) se enfocan en el aprendizaje y el valor de este. Los comportamientos de refuerzo incluyen persistencia, planificación y monitoreo. En este sentido este compromiso es activo, ya que el estudiante actúa en forma, que podría decirse, entusiasta, más allá de una simple participación superficial. (Fredricks, Blumenfeld y París, 2004; Newmann, Wehlage y Lamborn, 1992)

Por otra parte, el compromiso afectivo (ver tabla 2) se divide en pensamientos, sentimientos y comportamientos que evalúan la autopercepción de capacidad, ansiedad y el auto control (Andrew, 2001).

En función de los resultados, observamos que a través de este proyecto los estudiantes perciben haber incrementado su motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas y se potenció su deseo de aprender más sobre ellas. Se observa que aproximadamente 8 de cada 10 (80%) estudiantes se mostró motivado hacia las clases de matemáticas luego de realizar el proyecto. Ellos percibieron que el proyecto del Multiverso matemático favoreció su pensamiento matemático, que comprendieron más que en la clase regular (74%) e inclusive extendieron el alcance hacia entender mejor las matemáticas luego de realizar el proyecto.

La gran mayoría de los estudiantes mostró emociones positivas hacia las clases de matemáticas luego de realizar el proyecto. Ellos encontraron que en el proyecto del Multiverso matemático sabían qué y cómo resolver lo planteado, lo encontraron interesante y divertido. Adicionalmente mostraron interés en aprender más sobre las matemáticas luego de realizar el proyecto.

Tabla 2
Motivación cognitiva y afectiva

Item	Compromiso cognitivo	Aceptación
1	Me gustó más hacer cálculos mentales cuando trabajamos en proyectos del Multiverso matemático.	87 %
2	Las matemáticas que realizamos en el proyecto del Multiverso matemático son más fáciles que los que hacemos en clase	81 %
3	Puedo entender las matemáticas en el proyecto del Multiverso matemático más que lo que suelo entender en clase.	74 %
4	Es probable que entienda las matemáticas que se enseñan en las clases regulares en el futuro luego de haber realizado el proyecto del Multiverso matemático	83 %
	Compromiso afectivo	
1	Sé qué hacer en matemática y cómo hacerlo en el proyecto del Multiverso matemático	93 %
2	Me parece que las matemáticas en el proyecto del Multiverso matemático son interesantes	96%
3	Me siento alegre en el proyecto del Multiverso matemático	97 %
4	Me gustan las matemáticas más que antes, luego de realizar el proyecto del Multiverso matemático.	81 %
5	El proyecto del Multiverso matemático me ayudó a saber que puedo aprender bien las matemáticas	82 %
6	Me desempeño bien cuando aprendo matemáticas en el proyecto del Multiverso matemático.	92 %
7	Espero poder aprender todos los temas de matemáticas en proyectos como los del Multiverso matemáticos	67 %
8	Me gustaría participar en más proyectos como los del Multiverso matemático para aprender temas distintos a los que se enseñan en las clases de siempre	91 %
9	Creo que podemos descubrir muchas cosas nuevas en proyectos del Multiverso matemático.	95 %
10	Creo que las matemáticas en proyectos como los del Multiverso matemático pueden enseñar a las personas cómo analizar problemas y pensar en sus soluciones	96 %

Fuente: Encuesta privada adaptada (2022)

Discusión y conclusiones

A través del proyecto los estudiantes tuvieron la oportunidad de resolver problemas y reflexionar sobre sus estrategias matemáticas, generándose mayor curiosidad, interés y motivación hacia el área, como se observa en los resultados del cuestionario realizado (tabla 2).

Los objetivos iniciales del proyecto se tornaron más ambiciosos a lo largo del desarrollo del mismo, ello implicó establecer más tiempo que el asignado inicialmente. Se sugiere planificar los objetivos con detalle para completar cada etapa del proyecto en el tiempo estipulado.

Como propuesta metodológica, al inicio de las clases se presentaron retos matemáticos (*Math talks*) donde los estudiantes debían encontrar la respuesta a situaciones problemáticas, discriminar información relevante dentro de un problema, verificar si la información brindada era suficiente para llegar a la respuesta y determinar aquella que hacía falta. Estos retos también favorecieron que los estudiantes usen lenguaje matemático en contextos reales y significativos, y validen sus estrategias explicándose entre sí y compartan diferentes caminos para llegar a la respuesta. Ello promovió la reflexión hacia la validación y obtención de múltiples estrategias. Sugerimos profundizar en el impacto de incorporar *Math talks* al inicio de las sesiones de clase, en el desarrollo del pensamiento matemático.

Observamos que posiblemente el entorno lúdico, más cercano y menos rígido favoreció el aprendizaje a través de una mayor motivación y mejor autopercepción. Ello se muestra en un promedio de 90% de motivación afectiva por parte de los estudiantes.

Los estudiantes se perciben con mayor competencia matemática, gracias al Multiverso y consideran poder aprender con mayor facilidad las matemáticas (tabla 2). Esta autopercepción hacia las matemáticas nos permite predecir un mejor rendimiento posterior. Sería interesante que, en un siguiente estudio, esto pudiera validarse a través de una prueba.

Por otro lado, el presente proyecto muestra que una metodología basada en proyectos es una herramienta adecuada para favorecer aprendizajes motivadores, expresado en un 80% de compromiso cognitivo por parte de los estudiantes.

Como limitaciones al presente estudio, consideramos importante precisar que las conclusiones relacionadas al incremento de motivación y actitud afectiva hacia las matemáticas surgen a partir de sus propias validaciones emocionales. Ello responde a una mejor actitud hacia las matemáticas, generada por un proyecto del cual disfrutaron, confirmando que se logró uno de los objetivos del dicho proyecto. Considerando que este estudio es de tipo exploratorio, vale recalcar que se evaluó el nivel de motivación posterior a la realización del Multiverso. Sería conveniente que en un futuro se realizara un estudio comparativo entre el nivel inicial de dicha actitud con la motivación final, para lo cual sugerimos realizar una valoración de motivación y autopercepción antes de iniciar el proyecto.

Asimismo, sería valioso realizar una evaluación de los aprendizajes matemáticos logrados, a partir de alguna prueba antes del proyecto y al finalizar este.

También sería interesante valorar el aprendizaje logrado con el Multiverso en niños que presentaban bajo rendimiento académico antes del proyecto.

Bibliografía y referencias

Ayllón, M. F. (2012). *Inveccion-Resolucion de problemas por alumnos de educacion primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada. Recuperado en: https://www.researchgate.net/publication/267714045_INVENCION_DE_PROBLEMAS_Y_TIPIFICACION_DE_PROBLEMA_DIFICIL_POR_ALUMNOS_DE_EDUCACION_PRIMARIA

Botero, L., Andrade, E., Lotero, L. (2011). La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y Silencios- Revista Latinoamericana de Educación:* 2 (38-64). Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4058881

Commodari, E., La Rosa, V. (2021). General academic anxiety and math anxiety in primary school. The impact of math anxiety on calculation skills. *Acta Psychologica*, 220. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2021.103413.

Dondio, P., Gusev, V., Rocha, M. (2023). Do games reduce maths anxiety? A meta-analysis,

Computers & Education, 194. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104650.

Dweck, C. S. (2012). *Mindset: How you can fulfill your potential*. Constable & Robinson Limited

Dweck, C. (2018*). Es importante que nuestros hijos aprendan con mentalidad de crecimiento*. Recuperado en: https://aprendemosjuntos.bbva.com/especial/la-mentalidad-que-puede-cambiar-la-vida-de-un-nino-carol-dweck/

Farstad, H. (2004). *Las competencias para la vida y sus repercusiones en la educación.* 47 Reunion de la conferencia Internacional de Educacion de la UNESCO, Ginebra.

Fiorella, L., Yoon, S.Y., Atit, K., Power, J., Panther, G., Sorby, H., Uttal, D. Veurink, N. (2021). Validation of the Mathematics Motivation Questionnaire (MMQ) for secondary school students. *International Journal of STEM Education*, 8 (52). https://doi.org/10.1186/s40594-021-00307-x. Recuperado de: https://stemeducationjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s40594-021-00307-x#citeas

Flores-Fuentes, G.; Juárez-Ruiz, E. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19 (3). https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.721

Flunger, B., Hollmann, L., Hornstra, L., Murayama, K. (2022). It's more about a lesson than a domain: Lesson-specific autonomy support, motivation, and engagement in math and a second language. *Learning and Instruction*, 77. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101500

Hough, Lory. (2022). *Project-Based Learning is Great, But Students Still Need to Learn Something*. Harvard Graduate School of Education. https://www.gse.harvard.edu/news/uk/22/01/project-based-learning-great

Ignacio, N., Nieto, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación* 340: (551-569. Recuperado en: https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/69004

Lin, F.-L., Wang T.-Y., Yang, K.-L. (2018). [a]*Studies in Educational Evaluation*. Recuperado en: https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.03.001

Mercader, J., Presentación, M.-J., Siegenthaler, R., Molinero, V.y Miranda, A. (2017). Motivación y desempeño matemático: un estudio longitudinal en etapas educativas iniciales. *Revista de Psicodidáctica, 22(2), 157–163.* doi: 10.1016/j.psicoe.2017.05.008

Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, (2003). *Marcos teóricos de PISA: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*. Recuperado en: https://www.educacionyfp.gob.es/inee/dam/jcr:48372b5c-de62-4b50-b8a7-0e0a1c2c8cb4/marcoteoricopisa2003.pdf

MINEDU. (2015). *Rutas del aprendizaje: ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes?*. Recuperado en: http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-primaria-comunicacion-v.pdf

Organisation for Economic Co-operation and Development (2004). *problemas*. Recuperado en:

Picos, P., Hidalgo, A., Maroto, S. (2004) ¿Por qué se rechazan las matemáticas? *Revista de educación* (334): 75-98. Recuperado en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=963460

Riveros, V., Mendoza, M., Castro, R. (2011). *Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso*

de instrucción de la matemática. Quórum Académico, 8(15), pp. 111 – 130. Recuperado en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3999014

Rodríguez, M. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. IN. *Revista Electrònica d'Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, 3, (1), 29-50. Recuperado en: https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/97912/rodriguez.pdf?sequence=1

Schmidt, W., Houang, R., Sullivan, W., Cogan. *When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study*. *Education Working Papers* (268). https://dx.doi.org/10.1787/07d0eb7d-en

Silva, M. (2009). *Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizados por alumnos de 6to grado de primaria.* Ciudad de México: Universidad Iberoamericana.

Ursini, Sonia; Sánchez, Gabriel; Orendain, Mónica (2004). *Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñadas con computadora.* Educación Matemática, 16(3), pp. 59-78. Recuperado en: https://www.redalyc.org/pdf/405/40516304.pdf

Panorama de estudos voltados para Metodologia Ativa Aprendizagem Baseada em Projetos nas aulas de Matemática

Jean Carlo Francis Wanderley Graciano do **Carmo**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
jeancarlocarmo@gmail.com
Douglas da Silva **Tinti**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
tinti@ufop.edu.br

Resumo

Este estudo é um recorte de nossa pesquisa de mestrado cujo objetivo é apresentar um levantamento de estudos que focalizaram a implementação da Aprendizagem Baseada em Projetos em processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica, que considerou como corpus de análise as pesquisas disponibilizadas nas plataformas CAPES e BDTD que continham os descritores “projetos” e “matemática”. Ao realizar esta busca, nos deparamos com duas vertentes, contudo focaremos apenas em uma, a Aprendizagem Baseada em Projetos. Para alcançar tal objetivo foi necessário definir o conceito de Aprendizagem Baseada em Projetos; verificar os benefícios da metodologia Aprendizagem Baseada em Projetos; identificar o panorama de estudos que relacionam a matemática com a Aprendizagem Baseada em Projetos. Quanto aos resultados, observa-se a carência de pesquisas sobre a metodologia em questão, principalmente na educação infantil, anos iniciais, ensino médio e formação continuada.

Palavras-chave: Educação Matemática; Problem-based Learning; Aprendizagem Baseada em Projetos; Aprendizagem autônoma; Brasil.

Introdução

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática, não raramente, assume uma prática centrada na mecanização e no uso exclusivo de livros-texto, que apesar de serem importantes, podem não estimular o protagonismo por parte dos alunos. Visando o protagonismo do aluno na construção de seu conhecimento, este estudo refere-se à conceituação da Aprendizagem Baseada em projetos, bem como sua utilização no cenário educacional, destacando as principais características dessas metodologias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Conforme Prediger et al. (2013), "apesar de a Matemática estar presente no cotidiano das pessoas, ela não tem uma boa receptividade, chegando a ser a disciplina de menos interesse nas escolas, o que se percebe principalmente a partir das séries finais do Ensino Fundamental". Dessa forma, percebemos a necessidade de incluir nas aulas de Matemática métodos e alternativas que propiciem um ambiente motivador e atrativo. Deste modo, conforme Bender (2014), "Esse foco nas experiências de aprendizagem autenticas, em tarefas que os estudantes podem ser solicitados a realizar no mundo real, é uma característica de praticamente todas as experiências de ABP e, em geral, aumenta a motivação dos alunos para participarem ativamente dos projetos". Assim, no segundo momento, realizamos uma discussão sobre ABP como método de ensino, ressaltando alguns elementos que norteiam a aplicação da metodologia de aprendizagem da ABP em diferentes contextos.

Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP)

Não há uma definição aceita de ABP. No entanto, no *Buck Institute for Education* (BIE 2008) define-se a ABP com foco em padrões como um método de ensino sistemático no qual os alunos adquirem conhecimento e habilidades por meio de um processo de investigação abrangente, estruturado em torno de questões complexas e autênticas e produtos e tarefas minuciosamente planejados. Essa definição abrange desde projetos curtos de uma ou duas semanas, com base em um único tópico em sala de aula até projetos interdisciplinares durante o ano letivo que envolvam a comunidade escolar e adultos fora da escola.

Por sua vez, Bender (2014) além de Larmer e Mergendoller (2010), afirmam que a ABP é um modelo de ensino que permite que os alunos enfrentem problemas e questões reais que considerarem importantes, decidam como abordá-los e, então, trabalhem juntos para encontrar soluções.

Mais importante do que a própria definição são as características dos projetos reais, como se pode observar na tabela 01.

Tabela 01
Características essenciais da ABP

Âncora. Introdução e informações básicas para preparar o terreno e gerar o interesse dos alunos.
Trabalho em equipe cooperativo. É crucial para as experiências de ABP, enfatizado por todos os proponentes da ABP como forma de tornar as experiências de aprendizagem mais autênticas.
Questão motriz. Deve chamar a atenção dos alunos, bem como focar seus esforços.
Feedback e revisão. A assistência estruturada deve ser rotineiramente proporcionada pelo professor ou no interior do processo de ensino cooperativo. O feedback pode ser baseado nas avaliações do professor ou dos colegas.
Investigação e inovação. Na questão motriz abrangente, o grupo precisará gerar questões adicionais focadas mais especificamente nas tarefas do projeto.
Oportunidades e reflexão. Criar oportunidades para a reflexão dos alunos dentro de vários projetos é aspecto enfatizado por todos os proponentes da ABP.
Processo de investigação. Pode-se usar diretrizes para a conclusão do projeto e geração de artefatos para estruturar o projeto. O grupo também pode desenvolver linhas de tempo e metas específicas para a conclusão de aspectos do projeto.
Resultados apresentados publicamente. Os projetos de ABP pretendem ser exemplos autênticos dos tipos de problemas que os alunos enfrentam no mundo real, de modo que algum tipo de apresentação pública dos resultados do projeto é fundamental dentro da ABP.
Voz e escolha do aluno. Os alunos devem ter voz em relação a alguns aspectos de como o projeto pode ser realizado, além de serem encorajados a fazer escolhas ao longo de sua execução.

Fonte: Bender (2014, p. 32)

No que lhe concerne, o modelo de design de BIE (2008) é baseado em vários critérios que distinguem projetos cuidadosamente planejados de outras atividades de extensão em sala de aula. A seguir, apresentamos a tabela 02 que elenca diversos critérios de distinção entre ABP e atividades de extensão.

Tabela 02
Critérios de distinção entre ABP e atividades de extensão

Eles reconhecem o desejo intrínseco dos alunos de aprender, sua capacidade de realizar trabalhos importantes e sua necessidade de serem levados a sério, colocando-os no centro da aprendizagem.
Eles apresentam aos alunos os conceitos e princípios básicos da disciplina. O trabalho de projeto é central para o programa, não periférico.
Eles enfatizam questões provocativas que levam os alunos a uma exploração profunda de tópicos autênticos e importantes.
Requerem o uso de ferramentas e habilidades importantes, incluindo aprendizado, autogerenciamento e tecnologia de gerenciamento de projetos.
Eles definem produtos que resolvem problemas, explicam dilemas ou apresentam informações obtidas por meio de pesquisa, investigação ou raciocínio.
Incluem diversos produtos que permitem feedback frequente e oportunidades consistentes para que os alunos possam aprender com a experiência.
Eles usam avaliações baseadas em desempenho que comunicam altas expectativas, estabelecem desafios rigorosos e exigem diferentes habilidades conhecimentos.
Eles incentivam alguma forma de colaboração, seja por meio de pequenos grupos, apresentações conduzidas por alunos ou avaliando os resultados de projetos de toda a turma.

Fonte: BIE (2008, p. 18)

Como as escolas do mundo todo enfrentam desafios para desenvolver modelos de ensino mais eficazes e com orçamentos reduzidos, muitos defensores da educação recomendam a ABP como um método de ensino eficaz que leva ao alto envolvimento e desempenho do aluno segundo Barell (2007). De tal maneira, faz-se necessário conhecer os benefícios da metodologia ABP.

Benefícios da Aprendizagem Baseada em Projetos

Enquanto campo, a ABP ainda está em fase de desenvolvimento. Segundo consta no BIE (2008), "não existem pesquisa ou dados empíricos suficientes para garantir que a ABP é uma alternativa comprovada para outros métodos de ensino". Ainda conforme BIE (2008), com base nas evidências acumuladas nos últimos dez anos, a ABP parece ser um modelo equivalente ou um pouco mais eficiente para melhorar o desempenho acadêmico, embora os resultados variem dependendo da qualidade do projeto e do nível de envolvimento dos alunos. Além disso, a ABP não é adequada para ensinar algumas habilidades básicas, como leitura ou computação. No entanto, fornece um ambiente propício para a aplicação dessas habilidades.

Mais importante, há evidências de que a ABP melhora a qualidade do aprendizado e promove o desenvolvimento cognitivo ao expor os alunos a problemas novos e complexos. Muitos proponentes da ABP sugerem que o aprendizado baseado em projetos oferece uma excelente oportunidade para aprendizado diferenciado na maioria das salas de aula de escolas públicas conforme Schlemmer e Schlemmer (2008). Por exemplo, em sua descrição da ABP, Barell (2007) explica como projetos baseados na ABP podem ser melhorados focando no conteúdo a ser aprendido, no processo de ensino e aprendizagem e nos produtos educacionais que apresentam o aprendizado, e esses três fatores também são o foco principal da instrução diferenciada de Tomlinson, nas publicações de Tomlinson (1999, 2010).

Também não há dúvida de que a ABP ensina aos alunos processos e procedimentos complexos, como planejamento e comunicação. Atingir esses objetivos, no entanto, requer tempo para que professores e alunos adquiram os comportamentos e estratégias necessários para o sucesso da ABP.

Além da pesquisa, há relatos convincentes de educadores de que a ABP é um método de ensino rigoroso, relevante e envolvente que oferece suporte à investigação autêntica e à aprendizagem autodirigida pelo aluno, conforme pode ser observado abaixo, na tabela 02.

Tabela 03
Relatos dos professores

Supera a dicotomia entre conhecimento e pensamento, ajudando os alunos a "saber" e "fazer". Apoia os alunos no aprendizado e na prática de habilidades na resolução de problemas, na comunicação e na autogestão. Incentiva o desenvolvimento de hábitos mentais associados com aprendizagem contínua, a responsabilidade cívica e o êxito pessoal ou profissional. Integra áreas curriculares, instrução temática e questões comunitárias. Avalia desempenho no conteúdo e nas habilidades, utilizando critérios semelhantes àqueles existentes no mundo do trabalho, encorajando assim a aprendizagem bem-sucedida, a fixação de metas e o melhor desempenho. Cria comunicação positiva e relações cooperativas entre diferentes grupos de estudantes. Atende as necessidades de aprendizes com diferentes níveis de habilidade e estilos de aprendizagem. Envolve e motiva estudantes entediados ou indiferentes.

Fonte: BIE (2008, p. 20)

Dessa maneira, além de promover a competência acadêmica e alcançar os objetivos tradicionais da educação, a ABP é benéfico para os alunos de hoje.

Como qualquer outro método de ensino, a ABP pode ou não ser utilizada de maneira efetiva. Na melhor das hipóteses, a ABP ajuda você, como professor, a criar uma sala de aula eficaz, onde você e seus alunos podem formar uma comunidade de aprendizado que seja focada em realizações e que tenha autonomia e participação na comunidade. Isso permite que você se concentre nas principais ideias e perguntas na vanguarda de seu currículo, crie atividades em sala de aula envolventes e instigantes e promova a aprendizagem autônoma entre os alunos.

Uma vez definido o conceito de ABP e apresentados os benefícios de tal metodologia, se faz necessário identificar o panorama dos estudos que integram a matemática com a Aprendizagem Baseada em Projetos.

Metodologia

O presente estudo tem como objetivo apresentar um levantamento de estudos que focalizaram a implementação da Aprendizagem Baseada em Projetos em processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Desse modo, elegemos a perspectiva da pesquisa qualitativa para nortear nossos procedimentos metodológicos, conforme os estudos de Gerhardt e Silveira (2009) além de Minayo (1999). Assim, no tocante aos procedimentos metodológicos, buscamos respaldo na pesquisa bibliográfica, parte indispensável dos trabalhos científicos, pois se constitui no referencial teórico que embasa o processo de investigação, uma vez que apresenta conceitos e pressupostos cientificamente validados. Em vista disso, autoras como Gerhardt e Silveira (2009) consideram a parte “mãe de toda pesquisa”.

Na pesquisa bibliográfica os dados são coletados a partir de publicações em periódicos e artigos científicos, revistas, livros, boletins, jornais, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, entre outros segundo Freitas e Prodanov (2013). O investigador seleciona, analisa e organiza as informações em uma forma escrita compreensível e as apresenta como parte do relatório final da pesquisa.

Para realizar o mapeamento, foram realizadas pesquisas em duas bases de dados distintas, o Catálogo de Teses e Dissertações (CTD) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no dia 16 de julho de 2022 e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no dia 01 de agosto de 2022. Foram utilizados os seguintes descritores "Aprendizagem Baseada em Projetos" AND “Matemática” e eles apresentaram 27 pesquisas na CTD e 12 na BDTD.

Como critérios de exclusão adotou-se ausência do termo matemática e/ou ausência do termo “Aprendizagem Baseada em Projetos”. De tal forma, para este estudo, foram selecionadas 06 pesquisas.

Outro ponto, a fim de atender aos requisitos do XVI CIAEM, foi também realizado um recorte no levantamento com a finalidade de reduzir a quantidade de pesquisas abordadas neste estudo. Dessa forma, neste estudo apresenta-se apenas as pesquisas realizadas de 2020 em diante. De tal maneira, no próximo tópico, serão realizadas breves descrições das pesquisas encontradas.

Panorama de pesquisas

Com relação às pesquisas encontradas, obtiveram-se seis correspondências. Contudo, após o recorte no levantamento, serão abordadas apenas duas. Para fazer a apresentação dessas duas, optou-se por abordar as seguintes informações: objetivo geral, referencial teórico, sujeitos de pesquisa e conclusões.

Ao observar a distribuição das pesquisas por nível de ensino, como apresentado na tabela 03, observamos uma ausência de pesquisas nos anos iniciais, ensino médio e formação continuada.

Tabela 03
Pesquisas por nível de ensino

Anos iniciais	00
Anos finais	01
Ensino Médio	00
Formação Inicial	01
Formação Continuada	00

Fonte: produzido pelo autor.

As pesquisas encontradas nos mostram que as investigações estão voltadas para os anos finais e para a formação inicial de professores. Em face do exposto, apresenta-se, agora, uma breve descrição das duas pesquisas encontradas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, Fuzaro (2020) abordou a ABP. Esta pesquisa apresentou como objetivo geral "Investigar e analisar uma estratégia educacional elaborada e aplicada baseada na Interdisciplinaridade e na Aprendizagem Baseada em Projetos".

Quanto ao arcabouço teórico utilizado para tratar a ABP, Fuzaro (2020) utilizou autores como Bender (2014), BIE (2008), Barell (2010), Boss e Krauss (2007) entre outros.

Por sua vez, os sujeitos e o processo metodológico apresentados são alunos do 8º ano, convidados a desenvolver um projeto interdisciplinar por meio da metodologia ABP, e este relacionava os conhecimentos da área de educação física e de matemática.

Como conclusão, Fuzaro (2020) identificou interesse de 98% dos participantes em aprender e/ou ter aulas pautadas pela ABP. Contudo, relatou também limitações e dificuldades com a proposta ABP. Ele relata dificuldades para instituir o projeto interdisciplinar frente a cultura tradicional escolar e seus métodos avaliativos, além de incompatibilidade de horários entre professor coordenador e professores parceiros, entre outros.

A outra investigação encontrada, Filho (2021), aborda a metodologia ABP na formação inicial de professores. Neste estudo, o objetivo foi "analisar as contribuições de sua utilização no componente curricular Matemática por meio das atividades do subprojeto de Matemática do Programa de Residência Pedagógica da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior na formação inicial docente".

Como referencial teórico foram adotados os seguintes autores: Bacich e Moran (2018), Bender (2014), BIE (2008) entre outros.

No que diz respeito aos sujeitos e à ideia central do processo metodológico, o projeto “O valor do dinheiro” foi constituído a partir da interação colaborativa entre pesquisador e três (03) participantes do Programa de Residência Pedagógica que atuavam numa turma de 6º ano, onde foram desenvolvidas as atividades do projeto. Durante três (03) momentos presenciais, com duração de quatro (04) horas cada, o pesquisador apresentava as características essenciais da ABP ao tempo que se formulava as primeiras ideias sobre o tema central do projeto. O projeto nasceu a partir da necessidade de revisar conteúdos sobre os Números Decimais, assunto do 3º bimestre, e introduzir elementos da Geometria, assunto a ser estudado no bimestre seguinte.

No que concerne à conclusão, conforme Filho (2021), os resultados apontam que a formação dos licenciandos participantes do Programa de Residência Pedagógica, alcançou uma superação dicotômica entre teoria e prática, inter-relacionando a universidade e a escola, o que favoreceu a consolidação da atuação profissional mais acertada e consciente na organização da escola e na medição do processo de ensinamento. Dessa forma, a utilização da ABP corroborou com a construção de competências, uma vez que proporcionou apropriação dos métodos ativos para Educação, articulação teórico-prática, adoção de atitudes colaborativas e, especialmente, saberes matemáticos por meio de situações concretas.

Considerações finais

Pode-se observar neste estudo que a ABP é uma ferramenta interessante que pode proporcionar um processo de ensino e aprendizagem de qualidade. Por outro lado, não há consenso na literatura para a definição da metodologia da ABP. Entretanto, a metodologia se mostra voltada para uma aprendizagem orientada para investigação.

Já em relação ao panorama de pesquisas que contemplam a matemática e a Aprendizagem Baseada em Projetos, verificamos que os estudos estão direcionados para os anos finais do ensino fundamental e formação inicial de professores, não contemplando outras esferas como a educação infantil, os anos iniciais do ensino fundamental, ensino médio e a formação continuada de professores.

Ao observarmos a tabela 03 deste estudo, a ABP, “supera a dicotomia entre conhecimento e pensamento”, observável explicitamente na pesquisa de Filho (2021). Nota-se, também, que esta metodologia consegue integrar diferentes áreas do conhecimento, como podemos observar na pesquisa de Fuzaro (2020) e na tabela 03 deste estudo. Um terceiro ponto, a metodologia ABP mostrou-se capaz de motivar os alunos, como podemos observar na tabela 02, assim como na investigação de Fuzaro (2020).

Portanto, sugere-se que pesquisadores e instituições de ensino invistam mais recursos em pesquisas voltadas para a Aprendizagem Baseada em Projetos, principalmente na disciplina de matemática.

Referências e bibliografia

Barell, J. (2007). Problem-based learning: an inquiry approach (2a. ed). Corwin Press.

Bender, W. N. (2014). Aprendizagem baseada em projetos: educação diferenciada para o século XXI (Tradução F. de S. Rodrigues). Penso.

Buck Institute for Education. (2008). Aprendizagem baseada em projetos: guia para professores de ensino fundamental e médio (2a.ed., Tradução D. Bueno). Artmed.

Filho, S. M. C. (2021). Metodologias ativas no Programa Residência Pedagógica: uma abordagem da Aprendizagem Baseada em Projetos para o Ensino de Matemática [Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual da Paraíba]. Biblioteca Central UEPB. http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3739

Fuzaro, T. C. (2020). Ensino e aprendizagem interdisciplinar por meio da ABP: uma proposta relacionando educação física e matemática [Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo]. Biblioteca da Escola de Engenharia de Lorena (EEL/USP). https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/97/97138/tde-25082021-125144/pt-br.php

Gerhardt, T. E.; Silveira, D. T. (2009). Métodos de pesquisa. UFRGS. https://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf

Larmer, J., & Mergendoller, J. R. (2010). Seven essentials for project-based learning. Educational leadership, 68(1), 34-37. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/64271329/Seven_Essentials_for_Project_Based_Learn-libre.pdf?1598364317=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DSeven_Essentials_for_Project_Based_Learn.pdf&Expires=1672857687&Signature=dXTOKLeL0OiGN~tah~LGcma5LCmioveoiqNk- yfMFTuTKnxpR1Z1gikeLykPSmPzI9qpMu-qQqjU8IqD2p2ZK-wClLZGs5ghYF-F~Vgo0mO01QWCjAcVo0jxAouZVg0AHVr1sAllEVfOpIKPaGua-kGgonJc33iruP6TAjj1FUE- axSD6huddby9KwRN5pSIUKOI-Vh5Kg7X7FvdCtR3-4Rj~MYRJICBEl5Oz~wJvIYaWGX1FXdxJUCcQ~Ycw5~l9Ot~NsJQpRvQVGDkddayq8AapqJ41ehs06DbHvWgJlmsjrB1YF0EUmy2Vp2QJIQIpZrfkP8K81iyQ2tSeft7NA__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

Minayo, M. C. de S. (org.). (1994). Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade. (18a ed). Vozes. http://www.faed.udesc.br/arquivos/id_submenu/1428/minayo2001.pdf

Prediger, J., Berwanger, L., & Mörs, M. F. (2013). Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. Revista Destaques Acadêmicos, 1(4).

Prodanov, C. C., & De Freitas, E. C. (2013). Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico (2a ed.). Feevale. https://www.feevale.br/Comum/midias/0163c988-1f5d-496f- b118-a6e009a7a2f9/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf

Schlemmer, & Schlemmer. (2008). Teaching beyond the test: differentiated project-based learning in a standards-based age. Free Spirit Pub.

Tomlinson, C. A. (2010). Differentiating instruction in response to academically diverse student populations. In: R. Marzano (Org.), On excellence in teaching, Bloomington: Solution Tree Press.

Tomlinson, C. A. (1999). The differentiated classroom: responding to the needs of all learners (2a. ed.). Pearson.

Pensamiento Crítico al resolver Problemas Matemáticos

Luis Fernando **Plaza** Gálvez
Unidad Central del Valle del Cauca
Colombia
lplaza@uceva.edu.co
Jorge Enrique **de los Ríos** Giraldo
Unidad Central del Valle del Cauca
Colombia
jdelosrios@uceva.edu.co
Efraín **Vásquez** Millán
Unidad Central del Valle del Cauca
Colombia
emillan@uceva.edu.co
Kelly Salomé **Arredondo** Rangel
Unidad Central del Valle del Cauca
Colombia
kelly.arredondo01@uceva.edu.co

Resumen

Por medio de esta comunicación se desea evidenciar como el Pensamiento Crítico (PC en adelante), puede actuar en las matemáticas al enfrentarse a la Resolución de Problemas (RP en adelante). Para ello, se recomendarán una serie de estrategias a ser implementadas por el docente de matemáticas ante el estudiante, independiente del momento de formación. Dichas estrategias estarán presentes al estimular en los estudiantes un espíritu crítico, por medio de sus actitudes y finalmente fomentar una serie de habilidades. Para lo anterior, se usará un método de investigación del tipo documental cualitativo con corte descriptivo y enfoque deductivo por medio del análisis y síntesis de publicaciones especializadas.

Palabras clave: Actitudes; Habilidades; Matemáticas; Pensamiento crítico; Resolución de Problemas

Introducción

La matemática se puede expresar por medio de los números y estos se evidencian a través de: datos, cantidades, medidas; y con estas se pueden hacer: estimaciones, ordenaciones, comparaciones, tomar decisiones, localizaciones etc., bajo una estructura lógica. A la anterior información se le debe la razón de los argumentos e interpretaciones a través del PC. Por lo anterior se desea que el docente de matemáticas, ponga en marcha algunas estrategias didácticas para estimular las actitudes, vistas estas como disposiciones, hábitos y rasgos y ejecutar algunas habilidades sobre PC, a través de la RP donde se pueda cuestionar la información, los procesos y los resultados. Por medio del PC, se busca que el estudiante: sea objetivo al expresar una afirmación, al evaluar una fuente, pueda diferenciar argumentos y construir los propios. Para lo anterior, se usará un método de investigación del tipo documental cualitativo con corte descriptivo y enfoque deductivo por medio del análisis y síntesis de publicaciones especializadas.

Al revisar la literatura, se han encontrado algunos autores como Frankenstein (2001) ha caracterizado el aprendizaje crítico de las matemáticas desde una dimensión política, buscando que los estudiantes comprendan que desde estas se pueda intervenir también en una realidad sociocultural. Además se tiene el trabajo presentado por Pachón (2013), en la que expone como el docente de matemáticas propicia el desarrollo del PC, acercándose al estudiante por una serie de elementos en lo que se ha denominado la Educación Matemática Crítica (EMC). En lo correspondiente a la formación de profesores de matemáticas, se tiene el trabajo de (Muñoz & Palomar, 2014), al destacar la participación de la matemática y su valoración, al jugar el papel e instrumento de promoción del PC en el aula. Finalmente, el PC a las matemáticas es un proceso continuo que comienza con la actitud apropiada de estar dispuesto a reunir, analizar, evaluar, cuestionar y sintetizar abiertamente información, argumentos, ideas, soluciones o creencias, utilizando un conjunto apropiado de habilidades cognitivas que conlleva a una evaluación reflexiva y da como resultado acciones aplicables a las áreas de interés (Radzi et al., 2012).

Por lo anterior, una divulgación del como puede ser aplicado el PC, en el curso de matemáticas, específicamente en los procesos de RP, es pertinente usando para ello la metodología propuesta por Pólya (1945), estimulando en los estudiantes un espíritu crítico, por medio de sus actitudes (Siegel, 1980) y para ello fomentando una serie de habilidades como lo recomienda Facione (1990).

Marco teórico

Para lograr evidenciar los resultados obtenidos, inicialmente se tendrán en cuenta la metodología concerniente a la RP, posteriormente se describirá el actuar bajo una actitud crítica, (vista como las disposiciones, los hábitos de tipo mental y los rasgos intelectuales) y finalmente las habilidades que se deben implementar para poder fomentar el PC en las matemáticas.

Cuando se desea motivar al estudiante a actuar bajo la figura del PC, en los procesos inherentes a la RP, estos serán llevados a cabo llevado la metodología de Pólya (2011), la cual incluye 4 pasos los cuales son: Comprender el problema, Diseñar un plan, Ejecución de dicho plan y Tener una visión retrospectiva de la solución, al verificar su cumplimiento.

Al poder fomentar y estimular en los estudiantes un espíritu crítico (Siegel, 1980), se está inculcando una actitud crítica, la cual se refleja a través de tres escenarios, los cuales son:

- Disposiciones: Las disposiciones son tomadas como las diferentes manifestaciones y motivaciones internas con las que cuenta el estudiante, para enfrentarse a la RP. entre las que se tiene, según Ennis (1985): Curiosidad, Mente abierta, Sistematicidad, Capacidad de análisis, El camino de obtener la verdad, Autoconfianza, Madurez al formular juicios, Flexibilidad y Deseo de estar bien informado.
- Hábitos del tipo mental: Vistos estos como hábitos de indagación y de evaluación, los cuales en el contexto matemático, consisten en algunas características y estrategias tales como: explorar algunas ideas matemáticas, formular preguntas, dar ejemplos, análisis de las respuestas encontradas en busca de errores (Hafni et al., 2019).
- Rasgos intelectuales: Son características de la mente necesarias para desarrollar pensadores críticos imparciales, recomendado en todo contexto por parte de Paul y Elder (2002), los cuales deben cultivar valores y virtudes personales e intelectuales, para que piensen con perspicacia e integridad. ‘Entre estos rasgos se tienen: La humildad intelectual, la autonomía intelectual, la integridad intelectual, el coraje intelectual, la empatía intelectual y la imparcialidad (justicia/neutralidad).

De la misma manera las habilidades de PC (Facione, 1990), en los estudiantes se ven en la matemática a través de: Análisis, Interpretación, Inferencia, Explicación, Evaluación y Autorregulación.

Metodología

Esta comunicación de investigación fue del tipo documental cualitativo con corte descriptivo y deductivo. Se soportó en análisis y síntesis de referentes clásicos sobre PC y RP, las cuales permitió recomendar una serie de actitudes y habilidades, para que desde la matemática el estudiante, se pudiera enfrentar a los problemas con fundamentación lógica.

Resultados y Discusión

Después de tener claridad, respecto de los referentes teóricos, el estudio permitió al identificar las cuatro fases de la metodología recomendada por Pólya, el cómo estas se podían articular con el espíritu crítico a través de una actitud crítica en los tres escenarios antes expuestos, y así a los estudiantes de matemáticas se les puede estimular y fomentar el PC, en los procesos de RP. Finalmente, se relacionan las diferentes habilidades, con que debe contar un pensador crítico y su implementación desde los procesos de RP matemáticos, de la siguiente manera.

Desde las actitudes

Inicialmente, se articulan las actitudes que permiten fomentar el espíritu crítico, bien sean las Disposiciones, los Hábitos o los Rasgos intelectuales, según lo recomiendan Siegel (1980), Ennis (1985), Hafni et al. (2019) y Paul y Elder (2002) respectivamente con todas y cada una de las cuatro fases de RP, planteadas por Pólya (2011), teniendo para ello la aplicación desde la matemática, para propender por un PC.

Al comprender el problema, se desea que el estudiante actúe con curiosidad, con esas ansias de conocer y explorar nueva información. Además es necesario que se haga una serie de preguntas, como qué se pide, qué me dan, qué se requiere, mirar la correcta formulación del problema, qué tipo de información (datos) se tiene acerca del problema, actuando siempre con mente abierta, valorando los supuestos (muy usados en la matemática) y razones si se presentan. Esta curiosidad debe venir con una humildad intelectual, de tal manera que admita la ignorancia y sea verdaderamente sensible a lo que sabe y lo que no sabe, o el reconocimiento de que se podría descubrir nueva información y admitir que se estába equivocado si fuera el caso.

Para Diseñar un plan, el estudiante debe estar en la capacidad de aceptar el tipo de solución que se pueda presentar, así como reconocer una posición distinta a la propia, actuando bajo una gran capacidad de análisis, para lo que se desea estar bien informado en el respectivo contexto, incluyendo los presaberes necesarios. En eta etapa debe actuar de una forma sistemática, organizando de la mejor manera la información recibida, así como los instrumentos a usar. Este diseño, se debe llevar a cabo bajo la figura de una autoconfianza, pues debe creer en sus propios conceptos para así emitir una serie de juicios y soportar los argumentos que se pudieran presentar. Este plan debe ser flexible, para permitir la opción al debate y estar abierto a la diversidad de opiniones. Aquí es importante tener el hábito mental de la indagación, pues se buscan soluciones del tipo matemático, que ayudan a encontrar errores, así como a evaluar las razones y los supuestos antes mencionados. Como rasgo, cabe mencionar la presencia de una autonomía intelectual , pues se deben aceptar las conclusiones y juicios emanadas de otras personas, y si es el caso de estar en capacidad enfrentarse al debate, si llegase, pero teniendo en cuenta que se puede opinar y pensar sin presión alguna.

A través de la Ejecución del plan, se desea obtener siempre la verdad así se presenten obstáculos. Aquí es necesario, tener el hábito de conocer varias fuentes de información y métodos de solución antes de tomar un dictamen soportado numéricamente, con tendencias disímiles, pues reforzarían en su defecto la decisión a tomarse. Es importante valorar a partir de una empatía intelectual, el camino de solución si se reflexiona partiendo de ideas que no sean las propias. Adicionalmente, bajo la integridad intelectual se espera que el estudiante experimente y ponga en ejercicio una buena gama de conocimientos adquiridos previamente. Se puede identificar y admitir con pudor, las diferencias y debilidades en sus propias tendencias.

En la Visión Retrospectiva, Se debe actuar de una manera reflexiva para la solución del problema en cuestión, pues al darse el caso de encontrarse varias soluciones, se debe contar con la suficiente madurez al emitir un juicio bajo los argumentos y evidencias aportados si es el caso numéricamente. Además, por medio de los hábitos mentales mencionados antes, se busca delimitar el problema de tal manera y coadyuvar con la mejor solución, actuando de una forma exigente y rigurosa, y buscando errores, si existieren. El PC, actúa bajo la figura de la verificación, demostración y validación de los resultados reflejados en las cifras y cantidades obtenidas. El rasgo intelectual de la imparcialidad, permitirá valorar con justicia y equidad la decisión y raciocinio tomados, respecto del problema en análisis. Aquí cabe perfectamente la comparación, la clasificación como argumentos de decisión a la mejor opción se hubieren varias.

Desde las habilidades

Ahora se evidencia, como todas las habilidades de PC expuestas por Facione (1990), influyen en la RP desde la matemática, en la metodología recomendad por Pólya (2011) de la siguiente manera:

En la primera fase del proceso donde se debe tener Comprensión del Problema, es necesario contar con la destreza de una buena capacidad de Análisis, pues además de ser una actitud importante en el estudiante como se mencionó antes, también es vista como una destreza útil al detallar, comprender y caracterizar los argumentos expuestos, así como la información suministrada y necesaria a través de las constantes, parámetros, variables, incluyendo los presaberes del contexto matemático. Este Análisis, a su vez debe ir e la mano con una correcta Interpretación pues debe llevar inmersa la claridad de la posible relación entre los datos suministrados y por obtener, así como saber en que momento se recurre a una información complementaria que ayude una mejor comprensión del problema y no dar pie a la presencia de ambigüedades . Aquí la interpretación juega un papel importante, pues es la que permite una correcta traducción de un lenguaje coloquial a un lenguaje matemático.

En la etapa correspondiente al Diseño del plan, el estudiante de matemáticas, debe poner en práctica una Inferencia, pues a partir de la información suministrada debe contar con la capacidad de concluir razonablemente y emitir juicios o hipótesis soportados en leyes, teoremas, conceptos previos, usando para ello la inducción y la deducción, así como sacar conclusiones que le permitan estructurar un plan de solución bajo fundamentación matemática.

Cuando se está en la Ejecución del plan, proyectado anteriormente, el estudiante debe para ello contar con el talento de la correcta Explicación, en la que justifique contundentemente sus argumentos, sus procederes para solución, criteritos de contexto que justifiquen sus juicios, incluyendo sus consideraciones, supuestos y si fuera el caso cuestionar sus propias creencias (coraje intelectual). Esta habilidad, se refleja a través de una buena comunicación oral y/o escrita.

Finalmente, para tener una Visión Retrospectiva, son importantes las competencias de Evaluación y Autorregulación. En la primera mencionada, es importante que el estudiante pueda contar con la capacidad de valorar las apreciaciones, argumentos y resultados encontrados de tal manera que se puedan encontrar los errores de la resolución en cuestión, así como dar el aval de un nuevo conocimiento si se pudieran hallar con miras de aplicación a nuevos procesos. En la última competencia, se busca que el estudiante pueda examinar sus propias reflexiones, se cerciore que los cálculos y cifras encontradas obedecen a la información suministrada y procedimientos analíticos ejecutados, dejar claro que los resultados son congruentes con los datos iniciales. Finalmente es importante, que tenga el criterio de cambiar el proceso de solución si se llega a dar cuenta que emitió un juicio herrado.

Al implementar proyectos que impliquen RP y un posterior fomento del PC en su solución, estos deben llevar consigo una serie de estrategias que deben incluir lectura y escritura para análisis, trabajos en equipo que fomenten la discusión de resultados y la deliberación a través de argumentos, así como la reflexión de las causas y las consecuencias inmersas en el problema.

Conclusiones

Al realizar la investigación, se pudo concluir que el docente de matemáticas puede implementar el PC, haciendo uso de la metodología de RP propuesta por Pólya, al articularse con algunas estrategias que estimulan el espíritu crítico, a través de una serie de actitudes como Disposiciones, Hábitos y Rasgos intelectuales. Finalmente, el PC, también se puede fomentar por medio de una serie de habilidades del tipo cognitivo tales como el Análisis, la Interpretación, la Inferencia, la Explicación, la Evaluación y la Autorregulación.

La RP, bajo la influencia del PC, le garantiza al estudiante de matemáticas una formación con objetividad, al realizar una mejor toma de decisiones, una mejor evaluación de juicios y razonamientos propios y extraños, así como una mejor comunicación entrante y saliente.

Es necesario que los docentes de matemáticas, permitan que sus estudiantes pongan en práctica esas habilidades en cualquier instante y fuera de su propio contexto; por ejemplo, al expresar sus propias opiniones de una forma abierta y sin el temor al escarnio publico

Es importante, que, desde los cursos de matemáticas, los estudiantes en cualquier instante de su formación, adquieran una cultura crítica basada en actitudes y habilidades, las cuales redundaran en una práctica permanente al resolver problemas de toda índole en su vida cotidiana.

Al lograr tener esta cultura crítica, puede ser ampliada con otro tipo de prácticas, fuera de la matemática, como en ciencias sociales a través de la lectura crítica.

Las estrategias didácticas, para la implementación de le PC a través de la matemática, puede ser extendida a otros cursos en la formación integral de los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Ennis, R. (1985). *A logical basis for measuring critical thinking skills. Educational Leadership, 43*(2), 44–48. https://www.ascd.org/el/articles/a-logical-basis-for-measuring-critical-thinking-skills

Facione, P. (1990). *Critical thinking: A statement of expert consensus for purposes of educational assessment and instruction (Executive Summary)*. Millbrae, CA: The California Academic Press.

Frankenstein, M. (2001). Reading the world with math: Goals for a critical mathematical literacy curriculum. *The Australian Association of Mathematics Teachers Inc*, 53. https://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/papers/frankenstein.html

Hafni, R., Sari, M. & Nurlaelah, E. (2019, April). Analyzing the effect of students' habits of mind to mathematical critical thinking skill. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1211, No. 1, p. 012074). IOP Publishing. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1211/1/012074/meta

Muñoz, Y. y Palomar, J. (2014). Desarrollo y valoración del pensamiento crítico como competencia transversal en la formación de profesores de matemáticas. *Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI)*, (2). Disponible en: https://raco.cat/index.php/RevistaCIDUI/article/view/368755

Pachón, Y. (2013). El pensamiento crítico en la enseñanza de las matemáticas. *En VII Cibem*. https://core.ac.uk/download/pdf/328836713.pdf

Paul, R. & Elder, L. (2002*). Critical thinking: Tools for taking charge of your professional and personal life*. Prentice-Hall, Upper Saddle, NJ.

Pólya, G. (2011). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Editorial Trillas

Radzi, N., Mohamad, S., Abu, M., & Phang, F. (2012). Are math-oriented critical thinking elements in civil engineering workplace problems significant?: Insights from preliminary data and analysis. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 56*, 96-107. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.636

Siegel, H. (1980, November). Critical thinking as an educational ideal. In *The Educational Forum* (Vol. 45, No. 1, pp. 7-23). Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.1080/00131728009336046

Pensamiento Crítico y Pensamiento Creativo en Educación Primaria: Características de una Estrategia Didáctica STEAM Enfocada en los Residuos Electrónicos

Keyner Duvan **Prada** Perea
Universidad de Antioquia
Colombia
keyner.prada@udea.edu.co
Laura Marcela **Agudelo** Agudelo
Universidad de Antioquia
Colombia
marcela.agudelo@udea.edu.co

Palabras clave: Educación STEAM; Educación primaria; Planeación didáctica; Investigación Cualitativa; Pensamiento crítico; Pensamiento creativo; Residuos eléctricos y electrónicos.

En este trabajo de investigación se indaga por las características de diseño que requiere una propuesta didáctica con enfoque STEAM, en la que se aporte al desarrollo del pensamiento crítico y el pensamiento creativo, a partir de reflexiones en torno a algunos problemas ambientales causados por la mala gestión de residuos de aparatos eléctricos y electrónicos (RAEE). La propuesta se llevó a cabo en la básica primaria, con estudiantes de quinto grado de una institución educativa del sector oficial en la ciudad de Medellín, Colombia.

En el marco de la investigación, se desarrollaron dos problemáticas centrales de discusión a nivel tanto de contexto internacional como de contexto nacional/institucional. El primero, se centró en las necesidades educativas del siglo XXI, principalmente en la formación de ciudadanos capaces de afrontar los retos de una sociedad globalizada, en constante cambio, altamente tecnológica y demandante de habilidades que permitan dar respuesta a problemas complejos (Meller, 2016; Espinosa, 2018). El segundo, se enfocó en la problemática ambiental emergente debido al consumo excesivo de dispositivos tecnológicos y la débil gestión alrededor de sus respectivos residuos electrónicos, los cuales crecen cada vez más a nivel mundial (Donalo, 2018).

En 2019, la institución educativa inició un proceso de transición de un modelo disciplinar, centrado en la adquisición de saberes específicos, a un modelo interdisciplinar, organizado por nodos y enfocado en el desarrollo de habilidades (Plan de Área, 2022). En 2022 se acogió el enfoque STEM/STEAM como una estrategia viable para el cumplimiento de los objetivos educativos. A pesar de que el curriculum institucional propicia una organización flexible que admite la interdisciplinariedad, siendo el primer paso para lograr un cambio real en los procesos formativos dentro de la institución (OEI, MEN y Parque Explora, 2022), se presentaron múltiples dificultades para implementar metodologías acordes con el enfoque acogido. Es así como surgió la iniciativa de brindar alternativas sobre las características de diseño que requiere una estrategia didáctica desde STEM/STEAM.

Se entiende STEAM como un enfoque interdisciplinar entre ciencia, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas, que parte de un problema o cuestión del mundo real y se centra en los contenidos y habilidades transversales, en lugar de los contenidos y habilidades específicos de cada asignatura (Kennedy y Odell, 2014). En este sentido, el diseño de la propuesta de aula no se enfocó en desarrollar un contenido en particular, sino que se centró en desarrollar el pensamiento crítico y el pensamiento creativo como habilidades comunes a las áreas implicadas. Además, la integración de las áreas se realiza a partir de la interacción entre el campo de estudio STEAM y el contexto económico, social y ambiental. (Yakman, 2010).

Los problemas ambientales, en particular la inadecuada gestión de los residuos eléctricos y electrónicos, emergen como contexto de integración que potencia las discusiones y apropiación colectiva de saberes en el aula, en pro del trabajo interdisciplinar y el desarrollo del pensamiento crítico y el pensamiento creativo. Además, la metodología de aula se fundamenta en una perspectiva histórico-cultural de la educación, la cual concibe que estudiantes y maestros participen activamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de forma que se afirmen en su producción y se realicen como seres humanos en lo que hacen (Karpov, 2005).

La propuesta de aula se dividió en dos momentos, cada uno, de los cuales se desarrolló desde el trabajo en grupos. En el primer momento se realizó un proceso de contextualización y reconocimiento del problema, en donde se llevó a cabo un cine foro desde algunos cortometrajes. Se realizaron análisis de cifras estadísticas y se cerró el momento con dos encuentros con una asociación y una fundación de la ciudad, especializadas en el tema; un encuentro con modalidad virtual y otro presencial. En el segundo momento se propusieron ‘pequeños’ proyectos de investigación dirigidos por los estudiantes en sus grupos de trabajo, en el que, en interacción conjunta con los docentes, se desarrollaron procesos de investigación relacionados con la gestión de los residuos electrónicos en su comunidad/barrio.

Como resultados, se encontró que el diseño de una propuesta STEAM que favorezca el desarrollo del pensamiento crítico y el pensamiento creativo debe partir de una situación orientadora, en este caso son los problemas ambientales por los RAEE. Se orienta a unos objetivos de aprendizaje claros y diferenciados de los objetivos de la actividad, ya que en ocasiones se pierde el horizonte de aprendizaje (desarrollo de habilidades) por trabajar la temática de la actividad. Es importante incluir actividades que delimiten los conocimientos previos y permitan seleccionar un punto de partida. También, se requiere potenciar el desarrollo de nuevos conocimientos y no solo aportar en el marco de los conocimientos ya adquiridos, esto a partir de actividades de síntesis y de cierre, las cuales, dejan ver los avances que se van dando en el proceso.

Agradecimientos

Este póster es producto del programa de investigación código 1115-852-70767, y el proyecto 71349 financiados por el Ministerio de Ciencia Tecnología e Innovación a través del PATRIMONIO AUTÓNOMO FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, contrato CT 183-2021.

Referencias bibliográficas

Botero, J. (2018). Educación STEM. Introducción a una nueva forma de enseñar y aprender. STEM Educación Colombia.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), Ministerio de Educación Nacional (MEN) y Parque Explora. (2022). Visión STEM+: Educación expandida para la vida. MEN.

Meller, P. (2016). Una introducción a las habilidades escolares para el siglo 21. Cieplan. *Santiago*. Plan de Área. Ciencias naturales, Matemáticas, Tecnología y Emprendimiento. Institución Educativa La Esperanza.

Karpov, J. V. (2005). *The neo-Vygotskian approach to child development*. Cambridge University Press.

Yakman, G. (2010). What is the point of STE@ M?–A Brief Overview. *Steam: A Framework for Teaching Across the Disciplines. STEAM Education*.

Prácticas docentes y uso de tecnologías para el desarrollo del razonamiento matemático en la resolución de problemas durante la transición del bachillerato a la licenciatura en Matemáticas

Tania Azucena **Chicalote** Jiménez
Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
tania.chicalote@cinvestav.mx

Resumen

El presente documento forma parte de una investigación doctoral en proceso relacionada con la transición del bachillerato a la formación superior en Matemáticas. El objetivo de este primer estudio es contribuir a la investigación sobre los aspectos y prácticas educativas basadas en la RP (Polya, 1965; Schoenfeld, 1985; Schoenfeld, 2014; Santos, 2019) que podrían favorecer a que la transición e integración a la formación universitaria en Matemáticas sea más apacible y redituable para los estudiantes. En esta ponencia se presentan algunos resultados preliminares obtenidos de una primera prueba piloto en la que se asignó una tarea basada en la RP a estudiantes de primer semestre y de quinto semestre (o superior) de la carrera de Matemáticas. Así, se realizó un análisis descriptivo con enfoque cualitativo para determinar la influencia de las prácticas docentes y el uso de tecnologías en los procesos de razonamiento de los estudiantes dentro de la RP.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Implementación curricular; Resolución de problemas; Matemáticas; Geogebra; Investigación cualitativa; México.

Introducción

Con el desarrollo de las sociedades se ha hecho evidente para la población la importancia y necesidad de tener una mejor formación académica y el acceso a niveles educativos superiores como parte de una mejor calidad de vida. En México, generación tras generación constata que a mayor nivel de estudios mayor probabilidad de encontrar un trabajo con mejores condiciones laborales (SNE, 2018, p.470). Ahora bien, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) se recalca la necesidad, cada vez mayor, de entender y ser capaz de usar matemáticas en la vida diaria, como parte del cotidiano, de la herencia cultural y en el trabajo sin importar la formación académica dentro de la comunidad científica y técnica. "En este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan hacer [usar] matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas" (NCTM, 2000, p. 5). Así, se establece que la educación debe favorecer que los estudiantes centren su interés y atención hacia el desarrollo de habilidades y estrategias para la resolución de problemas que les permitan ir más allá de la "reproducción" de conocimientos para entonces construir un pensamiento matemático robusto que posibilite formular y resolver diversos tipos de problemas.

Planteamiento del problema

Los datos obtenidos en los exámenes diagnósticos de ingreso a la licenciatura[1] reflejan que durante el bachillerato no se logra con suficiencia la comprensión de algunos conceptos matemáticos, aún menos se desarrollan habilidades y estrategias relativas a la resolución de problemas que permitan a los alumnos transitar del nivel de reproducción al nivel de análisis. En particular, en las carreras del área de las ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías se espera que, al ingresar, los alumnos tengan afianzados los conceptos básicos de matemáticas y que tengan un desarrollo básico del razonamiento y habilidades que les permitan abordar los problemas matemáticos durante su formación universitaria, más aún, que les posibiliten estar inmersos en el quehacer matemático. Sin embargo, esto no sucede así, pues la integración a la formación universitaria conlleva una fuerte crisis que resulta en el peor de los casos en el abandono de los estudios superiores. De acuerdo con Hull y Seeley (2010), en muchos casos, los estudiantes graduados de bachillerato no estarán preparados para seguir los cursos superiores, aún cuando hayan pasado los cursos y aprobado sus exámenes de graduación (p. 443).

Marco contextual

Las investigaciones relativas a la transición del bachillerato a la licenciatura en matemáticas han considerado diferentes perspectivas. Por medio de ellas se ha buscado explicar las etapas por las que transcurre el estudiante durante este periodo de transición; Clark y Lovric (2010) definen que el proceso de la transición de uno a otro nivel conlleva una crisis ante la interrupción, modificación y distorsión de las rutinas previas, por lo que dicha crisis es inevitable pero necesaria para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático avanzado y la autonomía ante su formación. Otros autores (Leviatan, 2008; Di Martino y Zan, 2010; Rach y Heinze, 2016; Di Martino y Gregorio, 2019) han buscado determinar los factores que intervienen para que el estudiante tenga éxito durante el proceso de integración al nivel superior, entre estos se encuentran el autoconcepto como aprendiz, el conocimiento previo de matemáticas y la calidad de las estrategias de aprendizaje (Rach y Heinze, 2016). Por otra parte, Leviatan (2008) considera que las dificultades de los estudiantes se deben a que las matemáticas en bachillerato tienden a centrarse en el desarrollo de habilidades para la resolución de ejercicios concretos y rutinarios, mientras que en la universidad éstas son más abstractas y se enfatizan los aspectos del cuestionamiento inquisitivo, la resolución de problemas no rutinarios y el rigor matemático.

---

[1] En algunas pruebas diagnósticas de ingreso a la licenciatura se ha registrado que los alumnos que ingresan al área de las Ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías muestran un bajo rendimiento en el área de matemáticas, por ejemplo, en el año 2020 del 100% de alumnos que ingresó a una de estas licenciaturas en la UNAM, 68.9% obtuvo menos del 50% de aciertos, mientras que 21.1% sólo obtuvo entre 50% y 60% de aciertos (CODEIC-UNAM, p.56).

Dado esto, se vuelve necesario contribuir en la investigación sobre los aspectos, factores y prácticas que contribuyen a una transición a la licenciatura en Matemáticas más accesible y con mayores oportunidades de éxito para los estudiantes.

Considerando lo anterior, se presentan los primeros resultados de un estudio piloto cuyo objetivo es contribuir a la investigación sobre los aspectos y prácticas educativas basadas en la Resolución de Problemas (RP) (Polya, 1965; Schoenfeld, 1985; Schoenfeld, 2014; Santos, 2019) que podrían favorecer a que la transición a la carrera en Matemáticas sea más apacible y que la integración a la formación universitaria sea más redituable para los estudiantes e instituciones. En esta primera prueba se presentó una tarea basada en la RP a estudiantes de primer semestre y de quinto semestre (o superior) de la carrera de Matemáticas. Así, la intención fue realizar un análisis descriptivo con enfoque cualitativo que permita determinar la posible influencia de las prácticas docentes en los procesos de razonamiento de los estudiantes dentro de la RP.

Metodología

Población de los grupos de estudio

El grupo G1 estuvo formado por 8 estudiantes de primer semestre que participaron de forma voluntaria y que cursaban la asignatura de Geometría Moderna I de la carrera de Matemáticas. Por otra parte, el grupo G2 estuvo conformado por 4 estudiantes de últimos semestres (superior a quinto semestre) que participaron también de forma voluntaria y que cursaban la asignatura de Seminario sobre Enseñanza de las Matemáticas.

Descripción de la metodología didáctica de cada uno de los grupos

En el grupo G1, los contenidos correspondientes al curso se desarrollaron a partir de problemas o preguntas iniciales planteadas por la docente, éstos debían ser explorados previo a la clase. Durante la clase, se incentivó, por medio del ejemplo, el uso del Software de Geometría Dinámico Geogebra para la exploración de los problemas propuestos, así como para la simulación de construcciones geométricas con regla y compás y la verificación de conjeturas iniciales. Además, la dinámica del curso estuvo dirigida a que los estudiantes desarrollaran la habilidad de argumentación y no sólo el uso de algoritmos ya establecidos, por el contrario, por medio de los problemas y preguntas planteadas se buscó fomentar que generaran conjeturas y diversos caminos para corroborar la validez de la conjetura, así como el intercambio de ideas en forma grupal. De esta forma, para el momento en que se asignó la tarea, los estudiantes habían recibido una formación dirigida a la obtención de conjeturas, a la argumentación y a la exploración por medio de Geogebra y se habían revisado contenidos relativos a las características de los diferentes tipos de triángulos, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, propiedades de ángulos y triángulos inscritos en una circunferencia y cuadriláteros cíclicos.

En el grupo G2, al ser un curso centrado en la enseñanza de la matemática y la RP, se presentaron y analizaron las heurísticas y estrategias planteadas por Polya (1965) y los elementos involucrados en la RP de Schoenfeld (1985). En este curso no se brindó una formación centrada en contenidos matemáticos particulares pero sí con la intención de utilizar la RP como metodología de enseñanza. En este sentido se buscó observar si el conocimiento sobre estos factores teóricos favorece un buen desempeño en la RP, más allá de la práctica en RP.

Contexto de la asignación de la tarea de resolución de problemas

A cada grupo se le asignó la tarea de resolver un problema del área de Geometría. Al grupo G1 se le asignó el siguiente problema: Se tiene un cuadrado ABCD. Si sobre el lado DA se construye el punto medio E, se traza el segmento BE y se construye el segmento perpendicular CF con F pie de la perpendicular sobre BE. ¿Qué tipo de triángulo es el formado por los puntos C, D y F? Demuestra tu conjetura de dos formas distintas.

Al grupo G2 se le planteó el siguiente problema: Se tiene un cuadrado ABCD. Sobre el lado DA se traza el punto medio, luego se traza el segmento que va del punto B al punto medio trazado y se traza la perpendicular que se levanta sobre el segmento recién trazado y que pasa por el vértice C. ¿Qué se puede decir del triángulo formado por C, D y el pie de la perpendicular? Demuestra tu conjetura de dos formas distintas.

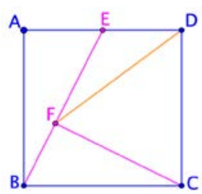


Figura 1. Representación en Geogebra del problema planteado

En el caso de G1, se brindó la oportunidad de abordar la tarea de forma individual o por pareja, ya que esta última modalidad de trabajo es la que prevalecía en la dinámica del curso; en el caso del grupo G2, la tarea se asignó de manera individual. Los estudiantes se llevaron a casa el problema y tuvieron alrededor de tres días para un primer abordaje del problema, luego en clase presencial se brindó el espacio para que de forma grupal se expusieran las conjeturas obtenidas, las ideas iniciales para la demostración de la conjetura y posibles dudas o inquietudes. Esta clase formó parte de los elementos de control de la RP (Schoenfeld, 1985).

Para recabar los datos, se solicitó desarrollar una bitácora para registrar el proceso de resolución, así como los cuestionamientos, ideas o procesos que surgieron durante la resolución de la tarea. Para ello se solicitaron los siguientes elementos:

1. Descripción de la exploración, comprensión del problema y obtención de una conjetura. En esta sección se esperaba que los estudiantes describieran cuáles fueron los medios, instrumentos y procesos que utilizaron o siguieron para explorar y comprender el problema. Además se esperaba que los estudiantes enunciaran una afirmación (obtención de una conjetura) a demostrar durante el proceso de resolución de problemas.
2. Descripción del proceso de elaboración de un plan o estrategia para la resolución del problema. En esta sección se esperaba que los estudiantes expresaran una posible forma de abordar la demostración de su conjetura, para ello se podrían nombrar los conceptos o contenidos que consideraban inmersos en el problema y aquellos que podrían llevarlos a demostrarla, así como las posibles fuentes de búsqueda y las preguntas que se plantearon.

3. Proceso de resolución del problema. En esta sección se pretendía que los estudiantes desarrollarán los argumentos y procesos que los llevaron a demostrar la conjetura obtenida.
4. Extensión del problema. En esta sección se solicitó a los estudiantes escribir por lo menos un nuevo cuestionamiento, generado a partir del planteamiento o de la resolución obtenida.

A partir del análisis de estos elementos se busca describir el tipo de razonamiento y formas de actuar que los estudiantes de los diferentes grupos de estudio ponen en marcha dentro de la RP, así como las diversas dificultades que enfrentaron. Esto con el objetivo de identificar si las prácticas docentes descritas influyeron en los procesos de pensamiento y las formas de actuar de los estudiantes y si podrían favorecer una mejor integración a su formación universitaria.

Análisis de los resultados

Como punto de partida para el análisis se considera si los participantes reflejaron aspectos de las categorías descritas por Schoenfeld (1985): 1) Los conocimientos y recursos con los que cuenta el estudiante; 2) El acceso que tiene a las estrategias (heurísticas) para hacer progresos en problemas desafiantes; 3) La capacidad de monitoreo y autorregulación; 4) Los sistemas de creencias relativos a las matemáticas y el autoconcepto como pensador y hacedor de matemáticas. Así, se analiza de qué manera los estudiantes manifestaron los elementos de las categorías anteriores y de los rubros de la bitácora antes descritos. Además, se busca identificar si se reflejan algunos elementos de las dimensiones consideradas por Schoenfeld (2014) dentro de aulas poderosas: 1) El contenido matemático inmerso en las actividades permitió a los alumnos practicar y desarrollar hábitos de pensamiento matemático productivos; 2) La demanda cognitiva (reto) fue adecuada para el nivel de los estudiantes; 3) Los estudiantes tuvieron acceso equitativo al contenido matemático; 4) Los estudiantes muestran que las actividades brindaron las oportunidades para conjeturar, explicar, argumentar matemáticamente y comprometerse de forma matemática con ellas; 5) La retroalimentación brindada favorece que los estudiantes identifiquen el desarrollo adecuado o inadecuado de sus respuestas.

Para el análisis de los resultados se consideró la evaluación de 3 bitácoras elaboradas en parejas y 2 bitácoras elaboradas de forma individual por estudiantes del grupo G1 y 4 bitácoras individuales de estudiantes del grupo G2. En esta comunicación se describen de forma general las respuestas vertidas por ambos grupos y se considera el análisis del proceso de resolución desarrollado por un equipo del grupo G1 y uno de G2 (Tabla 1). Cabe destacar que en las bitácoras de G1 se observa que la forma de trabajo predominante fue la individual tanto para comprender y explorar el problema, así como para la redacción general de la bitácora, mientras que los estudiantes trabajaron de forma colaborativa principalmente para intercambiar y verificar ideas durante el proceso de comprensión, de resolución y para obtener retroalimentación de sus pares. A continuación se describen los resultados obtenidos en los rubros de la bitácora.

Descripción y análisis: Exploración y comprensión del problema

Los estudiantes de ambos grupos describieron su forma de actuar, pensar y los procesos seguidos para comprender el problema, en G1 algunos estudiantes mencionaron las preguntas que se plantearon, esto permitió identificar de manera global algunas creencias de sí mismos (Schoenfeld, 1985), en G2 se enfocaron en la descripción de contenidos conceptuales, heurísticas y en la argumentación. En G1 todos utilizaron Geogebra para realizar la construcción planteada, algunos usaron las herramientas del software para medir distancias entre puntos o la construcción de circunferencias para comparar los radios y con ello comparar longitudes. El uso de Geogebra sirvió para que los estudiantes pudieran representar y comprender el problema, y así obtener una conjetura sobre el tipo de triángulo de la construcción. En G2 realizaron un dibujo a mano (con lápiz y papel cuadriculado) de la construcción planteada, sólo un estudiante expresó haber utilizado Geogebra para realizar la construcción. Los primeros utilizaron la cuadrícula de la hoja o bien una regla para medir. En G1, todos los estudiantes conjeturaron que el triángulo en cuestión es isósceles. En G2, la mayoría llegó a la misma conjetura, sólo un estudiante se cuestionó sobre la relación del área del triángulo y la del cuadrado, sin dar una conjetura precisa.

Descripción y análisis: Elaboración de un plan

En general se observa que los estudiantes de G1 consideran dos posibles caminos para demostrar su conjetura, el primero relativo a demostrar que dos lados del triángulo miden lo mismo, el segundo a demostrar que dos ángulos internos del triángulo son iguales. Algunos identificaron como aspecto importante, el hecho de que tanto los ángulos formados por la perpendicular como los del cuadrado son rectos, esto permitió que pudieran considerar el cuadrilátero CDEF. Además, expresaron utilizar Geogebra para verificar las ideas que surgieron. Por otra parte, mencionaron que, después de haber obtenido la conjetura, se enfrentaron a varios momentos de frustración y desesperación al no encontrar rápidamente un camino a seguir para demostrar su afirmación. Algunos de ellos expresaron “dejar reposar” las ideas y frustraciones por un tiempo considerable para después retomarlo con una actitud más calmada, además en este lapso de tiempo se llevó a cabo la clase presencial en la que se expresaron de forma grupal las ideas iniciales, lo cual permitió que los estudiantes reconsideraran los recursos con los que contaban y otras posibles vías de abordar la conjetura. Los estudiantes de G2 propusieron diversos caminos a seguir, dependiendo de la conjetura obtenida, uno de ellos consideró que dado que en la construcción se generan varios triángulos rectángulos podría utilizar el teorema de Pitágoras, otro de ellos observó la presencia de un cuadrilátero por lo que decidió investigar en un libro sobre las características de estas figuras. Dos más consideraron analizar la semejanza de triángulos para poder establecer la relación que había entre el área del triángulo con respecto del área del cuadrado, además un estudiante utilizó la cuadrícula y la regla para medir las áreas y longitudes de algunos triángulos y del cuadrado.

Descripción y análisis: Proceso de resolución del problema

En general, en G1 se observa que los estudiantes utilizaron resultados relativos a características de cuadriláteros cíclicos, el teorema de Ptolomeo, criterios de semejanza y congruencia de triángulos, y ángulos en una circunferencia (contenidos revisados en el curso), mientras que en G2 utilizaron los criterios de semejanza y congruencia de triángulos, así como la medida de los ángulos determinados por la construcción. Se observó que los alumnos que trazaron el dibujo a mano en hojas cuadriculadas y con regla graduada midieron longitudes o contaron cuadritos para determinar la ubicación de ciertos puntos, por lo que se pierden de vista las características de la construcción que podrían validar dichos resultados. En la argumentación generada por un equipo de G1 se puede observar que utilizan (aunque no se menciona de forma explícita) la propiedad de que los ángulos internos de un triángulo suman 180° junto con el hecho de que los ángulos del cuadrado inicial son ángulos rectos para así obtener el valor de otros ángulos. Además, se observa que una de las formas de actuar (casi inmediata) de los estudiantes es obtener resultados por medio de "cuentitas" aún cuando no se ha establecido la pertinencia de realizar ciertos cálculos, es decir, se realizan más cuentas de las necesarias (no por ello incorrectas), por lo que se podría mejorar el proceso de monitoreo. Posteriormente, utilizan el hecho de que si en un cuadrilátero convexo sus ángulos opuestos son suplementarios (suman 180°) entonces el cuadrilátero es cíclico, este resultado tampoco lo expresan de forma explícita. Finalmente, también de forma implícita utilizan la característica de que en un cuadrilátero convexo cíclico la medida de un ángulo formado por un lado y una diagonal es igual a la del ángulo formado por el lado opuesto al primero y la otra diagonal. Ahora bien, el estudiante de G2 que determinó la relación entre las áreas del triángulo y del cuadrado, en su argumentación hizo uso de características visuales que proporciona el dibujo. Además, se percata de que, antes de llegar a la relación buscada, determinó que el triángulo en cuestión era isósceles, por lo que consideró haber obtenido un resultado adicional (extensión del problema). Una vez determinada la semejanza y congruencia de ciertos triángulos, midió con regla algunas longitudes, con lo que estableció la relación del área de ciertos triángulos con respecto de la del cuadrado. Luego, usa Geogebra para verificar los resultados obtenidos y determinar si continúa con su procedimiento. Finalmente, obtiene que el área del triángulo en cuestión es igual a $\frac{2}{5}$ el área del cuadrado.

Descripción y análisis: Extensión del problema

Se observó que la fase de extensión no fue desarrollada por la mayoría de los estudiantes. En el grupo G1 algunos consideraron preguntarse sobre propiedades que se generan por otros objetos de la misma construcción o bien ¿si se considera el circuncírculo del triángulo DEB, cuántos otros circuncírculos presentes en la construcción van a ser cortados por el primero? Por otra parte, una alumna expresó que por medio de Geogebra realizó la construcción inicial y observó que se formaba "una figura repetitiva", así se plantea si dicha construcción forma un fractal, "¿cómo luce repetir este proceso?", "¿cómo se demuestra que el punto D es punto medio de LK y que D es vértice de ED?" Dichas preguntas se dejan abiertas para explorar. En G2 aquellos que trabajaron sobre congruencias y semejanza de triángulos se preguntaron sobre los cuadriláteros que ahí se podrían formar o bien la relación entre áreas. Mientras que el estudiante que inició su trabajo considerando áreas, estableció que el triángulo en cuestión era isósceles.

Conclusiones

Como se observó en el análisis, el uso de Geogebra dentro de la dinámica de los cursos favorece que los estudiantes incorporen éste medio como una herramienta para la exploración, comprensión, obtención de conjeturas y verificación (G1), mientras que su ausencia (G2) favorece un uso de los dibujos como representaciones estáticas que favorecen la comprensión pero limitan los procesos de exploración y conjeturación. Aún falta fomentar el uso de SGD como parte de la argumentación dentro de los procesos de resolución y extensión del problema. Por otra parte, se observó que dentro de la dinámica de los grupos falta generar los espacios para que los estudiantes planteen sus propios problemas, ya sea a partir de los propuestos por la docente o bien ajenos a ellos. Lo anterior, nos lleva a concluir la importancia de brindar los espacios físicos y temporales, dentro de los cursos de Matemáticas, para que los estudiantes utilicen los SGD como medio no sólo de representación si no para manipular los elementos que conforman la construcción para la obtención de conjeturas, su verificación, y más aún, para la producción de resultados propios o adicionales del problema. Dadas las respuestas de G2, se asume que a pesar de haber recibido una formación de más de 2 años en Matemáticas, varios estudiantes aún requieren desarrollar habilidades para la argumentación formal, la concatenación refinada de ideas y estrategias para abordar la RP. Así, se requiere generar interacciones que promuevan el reconocimiento de los recursos matemáticos con los que se cuentan, la búsqueda de aquellos que no se poseen (o recuerdan) pero que se requieren para luego aplicarlos en su resolución, además, se pone de manifiesto la importancia de generar durante la formación matemática preuniversitaria espacios propicios para elaborar argumentaciones escritas y orales que permitan desarrollar un pensamiento matemático informal pero lógico. Por último, se considera de suma importancia el rol del docente en cada uno de los procesos inmersos en RP, de manera notable en la guía y retroalimentación durante los procesos de monitoreo y control.

Reconocimiento

La autora desea agradecer a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo financiero y de gestión para la realización de esta investigación y su presentación en este congreso.

Referencias y bibliografía

Clark, M., Lovric, M. Suggestion for a theoretical model for secondary-tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20,* 25–37 (2008). https://doi.org/10.1007/BF03217475

CODEIC-UNAM. (2020). *Exámenes para el diagnóstico de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan a nivel licenciatura 2020*, CODEIC-UNAM, México. https://www.codeic.unam.mx/wp-content/uploads/2020/03/Publicaci%C3%B3n-licenciatura-generaci%C3%B3n-2020-version-F.pdf

Di Martino, P., Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 825–843. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

Galindo, C. (2016). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. *EMA*, 2(1), 49-58.

Hull, S. H., Seeley, C. L., & Hirsch, C. (2010). High School to Postsecondary Education: Challenges of Transition. *The Mathematics Teacher*, *103*(6), 442–445. http://www.jstor.org/stable/20876659

INEE. (2019). *Panorama Educativo de México 2018. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación básica y media superior.* INEE, México. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1B117.pdf

Leviatan, T. (2008). Bridging a cultural gap. *Mathematics Education Research Journal, 20*, 105–116. https://doi.org/10.1007/BF03217480

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. En P. Felmer, J. Kilpatrick y E. Pekhonen (Eds.). *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives,* (361-386). Springer.

Liljedahl, P. (2019). Conditions for Supporting Problem Solving: Vertical Non-permanent Surfaces. En Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (Eds.). *Mathematical Problem Solving, Current Themes, Trends, and Research.* Springer.

OECD. (2019). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. PISA, OECD. https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. (Trad. J. Zugazagoitia). México: Trillas (Trabajo original publicado en 1945).

Rach, S. & Heinze, A. (2016). The Transition from School to University in Mathematics: Which Influence Do School-Related Variables Have?. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Santos Trigo, M. (2019). *Mathematical problem Solving and the Use of Digital Technologies*. En P. Liljedahl, M. Santos-Trigo (Eds.). *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research. ICME-13 Monographs*. Springer.

Santos Trigo, M. (2020). La resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital. En Yuri Morales-López y Ángel Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019* (pp.29-40). CIAEM.

Santos-Trigo, M., Aguilar-Magallón, D., Reyes-Rodríguez, I. (2019). A mathematical problem-solving approach based on digital technology affordances to represent, explore, and solve problems via geometric reasoning. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.). *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development, Research in Mathematics Education*, (pp. 145-166). Springer.

Santos Trigo, M. y Reyes Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 182-201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. Educational Researcher, 43(8), 404–412. https://doi.org/10.3102/0013189X1455

Schoenfeld, A. H., Thomas, M., y Barton, Bill. (2016). On understanding and improving the teaching of university Mathematics. *International Journal of STEM Education* 3(4). https://doi.org/10.1186/s40594-016-0038-z

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Problemas de Matemática em quadrinhos podem facilitar a resolução de problemas?

Johnny Nazareth dos **Santos**
Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
johnnysantosprof@gmail.com
Maria Palmira da Costa **Silva**
Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro, Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
mariapalmirasilva@gmail.com

Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados da análise da produção de estudantes e futuros professores ao resolverem problemas na forma de quadrinhos que foram produzidos, colaborativamente, por grupo do Projeto Fundão, constituído de professoras universitárias, professores da educação básica e licenciandos em Matemática (MATEF). O grupo buscou indícios dos benefícios da exploração de tais problemas em classe, no sentido de impulsionar os estudantes a fazer matemática, pensando, conjecturando, justificando e, compreendendo o que está sendo proposto. Os problemas analisados neste texto são representativos do conjunto elaborado pelo grupo desde 2019, foram aplicados sob a orientação da equipe do MATEF. O interesse e os registros dos mesmos, durante e após as aplicações, justificam as conclusões do grupo de que os problemas em quadrinhos constituem um incentivo ao envolvimento dos estudantes no trabalho em sala de aula e à elucidação de suas dúvidas e dificuldades e propiciam ao professor reformular sua prática.

Palavras chave: Resolução de problemas; Problemas em quadrinhos; Fazer Matemática; Ensino Fundamental II; Brasil.

Introdução

Seguindo a tradição do Projeto Fundão, o grupo de Matemática no Ensino Fundamental (MATEF) vem produzindo subsídios para promover o aprimoramento da prática em sala de aula de professores deste nível de ensino. Há cerca de 4 anos, o grupo iniciou o uso de quadrinhos como recurso facilitador deste processo e alguns problemas foram elaborados e testados, como parte do seu trabalho sobre a diversificação de recursos em sala de aula (Tinoco et al, 2020). As atividades foram produzidas colaborativamente e exploradas com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e também de cursos de formação inicial e continuada de professores dos anos iniciais. No presente trabalho serão analisadas produções de alunos diante dessas situações, com o objetivo de buscar indícios da pertinência desse recurso, dos pontos de vista do envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, da facilitação da leitura e interpretação dos problemas e da construção do conhecimento, bem como dos reflexos dessas experiências na prática do professor.

Considerações teóricas

O presente trabalho se apoia na metodologia do Ensino da Matemática por Meio da Resolução de Problemas. De fato, segundo Onuchic e Alevatto (2011), esta metodologia favorece o aluno a aprender com significado. Para explicitar o que entendemos como um problema, recorremos à caracterização feita pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA (NCTM), citada por Lurdes Serrazina (2017).

> Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (Serrazina, 2017, p. 58).

Por outro lado, nas experiências vividas pelos autores deste trabalho, observamos professores que constatam pouco interesse de seus alunos nas tarefas de sala de aula, e dificuldades por parte deles ao resolverem problemas, muitas vezes referentes à interpretação do enunciado e das questões propostas.

As Histórias em quadrinhos (HQ’s) na educação são, há algum tempo, utilizadas com sucesso em algumas disciplinas; na Matemática, cresce a cada dia um movimento para introduzi-las em sala de aula, como ilustram os trabalhos de Rezende (2015), Pellin (2016), Fagundes (2012) e Moraes (2009). Em muitos outros trabalhos acadêmicos, ou na mídia, são utilizados quadrinhos famosos como: A turma da Mônica, Armandinho, Peantus, Calvin e Haroldo, entre outros, nos quais se encontra algum conteúdo de Matemática que pode ser explorado, em sala de aula.

Incentivado por este movimento e com o objetivo de tentar minimizar as dificuldades de interpretação dos problemas, bem como o desinteresse mencionado anteriormente, o MATEF resolveu, então, escrever problemas sob forma de quadrinhos contextualizados em situações da vida real. Acreditamos, assim como Pellin (2016) ao citar Lopes (2010), que o uso de cenários, personagens e balões pode ser uma maneira criativa para atrair os alunos.

> Os quadrinhos vêm ao encontro da necessidade da educação, a fim de motivar os alunos para a leitura e o aprendizado da matemática, despertando o interesse, seduzindo sua imaginação e ampliando os horizontes de conhecimento da criança .... (Lopes, 2010, Apud Pellin, 2016, p.5)

Ao entrarem em contato com o problema em quadrinhos, os alunos serão mais incentivados a interpretá-lo e a compreender as informações apresentadas ou subentendidas do que frente a problemas que vêm escritos na linguagem formal. A imagem é uma característica dos quadrinhos que permite explicar, sintetizar e acrescentar informações que não estão escritas em palavras.

Pellin (2016) também se refere a Miskulin, Amorin e Silva (2016) que salientam a importância da imagem para a atribuição de significado à situação pelo estudante, o que vem sendo confirmado pela experiência do grupo.

> A imagem deve ser vista como parte integrante do processo de significação, pois ela auxilia o aluno a compreender o texto, pois a criança não lê apenas as palavras em um livro, mas "lê", ou atribui sentido, também considerando as ilustrações, bem como o contexto social em que a leitura se dá. (Miskulin; Amorin; Silva, apud Pellin, 2016, p.6)

Diante dessas considerações, atividades de Matemática apresentadas em um contexto informal de uma sequência de quadrinhos, vêm sendo valorizadas no MATEF, o que vai ao encontro do movimento de uso dos quadrinhos de Matemática em salas de aula no Brasil. Acreditamos que elas constituem um instrumento facilitador do ensino desta disciplina, tornando seus conteúdos mais atraentes para os alunos e as aulas mais dinâmicas, o que pode incentivar o gosto dos mesmos por resolver problemas e favorecer o aprendizado de Matemática.

Desenvolvimento

Antes de apresentar os exemplos das atividades desenvolvidas "Quem tem razão", e "A Matemática das gotas" com as devidas observações, salientamos a metodologia adotada. Conforme mencionado anteriormente, as situações-problemas foram elaboradas em um grupo colaborativo do Projeto Fundão, composto de professores universitários e da escola básica e estudantes de graduação do Instituto de Matemática da UFRJ, o MATEF.

Os professores da escola básica as aplicaram em sala de aula, em grupos ou duplas de alunos, incentivando-os a conversar bastante entre si e a registrar por escrito seus pensamentos, estratégias e cálculos. A intervenção dos professores foi sempre no sentido de insistir na leitura dos quadrinhos e questioná-los sobre as informações e desafios contidos neles. Assim, o grupo valoriza o uso da linguagem materna, oralmente ou por escrito, no fazer Matemática, segundo Walle (2009), pensando, conjecturando, justificando e, principalmente, compreendendo o que está sendo proposto.

A partir dos registros dos alunos e de observações dos professores em sala de aula, foi possível analisar aspectos do comportamento dos estudantes~~,~~ e perceber suas dificuldades, bem como mudanças necessárias na prática dos professores decorrentes dessa experiência. Isto porque, como D'Ambrósio (2017) salienta, o professor pesquisador não lê as soluções apresentadas por seus alunos apenas para verificar os seus erros, mas para aprender com eles. A experiência com problemas em quadrinhos constituiu um desafio não só para os alunos, mas também para os professores que os aplicaram e para os que os elaboraram.

Seguem os quadrinhos com os enunciados usados e observações.

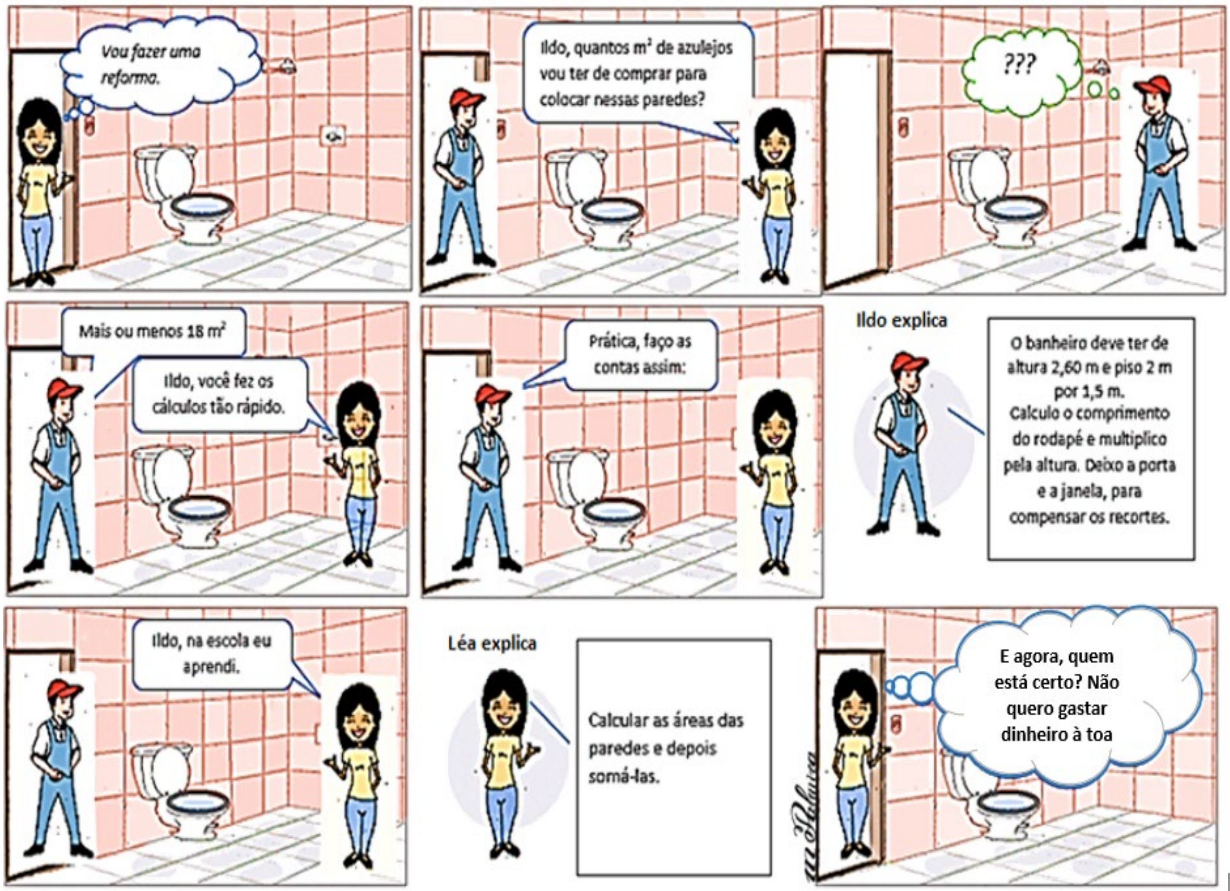


Figura 1. Problema em quadrinhos "Quem tem razão?".

1. Escreva um pequeno texto para um colega explicando a situação apresentada na atividade.

2. Para ajudar a tirar a dúvida da dona de casa, forme uma dupla com seu colega e façam os cálculos sugeridos pelo Ildo e pela dona de casa. Cada um escolhe qual vai fazer.

3. Comparem os resultados obtidos. O que vocês observaram? Se fossem outros números, isso continuaria acontecendo? Por quê?

4. A propriedade que garante essa igualdade pode ser representada de uma maneira geral por:

i) $a.b = b.a$
ii) $a.(b + c) = a.b + c$
iii) $a.(b + c) = a.b + a.c$
iv) $(a + b) + c = a + (b + c)$
v) $a.(b.c) = (a.b).c$

5. Conte um caso que ilustre a preocupação que você ou seus pais tiveram com as despesas, ao planejar uma compra ou uma obra.

Este problema foi explorado com professores, em atividades de formação continuada, e com uma turma de futuros professores dos anos iniciais, de Curso de Pedagogia, em grupos. Uma dupla de alunas do Ensino Fundamental, também resolveu o problema, fora de turma. O trabalho evidenciou dúvidas de interpretação, ilustradas pela pergunta "não há diferença do que eles falaram não?" e relativas a conteúdos como por exemplo: "como calcula área?", "o que é perímetro?" e "como assim, propriedade distributiva?". Alguns questionaram o método da Léa e não o do pedreiro Ildo, considerando-o mais prático, mas não sabiam dizer se era o correto. Ainda quanto à interpretação, vale citar o problema da visualização do banheiro como tendo todas as paredes com a mesma altura. Essas dúvidas geraram uma rica discussão e propiciaram a apresentação da propriedade distributiva pela equipe do Projeto.

A experiência com o problema A Matemática das Gotas (Fig. 2) foi realizada com 2 turmas de alunos dos anos finais do ensino fundamental de uma escola municipais da Zona Norte do Rio de Janeiro, em duplas.

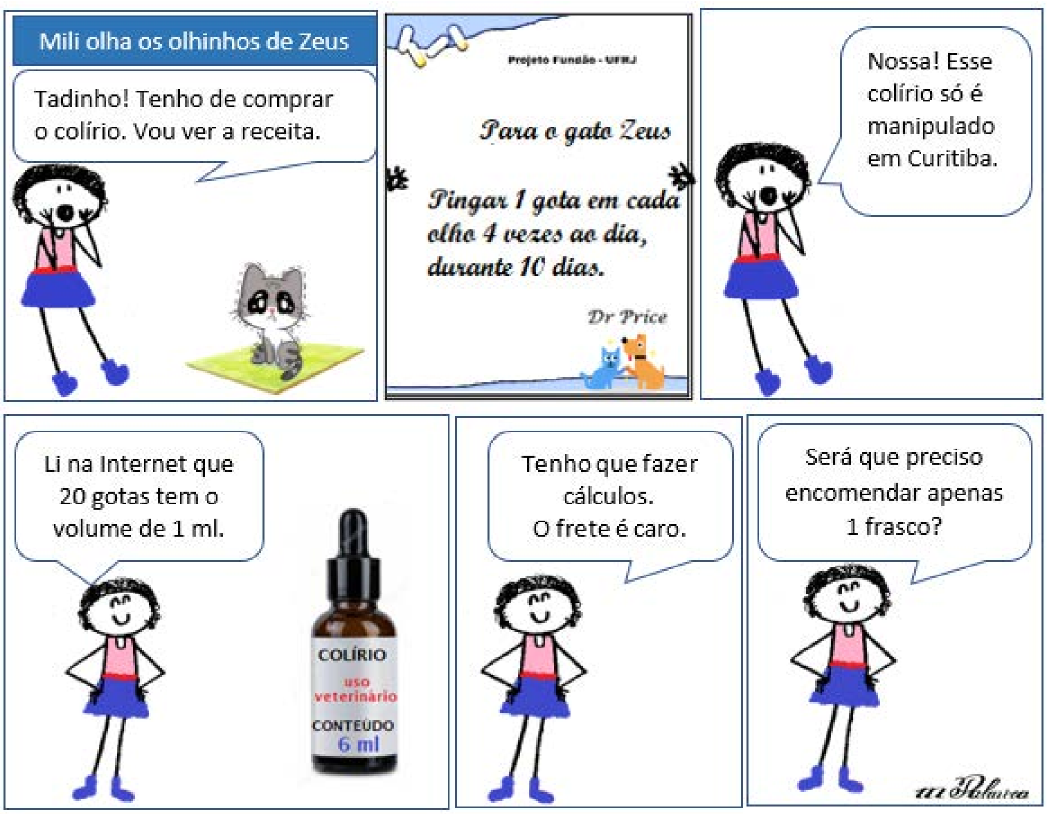


Figura 2. Problema em quadrinhos "A matemática das gotas".

1)Troque ideias com seus colegas sobre toda a situação e sobre em que quadrinhos você tem as informações que permitem responder à pergunta final da Mili.

2) Explique em cálculos e palavras como você responderia à pergunta de Mili do último quadrinho.

3) Se a informação que Mili encontrou na Internet fosse: cada gota contém 0,05 ml de colírio, como você resolveria a dúvida de Mili? Justifique.

4) Use a imaginação e dê um título para a situação da historinha.

5) Troque ideias com seus colegas sobre os cuidados que devemos ter com nossos animais.

Nas experiências com o problema “A Matemática das gotas”, foram observadas dúvidas provocadas pela nova linguagem usada na apresentação, ilustradas por perguntas como: “Cadê a pergunta?”, “Tem que fazer alguma coisa?”, “Como responder?”. A professora se ateve somente a insistir: “Leia novamente; escreva o que está pensando; confie em você”. Em relação aos cálculos e ao pedido para que registrassem seus raciocínios alguns alunos tiveram dificuldade, um deles escreveu “Eu entendi, mas não sei explicar”.

Por outro lado, particularmente catalizadores do interesse dos alunos foram as duas últimas perguntas, indicando que a contextualização do problema foi apropriada. A pergunta 4 foi justificada pelo fato de o problema ter sido aplicado sem título. Destaca-se o número de sugestões dadas pelos alunos, entre as quais o título que adotamos neste texto.

Houve um retorno positivo relativo ao entusiasmo na realização da atividade, com interesse de participar em novas oportunidades, principalmente demonstrado pela turma com mais problemas de disciplina. Eles trabalharam até o final e só entregaram as folhas depois de tentar tudo, esquecendo até do recreio. Por outro lado, a turma mais aplicada foi a que teve melhor desempenho no sentido da correção das respostas. Seguem as transcrições de duas soluções de alunos dessa turma para os itens 2 e 3 do problema.

Dupla A) 2 -*“A Mili colocará 8 gotas dia por dia um período de 10 dias nos olhos de Zeus. Ou seja, ela usaria 80 gotas ao todo e considerando que a caixa de colírio tem em média 120 gotas com os 6 ml ela não precisará comprar mais de uma caixa”.*

3 – *“Apenas iria dividir 1 ml por 0,05 ml e faria o cálculo novamente”.*

Dupla B) 2 - *“1 gota em cada olho 4 vezes ao dia é igual a 8 gotas durante 10 dias é 80 gotas... 20 gotas = 1ml   80 gotas = 4ml   ela só vai precisar de uma caixinha”.*

3 – *“Da mesma forma, pois se uma gota é 0,05ml, então 20 gotas continuam sendo 1ml”.*

Considerações Finais

Os autores deste trabalho tinham como objetivo verificar o interesse dos alunos em resolver problemas apresentados por meio de quadrinhos e contextualizados em situações reais, e a influência positiva dessa prática em relação à aquisição de conteúdos pelos mesmos. Acreditava-se que estes problemas representavam um recurso alternativo face às dificuldades na resolução de problemas em Matemática. Para fazer face aos diversos fatores que hoje afastam os alunos da sala de aula, especificamente dessa disciplina, buscou-se nos quadrinhos a possibilidade de tornar os estudantes protagonistas da aprendizagem e interessados na resolução de problemas. A adesão de professores a esse trabalho já vem sendo percebida pelo MATEF em programas de formação continuada e demais eventos nos quais participa.

A experiência com o problema "Quem tem razão" gerou mais dúvidas de caráter de conteúdo, propiciando assim a construção de conhecimentos específicos. Permitiu também a reformulação da atividade pela equipe responsável que, por exemplo, passou a trabalhar com a planificação do sólido representativo do banheiro.

Na resolução do problema da "A Matemática das gotas", destacou-se o envolvimento dos alunos no trabalho, especialmente aqueles usualmente menos aplicados em sala de aula. A linguagem de quadrinhos atraiu sua atenção, embora inicialmente não reconhecessem que um problema de Matemática podia ser apresentado dessa forma e estranhassem o fato de as perguntas a serem resolvidas não estarem explícitas no texto escrito.

Nessas e em outras ocasiões, os professores adotaram a postura de desafiar sempre os alunos, levando-os a retornar aos quadrinhos em casos de dúvida e incentivando-os a registrar suas soluções. De fato, como afirma Valente (1995), "o professor tem um papel fundamental como proponente de novos desafios e de provocador do desequilíbrio" (p. 42).

O interesse observado, ao aplicar os problemas em quadrinhos em diversos níveis de escolaridade, estimula o grupo a aprimorar-se e a elaborar novos problemas, divulgando-os na comunidade de professores. Nessas experiências, destacam-se, como importantes fatores para aprimorar o fazer matemática em sala de aula, as valiosas interações dos estudantes entre si e a orientação dos professores na condução das atividades, incrementadas pela exploração dos contextos, bastante familiares aos alunos.

Referências

D'Ambrosio, B. S. (2017). O Professor-Pesquisador diante da Produção Escrita dos Alunos. In: Onuchic, Lurdes de la R., Leal Junior, Luiz C. e Pironel, Márcio (org). *Perspectivas para Resolução de Problemas* (p.109-129). São Paulo: Ed Livraria da Física.

Morais, P. (2009). HQs e Matemática. Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura, Porto Alegre, UFRGS. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/23717

Onuchic, L. de la R. e Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, 25, 41, 73-98.

Pellin, J. B. (2016). A resolução de problemas e as histórias em quadrinhos. *Os desafíos da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE.* http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_jacintabandeirapellin.pdf

Serrazina, L. (2017). Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: Onuchic, Lurdes de La R., Leal Junior, Luiz C. e Pironel, Márcio, (org). *Perspectivas para Resolução de Problemas* (p. 55-83), São Paulo, Ed Livraria da Física.

Tinoco, L. A. de A.; Portela, G. M. Q.; Santos, J. N. dos e Santos, M. N. dos. (2020). A Diversidade de Recursos na Sala de Aula e a Construção do Saber Matemático. *Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro*.

Valente, J. A. (1995). Informática na educação: conformar ou transformar a escola. *Perspectiva,* Florianópolis, UFSC/CED, NUP, 24, 41-49.

Walle, J. A. V. (2009). Matemática no Ensino Fundamental Formação de Professores e Aplicação em sala de aula. São Paulo, Editora Artmed.

Propuesta de integración curricular para el aprovechamiento de los espacios físicos y académicos institucionales

Ana Carolina **González-Grisales**
Escuela Normal Superior de Medellín
Colombia
ana.gonzalez2@udea.edu.co
Estefanía **Moreno** Rivera
Escuela Normal Superior de Medellín
Colombia
esmori03@gmail.com
Luis Andrés **Ospina**
Escuela Normal Superior de Medellín
Colombia
rolo246@hotmail.com
Alexander **Castrillón-Yepes**
Universidad de Antioquia
Colombia
alexander.castrillony@udea.edu.co

Una de las necesidades del siglo XXI es promover procesos educativos que permitan el diálogo entre disciplinas para atender a las demandas sociales actuales (Hernández Rodríguez et al., 2017). En este sentido, se espera que la integración de las matemáticas con otras disciplinas trascienda hacia un reconocimiento de los aportes de esta al trabajo interdisciplinario, lo cual hace de la interdisciplinariedad un campo de estudio de creciente interés en Educación Matemática (Williams et al., 2016). Por lo tanto, ofrecer experiencias interdisciplinarias en diferentes niveles educativos es pertinente tanto para las prácticas de enseñanza como para la investigación.

En coherencia con lo anterior, este trabajo busca identificar las oportunidades que ofrece un proyecto escolar para el aprovechamiento de los espacios físicos y académicos de una Institución Educativa en Medellín (Colombia) mediante la articulación de las disciplinas matemáticas y lectura. En el proyecto se estudian los cambios físicos y académicos que ha tenido la Institución en su devenir histórico, para ello, se cuenta con la participación de estudiantes del grado sexto y los profesores de las asignaturas, quienes han establecido vínculos con la comunidad educativa (profesores, directivas, familias) para desarrollar actividades basadas en la investigación.

La integración disciplinar entre matemáticas y lectura se logra a través de los diálogos que establecen los profesores de dichas asignaturas, en donde analizan las competencias de las dos áreas para realizar diferentes actividades. Por ejemplo, se llevó a cabo una actividad que promovió las competencias de comunicación y representación, al incentivar a los estudiantes a realizar una entrevista a integrantes de la comunidad educativa sobre la historia de la Institución, posteriormente hicieron una clasificación de las palabras según su acento, luego sistematizaron la información obtenida en una tabla de frecuencia y finalmente realizaron la respectiva representación gráfica.

Los participantes desarrollan actividades para reconstruir la historia de la Institución, lo que les permite identificar las permanencias y los cambios que ha tenido esta, a su vez, aprovechan esta información para integrar las disciplinas. En particular, se logra evidenciar el estudio de la ubicación y los movimientos en el plano cartesiano, promover la lectura y escritura, trabajo en equipo, sentido crítico y habilidades investigativas. En ese sentido, existen prácticas transversales que brindan a los estudiantes oportunidades para generar posibles estrategias que a nivel del grado (o a nivel institucional) les permitan identificar y reflexionar sobre los espacios que se han perdido, se han transformado y se han generado durante el transcurrir de los años para su aprovechamiento, cuidado y mejoramiento.

Para atender a lo planteado, este estudio se desarrolla bajo un enfoque cualitativo que en concordancia con Creswell (2007), se preocupa por describir de manera detallada e intencionada un fenómeno social. En este caso, se estudia la estructura del proyecto, la manera en que los profesores y estudiantes del grado han procedido en el desarrollo de este y las acciones, reflexiones y estrategias que han generado.

En el proyecto educativo participan cuatro grupos del grado sexto; sin embargo, los avances que se presentan corresponden a los de un grupo (n=33). La implementación de la primera etapa se realizó en ocho semanas con una intensidad horaria semanal de ocho horas: cinco de ellas correspondientes a las clases de matemáticas, dos de geometría y una de lectura. El proyecto incluyó el desarrollo de una guía construida por los profesores, dividida en tres etapas a saber, conocimientos previos, indagación y consolidación de saberes.

Los resultados parciales muestran que los estudiantes presentan un interés en el desarrollo de las diferentes actividades propuestas en el proyecto. Además, los estudiantes se preocupan por conocer la historia de su Institución y por presentar sus avances a la comunidad académica (otros grados). Gracias a los avances realizados en el proyecto se logró consolidar, con la ayuda de la Institución, un laboratorio de matemáticas que da cuenta de la importancia de nuevos espacios de reflexión interdisciplinar. También, se constató el desarrollo de competencias propias de las disciplinas; en matemáticas se destacan procesos de comunicación, representación, planteamiento y resolución de problemas, razonamiento y argumentación y en lectura se evidencia recuperación de información, interpretación de textos, escritura, reflexión y evaluación.

Referencias bibliográficas

Creswell, J. W. (2007). *Investigación cualitativa y diseño investigativo.*

Hernández Rodríguez, C. A., Leff Zimmerman, E., Vasco, C. E., Lenoir, Y., & Uribe Castro, H. (2017). *Interdisciplinariedad: un desafío para transformar la universidad en el siglo XXI.* Universidad Autónoma de Occidente.

Williams, J., Roth, W.-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo Ferri, R., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary Mathematics Education: A State of the Art.* https://doi.org/10.1007/978-3-319-42267-1

XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Propuesta didáctica sobre impresión 3D de fractales en secundaria

Andrés **Mato** Cutrín
España
andresmatocutrin@gmail.com
Teresa **Fernández** Blanco
Universidad de Santiago de Compostela
España
teref.blanco@usc.es

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Secundaria; Educación STEAM; Fractales; Impresión 3D.

Introducción y objetivo

En la actualidad, la educación STEAM no se promueve solo para aumentar el interés del alumnado en las disciplinas científicas. En particular, en la disciplina de matemáticas, diversos estudios como el Cheng et al. (2020) y Wang et al. (2011) muestran que este tipo de educación ayuda a paliar dos grandes problemáticas con las que se encuentra esta área de conocimiento: la ansiedad en el alumnado de cara al estudio de las matemáticas y la dificultad de transmitir entusiasmo o motivación por las matemáticas al alumnado.

El tema de los fractales no suele estar presente en los currículos de secundaria de muchos países, entre ellos España. Sin embargo, se trata de un tema con mucho potencial. Siguiendo a Yildiz y Baltaci (2017), el hecho de que se traten de matemáticas más recientes junto a su utilidad modelando la naturaleza, ayuda al alumnado a tener una mejor visión de las matemáticas.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo principal de la propuesta didáctica es poner en práctica un proyecto STEAM para crear fractales con ordenador mediante un software que permita su posterior impresión en 3D. La propuesta se realiza con dos grupos de 2º de enseñanza secundaria obligatoria (14-15 años), formados por 16 y 29 alumnos, respectivamente.

Desarrollo de la Propuesta

La propuesta se estructura en cuatro sesiones. En la primera sesión se introduce la noción de fractal y se realiza una pequeña construcción con lápiz y papel que ayude a su comprensión.

También se proyecta el video de YouTube: https://youtu.be/4u7TwSwo0rU con la idea de captar la atención de los alumnos. La segunda sesión se centra en la presentación del software para el diseño en 3D, el Tinkercad (https://www.tinkercad.com/). En la tercera sesión los alumnos diseñan su propio generador (Figura 1) y construyen a partir de él su propio fractal para imprimirlo en la cuarta sesión (Figura 2). El resultado final se aprecia en la Figura 3.

Figura 1. Generadores usados por el alumnado.

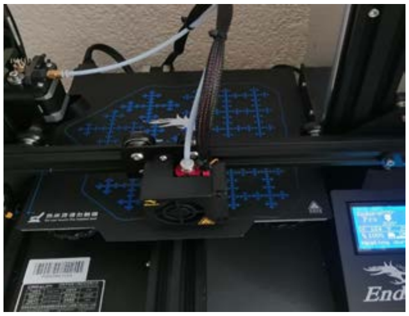


Figura 2. Proceso de impresión.

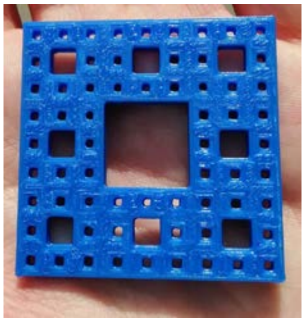


Figura 3. Fractal impreso.

Conclusión

En general, la implementación de esta propuesta fue muy satisfactoria. El alumnado se involucró más en las dos últimas sesiones, cuando se inicia el proceso creativo con ayuda de los recursos tecnológicos y este se plasma en un producto físico. La evaluación del alumnado se realiza mediante una rúbrica que tiene como parámetros su precisión en la construcción realizada, atendiendo al número de iteraciones realizadas sin errores y su motivación e interés por la actividad. Finalmente, se consideran también de interés tanto la transversalidad que aporta una actividad STEAM como el trabajo colaborativo presentes en este proyecto.

Referencias

Cheng, L., Antonenko, P. D., Ritzhaupt, A. D., Dawson, K., Miller, D., MacFadden, B. J., Grant, C., Sheppard, T. D., Ziegler, M. (2020). Exploring the influence of teachers' beliefs and 3D printing integrated STEM instruction on students' STEM motivation. *Computers & Education*, 158, 103983.

Wang, H., Moore, T., Roehrig, G., Park, M. (2011). STEM integration: Teacher perceptions and practice. *Journal of Pre-College Engineering Education Research (J-PEER), 1*(2).

Yildiz, A., Baltaci, S. (2017). Reflections from the lesson study for the development of techno-pedagogical competencies in teaching fractal geometry. *European Journal of Educational Research*, 6(1), 41-50.

QOKA® Tawa Pukllay - Aritmética inka para invidentes

Dhavit Prem (Carlos **Saldívar** Olazo)
Ingeniería de Sistemas - Universidad de Lima;
Maestría Filosofía Epistemología – UNMSM;
Asociación Yupanki
Perú
dhavitprem@gmail.com
Divapati Prem (Alvaro **Saldívar** Olazo)
Administración de Negocios – Universidad de Lima;
Asociación Yupanki
Perú
yachay@yupanainka.com

Resumen

QOKA Tawa Pukllay (QTP) es un método aritmético desarrollado para el proceso de enseñanza y aprendizaje de personas invidentes. QTP está basado en el método aritmético Yupana Inka Tawa Pukllay (YITP) y no requiere utilizar los tradicionales algoritmos indoarábigos, sino que resuelve las operaciones aritméticas de manera lúdica y con algoritmos propios basados en el reconocimiento de patrones y ejecución de movimientos predefinidos que permiten desarrollar estrategias propias. Usa tableros ergonómicos, fichas de textura especial y algoritmos propios, que permiten un efectivo aprendizaje del sistema numérico inca y su equivalencia indoarábiga. QTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en sujetos con discapacidad visual o sujetos videntes con vendas en los ojos para simular condiciones similares. QTP reduce la memoria de trabajo, facilita la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias. Los practicantes manifiestan que QTP les facilita la comprensión y solución de operaciones más que el ábaco tradicionalmente utilizado.

Introducción

Tawa Pukllay (Dhavit-Prem, 2016) es un método aritmético desarrollado y publicado por la Asociación Yupanki entre los años 2014 y 2016 como una propuesta para decodificar el uso de la yupana o calculadora inca (Momath and Wolfram, 2020) hallada en el manuscrito "Nueva Corónica y Buen Gobierno" (Guaman-Poma F., 1616) (figura 1).

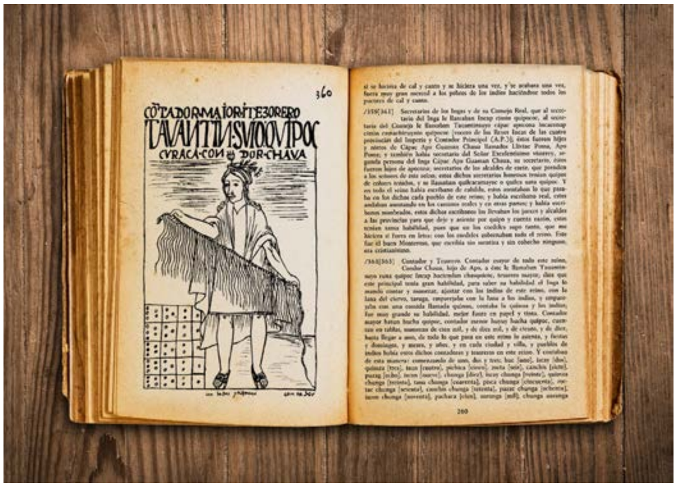


Figura 1. (Recreación) Manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” de Felipe Guaman Poma de Ayala, 1616

YITP se ha presentado en diversas conferencias y exposiciones en Ferias de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC Perú 2015 y 2017), USA Science & Engineering Festival (Washington DC 2016); Congresos Internacionales como RELME 31 (Universidad de Lima, Perú 2017), EFPEM 2017 (Universidad San Carlos de Guatemala), RELME 32 (Universidad de Medellín, Colombia 2018), VI Congreso Internacional de Etnomatemáticas: Saberes, Diversidad y Paz, ICEm-6 (Universidad de Antioquia, Colombia 2018), Congreso Internacional de innovación educativa (Tecnológico de Monterrey, México, 2019).

Validación matemática y formalización de YITP

El artículo *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Dhavit-Prem et al, 2022) presentó la formalización del método, su axiomatización, formación de teoremas y demostración de consistencia mediante el álgebra. Fue aceptado a ser expuesto en el *International Conference on Frontiers of Mathematics and Artificial Intelligence (CFMAI 2022)* en Beijing, China.

Hallazgos en el aprendizaje aritmético mediante YITP

El artículo *Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School*, publicado en la revista *Educational Technology & Society* muestra resultados que sugieren un gran potencial del YITP como herramienta educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética, luego de haber experimentado con un sistema de autoaprendizaje del YITP codificado en un aplicativo (juego serio) para tabletas electrónicas con niños de zonas rurales en situación de aislamiento debido a la pandemia de la Covid19.(Guzmán-Jiménez, 2023). En dicho estudio del tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, se observa la rapidez con la que los estudiantes aprenden tópicos de YITP, así como una mejora en la actitud respecto a las matemáticas. YITP también presenta un impacto favorable en el desarrollo del pensamiento computacional en niños debido al reconocimiento de patrones y elaboración de estrategias (algoritmos) durante el aprendizaje de la aritmética (Alvarado L. et al, 2022).

QOKA Tawa Pukllay

Una de las líneas de investigación con mayor impacto derivadas del método TP es el QOKA TP (QTP) o YITP para invidentes. (Dhavit-Prem, 2018) El nombre "QOKA" corresponde a la estructura de puntos de una fila en la yupana, la cual coincide con las letras Braille **Q**, **O**, **K** y **A**. (figura 2)

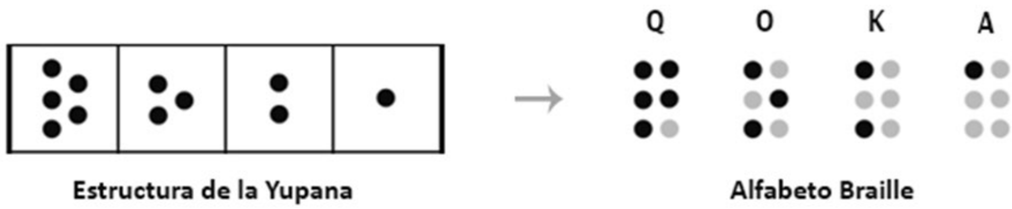


Figura 2. Estructura origina de una fila de la yupana inca y su coincidencia con el sistema Braille

Esta yupana comprende la misma estructura básica que la desarrollada a partir del dibujo de Guaman Poma, es decir que contiene 5 filas y 4 columnas, sin embargo, cada casilla se encuentra en bajo relieve y de manera cóncava, lo cual permite que las fichas que estén presentes en ella sean siempre conducidas al centro de la misma (figura3).

Subitización es la identificación inmediata de un número exacto de objetos en pequeños conjuntos (Piazza M. et al, 2011). Al tener una estructura repetitiva de filas con 5,3,2 y 1 puntos, YITP facilita la subitización de dichos puntos. En personas con discapacidad visual, esta estructura matricial y la dinámica de uso de ambas manos parece estimular la memoria de trabajo espacial y mejorar la recordación táctil de los valores de las casillas (Leo F., 2018) y por lo tanto prescindir del uso de Braille en las casillas del tablero QTP (figura 4).

La yupana QTP puede ser de distintas clases: madera, cartón reciclado, impresión 3D, MDF u otros, tomando las siguientes consideraciones (Dhavit-Prem, 2018):

- El material no debe tener una superficie muy lisa (p.e. plástico o policarbonato), puesto que en estos materiales se suele producir deslizamientos involuntarios de las semillas o elementos de juego. Se sugiere por esto un material de superficie ligeramente rugosa.
- Las casillas en bajo relieve deben tener dimensiones que permitan la operatividad de al menos seis dedos con facilidad (tres de la mano derecha y tres de la izquierda).
- Los espacios entre los casilleros no deben ser ni muy separados que incomoden el tránsito de los dedos de unos a otros, ni muy juntos, para que se haga obvia la distinción. Las casillas adyacentes deben ser equidistantes tanto respecto a las filas como a las columnas a las que pertenecen.
- Tablero antideslizante o garantizar un mínimo de movimiento en su mesa de apoyo para evitar deslizamientos involuntarios: la posición es clave para la rápida orientación del practicante.

- Se deben contar con tres tipos de fichas diferenciables por su forma (esferas, cubos, tetraedros, fichas planas, etc.) y textura (firme, esponjoso, liso, áspero, etc.), pues estos son los atributos que reemplazan la función de las fichas de color en el sistema YITP.

Figura 3. Tablero QOKA TP y semillas de tarwi

Figura 4. YITP con ojos vendados

Aritmética de patrones: algoritmos YITP

QTP se basa en el mismo principio de representación de números, utiliza los mismos movimientos (básicos, de expansión y compuestos) y emplea los mismos algoritmos YITP para la resolución de operaciones aritméticas. La explicación detallada se encuentra en el libro Yupana Inka – Decodificando la matemática inka. Método Tawa Pukllay. (Dhavit-Prem 2016, 2018).

Conclusiones

QTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en sujetos con discapacidad visual o sujetos videntes con vendas en los ojos para simular condiciones similares. Estos estudios sugieren que QTP reduce la memoria de trabajo, facilitando la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias. Los practicantes manifiestan que QTP les facilita la comprensión y solución de operaciones más que el ábaco: el ábaco *cranmer* o *soroban* es actualmente el más popularizado en los diversos campos de la educación especial (Amato S. 2013; Hong, 2006).

Referencias y bibliografía

Amato S. et al (2013) The Abacus: Instruction by Teachers of Students with Visual Impairments. 272 Journal of Visual Impairment & Blindness, July-August 2013

L. Alvarado et al (2022), "Teaching of the Yupana with the Tawa Pukllay method for developing the Computational Thinking in children," 2022 IEEE World Engineering Education Conference (EDUNINE), 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/EDUNINE53672.2022.9782386.

Guaman Poma, F. (1616). Nueva Corónica y Buen Gobierno

Guzman-Jimenez, R., Dhavit-Prem, Saldívar, A., & Escotto-Córdova, A. (2023). Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School. Educational Technology & Society, 26 (1),79-94.79ISSN 1436-4522 (online) and 1176-3647 (print).

Hong, Shen (2006) Teaching Mental Abacus Calculation to Students with Mental Retardation. Journal of the International Association of Special Education, v7 n1 p56-66 Spr 2006

Leo, F. (2018) Improving spatial working memory in blind and sighted youngsters using programmable tactile displays. https://doi.org/10.1177/2050312118820028

MoMath and Wolfram (2020). History of Mathematics Project - Incan Yupana. Rescatado de https://www.history-of-mathematics.org/artifacts/incan-yupana

Piazza, M., et al. Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. Cognition (2011), doi:10.1016/j.cognition.2011.05.007

Prem, Dhavit (2014-2016). Yupana Inka – Decodificando la matemática inka, Método Tawa Pukllay. Asociación Yupanki (Ed.)

Prem, Dhavit (2018). Hatun Yupana Qellqa. Antología de estudios. Tawa Pukllay esencial y extensiones. Asociación Yupanki (Ed.)

Prem, Dhavit et al (2019). Tawa Pukllay Aipanakuy: The 4 Sacred Games of the Inkas in a ludic arithmetic competition. Editora Artemis. DOI 10.37572/EdArt_2806213851

O que ensinar de Matemática Financeira para formar cidadãos críticos

Angela Cássia **Biazutti**
Projeto Fundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
biazutti@im.ufrj.br
Geneci Alves de **Sousa**
Projeto Fundão /UFRJ e SENAI/CETIQT
Brasil
prof.geneci@yahoo.com.br
Joana Luiz **Marques**
SME/RJ e PEMAT/UFRJ
Brasil
joanaluiz.marques@gmail.com
Lilian **Nasser**
Projeto Fundão e PEMAT, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com
Marcelo **Torraca**
Projeto Fundão /UFRJ e SEEDUC/RJ
Brasil
torraca@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de Matemática Financeira na Educação pré-universitária brasileira. Com uma estratégia pedagógica, visual e sem uso de fórmulas, pretende-se apresentar esse conteúdo tornando ainda mais interessante o seu aprendizado. Por meio de uma sequência didática que parte de conceitos matemáticos básicos, necessários para o estudo deste conteúdo, até chegar à Matemática Financeira mais avançada, os exemplos e exercícios são ligados ao cotidiano dos estudantes (Nasser, 2012). Desta forma, eles são preparados para resolver situações envolvendo conceitos básicos de economia e finanças, de modo a se tornar cidadãos críticos e conscientes. Este trabalho se apoia nos resultados das investigações apresentadas em Marques, Biazutti e Nasser (2022) e Torraca, Sousa e Nasser (2022), que visaram analisar a forma como a Educação Financeira é abordada nos livros didáticos brasileiros atuais, após o estabelecimento da Base Nacional Comum Curricular, BNCC (BRASIL, 2018).

Palavras-chave: Educação pré-universitária; Educação Financeira; Base Nacional Comum Curricular (BNCC); Programa Nacional do Material e do Livro Didático (PNLD); Cidadãos Críticos; Tomada de decisões; Brasil.

Introdução

A Matemática Financeira é muito importante para a formação dos alunos, por estar presente na vida deles desde antes de começarem a frequentar a escola. Por esta mesma razão, pode ser um tema bastante motivador para o estudo de matemática. Entretanto, muitos professores têm dificuldade para incluir este conteúdo em suas aulas, pois não vivenciaram esta aprendizagem na sua formação inicial e continuada. Outro problema é a escolha, por parte do professor, de material didático adequado, já que alguns abordam o assunto de forma superficial, artificial ou com base em fórmulas.

No Brasil existe legislação específica sobre as habilidades a serem alcançadas pelos alunos, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a Educação pré-universitária. Mesmo assim, ao analisar coleções de livros aprovadas pelo Programa Nacional do Material e do Livro Didático (PNLD) e outros materiais didáticos oficiais, destinados a escolas públicas, como foi constatado pelas investigações apresentadas em Marques, Biazutti e Nasser (2022) e Torraca, Sousa e Nasser (2022), pode-se notar que ainda não existe consenso sobre o quê, quando e como ensinar sobre este tópico.

Neste trabalho é apresentada uma proposta para o ensino de Matemática Financeira na Educação pré-universitária brasileira (6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio). É explicitada também a abordagem pedagógica sugerida para ensinar os conteúdos de porcentagem, juros simples e juros compostos, que inclui a recomendação da BNCC de evitar o uso da regra de três e a utilização de fórmulas, incentivando o raciocínio lógico dos alunos, assim como explorar o uso de calculadoras e outras tecnologias.

Uma forma de evitar o uso de fórmulas é utilizando a estratégia pedagógica e visual sugerida em Nasser (2012), com a representação dos valores da situação financeira num eixo de setas, mostrando a variação do valor do dinheiro ao longo do tempo. Essa estratégia foi usada na formação de professores e em pesquisas de campo, com resultados satisfatórios, como, por exemplo, em Novaes (2009) e Sousa, Andrade e Nasser (2019).

Esta proposta também inclui explanações e exercícios sobre conceitos básicos de economia e finanças e situações da realidade dos alunos, tais como compreender um extrato de conta corrente ou de cartão de crédito, funcionamento de empréstimos e de investimentos em bancos, pagamento de taxas e impostos e significado e efeitos da inflação. Em resumo, não basta ensinar conceitos, métodos e algoritmos, mas é essencial desenvolver a habilidade crítica para tomar decisões, de forma a capacitar os alunos para a vida real. Desta forma, torna-se possível realizar algo mais abrangente, a Educação Financeira Consciente, conforme preconizada em Vaz e Nasser (2021).

Recomenda-se que seja desenvolvida uma sequência didática, abordando situações reais, incluindo uma etapa específica sobre "Porcentagem e Matemática Financeira". Esta etapa inicial deve começar logo após o estudo de números racionais nas formas de representação fracionária e decimal. Nesta sequência didática devem ser propostos problemas envolvendo a porcentagem como fator de aumento ou de desconto, na notação decimal. Numa etapa posterior devem ser abordados problemas envolvendo descontos e acréscimos sucessivos, preparando para o estudo de juros.

Matemática Financeira básica

Nesta proposta, alguns objetivos a serem atingidos inicialmente são: a compreensão, por parte dos alunos, de um extrato de conta corrente; o significado de taxas ou impostos e desconto ou acréscimo nas compras de produtos. Além disso, é essencial, em todas as etapas, exercitar nos alunos a tomada de decisões financeiras, de modo a capacitá-los para escolher as mais vantajosas ou menos prejudiciais para eles. A utilização de calculadoras é importante neste sentido, por proporcionar rapidez na obtenção de resultados, o que é importante fora do ambiente escolar, no momento de tomar decisões. Elas também incentivam e justificam o uso da notação decimal.

Esta proposta levou em consideração os resultados da investigação apresentada em Marques, Biazutti e Nasser (2022), de como o conteúdo de Matemática Financeira é apresentado no material da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro e em alguns livros didáticos atuais do Ensino Fundamental, aprovados pelo PNLD (2020), comparando também com a legislação brasileira atual sobre o tema.

Conceitos importantes para atingir os objetivos citados são os de números racionais, necessários para a compreensão de um extrato de conta, onde os racionais positivos podem ser associados a valores creditados e os negativos a valores debitados. Esses números, tanto na forma de fração quanto na notação decimal, são essenciais para a compreensão de porcentagem, utilizada no cálculo de impostos, aumentos e descontos.

Por outro lado, para facilitar a compreensão de números racionais, por parte dos alunos, uma contextualização financeira é bastante natural, já que faz parte da vida de todos eles. Esta proposta recomenda, então, que seja utilizada uma abordagem pedagógica com duas vias, na consolidação dos conteúdos de números racionais e de Matemática Financeira.

Um exemplo que reflete esta abordagem é apresentado a seguir.

Exemplo 1

Um dos impostos existentes no Brasil é o chamado Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS). Faz parte da arrecadação dos estados e incide sobre diversos produtos, no caso de circulação dentro de um mesmo estado ou quando o produto é fabricado num estado e vendido em outro. Na nota fiscal de compra dos produtos vem sempre incluído o percentual do ICMS recolhido (denominado alíquota). O exemplo a seguir mostra como calcular o preço sem ICMS e como ele influi no preço.

O preço final de um tipo de piso é R$25,00 por metro quadrado, na filial da loja *Construção Barata*, situada num estado X, em que o percentual de ICMS para este produto é de 15%.

a) Qual seria o preço final deste tipo de piso, na filial da mesma loja, situada num certo estado Y, em que o ICMS é de 7%?

Solução: Seja **C** o preço do piso no estado X, sem adicionar o ICMS. A taxa de ICMS no estado X, sendo 15% = 0,15, então o fator de aumento será 1,15.

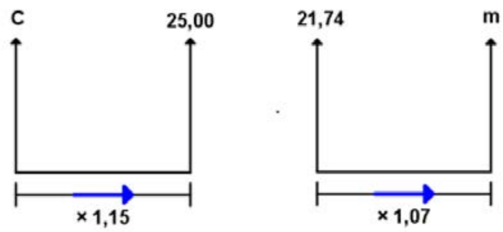


Figura 1- (a)- ICMS no estado X; (b)- ICMS no estado Y.
Fonte: os autores

Representando a situação com o eixo das setas, conforme a figura 1 (a), verificamos que 1,15 x C = 25, logo C = $\frac{25}{1,15} \cong$ 21,74. Assim, o preço no estado X, sem o ICMS é R$21,74 e se deseja conhecer o preço **m** no estado Y, quando incluído o ICMS que é de 7%, logo acarretando um fator de aumento de 1,07. Esta situação está representada na figura 1 (b), e, se conclui que 21,74 x 1,07 = m ou m ≅ R$23,26.

b) Qual o valor economizado por uma pessoa que mora na divisa entre os estados X e Y, se decidir comprar o piso para pavimentar uma casa de 120 metros quadrados no estado Y, ao invés do estado X?

Solução: (25 - 23,26) x 120 = 208,80
Resposta: o valor economizado seria de R$208,80.

Matemática Financeira mais avançada

Outros objetivos a serem alcançados, em etapas posteriores são: a compreensão, por parte dos alunos, de um extrato de cartão de crédito, um boleto bancário para pagamento de contas, taxas de juros embutidas em compras a prazo, condições de um investimento (ou um empréstimo) e a inflação, relacionados ao valor do dinheiro em um determinado tempo.

De acordo com os tópicos de Matemática estudados, os problemas de Matemática Financeira também podem incluir diversos tipos de funções. No caso de uma aplicação a juros simples, os valores crescem de forma constante, e o gráfico do crescimento do montante segue o modelo de uma função afim. Já num investimento a juros compostos, a taxa é aplicada cumulativamente, e o crescimento do montante segue um modelo exponencial. Um outro tipo de função que deve ser explorada na Educação pré-universitária é aquela definida por mais de uma sentença, que quase não aparece em exercícios, apesar de ser fundamental em diversas aplicações reais, como no cálculo do Imposto de Renda.

Esta proposta sugere que estes tópicos de Matemática Financeira sejam utilizados tanto para motivação como para a consolidação da aprendizagem destas funções.

Torraca, Sousa e Nasser (2022) fizeram uma análise de livros didáticos lançados após a implementação da BNCC e da proposta do Novo Ensino Médio, identificando uma abordagem de Matemática Financeira crítica e atual, preparando os estudantes para a tomada de decisão em relação a suas compras, pagamentos e investimentos.

O método de resolução de problemas usando o eixo das setas é autoexplicativo, e, por ser visual, é de fácil compreensão para os alunos. Facilita muito o raciocínio lógico necessário para resolver problemas mais complexos. Em certos casos, como o exemplo 2 a seguir, não é possível resolver pela aplicação de uma fórmula, mas admite mais de uma estratégia de solução com auxílio do eixo das setas.

Exemplo 2

Num mês, Bruno fez um empréstimo a juros (compostos) mensais de 15%, para comprar uma passagem aérea, no valor de R$3000,00. Ele viajou e se esqueceu de pagar. Dois meses depois da data da compra, Bruno voltou, mas só pagou R$1500,00. Um mês após esse pagamento conseguiu liquidar seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Solução: As quantias só podem ser comparadas numa mesma data. A Figura 2 a seguir representa, utilizando o eixo das setas, a estratégia de resolução trazendo todas as quantias para a data em que o empréstimo foi tomado.

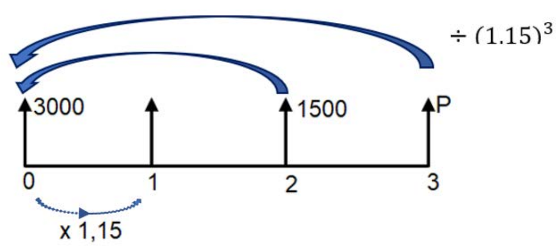


Figura 2- Eixo das setas com as quantias transferidas para a data inicial.
Fonte: os autores

É importante observar que ao levar uma quantia para a frente, isto é, para tempo futuro, ela é multiplicada por 1,15 a cada mês, e se for trazida para uma data anterior, deve ter seu valor dividido por essa taxa a cada mês. Então, levando R$ 1 500,00 para 2 meses antes, teremos um pagamento de $\frac{1500}{(1,15)^2} \cong 1134{,}22$. E o último pagamento P, 3 meses antes, seria equivalente a

$\frac{P}{(1,15)^3}$. Somando estes dois valores, o débito neste momento seria quitado, ou seja $1134,22 + \frac{P}{(1,15)^3}$ = 3 000. Efetuando este cálculo chegamos ao valor de P = 2837,62.
Resposta: o último pagamento foi de R$2837,62.

Um problema parecido ao do exemplo 2 foi resolvido por alunos do Ensino Médio, que escolheram 3 possíveis estratégias: transferir todas as quantias para a data do empréstimo, para a data da primeira amortização, ou para a data de quitação da dívida.

O exemplo 3 a seguir explora o conteúdo “Aumentos e Decréscimos Sucessivos”. Neste caso, se *i* for a taxa percentual de aumento ou decréscimo, a cada aumento futuro multiplica-se pelo fator (1 + *i)* e, a cada decréscimo futuro, deve-se multiplicar pelo fator (1 - *i*). Este exemplo mostra também a importância da calculadora na resolução de problemas financeiros reais.

Exemplo 3

É de extrema importância ter noção da variação do dólar para entender um pouco mais a economia mundial. Pesquisando a variação do valor do dólar, em termos percentuais, no mês de outubro de 2022, foram obtidos os dados a seguir.

Tabela 1
Variações percentuais do Dólar americano no período de 19 a 26/10/2022

Dia	19/10/2022	20/10/2022	21/10/2022	24/10/2022	25/10/2022	26/10/2022
Variação	1,221%	0,262%	3,009%	-1,332%	-1,075%	0,371%

Fonte. adaptado de https://economia.uol.com.br/cotacoes/cambio/

No valor acumulado desse período, o que aconteceu com o preço do dólar: subiu ou caiu? Quantos por cento?

Solução: Esse problema pode ser resolvido usando o eixo das setas, calculando o valor do dólar dia a dia. Já que não é pedido o valor do dólar, basta multiplicar os fatores de correção, $(1 + i)$ quando for aumento e $(1 - i)$ quando for decréscimo, para encontrar a variação final.

No primeiro dia o fator de correção foi $(1 + 0{,}01221) = 1{,}01221$; no segundo foi $(1 + 0{,}00262) = 1{,}00262$; no terceiro, $(1 + 0{,}03009) = 1{,}003009$; no quarto, $(1 - 0{,}01332) = 0{,}98668$; no quinto, $(1 - 0{,}01075) = 0{,}98925$; e, no sexto, $(1 + 0{,}00371) = 1{,}00371$.

Assim, o fator de correção total foi de 1,01221 x 1,00262 x 1,03009 x 0,98668 x 0,98925 x 1,00371 ≌ 1,02417 = 1+0,02417. Em termos percentuais, aproximadamente 2,417%.
Resposta: O preço do dólar aumentou 2,417 por cento no período considerado.

Considerações Finais

A Matemática Financeira é um conteúdo motivador, que atrai a atenção de alunos de todos os níveis, pois, de uma forma ou de outra, todos lidam com dinheiro.

Este trabalho apresenta uma proposta prática e visual para o ensino de Matemática Financeira, de fácil entendimento, sem o uso de fórmulas.

Partindo de situações simples, usando a porcentagem como fator de aumento ou desconto, o aluno é preparado para resolver situações financeiras do seu cotidiano, evitando erros comuns. Alguns destaques são: só se pode comparar quantias numa mesma data, taxas de aumentos ou decréscimos sucessivos devem ser multiplicados, e não somados.

Diante de opções de pagamento à vista ou a prazo, espera-se formar cidadãos críticos e aptos para a tomada de decisão. Os estudantes também devem estar preparados para comparar ofertas distintas de um mesmo produto, sabendo escolher a mais vantajosa. Desse modo, não se trata somente de ensinar Matemática Financeira e sim, proporcionar uma formação mais abrangente: uma Educação Financeira.

A proposta apresentada sugere uma estratégia para o ensino de Matemática Financeira empregada com sucesso em Nasser (2012). Além disso, os resultados das investigações realizadas pelos autores Marques, Biazutti e Nasser (2022) e Torraca, Sousa e Nasser (2022) indicam que esta abordagem está de acordo com os pressupostos da BNCC e do PNLD, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Acesso em 27 de outubro de 2022, disponível em Ministério da Educação: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/

Brasil. (2020). *Programa Nacional do Material e do Livro Didático*. Acesso em 27 de outubro de 2022, disponível em Guia Digital PNLD 2020: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/inicio

Brasil. (2021). *Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas, literárias e recursos digitais para o programa nacional do livro e do material didático PNLD 2021*. Acesso em 27 de outubro de 2022, disponível em FNDE: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/consultas-editais/editais/edital-pnld-2021/EDITAL_PNLD_2021_CONSOLIDADO_13__RETIFICACAO_07.04.2021.pdf

Marques, J., Biazutti, A. & Nasser, L. (2022). Matemática Financeira nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental. *Anais do X Seminário de Educação Matemática.* Rio de Janeiro. No prelo.

Nasser, L. (org). (2012). *Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual* (2ª ed.). Rio de Janeiro: UFRJ.

Novaes, R. C. (2019). Uma abordagem Visual para o Ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio [Dissertação de mestrado, PEMAT - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ]. https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2009/87-uma-abordagem-visual-para-o-ensino-de-matematica-financeira-no-ensino-medio

Sousa, G. A., Andrade, L. R., & Nasser, L. (2019). Aprimorando o desempenho de futuros profissionais em matemática financeira. *Tangram - Revista de Educação Matemática*, *2 (2)*, pp. 25-46. Acesso em 27 de outubro de 2022, disponível em https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/8843/5079

Torraca, M., Sousa, G. A. & Nasser, L. (2022). A Matemática Financeira no Novo Ensino Médio: implicações no PNLD. *Anais do X Seminário de Educação Matemática.* Rio de Janeiro: SBEM-RJ. No prelo

UOL. (28 de outubro de 2022). *Dólar comercial*. Acesso em 27 de outubro de 2022, disponível em Uol economia: https://economia.uol.com.br/cotacoes/cambio/

Vaz, R. F. & Nasser, L. (2021). Que educação financeira é essa? *Em teia - Revista de Ed. Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *12 (2)*. doi:http://dx.doi.org/10.51359/2177-9309.2021.250355

Raciocínio matemático no Ensino Fundamental por meio de uma tarefa exploratória

Eliane Maria de Oliveira **Araman**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
elianearaman@utfpr.edu.br

Resumo

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é tido como um dos grandes objetivos do ensino de matemática. Destacamos as tarefas exploratórias como um tipo de tarefas que, por suas características, apoiam esse desenvolvimento. Assim, esta pesquisa de característica qualitativa, tem como objetivo de analisar os processos de raciocínio matemático presentes nas resoluções de uma tarefa exploratória referente ao conteúdo matemático de frações aplicada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental numa escola pública brasileira. Os dados que compõe o corpus de análise dessa pesquisa foram coletados durante a realização da tarefa exploratória com uma dupla de alunos, por meio da gravação em áudio da resolução da tarefa pela dupla analisada. Os resultados apontam que a tarefa contribuiu para os processos de formulação de conjecturas, justificação e validação, promovendo o raciocínio matemático dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Tarefas Exploratórias; Raciocínio Matemático; Fração; Brasil.

Raciocínio Matemático e tarefas exploratórias

Desenvolver o raciocínio matemático em sala de aula, em todos os níveis de ensino, é um dos maiores objetivos da Matemática escolar (Mata-Pereira & Ponte, 2018), uma vez que se trata de um processo central para a aprendizagem matemática. Mas inicialmente, devemos pensar: o que é raciocínio matemático? O que devemos fazer, enquanto professores, para que esse desenvolvimento ocorra na vida escolar dos alunos? Porém, para que o desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula ocorra, a ação do professor é fundamental. Para que o professor possa promover o raciocínio matemático de seus alunos, é necessário um conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e os seus processos. A literatura trás algumas definições sobre raciocínio matemático. Para Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Por sua vez, Stylianides (2009) afirma que trata-se de um processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Já para Morais, Serrazina e Ponte (2018), raciocínio matemático envolve um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio). Com relação aos processos de raciocínio matemático, Jeannotte e Kieran (2017) identificam oito processos divididos em duas categorias – validação (justificação, a prova e a prova formal), e busca por semelhanças e diferenças (formulação de conjecturas, generalização, identificação de padrões, comparação e classificação) –, e um nono processo, o de exemplificar, que dá suporte aos processos dessas duas categorias (Jeannotte & Kieran, 2017).

Para além de compreender o que é raciocínio matemático, os professores precisam criar um ambiente escolar que proporcione oportunidades estimulantes e reflexivas na disciplina: momentos de discussão, argumentação e elaboração de justificativas, dando o protagonismo da aula aos alunos, de maneira a valorizar as contribuições corretas e incorretas, sempre propondo novas questões e encorajando os alunos a argumentarem e justificarem seus argumentos, conduzindo discussões enriquecedoras e propondo tarefas desafiadoras. Nesse sentido, as tarefas exploratórias podem trazer contribuições e apoiar esse desenvolvimento. Temos, segundo Ponte (2005), que a ao trabalhar com os alunos numa tarefa exploratória, professor não procura explicar tudo, propondo que, os alunos, por meio de conhecimentos já adquiridos, avancem na tarefa, buscando formas de resolvê-la. Ponte (2005) também nos diz que tarefas de natureza mais acessível, como a exploratória, possibilita a todos os alunos uma grande chance de sucesso, contribuindo assim para o desenvolvimento da autoconfiança, sentimento de absoluta importância quando se trata da disciplina de matemática, e faz com que os alunos se sintam desafiados. A realização destas tarefas permite que eles percebam como se desenvolve uma atividade matemática, apoiando o raciocínio matemático.

Metodologia

A investigação da qual se originou este artigo assume uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Os participantes foram alunos do 6º ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira. A tarefa aplicada em grupos de 2 estudantes (dos quais selecionamos a análise de um deles para compor este artigo) e tinha como objetivo a percepção dos alunos sobre a insuficiência dos números naturais para expressar as situações cotidianas, por meio de um exercício de contagem envolvendo unidades inteiras e partes da unidade (metade, quartos), realizando uma relação parte-todo, conforme a figura 1.

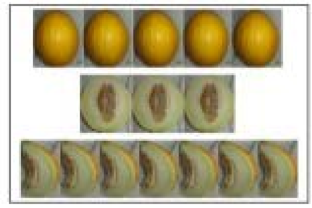
Seu Manoel é feirante há mais de vinte anos e tem uma barraca de frutas, na feira de rua, que acontece todo sábado na sua cidade. Em sua longa experiência nessa profissão, percebeu que muitas pessoas preferem comprar alguns produtos já cortados. Ele tem o costume de fazer os cortes em duas e em quatro partes iguais, hoje pela manhã passei em sua barraca e vi que na banca dos melões ele tinha:	 Sendo assim, qual o total de melões nessa banca?

Figura 1. Explorando situações de contagem (Oliveira & Garcia, 2014, p. 8)

Consideramos para a análise dos dados, a transcrição do áudio de um dos grupos, gravado durante a realização da tarefa. Tendo em vista o objetivo deste trabalho, procurou-se identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pela dupla de estudantes ao resolverem a tarefa.

Resultados

O Grupo 1 (composto pelas estudantes 2 e 3), faz a leitura da tarefa, mas encontram alguma dificuldade no entendimento, e chamam a professora para ajudar.

PROFESSORA: Então pensem o seguinte: como podemos juntar os melões para eles ficaram inteiro? Por exemplo, esse melão dividido ao meio, como eu posso juntar as partes para formar um inteiro?
ESTUDANTE 2: O que eu vi aqui que está perguntando: quantos "totais" de melões que tem na barraca do seu Manoel. Aqui no enunciado que fala dos produtos já cortados, acho que temos que prestar atenção nisso.
ESTUDANTE 3: Pelo que eu vi aqui, parece que tem uns dez melões, se juntar tudo igual a professora comentou. A gente já tem cinco inteiros, três pela metade e sete que estão cortados em fatias menores, uma de quatro partes.
ESTUDANTE 2: Tá, então se um ele cortou em quatro partes iguais, a gente tem que juntar as quatro e ver quantos que vai dar. Se eu não me engano, é isso.
ESTUDANTE 3: Então se a gente juntar os quatro, vai formar um melão inteiro, e daí vai sobrar três partes dessas menores. E daí, os que estão cortados pela metade, nós vamos juntar, e como ali também é um número ímpar, não vai dar para juntar tudo.
ESTUDANTE 2: Nossa, verdade! Eu achei que se juntasse tudo, ia dar número par, daí a gente conseguiria juntar, mas agora que reparei que estão cortados diferentes, igual você falou. O de cima tem três e é metade, e o de baixo tem sete, mas tá cortado em quatro. Eu não tinha percebido, e agora eu vi.
ESTUDANTE 3: Então, são números ímpares, não vai dar certo.
ESTUDANTE 2: Eu acho que um daqueles melões que está cortado pela metade, a gente pode juntar com dois daqueles três cortados em baixo.
ESTUDANTE 3: Isso, verdade! Mas vai sobrar um pedaço daí. Então calma, se ele cortou em quatro, então ali vai sobrar três. Então, se ele cortou em quatro, vai ficar duas partes de um lado e duas do outro. Daí a gente pega dois daqueles três que

sobrou e coloca com a outra metade que sobrou, daí vai sobrar só uma parte menor. É isso ne?
ESTUDANTE 2: É, acho que é isso mesmo.
ESTUDANTE 3: Tá, então vamos lá: uma metade junta com a outra metade, daí vai dar um melão. Daí a outra metade que sobrou então, vai juntar com os outros dois melões cortados menores, daí fica mais um. Daí pega mais quatro desses menores e forma mais um. Pronto, vai sobrar um mesmo, não tem o que fazer com essa parte.
ESTUDANTE 2: Tá, e qual o total de melões?
ESTUDANTE 3: Será que tem que contar com os melões que já tão certo?
ESTUDANTE 2: Acho que sim, daí a gente vai ter um total de oito melões, mais aquela partezinha que sobrou.
ESTUDANTE 3: É, certeza que é isso.
PROFESSORA: E aí meninas, conseguiram fazer? Como fizeram?
(O raciocínio descrito acima foi feito enquanto não estava ali com as alunas)
ESTUDANTE 2: Olha, a gente pensou assim: A gente foi vendo os melões e ali nos que foram cortados pela metade são três, que é um número ímpar, e embaixo são sete, que também é um número ímpar. Daí ali, como ele cortou em quatro partes, para dar um melão inteiro, são quatro, e vai sobrar três. E ali, como já tem os pela metade, a gente pegou dois, juntou e deu um melão, daí a gente pegou a metade que sobrou, juntou com dois pedaços menores, que juntos também formam uma metade e deu mais um melão.
ESTUDANTE 3: Então com os cinco lá de cima, deu oito melões inteiros e mais uma partezinha menor.
PROFESSORA: Vocês falaram dos números ímpares: o que isso tem a ver?
ESTUDANTE 2: É porque se fosse número par, era só a gente juntar que ia dar certo. Por exemplo, se fosse seis metades, oito metades, ia dar um número de melões inteiros, mas como a gente tinha um número ímpar, ficou sobrando.
ESTUDANTE 3: Nossa professora, e agora o de baixo, pensando bem, tinha que ser tipo, os números da tabuada do quatro ne? Já que para formar um inteiro, tem que ter quatro partes. Se tivesse mais uma partezinha ali, ia dar dois melões, mas se tivesse seis, por exemplo, não ia dar muita diferença, ainda ia sobrar.
PROFESSORA: É isso meninas!!! Perfeito!

As estudantes começam a fazer a tarefa a partir da explicação da professora, considerando que devem juntar as partes para formar os melões inteiros. A estudante 2 elabora uma primeira conjectura ao dizer que, se o feirante cortou um melão em quatro partes, então deve-se juntar as quatro partes de novo para formar o inteiro outra vez. Essa conjectura se apoia no conceito de parte-todo de uma fração. Entretanto vale destacar que essa informação inicial foi dada pela professora durante a explicação da tarefa.

Na sequência, a estudante 3 valida a conjectura apresentada pela estudante 2 e ainda elabora outra conjectura, afirmando que quando é número ímpar não dá para formar o inteiro (neste caso especificamente em que os melões foram divididos em 4 partes). A partir dessa conjectura, a estudante 2 informa que sua conjectura inicial era de que tudo ia dar par, mas que a partir da discussão, ela observa elementos da tarefa que não tinha percebido antes. Tal observação é relevante, pois o evidencia o potencial da tarefa exploratória e da discussão entre os estudantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Na continuidade da discussão, a estudante 2 elabora uma nova conjectura "eu acho que um daqueles melões que está cortado pela metade, a gente pode juntar com dois daqueles três cortados embaixo", ou seja, juntar um quarto de melão com outro um quarto para formar a metade do melão, e aí juntar com a outra metade para formar o inteiro. Essa conjectura é validada pela estudante 3, que ainda apresenta uma justificação para torná-la válida: "uma metade junta com a outra metade, daí vai dar um melão. Daí a outra metade que sobrou então, vai juntar com os outros dois melões cortados menores, daí fica mais um. Daí pega mais quatro desses menores e forma mais um. Pronto, aí vai sobrar um mesmo, não tem o que fazer com essa parte".

A partir disso, a estudante 2 responde facilmente a tarefa: "daí a gente vai ter um total de oito melões, mais aquela 'partezinha' que sobrou". Nesse momento, a professora se aproxima da dupla e solicita que elas expliquem como fizeram. Elas relatam para a professora como fizeram e a professora as questiona sobre a conjectura do número ímpar, pois até o momento elas tinham tomado como válida essa conjectura, mas não a tinham justificado.

A estudante 2 tenta elaborar uma justificação para a conjectura e, para isso, se apoia no processo de exemplificação: "É porque se fosse número par, era só a gente juntar que ia dar certo. Por exemplo, se fosse seis metades, oito metades, ia dar um número de melões inteiros, mas como a gente tinha um número ímpar, ficou sobrando". Tal justificação é complementada pela estudante 3 que recorre ao conhecimento anterior sobre a tabuada do 4 para afirmar que quatro partes forma um inteiro.

Conclusões

Como mencionado, esta pesquisa tem como objetivo analisar os processos de raciocínio matemático presentes nas resoluções de tarefas exploratórias referentes ao conteúdo de frações em duas duplas de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Podemos notar, mediante as transcrições e análises feitas a partir da coleta de dados, que em todos os momentos, seja para criar conjecturas, justificar o porquê e usar a exemplificação, as ações dos estudantes foram impulsionadas pela discussão. A comunicação em uma tarefa exploratória, assim como retrata Ponte (2005), é fundamental para que o aluno faça a justificação de argumentos, isto por meio da exploração das situações propostas, assim como foi analisado nessa tarefa.

A tarefa trabalhada com a dupla tem como características possibilitar várias estratégias de resolução, permitindo aos estudantes a escolha de um procedimento próprio de resolução, sendo muitas vezes, segundo Ponte (2005), mais eficaz para a aprendizagem do aluno. Com relação aos processos de raciocínio matemático, as estudantes formularam conjecturas e fizeram tentativas de validá-las, algumas vezes recorrendo a outros processos, como a exemplificação. Além disso, elas recorreram a conhecimentos adquiridos anteriormente, para assim apresentar diferentes estratégias de resolução, desenvolvendo o raciocínio matemático (Morais, Serrazina & Ponte,2020).

Referências e bibliografia

Bogdan, R, C.& Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Portugal: Porto Editora.

Jeanotte, D.& Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 96*(1),* 1-16.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32*(62)*.

Morais, C.; Serrazina, L. & Ponte, J. P. (2018). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations*. Acta Scientiae***.** 20*(4)*, 552-570.

Oliveira, M. B. & Garcia, T. M. R. (2014). *Frações: explorar para compreender*. Dia a dia educação, 2014. Disponível em:< http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-paranavai_mat_artigo_maria_borin_de_oliveira.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2021.

Ponte, J.P. (2005). *Gestão curricular em Matemática.* Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinkingand Learning*, 11*(4)*, 258-288.

Realidade Aumentada na promoção do Pensamento Geométrico de Van Hiele: uma vivência fedathiana

Roberto da Rocha **Miranda**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
robertouece@gmail.com
Fredson Rodrigues **Soares**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
fredson.fisica@gmail.com
Maria José Costa dos **Santos**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
mazesantos@ufc.br
José Rogério **Santana**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
rogesantana@ufc.br
Lara Ronise de Negreiros Pinto **Scipião**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
larascipiao@gmail.com
Carlos Renêe Martins **Maciel**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
carlosrenee2005@yahoo.com.br

Introdução

O ensino de Geometria é fundamental para o desenvolvimento do estudante no que compete às soluções de problemas de Matemática e de outras áreas do conhecimento, como enfatiza Leivas (2009), corroborando com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que esclarece:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (Brasil, 2018, p. 269).

Nessa conjuntura, Costa (2010) enfatiza que a Geometria vem sendo reduzida à mera aplicação de fórmulas para cálculo de áreas e de volume, que fazem parte de outra unidade temática: Grandezas e Medidas. Dessa maneira, vale salientar que a restrição do conhecimento geométrico aos estudantes, por vezes, dá-se pelo tradicionalismo do docente em acatar o sequencial do sumário dos livros didáticos, em que, em determinadas situações, os objetos do conhecimento que contemplam a Geometria vêm nas seções e nos capítulos finais. Tal fator descaracteriza o processo lógico-geométrico desenvolvido, que permite fomentar no estudante certas habilidades, como construir uma figura geométrica, analisar regularidades, conhecer propriedades, conceitos para a compreensão do rigor do saber matemático e de suas aplicações na sociedade.

Referencial Teórico

No contexto educacional atual, faz-se necessário romper com as barreiras do ensino tradicional e mudar os paradigmas postos nas salas de aula convencionais. Dito isso, o docente do século XXI deve estar atento aos conhecimentos prévios dos alunos e levá-los em consideração durante o planejamento da sessão didática proposta, para que o processo educativo seja fluido, com discussões e com construção gradativa das soluções, deixando de ser algo automatizado, excludente ou memorizado e que, desse novo modelo de sala de aula, saiam novos tipos de seres humanos (D'ambrósio, 2022) para uma sociedade pós-moderna.

Para que isso ocorra no ambiente escolar, é indispensável compreender a importância do estudo da Geometria. Essa relevância é defendida por Lorenzato (1995), como segue:

> [...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem habilidade, dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se incompleta (Lorenzato, 1995, p. 5).

Os autores Leivas (2014), Flores (2007) e Kaleff (2016) apresentam que, ainda no Ensino Médio, um dos níveis escolares da Educação Básica, segundo a legislação brasileira (Brasil, 1996), os estudantes possuem dificuldades em assimilar conceitos, realizar construções e relacionar conhecimentos em aplicações reais.

O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), como suporte metodológico nos processos de ensino e aprendizagem, vem dando ênfase à aplicação do *software* GeoGebra e da Realidade Aumentada (RA) no estudo e na visualização de sólidos geométricos, a fim de possibilitar a interação com objetos construídos, movê-los, fazendo analogias, construindo conceitos geométricos na promoção de saberes.

Para efetivar tais mudanças no ensino, o professor deve reconfigurar suas ações pedagógicas, como o planejamento, o método e a avaliação. O modelo de Pensamento Geométrico de Van Hiele avalia, através das habilidades demonstradas, o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e da aprendizagem de um aluno em determinado objeto do conhecimento. Existem cinco níveis pela ordem de complexidade: reconhecimento (nível 1), análise (nível 2), ordenação (nível 3), dedução (nível 4) e rigor (nível 5).

Consoante Leivas (2009), o modelo de Van Hiele conduz o aluno ao nível da visualização de um conceito geométrico; em seguida, ao nível da análise; depois, ao da ordenação lógica; mais adiante, ao nível da dedução e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação. Nesse ponto, o aluno se torna capaz de entender e de relacionar conceitos abstratos.

De acordo com Pais (2000, p. 2), “os materiais manipuláveis contribuem para a compreensão dos conceitos geométricos”, reforçando a tese da relevância de trabalharmos com o GeoGebra e a RA, sendo possível, por meios destes, “fazer a mediação e facilitar a relação professor, aluno e o conhecimento no momento de elaboração do saber” (PAIS, 2000, p. 3). Para Kirner & Siscoutto, (2007), a RA é uma tecnologia que insere, em um cenário real, imagens geradas por computador, criando um ambiente único, sendo denominada, conforme o autor, de realidade mista ou misturada.

Em outras palavras, a RA é a inserção de objetos virtuais no ambiente físico em tempo real com o apoio de um dispositivo tecnológico, corroborando com Azuma (1997), que afirma ser a variação de um ambiente virtual (*Virtual Environment*), o qual projeta objetos sobrepostos em cima ou em composição com a realidade mundana, suplementando-a em vez de complementá-la ou substituí-la.

Para contemplar essa articulação da Geometria com a Realidade Aumentada (RA), nos aplicativos GeoGebra e Sólidos RA, a metodologia da Sequência Fedathi (SF) tem se revelado um importante modelo, pois possibilita uma nova postura docente para o momento de planejamento, do *plateau*, em que compreende o nível dos alunos, sendo necessárias as análises teórica e ambiental e a execução de situações didáticas por meio de suas etapas fundantes: **tomada de posição** (situação-problema/ desafios propostos pelos professor); **maturação** (momento em que os alunos refletem sobre a situação-problema/ desafio); **solução** (fase em que os alunos apresentam os resultados encontrados e escutam os demais) e **prova** (sistematização pelo professor), que serão caracterizadas adiante e que trazem resultados positivos para o ensino de Matemática e de outros componentes curriculares, para o desenvolvimento de uma aprendizagem colaborativa. A Sequência Fedathi é caracterizada como uma metodologia de ensino, que se baseia no método científico, em um ambiente de ensino (Borges Neto, 2018).

Metodologia

Nosso estudo é do tipo exploratório-descritivo, pois Gil (2010) afirma que esse tipo de pesquisa objetiva desenvolver e esclarecer ideias, formulando situações-problema de forma mais precisa, descrevendo uma população ou um fenômeno, em que aplicar-se-á uma sessão didática em uma oficina, cujo propósito de aprendizagem consiste em fomentar o Pensamento

Geométrico proposto por Van Hiele, através de uma sessão didática dirigida pela Sequência Fedathi.

Nosso público-alvo serão estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior, em que o objeto do conhecimento são os Sólidos de Platão. Será dividida a sala em seis grupos com cinco pessoas, nos quais todos os integrantes irão baixar dois aplicativos, sendo eles: o GeoGebra 3D e o Sólidos RA, disponíveis na *Play Store*, para sistema operacional Android. É importante salientar que o aplicativo Sólidos RA não está disponível para celulares com o sistema operacional IOS. Cada equipe ganhará cinco envelopes referentes a cada módulo do *app* Sólidos RA: Módulo 1: Visualização; Módulo 2: Planificação; Módulo 3: Criação Módulo 4: Modelagem e Módulo 5: Geoplano.

Os estudantes irão trabalhar a primeira situação-problema com os *QRs Codes*: 01,31,32, 33, 34, concernentes ao Módulo 1 - Visualização do Aplicativo Sólidos RA, relativo aos Sólidos de Platão, em que, a partir da visualização, eles deverão identificar propriedades dos Sólidos de Platão.

A segunda situação-problema consiste na construção de um icosaedro e de sua planificação, para que, por meio da visualização em RA, pelo GeoGebra 3D, os alunos possam quantificar seus vértices, suas faces e suas arestas na folha de papel sulfite, que será entregue a cada uma das equipes. Finalizando, irão examinar os outros envelopes para entenderem a eficácia dos aplicativos Sólidos RA e GeoGebra 3D, a fim de pontuarem potencialidades, fragilidades e limitações em sua aplicação em sala de aula.

Considerações Finais

Pretendemos aplicar essa oficina no semestre de 2023.2, visto que consideramos a importância do objetivo do trabalho com os alunos, que é o desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele pelos cursistas, mediante o uso dos aplicativos por meio da visualização, da compreensão de conceitos da Geometria através dos Sólidos de Platão pela Realidade Aumentada (RA).

Diante disso, as perguntas serão respondidas no decorrer da oficina, uma vez que a metodologia escolhida, Sequência Fedathi, valoriza a construção do conhecimento, utilizando-se do diálogo para avaliar e fortalecer o pensamento dos estudantes, levando-os a pensarem como matemáticos (Borges Neto, 2017).

As atividades propostas pela oficina têm o intuito de enfatizar uma mudança de postura docente, pela mediação, tentando auxiliar os alunos a tornarem-se mais autônomos e produtores de conhecimentos, pois, após as construções em RA, os alunos deverão conseguir visualizar as arestas, os vértices e as faces realizando as devidas distinções, além de conhecerem propriedades dos Sólidos de Platão. Durante a construção das soluções, a socialização, os contraexemplos e as perguntas norteadoras são importantes estratégias utilizadas com o aluno pelo professor, porque os alunos confirmam suas hipóteses em cada conhecimento geométrico proporcionado pelos problemas inicialmente propostos pelo professor.

Destacamos que, provavelmente, aconteçam algumas dificuldades com os aplicativos, como a demora do reconhecimento dos *QRs Codes* pelo aplicativo Sólidos RA e a curta duração das oficinas para aprender de forma mais aprofundada as aplicações de cada Módulo presente no aplicativo.

Assim, a partir desses recursos de inovação pedagógica, como material analógico e digital, intencionamos promover o desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele. É importante ressaltar que não existe um manual a ser seguido sobre como abordar cada conteúdo, ou seja, não há uma “receita de bolo” para as abordagens com os alunos, mas uma metodologia eficiente que possibilita um amadurecimento e uma mudança de postura em sala de aula.

Por fim, espera-se que a SF na formação de futuros professores de Matemática e as/os suas/seus possíveis estratégias/recursos didáticos na promoção do Pensamento Geométrico de Van Hiele sejam mais explorados no ensino de Matemática, facilitando, portanto, um melhor aprendizado pela ação mediadora do docente.

SESSÃO DIDÁTICA – VIVÊNCIA NA SF

<table>
<tr><td colspan="2">SESSÃO DIDÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="2">INSTITUIÇÃO: Universidade Federal do Ceará</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROFESSORES: Roberto da Rocha Miranda, Fredson Rodrigues Soares, Carlos Renêe Martins Maciel, Lara Ronise de Negreiros Pinto Scipião, Maria José Santos da Costa</td></tr>
<tr><td colspan="2">NÍVEL/MODALIDADE DE ENSINO: Anos Finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio/ Superior; Presencial</td></tr>
<tr><td colspan="2">OFICINA: Realidade Aumentada na Promoção do Pensamento Geométrico de Van Hiele: uma vivência fedathiana</td></tr>
<tr><td colspan="2">TURMA: Alunos do Ensino Médio / Superior</td></tr>
<tr><td>TEMPO DIDÁTICO: 1 hora e 30 min</td><td>DATA</td></tr>
<tr><td colspan="2">A PREPARAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETOS DO CONHECIMENTO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construção de Poliedros, conceito de Sólidos de Platão e identificação de seus elementos: vértices, faces e arestas.</td></tr>
</table>

OBJETIVO(S)

OBJETIVO GERAL:

Favorecer os processos de ensino e aprendizagem de sólidos diversos e de Platão, por meio de construções no *Software* GeoGebra e no aplicativo Sólidos RA a partir da visualização de forma detalhada em RA.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Relembrar o conceito de poliedros para a resolução de situações-problema apresentadas para a resolução, em grupo, com o GeoGebra e o aplicativo Sólidos RA;
- Favorecer a construção de saberes e a consolidação dos elementos de um poliedro, tais como: vértice, faces e arestas, utilizando a tecnologia de Realidade Aumentada.

ANÁLISE AMBIENTAL

- **PÚBLICO-ALVO:** Alunos do Ensino Médio ou Ensino Superior;
- **AMBIENTE DE REALIZAÇÃO DA SESSÃO DIDÁTICA:** Presencial;
- **MATERIAIS DIDÁTICOS:** Projetor Multimídia, slides, aplicativos GeoGebra 3D e Sólidos RA, papéis sulfite e envelopes com *QRs Codes*.

ANÁLISE TEÓRICA

Para a aplicação desta Sessão Didática (SD), é importante entendermos os fundamentos da SF e os aspectos que ultrapassam a relação conteúdo, aluno e professor (Santos, 2007), haja vista a existência de outros elementos relevantes, tais como: o *plateau*, o acordo didático, a "pedagogia mão no bolso", a concepção do erro, a pergunta, o contraexemplo e a mediação (Borges Neto, 2018).

PLATEAU

Para o estabelecimento do *Plateau*, será feita a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, por meio de questionamentos diversos sobre os objetos do conhecimento abordados na SD. Esses questionamentos objetivam estabelecer um diálogo aberto com os participantes para um melhor estabelecimento do *Plateau*, corroborando com Santos (2017), ao mencionar a busca por um equilíbrio do conhecimento do aluno com o conteúdo pensado na preparação da SD.

- O que são poliedros?
- Vocês conhecem a relação de Euler?
- O que são e quais são os Sólidos de Platão?
- O que é Realidade Aumentada?

ACORDO DIDÁTICO - TEMPO ESTIMADO: 10 MINUTOS
Inicialmente, será feito o "acordo didático", momento em que o professor fará um acordo com os alunos sobre os compromissos assumidos no decorrer das atividades realizadas durante a aplicação da sessão didática. Na SF, o acordo didático é uma construção importante entre os alunos e o professor que está atuando em sala de aula.
VIVÊNCIA
1ª FASE – TOMADA DE POSIÇÃO - TEMPO ESTIMADO: 30 MINUTOS
Para início de conversa, deparamo-nos, no contexto escolar, com o modelo de ensino convencional, que perpassa um conjunto de práticas que são incorporadas pela escola ou transmitidas na forma como os professores aprenderam quando estudantes (Mendonça, 2017). Logo, faz-se necessária a desconstrução dessa prática convencional. No sentido de contribuir para a prática pedagógica do professor, almejamos a compreensão dos preceitos e dos fundamentos da SF, de modo a favorecer um cenário dinâmico ao processo de ensino, em que o professor é o foco do processo na condução da aprendizagem. Partindo-se dessa premissa, o professor apresenta aos alunos o aplicativo Sólidos RA, que, por meio do seu material de apoio, apresenta *QR Codes* separados em cinco módulos: visualização, planificação, criação, modelagem e geoplano, que foram impressos, recortados e separados em cinco envelopes, os quais serão dados às equipes. Em seguida, é apresentado o aplicativo GeoGebra 3D, que auxiliará nas soluções. Teremos uma breve explicação da interface e das funcionalidades dos aplicativos, ambos com capacidade de construir poliedros, seja passo a passo ou de forma instantânea, oportunizando, a partir dos seus usos, diferentes visualizações, registros e construções. Após a apresentação e a distribuição do material, serão baixados os aplicativos mediante os links abaixo e expostas as situações-problema para os estudantes, a fim de que estes as resolvam. Links para baixar: GeoGebra - https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.calculator.suite Sólidos RA- https://play.google.com/store/apps/details?id=com.LuMuGames.SolidosRA **SITUAÇÕES-PROBLEMA** 1. Observe os *QRs Codes* 01, 31, 32, 33, 34 do Envelope do Módulo 1 - Visualização do Aplicativo Sólidos RA. Quais características esses poliedros têm em comum? 2. Construa um icosaedro no GeoGebra 3D, faça sua planificação e visualize em RA para quantificar seus vértices, faces e arestas.

3. Explore os envelopes dos módulos 1 ao 5 do aplicativo Sólidos RA, assim como o GeoGebra 3D e comente suas potencialidades pedagógicas, bem como suas limitações.

2ª FASE – MATURAÇÃO OU DEBRUÇAMENTO - TEMPO ESTIMADO: 15 MINUTOS

Neste momento, os alunos irão refletir e discutir sobre as situações apresentadas, devendo o professor ficar observando (não fornecendo as respostas) e intervindo no processo, caso seja necessário, mas instigando o aluno a pensar e lançando "contraexemplos", não fugindo do propósito da SF, que é o aluno construir seu conhecimento através do levantamento de hipóteses.

Para a solução do primeiro problema proposto, o estudante, após ter baixado o aplicativo Sólidos RA, deverá acessar a aba *Visualização*, apertar o botão *Continuar*, assim ele terá, na sua tela, algumas orientações de uso desse Módulo de Visualização, podendo ter inúmeras funções, como **translação**, pelo arraste do dedo na tela; **escala**, pelo gesto de pinça com dois dedos; **rotação**, bastando fazer um gesto de giro com dois dedos, além de botões à esquerda para desativar ou ativar alguma operação ou, até mesmo, alterar o modo de visualização da figura inserida no *QR Code*. Temos também o **botão câmera**, para fotografar, caso queira uma **gravação**, é só clicar e segurar esse botão e, para parar, deve-se apertar novamente no botão câmera.

Assim, a partir dessas funções do aplicativo, o estudante terá autonomia para apontar o seu *smartphone* para os *QRs Codes* 01, 31, 32, 33, 34 e captar as principais características que estes sólidos têm em comum, manipulando da sua forma; seja transladando, ampliando, reduzindo, rotacionando, fazendo registros por meio de fotos e de gravação ou, ainda, mudando a forma de visualização do poliedro observado e anotando sua possível resposta na folha de papel sulfite.

No segundo problema, o estudante, pela visualização em RA do icosaedro, fará a contagem de vértices, arestas e faces. A manipulação e a visualização, por meio do aplicativo, ajudam o estudante a coletar esses dados e a registrá-los.

O terceiro problema é mais no sentido exploratório e validativo dos aplicativos: Sólidos RA e GeoGebra, para apontar as potencialidades pedagógicas e as limitações para a sala de aula, é importante terem clareza e objetividade em pontos que, para a equipe, são relevantes.

As três atividades devem propor, aos estudantes, reflexões significativas acerca do desenvolvimento do Pensamento Geométrico proposto por Van Hiele. Em seu primeiro nível (Reconhecimento), os cursistas perceberão os objetos geométricos em RA de acordo com suas aparências virtuais. Dessa forma, eles irão justificar suas reflexões pelas suas produções por meio de considerações visuais, sem, necessariamente, utilizarem as propriedades dos poliedros.

Ao analisarmos que eles já conseguem reconhecer objetos geométricos na RA através de suas propriedades, com a finalidade de identificação e de descrição desses poliedros, podemos evidenciar que os cursistas estão no segundo nível (Análise).

Ao considerarmos que os estudantes possuam a habilidade de ordenar as propriedades desses objetos geométricos, no caso, os Sólidos de Platão, de construir definições abstratas, de distinguir propriedades necessárias e propriedades suficientes para a construção de um conceito, além de compreenderem deduções simples, sem entrarem em demonstrações, podemos dizer que o grupo está em um terceiro nível (Ordenação).

No quarto nível (Dedução) do Pensamento Geométrico de Van Hiele, os alunos já são capazes de captar o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva, como compreender a demonstração explicativa de por que são apenas cinco sólidos de Platão ou, também, chegar na Relação de Euler pelos dados tabelados de um caso específico, por exemplo, o Icosaedro, e fazer uma generalização.

Por último, temos o quinto nível (Rigor), no qual os estudantes são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias geometrias na ausência de modelos concretos ou virtuais propostos pela tecnologia RA.

O professor levará, em média, 10 minutos para a discussão e a resolução das situações lançadas, ou seja, no momento de maturação, será feito o levantamento de hipóteses sobre quais caminhos seguir rumo à solução.

3ª FASE – SOLUÇÃO - TEMPO ESTIMADO: 25 MINUTOS

Nesta fase, os alunos serão convidados a participarem da aula de forma aleatória e a apresentarem a solução ou as soluções a que chegaram em resposta às quatro (4) atividades ou situações-problema propostas pelo professor na primeira fase, sendo estipulado um tempo de 20 minutos para a apresentação das soluções, ficando o professor mediando as equipes nesse momento e ouvindo as soluções. A socialização das soluções é fundamental para o processo de construção de conceitos, de propriedades, o diálogo e a troca de experiências entre os pares se fazem necessários para uma pré-validação, mobilizando os conhecimentos geométricos aprendidos pela experiência com os aplicativos Sólidos RA e GeoGebra 3D.

Nesse momento, o professor irá ter a dimensão do que os estudantes produziram e responder importantes questionamentos:

- Quais características foram elencadas por cada grupo?
- Eles sabem o que é um icosaedro?
- A visualização pelos aplicativos ajudou na contagem de arestas, vértices e faces de um icosaedro?
- A partir das informações do poliedro icosaedro, os estudantes encontraram alguma relação entre os dados quantitativos (arestas, vértices e faces) (Relação de Euler)?
- Caso encontrem a Relação de Euler, lance a pergunta: a relação de Euler é válida para diedros?
- Os sólidos geométricos observados são conhecidos como Sólidos de Platão. Por que são apenas cinco?

● Ao explorarem os aplicativos Sólidos RA e GeoGebra 3D, os estudantes e os professores encontraram potenciais pedagógicos? ● Quais foram as dificuldades pertinentes aos problemas propostos na tomada de posição? ● Existem limitações ou erros que prejudicam o aprendizado a partir dos aplicativos?
4ª FASE – PROVA - TEMPO ESTIMADO: 20 MINUTOS
Após a apresentação das soluções pelos alunos, utilizando o GeoGebra e a RA, é o momento de o professor validar as respostas, ou seja, tomando como base o que foi discutido durante as fases de maturação e de solução, o professor valida a resposta, mostrando o passo a passo referente à resposta correta para cada situação-problema apresentada na tomada de posição. A ideia é que o professor construa a solução prevendo os possíveis erros que podem acontecer e exponha uma forma bem simples e elegante de solução, que eles possam construir durante a prática pedagógica.
RECURSOS
● Computador, *notebook*, *smartphones*, internet, GeoGebra 3D e Aplicativo Sólidos RA.
AVALIAÇÃO - TEMPO ESTIMADO: 10 MINUTOS
● A avaliação acontecerá na forma de atividade prática no GeoGebra 3D e no Sólidos RA, por meio das soluções propostas, pelas situações propostas em uma folha de papel sulfite, que será distribuída nas equipes.

Bibliografia e Referências

Azuma, R. T. A. (1997). Survey of augmented reality. *Teleoperators and virtual environments*, v. 6, n. 4, 355-385.

Borges Neto, H. (2017). *Sequência Fedathi:* além das ciências duras. Coleção Sequência Fedathi, v. 2. CRV.

Borges Neto, H. (2018). *Sequência Fedathi:* fundamentos. Coleção Sequência Fedathi, v. 3. CRV.

Brasil. (1996). Lei nº 9.394, de 20 de dezembro. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Ministério da Educação.

Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação.

Costa, A. P. da. (2010). Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. *Revista Paranaense De Educação Matemática*, v. *9*, n. 18, p. 152–179. https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.18.152-179,

D'Ambrosio, U. (2022). Comportamento, conhecimento e criatividade: reflexões políticas. In: Lopes, C. E. & Grando, R. C. (Org.). *Subversão responsável e formação de professores*. Mercado das Letras.

Flores, C. R. (2007). *Olhar, saber, representar:* sobre a representação em perspectiva. Musa.

Gil, A. C. (2010). Como elaborar projetos de pesquisa. 5. ed. Atlas.

Kaleff, A. M. (2003). *Vendo e entendendo Poliedros*: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2. ed. EDUFF.

Kirner, C. & Siscoutto, R. A. (2007). Fundamentos de Realidade Virtual e Aumentada. In: *Realidade virtual e aumentada*: conceitos, projeto e aplicações. Livro do IX Symposium on Virtual and Augmented Reality, SBC

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, n.4, 3-13.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.* Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Paraná.

Leivas, J. C. P & Silva, D.C. (2013). Habilidades Visuais desenvolvidas em uma oficina inclusiva de Geometria para cegos. *Vidya*, v. 34, n. 1, 27-46. ISNN 2176-4603.

Mendonça, A. F. (2017). *Sequência Fedathi na formação docente: o conceito de função*. 2017. 111f. – Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará.

Pais, L.C. (2006). Estratégias de ensino de Geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª a 8ª série do ensino fundamental. In: *Anais da 29ª Reunião Anual da ANPEd,* Caxambu – MG, Brasil.

Santos, M. J. C. (2017). A formação do professor de matemática: metodologia Sequência Fedathi (SF). *Revista Lusófona de Educação*.

Santos, M. J. C. (2007). *Reaprender Frações por meio de Oficinas Pedagógicas*: *Desafios para a formação inicial.* Dissertação em Educação - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará.

Recorrido de estudio e investigación para enseñar afinidades y ecuaciones lineales en dos variables en la escuela secundaria

Estefanía **Laplace**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
elaplace@fio.unicen.edu.ar
María Rita **Otero**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar
Viviana Carolina **Llanos**
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Argentina
vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta un Recorrido de estudio e investigación (REI) para enseñar, entre otras, las organizaciones matemáticas (OM) vinculadas a las afinidades y ecuaciones lineales en dos variables correspondientes al diseño curricular de 4° año de la escuela secundaria argentina. El REI inicia con la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias a partir de la inversión de un monto fijo?* y permite abordar el problema de la modelización algebraico funcional en el nivel escolar. Se propone el análisis de los conocimientos matemáticos que el REI permite reencontrar a partir del estudio de la arborescencia de las cuestiones que surgen de la pregunta generatriz y se adelantan algunos resultados de implementaciones exploratorias realizadas.

Palabras clave: Recorrido de estudio e investigación; Modelización algebraico funcional; Afinidades lineales; Ecuaciones Lineales; Escuela secundaria.

Introducción

En la enseñanza habitual en la escuela secundaria los saberes no son cuestionados. En general el profesor explica y los estudiantes de manera más o menos precisa replican lo que el profesor ha "mostrado", comunicado y luego queda practicar. Particularmente el estudio de las ecuaciones y funciones de primer grado que son objeto de interés en este trabajo, se abordan focalizando en los aspectos funcionales y dinámicos de la dependencia entre las variables, dejando de lado los aspectos geométricos y las igualdades. La enseñanza del álgebra se reduce a la resolución de ecuaciones, precedida en algunos casos por la "introducción al lenguaje algebraico", para incorporar la terminología específica del cálculo ecuacional. Las letras se utilizan únicamente como incógnitas de ecuaciones o como variables de las funciones, y los parámetros están ausentes. Las fórmulas que tanto se utilizan en matemática y en otras disciplinas, hacen el papel de reglas para realizar cálculos numéricos, no aparecen como resultado de un trabajo algebraico y tampoco permiten la generación de nuevos tipos de problemas (Gascón, Bosch, Ruiz-Munzón, 2017).

En diversos trabajos desarrollados en el seno de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en torno a la enseñanza del álgebra escolar (Chevallard, 1989) se propone modificar la pedagogía dominante y proponer una enseñanza alternativa que considere al álgebra como instrumento de modelización y medio para estudiar las organizaciones matemáticas (OM) de la escuela secundaria (Bolea, Bosh & Gascón, 2001). Una noción central tratada por Chevallard (1989) es la de *modelización matemática*, de manera que toda actividad matemática, es considerada una actividad de modelización. La modelización supone, por un lado, la existencia de un sistema, matemático o no, y un modelo matemático de ese sistema y el proceso se desarrolla en tres etapas: 1) se define el sistema a estudiar, se analizan los aspectos más importantes del sistema como las variables en juego y el "dominio de realidad" del fenómeno en cuestión; 2) se construye un modelo matemático, estableciendo relaciones entre las variables y 3) se trabaja en el modelo con el fin de producir conocimiento matemático relativo al sistema estudiado. De esta manera el proceso de modelización algebraico funcional tendrá lugar cuando se construyan modelos algebraicos que permitan el estudio de parámetros y variables, variación de parámetros, intercambios de parámetros y variables y relaciones funcionales entre magnitudes de las variables.

En este trabajo proponemos un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) que fomenta los procesos de modelización algebraica en el marco de la TAD, en la escuela secundaria entorno a una pregunta de interés de los estudiantes, sobre la gestión económica de un posible kiosco escolar. A diferencia de otros REI que se reconocen tanto en la escuela secundaria como en la universidad (Gazzola 2018; Llanos y Otero, 2013, 2015, ; Otero, Llanos, Gazzola, 2012; Parra y Otero, 2017; Otero, Llanos, Arlego, Gazzola, 2017; Salgado, Otero, Parra, 2017) en el que se presenta aquí se abordan las obras relativas a las afinidades y ecuaciones lineales, con énfasis en los aspectos algebraicos y geométricos.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los REI parten de una pregunta generatriz Q_0, tal que la construcción de una posible respuesta conduce a analizar preguntas derivadas de Q_0 en función de las necesidades de conocimiento generadas por el estudio de la misma, y también en función de las decisiones tomadas por el grupo de estudio (Chevallard, 2013). Algunos ejemplos de preguntas generatrices son: ¿Cómo hacer un cálculo tratándose de números que incluyen muchas cifras?, ¿Cómo determinar la distancia entre dos puntos, accesibles o no, del espacio topográfico?, ¿Qué fuerza ejercer para vencer una resistencia dada?, ¿Cómo determinar uno u otro elemento de una figura trazada en una hoja cuando algunos de sus elementos útiles caen fuera de esa hoja?, ¿Cómo determinar el costo de utilización de un teléfono celular en función del uso que se hace de él? (Chevallard, 2013).

Para responder la pregunta ¿En qué consiste estudiar una obra? la TAD ha desarrollado un modelo, al que ha denominado Herbartiano. Es importante recordar aquí, que las preguntas son también obras fundamentales, creadas útilmente por los hombres. Dicho modelo explicita lo que sucede cuando un estudiante x o una clase X estudia una pregunta Q con la supervisión de Y, o cuándo un investigador ξ, o un equipo de investigación Θ estudia una pregunta Q posiblemente con la supervisión de un director de investigación ζ, o un conjunto de directores Z, formalmente se escribe:

$$S\ (X; Y; Q) \hookrightarrow R \qquad (1)$$

La notación utilizada en (1), indica que cuando se explora una pregunta Q, el sistema didáctico o el sistema de investigación debe producir una respuesta R (indicado con la flecha $\hookrightarrow$) (Chevallard, 2009). La respuesta suele escribirse con un corazón $R^{\heartsuit}$, para destacar que dicha respuesta estará en el corazón del sistema didáctico, y que durante un tiempo será la respuesta “autorizada” a Q. Una respuesta no es solo una afirmación, sino una praxeología.

$$S\ (X; Y; Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad (2)$$

El símbolo ♥ en el exponente de R, representa la relatividad institucional del saber. Es decir que la respuesta se produce bajo determinadas condiciones y limitaciones propias de esa institución. La elaboración de $R^{\heartsuit}$ a partir de Q supone entonces una “fabricación”, por parte del sistema S, de un medio didáctico M para explorar y construir la respuesta a Q. Los estudiantes o investigadores recolectan diversos instrumentos materiales o no. Esto conduce al denominado esquema Herbartiano semidesarrollado:

$$[S\ (X; Y; Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad (3)$$

La respuesta a Q se elabora siguiendo el modelo que propone el esquema herbartiano desarrollado (4), que Chevallard (2013) utiliza para definir el constructo recorridos de estudio y de investigación (REI). El estudio de Q es realizado por un grupo de estudio X, bajo la dirección de un profesor y, o de un equipo de profesores Y, generando un sistema didáctico S (X; Y; Q). El medio M, está formado por preguntas derivadas del estudio Q_i que pueden ser introducidas por los estudiantes o también por el profesor, respuestas preestablecidas $R^{\diamond}$ previamente construidas a las cuales se puede tener acceso en la web, libros, textos del profesor, etc.; y obras O_j como teorías, praxeologías, conocimientos previos que permiten producir una respuesta posible a Q. (Otero, 2021). El esquema Herbartiano desarrollado (Chevallard, 2009):

$$[S\ (X; Y; Q) \rightharpoonup \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p, D_p, \dots Dq\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad (4)$$

El REI

El REI inicia con la pregunta Q_0*: ¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias a partir de la inversión de un monto fijo?* Se define como "finalizado" ya que ha sido diseñado y analizado previamente por el equipo de investigación y el profesor que forma parte del mismo, con el objetivo de reencontrar ciertas obras del diseño curricular de 4° año de la escuela secundaria preuniversitaria. La pregunta generatriz Q_0 se plantea en un contexto especial ya que refiere a la administración del "kiosco de la escuela" el cual solo funciona en los recreos y básicamente se dedica a comercializar los productos que los estudiantes deciden vender, los cuales compran en distintas distribuidoras. No tienen gastos de ningún tipo por el funcionamiento del kiosco a excepción, en algunos casos, del envío de los productos. El REI se introduce al aula como sigue:

T_1: Los alumnos de sexto año de la Escuela nos han pedido que los ayudemos a organizarse para administrar durante todo el año el kiosco. Para comenzar realizaron una lista de productos que desean vender. En la lista se incluye el precio al que pueden comprar cada producto. Algunos productos los compran directamente en distribuidora y otros los reciben directamente en la escuela por lo que tienen un gasto de envío que se detalla en la lista y que varía de acuerdo al producto. Los estudiantes cuentan con $60000 para dar inicio al kiosco y comprar todos los productos.

	Producto	Marca	Cantidad	Precio	Envío*
1	Alfajores	Guaimayen	x 40 unid	$ 580	$90
2	Bon O Bon	Arcor	x 30 unid	$520	$120
3	Titas	Terrabussi	x 36 unid	$950	$80
4	Rhodesias	Terrabussi	x 36 unid	$980	$120
5	Chocolate con leche	Arcor	x 30 unid	$950	-
6	Caramelos masticables	Arcor	x 800 g (bolsa)	$270	$100
7	Caramelos ButterToffee	Arcor	x 800 g (bolsa)	$425	-
8	Gomitas	Misky	x 1000 g (bolsa)	$470	$100
9	Pastillas	Menthoplus	x 12 unid	$525	$120
10	Chicles	Beldent	x 20 unid	$620	$100
11	Saladix	Arcor	x 12 paq	$440	$100
12	Galletitas dulces	Polvorita (Lía)	x unid	$22	$80
13	Caramelos palitos de la selva	Stani	x 600 g (bolsa)	$540	$80
14	Barras de cereal	Arcor	x 20 unid	$750	$120
15	Turrones	Arcor	x 50 unid	$890	$80
16	Sándwich (jamón y queso)	Preparados en panadería	x unid	$70	$90
17	Papas fritas	Krachitos	x 65 g (bolsa)	$75	$80
18	Cereales	Anillos frutales	x 1250 g (bolsa)	$490	-
19	Jugo	Baggio (200 ml)	x 18 unid	$540	$120
20	Alfajores	Milka	x 24 unid	$1800	-

*El envío es único por producto, sin importar la cantidad que se compre.

A partir de T_1 se pueden formular un conjunto de nuevas cuestiones derivadas Q_i que conforman la arborescencia de pregustas característica de un REI. Por ejemplo:

Q_1: ¿Qué productos y cuántos de cada uno se pueden comprar para iniciar con el kiosco?
$Q_{1.2}$: ¿Cómo calcular el precio de compra de los productos para cualquier cantidad que se quiera comprar?

Q_2: ¿Cómo calcular el precio de venta de los productos?
$Q_{2.1}$: ¿Cuántas unidades deben venderse para tener ganancia?

Q_3: ¿Cómo calcular la ganancia que se obtiene al vender cada producto?

Q_4: ¿Cómo calcular el punto de intersección entre dos rectas que representan el precio de compra de dos productos?
$Q_{4.1}$: ¿Qué sucede si los dos productos tienen distinto precio?
$Q_{4.2}$: ¿Qué sucede si los dos productos tienen el mismo precio, pero distinto precio de envío?
$Q_{4.3}$: ¿Qué sucede si los dos productos tienen el mismo precio y envío?

Q_5: Si se fija la ganancia, ¿qué valores pueden tomar el gasto de envío, el precio de venta y el precio de compra?
$Q_{5.1}$: ¿Cómo calcular el gasto de envío para una ganancia fija?
$Q_{5.2}$: ¿Cómo calcular el precio de compra para una ganancia fija?
$Q_{5.3}$: ¿Cómo calcular el precio de venta para una ganancia fija?

El estudio y la investigación de cada una de las preguntas mencionadas antes, permite reencontrar diferentes OM incluidas en los diseños curriculares de las escuelas secundarias preuniversitarias, específicamente del diseño de la institución donde se implementa el REI. En la Figura 1, se sintetizan las preguntas que podrían reencontrarse así como las OM vinculadas a las mismas, con el objetivo de mostrar el alcance del REI.

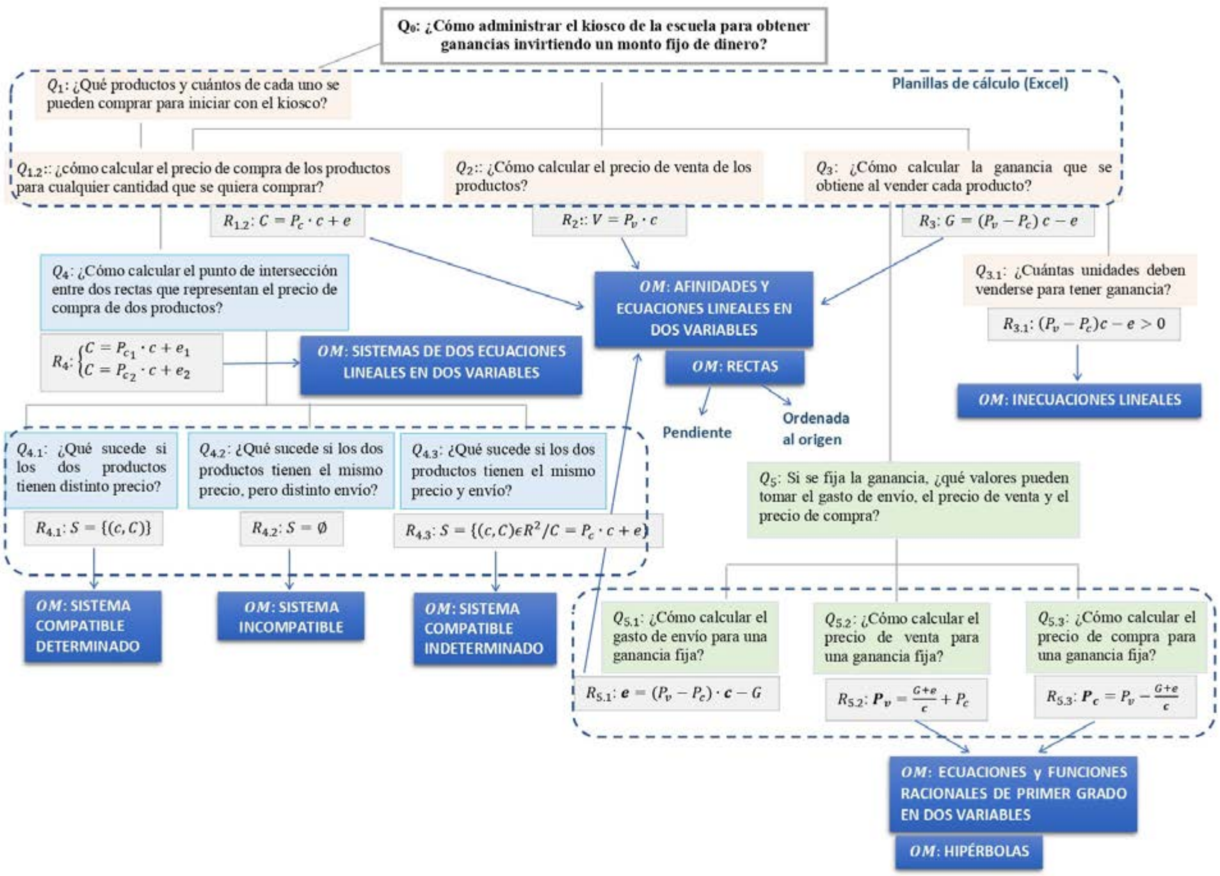


Figura 1: Posibles Q y OM del REI

El estudio de Q_1, Q_2 y Q_3 permite reencontrar las organizaciones matemáticas vinculadas a la OM "afinidades y ecuaciones lineales en dos variables", mientras que $Q_{2.1}$ permite el estudio de la OM "inecuaciones lineales". En esta primera etapa del REI se desarrollan las primeras nociones de modelización algebraico funcional ya que se construyen modelos matemáticos que incorporan parámetros y variables cuyo estudio permite dar respuesta al sistema inicial relacionado a la administración del kiosco. Q_4 permitiría reencontrar la OM vinculada a los "sistemas de ecuaciones lineales en dos variables" y $Q_{4.1}$, $Q_{4.2}$ y $Q_{4.3}$ el problema de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables. En el estudio de estas OM se realiza una distinción entre los parámetros y las variables de las ecuaciones planteadas y se estudia la variación de algunos de los parámetros del sistema y su efecto sobre las características del mismo. Con Q_5 y las $Q_{5.1}$, $Q_{5.2}$ y $Q_{5.3}$ es posible avanzar en el proceso de modelización algebraico funcional que requiere del intercambio entre parámetros y variables, dando lugar a la formulación de nuevos modelos algebraicos, que en algunos casos genera otro problema que es relativo al estudio de la OM "afinidades y ecuaciones lineales en dos variables", y en otros, una nueva OM vinculada a las "ecuaciones y funciones fraccionarias de primer grado en dos variables".

La respuesta $R^{\heartsuit}$ de este REI, integra y utiliza los modelos de compra, venta y ganancia desarrollados, además de las planillas de cálculo que permiten no solo un control del stock de los productos comercializados sino también el control de los precios y las ganancias generadas por el kiosco.

Implementación del REI

Se realizaron cuatro implementaciones del REI en los años 2019 y 2021, en cuatro cursos de 4° año de la Escuela Secundaria en un colegio preuniversitario, dependiente de una Universidad pública en Argentina. Las dos primeras implementaciones correspondientes a una prueba piloto del REI, permitieron analizar la viabilidad mismo, y el análisis de estos resultados, los ajustes necesarios para la tercera y cuarta implementación. Entre las cuatro implementaciones participaron 120 estudiantes entre 15 y 16 años, y el profesor es el investigador. El REI comienza con la pregunta Q_0, que el profesor lleva al aula. Los estudiantes junto con el profesor proponen otras preguntas y modelos de kiosco posibles. Es responsabilidad del profesor seleccionar qué preguntas estudiar y proponer las tareas que permitan reencontrar las OM que corresponden a 4° año del curso donde se realizó la implementación. Para estudiar e investigar con el REI, los estudiantes en la clase cuentan con equipos portátiles (netbooks, smartphones, tablets) porque es fundamental el uso de internet, las planillas de cálculo y el uso del software GeoGebra. En todas las clases se recogieron y digitalizaron los protocolos escritos de todos los estudiantes. Además, se tomaron registros de video "generales" que se complementaron con las notas de campo del profesor y las producciones de los estudiantes. El profesor también proporcionó apuntes, que los alumnos podían considerar o no como necesarios para el estudio y la producción de todas las respuestas posibles.

Q_0 generó en el aula el estudio, la discusión y la generación de otras preguntas derivadas tales como: $Q_{1.1}$: ¿Qué productos se pueden comprar?, $Q_{1.2}$: ¿Qué cantidad de cada producto se podría comprar con el dinero disponible?, $Q_{1.2.1}$: ¿Cómo calcular el precio de compra de cada producto?, $Q_{1.2.2}$: ¿Cómo calcular el precio de compra de un producto que tiene un gasto de envío?, $Q_{1.3}$: ¿Cómo se puede expresar el precio de compra para todos los productos? Se reconstruyeron respuestas del tipo $R_{1.3}^{\diamond}$: "*Vamos a plantear una fórmula para calcular el valor final de cualquier producto con cualquier cantidad y con envío incluido:* $P_u \cdot c + e = V$", "*Precio × cantidad + envío = Total*", "*Cantidad a comprar* (x) *× precio producto + envío = total de la compra*". La necesidad de hallar una expresión para el precio total de compra de cada producto para cualquier cantidad, llevó también a la elaboración de una ecuación lineal en dos variables, una de las organizaciones matemáticas (OM) centrales en el desarrollo de este REI. A partir de estas respuestas surgieron otras cuestiones relacionadas, relativas a la forma de expresar las variables y los parámetros en la ecuación: $Q_{1.3.1}$: ¿Cómo se puede expresar el precio total de compra para todos los productos, la cantidad a comprar, el precio de cada producto y su envío? y las respectivas respuestas, por mencionar algunas: $R_{1.3.1}^{\diamond}$: "P_u*: precio x unidad;* c*:cantidad del producto.;* e*: envío;* V*: valor final*", "*precio:* P*; envío:* e*; producto:* x*; cantidad deseada:* c*; precio total:* T".

Estudiar Q_0 condujo también a indagar sobre la venta y la ganancia que se obtiene al vender los productos. El profesor propuso otras tareas, que dieron origen a las "ecuaciones del precio de venta" de los productos y las "ecuaciones de ganancia", para las cuales se definieron parámetros y variables. En todos los casos, se generaron modelos algebraicos "afines" de dos variables para dar respuesta al sistema inicial (administración del kiosco) en lo que refiere a la Compra – Venta – Ganancia de los productos. Estas fórmulas son el resultado de un incipiente trabajo algebraico realizado por los estudiantes, que podría identificarse como la génesis de procesos de modelización algebraica en clases usuales de la escuela secundaria, teniendo en cuenta que este ha sido uno de los objetivos con el REI.

Conclusiones

En este trabajo se presenta un REI diseñado con el objetivo de promover la modelización algebraico funcional en la escuela secundaria, especialmente con relación a las organizaciones matemáticas afinidades y ecuaciones lineales en dos variables y los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables con su clasificación. Si bien el alcance del REI es mayor a lo efectivamente reconstruido en el aula, las condiciones de una clase habitual permitieron sólo encontrar estas obras. Esto se explica si se considera que la conformación del medio para el estudio del REI requiere de cambios sustanciales que no es fácil realizar y sumado a esto, las restricciones propias de una institución escolar, que son insalvables como las evaluaciones tradicionales obligatorias. Por otro lado, un estudio de estas características requiere de una dilatación del tiempo escolar, respecto del habitual hasta que los estudiantes asumen su responsabilidad en el estudio y en la investigación de la pregunta planteada con el REI. Sin embargo, las respuestas de los estudiantes permiten confirmar que un estudio de estas características posibilita un germen de procesos de modelización algebraico funcional en clases usuales de la escuela secundaria y esto es muy positivo.

La implementación del REI en el aula ha permitido incorporar ciertos rasgos de la enseñanza basada en la investigación y el cuestionamiento que no son frecuentes en la escuela secundaria argentina. Es necesario considerar q este dispositivo en su estado actual no es transferible a otros docentes, dado que requiere de ajustes que podrán realizarse luego de un análisis completo de los resultados. Teniendo en cuenta entonces que aquí se presentan los resultados preliminares de la implementación del REI, un análisis en profundidad permitirá en un futuro realizar ajustes al dispositivo y ponerlo a punto para que pueda ser utilizado por otros profesores en la escuela secundaria

Referencias y bibliografía

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 21(3), pp*.247-304. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie: perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, 19 45-75.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1. Enquête codisciplinaire & EDD. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Gascón, J., Bosch, M., & Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). Zaragoza: SEIEM.

Gazzola, M. P. (2018). *Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria Tesis doctoral*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013) Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 73,* 17-24. Valencia, España.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime, 18 (2),* 245-275. DOI: 10.12802/relime.13.1824

Otero, M. R.; Llanos, V. C. y Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización, 1 (2),* 31-42. Universidad Central de Chile.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Arlego, M. y Gazzola, M: P. (2017). Co-disciplinary Mathematics and Physics Research and Study Courses (SRC) within two groups of pre-service teacher education. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10) pp. 2972-2979. Dublin, Ireland.

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Libro digital. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos.

Parra, V. y Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. *Educación Matemática 29(3),* 9-50.

Salgado, D., Otero, M. R. y Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al Cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional. Formación de profesores, 56(1),* 84-108.

Repensando a prática em busca do desenvolvimento de competências

Simone Fátima **Zanoello**
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI Erechim
Brasil
simonez@uri.com.br

Resumo

A presente comunicação objetiva relatar uma prática desenvolvida com acadêmicos dos Cursos de Graduação em Engenharia - Civil, Mecânica, Elétrica, de Produção e Química - de uma Universidade Comunitária do Norte do Rio Grande do Sul, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. A mesma buscou desenvolver as noções da referida disciplina a partir de diferentes metodologias: software Geogebra, jogos, formulário do Google, material concreto, entre outras. O estudo está em desenvolvimento e embasado em autores como Goded, Zabala e Arnau os quais enfatizam que o trabalho com diferentes metodologias, respeitadas as diferentes formas de aprendizagem dos acadêmicos, facilita o desenvolvimento de competências. A partir do trabalho desenvolvido verificou-se um alto grau de satisfação dos acadêmicos - 87,9% - o que permitiu concluir a importância do ensino com tal metodologia.

Palavras-chave: Competências; Metodologias; Geometria Analítica e Álgebra Linear; *Software* Geogebra; Jogos.

Introdução

Com o passar dos anos, vem se percebendo dificuldades em preparar cidadãos competentes para agir, adequadamente, nas diferentes situações cotidianas. Isso faz emergir a necessidade de discutir acerca do planejamento curricular que os estudantes necessitam, procurando reestruturá-lo de acordo com as exigências e necessidades, não apenas do aluno, mas também da sociedade atual. Para isso é importante que o professor reflita sobre suas concepções educacionais, busque atualizar o seu conhecimento, utilize metodologias adequadas para desenvolver as competências exigidas na formação de um cidadão competente e atuante. Aliada a esta necessidade, soma-se a preocupação com o fato os acadêmicos terem passado dois anos com a Pandemia da Covid 19, e isso ter provocado lacunas de aprendizagem, angústia e medo.

Diante deste quadro, a autora deste trabalho buscou reestruturar a metodologia de trabalho da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, ministrada no segundo semestre letivo de uma Universidade Comunitária do Norte do Rio Grande do Sul, para acadêmicos de cinco Cursos de Engenharia. Assim, o presente trabalho visa a relatar a experiência vivida e o grau de satisfação da professora e dos acadêmicos com tal mudança. É importante ressaltar que este trabalho está em fase de desenvolvimento, sendo possível apontar dados qualitativos. O relato, estruturou-se em três sessões. Inicialmente, algumas reflexões sobre competências x metodologias; na sequência, as atividades desenvolvidas e sua análise e, por fim, são tecidas as conclusões.

Competências x Metodologias

De acordo com o PISA (OCDE, 2012, p. 7), competência matemática é:

> [...] una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesariamente constructivas, comprometidas y reflexivas (OCDE, 2012, p. 7).

Perrenoud (1999) destaca que ter competência é saber mobilizar os saberes. Alarcão (2003) complementa afirmando que as competências não existem sem os conhecimentos. E, portanto, não se pode dizer que as competências estão contra os conhecimentos, mas, sim, com os conhecimentos.

Perrenoud (1999, p. 17) alerta, ainda, que “Possuir conhecimentos ou capacidades não significa ser competente”, ideia reforçada por Salvador Llinares na palestra *¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competência docente del professor*, proferida na XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Na ocasião afirmou que, quando um aluno, ao resolver um problema, questiona se o mesmo é de mais (+) ou de menos (-), ele não é competente para a resolução do mesmo, pode ser competente para resolver o algoritmo da adição ou subtração.

Muitas vezes, o professor, no início de um ano letivo, ao receber uma turma nova, pensa que todos os alunos já deveriam ter determinadas competências, quando se sabe que as pessoas são diferentes. Mesmo que tenham sido submetidas aos mesmos estímulos em sala de aula, alguns desenvolvem certas competências e outros não. Logo, um processo de ensino e aprendizagem deve estar fundamentado nas diferenças entre os estudantes e no que estes possuem de conteúdos, habilidades e atitudes.

Um professor competente deve propiciar oportunidades para que o aluno adquira conhecimentos, valendo-se de todos os recursos de que dispõe e utilizando diferentes metodologias, procurando, assim, tornar a aprendizagem mais eficaz, atingindo um maior número de alunos, considerando que estes são diferentes, e os recursos e/ou metodologias que podem facilitar a aprendizagem de alguns podem não surtir efeito para outros. Quanto mais rica for a aprendizagem, mais fácil será para o aluno mobilizar seus conhecimentos em situações do cotidiano.

Ao planejar uma aula, independente da metodologia escolhida pelo professor, faz-se necessário que este propicie momentos em que o aluno trabalhe ora individualmente, ora em grupos ou coletivamente, sendo as equipes heterogêneas ou homogêneas. De acordo com Zabala e Arnau (2010), os alunos têm ritmos diferentes e necessidades específicas. Enquanto uma modalidade de trabalho pode ser muito produtiva para um aluno, em um determinado momento, para outro pode não ser, mas se a aula for diversificada, a probabilidade de atingir, positivamente, um maior número de alunos, aumenta consideravelmente.

Tendo presente esta fundamentação teórica, desenvolvida ao longo do seu doutorado, a autora busca aplicar tais conhecimentos na estruturação de uma disciplina da graduação ministrada por ela.

Descrição e análise de dados: Metodologias utilizadas na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear

As atividades aqui apresentadas foram trabalhadas no segundo semestre do ano de 2022 com 66 acadêmicos na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, nos cursos de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica, Produção e Química, em uma Universidade Comunitária do Norte do Rio Grande do Sul.

A autora deste artigo também trabalhou, no primeiro semestre de 2022, com essas turmas, a disciplina de Introdução ao Cálculo, e percebeu que, com o advento da Pandemia de Covid-19, os acadêmicos apresentavam lacunas de aprendizagem, dificuldades em Matemática Básica e tudo isso gerava angústias e medo nos acadêmicos. Conhecendo melhor o grupo de acadêmicos que frequentariam a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, ministrada no segundo semestre do mesmo ano, e tendo presente o que afirma Goded (1997), ou seja, o professor deve usar diferentes metodologias, não existe uma única metodologia capaz de mobilizar os conhecimentos de todos os alunos; a professora reorganizou o material, propondo o ensino das noções a partir de diferentes metodologias: *software* Geogebra, resolução de problemas, atividades no Google formulários entre outras. O planejamento das aulas também foi pensado a partir de Zabala e Arnau (2010), isto é, aulas que propiciem momentos em que o aluno trabalhe individualmente, em grupos ou coletivamente, com equipes heterogêneas ou homogêneas.

No que tange aos conceitos da unidade que envolve a geometria analítica, ou seja, reta, ponto médio, distância entre dois pontos, circunferência; várias noções foram iniciadas partindo de problemas, os quais foram resolvidos com auxílio do *software* Geogebra, propiciando que os acadêmicos visualizassem o que estava sendo questionado no problema, e através de discussões em duplas, no grande grupo, fosse sendo sistematizado o conhecimento, inclusive em alguns momentos com questionamentos da professora, auxílio na retomada de conceitos de Matemática básica e dedução de fórmulas. De acordo com Bittar (2006), o uso adequado de um *software* educativo pode auxiliar no funcionamento cognitivo do aluno, o que é fundamental para que sua aprendizagem seja significativa.

O uso do Geogebra também esteve presente na resolução de exercícios e/ou problemas. Os acadêmicos usavam o mesmo como auxiliar na interpretação e conferência dos resultados. Relatavam, inclusive, que o uso do *software* auxiliou na concretização das noções, o que facilitava o entendimento. De acordo com Braga e Paula (2012), as TICs podem auxiliar no desenvolvimento da autonomia, incentivar a investigação, dar condições ao aluno para fazer conjecturas, testá-las e verificá-las, reorganizar o seu pensamento, reelaborar as conjecturas, buscar novos caminhos e testar, novamente, em um processo de validação do que é construído. Corroborando com esta ideia, Kaiber e Ninow (2014, p. 10) salientam que o professor "[...] deve propor situações que incentivem o manuseio desses recursos. Assim, o professor de Matemática passa a se preocupar em levar o aluno a dedicar mais tempo na reflexão para a resolução das atividades do que nos cálculos […]".

Figura 1. Acadêmicos dos Cursos de Engenharia Mecânica, Engenharia Química e Engenharia de Produção trabalhando no software Geogebra.

A Universidade em que foi desenvolvida esta prática, possui graduação ativa[1]. Uma das características deste tipo de graduação é que as disciplinas têm 25% da carga horária destinada ao Trabalho Discente Efetivo (TDE). Na unidade "Geometria Analítica" o TDE proposto envolvia noções desta unidade exploradas no *software* Geogebra. Inicialmente, a professora propôs que os acadêmicos explorassem o *software* e construíssem a figura descrita no artigo: "Relato de uma experiência: explorando conceitos de Geometria Analítica com o uso de animações no Geogebra" de Carlene F. de Moraes; Bárbara D. do A. Rodrigues e Cristiana A. Poffal. A partir da construção, a professora propôs que respondessem um questionário o qual solicitava que os académicos refletissem sobre o conteúdo envolvido na construção da figura. E por fim, solicitou que criassem a própria figura, usando os conceitos de Geometria Analítica e apresentassem uma análise da construção realizada.

Os trabalhos apresentados superaram as expectativas da professora. Nas figuras 2 e 3 apresentam-se alguns dos trabalhos construídos.

[1] A Graduação ativa foi criada na referida universidade pela RESOLUÇÃO Nº 2736/CUN/2019, com o objetivo de inovar e reinventar o atual modelo acadêmico. O modelo proposto pela graduação ativa, "[...] comprometido com a qualidade no ensino, aproxima as tecnologias de informação e comunicação à prática pedagógica, através de metodologias de ensino ativas, inovadoras, mais dinâmicas e próximas da realidade tecnológica na qual os discentes estão inseridos, tornando o processo de ensino mais interativo e o discente protagonista" (URI, 219, p. 3). As principais mudanças desta Graduação são a inserção de metodologias inovadores; criação de uma equipe multidisciplinar, a qual é responsável pela concepção, produção e disseminação de metodologias inovadoras; seleção de disciplinas são responsáveis por relacionar teoria e prática, entre elas destaca-se a disciplina de Projeto Integrador e o Trabalho Discente Efetivo (TDE).

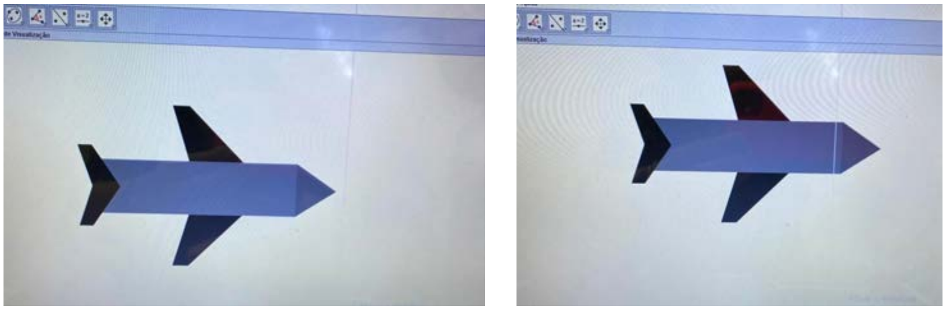


Figura 2. Figura construída por um trio de acadêmicos do Curso de Engenharia de Produção.

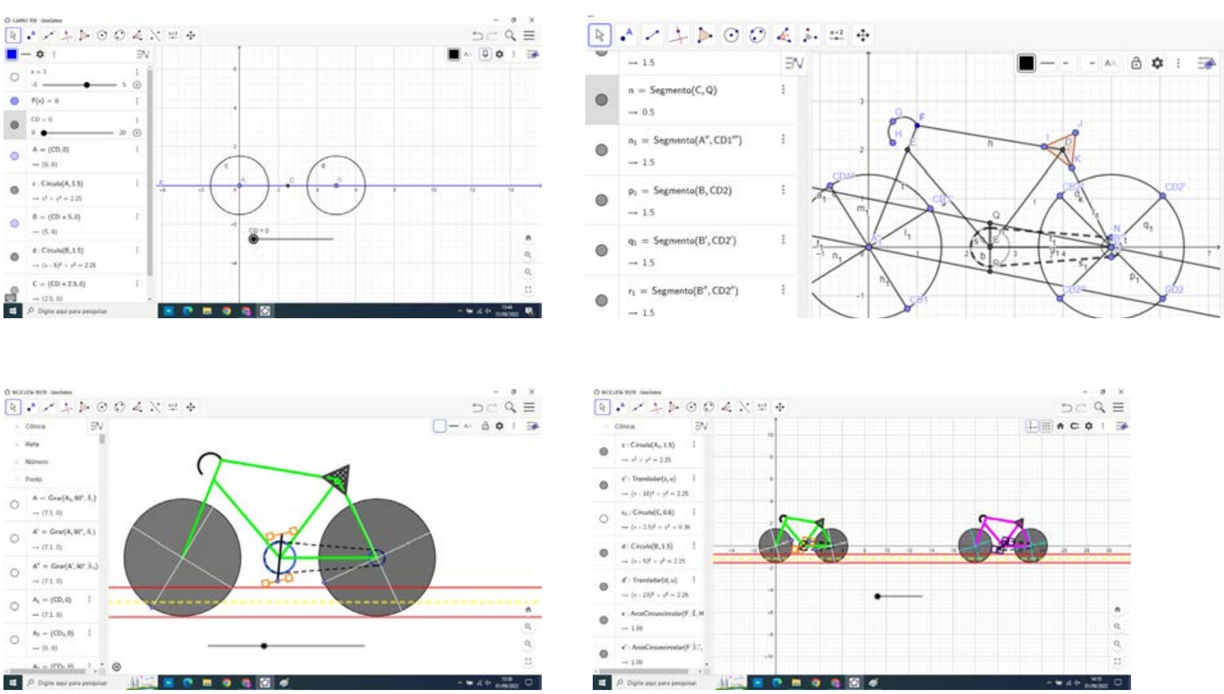


Figura 3. Prints de algumas etapas da construção da figura construída por um trio de acadêmicos do Curso de Engenharia Civil.

Os acadêmicos que produziram a figura 2 relataram que, ao pesquisarem sobre a construção de figuras no *software*, descobriram como introduzir o movimento do avião através da função seno, o que vem reforçar as afirmações dos autores Braga e Paula, Bittar, Kaiber e Ninow, citadas anteriormente, ou seja, o uso do *software* pode auxiliar na autonomia, na busca pelo conhecimento e na investigação.

A segunda unidade desta disciplina envolveu noções de vetores. Além do *software* Geogebra, do formulário Google, foram utilizados materiais concretos e jogos. Um dos jogos foi o Jogo do Mico. Os alunos organizados em quartetos distribuíam todas as 41 cartas do jogo entre eles. Metade das cartas continham operações entre vetores- igualdade, adição, subtração, produto escalar e módulo – e na outra metade a resposta destas operações. Eles deveriam jogar de modo a formar os pares. A figura 4 apresenta a imagem de um grupo participando da referida atividade.

Figura 4. Acadêmicos jogando o Jogo do Mico

O jogo trouxe clareza, aos acadêmicos, de como resolver estas operações. Nas palavras de um deles: “O uso do jogo parece que me abriu a cabeça, agora sim, se tornou claro, para mim, como resolver estas operações”. (VP).

Considerações finais

Ao trabalhar com diferentes metodologias, a professora suscitou um novo sentido para o que é discutido em sala de aula, modificando a forma como era trabalhada essa disciplina. Reafirma-se que o estudo está em andamento, o que limita a realização de uma avaliação quantitativa, no entanto, temos até o momento elementos que nos possibilitam uma análise qualitativa.

Observações atestam que os procedimentos metodológicos tornaram o processo de ensino e aprendizagem da Matemática mais interessante, atraente e efetivo visto que os acadêmicos de modo geral demonstraram maior motivação para a aprendizagem e envolvimento nas tarefas propostas, dentre as quais o TDE. Foi possível descobrir, verificar e compreender propriedades a partir da dinamicidade e da visualização na tela do computador, aspectos estes que tornaram o acadêmico mais ativo no processo. Os pareces orais e escritos dos acadêmicos atestam as observações pontuadas.

A professora propositora e executora da prática relatada e analisada neste texto observou que as atividades de exploração de mídias auxiliaram os acadêmicos a formular conjecturas que talvez, não surgissem tão facilmente em uma aula com quadro e giz. Percebeu, também, que o jogo proposto permitiu que os acadêmicos internalizassem com mais facilidade como resolver operações com vetores. E tudo isso, auxiliou o desenvolvimento das competências propostas para essa disciplina.

Constatou-se, no entanto, que apesar da metodologia ser envolvente, as lacunas de aprendizagem dos acadêmicos foram e são limitações que extrapolam as possibilidades de solução total em uma única disciplina. Talvez se houvesse tempo hábil para explorar mais os conceitos, retomar ainda mais a matemática básica, a qual é um fator limitante, os resultados seriam ainda melhores.

Referências e bibliografia

Alarcão, I. (2003). *Professores Reflexivos em uma Escola Reflexiva*. Cortez.

Bittar, M. (2006). *Possibilidades e dificuldades da Incorporação do uso de Softwares na aprendizagem da Matemática. Um estudo de caso: O Software APLUSIX.* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática[online], 3, Águas de Lindóia, São Paulo. http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/R0182-1.pdf

Braga, M.& Paula, R. M. (2012). *O Ensino de Matemática mediado pelas Tecnologias de Informação e Comunicação Uma caracterização do Elemento Visualização segundo uma concepção fenomenológica.* http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wp-content/uploads/2010/08/O-Ensino-de- Matem%C3%A1tica-mediado-pelas-Tecnologias-de-Informa%C3%A7%C3%A3o-e-Comunica%C3%A7%C3%A3o.pdf .

Goded, P. A. (1997). ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, n. 32, pp. 77-86.

Kaiber, C. T.; Ninow, V. (2014). *Projetos de Trabalho: uma proposta para o ensino de Matemática.*http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/688/370.

OCDE. (2012). *La Evaluación de la Competencia Matemática: Marco Conceptual Pisa*. http://www.anep.edu.uy/anep/phocadownload/pisa/pisa2012/Informestematicos/Matematica%20en%20PISA%202012.pdf.

Perrenoud, P. (1999). *Construir competências desde a escola.* (B. C. Magne, Trad.). Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Resolução nº 2736, de 29 de novembro de 2019. Dispõe sobre Normas para a Inovação Acadêmica - Graduação Ativa.

Zabala, A & Arnau, L. (2010). *Como aprender e ensinar competências.* (C.H. L. Lima, Trad.). Artmed.

A Resolução de Problemas para a Introdução da Análise Combinatória no Ensino Fundamental

Augusto Cesar de Castro **Barbosa**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
accb@ime.uerj.br
Cláudia Ferreira Reis **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br
Roberto Alfredo **Nascimento**
Instituto Federal de São Paulo
Brasil
robertoalfredo@bol.com.br

Acreditamos que um bom caminho para se abordar a Análise Combinatória *(*AC) seja o estudo de coleções finitas de objetos que satisfazem determinadas normas. A AC é um tema de grande dificuldade para alunos e, até mesmo, professores (Ferreira, Almeida, 2019). De um modo geral, no nível básico, seu estudo envolve o uso excessivo de fórmulas, até certo ponto, desnecessárias e descontextualizadas, o que acaba trazendo um sentimento de insegurança durante as resoluções dos problemas (Vasquez, Noguti, 2004).

A justificativa para trazer a AC para o segundo segmento do Ensino Fundamental (EF)[1] foi facilitar a aquisição de seus princípios fundamentais, explorando situações corriqueiras vivenciadas pelos alunos, tais como escolhas de roupas para sair, possibilidades de programas no final de semana ou de formação de um time de futebol etc. (Glória, Nunes, Moraes, 2021). Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que iniciar a AC no EF, utilizando a construção de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, pode facilitar a abordagem desse assunto no Ensino Médio[2].

O objetivo deste trabalho é propor uma forma de introduzir os conceitos básicos da AC, tais como o Princípio da Adição e o da Multiplicação, de maneira mais significativa, sem se

[1] Abrange, em geral, alunos de 11 a 14 anos.
[2] Abrange, em geral, alunos de 15 a 17 anos.

basear na simples memorização de fórmulas e utilizando a Resolução de Problemas (RP) como um meio para a sua construção. Uma das maneiras de proporcionar aos alunos essas condições é a utilização da RP como metodologia de ensino, pois ela é capaz de criar mecanismos que propiciam um ambiente de descobertas (Gomes, Castro Barbosa & Concordido, 2017).

O professor deve estar atento ao fazer a escolha dos problemas para que esses não sejam apenas exercícios de fixação de conteúdos que, em geral, utilizam uma sequência de procedimentos padronizados. É fundamental que os problemas forneçam condições para que o aluno possa desenvolver habilidades e formas de raciocínio que o permita resolver novas classes de problemas (Coutinho, Castro Barbosa, Concordido & Tovar Costa, 2016).

Foi elaborado um conjunto de atividades contextualizadas, desenvolvidas em forma de oficina, com turmas de 8º e 9º anos do EF de uma escola da rede municipal da cidade do Rio de Janeiro, Brasil. Para formular essas atividades, tomamos como principais fontes: a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), o Canguru de Matemática e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por conterem, em sua maior parte, questões contextualizadas e cuja resolução pode ser obtida de várias formas distintas, aspecto importante na metodologia de RP. Antes da realização das atividades, aplicou-se um pré-teste, com o intuito de aferir como se processava o raciocínio combinatório desses alunos que ainda não entraram em contato com o conteúdo da matéria. Ao final das atividades, aplicou-se um pós-teste, com o propósito de analisar se houve ganhos decorrentes da realização das ações propostas.

As atividades consistiram em listas de problemas diversos. As questões levaram em conta situações sobre o princípio fundamental da contagem e o cálculo de permutações, arranjos e combinações, porém sem o uso de fórmulas. Essas atividades foram desenvolvidas com a formação de grupos de, no máximo, cinco alunos, com a finalidade de assegurar a chance de cada aluno debater as questões com os seus colegas de grupo e ampliar sua capacidade de cooperação e argumentação. Ao término de cada atividade, cada grupo expunha os registros de suas ideias para todos. A oficina foi composta de 10 aulas de cinquenta minutos, divididas em cinco dias. Analisando as diferenças entre os registros das resoluções do pré e do pós-teste, constatou-se que houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do trabalho em equipe.

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro.

Referências e bibliografia

Coutinho, R. P., Castro Barbosa, A. C. de, Concordido, C. F. R., & Tovar Costa, M. V. (2016). Resolução de Problemas em Matemática - uma aplicação. *Ensino, Saúde e Ambiente*, 9(3), 249-268.

Ferreira, A. G., & Almeida, F. E. L. de. (2019). O Estudo de Combinatória no Ensino Médio: uma análise das organizações matemáticas no livro didático. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(1), 277-299.

Glória, C. M., NUNES, J. M. V., & MORAES, G. M. (2021). Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais de Escolarização: uma abordagem com materiais didáticos alternativos. *Ensino da Matemática em Debate*, 8(2), 92-116.

Gomes, D. A., Castro Barbosa, A. C. de, & Concordido, C. F. R. (2017). Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ. *Educação Matemática Pesquisa*, 19, 105-120.

Roa, R., & Navarro-Pelayo, V. (2001, 10 e 11 de outubro). Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. *Jornadas europeas de estadística*, 10, Palma, Ilhas Baleares.

Vasquez, C.M.R., & Noguti, F.C.H. (2004, 15 a 18 de julho). *Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica*. [Minicurso]. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, Brasil. http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf

Runa Yupana® Tawa Pukllay – Educación matemática corporal

Dhavit Prem Carlos Gabriel **Saldivar** Olazo
Universidad de Lima
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Perú
dhavitprem@gmail.com
Divapati Prem Alvaro Javier **Saldívar** Olazo
Asociación Yupanki
Perú
yachay@yupanainka.com

Resumen

Runa Yupana Tawa Pukllay (RYTP) es un conjunto de dinámicas lúdico aritméticas desarrolladas para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo de ejercicios corporales grupales y sincronizados. Está basado en el método Yupana Inka Tawa Pukllay (YITP) que resuelve operaciones aritméticas mediante estrategias de reconocimiento de patrones y ejecución de movimientos predefinidos en serie o en paralelo. En vez del tablero utilizado en YITP, se utilizan dibujos de yupanas en el piso a escala humana, en la que los estudiantes hacen las veces de fichas y ejecutando movimientos corporales, resuelven algoritmos mientras optimizan estrategias de comunicación, tiempo y dinámicas de solución. RYTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en estudiantes de diferentes edades. RYTP estimula el trabajo en equipo, integra la educación física con el aprendizaje matemático y promueve la creatividad y el desarrollo de estrategias.

Introducción

El método aritmético Tawa Pukllay (Prem D., 2014-2016), desarrollado y publicado por la Asociación Yupanki entre los años 2014 y 2016 (figura 1B) nació como una propuesta de decodificación de la yupana o calculadora inca (Momath and Wolfram, 2020), la misma que fue hallada a principios del S.XX en un dibujo del manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” (Guaman-Poma F., 1616) (figura 1).

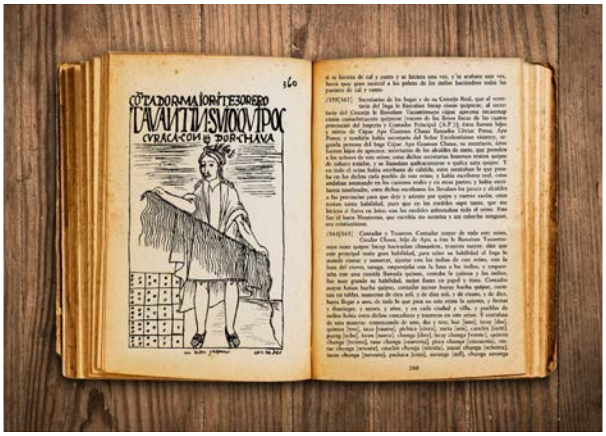


Figura 1. (A) Manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” de Felipe Guaman Poma de Ayala, 1616
(B) Libro Decodificando la matemática inka -Método Tawa Pukllay (Dhavit Prem, 2014-2016)

La Asociación Yupanki, dedicada a la recuperación y difusión de la matemática ancestral andina desarrolló nuevas líneas de investigación a partir del método YITP, el cual ha sido presentado en varias conferencias y exposiciones en Ferias de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC Perú 2015 y 2017), USA Science & Engineering Festival (Washington DC 2016); Congresos Internacionales como RELME 31 (Universidad de Lima, Perú 2017), EFPEM 2017 (Universidad San Carlos de Guatemala), RELME 32 (Universidad de Medellín, Colombia 2018), VI Congreso Internacional de Etnomatemáticas: Saberes, Diversidad y Paz, ICEm-6 (Universidad de Antioquia, Colombia 2018), Congreso Internacional de innovación educativa (Tecnológico de Monterrey, México, 2019), entre otros, además de la producción de libros y artículos científicos producto de nuevas líneas de investigación tanto a nivel tecnológico como humano.

Validación matemática y formalización de YITP

El artículo *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Prem D. et al, 2022) presentaron la formalización del método: su axiomatización, formación de teoremas y demostración de consistencia mediante el álgebra. Fue aceptado a ser expuesto en el *International Conference on Frontiers of Mathematics and Artificial Intelligence (CFMAI 2022)* en Beijing, China.

Hallazgos en el aprendizaje aritmético mediante YITP

El artículo *Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School*, publicado en la revista *Educational Technology & Society* muestra resultados que sugieren un gran potencial del YITP como herramienta educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética, luego de haber experimentado con un sistema de autoaprendizaje del YITP codificado en un aplicativo (juego serio) para tabletas electrónicas con niños de zonas rurales en situación de aislamiento debido a la pandemia de la Covid19.(Guzmán R., 2023). En dicho estudio del tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, se observa la rapidez con la que los estudiantes aprenden tópicos de YITP, así como una mejora en la actitud respecto a las matemáticas. YITP también presenta un impacto favorable en el desarrollo del pensamiento computacional en niños debido al reconocimiento de patrones y elaboración de estrategias (algoritmos) durante el aprendizaje de la aritmética (Alvarado L. et al, 2022).

La actividad física y sus beneficios en los procesos cognitivos

Las actividades de aprendizaje basadas en desarrollo psicomotriz pueden mejorar el desempeño matemático en niños preadolescentes. (Beck MM, 2016).

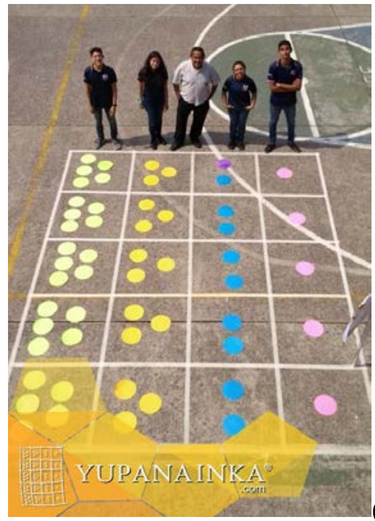
En los últimos años ha habido un incremento en las evidencias de los beneficios que proporciona la actividad física en los procesos cognitivos (Hernández-Mendo A., 2019). Dichos estudios están respaldados por un alto nivel de confiabilidad debido a que están basados en técnicas electrofisiológicas como el electroencefalograma (Cheron et al., 2016; Gutmann et al., 2018), la resonancia magnética funcional (Chaddock-Heyman et al., 2013; Fontes et al., 2015; Chen et al., 2016), la tomografía de emisión de positrones (Boecker and Drzezga, 2016), la tomografía de emisión de fotón simple (Shih et al., 2019), o la magnetoencefalografía (Huang et al., 2016), cuyas tecnologías de monitoreo han ido mejorando, y en consecuencia, permitiendo una mayor comprensión de los procesos cognitivos durante actividades físicas y deportivas (Hernández-Mendo A., 2019)

Runa Yupana Tawa Pukllay

El RYTP es una de las dinámicas de aprendizaje y práctica del YITP con mayor aceptación y demanda por parte de estudiantes, principalmente niños y jóvenes de educación primaria y secundaria. RYTP ha sido desarrollada con el objetivo de combinar dos actividades que frecuentemente vienen siendo enseñadas de manera separada en la mayoría de escuelas en Latinoamérica y el mundo en general: la educación física y las matemáticas. (figuras 2a y 2b)

RYTP constituye una alternancia semiótica, por cuanto utiliza un conjunto de signos aritméticos diferentes a los convencionales indo-arábigos y clarifica, precisa y expande su significado. La alternancia semiótica es una herramienta que puede ser utilizada de manera continua en la didáctica de las matemáticas, pues agudiza el pensamiento facilitando la generalización de conceptos. (Escotto-Córdova, 2021).

(A)



(B)

Figura 2. (A) Prof. Eloy Reyes y la RYTP en I.E. bilingüe (quechua-castellano) en Huamachuco, Cañaris (Perú) (B) Prof. Johnny Ochoa y la Runa Yupana en I.E. en Ciudad de Guatemala (Guatemala)

El propósito de esta actividad transdisciplinaria es estimular a los niños en el aprendizaje de las matemáticas de manera activa, dadas las evidencias existentes tanto desde los estudios de la gamificación como de la conexión psicomotora y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas (Beck MM, 2016; Novoa M., 2022). Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RYTP, se ha observado que los estudiantes afianzan rápidamente el conocimiento teórico sobre la lectoescritura de números en la yupana, el reconocimiento de patrones y los movimientos YITP; pero que, además se interesan en el proceso de construcción de la yupana, lo que abre la posibilidad de enlazar la enseñanza con tópicos de medición de áreas, división de sectores en forma proporcional, utilización de herramientas de medición, entre otras actividades. (figuras 3a y 3b).

Elaboración de la RYTP

Una de las dinámicas más divertidas y que convoca una gran participación por parte de los alumnos desde si elaboración es la Runa Yupana (del quechua “Yupana Humana”). La Runa Yupana representada comprende la misma estructura básica que la desarrollada a partir del dibujo de Guaman Poma (figura 1a), es decir que contiene 5 filas y 4 columnas.

Subitización es la identificación inmediata de un número exacto de objetos en pequeños conjuntos (Piazza M. et al, 2011). Al tener una estructura repetitiva de filas con 5,3,2 y 1 puntos, RYTP facilita la subitización de dichos puntos, lo que permite que eventualmente y cuando ya no sea necesario, se prescinda de ellos al elaborar las yupanas en el piso, quedando solamente una estructura matricial de puras casillas o aprovechando losetas preexistentes.

Para su elaboración, se traza una yupana en el piso de dimensiones aproximadas a 6 m. de ancho por 9 m. de largo, teniendo en cuenta de que en vez de usar semillas o piedras se posicionarán los estudiantes quienes realizarán los movimientos a través de simples coordinaciones.

Dinámica de la RYTP

A continuación, se menciona una serie de términos y situaciones que presuponen un conocimiento previo del método YITP. Para una referencia o profundización en los mismos se sugiere revisar cualquiera de los libros o artículos seminales de YITP: a) *Yupana Inka – Decodificando la matemática. Método Tawa Pukllay* (Dhavit-Prem, 2016); b) *Hatun Yupana Qellqa* (Dhavit-Prem, 2018); c) *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Dhavit-Prem et al, 2022)

Una vez planteado el reto matemático por el profesor, la organización del equipo de estudiantes es esencial para determinar los códigos de comunicación que utilizarán. Es recomendable que los mismos estudiantes creen dichos códigos y que durante el desarrollo de la dinámica los vayan mejorando tanto respecto a la información que se transmiten como a sus estrategias de juego. Por ejemplo, cuando dos estudiantes se encuentran en una misma casilla, haciendo contacto visual y hablando en el código acordado previamente entre ellos, deciden ejecutar un determinado movimiento. Así, dos compañeros en una casilla 2 pueden mirarse y decir *Iskay* en voz alta y a continuación desplazarse a las casillas que les corresponda, lo mismo con las casillas 3 *Kimsa* y 5 *Pisqa*. Para el caso de la casilla 1 pueden coordinar señalando la cantidad de estudiantes que ejecutarán el movimiento *Kikin* del tipo “5 en 1 = 1 en 5” o similar.

Tanto para el movimiento *Pisqa* como *Kikin*, que son movimientos en los que se descartan fichas del tablero, es importante que definan quienes saldrán de las mismas y quienes continuarán en el tablero. Una sugerencia inicial es mantener en el tablero a los estudiantes más expertos en YITP, para así garantizar las mejores estrategias hasta el final. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el objetivo no es solamente crear las situaciones óptimas en cuanto a velocidad y efectividad en los movimientos para el “cálculo”, sino que el propósito principal es elevar el nivel de habilidad de quienes más lo necesitan. Por esto, una buena práctica para este fin es que los profesores, guías o *Kamayoq* (capitanes de grupo), sitúen a los estudiantes que menos práctica tienen en situaciones que demanden estrategias en las que sean ellos quienes se mantengan hasta el final.

Hay que considerar que los *movimientos compuestos* requerirán mayor coordinación y comunicación entre los miembros del equipo. Sin embargo, no existen estándares fijos, pues la idea es precisamente que los integrantes creen su propio código como mejor vean por conveniente, mediante señas o hablando y ejecuten los movimientos hasta que el final el *Kamayoq* (capitán) del equipo, cante “¡Haku!” al mismo tiempo que suena una campana o realiza algún otro movimiento predeterminado (escriba el resultado en una pizarra o lo registre en los nudos de un khipu).

Otra práctica interesante es jugar a una ronda de 10 cálculos consecutivos e ir rotando y mezclando a los estudiantes de una y otra yupana. Esto es muy útil para la integración de todos los estudiantes, la flexibilidad y aceptación frente al cambio y a la valoración del juego y de la dinámica correctamente realizada más allá del resultado final de los equipos.

En las modalidades de *T'aqay* (sustracción-selección), *Miray* (multiplicación) y *Rakiy* (división), como es natural que se requiera una distinción de colores en "las fichas", es recomendable utilizar prendas distintivas de color fácilmente contratable para indicar la función de cada participante en la operación: valor positivo, valor negativo, indicador de multiplicando o de divisor.

Figura 3. (A) Construcción de la Runa Yupana en patio de la escuela: medición y demarcación de casillas
(B) Distribución y colocación de puntos de manera proporcional al área de la casilla y siguiendo la secuencia 1,2,3,5

Estructura del Taller

Considerando el número máximo de participantes a los talleres, se seguirá la siguiente secuencia:

1. Introducción al Tawa Pukllay (movimientos básicos, expansión y avanzados) para la escritura de números y realización de operaciones: yapay (adición) y t'aqay (sustracción)
2. Se crearán dos equipos cuyos miembros serán aleatoriamente elegidos y conducidos a la zona de yupanas de piso.
3. Los grupos conversarán y desarrollarán estrategias de comunicación interna para la resolución de ejercicios en el Runa Yupana
4. Se generarán desafíos aritméticos para ambos equipos, y se procederá a jugar con los ejercicios, tomando nota de los resultados, tiempos y analizando estadísticas. Del mismo modo, se realizarán sesiones de retroalimentación entre los miembros de cada equipo con el objetivo de mejorar su comunicación y estrategias.

Aritmética YITP: patrones, movimientos y algoritmos

RYTP utiliza la representación de números, movimientos (*básicos*, de *expansión* y *compuestos*) y algoritmos YITP para la resolución de operaciones aritméticas. La explicación detallada de dichos algoritmos se encuentra en los libros y artículos seminales de YITP señalados en el título anterior.

Conclusiones

RYTP se viene investigando de manera observacional, cualitativa y empírica, principalmente en niños, adolescentes y jóvenes en edad escolar (primaria y secundaria). Dichos estudios sugieren que RYTP, además de poseer los mismos atributos que YITP (reduce la memoria de trabajo, facilita la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias)(Guzmán-Jiménez et al, 2022), incentiva a los estudiantes a realizar el trabajo en equipo de manera organizada y comunicativa: los estudiantes manifiestan que disfrutan de elaborar nuevas estrategias de juego y código verbal que acelere sus dinámicas, principalmente cuando juegan en modalidad *Atipanakuy* (Dhavit-Prem et al, 2019), la cual consiste en competencia de equipos en dos o más yupanas simultáneas. Próximas investigaciones serán de tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, orientadas a analizar eficacia de resultados, tiempos, optimización de algoritmos y de ser factible, análisis de correlatos electrofisiológicos durante el desarrollo de las dinámicas RYTP en niños y adolescentes con y sin dificultades de aprendizaje. Si bien ya existen estudios que demuestran la conexión entre las habilidades psicomotrices y el desempeño en las matemáticas (Beck MM. 2016), el objetivo es encontrar las posibles implicancias directas del RYTP tanto en la aptitud como en la actitud frente a las matemáticas.

Referencias y bibliografía

Amato S. et al (2013) The Abacus: Instruction by Teachers of Students with Visual Impairments. 272 Journal of Visual Impairment & Blindness, July-August 2013

Beck, MM. et al. (2016) Motor-Enriched Learning Activities Can Improve Mathematical Performance in Preadolescent Children. Front. Hum. Neurosci. 10:645. doi: 10.3389/fnhum.2016.00645

Boecker, H., and Drzezga, A. (2016). A perspective on the future role of brain pet imaging in exercise science. Neuroimage 131, 73–80. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.10.021

Chaddock-Heyman, L. et al. (2013). The effects of physical activity on functional MRI activation associated with cognitive control in children: a randomized controlled intervention. Front. Hum. Neurosci. 7:72. doi: 10.3389/fnhum.2013.00072

Chen, A. G., Zhu, L. N., Yan, J., and Yin, H. C. (2016). Neural basis of working memory enhancement after acute aerobic exercise: fMRI study of preadolescent children. Front. Psychol. 7:1804. doi: 10.3389/fpsyg.2016.01804

Cheron, G. et al (2016). Brain oscillations in sport: toward EEG biomarkers of performance. Front. Psychol. 7:246. doi: 10.3389/fpsyg.2016.00246

Escotto-Córdova, E. A. (Ed.) (2021). Alternancias semióticas: estrategia didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Laenseñanza que aporta la historia de las matemáticas [Semiotic alternations: didactic strategy in mathematic’s teaching. Theteaching that supports the history of mathematics]. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de EstudiosSuperiores Zaragoza

Fontes, E. B. et al. (2015). Brain activity and perceived exertion during cycling exercise: an fMRI study. Br. J. Sport Med. 49, 556–560. doi: 10.1136/bjsports-2012-091924

Guaman Poma, F. (1616). Nueva Corónica y Buen Gobierno

Gutmann, B. et al. (2018). The effects of exercise intensity and post-exercise recovery time on cortical activation as revealed by EEG alpha peak requency. Neurosci. Lett. 668, 159–163. doi: 10.1016/j.neulet.2018.01.007

Guzman-Jimenez, R., Dhavit-Prem, Saldívar, A., & Escotto-Córdova, A. (2023). Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School. Educational Technology & Society, 26 (1),79-94.79ISSN 1436-4522 (online) and 1176-3647 (print).

Hernández-Mendo A. et al (2019) Physical Activity, Sports Practice, and Cognitive Functioning: The Current Research Status. Front. Psychol. 10:2658. doi: 10.3389/fpsyg.2019.02658

Hong, Shen (2006) Teaching Mental Abacus Calculation to Students with Mental Retardation. Journal of the International Association of Special Education, v7 n1 p56-66 Spr 2006

Huang, P., Fang, R., Li, B. Y., and Chen, S. D. (2016). Exercise-related changes of networks in aging and mild cognitive impairment brain. Front. Aging Neurosci.8:47. doi: 10.3389/fnagi.2016.00047

L. Alvarado et al (2022), "Teaching of the Yupana with the Tawa Pukllay method for developing the Computational Thinking in children," 2022 IEEE World Engineering Education Conference (EDUNINE), 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/EDUNINE53672.2022.9782386.

Leo, F. (2018) Improving spatial working memory in blind and sighted youngsters using programmable tactile displays. https://doi.org/10.1177/2050312118820028

MoMath and Wolfram (2020). History of Mathematics Project - Incan Yupana. Rescatado de https://www.history-of-mathematics.org/artifacts/incan-yupana

Novoa-Seminario, M. (2022). Programa de actividades psicomotoras para el desarrollo de habilidades matemáticas en niños y niñas de educacion inicial: Psychomotor activities program for development of mathematical skills in initial educations' boys and girls . Prohominum, 2(2), 48–76. https://doi.org/10.47606/ACVEN/PH0008 (Original work published 5 de junio de 2020)

Piazza, M., et al. Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. Cognition (2011), doi:10.1016/j.cognition.2011.05.007

Prem, Dhavit (2014-2016). Yupana Inka – Decodificando la matemática inka, Método Tawa Pukllay. Asociación Yupanki (Ed.)

Prem, Dhavit (2018). Hatun Yupana Qellqa. Antología de estudios. Tawa Pukllay esencial y extensiones. Asociación Yupanki (Ed.)

Prem, Dhavit et al (2019). Tawa Pukllay Atipanakuy: The 4 Sacred Games of the Inkas in a ludic arithmetic competition. Editora Artemis. DOI 10.37572/EdArt_2806213851

Prem, Dhavit et al (2022). Tawa Pukllay Proof: New Method for Solving Arithmetic Operations with The Inca Yupana Using Pattern Recognition and Parallelism, 2022 International Conference on Frontiers of Artificial Intelligence and Machine Learning (FAIML), Hangzhou, China, 2022, pp. 209-218, doi: 10.1109/FAIML57028.2022.00048.

Shih, C. H., Moore, K., Browner, N., Sklerov, M., and Dayan, E. (2019). Physical activity mediates the association between striatal dopamine transporter availability and cognition in Parkinson's disease. Parkinsonism Relat. Disord. 62, 68–72. doi: 10.1016/j.parkreldis.2019.01.027

Secuencia Didáctica para la comprensión inicial de Función Derivada bajo la perspectiva de la Educación Matemática Realista

Paulina Danae **López** Ceballos
Universidad de Sonora
México
paulina.lopez@unison.mx
José Luis **Díaz** Gómez
Universidad de Sonora
México
joseluis.diaz@unison.mx
Gloría Angélica **Moreno** Durazo
Universidad de Sonora
México
angelica.morenoduraz@unison.mx

Resumen

La enseñanza de la matemática en el currículo mexicano ha estado estructurada de manera que no se percibe la vinculación entre las matemáticas y las otras asignaturas. Esto se acentúa en el nivel universitario, donde el objetivo de su enseñanza es fundamentar las bases para el aprendizaje de matemáticas más avanzadas y no para entender cómo la matemática modela y resuelve problemas. Particularmente la enseñanza de la función derivada basa su definición formal y rigurosa en el límite y descuida la conceptualización práctica, limitando su comprensión a la memorización de fórmulas. Utilizando la herramienta GeoGebra, la plataforma Moodle y el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista, se implementó una secuencia didáctica para introducir el concepto de función derivada en estudiantes universitarios de primer semestre, observando una mejor conceptualización de su aplicabilidad para resolver problemas donde la derivada es una herramienta útil.

Palabras clave: Secuencia Didáctica, Modelación, Educación Matemática Realista, Derivada, GeoGebra, Moodle.

Introducción

Desde la educación primaria, los estudiantes en México cursan asignaturas como Ciencias Naturales que incluye aspectos básicos de química, física y biología, entre otros; a la par, cursan la asignatura de matemáticas, la cual es la herramienta principal para estudiar, modelar, representar y explicar los fenómenos naturales de la física, la química y la biología. En el nivel secundario (educación básica superior) se retoman aspectos no tan básicos de estas ciencias, las cuales se profundizan en el nivel medio superior (bachillerato) y superior (universidad) en las áreas de Ciencias e Ingeniería. Sin embargo, en ningún nivel escolar de esta trayectoria académica se visualiza la transversalidad que hay entre la matemática y las demás ciencias, los cursos de matemáticas se estudian de manera autónoma, ajenos a las demás ciencias. En algunos casos, los profesores de matemáticas incluyen al final de un tema, una sección de "aplicaciones" donde se conecta el tópico matemático estudiado con alguna situación extra matemática para observar cómo se "utiliza", al respecto Gravemeijer y Terwel (2000) parafraseando a Hans Freudenthal, mencionan que, en la educación se debe rechazar la alternativa: Enseñar matemáticas puras y luego mostrar cómo aplicarlas, pues esto es simplemente el orden equivocado si se quiere que los estudiantes observen la utilidad de las matemáticas para estudiar, modelar, representar y explicar los fenómenos que surgen en las Ciencias Naturales, "esto no se puede lograr simplemente enseñando "*matemáticas útiles*"; esto inevitablemente resultaría en un tipo de matemática que es útil solo en un conjunto limitado de contextos" (ídem, p. 780). Por su parte Montiel (2005) menciona que, "tradicionalmente la convivencia de las matemáticas con otras áreas científicas escolares se entiende como la aplicación de las primeras en los problemas de las segundas" (p.4), esta concepción es equivocada, las matemáticas "no se aplican", no se desarrolla un objeto matemático *per se* y luego se busca donde aplicarlo, la historia nos demuestra que es precisamente lo opuesto, al plantearse problemas de las ciencias y tratar de resolverlos es como surgen y se desarrollan las matemáticas.

Además, el currículo universitario de los cursos de matemáticas, en las áreas de Ingeniería, Química, Biología, etc., está diseñado de la misma manera que el currículo para la Licenciatura en Matemáticas, es decir, la estructura, la seriación de temas, los teoremas y sus demostraciones, la bibliografía, etc., son iguales para estos dos tipos de estudiantes, aunque el perfil de egreso y las competencias a desarrollar son obviamente muy diferentes; los estudiantes "no matemáticos" requieren un aprendizaje de las matemáticas menos formal y más práctico.

Referente Teórico

La Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), fundada por Hans Freudenthal en 1990 se sustenta en la premisa de que la matemática debe ser una actividad accesible para todas las personas y que, la mejor forma de aprenderla es haciéndola, Fraudenthal (1991) comenta que, las matemáticas siempre se han aplicado en la naturaleza y la sociedad, pero pocas personas entienden el pensamiento detrás de la forma en que se aplican y la razón por la que esto funciona, esto se debe principalmente a la forma en como son enseñadas y aprendidas, las matemáticas están completamente ajenas a las demás ciencias y el objetivo de su enseñanza pareciera ser: dominar las estrategias matemáticas necesarias para atender (y entender) la siguiente asignatura matemática de nivel superior, como ocurre con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

Desde la perspectiva de la EMR, "el énfasis del aprendizaje de las matemáticas no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de la algoritmización, no se trata de aprender álgebra por sí misma, sino en algebrizar conceptos" (Bressan et al., 2005, p.2), la matemática no debe enseñar abstracciones sino permitir que los estudiantes abstraigan los conceptos matemáticos que surgen cuando se resuelve un problema, de manera que, esta teoría permite adecuar la forma de enseñar conceptos matemáticos en las áreas de Ciencias e Ingeniería.

Según Freudenthal (1991) al presentar una situación problema real para que sea resuelta por los estudiantes, surge la matematización, que es un proceso que se realiza de manera progresiva, donde los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal (Bressan et al., 2016). En el nivel situacional, los estudiantes modelan el problema y organizan la información mediante dibujos, tablas, esquemas, etc., que surgen de forma espontánea con base en sus conocimientos previos. Después progresan hacia el nivel referencial, donde relacionan los esquemas, dibujos o tablas, elaborados en el nivel anterior, con el contexto real que están resolviendo para corroborar que cumple las condiciones, en este nivel se buscan regularidades, patrones o relaciones con conceptos matemáticos conocidos y surgen las primeras notaciones matemáticas y gráficas, quizá no formales. En el nivel general, los estudiantes reflexionan, justifican y generalizan matemáticamente todos los conceptos surgidos en el nivel anterior, desvinculan el contexto real del que surgen y generalizan los conceptos matemáticos a cualquier otra situación, pues han desarrollado sus propiedades, es decir, su estructura algebraica, geométrica, tabular, etc. Finalmente, en el nivel formal, pueden plantear la notación matemática formal y resolver cualquier otro problema planteado en el mismo contexto matemático de forma directa. Esto se logra con la guía del docente y la interacción con sus compañeros al comparar sus resultados y reflexionar sobre su actividad matematizadora.

La derivada

El concepto de derivada se comienza a estudiar en el quinto semestre de la educación media superior (bachillerato) en México y se retoma en las áreas de Ciencias e Ingeniería en la educación superior (universidad). La forma de introducir este concepto es utilizando la noción de límite, obtenida como la pendiente de una recta secante que se convierte en recta tangente al acercar el punto $(x, f\ (x))$ al punto $((x+h), f(x+h))$ mediante el límite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h tiende a cero. Posteriormente el profesor cambia las funciones (generalmente polinómicas) para que los estudiantes repitan el cálculo del límite varias veces hasta que “deducen” la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$ dada la función $f(x) = ax^n$.

Esta forma de abordar la derivada tiene un enfoque riguroso y formal de acuerdo con Augusto y Jiménez (2020), provocando dificultades en el aprendizaje de este concepto. A su vez Kinley (2016) menciona que, es en esta definición formal de límite donde se utilizan notaciones y símbolos (la sintaxis) fuertemente ligados al rigor matemático lo que provoca múltiples dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes, desligando su origen variacional (práctico y operativo) y favoreciendo un aprendizaje memorístico de fórmulas y procesos algebraicos que van en detrimento de una comprensión del concepto de derivada como razón de cambio de dos variables (magnitudes) que están relacionadas y que tienen a su vez relación con el problema que modelan o representan. A su vez, Zambrano et al. (2019) mencionan que, actualmente el estudio de la función derivada se reduce a la memorización de expresiones algebraicas y cálculos algorítmicos, lo que no permite relacionarla con fenómenos de cambio y variación. También Dolores (citado en Vrancken y Engler, 2014) expresa que, los estudiantes "difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto". (p.1).

Metodología

Para la puesta en práctica se utilizó un grupo de primer semestre de la Licenciatura en Química con 33 alumnos inscritos, los cuales ya habían cursado el tema de Límites y Continuidad y estaban próximos a comenzar con el tema de Derivadas. Para la implementación se utilizó la plataforma Moodle (Figura 1): https://ntic.uson.mx/avaus2/user/index.php?id=1110, donde se cargaron las actividades a desarrollar, se abrieron foros y cuestionarios para que los alumnos tuvieran acceso a través de su dispositivo móvil en clase. Además, la secuencia didáctica se acompañó de aplicaciones desarrolladas en GeoGebra que los estudiantes pudieron manipular directamente en la plataforma AVAUS.

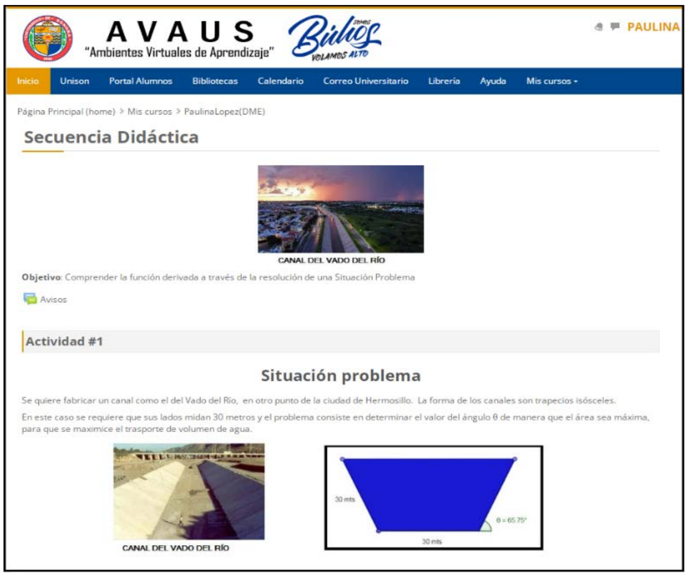


Figura 1. Plataforma Moodle.

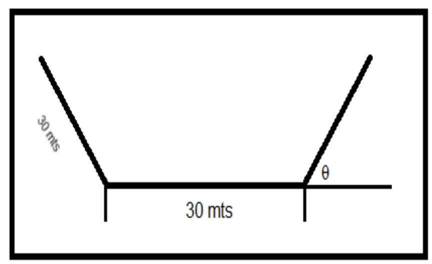


Figura 2. Canal de agua.

La secuencia didáctica fue desarrollada en tres 3 sesiones de clase de 50 minutos de duración cada una. La primera sesión se inicia con la siguiente *Situación Problema*: Se va a fabricar un canal, de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles con las dimensiones indicadas en la figura 2. Determine el valor del ángulo θ de manera que se maximice el área para que pueda transportar un volumen de agua máximo.

En esta primera sesión los estudiantes manipularon el Applet GeoGebra #1 donde pudieron observar cómo cambia el área del trapecio conforme cambia el valor del ángulo, utilizando la herramienta deslizador. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes identifiquen las variables involucradas para modelar el problema (nivel situacional). Una vez que manipularon el Applet, se les pidió que respondieran algunas preguntas para poder identificar, tanto sus conocimientos previos (nivel situacional) como la matematización que utilizarían para modelar el problema. Después de la discusión grupal, se dejó de tarea que pensaran en la fórmula que puede utilizarse para modelar el problema.

La segunda sesión comenzó con la revisión de la tarea, transcribiendo al pizarrón las fórmulas que estaban en el foro, luego se trabajó en equipos analizando las fórmulas para finalizar con una discusión grupal donde se estableció la fórmula del área dado el ángulo y se trabajó en el Applet GeoGebra #2 (Figura 3), donde los alumnos manipularon la aplicación para obtener valores del área del trapecio en función de ángulos dados, además se les pidió a los estudiantes que graficaran los datos utilizando la herramienta lista de puntos. La clase finalizó con la discusión sobre el valor del ángulo que arroja el área máxima y dónde se ubica en la gráfica.

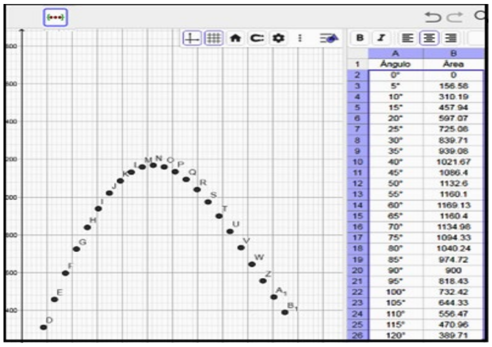


Figura 3. Applet GeoGebra #2

En la tercera y última clase se trabajó con los Applet Geogebra#3 y #4, que dibuja la secante cuando se seleccionan dos puntos y como esta secante se convierte en tangente cuando un punto se aproxima a otro, después se manipulo el Applet Geogebra #5 el cuál dibuja una tangente usando la herramienta deslizador (Figura 4).

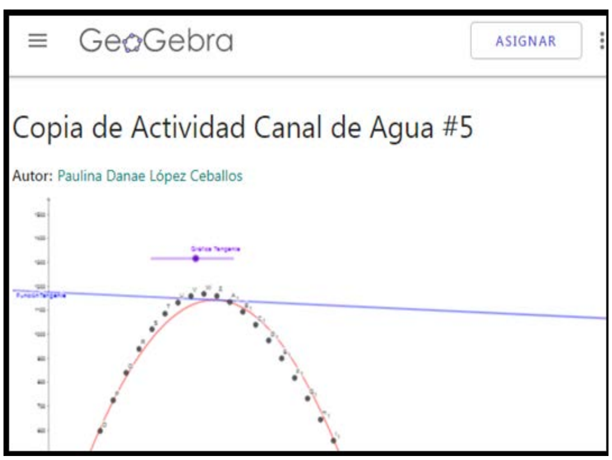


Figura 4. Applet GeoGebra #5

En la discusión grupal se llegó a la conclusión de que el límite nos permite obtener la tangente a partir de la secante y que, al igualar a cero la tangente y despejar el valor x nos da el valor máximo. Para obtener evidencias empíricas que nos permitan validar y mejorar la secuencia didáctica, utilizaremos el estudio de casos observacional cualitativo como se describe en Arnal et al. (1992) utilizando las respuestas de los participantes en la plataforma y su desempeño en el aula.

Resultados

Con respecto al uso del problema del canal de agua utilizado como una *Situación Problema* para el estudio de la función derivada, podemos mencionar que fue un buen ejemplo porque les permitió imaginarse el problema, tal como lo comenta Lariza en la Figura 5.

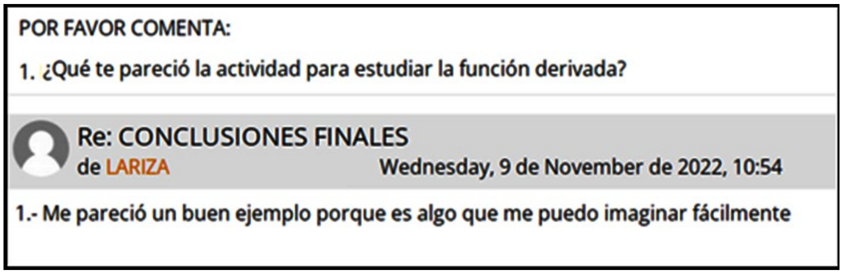


Figura 5. Comentario Lariza.

Para ubicar el nivel situacional de los estudiantes que nos permitiera tener elementos base para la toma de decisiones, se les solicitó que respondieran a un cuestionario inicial (ver Figura 6). De las respuestas obtenidas tenemos que un 56% de los estudiantes mencionó explícitamente el “área del trapecio” como un dato que necesitamos conocer, sin embargo 4 más, que no expresaron la palabra “área”, mencionaron que debemos conocer las medidas de los lados, de lo que se puede inferir que están pensando en el área. Cabe aclarar que ese día asistieron al salón de clase 23 de los 33 alumnos inscritos y solo 16 respondieron el cuestionario.

Estos resultados nos indican que la manipulación del Applet en Geogebra permitió identificar las variables involucradas en la *Situación* Problema en un porcentaje alto de estudiantes (75%), lo que permite posicionarlos mejor en el nivel situacional y esto puede conducir a un mejor tránsito hacia el nivel referencial, donde los estudiantes deben relacionar las variables para obtener la fórmula que modele y resuelva el problema.

Después la discusión grupal para identificar correctamente las variables involucradas en la modelación, se abrió la segunda pregunta del foro, la cual estaba orientada a identificar cómo obtener la altura y el lado mayor del trapecio en función del ángulo (nivel referencial).

A la segunda sesión asistieron 20 alumnos, algunos de los cuales no habían asistido la clase anterior, por lo que, podemos considerar que solo el 21% (7 de 33 alumnos) lograron transitar al nivel referencial al completar correctamente la tarea de obtener la fórmula que modela el problema (ver Figura 7).

¿Qué datos necesitamos conocer para resolver el problema?

(7 no respondieron)

1. Área, conocer las variables y las fórmulas para calcular el área del trapecio
2. Conocer el valor del ángulo, área, se podría usar el teorema de Pitágoras
3. saber las medidas de los lados y de la figura y su área
4. Formula del trapecio (B+b)*h/2, ángulos, medidas
5. No se
6. Las medidas de cada lado
7. No sé
8. Saber la fórmula que se debe usar, saber el ángulo del trapecio
9. Medir lados y el ángulo
10. Conocer las variables
11. Considero que se requiere las medidas deseadas del trapecio, la fórmula de su área y como seria máximo tamaño de la base mayor para obtener el área máxima posible que se podría según los ángulos
12. Conocer el área del trapecio
13. Obtener el área del trapecio, pero no tengo idea
14. Saber medidas de sus lados y su área
15. El ángulo, variables, medidas de cada lado, las formulas correspondientes a la figura geométrica
16. La forma de los canales, la medida de los lados y que tenemos que encontrar en el problema

Figura 6. Primera pregunta del Foro en la plataforma Moodle

Re: Altura y Base mayor
de LARIZA - Tuesday, 8 de November de 2022, 10:31

Con las funciones trigonométricas

1.- 30sen ángulo
2.- 30 + 60cos ángulo

Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Editar Eliminar
Responder (réplica)

Re: Altura y Base mayor
de MELISSA ALEJANDRA - Tuesday, 8 de November de 2022, 10:33

1.- Con sen del ángulo= cat op/hip= sen=h/30
=30sen°
2.- cos°=a/30=30cos°=a
B=a+a+30=2a+30
30+60cos°

Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Editar Eliminar
Responder (réplica)

Figura 7. Foro 3 de preguntas en la plataforma Moodle

Para la tercera sesión se esperaba que los estudiantes alcanzaran el nivel general con la manipulación de los Applets #3, #4 y #5. Ese día asistieron a clase 25 alumnos, de los cuales 5 no habían asistido a ninguna de las dos sesiones anteriores y 4 asistieron solo a la primera sesión. Esto ocasionó retraso en el tiempo asignado a cada actividad de la secuencia didáctica. Del análisis de las respuestas al cuestionario de observaciones del Applet #5 (ver Figura 8), podemos indicar que solo el 21% de los alumnos (7 de 33) que trabajaron con la secuencia didáctica durante las tres sesiones de clase pudieron llegar al nivel general, al apreciar que la recta tangente se obtiene a partir de la secante y que, al igualar a cero la tangente y despejar el valor x nos da el valor máximo.

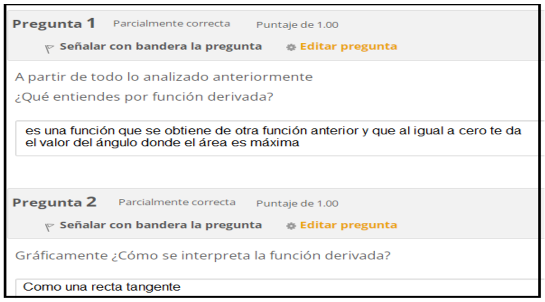


Figura 8. Cuestionario de observación Applet #5

Consideraciones Finales

A pesar de que no se pudo trabajar de forma fluida con los estudiantes, porque un día asistían unos y otro día asistían otros distintos, consideramos que abordar el estudio de la función derivada desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, mediante situaciones problema y utilizando software dinámico, permite construir un concepto inicial de función derivada de manera natural, menos formal y más práctica e identificando su utilidad para modelar, explicar y resolver problemas de optimización y permitiendo que su aprendizaje no se reduzca a la memorización de fórmulas sin un referente práctico.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Editorial LABOR. ISBN: 84-335-3725-3. Impreso en España. 263 páginas.

Augusto, F. y Jiménez, J.R. (2020). Grupo de Trabajo: Contrastes Didácticos entre Cálculo y Análisis. PME-NA, pp.171-174. ISBN: 978-1-7348057-0-3. DOI: https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2005). Los principios de la educación matemática realista. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, (5), 69.

Bressan, A.M., Gallego, M.F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. https://documen.site/download/educacionmatematica-realista-bases-teoricas_pdf .

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co. https://p4mriunismuh.files.wordpress.com/2010/08/revisiting-mathematicseducation.pdf

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Kinley, (2016). Grade Twelve Students Establishing the Relationship Between Differentiation and Integration in Calculus Using graphs. *IEJME-Mathematics Education*, 11(9), 3371-3385.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socio epistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Relime* Vol. 8, Núm. 2, pp.219-235

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad, doi 10.1590/1980-4415v28n48a22, *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449-468

Zambrano R., Escudero, D. y Medrano, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática*, 31(1), 258–280.

Taller de Trabajo en Equipos para la Cubicación de Objetos

Rodrigo **Rojas-Muñoz**
Campus Patagonia, Universidad Austral de Chile
Chile
rodolforojas@uach.cl
Claudia **Rozas** Rozas
Pedagogía Básica, Universidad Austral de Chile
Chile
claudia.rozas@alumnos.uach.cl
Rosa **Coñué** Levicoi
Pedagogía Básica, Universidad Austral de Chile
Chile
rosa.conue@alumnos.uach.cl

Resumen

Este Taller se enmarca dentro de una práctica de resolución de problemas en equipos. Las principales habilidades a desarrollar son la enseñanza de la medición y cubicación de objetos reales. La fundamentación teórica viene dada por la Teoría del Aprendizaje Cooperativo de Johnson, Johnson y Holubec. Además de la actividad práctica, se desarrollará una actividad de análisis pedagógico. Los resultados previos indican que la actividad logra generar aprendizaje cooperativo.

Palabras clave: Educación Matemática; Pensamiento Métrico; Aprendizaje Cooperativo; Cubicación; Resolución de Problemas.

Introducción

Desde el año 2012 en el Campus Patagonia de la Universidad Austral de Chile se ha desarrollado un Curso de Razonamiento Matemático para estudiantes de educación secundaria. Los objetivos de este curso son: resolver problemas usando procesos de razonamiento lógico-matemático y conceptos simples de aritmética, álgebra, geometría y estadística; discutir estrategias de resolución en grupo, incentivando la transferencia de conocimientos entre estudiantes; y comunicar de manera efectiva las estrategias usadas y los resultados obtenidos en la resolución de los problemas planteados. Una de las actividades que se desarrollan en este curso de Razonamiento Matemático es la “medición de objetos”, en la que se propone a los estudiantes, organizados en equipos, medir y estimar medidas de objetos en equipos dentro y fuera del aula.

Indagación bibliográfica

Varios autores han destacado como el trabajo cooperativo en matemáticas favorece los aprendizajes individuales, aumenta el interés y mejora el ambiente educativo (Herrada y Baños, 2018; Morales-Maure *et al*., 2018; Lara *et al.* 2019; Catarino *et al.*, 2019; Huaman *et al.*, 2020).

Por otro lado, en el estudio realizado por (Martínez y Juárez, 2019) sobre cubicación de madera, se concluye que la resolución de problemas con objetos reales promueve el carácter funcional del conocimiento matemático y fortalece la habilidad de resolución de problemas.

En particular, (Tuta *et al.*, 2019), en un estudio diagnóstico sobre pensamiento métrico en estudiantes de séptimo grado, concluyen que los estudiantes muestran gran debilidad en “elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (p.110) y “tienen poca capacidad para el manejo de conversiones de unidades” (p.110), siendo estas dificultades causa de un bajo nivel al “comprender, interpretar y evaluar ideas oralmente, por escrito y en forma visual” (p.110).

Marco teórico

El aprendizaje cooperativo

En el modelo de aprendizaje cooperativo de (Johnson *et al.*, 1994) existen tres tipos de grupos de aprendizaje: los grupos formales, los grupos informales y los grupos de base cooperativos. Los grupos informales son grupos de corto plazo que sólo funcionan durante parte de una clase y que se pueden usar por ejemplo para analizar un video o una exposición, para crear un clima de aprendizaje o para sacar conclusiones. Los grupos formales de aprendizaje cooperativo tienen una mayor duración, y los estudiantes pueden ir evaluando su aprendizaje y el de sus compañeros, así como permitir al profesor intervenir para mejorar el desempeño interpersonal y grupal del equipo. Finalmente, los grupos de base cooperativos son de larga duración, deben ser heterogéneos, con fuerte interdependencia emocional y compromiso colectivo, que se apoyan mutuamente y están preocupados por el aprendizaje de cada uno de sus miembros.

Además, los autores indican que el docente debe diagnosticar en qué nivel de rendimiento se encuentran sus grupos de aprendizaje y establecer estrategias de apoyo para que estos grupos logren avanzar en la curva de rendimiento. Los niveles de rendimiento son: grupos de pseudoaprendizaje, grupos de aprendizaje tradicional, grupos de aprendizaje cooperativo o grupos de aprendizaje cooperativo de alto rendimiento. En los grupos de pseudoaprendizaje el desempeño es menor que si trabajaran por separado. En el grupo de aprendizaje tradicional tiene el mismo rendimiento que los más aventajados de su grupo. Por mientras que los grupos de aprendizaje cooperativo regulares y de alto rendimiento, en cambio, son aquellos donde el rendimiento es notablemente mejor para sus integrantes que si estuvieran aprendiendo individualmente y se caracterizan por cinco aspectos: la interdependencia positiva, la responsabilidad individual y grupal, la interacción estimuladora, las prácticas interpersonales y grupales imprescindibles, y la evaluación grupal.

Además, los autores presentan un ejemplo de cómo resolver problemas matemáticos en grupos. Acá se destacan tres etapas: la formación de grupos con heterogeneidad en cuanto a conocimientos y donde debe quedar claro que el trabajo es cooperativo. Luego, cada grupo resolverá el problema, pero el docente se preocupará de que el trabajo de cálculo no sea realizado por el estudiante más hábil, sino que los roles vayan rotando. Y finalmente, los grupos analizarán su desempeño, revisarán sus conductas, se agradecerán y festejarán su logro.

Marco metodológico

La Metodología ARPA

(Felmer *et al.*, 2019), dan a conocer cómo se construyó la Iniciativa ARPA de acción y reflexión. Esta Iniciativa considera a la resolución de problemas como el eje articulador del proceso de enseñanza-aprendizaje y destacan las oportunidades que ofrece al estudiante para el desarrollo matemático, como la conexión de elementos matemáticos, la promoción de las habilidades de representación y aplicación, y el uso de pensamiento matemático. Ellos señalan que la Iniciativa ARPA nace con el objetivo de dar a los profesores oportunidades para experimentar en resolución de problemas, dado que un profesor sólo podrá enseñar a resolver problemas si antes ha experimentado la ansiedad y la satisfacción en la resolución de problemas por su parte.

Así es como los investigadores (Felmer *et al.*, 2019), diseñaron talleres de desarrollo profesional, llamados Iniciativa ARPA, basados en los principios básicos de hacer y reflexionar. Estos talleres tienen a la resolución de problemas como eje articulador y están destinados a profesores que enseñan matemáticas, con el propósito de instalar la resolución de problemas y prácticas escolares efectivas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar. En el bloque de resolución de problemas, los participantes resuelven problemas con sus pares en grupos, con apoyo de un monitor que sólo interactúa con ellos mediante preguntas. Se considera que un grupo ha resuelto un problema cuando todos los miembros pueden explicar la solución y las estrategias usadas. Cuando un grupo resuelve el problema, el monitor puede proporcionar un problema de extensión, hacer una nueva pregunta o dar un nuevo problema. De esta forma, cada grupo trabaja a su ritmo y la dificultad del problema es graduada por el monitor, según las habilidades de los participantes, así el problema es un desafío constante y efectivo.

El bloque de reflexión se trabaja en plenario, donde los profesores/actores reflexionan sobre su habilidad para resolver problemas, su conocimiento matemático y su aprendizaje, las estrategias usadas para resolver los problemas y las emociones que han sentido en esta tarea. También sobre cómo el monitor interactúa con ellos, cómo esta estrategia puede ser un modelo para el trabajo en aula, y cómo ellos pueden llegar a implementarlo.

Nosotros proponemos así desarrollar este taller siguiendo la estrategia ARPA para que los profesores experimenten la resolución de este problema de modelación y para que reflexionen sobre el nivel de enseñanza, las adecuaciones a su entorno escolar y la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante en un trabajo desarrollado en equipos.

Diseño del taller

El taller está orientado a profesores de matemáticas que enseñen en séptimo, octavo y/o noveno grado. La habilidad a desarrollar es el pensamiento métrico a través de la cubicación de un celular y una mesa redonda por equipo. Cada equipo deberá estar integrado por 3 personas. Al finalizar la actividad, esperamos que los docentes reflexionen sobre el taller, su pertinencia, nivel educativo adecuado, aprendizajes esperados y previos, y cómo evaluar estos aprendizajes.

Desarrollo del Taller

Propósito del Taller: analizar una metodología activa de resolución de problemas métricos en grupos de aprendizaje cooperativo.

Objetivo de aprendizaje: cubicar objetos reales en forma grupal, midiendo y aplicando fórmulas de geometría Euclidiana.

Materiales:

- Un celular por equipo aportado por los participantes.
- Una mesa redonda por equipo aportada por la institución.
- Calculadoras aportadas por los participantes.
- Cintas métricas, reglas, pies de metro, cordón, tijeras; aportadas por los monitores.

Agenda del Taller:

Tabla 1

Agenda del Taller de Trabajo en Equipos para la Cubicación de Objetos.

Duración	110 minutos	
Tiempo	***Actividad***	***Descripción***
10 minutos	Bienvenida y presentación	Los conferencistas presentan el marco teórico y marco metodológico del taller.
15 minutos	Medir y cubicar un celular	Los docentes se organizan en grupos de 3 individuos. Los grupos escogen un celular y miden las dimensiones de este y calculan su volumen.
45 minutos	Cubicar una mesa redonda	Los grupos miden el volumen de la tabla y la base de una mesa redonda que será facilitada por la institución.
40 minutos	Análisis	Los docentes que participaron de la actividad evaluaran el diseño y la implementación de la secuencia didáctica. Los grupos analizaran en que niveles educativos se puede implementar esta actividad, que aprendizajes se requieren, que aprendizajes se logran y como evaluarían estos aprendizajes.

Instrucciones para los monitores:

- Los monitores dispondrán de los instrumentos de medición en una mesa.
- Se debe dar amplia libertad a los grupos para decidir cómo proceder y qué instrumentos utilizar.
- Si un grupo pide el pie de metro, el/la monitor(a) debe enseñar a usarlo.
- Los monitores responderán las dudas en forma orientadora no guiada, incentivando al acuerdo entre los integrantes del grupo y corrigiendo mediante preguntas los errores cometidos.

Resultados

El taller y la metodología han sido aplicadas en estudiantes de 7º Básico (13 años) a 4º Medio (18 años) de la Región de Aysén en el sur de Chile, en instancias de vinculación con el medio desarrolladas por la Universidad Austral de Chile, Campus Patagonia, en la ciudad de Coyhaique. El taller completo incluye además la medición de un agua de un edificio. Este evento ha sido reemplazado por un análisis pedagógico crítico por parte de los profesores participantes. Además, existe una segunda actividad de cubicación de bosque que se realiza en una segunda sesión en una Reserva Nacional.

Todos los equipos logran terminar las actividades en el tiempo determinado, incluyendo la redacción de un informe de la actividad. Los estudiantes han manifestado que esta es una actividad que los incentiva a participar y aprender, o repasar contenidos aprendidos en los mayores, manifestando que es un desafío constante, “sus clases me hacen pensar todo el rato profe”.

A continuación, detallamos estrategias y los errores que se les va corrigiendo a los estudiantes durante el desarrollo del taller.

Tabla 2

Estrategias adoptadas y errores corregidos a los estudiantes que realizan el Taller de Cubicación.

Estrategias de los estudiantes	**Errores procedimentales corregidos**
Midiendo el celular: Los estudiantes miden el largo, el ancho y el espesor y calculan el volumen multiplicando las tres medidas. Los estudiantes miden el largo y el ancho y calculan el área y luego miden el espesor y calculan el volumen multiplicando área por espesor.	**Midiendo el celular:** Los estudiantes sólo miden largo y ancho y calculan el área. Los estudiantes miden el espesor en milímetros y multiplican directo sin convertir a centímetros.
Midiendo una mesa redonda: Los estudiantes miden el diámetro y el espesor h de la tabla, calculan el radio r dividiendo el diámetro por 2, luego calculan el volumen con la fórmula $V = \pi r^2 h$. Los estudiantes miden la circunferencia y la altura h del pedestal, calculan el radio r dividiendo la circunferencia por 2π, luego calculan el volumen con la fórmula $V = \pi r^2 h$.	**Midiendo una mesa redonda:** Los estudiantes confunden diámetro con radio. Los estudiantes confunden circunferencia con diámetro. Los estudiantes no saben calcular el volumen de un cilindro.

Conclusiones y reflexiones

La actividad logra modificar la actitud de los estudiantes hacia la geometría. Muchos estudiantes manifiestan desconocimiento o poca habilidad en geometría en esta sesión “profe es que no nos pasaron esto en el colegio” o “nunca he sido buena en geometría”. Pero en la segunda sesión de cubicación ya no manifiestan estos temores: “¿qué vamos a medir hoy día?”, “¿vamos a medir los árboles profe?”.

El taller logra que los estudiantes discutan, lleguen a acuerdos y terminen la actividad, pues mantiene a los estudiantes enfocados en objetivos precisos. Se observa que existe interdependencia positiva e interacción estimuladora entre los integrantes de los equipos durante el desarrollo del taller. Además, hay responsabilidad individual para con el equipo y la actividad, y se producen relaciones interpersonales generalmente respetuosas y proactivas. Podemos afirmar que los grupos que se forman son grupos de base cooperativa según la descripción de Johnson, Johnson y Holubec, a pesar de ser grupos informales que se forman sólo para esa clase.

Esperamos contar con un mejor análisis de la actividad con la aplicación de este taller a profesores de los niveles especificados.

Referencias y bibliografía

Catarino, P., Vasco, P., Lopes, J., Silva, H., y Morais, E. (2019). Cooperative Learning on Promoting Creative Thinking and Mathematical Creativity in Higher Education. *REICE Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 17(3), 5-22.

Felmer, P., Perdomo-Díaz J. y Reyes, C. (2019). The ARPA Experience in Chile: Problem Solving for Teachers' Professional Development. En Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (Eds.), *Mathematical Problem Solving*, ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Herrada, R.I. y Baños, R. (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas. *Espiral. Cuadernos del Profesorado*, 11(23), 99-108.

Huaman Camillo, J.G., Ibarguen Cueva, F.E. y Menacho Vargas, I. (2020). Trabajo cooperativo y aprendizaje significativo en Matemática en estudiantes universitarios de Lima. *Educação & Formação* 5(3), e3079.

Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E.J. (1994). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Editorial Paidós SAICF, Argentina.

Lara F., L.M., Lara F., M.A., Tapia V., H.P. y Bonifaz A., E.F. (2019). Álgebra cooperativa, un aporte a la inteligencia lógico-matemática. *Espacios* 40(33), 20-29.

Martínez Cruz, G. y Juárez Ruiz, E.L. (2019). La cubicación de madera como un problema geométrico real diseñado para promover el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 191-199.

Morales-Maure, L., García-Marimón, O., Torres-Rodríguez, A. y Lebrija-Trejos, A. (2018). Habilidades Cognitivas a través de la Estrategia de Aprendizaje Cooperativo y Perfeccionamiento Epistemológico en Matemática de Estudiantes de Primer Año de Universidad. *Formación Universitaria*, 11(2), 45-56.

Tuta M., A.R., Leguizamón R., J.F. y Chaparro C., A.Z. (2019). Diagnóstico del pensamiento métrico con estudiantes de grado séptimo. *Cultura Científica*, (17), 91-117.

Trajetória Hipotética de Aprendizagem e o Campo Conceitual Aditivo: estratégias de resolução de situações-problema de estudantes dos anos iniciais

Rogério Marques **Ribeiro**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo Brasil
rmarques@ifsp.edu.br
Julia Macedo de Oliveira **Morioka**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo Brasil
jmacedodeoliveiramorioka@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta discussões acerca de uma investigação realizada com o objetivo de investigar e analisar as estratégias de resolução de situações-problema do campo aditivo, a partir da proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), a qual foi desenvolvida com um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental. Considerando esse olhar, destaca-se que, metodologicamente, realizou-se uma pesquisa do tipo Intervenção Pedagógica, por meio da qual a coautora deste trabalho atuou como professora-pesquisadora, investigando sua própria prática em sala de aula. A THA desenvolvida foi pautada na perspectiva de um ensino construtivista, considerando a Teoria dos Campos Conceituais e, em especial, o Campo Aditivo. Com este estudo foi possível identificar a variedade de estratégias de resolução de situações- problema do campo aditivo do grupo de estudantes.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Anos Iniciais; Campo Conceitual Aditivo; THA.

Introdução

Com relação à discussão acerca da resolução de problemas do campo aditivo nos anos iniciais, é possível observar, na sala de aula, que ainda há muitas possibilidades de serem exploradas, de maneira a contribuir com os processos cognitivos nas situações de aprendizagem, e que vão além da proposição de "exercícios" que pouco promovem o avanço nas estratégias de resolução de problemas. Por exemplo, os trabalhos desenvolvidos por Vergnaud (1996) revelam que a maior ou menor dificuldade na resolução de problemas aditivos está principalmente relacionada ao nível da cognição do estudante, o que, na maioria das vezes, não se dá de forma espontânea e independe de seu nível de escolaridade e, por essa razão, pode-se perceber um consenso entre pesquisadores (Magina, 2001; Santana, 2012), ao destacarem que a construção de diferentes significados pelos estudantes demanda tempo e ocorre pelo desenvolvimento de diferentes raciocínios.

Tendo em mente essas discussões, e levando em conta o fato de que ainda há muitas possibilidades de serem exploradas, de maneira a contribuir com os processos cognitivos nas situações de aprendizagem do campo aditivo, destaca-se que esta pesquisa teve como objetivo analisar as estratégias de resolução de situações-problema do campo aditivo, a partir da proposta de tarefas, organizadas dentro de uma sequência de situações-problema, articuladas por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), a qual foi desenvolvida com um grupo de estudantes do terceiro ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Simon (1995), a THA consiste em um estabelecimento de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, tanto por meio de tarefas matemáticas para promover a aprendizagem quanto pelo levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos.

Teoria dos campos conceituais: principais fundamentos

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida pelo francês Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista que se reporta à construção de conceitos como fundamento principal. Apesar de Gérard Vergnaud ter sido um discípulo de Piaget, a teoria elaborada por ele se diferencia dos estudos piagetianos, haja vista que a TCC considera, também, a análise do desenvolvimento do conhecimento específico do conteúdo. Pode-se observar que esse acontecimento decorre do fato de que Piaget não tinha uma preocupação com relação ao conteúdo, uma vez que não era intenção dele escrever para a área de Educação. Ressalta-se, no entanto, que, sem dúvida, esse fato não desconsidera o prestígio das contribuições de Piaget para a Educação.

Para Vergnaud (1996 *apud* Cedran & Kiouranis, 2019, p. 66), "[...] o conhecimento de um indivíduo se constrói à medida que ele consegue estabelecer relações e conceitualizar determinadas situações ou problemas, que necessitam de teoremas de níveis diferentes". Nesse sentido, a questão da conceitualização perpassa não somente questões de caráter teórico, mas também se dá por meio de uma estreita dialetização entre o empírico e o teórico, e isso se evidencia não somente na construção dos conceitos pelos sujeitos, mas, também, na construção histórica dos princípios matemáticos (Vergnaud, 1996 *apud* Cedran & Kiouranis, 2019). Dessa forma, a TCC se configura como "[...] uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual" (Vergnaud, 1996, p.133).

De forma particular, em relação às estruturas aditivas, Vergnaud (2009), a partir de suas pesquisas, propôs que os problemas que tradicionalmente eram referenciados como “problemas de adição” e “problemas de subtração” fossem reunidos em um só grupo, denominado “problemas do campo aditivo”, e, em seus estudos, considerando a atividade cognitiva, propõe que as situações-problemas sejam classificadas de uma nova forma: a partir das ideias que elas envolvem, e não mais por uma operação.

Assim, os problemas do campo aditivo devem ser entendidos como aqueles que envolvem ideias de adição e de subtração, sendo considerados pertencentes a uma mesma família, a um mesmo campo conceitual. Ao se enveredar pela leitura dessa teoria, observa-se que, considerando os problemas do campo aditivo, existem tipos de problemas mais complexos que outros, mas as complexidades apresentadas não se devem ao fato de os problemas serem “de adição” ou “de subtração”, ou mesmo por envolverem números grandes ou pequenos (embora este seja um fator importante a ser considerado), mas se deve ao fato de estarem baseados em três elementos, que podem ser estados, transformações ou relações.

A Teoria dos Campos Conceituais tem sido apresentada em diferentes investigações que envolvem os estudantes dos anos iniciais, haja vista a importância de se discutir, nesse nível de ensino, as operações matemáticas do campo conceitual aditivo e do campo conceitual multiplicativo. Apesar da gama de trabalhos produzidos, envolvendo esses dois campos conceituais, destaca-se que para esta investigação houve uma preocupação apenas com aqueles que tratam do campo conceitual aditivo, haja vista que esse foi o foco das discussões durante o desenvolvimento da investigação.

Trajetória hipotética de aprendizagem

Para Simon (1995), a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), como parte do seu modelo para o ensino de Matemática, tem como base a reconstrução de práticas construtivistas para a construção dos conceitos, e se refere aos percursos que o estudante percorre na construção do conhecimento, seguindo dois caminhos: o primeiro, em que o professor tem dificuldade de identificar os mecanismos de aprendizagens dos estudantes; e o segundo, sobre os aspectos em que a aprendizagem é adquirida em processos de ressignificação pelos estudantes.

Simon (1995) ressalta que numa THA os objetivos necessitam estar claros e declarados aos estudantes, pois, assim, será possível definir quais conceitos deverão ser apreendidos. Para esse autor, a partir da definição dos objetivos, estabelece-se uma sequência de aprendizagens pela qual os estudantes deverão ser desafiados e ser capazes de novas formulações. Tem-se, assim, que uma THA é constituída tanto pelos objetivos para a aprendizagem quanto pelas tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos. Ademais, no trabalho produzido por Simon e Tzur (2004), os autores ressaltam a compreensão de tarefas como um processo de construção de um novo conceito na perspectiva da reflexão sobre a atividade-efeito, a qual é realizada numa trajetória hipotética de aprendizagem.

Destaca-se, ainda, a compreensão de que durante o desenvolvimento de uma THA com os estudantes, um objetivo inicial planejado pode ser modificado e, que quando os estudantes se engajam nas atividades planejadas os professores devem estar atentos às considerações daqueles, pois estas considerações contribuirão para a análise da percepção dos estudantes sobre o conceito em estudo.

Julga-se importante destacar, ainda, que uma THA é composta por três componentes: (i) o objetivo do professor, com direções definidas para a aprendizagem de seus estudantes; (ii) as atividades de ensino; (iii) o processamento hipotético de aprendizagem. Simon (1995) ressalta, assim, que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e o conhecimento dos estudantes são elementos essenciais na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Para o autor, a construção de uma THA oferece ao professor a perspectiva de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores inferências sobre como o conhecimento poderia ser processado.

Caracterização da pesquisa

A investigação tematizou aspectos do campo da Educação Matemática a partir da realização de uma pesquisa qualitativa (Sandin Esteban, 2010). Considerando as particularidades dos diferentes tipos de pesquisas que são realizadas numa perspectiva qualitativa, julga-se importante descrever o tipo de pesquisa utilizada nesta investigação. Desse modo, a partir dos interesses e objetivos da pesquisa, destaca-se a pesquisa do tipo Intervenção Pedagógica como sendo o tipo de pesquisa que atendeu as expectativas da investigação. Em particular, para defender sua pertinência e considerá-la como pesquisa, ressalta-se seu caráter aplicado.

Segundo Gil (2010), um diferencial da pesquisa intervenção pedagógica é a preocupação com os benefícios práticos dela, e não somente com a ampliação do conhecimento que pode ser gerado a partir da investigação. Para tanto, se faz necessário uma atenção com a produção dos relatórios oriundos da investigação, pois estes devem ser elaborados de forma que o leitor reconheça as características investigativas e o rigor com que a pesquisa foi realizada, haja vista a preocupação de que estes não sejam confundidos com relatos de experiências pedagógicas.

Considerando as características da pesquisa, elegeu-se a observação participante como um importante instrumento, uma vez que a professora-pesquisadora atuou diretamente com o grupo de estudantes, sujeitos da investigação. Considera-se, em acordo com as afirmações de Lüdke e André (1986), que a observação participante promoveu um grande envolvimento da professora-pesquisadora com a situação investigada.

Em relação aos sujeitos da investigação, destaca-se que a sala de aula em que a pesquisa ocorreu tinha 30 estudantes, e considerando o objetivo da investigação, tem-se que seu desenvolvimento foi pautado na construção de uma sequência de tarefas, na perspectiva apresentada por Simon (2005), no que se refere a THA. Com o intuito de investigar e analisar as estratégias de resolução de problemas que envolvem as ideias do Campo Aditivo, nas produções dos estudantes, destaca-se a intencionalidade de promover discussões e intervenções com vistas a propiciar contribuições para o ensino da Matemática nos anos iniciais Ensino Fundamental, considerando a afirmação de Vergnaud (1996), quando este defende que a compreensão de um conceito ocorre por meio das situações vivenciadas pelo estudante no decorrer de sua escolarização.

Proposta didática de tarefas: implementação e análise dos resultados

Tendo em vista as discussões até aqui apresentadas, e considerando a investigação proposta, passa-se a apresentar uma das tarefas aplicadas aos estudantes, a qual foi elaborada durante o desenvolvimento da pesquisa, reavaliada e replanejada. Destaca-se que, para este artigo, foi escolhida apenas uma das tarefas desenvolvidas, a fim de se atender ao número máximo de páginas permitidas para sua apresentação.

Tarefa – problemas de transformação

Esta tarefa foi realizada em dias diferentes, ao longo de uma semana. Para a resolução da tarefa os estudantes foram agrupados com uma média de 4 crianças por equipe. Os agrupamentos foram propostos pela professora-pesquisadora, e para realizar esse agrupamento foi levado em consideração as estratégias apresentadas na resolução da tarefa aplicada anteriormente (crianças que resolveram a situação-problema, mas não registraram nenhuma estratégia foram agrupadas com crianças que registraram algoritmos ou a representação pictórica), e as dificuldades apresentadas no momento da realização da leitura (crianças que leem com fluência ficaram agrupadas com crianças que não lê, ou ainda demonstram pouca fluência na leitura)

A intenção de agrupar num mesmo grupo crianças que demonstraram habilidades e estratégias diferentes para resolver as situações-problema propostas foi de promover a integração e a troca de informações entre eles. Durante as atividades em grupo os estudantes são expostos à construção coletiva do conhecimento e, além disso, eles desenvolvem a capacidade de ouvir e respeitar opiniões diferentes, permitindo que se unam a fim de alcançar um objetivo comum (Oliveira, 2020), que, no desenvolvimento da tarefa, foi o de decidirem por uma única forma de resolver e registrar a estratégia mais adequada para a situação-problema proposta.

As situações-problema apresentadas nesta tarefa são problemas da *categoria de transformação.* Essa categoria é dividida em seis classes, mas, para este artigo, apresenta-se apenas duas delas, as quais são descritas a seguir, juntamente com a ocorrência das diferentes estratégias na resolução das situações-problema pertencentes à tarefa aplicada, considerando os 5 grupos formados em sala.

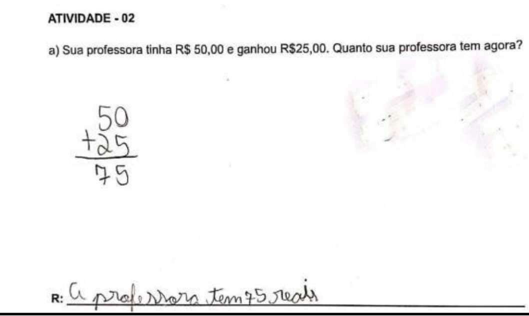
Quadro 1
Estratégias dos estudantes para o problema da 1ª classe

Problema da 1ª classe: Conhecendo o estado inicial e a transformação positiva, pode-se determinar o estado final. **Enunciado:** Sua professora tinha R $50,00 e ganhou R $25,00. Quanto sua professora tem agora?		
Representação com a utilização do algoritmo.	80%	20 (4 grupos)
Representação pictórica seguida de contagem.	20%	05 (1 grupo)

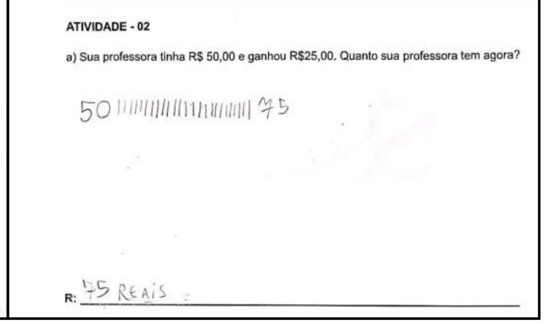
Fonte: elaborado pela professora-pesquisadora, 2022.

Quadro 2
Diferentes estratégias de resolução

Representação com a utilização do algoritmo.



Representação pictórica seguida de contagem.



Fonte: elaborado pela professora-pesquisadora, 2022.

Para a resolução da situação-problema da 1ª classe os grupos utilizaram predominantemente o algoritmo da adição, e apenas um grupo utilizou a representação pictórica com a contagem 1 a 1. Em ambas as estratégias fica muito evidente que o esquema de ação de juntar está representado com o algoritmo da adição ou com a disposição de sinais gráficos que demonstram uma contagem crescente e sequencial.

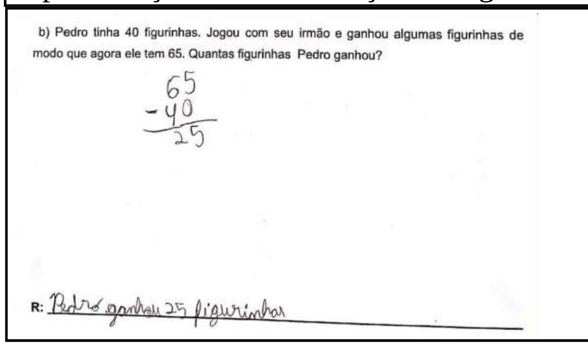
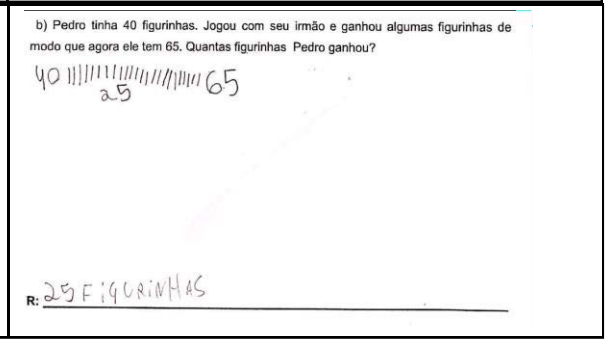
O grupo que realizou a estratégia pictórica, quando questionado quanto a forma de registro, argumentou que preferiu registrar dessa forma para garantir que o resultado estaria correto, pois quando se conta de 1 em 1 não é possível errar a resposta.

Quadro 3
Estratégias dos estudantes para o problema da 2ª classe

Problema da 2ª classe: Conhecendo-se o estado inicial e o estado final pode-se determinar a transformação positiva. **Enunciado:** Pedro tinha 40 figurinhas. Jogou com seu irmão e ganhou algumas figurinhas de modo que agora ele tem 65. Quantas figurinhas Pedro ganhou?		
Representação com a utilização do algoritmo.	80%	20 (4 grupos)
Representação pictórica seguida de contagem.	20%	05 (1 grupo)

Fonte: elaborado pela professora-pesquisadora, 2022.

Quadro 4.
Diferentes estratégias de resolução

Representação com a utilização do algoritmo.	Representação pictórica seguida de contagem.
 b) Pedro tinha 40 figurinhas. Jogou com seu irmão e ganhou algumas figurinhas de modo que agora ele tem 65. Quantas figurinhas Pedro ganhou? 65 - 40 25 R: Pedro ganhou 25 figurinhas	 b) Pedro tinha 40 figurinhas. Jogou com seu irmão e ganhou algumas figurinhas de modo que agora ele tem 65. Quantas figurinhas Pedro ganhou? 40 ||||||||||||||||||||||||| 65 25 R: 25 FIGURINHAS

Fonte: elaborado pela professora-pesquisadora, 2022.

Nesta situação, referente à situação-problema da 2ª classe, embora as estratégias tenham sido iguais às da situação-problema da 1ª classe, visto que foram realizadas no mesmo dia, e as situações-problema estavam ambas na mesma folha, essa situação-problema envolve um esquema de ação, mas a solução exige a aplicação de um esquema inverso. São os chamados "problemas inversos".

Os grupos que utilizaram o algoritmo da subtração como estratégia, quando questionados do porquê da escolha, argumentaram que a pergunta queria saber "quanto Pedro ganhou?", mas que não daria para resolver com a adição sem saber a quantidade exata, por isso, precisaram descobrir separando a quantidade que Pedro tinha no início do jogo e a quantidade que ficou com ele no final, e para isso fizeram uma subtração que representava essa ideia de separar as quantidades.

Já o grupo que se sentiu mais seguro para representar a primeira situação com a representação pictórica, pois não queria errar o resultado, fez o mesmo na segunda situação, e, quando questionado, disse que daria, sim, para juntar as quantidades, mas para isso precisaram contar do 40 até o 65 para saber quanto Pedro ganhou, e representaram com pauzinhos e números.

Durante os momentos de aplicação e de observação, realizado pela professora-pesquisadora com os estudantes, ela perguntou se eles poderiam utilizar algum algoritmo para representar essa mesma ideia que eles registraram com a estratégia pictórica. No mesmo momento todos do grupo disseram que sim, com a adição, 40 + 25 = 65. Foi pedido, então, que registrassem, e rapidamente um dos estudantes alegou que aquela não foi a estratégia utilizada para encontrarem o resultado de 25, resposta com a qual todos concordaram.

Considerando os estudos de Nunes et al. (2009), pode-se perceber que o tipo de objeto utilizado pelos estudantes não importa, pois, o que importa, de fato, é a ação e seu resultado. Assim, é admissível concluir que a justificativa dos estudantes demonstra que eles sabem, implicitamente, que o resultado obtido com o uso da representação pictórica é o mesmo que seria obtido se eles tivessem utilizado a representação numérica. Situações dessa natureza permitiram que eu observasse que os estudantes demonstraram ter uma capacidade de abstração e generalização, uma vez que eles sabiam que o resultado obtido com o uso da representação pictórica era o mesmo que seria obtido se tivessem utilizado o algoritmo convencional da subtração, por exemplo.

Reflexões sobre a tarefa

Na realização dessa tarefa os estudantes resolveram uma sequência de situações-problema da categoria de transformação. Nessa classe de problemas a ideia temporal está sempre envolvida, e ela estabelece uma relação entre uma quantidade inicial e uma quantidade final. Há seis situações possíveis, e neste trabalho foram apresentadas duas delas. Diante das estratégias apresentadas pelos estudantes, é possível observar que os estudantes demonstraram menor variedade de estratégias nas resoluções. No entanto, deve-se ressaltar que os estudantes demonstraram saberes potentes, ao utilizarem de forma adequada as operações matemáticas correspondentes a cada situação-problema proposta.

Dessa forma, pode-se observar a importância de socializar e validar as diferentes estratégias surgidas no decorrer da sequência da tarefa e, nesse sentido, Vergnaud (2011, p. 26) reforça o papel do professor no ensino da resolução de problemas como “um mediador essencial”, cujo “papel não se limita a acompanhar a atividade dos alunos”, mas é essencial na “escolha das situações a serem propostas aos alunos” e na “representação de sua estrutura conceitual por meio de formas simbólicas acessíveis”.

Ao longo do desenvolvimento da sequência da tarefa, composta por situações-problema que envolvem transformações, foi possível observar o quanto os estudantes, em seus respectivos grupos, apresentaram determinado “refinamento” nas estratégias de resolução e o quanto sabiam argumentar a respeito das escolhas realizadas.

Referências e bibliografia

Cedran, D. P., & Kiouranis, N. M. M. (2019). Teoria dos Campos Conceituais: visitando seus principais fundamentos e perspectivas para o ensino de ciências. *ACTIO*, Curitiba, (4)1, 63-86, jan./abr. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio. Acesso em 04 mar.2022.

Magina, S. (2001) *Repensando adição e subtração: contribuições de teoria dos campos conceituais*. 2. ed. São Paulo: PROEM.

Nunes, T.; Campos, T. M. M., Magina, S. & Bryant, P. (2005). *Educação Matemática: números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez.

Oliveira, M.A. de S. (2020). *Inclusão de estudantes com deficiência na Universidade Federal do Acre: panorama e perspectivas* [Dissertação de mestrado]. Universidade Federal do Acre.

Sandin Esteban, M. P. (2010). *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. Porto Alegre: Artmed.

Santana, E. R. S. (2012). *Adição e Subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?* Ilhéus: Editus.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26(2), 114-145.

Vergnaud, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, (4), 9-19.

Turismo matemático: visualización y modelamiento de fenómenos naturales como estrategia de enseñanza y aprendizaje de la Matemática escolar

Carlos **Cabezas** Manríquez
Escuela de Postgrado en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos, Osorno
Chile
ccabezasman@gmail.com
Andrés N. Cabezas **Mancilla**
FFGeomechanics; Geomathx.com. Turismo científico; Valparaíso
Chile
andcabezas@gmail.com

Resumen

El taller trata de manera teórico-práctica una estrategia de enseñanza y aprendizaje de la matemática, aplicable en cualquier nivel del sistema escolar y formación superior, llamada “Turismo Matemático”. Tal estrategia se practica para la divulgación de la matemática en varios países y, ha comenzado a utilizarse desde algunos años, como una manera entretenida e innovadora de motivar su estudio formal. Como metodología de enseñanza y aprendizaje, se basa en la observación de la naturaleza orientada por teorías utilizadas en el área de la Didáctica de la Matemática: Visualización, Teoría de Representaciones, Situaciones Didácticas y EOS. Hemos aplicado esta estrategia en cursos curriculares de Pedagogía en Matemática y Computación y Pedagogía en Educación Parvularia de la Universidad Católica del Maule, Talca y, en programas de postgrado en Educación Matemática de la de la misma universidad y de la Universidad de los Lagos, Osorno, Chile, con notable éxito de motivación y aprendizaje en las distintas versiones realizadas.

Palabras clave: Educación Matemática en Contextos; Visualización; Teoría de Representaciones; Situaciones Didácticas; EOS; Turismo Matemático; Valoración de la ciencia; Valoración de la naturaleza; Desarrollo humano.

Introducción

De modo general, cuando nos referimos a "TURISMO", estamos pensando en actividades recreativas desarrolladas en contextos vacacionales y que contribuyen al esparcimiento, al relax, al disfrute de actividades culturales y otras muchas que podremos imaginar. Por estas características podemos apreciar que el turismo puede desarrollarse tanto en lugares abiertos como en espacios cerrados, en este último caso podemos mencionar museos, exposiciones de arte, sala de clases, etc. Un espacio abierto adecuadamente seleccionado, nos ofrece la oportunidad de apreciar detenidamente la obra humana arquitectónica y aquella obra de la naturaleza apreciable sensiblemente a través de nuestros sentidos, destacando la belleza de sus elementos, valorando su importancia y relevando su necesidad para el desarrollo humano. En esta óptica es donde la ciencia, en todas sus áreas de estudio, nos provee de elementos para una real valoración de los recursos naturales, desafiando al intelecto y desarrollando la capacidad innovadora necesaria en actividades investigativas.

Particularmente la matemática, concebida como una ciencia de modelamiento de procesos y fenómenos de la naturaleza, nos permite, a través de sus distintas áreas de estudio, encontrar las variables y sus relaciones, las que nos proveerán de los elementos básicos para tal modelamiento. En este punto es donde se encuentran tres elementos cruciales que justifican nuestra propuesta: valoración de la naturaleza, matemática educativa y desarrollo humano.

Justificación

Generalidades

De acuerdo a los resultados de investigaciones desarrolladas en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la visualización juega un especial rol en los procesos de percepción de los conceptos matemáticos y se transforma en un instrumento para la intuición y la abstracción de los mismos, su utilización en la búsqueda de una interpretación y verbalización de los procesos conduce al desarrollo de un lenguaje informal para describir los elementos y sus relaciones observadas previamente y, permite que desde una descripción personal, los estudiantes encuentren un lenguaje común a priori, entrando así en un proceso de semiosis conducente al establecimiento de un lenguaje formal, aquí una teoría de apoyo al proceso de formalización es la teoría de representaciones semióticas. Un análisis de los procesos observados, guiado por los docentes permite que los estudiantes construyan situaciones problemáticas que dan lugar a situaciones didácticas que, en el propio proceso de construcción permiten introducir los objetos de aprendizaje pretendidos en las correspondientes planificaciones de las clases.

Finalmente, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática nos da pautas para la evaluación de la idoneidad didáctica del modelo "Turismo Matemático". Como resultado de la aplicación del modelo, se obtiene un "contrato didáctico" en cuya confección han participado tanto docentes como estudiantes, lo que produce una genuina identificación con la problemática planteada para la realización de una clase.

Matemática en contextos

Una vasta investigación se ha realizado respecto de la didáctica de la matemática en contextos, que justifica y aconseja una práctica docente de tipo constructivista, desarrollada en ambientes pedagógicos que favorezcan el aprendizaje en grupos colaborativos y evolucione desde una comprensión inicial posiblemente superficial de los estudiantes, a una comprensión crítica de la realidad observada, en la cual se integran variables que intervienen en los procesos de cambio y configuran relaciones matemáticas o matematizables. Al respecto Camarena señala que en el contexto de las ciencias, la matemática tiene un carácter social y, lo justifica afirmando que la teoría que la estudia, analiza una matemática para la vida y de utilidad para la sociedad civil y que, además, trata de desarrollar una cultura matemática y un pensamiento matemático que contribuyan a que el estudiante se desarrolle en la sociedad de forma razonada, crítica, analítica y científica. (Camarena Gallardo P., 2017).

En el artículo de Camarena antes citado, se exponen de manera amplia los fundamentos teóricos de la matemática en contexto y que la autora resume en el cuadro que se muestra a continuación:

Figura 1. Fases de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

En la descripción de la matemática en contexto Camarena, citando a (Camarena, 1995, 1999; Muro et al, 2002; Olazabal et al, 2003; Trejo, 2005), describe las características generales de la didáctica de la matemática en contexto, de las cuales rescatamos aquellas en las cuales se centra también la estrategia usada por el Turismo Matemático y que exponemos a continuación:

1. Está centrada en el estudiante, se realiza trabajo colaborativo en equipo, el trabajo es interdisciplinario, se favorece la formación integral del alumno, se favorece el aprendizaje significativo, se induce al aprendizaje autónomo.

Además en la aplicación del Turismo Matemático se inducen procesos de investigación, como veremos.

2. La estrategia que guía a la didáctica de la Matemática en Contexto, en esencia, es el gran enfoque que se emplea en las clases, éste consta del trabajo interdisciplinario y trabajo disciplinario en el ambiente de aprendizaje (Camarena y Flores, 2012).

Además en la aplicación del Turismo Matemático una parte importante del trabajo se realiza en el propio contexto o en una simulación del mismo.

3. Las estrategias de enseñanza son la aplicación de eventos contextualizados para hacer trabajados en equipo por los estudiantes y la aplicación de actividades para la abstracción de los conceptos.

Además en la aplicación del Turismo Matemático las estrategias de enseñanza se basan en la problematización por parte de los estudiantes de eventos observados en el contexto.

4. Las estrategias de aprendizaje son los recursos propios de cada estudiante enfatizando en la realización de trabajo colaborativo en equipo.
5. Las actividades didácticas son las que posibilitan la construcción del proceso de enseñanza y de aprendizaje, con la peculiaridad de ser intencionales y orientadas a los objetivos y la evaluación de los aprendizajes.

Turismo matemático

Se trata de una estrategia de enseñanza y aprendizaje de la matemática basada en aspectos recreativos del turismo tradicional, con una didáctica respaldada por teorías de la Didáctica de la Matemática y una óptica que conduce a una mejor comprensión y valoración de la naturaleza y la ciencia e induce al desarrollo de habilidades de investigación. Esta característica sitúa al turismo matemático en un área del turismo científico, como muestra el siguiente cuadro tomado de Bourlon, F. y Mao, P. (Bourlon, F. y Mao, P., 2011)

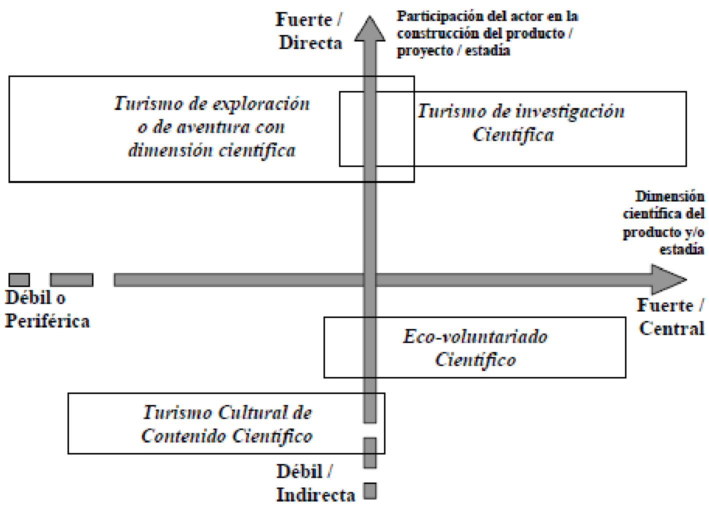


Figura 1. Planteamiento de las diferentes formas de turismo científico.
Fuente: Bourlon, F. y Mao, P. 2011

Como puede deducirse de la figura 1, el turismo matemático puede clasificarse en cualesquier cuadrante de acuerdo al objetivo, nivel, rigurosidad y originalidad de las tareas y resultados de las actividades planteadas y realizadas.

Es sabido que el sistema escolar tradicionalmente ha organizado sus actividades curriculares principalmente en salas de clases con características que favorecen la disciplina en las actitudes de los estudiantes y un desarrollo de las tareas de enseñanza y aprendizaje ordenadas por esquemas rígidos que dejan escaso espacio para la innovación y no favorecen el desarrollo libre de habilidades investigativas en los estudiantes. Las investigaciones en didáctica de la matemática, educación matemática o matemática educativa, como suele llamarse de acuerdo a las respectivas fuentes de origen y desarrollo, han ido proponiendo nuevas estrategias fundamentadas en las diversas teorías surgidas de tales investigaciones y que han conformado una extensa base de conocimiento científico para el desarrollo de la actividad escolar y, específicamente de las actividades de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La aplicación integrada de las teorías que sustentan las propuestas de la estrategia utilizada por el turismo matemático puede deducirse desde la didáctica de la matemática en contexto.

Por otra parte, desde los aspectos aportados por el Turismo tradicional, destacamos el trabajo de Juan J. Guzmán (Guzmán Z., 1997) en el que menciona, desde una mirada básica pero reflexiva del turismo, algunos aspectos que, puestos en paralelo con ciertos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, que ya mencionaremos, complementan e iluminan un análisis profundo de tal proceso y, además, coinciden con una mirada crítica de los problemas más básicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y son coherentes con las premisas básicas de la teoría de la didáctica de la matemática en contexto.

En efecto, según Guzmán, un esquema bajo el cual se puede simular la situación turística no es otro que el de la simple relación que se establece entre dos polos o referentes. Este modelo contiene tres aspectos relevantes: los polos en juego y la relación que se da entre ellos.

El nombre que se da a cada uno de los polos es el de turista y el de anfitrión y la relación que se especifica se denomina situación turística.

En la siguiente tabla presentamos el paralelo entre los aspectos ya referidos de la actividad turística y el proceso de enseñanza y aprendizaje, este paralelo nos permite avizorar formas de organización de actividades didácticas que sean recreativas, atractivas y de promoción de una relación responsable de los jóvenes con la naturaleza, cuando esta es un componente importante de los contextos de estudio de la matemática:

Tabla 1
Analogía actividad turística v/s Proceso enseñanza y aprendizaje

	Actividad turística	Proceso enseñanza y aprendizaje
Polo	Turista	Estudiante
Polo	Anfitrión	Docente
Relación entre los polos	Situación turística	Situación de aprendizaje

Fuente: Elaboración propia

Según Guzmán (Guzmán Z., 1997), la situación turística o la relación que se establece entre los sujetos comprometidos en el turismo tiene como una de sus características más generales y básicas el vacacionar, esto es, una relación de descanso y liberación de las formas que impone la disciplina laboral en razón de su carácter vitalmente abstracto y específico. Análogamente la estrategia turismo matemático no contempla en la situación de aprendizaje, la imposición de una disciplina de comportamiento, en cambio considera el contexto como la gran sala de clases y pone inicialmente, énfasis en la observación de la dinámica de los acontecimientos contextuales, las variables que intervienen, sus relaciones, las que pueden expresar en lenguaje libre e informal. En esta dinámica el docente (anfitrión en el turismo) debe cumplir el rol de motivador y guía de los objetos de atención de los estudiantes (turista en el turismo). Es fácil ahora imaginar en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática, las demás analogías con las situaciones del turismo tradicional, que pueden introducirse en el sistema de educación considerando la teoría de la didáctica de la matemática en contexto, basada en las teorías mencionadas y recogidas por la estrategia propuesta por el turismo matemático. El sistema tradicional de educación centra hoy las actividades, mayormente en los contenidos curriculares, ignorando frecuentemente las situaciones naturales que motivan su estudio.

Enumeramos en consecuencia, los aspectos que caracterizan la estrategia del modelo propuesto por el turismo matemático, que sintetizan las características más relevantes del turismo y la educción matemática en contexto:

1. Aspectos recreativos del turismo tradicional: Se promueve la observación de la naturaleza con atención en la belleza de sus elementos, la armonía de las formas que lucen los vegetales, los animales y otros componentes de la naturaleza. También se hace hincapié en formaciones rocosas y minerales apreciando particularmente la geometría de los cristales. Se pone atención en fenómenos y procesos, en general la dinámica de la naturaleza y en todo aquello que contribuya, mediante su conocimiento, a desarrollar una armoniosa relación con esta. (Martínez Quintana, V., 2017)
2. Búsqueda de una mejor comprensión de la naturaleza: La observación atenta de la dinámica del movimiento, crecimiento y de relaciones de interdependencia de las variables que intervienen en los fenómenos y procesos contribuirán a desarrollar una mirada con curiosidad científica de los entornos naturales, motivando el interés por el funcionamiento y modelamiento de tales fenómenos y procesos. (Soriano, MM, 2001)
3. Aplicación de la matemática: En la interpretación y representación de las variables presentes en la naturaleza y de sus relaciones, nos conducen a la elaboración de formas, patrones, símbolos, desarrollo de un lenguaje para explicar los hallazgos e intuir, conjeturar causas, consecuencias y otros elementos que contribuyan a conjeturar explicaciones científicas a la problemática planteada en relación con el medio ambiente. (Pérez, D. et al, 2005)
4. Trabajo colaborativo: La interacción en los procesos de visualización y búsqueda de variables, colaboración en los procesos de semiosis y en la búsqueda de relaciones de dependencia, causas y consecuencias y, en los procesos de matematización de los fenómenos naturales observados, promueve el trabajo de equipos para la construcción social del conocimiento científico, particularmente el conocimiento matemático. (Monje, C. A., 2011)
5. Aplicación de teorías de la educación matemática: La visualización matemática entendida como proceso de observación e interpretación a través de los sentidos y creación de representaciones externas e internas y la teoría de representaciones semióticas con su

aporte científico a la elaboración y comprensión de los sistemas de representación, contribuyen de manera sinérgica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por su parte teorías como la de situaciones didácticas y aquellas sobre resolución de problemas que proveen elementos para desarrollar procesos de problematización de fenómenos observados y elaboración de situaciones de aprendizaje, también se unen sinérgicamente para conducir el estudio y el aprendizaje de la matemática.

6. Evaluación de aprendizaje: Como otro soporte teórico para la aplicación del modelo "turismo matemático" y su validación como estrategia de enseñanza y aprendizaje tomamos del EOS, los criterios de idoneidad didáctica.

Metodología

El taller comienza con una presentación resumida de la estrategia de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar "Turismo Matemático", su necesidad y sus orígenes.

Los participantes del taller se organizarán en grupos pequeños constituidos en correspondencia con el nivel escolar en el que los participantes desarrollan ordinariamente su trabajo docente.

Cada grupo recibirá fichas de trabajo que indicarán los respectivos contextos en los cuales lo realizarán y, los pasos a seguir según la estrategia turismo matemático.

Las actividades se realizarán en lugares abiertos y en la sala de aula, de acuerdo a las secuencias a seguir en la aplicación de la estrategia.

Todos los grupos entregarán un informe escrito de cada trabajo realizado y los presentarán a los participantes del taller.

Para una mejor utilización del tiempo, los informes tendrán un esquema que permitirá ir confeccionándolos a medida que las actividades se vayan realizando.

Los contextos podrán estar en formatos de videos para observar en computadores, sin embargo y de acuerdo a las posibilidades, se aprovecharán las condiciones que la Universidad de Lima ofrece en su infraestructura arquitectónica y medio ambiental (edificios y jardines).

Testimonio gráfico de actividades

En este espacio se muestran fotografías de actividades realizadas en jornadas abiertas de turismo matemático. Estas muestran parte de lo realizado en plazas, centros comerciales y centros educativos.

Figura 2. Actividades de Turismo Matemático con estudiantes de enseñanza media (foto de la izquierda) y de educación de párvulos (foto de la derecha) en plaza y centros comerciales de la ciudad de Talca, Chile. Año 2013.

La figura 1 muestra estudiantes de enseñanza media rodeando una pileta, seguidamente miden la longitud de la circunferencia descrita y calculan aproximadamente su diámetro. En la misma actividad rodean otros objetos circulares y descubren la aparición de la constante Pi, luego son desafiados a imaginar situaciones donde puedan aparecer otras constantes. En la foto de la derecha, estudiantes de pedagogía en educación de párvulos muestran a sus alumnos figuras geométricas y ellos declaran las característica que pueden descubrir en las mismas. En la misma actividad, reciben trozos de cartulina para intentar construir sus propias figuras.

Figura 3. Estudiantes de pedagogía en matemática y computación de la Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, monitores en jornada de turismo matemático motivando actividades de observación. Año 2015.

La figura 2 muestra un grupo de estudiantes de Pedagogía en Matemática que sirvieron como guías turísticos en una jornada de turismo matemático realizada en patios de la Universidad Católica del Maule. En la foto de la derecha una de las guías muestra un panel de objetos que los turistas pueden observar, describir y con los cuales pueden problematizar y modelar.

Figura 4. Grupo de docentes en ejercicio participando en jornada de turismo matemático, guiado por estudiantes monitores de pedagogía en matemática y computación. Año 2015.

Un grupo de turistas compuesto por docentes en ejercicio participan de la jornada para aprender la estrategia propuesta por el turismo matemático.

Referencias y bibliografía

Bourlon, F. y Mao, P. (2011). Las formas del turismo científico en Aysén, Chile, *Gestión Turística, núm. 15, pp. 74-98.*

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique, 5-1.*

Camarena, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto**.** *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.19, n.2, 01-26.* http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26

Cruz, M. (2006): La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. *Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.*

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, Número Especial, pp. 177-195.*

Flores, C. R., Wagner, D. R., Freitas, I. C. (2012). Pesquisa em visualização naeducação matemática: conceitos. tendências e perspectivas. *Educ. Matem. Pesq.,São Paulo, v.14, n.1, pp.31-45.*

Godino, J. D. (2018). Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf (Versión ampliada y revisada de la segunda parte del trabajo titulado, Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático).

Guzmán, J. J. (1997). Algo de filosofía en torno al turismo. *Gestión Turística, (1), 72–87*.

Martínez Quintana, V. (2017). El turismo de naturaleza: un producto turístico sostenible. *Arbor, 193(785), a396.* https://doi.org/10.3989/arbor.2017.785n3002

Monje, C. A. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica. *Universidad surcolombana. Facultad de Ciencias Sociales y Humanas. Programa de comunicación social y periodismo. Neiva, 2011.*

Pérez, D., Macedo, B., Sifredo, C., Valdés, P., Vilches, A. (2005). ¿Cómo promover el interés por la cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada para la educación científica de jóvenes de 15 a 18 años. *UNESCO Office Santiago and Regional Bureau for Education in Latin America and the Caribbean.*

Polya, G., (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Serie de Matemáticas. Editorial Trillas.

Soriano, MM (2001). La motivación pilar básico de todo tipo de esfuerzo. *Proyecto social: Revista de relaciones laborales, ISSN 1133-3189, Nº 9, págs. 163-184.*

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Um Estudo de Caso: Análises Comparativas Aplicando os Estilos de Aprendizagem na Educação Matemática

Antonio Sergio Abrahao Monteiro **Bastos**
Universidade Metodista
Brasil
tutor.abraham@outlook.br
Rony Santos de **Araujo**
Colégio Satélite
Brasil
ronysantosprofessor@gmail.com

Resumo

Este trabalho consiste em analisar e discutir o estilo de aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, no qual se verificou, com as turmas selecionadas uma preferência por um estilo de aprendizagem. O estudo é qualitativo, composto por um levantamento de dados, embasados pelo Index of learning styles (ILS). A análise dos resultados está alinhada de acordo com o modelo de estilos de aprendizagem elaborado por Richard Felder e Linda Silverman (1988). Ressalta-se que as desigualdades entre os estilos geram um desequilíbrio na maneira como o conteúdo é apresentado e absorvido, indicando uma provável causa para o baixo rendimento na aprendizagem de Matemática. Propõe-se reflexões essenciais para a melhoria da prática pedagógica adequadas para um melhor desenvolvimento do ensino e da aprendizagem em sala de aula.

*Palavras-chave***:** Aprendizagem; Estado do Conhecimento; Educação Matemática; Ensino Fundamental Anos Finais; Ensino Médio.

Resumen

Este trabajo consiste en analizar y discutir el estilo de aprendizaje de los alumnos realizado con salones de Primaria (últimos grados) y Secundaria, en el que se comprobó una preferencia en el estilo de aprendizaje. El estudio es cualitativo, compuesto por un levantamiento de informaciones, respaldadas por *Index of*

Learning Styles (ILS). El análisis de los resultados está alineado de acuerdo con el modelo de estilos de aprendizaje elaborado por Richard Felder y Linda Silverman (1988). Se destaca que las desigualdades entre los estilos generan un desequilibrio en la manera como el contenido es presentado y absorbido, indicando una probable causa para el bajo rendimiento en la Enseñanza de Matemáticas. Se proponen reflexiones esenciales para la mejora de la práctica pedagógica adecuadas para un mejor desarrollo de la enseñanza y del aprendizaje en las clases.

Palabras clave: Aprendizaje; Estado del Conocimiento; Educación Matemática; Educación Primaria (últimos grados); Educación Secundaria

Ao observar uma sala de aula, encontramos uma mescla de alunos com estilos de aprendizagem dos mais variados, no entanto, o professor não consegue entender ou mesmo desconhece o estilo de aprendizagem de seus alunos. Dessa maneira, a metodologia que ele utiliza nem sempre atenderá às necessidades de compreensão de cada aluno.

Compreender o individual para alcançar êxito coletivo é fundamental, cada aluno é único, no entanto, apresenta características comuns ao grupo da sala de aula. Para Kolb e Kolb (2008, p. 19) “o estilo de como se aprende está relacionado às respostas sensoriais de cada situação com o qual o indivíduo se depara”, sendo assim, os estímulos ou metodologias que o professor usa em sala de aula está diretamente associado a consecução do conhecimento

Ao conhecer o estilo de aprendizagem predominante da turma, o professor desenvolve estratégias direcionadas ao contexto apresentado pelo aluno. Essa identificação não somente facilita o trabalho, como também desenvolve nos alunos todo potencial de entendimento e compreensão de conteúdos propostos a eles. Bloom (1983) acredita que os alunos possuem muitas características em comum quanto à capacidade de aprender, ao ritmo de aprendizagem e à motivação. Todavia, é muito difícil entender a maneira como alguém aprende e nem sempre a descoberta é suficiente para proporcionar resultados satisfatórios. Ressalta-se, porém, que a preocupação do professor em identificar qual é o estilo de aprendizagem de seus alunos já é um indício de empenho no trabalho. De certa forma, essa postura facilita o desenvolvimento das aulas, pois o envolvimento é notado por todos na classe.

Iniciou-se este trabalho com um estudo bibliográfico com base em fontes secundárias, tais como, dissertações, teses e artigos, foi levantado também embasamentos para uma abordagem qualitativa, agregada à pesquisa participante com o objetivo descritivo e exploratório. Complementando, as informações discutidas neste artigo são oriundas de um questionário aplicado pelo professor o qual permitiu levantar dados de cento e dez alunos, sendo eles: sessenta e cinco do Ensino Fundamental Anos Finais (EFII) e quarenta e cinco do Ensino Médio (EF).

Separando por sexo temos quarenta e cinco meninas do EFII, vinte e sete do EM, vinte meninos do EFII e dezoito do EM, considerando neste trabalho o devido sigilo e o anonimato dos alunos envolvidos, sendo que os formulários não exigia identificação por nome, e que durante e após as atividades, alguns comentários foram realizados e abalizados em fatos e falas significativas. Ressaltamos que est e estudo é um recorte de um trabalho maior, em que há outras questões discutidas.

Este artigo procura discutir questões relacionadas ao tema da aquisição do conhecimento e do ensino. Procurou-se então, responder às questões:

a) Como o Estilo de Aprendizagem pode ser inserido no cotidiano educacional?
b) Este método, pode vir a auxiliar o professor em sua didática?

Esse tema é desenvolvido partindo fundamentalmente do conceito de estilos de aprendizagem, olhando para as preferências que cada um possui, em sua forma de obter novos saberes, de maneira mais eficaz.

Para Belhot (1997, p. 11) “informações sobre o estilo de aprendizagem são importantes para o processo de ensino e aprendizagem na medida em que auxiliam os alunos na compreensão das suas preferências”. O processo de identificação de estilos de aprendizagem é uma ferramenta valiosa na formação de conhecimento, infelizmente esta ferramenta é pouco conhecida por alunos e professores, mantendo e perpetuando assim, a dificuldade na análise do processo de ensino e aprendizagem, em que há a possibilidade de ser diminuída pelo entendimento que se possui do grupo, até o ponto de ser resolvida a forma como o aluno se apresenta para aprender.

Entender o estilo de aprendizagem dos alunos proporciona uma interação professor-aluno mais agradável. Sendo assim, o professor poderá identificar de que maneira o aluno melhor consegue aprender e como ele (professor) pode ensinar de modo mais eficiente. Ressalta-se que os desestímulos tendem a ser gerados durante as aulas quando não são compatíveis os estilos do professor e do aluno, conforme afirma Belhot (1997) sobre as consequências das divergências em sala de aula.

São inúmeros os benefícios da caracterização do estilo de aprendizagem de um aluno. Ainda assim, Bariani (1998) aponta um questionamento pertinente: “por que a aplicação desses conhecimentos tem sido tão lenta, limitada e de difícil efetivação?” (Bariani, 1998, p. 54)

Em resposta ao questionamento de Bariani (1998), Messick (1984) cogitou duas principais razões. A primeira refere-se aos problemas que surgem ao caracterizar os estilos dos alunos e perceber que estes não são compatíveis com aqueles do meio educacional em que se encontram. A mudança de métodos instrucionais e de estilos dos professores não costumam ser aceitas com facilidade pelos dirigentes das escolas, nem pelos próprios professores. A segunda causa, é a dificuldade da identificação dos estilos, pois ainda não foram desenvolvidas ferramentas adequadas para análise de grupos numerosos.

Na década de 1970, em meio à aplicação do estilo cognitivo no ambiente acadêmico, surgiu um novo termo: Estilos de Aprendizagem. A orientação está em aplicações práticas, partindo do princípio de que o aluno se utiliza dessa ferramenta como forma de estratégia para compreensão de determinado conteúdo. Para Lindemann (2008, p.35) “o foco dos estilos de aprendizagem é a maneira particularmente estável com que o aprendiz utiliza estratégias de aprendizagem na construção de conhecimento”.

A nova ferramenta ou estratégia visa à formação de um aluno hábil a se desenvolver em situações em que o estilo de aprendizagem é incompatível. Quanto mais estratégias o aluno desenvolver, mais facilidade terá no processo de aprendizagem. Havendo incompatibilidade entre estilos, o entendimento e a construção do conhecimento tornam-se mais difíceis, Felder (1993) destaca que a combinação inadequada entre estilo de aprendizagem do aluno e prática pedagógica do professor acarretará em alunos apáticos, desinteressados, sem estímulos para obtenção do conteúdo.

Em 1988, Richard Felder enquanto professor de Engenharia Química da North Carolina State University, preocupado com o grande nível de desistências e/ou retenções dos alunos do curso de engenharia, especialmente nas séries iniciais, deu início a pesquisas que lhe dessem subsídios para reverter essa situação. Assim, se uniu à psicóloga Linda Silverman para em artigo abordarem sobre o estilo de aprendizagem de determinada turma de Engenharia. Felder e Silverman (1988) desenvolveram um modelo para classificar os diferentes estilos de aprendizagem de uma determinada turma, dividindo em quatro escalas predominantes com dois extremos de qualidades opostas.

A partir de inúmeras pesquisas, Felder e Silverman (1988) desenvolveram um modelo de estilos de aprendizagem com dimensões principalmente voltadas para o Ensino de Ciências. Felder (1988) esclarece que há “uma preferência característica e dominante na forma como as pessoas recebem e processam informações, considerando os estilos como habilidades passíveis de serem desenvolvidas” (Felder apud Senra, 2008, p.17). Inicialmente, o modelo de Felder e Silverman (1988) foi desenvolvido para auxiliar o ensino no curso de Engenharia e como foi comprovada sua eficácia, passou a ser utilizado em várias áreas de Educação.

Deste modo, Felder e Silverman (1988) dividem o modelo, por eles elaborado, em quatro dimensões: sensorial/intuitiva; visual/verbal; ativa/reflexiva e sequencial/global. Cada dimensão trabalha com dois extremos, ressaltando que uma pessoa pode pertencer a ambos. Segundo os pesquisadores, “a preferência dos estudantes sobre uma escala dada pode ser forte, moderada ou mesmo não existente e pode variar com o tempo e de acordo com o sujeito ou ambiente de aprendizagem”. (Senra, 2008, p. 18). Apresenta-se a seguir o aprofundamento de cada uma das quatro dimensões dos estilos de aprendizagem.

A dimensão sensorial/intuitiva está diretamente ligada à obtenção de informação do ambiente. Para isso, utilizam-se os sentidos (tato, audição e visão) ou a intuição.

Estudantes sensoriais são muito atentos a detalhes e não gostam de conceitos abstratos; procuram por uma ligação direta entre o conteúdo e seu cotidiano; gostam de problemas bem definidos e que não saiam do comum, ou seja, gostam de resolver tudo com métodos ou técnicas padrões. Os intuitivos assimilam melhor as abstrações e não se atraem por detalhes, gostam de mudanças, procuram sempre resolver os problemas com soluções inovadoras.

A dimensão visual/verbal está relacionada à forma de captação da informação. Alunos visuais tendem à obtenção de dados por meio de imagens, diagramas, gráficos e esquemas. Enquanto alunos verbais obtêm-nos por intermédio de materiais escritos e falados, além de um entendimento maior para fórmulas matemáticas.

Essa é uma dimensão muito perigosa, pois o aluno que se caracteriza em um extremo sempre sofre quando tem uma aula em que está no estilo do extremo oposto. Quando um aluno visual tem uma aula somente falada, por exemplo, a memorização será muito mais difícil. De acordo com estudos citados por Felder (1988 e 1991), a "maioria dos homens de culturas ocidentais e presumivelmente a maioria dos estudantes cursando disciplinas científicas são estudantes visuais". (apud Senra, 2008, p. 20).

Para alunos ativos, a informação deve ser coletada por meio de alguma atividade ou testando o conteúdo. Eles tendem a obter melhor a informação quando trabalhando no modo ativo, ou seja, testando a informação e até mesmo explicando-a para os outros.

Os alunos reflexivos buscam primeiro refletir as informações, procuram entender antes de testar ou aplicar e buscam um resultado em teorias comprovadas, diferente do ativo, que obtém resultados na prática.

A dimensão sequencial / global apresenta a última etapa no processo de compreensão e processamento da informação, nesta dimensão o aluno terá o processo de organização da informação que foi apresentada e assim uma possível compressão.

Os alunos sequenciais tendem a absorver as informações da maneira que são apresentadas, geralmente lineares. Cada informação é ligada com a última anterior. Na resolução de problemas, visam a uma interpretação linear, compreendendo cada etapa por vez para chegar ao resultado final.

Os alunos globais precisam ter um conhecimento mais completo do conteúdo para que haja a compreensão. Esses aprendizes são bem de extremos, isto é, ou entendem tudo ou não entendem nada. Absorvem as informações em sequência totalmente ao acaso e, aparentemente, não demonstram nenhuma lógica na aquisição de conhecimento.

Vale ressaltar que para Felder (1988) é importante que o aluno desenvolva habilidades em ambos os extremos no processo de aprendizagem, isto é, alunos que se encontram em um dos extremos provavelmente apresentam alguma dificuldade em seu processo de aprendizagem.

Como resultados temos que na dimensão Ativo/Reflexivo notou-se que a maioria dos alunos apresentam uma tendência equilibrada quando se trata do processamento da informação (Ativo/Reflexivo), sendo assim, apresentam um perfil capaz de balancear aulas teóricas e experimentais com tudo não são adeptos a aulas tradicionais, os ativos tendem a desenvolver melhor suas habilidades quando estão a experimentar, trabalhos em grupos, discussões e ou experimentações são extremamente vantajosas para este perfil. O reflexivo desenvolve suas competências por observações, tendem a trabalhar melhor individualizados.

No processo de percepção da informação (Sensorial/Intuitivo), há uma preferência ao extremo sensorial, sendo assim, há alunos que dependem dos sentidos para ajudá-los em suas conclusões, apresentam um processo metódico e se sentem seguros em resoluções de problemas com etapas pré-definidas, por outro lado, há um percentual de alunos intuitivos, eles trabalham com deduções que partem do seu imaginário, soluções inovadoras, contudo sistemas de resoluções tradicionais são pouco atrativos.

Na etapa de retenção da informação (Visual/Verbal) levantou-se que há uma preferência moderada ao extremo visual, então, trata-se de alunos que necessitam de demonstração visual e esquemas que facilitam a linha de compreensão, esses alunos têm habilidades significativas em trabalhos com gráficos, imagens, esquemas e entre outros recursos visuais. Já os alunos verbais, tendem a captar informações naturalmente quando são expostas oralmente, mas é possível a demonstração visual, mas grande parte de sua memorização será auditiva.

Podemos observar na tabela 1, a descrição da comparação obtida entre o ensino fundamental II (EF II) e o ensino médio (EM), identificando os percentuais em cada nível e em cada estilo de aprendizagem.

Tabela 1
Comparação entre os estilos de aprendizagem.

	COMPARAÇÃO ENTRE SEXO				
	VISUAL	VISUAL MODERADO	EQUILIBRADO	VERBAL EQUILIBRADO	VERBAL
FEMININO	9%	21%	63%	5%	2%
MASCULINO	3%	32%	55%	7%	3%
	COMPARAÇÃO ENTRE EFII e EM				
	VISUAL	VISUAL MODERADO	EQUILIBRADO	VERBAL EQUILIBRADO	VERBAL
EFII	5%	25%	63%	6%	1%
EM	8%	26%	56%	10%	0%
	COMPARAÇÃO ENTRE EFII e EM (MASCULINO)				
	VISUAL	VISUAL MODERADO	EQUILIBRADO	VERBAL EQUILIBRADO	VERBAL
EFII	5%	40%	50%	5%	0%
EM	0%	22%	61%	17%	0%
	COMPARAÇÃO ENTRE EFII e EM (FEMININO)				
	VISUAL	VISUAL MODERADO	EQUILIBRADO	VERBAL EQUILIBRADO	VERBAL
EFII	4%	18%	69%	7%	2%
EM	7%	22%	52%	19%	0%

Fonte: Própio autor. 2020

Analisando a tabela de uma forma geral é possível identificar a preferência dos alunos, em que grande parte deles apresenta o equilíbrio desejado na dimensão, porém boa parte dos alunos tendem ao extremo visual e a diferença é significativamente maior que a dos alunos que tendem ao extremo verbal. Por fim, a organização da informação (sequencial/global) apresentou um equilíbrio entre os extremos, sendo assim, os alunos sequenciais moderados necessitam de uma progressão ao aprender de modo que o assunto deve ser trabalho linearmente, partindo sempre das partes para o todo. Os alunos globais moderados aprendem de forma não linear, seguindo características próprias a cada aluno global, preferem o conteúdo apresentado do todo para as partes.

Considera-se que os estilos de aprendizagem são ferramentas aliadas em salas de aulas. Visto que tais mecanismos são simples, de fácil manuseio e que permitem alcançar resultados satisfatórios, para tanto, devem ser examinados e gerar reflexões. É imprescindível a reflexão do professor sobre sua didática para que ocorra um constante aprimoramento de técnicas e práticas que interfiram positivamente nos resultados dos alunos. É também de grande relevância o olhar do professor para o aluno e não apenas para os livros a serem explorados nas aulas.

Cremos que a proposta pedagógica escolhida pelo professor assinala alguns subsídios para a superação das dificuldades dos alunos, de acordo com o seu modo de aprendizagem, promove a motivação e interesse pela disciplina de Matemática. As ponderações alcançadas a partir desta temática, acomodaram momentos de aprendizagem ao professor, que buscou amoldar-se dentro da sua didática, os estilos de aprendizagem, atribuindo assim, outros significados às suas ações diárias, melhorando o índice de interesse pela disciplina, e consequentemente o desempenho desse grupo de alunos.

Podemos concluir que com a análise dos resultados obtidos a partir da aplicação dos questionários, dificilmente um professor terá uma turma homogênea em que todos os alunos apresentam as mesmas preferências de estudo. Nota-se que os alunos os quais não têm o estilo de aprendizagem compatível com o extremo da turma, tendem a ter mais dificuldades. Destaca-se que os estilos de aprendizagem estão em constante processo de adaptação, portanto, os alunos adaptar-se-ão ao estilo mais conveniente. No entanto, em alguns casos, essa adaptação ocorre em um espaço de tempo maior, ou seja, determinado aluno com dificuldades pode estar no processo de transição de estilos.

Referências e bibliografia

Bariani, I. C. D. (1998). Estilos cognitivos de universitários e iniciação científica. Tese (Doutorado em Educação) – *Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas*. Acesso em: 20 mai. 2020

Belhot, R. V. (2005). Benefícios do conhecimento dos estilos de aprendizagem no ensino de engenharia de produção. *Campina Grande: XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia da Universidade Federal de Campina Grande.* Disponível em:< http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/14/artigos/SP-5-93236573872-1118676851607.pdf>. Acesso em: 25 out. 2022.

Bloom, B. et al. (1983). Taxonomia dos objetivos educacionais: domínio cognitivo. Porto Alegre*: Globo*.

Felder, R. M.; Soloman, B. A. (1991). Index of learning styles (ILS). *Raleigh: North Carolina State University*. Disponível em: < https://www.engr.ncsu.edu/stem-resources/legacy-site/learning-styles/>. Acesso em: 25 out. 2022

Kolb, A. Y.; Kolb, D. A. (2008). The learning way: meta-cognitive aspects of experiential learning. Working Papers Series, Cleveland: *Weatherhead School of Management in Case Western Reserve University*, n. 2. Disponível em: <https://weatherhead.case.edu/departments/organizational-behavior/workingPapers/WP-08-02.pdf>. Acesso em: 25 out. 2022.

Lindemann, V. (2008). Estilos de aprendizagem: buscando a sinergia. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – *Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, Porto Alegre. Disponível em: <http://www.teduc1001.net/corpus/000679460.pdf>. Acesso em: 25 out. 2022. https://doi.org/10.22456/1982-1654.11598

Messick, S. (1984). The nature of cognitive styles: problems and promise in educational practice. Educational Psychologist, Columbia: *American psychological association division*, v. 19, n. 2, p. 59 - 74, https://doi.org/10.1080/00461528409529283

Senra, C. M. S. (2008). Os estilos de aprendizagem de Felder a partir de Jung. Tese (Mestrado em Educação Tecnológica) –*Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais*, Belo Horizonte. Disponível em: < https://www.livrosgratis.com.br/ler-livro-online-131876/os-estilos-de-aprendizagem-de-felder-a-partir-de-jung>. Acesso em: 25 out. 2022.

Um mapeamento sobre a transição entre os Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado em teses e dissertações brasileiras de Educação Matemática

Carlos Roberto **Torrente**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
carlos.torrente@aluno.ufop.edu.br
Frederico da Silva **Reis**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
frederico.reis@ufop.edu.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo identificar as abordagens teórico-bibliográficas sobre a transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado em teses e dissertações desenvolvidas na área de Educação Matemática no Brasil. Para tanto, realizamos uma pesquisa do tipo mapeamento no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. A análise dos trabalhos selecionados aponta que teorias que visam conhecer os processos de formação do pensamento matemático contribuem de forma significativa para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Os resultados revelam, especificamente, a predominância de David Tall e Tommy Dreyfus como referenciais teórico-bibliográficos e, especificamente, uma escassez de pesquisas referentes à transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado e, praticamente, a inexistência de pesquisas focadas na investigação de tal transição na perspectiva da formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática; Pensamento Matemático Elementar; Pensamento Matemático Avançado; Teses; Dissertações; Brasil.

Introdução

A investigação sobre o Pensamento Matemático Avançado (tradução do termo / movimento conhecido por *Advanced Mathematical Thinking*) vem crescendo na Educação Matemática mundialmente, com destaque para as pesquisas que apontam suas contribuições teóricas e práticas para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, nos mais variados níveis de ensino.

Inicialmente, ressaltamos que Tall (2002) aponta a existência de uma transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA), na medida em que o PME é característico de uma Matemática focada na compreensão de conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, enquanto o PMA caracteriza-se por se desenvolver no início do Ensino Superior e por possuir características de abstração, dedução e demonstração em Matemática. Ainda segundo o pesquisador, a "mudança" do PME para o PMA envolve uma transição significativa: de descrever para definir, de convencer para provar em uma forma lógica baseada nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva que é vista, durante os esforços iniciais dos estudantes universitários com abstrações formais, na medida em que eles enfrentam o primeiro ano da universidade. É a transição da coerência da Matemática elementar (trabalhada na Educação Básica para a consequência da Matemática avançada (trabalhada no Ensino Superior), baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções, a partir de definições formais (Tall, 2002, p. 20).

Já para Henriques (2010, p. 16), tal transição está associada aos processos e mudanças cognitivas, pois: "A complexidade dos processos usados no pensamento matemático e as mudanças cognitivas que se verificam no indivíduo é que determinam o tipo de pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito e caracterizam a transição do PME para o PMA". A pesquisadora também considera que a mudança dos hábitos experimentais e intuitivos do raciocínio matemático da escola para o formalismo do PMA é abrupta e que as dificuldades no raciocínio matemático avançado se devem às mudanças do pensamento concreto para o abstrato e às noções dedutiva e indutiva de prova matemática.

Entretanto, cabe destacar que, embora a Matemática avançada seja focada na abstração, definição e dedução, não há uma distinção totalmente clara entre o PMA e o PME, no sentido de que é possível abordar tópicos da Matemática avançada de uma forma elementar. A relevância, então, está em como esses tópicos são abordados. É necessário que haja uma interação entre os processos envolvidos nas diferentes formas de representação de um mesmo conceito, na generalização e na abstração (Santos & Bianchini, 2011, p. 3).

Nessa mesma direção, Dreyfus (2002) também defende que a forma como é conduzida a transição de um pensamento para o outro é o que os difere. Para o pesquisador, não podemos relacionar, de forma simplista, o PMA ao nível de Ensino Superior, pois o PMA independe da idade do aluno e esse pensamento pode ocorrer sem que isso interfira. Corroborando com essa ideia, Elias, Barbosa e Savioli (2012, p. 8) afirmam que "a linha separadora entre o PME e o PMA não está na impossibilidade de um estudante da Educação Básica conseguir desenvolver um PMA por não ser um adulto, e sim, na maneira como a Matemática é apresentada neste nível de ensino".

No presente trabalho, apresentamos uma visão panorâmica de diferentes abordagens teórico-bibliográficas sobre a transição do PME para o PMA, à luz de teses e dissertações desenvolvidas na Educação Matemática no Brasil, a partir de uma pesquisa do tipo mapeamento, como descreveremos a seguir.

Sobre o mapeamento como nossa metodologia de pesquisa

Segundo Fiorentini *et al.* (2016, p. 18) o termo mapeamento da pesquisa diferencia-se do estado da arte da pesquisa, por fazer referência à identificação, à localização e à descrição das pesquisas que são realizadas num determinado tempo, espaço e campo de conhecimento. Assim, o mapeamento da pesquisa caracteriza-se como um processo sistemático de levantamento de informações, descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período, seus autores e participantes, seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos.

O levantamento que caracterizou nosso mapeamento foi feito por meio de uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Inicialmente, indicamos para busca os seguintes termos: “Pensamento Matemático”, sendo encontrados 217 trabalhos (56 teses, 161 dissertações). A seguir, indicamos para busca os termos “Pensamento Matemático Elementar”, sendo encontrados 6 trabalhos (2 teses e 4 dissertações) que foram publicados no período de 2010 a 2020 e que foram selecionados para análise, como justificamos e apresentamos a seguir.

As pesquisas mapeadas que abordam a transição do PME para o PMA

Sequencialmente, apresentamos os 6 trabalhos (2 teses e 4 dissertações) selecionados por retratarem pesquisas que abordam, teórica ou metodologicamente, aspectos da transição do PME para o PMA. No quadro a seguir, apresentamos os trabalhos selecionados, cronologicamente, destacando: autor, ano da defesa, título, tese (T) ou dissertação (D) e instituição.

Quadro 1
Pesquisas mapeadas por abordar a transição do PME para o PMA

Autor	Ano	Título	T/D	Instituição
Bárbara Nivalda Palharim Alvim Sousa	2010	Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Daila Silva Seabra de Moura Fonseca	2012	Convergências de sequências e séries numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Laís Cristina Viel Gereti	2014	Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Alessandra Senes Marins	2014	Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Debora Cristiane Barbosa Kirnev	2019	Um estudo da mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado	T	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Viviane Raquel Backendorf	2020	O processo da abstração reflexionante na construção do conceito de Integral Dupla com a utilização de Matemática Dinâmica	T	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Fonte: dados do mapeamento. 2022.

Passaremos, agora, a descrever brevemente cada trabalho selecionado, destacando o foco de pesquisa e alguns aspectos abordados relacionados, especificamente, à transição do PME para o PMA.

A dissertação de Souza (2010) descreveu uma investigação que buscou apontar elementos sobre o modo como ocorre o pensamento matemático de alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, que Tall (2002) associa ao PME e ao PMA. A pesquisadora concluiu que atividades de Modelagem Matemática favorecem a utilização de diversos modos de operação relacionados aos Três Mundos da Matemática (teoria também embasada pelo mesmo pesquisador) e que alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, por meio desses modos de operação, desenvolvem processos cognitivos que propiciam interações entre o PME e o PMA.

A dissertação de Fonseca (2012) buscou verificar se a aplicação de atividades, com o auxílio do *software* GeoGebra, favoreceu a corporificação dos conceitos de convergência de sequências e séries e a transição entre os mundos corporificado e simbólico, levando a uma compreensão desses conceitos, investigando se a transição entre os mundos corporificado e simbólico contribuiu para a construção da base do mundo formal, levando à transição do PME para o PMA. Para a pesquisadora, a distinção entre o PME e o PMA está na complexidade do conceito matemático e na forma como ele é tratado. Ao analisar a corporificação dos conceitos de convergência e a relação com a proceitualização e a axiomatização, foca-se no processo de construção de uma base para o mundo formal por meio das transições entre os Três Mundos da Matemática e, assim, a transição do PME para o PMA revela o processo de construção do PMA. A pesquisadora concluiu que, mais do que compreender cada um dos processos separadamente, deve-se buscar, também, entender se as transições entre os Três Mundos da Matemática favorecem a transição entre os pensamentos matemáticos.

A dissertação de Gereti (2014) objetivou descrever e discutir indícios / características dos processos do PMA evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática de uma universidade e, ao resolverem questões discursivas do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). Para tanto, a pesquisadora fez um estudo sobre a transição do PME para o PMA, entendendo que os processos de abstração e representação são os mais globais, sendo constituídos de outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, dentre outros. Em relação ao PMA, a pesquisadora destacou que, diferentemente de outros autores da área, Resnick (1987) o concebe como um pensamento de ordem superior e afirma que não existe uma definição precisa desse pensamento, mas existem características chave que podem acontecer. Dos estudantes participantes, a maioria mobilizou algum tipo de pensamento, entretanto muitos não desenvolveram alguns processos do PMA. Ainda segundo a pesquisadora, a resolução de cada estudante nos permite dizer que tais processos são evidenciados de maneiras diferentes, pois para cada um as notações / símbolos matemáticos possuem significados individuais, bem como as relações que se podem constituir entre os diversos conceitos / objetos matemáticos.

A dissertação de Marins (2014) teve por objetivo identificar e discutir os indícios de processos do PMA que estudantes do curso de Matemática manifestam, ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. Para isso, realizou-se um estudo a respeito do PMA, segundo Dreyfus (2002), Tall (2002) e Resnick (1987), a fim de obter características comuns aos autores, que serviram de base para a análise dos registros escritos dos estudantes. A pesquisadora fez várias análises que envolvem a transição do PME para o PMA, definindo os processos que envolvem essa transição, classificados em processos de representação e processos de abstração. Dos 7 processos presentes do PMA, sendo 5 de representação e 2 de abstração, alguns estudantes manifestaram indícios de apenas um processo, o de representação simbólica, e somente poucos manifestaram características de todos os processos. As categorias confirmam que estudantes do curso de graduação podem manifestar características dos processos do PMA durante a graduação, porém, a maioria dos estudantes não evidenciaram indícios desses processos. Para os autores referenciados, esses processos não ocorrem por si mesmos e, se acontecem, não são conscientes por parte dos estudantes. Desse modo, a pesquisadora concluiu que é preciso que o professor propicie o desenvolvimento de atividades didáticas, em sala de aula, que possibilitem a sua manifestação.

A tese de Kirnev (2019) teve o objetivo de investigar a mobilização de processos mentais entre o PME e o PMA. Para isso, realizou-se uma análise descritiva e comparativa em tarefas de uma prova em fases, aplicada a graduandos em Matemática, a fim de diagnosticar que processos mentais são mobilizados na realização das tarefas e que indícios de PME e PMA podem ser identificados. A pesquisadora investigou sobre o desenvolvimento do PME e do PMA, com base nas teorias de Dreyfus (2002) e Tall (2002), a respeito dos processos mentais inerentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, de modo a compreender como um sujeito constitui um PMA. Destacou-se que, no processo de escolarização da Educação Básica, entende-se que um estudante seja capaz de desenvolver o PME de uma forma mais ampla, e que podem ocorrer indícios de desenvolvimento de PMA, dependendo das experiências anteriores do sujeito. Já para um pensamento formal matemático, exigido no Ensino Superior, é preciso gerenciar situações mais complexas que, em geral, possibilitam o desenvolvimento do PMA. Diferencia-se, então, o PMA do PME por meio das reflexões que um sujeito promove a respeito de suas experiências em Matemática ao resolver problemas que exigem gerenciar situações complexas no desenvolvimento de processos mentais e ao lidar com diversos processos mentais interagindo com eles. A pesquisadora identificou, ainda, a mobilização de processos mentais associados ao PME, derivados de pensamentos instrumentais, e outros decorrentes de pensamentos relacionais que indicam evidências do PMA. Assim, de modo geral, a pesquisa apontou a importância que professores de disciplinas relacionadas com as estruturas algébricas entendam quais são as principais dificuldades dos alunos durante as resoluções de tarefas, em sala de aula, bem como a identificação de erros inerentes a essas resoluções, por meio de parâmetros de processos mentais dos estudantes que são utilizados para a resolução de tais tarefas.

A tese de Backendorf (2020) teve como objetivo investigar, baseando-se na teoria da abstração reflexionante, como ocorre a compreensão do conceito de integral dupla com auxílio de um *applet* do *software* GeoGebra. Para embasar as discussões, além da abstração reflexionante de Piaget, utilizou-se a teoria desenvolvida por Tall (2002) sobre a Matemática elementar e a Matemática avançada, como suporte para entender as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Superior. Destacou-se que as tecnologias digitais têm importante papel na construção e compreensão de um conceito matemático, em especial, o conceito de integral dupla. A pesquisadora concluiu que as contribuições da pesquisa não se restringem apenas ao desenvolvimento do conteúdo de integral dupla, mas sua relevância pode ser percebida tanto na Matemática avançada como na Matemática elementar, por meio da identificação dos processos dos pensamentos matemáticos manifestados, sejam do tipo PMA ou PME.

Considerações finais

Pesquisadores vêm discutindo, há alguns anos, a transição do PME para o PMA, destacadamente, Tall (2002), Dreyfus (2002) e Resnick (1987). Dentre esses autores, nosso mapeamento mostrou a predominância teórico-bibliográfica de David Tall e Tommy Dreyfus como referenciais teórico-bibliográficos das pesquisas mapeadas.

Nas 6 pesquisas aqui mapeadas que abordam a transição do PME para o PMA, observamos que 4 delas investigaram tal transição relacionando-a aos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Superior, destacadamente, conceitos nucleares do Cálculo Diferencial e Integral, da Álgebra Linear e das Estruturas Algébricas. Uma pesquisa investigou a transição do PME para o PMA a partir da realização de atividades de Modelagem Matemática. Outra pesquisa, ainda, investigou a transição do PME para o PMA a partir da resolução de questões do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes de graduação brasileiros.

Destaca-se, por fim, a quase total inexistência de pesquisas especificamente focadas na investigação da transição do PME para o PMA na perspectiva da formação de professores de Matemática, seja inicial, seja continuada. Donde concluímos que existe uma grande urgência na realização de pesquisas que discutam tal transição à luz de suas contribuições para a formação de professores de Matemática, bem como mais pesquisas sobre tal transição, em diferentes níveis de ensino, com foco nos processos de ensino e de aprendizagem dos mais diversos conteúdos matemáticos relacionados a Álgebra, Geometria e Análise.

Referências e bibliografia

Backendorf, V. R. (2020). *O processo da abstração reflexionante na construção do conceito de Integral Dupla com a utilização de Matemática Dinâmica* [Tese de Doutorado em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. https://www.ufrgs.br/ppgie/o-processo-de-abstracao-reflexionante-na-construcao-de-conceito-de-integral-dupla-com-a-utilizacao-de-matematica-dinamica-2/

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Org.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25–41). Kluwer Academic Publishers.

Elias, H. R., Barbosa, L. N. S. C. y Savioli, A. M. P. D. (2012). Indícios de dificuldade na compreensão da Matemática avançada: o conceito de grupo. *Actas del V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1–17). Petrópolis, RJ: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Fiorentini, D., Grando, R. C., Miskulin, R. G. S., Crecci, V. M., Lima, R. C. R. y Costa, M. C. (2016). O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. En D. Fiorentini, C. L. B. Passos y R. C. R. Lima (Orgs.), *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012* (pp. 17 – 41). Universidade Estadual de Campinas.

Fonseca, D. S. S. M. (2012). *Convergências de sequências e séries numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto]. https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2971

Gereti, L. C. V. (2014). *Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/processos-do-pensamento-matematico-avancado-evidenciados-em-resolucoes-de-questoes-do-enade/

Henriques, A. C. C. B. (2010). *O Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação* [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de Lisboa]. http://hdl.handle.net/10451/2465

Kirnev, D. C. B. (2019). *Um estudo da mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado* [Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/um-estudo-da-mobilizacao-de-processos-mentais-entre-o-pensamento-matematico-elementar-e-o-pensamento-matematico-avancado/

Marins, A. S. (2014). *Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/pensamento-matematico-avancado-em-tarefas-envolvendo-transformacoes-lineares/

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy Press.

Santos, A. T. C.; Bianchini, B. L. (2011). O Pensamento Matemático Avançado e o ensino de logaritmos. *Actas de la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1–12). Recife, PE: Universidade Federal de Pernambuco.

Souza, B. N. P. A. (2010). *Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/modelagem-matematica-e-pensamento-matematico-um-estudo-a-luz-dos-tres-mundos-da-matematica/

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Org.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3–21). Kluwer Academic Publishers.

Um jogo pedagógico como ferramenta de ensino para os anos iniciais do ensino fundamental: eventos aleatórios possíveis

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do ABC
Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br
Fátima Aparecida **Kian**
Universidade Federal do ABC
Brasil
fatima.kian@ufabc.edu.br
Anneliese de Oliveira **Lozada**
Universidade Federal do ABC
Brasil
anne.lozada@ufabc.edu.br

Resumo

O objetivo da pesquisa foi apresentar uma possibilidade de trabalho para os anos iniciais envolvendo a classificação de eventos aleatórios por meio do jogo pedagógico “Brincando com a Probabilidade”. Para tanto, algumas situações problemas foram elaboradas para compor as cartas do jogo a partir dos objetos de ensino e habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC e da Metodologia da Resolução de problemas. Pensando não só em auxiliar o aluno com essa proposta de aprendizagem lúdica e ativa, mas também em auxiliar o professor a desenvolver os conteúdos das cartas do jogo em sala de aula, esse trabalho traz, por meio da Teoria Antropológica do Didático – (TAD), uma praxeologia didática e matemática que expõem e explora, de forma detalhada, a prática e a teoria matemática (Probabilidade) envolvidas nas cartas do jogo focadas em eventos aleatórios possíveis.

Palavras-chave: Educação Estatística; Ensino fundamental; Jogo pedagógico; Resolução de problemas; Teoria Antropológica do Didático; Brasil.

Introdução

Segundo Bryant e Nunes (2012) a probabilidade é um conceito complexo que envolve diversos elementos referidos como “demandas cognitivas”, sendo eles, a compreensão da aleatoriedade, formação e categorização do espaço amostral, comparação e quantificação de probabilidades e entendimento de correlações. Justamente por serem conceitos complexos e de alto grau de abstração, precisam ser introduzidos logo nos primeiros anos de escolaridade, para que a criança possa ir se familiarizando com os termos, passando a verbalizá-los com “consciência” no seu cotidiano, e assim, aos poucos ir apreendendo.

Godino, Batanero e Cañizales (1996), destacam que a probabilidade pode ser aplicada à realidade tão diretamente quanto a aritmética elementar não sendo preciso técnicas matemáticas complicadas. Dizem que a probabilidade é uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes como matematizar e como aplicar a matemática para resolver problemas reais. É preciso que o ensino das noções probabilísticas aconteça mediante metodologias ativas, através de propostas de problemas concretos e realização de experimentos reais ou simulados.

Assim, o nosso problema de pesquisa foi mostrar uma possibilidade de desenvolver um trabalho pedagógico para os anos iniciais do Ensino Fundamental, baseado em jogos e resolução de problemas, criando subsídio teórico metodológico a um repensar sobre os métodos estratégicos, redimensionando-os a fim de minimizar o hiato existente entre as atividades lúdicas cotidianas realizadas pelos alunos, espontaneamente, e o trabalho desencadeado em sala de aula.

Tendo em vista o tema e o problema de pesquisa, o objetivo deste trabalho foi elaborar situações problemas (tarefas segundo a Teoria Antropológica do Didático – TAD) envolvendo a classificação de eventos aleatórios possíveis para o jogo “Brincando com a Probabilidade” como proposta de uma possibilidade de trabalho envolvendo o ensino de probabilidade nos anos iniciais, seguindo os princípios da TAD de Chevallard (1996) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001), na organização praxeológica didática e matemática (probabilidade).

Marco teórico

Para Smole e Diniz (2007) o jogo contribui para o ensino de maneira lúdica, estimulando o agir e o pensar com lógica e com critério, favorecendo o desenvolvimento cognitivo, emocional, moral e social. Ainda, atua como elemento motivador, levando o aluno a produzir seu próprio conhecimento, tomar suas próprias decisões e resolver problemas.

Com relação à resolução de problemas em contexto de jogos, na concepção de Macedo, Petty e Passos (2005), em qualquer jogo, tem-se uma situação-problema, ou seja, um objetivo que se pretende alcançar ou algo a ser solucionado pelo sujeito ou por um grupo de sujeitos. Assim, o resultado do jogo (este, rigorosamente deverá obedecer aos procedimentos pré-estabelecidos) nada mais é do que um sistema de regras que tem por finalidade delimitar a ação dos envolvidos. Ciente de que a resolução de problemas no contexto de jogos pode contribuir para o desenvolvimento da Matemática, Polya (1978) ressalta que resolver problemas, em situações de jogos ou não, modifica as percepções matemáticas dos sujeitos e estes poderão gerar o desenvolvimento de um trabalho mental e deixar a sua marca na mente e no caráter. Nesta concepção, defendemos que o jogo também pode e deve ser utilizado para o ensino de probabilidade, entretanto, é bastante escassa a disponibilidade de jogos nos materiais pedagógicos para o trabalho com o ensino e a aprendizagem destes conceitos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Ministério da Educação, 2018), o estudo das probabilidades nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve focar o desenvolvimento da noção de aleatoriedade, propiciando situações em que a criança comece a perceber que nem todos os eventos são determinísticos e a partir daí, aos poucos ir ampliando a ideia de evento aleatório, como os possíveis. Já com relação as pesquisas desenvolvidas por Gal (2005), o estudo de probabilidade deve desenvolver a compreensão de três noções básicas: percepção do acaso, ideia de experiência aleatória e noção de probabilidade.

Tomando MOOC (2020) é expresso que eventos aleatórios são considerados subconjuntos de um espaço amostral, sendo que um evento é considerado um resultado possível de um experimento. Ainda podemos considerar que a probabilidade do evento impossível é zero e a probabilidade do evento certo (que representa todo o espaço amostral) é um, então para qualquer outro evento A é verdade que: $0 \leq P\,(A) \leq 1$. Dessa forma, considerando o esquema (Figura 1) todas as possibilidades entre 0 e 1 (exclusive), podem ser considerados eventos possíveis ou prováveis e que é indicado por P(A).

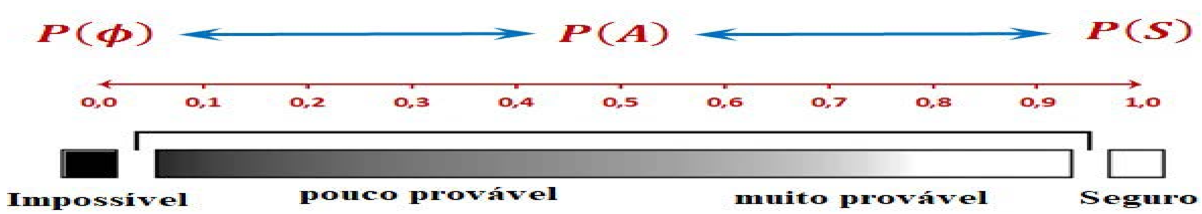


Figura 1. Esquema indicando os eventos aleatórios.
Fonte: Traduzido de MOOC (2020, p. 81).

Entendemos que a sistematização pedagógica com a resolução de problemas em contexto de jogos direcionada ao ensino de probabilidade, se bem estruturada e encaminhada, possibilita a aproximação e apreensão dos termos probabilísticos e do significado desses termos, facilitando o desenvolvimento das primeiras noções.

Metodologia

Chamamos de tarefas as diversas situações problemas que irão compor as cartas “perguntas” do jogo, situações estas baseadas na metodologia da resolução de problemas. De acordo com Van de Walle (2009) o jogo pode não se parecer com um problema, mas pode estar fundamentado em um problema. Se o jogo faz os alunos refletirem sobre as ideias que eles ainda não formularam muito bem, então ele se ajusta à definição de uma tarefa baseada em resolução de problemas.

Para alcançarmos esses objetivos esta pesquisa foi orientada principalmente pela BNCC, que traz os conteúdos e as habilidades probabilísticas a serem trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e pela Teoria Antropológica do Didático - TAD, que permite uma análise praxeológica matemática e didática sobre as tarefas.

Essa noção praxeológica, em sua forma mais simples, pode ser descrita em dois níveis. Nas palavras de Chevallard, Bosch e Gascón (2001)**,** na atividade matemática ou em qualquer outra atividade, existem dois blocos que se complementam, de um lado as tarefas e as técnicas, e do outro, as tecnologias e teorias. No bloco considerado prático-técnico (*práxis*) serão apresentadas as técnicas associadas à resolução da tarefa. De acordo com Chevallard (1996), uma praxeologia relativa à tarefa T precisa (em princípio) de uma maneira de realizar, ou seja, uma forma de executar determinada tarefa. No bloco do saber (*logos),* o primeiro componente é um discurso racional, denominado tecnologia (θ) e a teoria (Θ) que representa um nível superior de justificação, explicação e produção que desempenha com relação à tecnologia (θ) o mesmo papel que esta tem com relação à técnica (τ).

Pensando nesta praxeologia, as situações problemas elaboradas que compõem as cartas do jogo são compostas por *tarefas,* constituídas de uma sequência de *subtarefa*s que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas,* justificadas pela *tecnologia,* que se utiliza de *teorias* relacionadas à probabilidade como objeto de estudo. Como base teórica, a TAD foi utilizada para detalhar a elaboração das situações problemas, das quais chamaremos de tarefas identificadas por (T), constituída de uma sequência de subtarefas (t), que podem ser realizadas utilizando diversas técnicas (τ) justificadas pela tecnologia (θ) que se utiliza da teoria (Θ) da Probabilidade como objeto de estudo.

Assim, a elaboração das tarefas obedeceu fundamentalmente aos seguintes passos: (1) apresentar pelo menos uma técnica para resolver tarefas solicitadas; (2) para as técnicas descritas estabelecer, pelo menos, um esboço de um discurso tecnológico; (3) articular diversos tipos de tarefas em torno dos conceitos probabilísticos; (4) articular diversos tipos de tarefas utilizando a metodologia da resolução de problemas.

A TAD foi utilizada na elaboração das tarefas que compõem as cartas do jogo devido sua organização praxeológica matemática (probabilística) que nos permite detalhar as tarefas de forma organizada, enfatizando tanto os aspectos práticos como teóricos, de forma complementar.

Resultados

Explicitamos que as cartas do jogo “Brincando com a Probabilidade” aqui apresentadas foram criadas considerando o objetivo (Noção de acaso) e habilidades (Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano) da proposta curricular da BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental, Ministério da Educação (2018), de forma a possibilitar aos alunos a compreensão de conceitos básicos de probabilidade. Portanto, envolvendo a probabilidade num ambiente lúdico de um jogo de tabuleiro, pretendemos propiciar uma sensação de se estar em oposição a uma situação formal de aprendizado. O jogo é composto por um tabuleiro, tipo percurso, piões, um dado e o tipo de cartas que denominamos de “Perguntas” (situações problemas). Assim, consideramos os eventos que se encontram entre o evento impossível ($E = \emptyset$) e o evento certo ou seguro ($E = S$) que chamaremos de eventos possíveis conforme proposto na Figura 2.

1. As seguintes bolas estão em um saco plástico que a professora Nilceia levou para a escola. É ______ocorrer que ao retirar uma bola esta seja azul.	2. A professora Nilceia chamou um aluno para ajudar na realização de um experimento com moedas que ela trouxe de casa. Observando os alunos que estão nas duas mesas mostradas na figura, éacontecer que o aluno seja um menino.
	
( ) Certo ou seguro	( ) Possível ( ) Impossível

Figura 2. Tarefas associada a eventos possíveis para determinar se os eventos aleatórios são certos, possíveis ou impossíveis de "ocorrer" ou "acontecer".
Fonte: Elaborado pelos autores.

Para analisar as subtarefas 1 e 2 propostas na figura 1 apresenta-se na tabela 1 a descrição da técnica segundo os princípios da TAD.

Tabela 1
Descrição das técnicas referentes à Tarefa 1 e as subtarefas, figura 1, associado a eventos indicados como aleatórios possíveis, considerando a expressão verbal "possível acontecer".

Tarefa 1	**Subtarefas**		**Técnica**	
Configura-se em determinar situações-problema como eventos aleatórios possíveis considerando as expressões verbais "certo ou seguro", "possível". e "impossível).	t_1	Consiste em determinar se o experimento aleatório "**retirar uma bola azul**" se configura como um evento impossível, certo/seguro ou possível.	τ_1	A partir de expressões verbais que se associam a acontecimentos certos, impossíveis ou possíveis (talvez), resolver problemas que trazem situações cotidianas ou experimentos aleatórios, identificando cada uma dessas situações a eventos possíveis.
	t_2	Consiste em determinar se o experimento aleatório "**que o aluno chamado para ajudar na realização de um experimento com moedas seja um menino**" se configura como um evento impossível, certo/seguro ou possível.		

Fonte: Elaborado pelos autores.

Retomando as subtarefas da tabela 1 e detalhando a técnica τ_1, temos na tabela 2 essa descrição pormenorizada.

Tabela 2
Descrição pormenorizada da técnica 1 (τ_1).

Técnica	**Subtarefas**
	No caso da subtarefa t_1, a resposta é a opção "Possível acontecer ou Possível ocorrer". A situação proposta, requer que o aluno reflita sobre o problema em questão, e com base na observação do espaço amostral, analise se as condições favoráveis de ocorrência do evento, no caso as 9 bolas e 1 dado dentro do saco plástico em amostra, satisfazem a condição pedida "que ao retirar uma bola esta seja azul". Neste caso, como os casos favoráveis de ocorrência do evento (2 bolas brancas, 4 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 dado) incluem o caso particular em questão (sair uma bola azul), pode-se afirmar que este é um evento possível, visto que, dentre as bolas que estão no saco plástico existem bolas azuis.

τ_1	No caso da subtarefa t_2, a resposta é a opção "Possível acontecer ou Possível ocorrer". A situação proposta, requer que o aluno reflita sobre o problema em questão, e com base na observação do espaço amostral, analise se as condições favoráveis de ocorrência do evento, no caso os alunos em amostra, satisfazem a condição pedida, "que a professora chame um menino". Neste caso, como os casos favoráveis de ocorrência do evento (meninos e meninas) incluem o caso particular em questão (que seja um menino), pode-se afirmar que este é um evento possível de ocorrer, visto que existem meninos e meninas.

Fonte: Elaborado pela autora.

O discurso teórico-tecnológico (θ_8, Θ_8), que permite justificar e explicar a técnica τ_1 da tarefa 1 pode ser explicitado inicialmente por meio de ideias intuitivas, em que em alguns experimentos (eventos impossíveis e certos) podemos fazer previsões precisas, já em outros, (eventos possíveis), de acordo com Pinheiro, Silva e Pietropaolo (2018) podemos fazer algumas previsões globais mesmo não sendo possível afirmar com certeza o que acontecerá em cada evento.

Considerações finais

Consideramos que o trabalho com a probabilidade nos anos iniciais é de suma importância e que a resolução de problemas cotidianos em contexto de jogos propicia momentos de trocas e interações importantes para o desenvolvimento da linguagem e das noções dos conceitos probabilísticos, facilitando assim o processo de ensino e aprendizagem. Mas ressaltamos aqui a importância da intencionalidade do professor e da clareza dos seus objetivos para organizar um ambiente de aprendizagem que o possibilite conduzir o aluno a um processo de análise, de modo que ele possa enxergar claramente que o conhecimento envolvido no jogo pode ser usado em diferentes situações.

Ortíz e Alsina (2017) consideram que a linguagem probabilística começa a emergir das experiências da vida cotidiana e que gradualmente se torna uma linguagem probabilística, onde os conceitos de impossível, possível, seguro e incerto desempenham um papel fundamental.

O jogo "Brincando com a Probabilidade" pode ser utilizado de diversas maneiras, tudo depende do momento e da intencionalidade do professor. Pode ser utilizado tanto para avaliar os conhecimentos prévios das crianças como para introduzir um assunto que depois poderá ser desenvolvido com mais tempo em sala de aula, ou, introduzir um assunto em sala de aula e depois reforçar com o jogo. Além disso, realizar em sala de aula alguns experimentos que são propostos nas cartas do jogo promoveria uma excelente oportunidade de intervenção em prol da construção das noções dos conceitos probabilísticos.

Referências e bibliografia

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability: a literature review. Nuffield Foundation. http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_RE PORTv_FINAL.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001).*Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas.

Chevallard,Y. (1996). *Conceitos fundamentais da Didáctica: perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.* In Brun, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones *Exploring probability in school*: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Sínteses.

Macedo, L. de., Petty, A. L. S., & Passos, N. C. (2005). *Aprender com Jogos e Situações Problema*. Artmed Editora. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação,

Brasília, Brasil. BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (mec.gov.br)

MOOC. (2017). *Estadística y Probabilidad:* Probabilidad básica. Preparación Matemáticas Bachillerato – Educación Básica, material complementario, Costa Rica. http://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2018/09/PMB-EP04_Probabilidad-ba%CC%81sica.pdf

Ortíz, A. V., & Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema*, 31(57), 454-478.

Pinheiro, M. G. C., Silva, A. F. G., & Pietropaolo, R. C. (2018). Conhecimentos de Professores sobre a Probabilidade. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 11(3), 236-244.

Polya, G. (1978). A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático. Interciência.

Smole, K. S., & Diniz, M. I. (2007). *Cadernos do Mathema*: Jogos de Matemática de 6º ao 9º ano. Artmed.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Artmed.

Una propuesta para la enseñanza del ángulo como sentido de giro en entornos con robótica

Geraldin **López** Ospina
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
geraldin.lopez@correounivalle.edu.co
Ariel Fernando **Cruz** Laguna
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ariel.cruz@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta ponencia, se presenta una propuesta para la enseñanza del ángulo como sentido de giro en la construcción de un polígono regular en entornos con robótica. La propuesta se desarrolla en el marco de un enfoque instrumental para la construcción de esquemas y con el propósito de promover el pensamiento computacional en los estudiantes. El desarrollo de la siguiente tarea permite a un grupo de estudiantes el interactuar con un artefacto físico (robot), al cual pueden programar con diferentes instrucciones y hacer que este dibuje un polígono regular sobre una superficie.

Palabras clave: Educación Matemática; Ángulo; Robótica; Pensamiento computacional; Enfoque instrumental. Presentación de la propuesta

Presentación de la propuesta

Desde un enfoque instrumental, en busca de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se prioriza el desarrollo de tareas y técnicas para la construcción de esquemas, estos últimos "tienen tres funciones principales: una función pragmática (permite al agente hacer algo), una función heurística (permite al agente anticipar y planear acciones) y una función epistémica (permite al agente entender algo)." (Codes & Sierra, 2005, p. 2).

En el marco de este enfoque se encuentran los entornos con robótica, los cuales permiten una conexión entre el pensamiento abstracto-matemático y el pragmático-ingenieril. Por un lado, con la codificación los estudiantes "aprenden cómo organizar un proceso, reconocen rutinas o repeticiones y descubren errores en su pensamiento computacional cuando su programa no funciona según la idea o expectativa con la que fue concebido." (Valverde Berrocoso et al., 2015, pp.4-5). Por otro lado, en cuanto al artefacto, este permite a los estudiantes materializar el pensamiento, apropiarse de él, modificarlo y compartirlo con otros, promoviendo habilidades de comunicación y para el trabajo en equipo.

De aquí nuestro interés por presentar una propuesta para enseñar un concepto particular de la geometría desde un enfoque instrumental, desarrollando pensamiento computacional en los estudiantes.

Tabla 1
Desarrollo de la propuesta.

Introducción. El desarrollo de la siguiente tarea tiene como propósito la enseñanza del ángulo como sentido de giro en un polígono regular, mediante la articulación del pensamiento matemático y el computacional en entornos con robótica.
Aspectos Metodológicos
<u>Actividad 1:</u> Interactuar con el artefacto con el fin de comprender su funcionamiento, la relación entre los esquemas de programación y el resultado que se refleja en el Poli-Bot. ➢ **Construir la secuencia necesaria para que el Poli-Bot se mueva 20cm hacia el frente.** <u>Preguntas Orientadoras</u> ¿El poli-Bot dibuja una línea recta?, ¿Qué parámetros se relacionan con la longitud de la línea y en qué valores se ajustaron para cumplir con la actividad? ➢ **Construir la secuencia necesaria para que el Poli-Bot gire 30° grados hacia la izquierda y luego hacia la derecha.** <u>Preguntas Orientadoras</u> ¿Qué movimientos debe hacer el Poli-Bot para que gire hacia la izquierda y a la derecha?, ¿Se debe ajustar un nuevo parámetro para cumplir con esta tarea en relación con la anterior?, ¿En qué valores se ajustaron los parámetros para que el poli-Bot gire hasta lograr el ángulo requerido? Dibuja el recorrido realizado por el Poli-Bot resaltando el ángulo que describe en cada giro y el sentido de este. **<u>Actividad 2:</u>** Utilizar lo aprendido en la actividad 1 para dibujar un polígono regular con el Poli-Bot. ➢ **Diseña la secuencia necesaria para que el Poli-Bot dibuje un triángulo equilátero.** <u>Preguntas Orientadoras</u> ¿Qué movimientos debe hacer el Poli-Bot para que dibuje el triángulo equilátero?, ¿Qué valores toman los parámetros en la construcción del triángulo equilátero?, ¿Cuántos grados debe girar el Poli-Bot en cada vértice del triángulo?

Puntos por desarrollar para la institucionalización del concepto.
- ¿Qué características tiene un triángulo equilátero?
- ¿Los ángulos descritos por el Poli-Bot corresponden a los internos o externos del polígono?
- Realiza un dibujo del triángulo equilátero indicando el sentido de trazo del poli-Bot y el sentido de giro en cada punto

Referencias y bibliografía

Valverde-Berrocoso, J., Fernández-Sánchez, M. y Garrido-Arroyo, M. C. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *Revista de educación a distancia*, *46*.

Morales-Valencia, G. D. (2018). La robótica educativa para el aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación básica regular [Tesis doctoral, Matemática, computación e informática]. Universidad Nacional de HUANCAVELICA.

Codes-Valcarce, M., Sierra-Vásquez, M.(2005). Entorno computacional y educación matemática: una revisión del estado actual. [Conferencia]. IX SIMPOSIO SEIEM, Córdoba, España.

Uso de modelos para el aprendizaje de Estadística inferencial: una experiencia con estudiantes de ingeniería

Maria Cristina Kanobel
Universidad Tecnológica Nacional
Argentina
mckanobel@gmail.com

Resumen

Se describe una experiencia desarrollada en 2020 y 2021, en contexto de virtualidad, con estudiantes de Probabilidad y Estadística de carreras de Ingeniería a partir de una actividad orientada a evaluar competencias relativas al razonamiento estadístico. En En el año 2020 participaron 227 estudiantes de Probabilidad y Estadística de la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Avellaneda- Argentina) y 215 estudiantes en 2021. Para analizar la propuesta didáctica se relevó información sobre el rendimiento académico del alumnado participante en dicha actividad y sobre sus opiniones respecto de dicha tarea que fueron obtenidas a través de un instrumento autoadministrado. En ambos ciclos se observaron altos índices de aprobación, opiniones positivas del estudiantado sobre la modalidad de la tarea, quienes reconocieron la importancia de la propuesta como una instancia de indagación, de reflexión y de aprendizaje, tanto de contenidos disciplinares como de otras habilidades necesarias para su futuro profesional.

Palabras clave: Educación Matemática; Enseñanza virtual; Resolución de problemas; alfabetización estadística; Razonamiento estadístico; Modelos; Argentina.

Enseñar y aprender Estadística

Desde hace algunas décadas, el interés por la enseñanza de la Estadística ha comenzado a cobrar importancia, tanto en Argentina (Terán, 2008) como en el resto del mundo (Moore, 1997, Batanero, 2002; Sanoja, 2015; Estrella, 2017).

Aun así, persisten las dificultades en el aprendizaje ya que, si bien la Estadística es una ciencia en sí misma, los contenidos de Estadística forman parte del programa de Matemática y, en general, quienes enseñan contenidos de área Matemática “han recibido una formación escasa o poco adecuada de las técnicas y métodos estadísticos que deberían transmitir” (Tauber, 2010, p.55) siendo frecuente que la enseñanza se restrinja a una forma algorítmica y descontextualizada.

La educación estadística pretende brindar al estudiantado una cultura que les permita interpretar y evaluar críticamente la información estadística, con argumentos apoyados en datos y capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Tauber, 2010). Para ello, es necesario adoptar una forma diferente de pensamiento. Tal como afirma Estrella (2017) “en la matemática el contexto dificulta percibir la estructura, mientras que en el análisis de datos es el contexto el que da sentido” (p.176).

En particular, en la mayoría de las carreras del nivel superior se requiere que el alumnado maneje e interprete correctamente datos estadísticos para describir, estimar, sacar conclusiones y para la toma de decisiones. En contraposición, tal como explica Tauber (2010) los grupos de estudiantes que cursan dicho nivel de estudios, en su mayoría, no lograron un buen nivel de alfabetización estadística en niveles educativos anteriores que les permitan construir nuevos conocimientos sobre esos conceptos previos, formando razonamiento estadístico para construir pensamiento estadístico.

Si bien las definiciones de los términos alfabetización estadística, razonamiento estadístico y pensamiento estadístico no son consistentes y suelen confundirse dichos términos, Ben-Zvi y Garfield (2004) clarifican diferencias y similitudes entre estas competencias que permiten tener claros los objetivos de aprendizaje, el diseño de actividades de enseñanza y la evaluación de los aprendizajes con instrumentos apropiados. Según estos autores, la alfabetización estadística incluye las habilidades básicas necesarias para leer e interpretar información y resultados presentados en investigaciones o informes dados en medios de comunicación y reportes periodísticos. Estas habilidades abarcan desde la organización, construcción y presentación de datos con formas de representación como también la comprensión básica de conceptos vocabulario propios del área y simbología (Garfield, & Ben-Zvi, 2009).

Explican también que el razonamiento estadístico es el tipo de razonamiento que se puede definir como aquello que hacen las personas al razonar con ideas estadísticas y al dar sentido a la información estadística. Esto implica poder decidir en base a un conjunto de datos, representaciones de los datos, o medidas de resumen de los datos. El razonamiento estadístico permite conectar un concepto con otro (centro y dispersión), o bien puede combinar ideas acerca de los datos y el azar. Este razonamiento implica también comprender y ser capaz de explicar e interpretar correctamente procesos y resultados estadísticos (Estrella, 2017).

El Pensamiento Estadístico, según describen Ben-Zvi y Garfield (2004), involucra habilidades de un nivel superior, que implica lograr la comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones y cuáles son las bases de las ideas implícitas en dichas investigaciones. Esto incluye reconocer y comprender el proceso de investigación completo, entender cómo se utilizan los modelos para simular fenómenos aleatorios, cómo se originan los datos para estimar las probabilidades, reconociendo cómo, cuándo, y por qué las herramientas de inferencia existentes pueden utilizarse, y ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema para planificar y evaluar las investigaciones y sacar conclusiones (Chance, 2002 en Estrella, 2017).

En relación con las definiciones de Ben-Zvi y Garfield (2004), Gal (2004) citado por Tauber (2010) propone un modelo en el que distingue los elementos que hacen los conocimientos básicos que debería tener un estudiante alfabetizado estadísticamente:

i. componente de conocimiento, compuesto de cinco elementos cognitivos a los que llama habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, contexto de conocimiento y habilidades críticas.
ii. componente disposicional, que abarca postura crítica, creencias y actitudes.

En ese sentido se considera que estos componentes deben tomarse como contextos dependientes que conforman el denominado comportamiento estadísticamente alfabetizado. Gal y Ben-Zvi (2004) afirman también que la comprensión e interpretación de la información estadística requiere además de conocimiento estadístico, otros conocimientos básicos como son las habilidades generales de alfabetización, conocimiento matemático y un contexto de conocimiento general.

Competencias y enseñanza de la estadística

Si bien no es posible enseñar por instrucción directa las competencias asociadas a la alfabetización estadística ni al pensamiento y razonamiento estadísticos, según Campos et al. (2011) es posible propiciar su desarrollo si se observan determinadas actitudes. En ese sentido dicho autor recomienda algunas acciones (Campos, 2007):

i. trabajar con datos reales
ii. relacionar los datos con el contexto en el que se insertan
iii. guiar al estudiantado para que interprete sus resultados
iv. propiciar el trabajo en grupos de estudiantes favoreciendo el debate y la discusión de ideas entre los estudiantes
v. compartir conclusiones entre pares y promover juicios sobre su validez.

Estas acciones, según explica Campos, estimulan la creatividad estudiantil y la reflexión sobre el propio aprendizaje y, a la vez, promueven la inserción crítica del alumnado en la realidad en la que viven para una comprensión del mundo, siendo de esa forma, no solo observadores sino también participantes del mundo.

Una experiencia en contexto de virtualidad

Los conceptos anteriores permiten guiar el sentido de la experiencia que se describe en este trabajo en el marco de la educación estadística.

A principios del 2020, debido a las condiciones de aislamiento social preventivo obligatorio a causa de la pandemia mundial de COVID-19, la cátedra de Probabilidad y Estadística (PyE) reconfiguró sus diseños didácticos para adecuar la planificación a la llamada Enseñanza Remota de Emergencia (Kanobel, 2020). De esta manera, se organizaron las prácticas en formato virtual complementando asincronía y sincronía. Para las distintas actividades propuestas a lo largo del curso, se utilizó una metodología de enseñanza basada en modelos y modelización estadística.

Luego de varias instancias de evaluación implementadas durante el año, a quienes habían aprobado dichas instancias, como requisito final para acreditar la asignatura se les asignaba un problema al azar que requería el tratamiento de datos en un contexto y la toma de decisión

Luego de una semana de asignado el tema, debían subir a la plataforma Moodle la resolución del caso de estudio en formato video. El producto debía incluir una presentación junto con la explicación sobre la resolución y las conclusiones arribadas con imagen y voz de quien resolvía el problema. Luego de la devolución del equipo docente, se realizaba un coloquio en pequeños grupos elegidos al azar, entre los estudiantes que habían aprobado la instancia del video. En dicho coloquio cada estudiante explicaba brevemente a sus pares el contexto del problema y el modelo utilizado para resolver el problema. Mientras tanto, el resto debía tomar nota de los datos obtenidos de las exposiciones. Luego, el equipo docente realizaba preguntas sobre los distintos problemas propuestos a cada integrante para analizar la validez y condiciones necesarias para la aplicación de los modelos estadísticos elegidos para abordar las resoluciones. Al final de estas instancias, cada estudiante recibía una devolución y la calificación que le posibilitaba acreditar la asignatura o bien, volver a realizar la presentación oral en otra fecha asignada a partir de la resolución de una nueva situación problemática.

Uso de modelos

Los enunciados de los problemas resueltos por el alumnado en la etapa inicial de la experiencia planteaban el uso de saberes relacionados con la temática central de Prueba de hipótesis. En esta unidad, mediante el uso de modelos, se apela no sólo a la construcción de aprendizajes significativos, sino también a la transferencia de saberes a nuevas situaciones.

De este modo, previamente a la actividad se analizaba en clase un modelo general para la resolución de cualquier tipo de prueba de hipótesis a partir de las etapas y los tipos de errores posibles asociados a las conclusiones. Así, se esperaba que cada estudiante pudiera desarrollar la capacidad de aplicar dicho modelo para el abordaje de un problema asignado al azar y que requiriera evaluar condiciones y datos para aplicar algún modelo entre los distintos tipos de pruebas. Para ello, cada estudiante, trabajando en forma autónoma, debía analizar el problema dado e indagar para hallar el modelo que mejor se adecuara.

En resumen, la estructura del modelo general para las pruebas de hipótesis requiere que el alumnado aplique correctamente las etapas del modelo: Plantear la hipótesis nula y la alternativa, Definir el nivel de significación de la prueba, Establecer el estadístico de prueba, Definir la región de rechazo o el p-valor, Tomar una decisión estadística adaptada al contexto de la situación problemática abordada.

Resultados

Del relevamiento realizado posteriormente al coloquio final, se obtuvieron algunos resultados.

Por un lado, se observó un alto rendimiento académico en ambos años observados. En 2020, del grupo de 227 estudiantes en condiciones de acceder a la actividad final integradora, un 78% logró acreditar la asignatura mientras que el resto, regularizó la cursada y quedó en condiciones para rendir el examen final. En 2021, de 215 estudiantes en condiciones para abordar el trabajo final integrador, un 80,5% aprobó la asignatura y el resto regularizó la cursada quedando en condiciones para rendir el examen final.

Sobre las percepciones del grupo cursante en 2020 respecto de la actividad descripta, el 88,4% respondió que les podría ayudar a desarrollar algunas habilidades necesarias en su futura vida profesional.

Respecto del nivel de dificultad de la tarea en función de los contenidos desarrollados en la asignatura, un 44% lo consideró de dificultad media y solo un 16% afirmó que le resultó difícil o muy difícil.

En cuanto a la preparación de la presentación un 22% le asignó un nivel medio de dificultad mientras que 14 % lo consideró difícil o muy difícil.

Sobre la elaboración del formato video incluyendo el relato con la propia voz, un 22% lo consideró de dificultad media y un 21% sostuvo que le resultó dificultoso o muy demandante.

Respecto de la instancia de coloquio realizado en grupos vía Zoom, un 53% le asignó una dificultad de grado medio y solamente un 9% consideró difícil haber atravesado dicha instancia.

En el ciclo 2021, las respuestas reflejan una mejora: solamente el 8% consideró difícil abordar la resolución del problema, un 8,6% afirmó que le resultó difícil preparar la presentación mientras que un 17,1% afirmó que le resultó difícil explicar el problema incluyendo su voz en un video. En cuanto al coloquio, los datos señalan que un 11% le asignó un alto nivel de dificultad a dicha instancia.

Tanto en 2020 como en 2021, gran parte del estudiantado consideró un desafío el requisito de presentar un parcial en formato video. También afirmaron que tipo de experiencia les resulta nueva ya que no han tenido actividades de este tipo en prácticamente ninguna otra materia.

De las respuestas obtenidas sobre aspectos positivos percibidos respecto a la modalidad de evaluación de la tarea descripta, se seleccionaron algunas que caracterizan las distintas opiniones vertidas en ambos ciclos:

> "Algo positivo sería que da espacio a reforzar expresarse oralmente, y como algo negativo no encuentro ningún aspecto más que los nervios que te puedan jugar una mala pasada"
> "…como teníamos que resolver un ejercicio solos que capaz no conocíamos tanto como los otros , o por lo menos en mi caso tuve que buscar información de varios lugares eso hizo que algunas ideas se me aclaren más todavía"
> "Me gustó la idea de tener un tema para investigar y aprender muchas cosas sobre temas y tener que explicar con video y tener la libertad expresar"
> "Algo positivo, es que la aplicación de estos temas abarca distintos rubros en la vida cotidiana y cuando se empieza a entender los ejemplos por ese lado el aprendizaje es mucho más divertido. y sinceramente no encuentro aspectos negativos. ¡Gracias!"

Sobre la modalidad de la cursada y la motivación, gran parte del estudiantado destaca:

> "Comenzando por la cursada, fue una de las pocas materias que disfrute de presenciar las clases a distancia. Aprecie mucho todos los PowerPoint y videos que se nos dan, con el objetivo de brindarnos distintas herramientas para consultar. Por otro lado, la dinámica que tenían las clases se volvía entretenida y para nada aburrida, por ende, se volvió más sencillo comenzar a estudiar la materia. ¡En fin... no tengo un comentario malo, todo de 10!"

En cuanto a algunos aspectos negativos, si bien la mayoría de las respuestas afirma no haberlos encontrado, se rescataron algunas expresiones que caracterizan la generalidad de las opiniones vertidas al respecto en ambos años de la experiencia:

> "Un aspecto negativo fue que en la instancia de coloquio a las personas más tímidas nos cuesta más participar"
> "Considero como aspecto negativo solo poder conocer a pocos de mis compañeros, sin embargo, entiendo que, de no ser así, sería muy difícil evaluar".
> "Como aspecto negativo puede ser la cantidad de días entre la entrega de la presentación y el coloquio".
> "Negativo podría ser el enunciado del ejercicio que al ser de otro tema me resultó al principio un poco difícil plantearlo, pero gracias a la ayuda de los profesores pude encararlo de la manera correcta sobre el propio aprendizaje y, a la vez, promueven la inserción crítica del alumnado en la realidad en la que viven para una comprensión del mundo, siendo de esa forma, no solo observadores sino también participantes del mundo.

Conclusiones

La experiencia presentada en cursos de Probabilidad y Estadística con estudiantes de Ingeniería muestra algunos resultados obtenidos a partir de la implementación de actividades de evaluación no tradicionales. Si bien no es posible hacer generalizaciones a partir de la descripción realizada, consideramos que tanto la elaboración de presentaciones, la preparación de exposiciones orales y los debates son opciones válidas que permiten abordar propuestas de evaluación, tanto en la virtualidad como en la presencialidad física, en las que se requiere que el estudiantado clasifique, analice, revea conceptos y saque conclusiones para la resolución de problemas en contextos reales. El diseño de este tipo de tareas académicas puede ser propicias para que cada estudiante realice indagación, reflexión y metacognición de su propio aprendizaje. También posibilitan el desarrollo de algunas habilidades asociadas al razonamiento estadístico como la argumentación y la comunicación efectiva, que serán necesarias en su futura vida profesional. En resumen, y en coincidencia con las afirmaciones de Tobón et al.(2010) consideramos que la planificación de evaluaciones de este tipo, que implican la resolución de problemas situados, puede hacer importantes aportes al desarrollo de competencias disciplinares y transversales del estudiantado.

Referencias y bibliografía

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. En *Jornadas Interamericanas de la Enseñanza de la Estadística*. Conferencia inaugural, Buenos Aires, Argentina.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (Eds.). (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, 3-16. Kluwer academic publishers.

Campos, C. (2007). A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação. In *Bolema -Boletim de Educação Matemática*. Universidade Estadual Paulista.

Campos, C. R., Jacobini, O. R., Wodewotzki, M. L. L., & Ferreira, D. H. L. (2011). Educação estatística no contexto da educação crítica. Bolema - Mathematics Education Bulletin, 24(39), 473–494.Gal, I., & Ben-Zvi, D. (2004). Educational products of official statistics agencies: A landscape view. En International Conference: ICME-10, Berlin, July.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. In *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI.*

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.

Kanobel M. (2020) Motivación y rendimiento académico de estudiantes en contextos de enseñanza remota de emergencia: un estudio en el nivel universitario, en A. Rosas (ed.), *Resúmenes del 6.o Congreso Internacional de Matemática Educativa*, pp. 85-86.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 123-165.

Sanoja, J. (2015). Alfabetización estadística del futuro profesor de matemática. *Investigaciones en Educación Matemática.* Aportes Desde Unidad de Investigación., 189–207.

Tauber, L. M. (2010). Análisis de Elementos Básicos de Alfabetización Estadística en Tareas de Interpretación de Gráficos y Tablas Descriptivas. Ciencias Económicas, 1, 53–74. https://doi.org/10.14409/ce.v1i12.1146

Terán, T. E. (2008). La Enseñanza de la Inferencia Estadística en Carreras donde la Estadística Cumple un Rol Instrumental. *Ciencias Económicas,* 2, 67–76. https://doi.org/10.14409/ce.v2i9.1129

Tobón, M.; Arbeláez, M.; Falcón, M.; Bedoya, R. (2010). La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Universidad Tecnológica de Pereira. https://doi.org/10.1007/s10551-019-04115-w

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Uso del tangram como recurso para la enseñanza de la geometría

Darwin Alexander **Moreno** Gatica
Colegio Monte María
Guatemala
darwinmoreno56@gmail.com

Resumen

Se propone un taller sobre el uso del tangram como recursos en las clases de matemáticas desde nivel primario hasta diversificado, dicho taller pretende dar y generar ideas a través de actividades de construcción de conceptos matemáticos y actividades de refuerzo por parte del expositor y participantes, el tangram ha sido un recurso muy poco aprovechado y que tiene muchas ventajas al momento de plantear una secuencia didáctica, el cual contribuye al desarrollo de habilidades de pensamiento y de resolución de problemas.

Palabras clave: Educación matemática; Tangram y matemática; Actividades de construcción; Geometría y Tangram; Resolución de problemas; Guatemala.

Introducción

El tangram es un recurso que muchos estudiantes tienen en casa y que además es de fácil elaboración, pero se utiliza muy poco en las clases de matemáticas; específicamente para fortalecer algún concepto o enseñar alguno nuevo. Por lo regular es utilizado como ejercicio para desarrollar el razonamiento lógico.

Por este motivo en el taller se realizarán actividades que los asistentes puedan replicar, modificar o adecuar, según sus contextos. Desde su construcción hasta la modelación de actividades con algunos conceptos y contenidos procedimentales específicos del área de geometría para el nivel primario hasta diversificado. Luego de realizar cada una de las actividades planteadas, se tendrá un espacio para reflexionar sobre el recurso, las ventajas y las situaciones que debemos tomar en cuenta al momento de utilizarlo.

Justificación

Los resultados de las pruebas estandarizadas de graduandos de Guatemala demuestran que la mayoría de los estudiantes no adquieren las competencias necesarias en el área de matemática, en la serie Aprendamos del error del Ministerio de Educación menciona que solo el 25% de los ítems que evalúa el área de figuras geométricas, son respuestas correctas; por este motivo creemos pertinente abordar la problemática en relación a su enseñanza y de esta manera determinar los aspectos metodológicos necesarios para su mejora significativa.

Pretendemos contribuir con este taller a profesores del nivel primario hasta diversificado como también a estudiantes en proceso de formación. Al dar un cambio en la enseñanza de la geometría los estudiantes se verán beneficiados ya que el cambio metodológico provocará cambios significativos en su aprendizaje y en aprendizajes futuros como en su ingreso a la universidad, en el caso de Guatemala, que es una de las áreas evaluadas en los exámenes de admisión.

Como resultado de lo expuesto, la investigación nos lleva a plantearnos las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo es la enseñanza de la geometría actual en Guatemala?
- ¿Tendrá alguna relación directa la enseñanza de los conceptos de geometría en primaria con los bajos resultados en la prueba de graduandas?
- ¿Qué elementos tendrían que tomarse en cuenta para la enseñanza de la geometría?
- ¿Qué habilidades y/o destrezas son necesarias previas a la enseñanza de la geometría?

Todas estas preguntas nos llevan a la necesidad de plantear una serie de etapas o procesos que la construcción de conceptos nos propone; para que esto se lleve a cabo los estudiantes deben experimentar desde lo concreto, pasando por lo gráfico o pictórico, para que puedan llegar a la representación simbólica. En el caso de la enseñanza de la geometría es fundamental involucrar las representaciones gráficas como parte inherente al proceso de enseñanza aprendizaje.

También dentro de este proceso un aspecto fundamental es el juego, por eso es importante involucrar el juego con los estudiantes, dentro de sus actividades de aprendizaje, el juego intencionado con una ruta de aprendizaje definida contribuirá al desarrollo de los conceptos trabajados en el salón de clases.

Por este motivo consideramos que el tangram es un recurso flexible que nos permite integrarlo como parte del proceso en las secuencias didácticas, adecuándolo a las necesidades del grado y nivel de contenido a desarrollar en el área de geometría.

El uso del tangram en los estudiantes en primaria les permite desarrollar habilidades específicas como: visualizar la composición de una figura compuesta, identificar relaciones de proporcionalidad, contribuye a la construcción del concepto de entero, fracción, decimal y porcentaje y en el caso de secundaria el uso del tangram contribuye al desarrollo del pensamiento abstracto.

Metodología

El taller se llevará de forma presencial en la XVI CIAEM, los docentes que puedan participar son todos los que trabajen con estudiantes de primer grado de primaria a último año de diversificado, los participantes durante el taller tendrán la posibilidad de realizar 4 actividades diseñadas por el tallerista con el fin de analizar cada una de las actividades propuestas, se espera que este análisis abarque situaciones como: procesos cognitivos utilizados, contenidos procedimentales involucrados, competencias que desarrolla y la funcionalidad desde el contexto del docente.

Dentro de los contenidos declarativos que se trabajarán durante el taller están: figuras geométricas, áreas, perímetros, razones, proporciones, porcentajes, teorema de Pitágoras, trigonometría y algebra, el tangram nos da la flexibilidad por las características del recursos de generar actividades con la mayoría de los temas que nos plantea el currículo.

Luego de realizar la reflexión por cada una de las actividades propuestas por el tallerista, los participantes en los grupos colaborativos deberán construir una actividad propia tomando como referencia el recurso del tangram y algún contenido procedimental que quieran desarrollar para un grado en específico, al terminar cada uno de los grupos; éstas actividades se colocarán nuevamente en los centros para que el resto de grupos experimenten y trabajen con las propuestas generadas por ellos mismos.

Al finalizar la experiencia se tendrá un espacio para compartir las reflexiones, comentarios y sugerencias sobre lo trabajado durante la sesión, según lo descrito anteriormente se propone la siguiente secuencia durante el taller:

Tiempo aproximado	Actividad
5 minutos	Presentación y explicación de la dinámica del taller a trabajar.
2 minutos	Distribución de los participantes en grupos de 5 personas.
15 minutos	Ronda 1 Los equipos trabajarán en la actividad propuesta.
5 minutos	Reflexión acerca de lo trabajado.
15 minutos	Ronda 2 Los equipos trabajarán en la actividad propuesto.
5 minutos	Reflexión acerca de lo trabajado.
15 minutos	Ronda 3 Los equipos trabajarán en la actividad propuesto.
5 minutos	Reflexión acerca de lo trabajado.
15 minutos	Ronda 4 Los equipos trabajarán en la actividad propuesto.
5 minutos	Reflexión acerca de lo trabajado.
10 minutos	Creación de actividad
10 minutos	Ronda 5
3 minutos	Comentarios y preguntas

Experiencias

Dentro de las rutinas establecidas en la clase de matemática en la institución donde laboro, se tiene un día a la semana asignada la actividad de “Razonamiento lógico”, este espacio busca proponer actividades a los estudiantes que los reten y que contribuyan al desarrollo de destrezas y de contenidos tanto declarativos como procedimentales, en estos espacios se ha involucrado en todos los grados de primaria, actividades con el tangram como recurso principal.

Otras actividades que se desarrollan en este espacio se encuentra el origami, acertijos, problemas de razonamiento divergente o colateral, lo cual le permite al estudiante desarrollar ese razonamiento lógico para la solución de problemas. El uso de tangram beneficiará puntualmente en contenidos como el de áreas compuestas, este tema es complejo para los estudiantes en secundaria, pero la complejidad no está muchas veces en la solución de las ecuaciones sino en identificar como está conformada la figura y determinar que ecuaciones serán útiles, hemos notado que los estudiantes que han utilizado el tangram logran visualizar y trazar distintas figuras, lo cual será de beneficio al momento de que se les presente un problema de áreas compuestas por ejemplo.

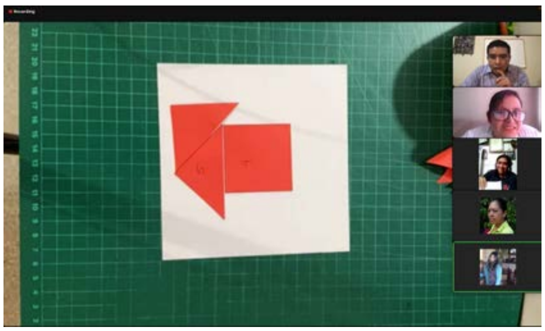


Figura 1: taller de formación docente 2021

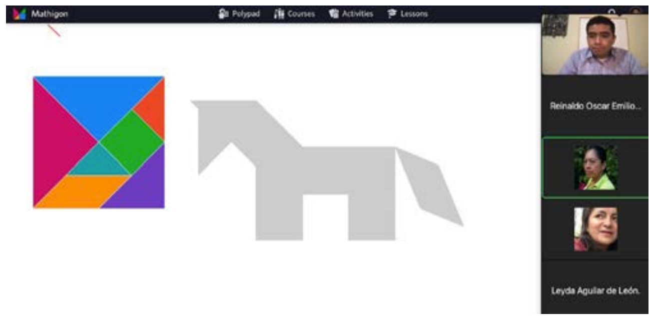


Figura 2: taller de formación docente 2021

Conclusiones

El uso del tangram como recurso para la enseñanza de la geometría favorece a la construcción de conceptos.

Este recurso no se limita únicamente a geometría, sino que se pueden involucrar otros componentes del área de forma específica o integrada a la geometría.

Los estudiantes por medio de la manipulación del tangram descubren diversas relaciones dentro de los contenidos a trabajar.

Referencias y bibliografía

Castillo, W. (2016). Así estamos enseñando matemáticas. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación.

Quim, M. (2020). *Informe nacional de Graduandos: año 2019.* Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación.

Solares de Sánchez, C. L. (2021, Enero). ¿Cómo aprender matemática? *Innovación con conocimiento*, *3*(2), 28 a 30. https://aprendoencasa.mineduc.gob.gt/images/sampledata/asimages/revista/pdf/Revista-No3-enero-marzo-2021-WEB.pdf

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Utilizando a Matemática para discutir problemas financeiros

Vanessa **Oechsler**
Instituto Federal de Santa Catarina – Câmpus Gaspar
Brasil
vanessa.oechsler@ifsc.edu.br

Resumo

Nos últimos anos a Educação Financeira tem despertado a curiosidade dos alunos e passou a ser um tema discutido nas escolas. Este trabalho apresenta algumas discussões que surgiram a partir de atividades desenvolvidas com alunos do Ensino Médio com o tema de Matemática Financeira aliado aos conteúdos de porcentagem, função exponencial e função logarítmica. Explorando a Educação Matemática Crítica durante o desenvolvimento das atividades, levando os alunos a refletirem e questionarem seus resultados, percebeu-se a importância da discussão da Matemática Financeira com os alunos. Eles indicaram que as discussões e a resolução das atividades os levaram a perceber a Matemática como uma ferramenta que pode auxiliá-los no dia-a-dia.

Palavras-chave: Educação Financeira; Educação Matemática Crítica; Matemática Financeira; Ensino Médio; Investimentos; Empréstimo.

Introdução

A Educação Financeira é um tema que tem despertado o interesse de alunos e professores nos últimos anos. Isso se deve, principalmente, à necessidade percebida pelas famílias em analisar seu orçamento financeiro. Em setembro de 2022, a quantidade de brasileiros inadimplentes (ou seja, que não pagaram alguma dívida) era de 68,39 milhões (Serasa, 2022). Isso corresponde a 31,96% da população brasileira.

Por perceber a necessidade da discussão de Educação Financeira em sala de aula, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia o currículo brasileiro, traz a Educação Financeira como um tema transversal, ou seja, é um conteúdo que deve ser incorporado aos currículos de estados e municípios e não precisa ser abordado apenas no componente curricular de Matemática (Brasil, 2018).

Durante a pandemia, vários foram os Youtubers que começaram a falar sobre Educação Financeira, explicando como investir o dinheiro e ganhar juros. Os alunos passaram a seguir esses Youtubers e a se interessar por temas como bolsa de valores, criptomoedas, investimentos e discutir esses temas com seus colegas, tentando entender como poderiam investir e ganhar dinheiro.

No segundo semestre do Curso de Ensino Médio Integrado (curso em que os alunos fazem o Ensino Médio junto com o curso técnico) do Instituto Federal de Santa Catarina Câmpus Gaspar, os alunos estudam os conteúdos de Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Matemática Financeira. Percebe-se que os alunos participam bastante das discussões acerca de Matemática Financeira e, desde 2021, optou-se por explorar o conteúdo de Matemática Financeira com os alunos a partir de atividades e problemas e, conforme a necessidade destes problemas, são introduzidos os demais conteúdos previstos para o semestre. Por exemplo, para calcular o tempo em que um valor deve ficar investido em determinado investimento para dobrar de valor, utilizam-se os conceitos de logaritmos. Então, quando este problema é apresentado, passa-se a discutir logaritmo e função logarítmica com os alunos, assim como com os demais conteúdos previstos para o semestre.

Este trabalho relata uma atividade desenvolvida com turmas do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Santa Catarina Câmpus Gaspar nos anos de 2021 e 2022. O objetivo deste trabalho é apresentar as atividades desenvolvidas e discutir a percepção dos alunos acerca do trabalho desenvolvido.

Fundamentação Teórica

Os assuntos de juros simples e juros compostos são explorados nas escolas desde o Ensino Fundamental. Normalmente os alunos são apresentados às fórmulas e realizam alguns exercícios. No entanto, não discutem os resultados e nem como esses conteúdos estão presentes na sua vida.

No Ensino Médio estes conteúdos voltam a ser explorados, repetindo a estratégia de resolução de exercícios. E, nesta faixa etária, os alunos estão ávidos para discutir estratégias financeiras, pensando em seu futuro. De acordo com D´Aquino (2001, p. 03)

> A Educação Financeira colabora para que nossas crianças venham a tornar-se adultos seguros, responsáveis e equilibrados. Adultos, enfim, capazes de assumirem as rédeas de uma vida independente e, para isso, capazes inclusive de saber organizar seu dinheiro.

A Educação Financeira pode auxiliar muito nas reflexões dos alunos acerca de seu planejamento familiar, principalmente se for aliada à Educação Matemática Crítica. Como axioma[1] básico da Educação Crítica, Skovsmose (2001a, p. 32) apresenta que "a educação não deve servir como reprodução passiva de relações sociais existentes e de relações de poder.", ou seja, a educação deve contribuir para a reflexão e discussão do que acontece na sociedade. De acordo com Skovsmose (2001b, p. 101),

[1] Norma admitida como princípio, que não precisa ser demonstrada.

> [...] crítica tem a ver com: 1) uma investigação de condições para a obtenção do conhecimento; 2) uma identificação dos problemas sociais e sua avaliação; e 3) uma reação às situações sociais problemáticas. Em outras palavras, o conceito de crítica indica demanda sobre auto-reflexões, reflexões e reações.

O que se defende neste trabalho é uma atividade de Educação Financeira aliada à Educação Matemática Crítica, onde os alunos realizam os cálculos e refletem sobre aquilo que calculam, percebendo suas implicações na sociedade. Dentro desse contexto, a Educação Crítica defende o trabalho com problemas do cotidiano, utilizando os seguintes critérios:

> 1) Deveria ser possível para os estudantes perceber que o problema é de importância. Isto é, o problema deve ter relevância subjetiva para os estudantes. Deve estar relacionado a situações ligadas às experiências deles.
> 2) O problema deve estar relacionado a processos importantes na sociedade.
> 3) De alguma maneira e em alguma medida, o engajamento dos estudantes na situação-problema e no processo de resolução deveria servir como base para um engajamento político e social (posterior). (Skovsmose, 2001a, p. 34).

Nesta citação, percebe-se a forma como a Educação Crítica deveria ser trabalhada: a escolha de um tema de relevância para os estudantes. Neste trabalho, discute-se o conteúdo de Matemática Financeira, pois se percebe que os alunos têm interesse pelo tema e querem discutir como podem investir seu dinheiro e planejar o seu futuro. Partir da realidade do aluno é, de acordo com D´Ambrósio (1996, p. 20), um ciclo vital para a construção do conhecimento: “[...] → REALIDADE informa INDIVÍDUO que processa e executa uma AÇÃO que modifica a REALIDADE que informa INDIVÍDUO → ...”. A partir da realidade (no caso situações de Matemática Financeira), os alunos discutem, refletem, realizam cálculos e executam uma ação que pode modificar a realidade.

De acordo com Borba e Skovsmose (2001, p. 127), “a matemática é usada para dar suporte ao debate político. Mas não apenas isso. Ela se torna parte da linguagem com a qual sugestões políticas, tecnológicas, e administrativas são apresentadas. A Matemática torna-se parte da linguagem do poder.” E essa linguagem de poder acontece inclusive no meio financiero. Quantas vezes, por desconhecimento da Matemática, as pessoas não analisam a situação e acabam se endividando por contrair dívidas que não conseguem pagar? Por isso, a Educação Financeira passou a ser um tema a ser discutido nas escolas, não apenas nas aulas de Matemática, mas como um tema transversal (Brasil, 2018).

Skovsmose apresenta alguns passos para se refletir sobre o uso da Matemática na resolução de um problema:

> (1) usamos o algoritmo de maneira correta?
> (2) usamos o algoritmo certo?
> (3) Podemos confiar no resultado vindo desse algoritmo?
> (4) Poderíamos ter prescindido de cálculos formais?
> (5) Como o uso efetivo de um algoritmo (apropriado ou não) afeta um contexto específico?
> (6) Poderíamos ter desempenhado a avaliação de outro modo? (Skovsmose, 2001c, p. 92).

Reflexões como estas levam o aluno a pensar sobre aquilo que resolveu e identificar se o resultado é coerente com aquilo que foi solicitado. Isso leva o aluno a não apenas fazer os cálculos mecanicamente, mas a explorar e refletir sobre a resposta.

Na próxima seção serão apresentadas as atividades de Matemática Financeira desenvolvidas em sala de aula pelos alunos, como forma de utilizar a Matemática e refletir sobre o seu resultado.

As atividades desenvolvidas

O objetivo deste trabalho é apresentar as atividades de Matemática Financeira desenvolvidas desde 2021 com os alunos do IFSC Gaspar e refletir sobre as discussões realizadas em sala de aula e as percepções deles acerca das atividades.

A cada semestre são desenvolvidos trabalhos diferentes, sempre com o objetivo de aliar Matemática Financeira com os conteúdos de porcentagem, função exponencial e função logarítmica. A seguir serão detalhados os trabalhos desenvolvidos em quatro semestres letivos. A cada semestre as atividades são desenvolvidas com duas turmas diferentes, totalizando uma média de 75 alunos por semestre.

No primeiro semestre de 2021, os alunos desenvolveram um trabalho para discutir uma forma de realizar seus sonhos. Assim elencaram o que gostariam de ter quando adultos (casa, carro, viagens) e pesquisaram qual o salário médio da profissão que pretendem seguir, identificando em quanto tempo conseguiriam atingir seus objetivos. Após esta pesquisa, solicitou-se que os alunos pesquisassem alguns termos financeiros e fizessem uma apresentação destes termos aos colegas por meio de vídeo ou apresentação com slides. Os termos pesquisados por eles foram: Empréstimo, Financiamento tabela SAC, Financiamento tabela Price, Renda fixa – poupança, Renda fixa – CDB, Renda fixa – Tesouro direto, Renda variável – Bolsa de valores e Inflação. A última etapa do trabalho consistiu em os alunos identificarem como poderiam atingir os seus objetivos a partir do salário e utilizando investimentos e/ou financiamentos e empréstimos apresentados pelos colegas.

No segundo semestre de 2021 os alunos desenvolveram panfletos com os seguintes termos financeiros: Empréstimo, Financiamento tabela SAC, Financiamento tabela Price, Renda variável - Bolsa de Valores, Renda fixa – Poupança, Renda fixa - Tesouro Direto, Renda fixa – CDB, Inflação, Hipoteca/Refinanciamento, Cheque especial e Cartão de crédito. A ideia é que esses panfletos explicassem detalhadamente o que significam os termos financeiros para pessoas leigas, ou seja, que nunca tivessem estudado o conteúdo, além de fazer uma ligação com os conteúdos estudados no semestre.

No primeiro semestre de 2022 pediu-se que os alunos elaborassem uma história em quadrinhos explicando um termo financeiro (Empréstimo, Financiamento , Criptomoedas, Renda variável - Bolsa de Valores, Renda fixa – Poupança, Renda fixa - Tesouro Direto, Renda fixa – CDB, Inflação, Cheque especial, Cartão de crédito). A história deveria ter um enredo que explicasse a definição do tema e ainda conter um exemplo da aplicação do conteúdo matemático estudado no semestre.

No segundo semestre de 2022 os alunos receberam situações problema envolvendo a Matemática Financeira e precisaram utilizar os conceitos matemáticos estudados para resolvê-las.

Na próxima seção serão apresentados alguns resultados das atividades desenvolvidas.

Resultados e discussões

Todos os trabalhos desenvolvidos pelos alunos geraram um produto: ou uma apresentação ou um folder, ou uma história. Esses produtos foram compartilhados entre os colegas e suscitaram discussões acerca do tema de Matemática Financeira. Nesta seção serão apresentadas algumas reflexões advindas durante o trabalho.

Uma das discussões foi, no primeiro semestre de 2021, sobre o valor a ser pago na parcela de um empréstimo. O grupo que pesquisou sobre o termo de Empréstimo, quis calcular em quantos meses eles deveriam pagar um empréstimo de R$ 30000,00 (trinta mil reais) feito a uma taxa de juros de 3,5% ao mês, sabendo que poderiam pagar, no máximo, R$ 1000,00 (mil reais) por mês. Os alunos identificaram a fórmula para calcular esta situação:

$$n = \frac{ln \dfrac{PMT}{PMT\ - (P \times i)}}{\ln(1+i)}$$, onde

n = tempo
PMT = valor da parcela
P = valor a ser financido
i = taxa de juros

Os alunos substituíram os dados na fórmula (PMT = 1000,00; P = 30000,00; i = 0,035) e perceberam que não conseguiam efetuar o cálculo.

$$n = \frac{ln \dfrac{1000}{1000 - (30000 \times 0{,}035)}}{\ln\ (1 + 0{,}035)}$$

$$n = \frac{ln \dfrac{1000}{1000 - 1050}}{ln 1{,}035}$$

$$n = \frac{ln \dfrac{1000}{-50}}{ln 1{,}035}$$

A partir desta problemática, começaram a discutir com os colegas e a professora o porquê de não conseguirem efetuar os cálculos, afinal, este era um problema bem comum entre pessoas que buscam por empréstimos: em quanto tempo conseguem devolver o valor emprestado à taxa de juros estipulada pela instituição financeira, mas podendo pagar um determinado valor mensal. Neste problema, os alunos acabaram fazendo as reflexões apontadas por Skovsmose (2001b, p.92): “(1) usamos o algoritmo de maneira correta? (2) usamos o algoritmo certo? (3) podemos confiar no resultado vindo desse algoritmo?” Para as questões 1 e 2, os alunos tinham a resposta positiva, pois tinham pesquisado e a fórmula utilizada estava correta. Mas, por que não conseguiam encontrar o valor do tempo? Podiam confiar no resultado?

Ao analisar a fórmula, os alunos perceberam a presença do conteúdo de logaritmo (ali aparece o ln, que é o logaritmo neperiano) e foram estudar o conceito de logaritmo. Como condição de existência do logaritmo, perceberam que o logaritmando não pode ser um valor negativo como o que aconteceu no numerador da fórmula. Assim, os alunos entenderam que havia um valor mínimo para a parcela com aquele valor de empréstimo e aquela taxa de juros. Desta forma, o valor mínimo deveria ser um valor em que o logaritmando fosse positivo:

$$PMT - (30000 \times 0{,}035) > 0$$
$$PMT - 1050 > 0$$
$$PMT > 1050$$

Nesta discussão, os alunos trouxeram um problema da realidade e discutiram sobre ele, percebendo que, se o caso fosse real, ou a pessoa precisaria disponibilizar mais dinheiro para a parcela ou precisaria pegar menos dinheiro emprestado ou, ainda, buscar uma instituição com uma taxa de juros menor. Ou seja, discutiram um problema relevante para eles, e tentaram achar soluções a partir da Matemática (Skovsmose, 2001c), utilizando os conhecimentos de logaritmo.

Quando os alunos apresentaram os materiais sobre a poupança (apresentação, panfleto e história em quadrinhos), outra dúvida surgiu: “Como uma pessoa pode perder dinheiro ao investir dinheiro na poupança se o montante lá aumenta com o passar dos meses?” Os alunos trouxeram esta dúvida, pois ouvem em casa e nos noticiários que quem aplica na poupança perde dinheiro. Mas, ao efetuar o cálculo de juros compostos, percebem que, com o passar do tempo, o valor só aumenta.

Novamente os alunos utilizaram as perguntas sugeridas por Skovsmose (2001b) para identificar se estavam efetuando corretamente os cálculos. Perceberam que o montante aumentava com o passar do tempo. Mas identificaram que havia outro fator a ser levado em conta: a inflação, tema de apresentação de outro grupo. Aliando as pesquisas sobre a poupança e a inflação, os alunos perceberam que o valor da poupança está ligado à inflação. Se a taxa de juros da poupança for menor que a inflação, o poder de compra diminui e, por este motivo, diz-se que se perde dinheiro ao investir na poupança. Os alunos descobriram uma fórmula que indica o aumento real do valor na poupança:

$$i_r = \frac{(1 + i_n)}{(1 + i_i)} - 1$$

onde,
i_r = taxa de ganho real
i_n = taxa nominal ou aparente
i_i = taxa de inflação

Assim, se i_r for negativo, significa que houve perda de dinheiro neste investimento.

Ainda com relação à poupança, em 2022, quando iniciou-se o estudo de juros compostos e função exponencial, calculou-se o montante adquirido quando se investia um valor na poupança por determinados meses, por exemplo, 1 mês, 2 meses, 6 meses e assim por diante.

Durante esta atividade, um dos alunos questionou como calcularia o valor que teria na poupança caso depositasse um valor mensalmente, algo diferente do que estávamos explorando na atividade, pois o valor depositado era único (ou seja, no mês 0). No entanto, a dúvida dele é bastante pertinente pois, normalmente, as pessoas não fazem um único depósito na poupança, geralmente depositando uma quantia mês a mês. E como efetuar este cálculo? Com base nesta dúvida, os alunos começaram a simular situações, inclusive por meio de planilhas eletrônicas e programação (alguns alunos fazem curso técnico em Informática e optaram por utilizar seus conhecimentos técnicos para resolver a questão) e perceberam que se depositassem mensalmente o mesmo valor, acabariam tendo uma Progressão Geométrica e o valor do montante seria dado pela soma dos termos da Progressão Geométrica:

$$M = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Onde,
M = Montante aplicado ao final de n meses
I = taxa de juros
P = valor aplicado mensalmente
n = tempo de aplicação

Ao final das atividades, questionou-se os alunos sobre a pertinência deste trabalho e destas discussões para sua vida financeira. Um aluno fez o seguinte relato:

> Matemática Financeira na minha visão é um dos tópicos mais importantes ao decorrer da vida inteira. Pessoalmente falando, me ajudou em diversos aspectos, tanto ao conhecer conceitos básicos como montante, juros simples e compostos, até mesmo a planejar meu futuro, levando em conta meus gastos, meus sonhos, da minha escolha profissional, etc. Portanto, graças a esse trabalho, me sinto atualmente mais confiante neste aspecto e considero que a possibilidade de futuros problemas financeiros por má gestão diminuíram drasticamente, além de ver que futuramente, se bem administrado financeiramente, posso transformar meus sonhos materiais em realidade.

Outra aluna indicou:

> *O trabalho de matemática financeira foi muito interessante e enriquecedor, aprendemos sobre bolsa de valores, poupança, tesouro direto, inflação, CDB, cartão de crédito, financiamento, empréstimo, cheque especial e criptomoedas. Todos esses temas foram abordados de forma dinâmica, usando os conhecimentos adquiridos ao longo da formação e a liberdade da nossa criatividade na criação da história. Tal didática nos fez notar a matemática financeira na prática, em situações diárias, e sua importância para nossa formação como adultos conscientes e financeiramente responsáveis.*

Percebe-se que os trabalhos trouxeram informações aos alunos sobre os investimentos e os fizeram perceber a importância de conhecer o tema. As discussões que surgiram a partir do trabalho levaram o primeiro aluno a uma crítica e o auxiliaram a se sentir mais confiante em explorar temas de Matemática Financeira em sua vida.

Considerações finais

É possível perceber que, muitas dúvidas que surgiram no decorrer do trabalho, partiram de situações vivenciadas pelas famílias, como o cálculo do tempo de empréstimo tendo-se um valor máximo para se pagar na parcela, curiosidade sobre investimentos, bolsa de valores e criptomoedas e discussão sobre como se perde dinheiro na poupança se o montante aumenta com o tempo de aplicação. A partir desta realidade, os alunos refletiram sobre os problemas e utilizaram seus conhecimentos matemáticos para resolvê-los, podendo executar uma ação e modificar a realidade (D´Ambrósio, 1996).

Destaca-se a importância de se partir da realidade dos estudantes para discutir a Matemática Financeira e, a partir daí, explorar até outros conteúdos matemáticos como a função exponencial e logaritmos.

E, a partir do depoimento dos alunos, observa-se que as discussões realizadas em sala de aula contribuíram para que fossem mais críticos com relação ao assunto e pudessem se sentir mais confiantes em utilizá-los em seu cotidiano. Este é um dos papeis da Matemática: que os alunos a percebam como uma ferramenta que podem auxiliá-los na tomada de decisões.

Referências e bibliografia

Borba, M. de C., & Skovsmose, O. (2001). A ideologia da certeza em Educação Matemática. Em O. Skovsmose, *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia* (p. 127–148). Papirus.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

D´Ambrósio, U. (1996). *Educação Matemática: Da teoria à prática*. Papirus.

D´Aquino, C. (2001). *Educação Financeira: 20 Dicas para ajudar você a educar seu filho.* (2º ed). Me Poupe.

Serasa. (2022). Mapa da Inadimplência e Negociação de Dívidas no Brasil. *Serasa Limpa Nome*. https://www.serasa.com.br/limpa-nome-online/blog/mapa-da-inadimplencia-e-renogociacao-de-dividas-no-brasil/

Skovsmose, O. (2001a). Educação Matemática versus Educação Crítica. Em O. Skovsmose, *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia* (3º ed, p. 13–36). Papirus.

Skovsmose, O. (2001b). Em direção à Educação Matemática Crítica. Em O. Skovsmose, *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia.* (3º ed, p. 97–125). Papirus.

Skovsmose, O. (2001c). Competência democrática e o conhecer reflexivo namatemática. Em *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia* (3º ed, p. 65–96). Papirus.

Utilizando el Juego de los ocho elementos para transitar entre varios modos de pensamiento

Martha Cecilia **Mosquera** Urrutia
Universidad Surcolombiana
Colombia
martha.mosquera@usco.edu.co

Resumen

En el taller utilizo el Tangram triangular para ilustrar el tránsito entre los modos de pensamiento Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estructural planteados por Sierpinska, el objetivo es motivar la reflexión sobre la pertinencia del material didáctico para conceptualizar, rescatando la importancia de la geometría y el sentido espacial intuitivo para el desarrollo del pensamiento matemático.

Para lograrlo, he dividido el taller en cuatro partes: primero, muestro inconvenientes al implementar el tangram en el aula (problema didáctico) y en las otras tres a partir de la pregunta: ¿para qué quiero este tangram? Ilustro conceptos como: variables y constantes, expresiones algebraicas y métodos de razonamiento para construir demostraciones, como formas de transitar entre lo práctico y lo teórico con tangrams reticulares, conexos, divisibles y subtangrams.

Se ha logrado desarrollar actividades desde preescolar hasta superior y avanzar en la identificación de puntos críticos en la enseñanza del área de regiones planas.

Palabras clave: Modos de pensamiento; Tangrams; Tangram chino; Tangram triangular; recubrir el plano; fórmulas área; Área y superficie; Formación de profesores; Ministerio de Educación Nacional; Colombia.

Introducción

Quizá muchos de nosotros hemos tenido la oportunidad de ver, oír hablar o experimentar con un tangram, este milenario rompecabezas inventado al parecer por los chinos y al que ellos dieron el nombre de tabla de la sabiduría.

Resulta fácil conseguirlo o construirlo y son muchos los docentes especialmente de matemáticas e investigadores que han dedicado largos y valiosos esfuerzos al desarrollo de actividades específicas de geometría (especialmente) utilizándolo como material didáctico (Elffers (1982); Russell y Bolonia (1982); Wang y Hsiung (1992); Fernández-Blanco, (2003); Siew, Chong y Abdullac (2013)) hace algunos años yo también asumí esa tarea, pero la experiencia demostró que si el seguimiento que el maestro hace de las actividades propuestas no es puntual, el recurso se puede convertir en un dolor de cabeza y lo que al parecer es motivante para los niños y las niñas se puede volver para ellos y ellas en una tortura.

Un ejemplo claro de esta situación lo presencié en una escuela donde la maestra les dejó a los niños de tarea “plantear 50 sumas de fracciones utilizando las fichas del tangram, en cada caso dibujarlas y dibujar la suma y además construir una o varias figuras con las fichas que arman la solución”. Otra situación similar viví cuando una amiga me trajo a su niño para que le orientara el desarrollo de una tarea: “construir un tangram igual al tangram chino, pero con seis piezas más”, el niño afirmaba que le era imposible hacer la tarea porque si el nuevo tangram debía ser igual al tangram chino, ¿cómo podía tener seis piezas más? No pude más que maravillarme con el ejercicio de interpretación del lenguaje que estaba haciendo el niño, y entonces con su mamá tomamos la mala decisión de enviarlo con ese interrogante donde la maestra, quien lo evaluó con insuficiente y además le citó a la mamá para decirle que ella estaba impidiendo que el niño desarrollara la creatividad y que además con su actitud permisiva y displicente estaba logrando que el niño no le dejara hacer la clase; cuando la señora me contó decidí ir personalmente a hablar con la maestra y al interrogarla sobre el por qué y el para qué de esa tarea… ella, no supo responderme nada; finamente nos tocó dejar así por sugerencia del director de la escuela quien nos dijo que nos estábamos ahogando en un vaso de agua y que con nuestra actitud lo único que lograríamos sería perjudicar al niño.

Situaciones como estas; el trabajo con los niños, profesores de educación básica y media, profesores en formación, motivaron la realización de este trabajo, cuya pretensión es mostrar algunas posibilidades que tiene el tangram para orientar cursos de acción pedagógica y proyectos de aula centrados en el desarrollo de habilidades de pensamiento más que en la enseñanza de contenidos declarativos.

Con los tangrams he logrado desarrollar actividades que cubren desde el nivel preescolar hasta la educación superior para desarrollar temas específicos, como por ejemplo perímetro y área de figuras planas, el concepto de fracción y las operaciones entre ellas, las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°, el desarrollo de algunas habilidades de pensamiento como: comparación, clasificación, inducción, deducción, y actividades de matemática recreativa.

Cabe anotar que a lo largo de este proceso de investigación he diseñado otros tangrams y puesto en uso algunos que aunque no están en el mercado ni son tan conocidos como el tangram chino, ofrecen valiosas oportunidades de desarrollo como el *juego de los ocho elementos* o *tangram triangular* que es el recurso fundamental utilizado durante el desarrollo de este taller.

Ideas fundamentales que guían los modos de pensar el área de una superficie en este trabajo

Desde el modo Sintético Geométrico para el Área de Regiones Planas SG-ARP (Mosquera 2020) se asume que dos superficies tienen la misma área cuando son equidescomponibles, es decir … es posible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales pueden rearreglarse para formar la otra (Moratalla, 1989), por esa razón en este taller son procesos fundamentales: reconocer, superponer, desplazar, medir y transformar superficies.

Desde un modo Analítico Estructural AE-ARP tomamos la definición axiomática de área que se presenta en el Cálculo de Apostol V. 1 (Apostol y Cantarell, 1999. P.73).

Supongamos que existe una clase $\mathscr{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto *a*, cuyo dominio es $\mathscr{M}$, con las propiedades siguientes:

1. *Propiedad de no negatividad*. Para cada conjunto S de $\mathscr{M}$, se tiene $a(S) \geq 0$.
2. *Propiedad aditiva*. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$, también pertenecen a $\mathscr{M}$, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene $a(S \cup T)= a(S)+a(T)- a(S \cap T)$.
3. *Propiedad de la diferencia*. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$ siendo $S \subseteq T$, entonces $T- S$ está en $\mathscr{M}$, y se tiene $a(T- S)=a(T)- a(S)$.
4. *Invariancia por congruencia*. Si un conjunto S pertenece *a* $\mathscr{M}$ y T es congruente a S, también T pertenece a $\mathscr{M}$ y tenemos $a(S) = a(T)$.
5. *Elección de escala*. Todo rectángulo R pertenece a $\mathscr{M}$ Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$.
6. *Propiedad de exhaución*. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que $S \subseteq Q \subseteq T$ Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades $a(S) \leq c \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan $S \subseteq Q \subseteq T$ entonces Q es medible y $a(Q) = c$.

Estos axiomas nos permiten asignar al área de un conjunto medible un número positivo o nulo; determinar relaciones numéricas para el área de diversas regiones, también nos da la posibilidad de ordenar, sumar, restar y en particular aproximar la medida del área usando el método de exhaución y asignar área igual a cero a cualquier recta o segmento de recta. Las ideas que subyacen a estos axiomas pueden ser ilustradas para facilitar su comprensión utilizando un tangram.

En el trabajo de Aguilera y Flórez "*comparación de áreas de figuras por estudiantes de primero de magisterio*" se establece una diferencia fundamental entre la *magnitud superficie* y el *proceso de medir la magnitud superficie*:

"La magnitud superficie como el conjunto cociente T/R = M, con una operación interna, suma, y una relación de orden #, compatible con la suma, es decir, (M, +, #). T es el conjunto de los polígonos del plano y R es la relación definida en T como sigue: Sean p y p' elementos de T: pRp' ⇔ existen dos descomposiciones T1, T2, ..., Tn de p y T1', ..., Tn' de p y p', respectivamente, tal que un movimiento del plano que transforma Ti en Ti'. La suma definida en

M: [p]+[p’] = [q ∪ q’], donde q y q’ son representantes de dichas clases (llamadas cantidades de superficie), con la condición de ser contiguos. En M podemos definir una operación externa B, sobre un semianillo A, de manera que estructure a M de semimódulo.

Medir la magnitud superficie consiste en representar cada una de las cantidades por un número, de modo que a cada cantidad le corresponda un número y recíprocamente. Para ello se fija una cantidad [u] = U de M, a la que se llama unidad, y comparamos cualquier cantidad de M con ella, por medio de la operación externa. Es decir, la medida es un isomorfismo que conserva el orden, entre el semimódulo M y el semimódulo A”.

El modo Analítico Aritmético consistente en expresar el área de una región a partir de una fórmula que permite calcular AA ARP, es el que se usa más comúnmente, de manera general las personas asocian el área con una fórmula, dejando de lado los procesos de medición tan importantes para desarrollar el pensamiento.

Otras ideas fundamentales son: el concepto de área no depende de la forma y los conceptos área y superficie no son sinónimos, de ahí la importancia de comprender las propiedades inherentes a la magnitud superficie; las fórmulas que usamos para calcular el área son relativas porque dependen de la unidad de medida que elijamos, por ello para desarrollar esta idea fundamental, en algunos apartes usaremos el *triángulo equilátero* de lado una unidad como unidad de medida de la superficie, triángulos consecutivos, cadenas de triángulos y polígonos equivalentes.

El tangram triangular o juego de los ocho elementos.

El juego de los ocho elementos es un tangram de ocho piezas que resultan al hacer cortes especiales en un triángulo equilátero, su objetivo al igual que el de los otros tangrams es formar con sus ocho elementos determinadas figuras que pueden ser geométricas o no, atendiendo al principio de utilizar siempre las ocho y no colocar una sobre la otra. A diferencia del tangram chino la persona que diseñó este nuevo tangram pensó en que todas las piezas fueran diferentes, éste hecho, y el de que tenga una pieza más, hace que las figuras sean más difíciles de armar mejorando así la capacidad mental, la ubicación espacial y el razonamiento.

Para construirlo, el triángulo equilátero se divide en 36 triángulos que también son equiláteros (como se muestra en la Figura #1) cada uno de ellos se llama triángulo básico y si lo tomamos como unidad de área se observa que las áreas de las respectivas figuras son 1,2,3,4,5,6,7, y 8, triángulos básicos. Cada una recibe el nombre según su área. (ver Figura #2)

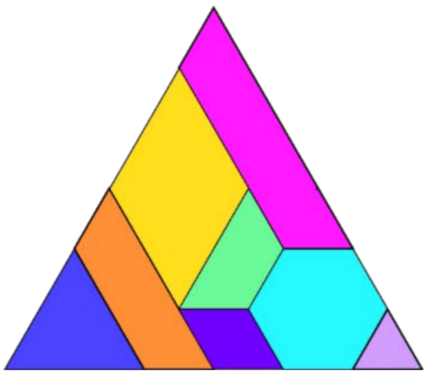


Figura 1. Tangram triangula o juego de los ocho elementos

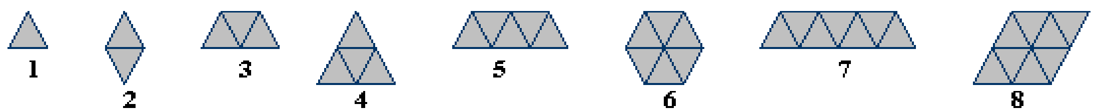


Figura 2. Piezas del juego de los ocho elementos

El hecho de que el triángulo básico de este tangram sea equilátero, hace que su estudio matemático sea mucho más sencillo, pues mientras en el tangram chino el triángulo básico tiene dos ángulos y dos lados de diferentes medidas; en éste, los tres ángulos y los tres lados tienen respectivamente las mismas medidas (esta ventaja se aprovecha fuertemente en la parte de álgebra).

Con este tangram el estudio de las fracciones como parte de la unidad y las operaciones entre ellas se puede ampliar ya que mientras en el tangram chino sólo se tienen las fracciones

$$\frac{1}{4}\square, \frac{1}{8}\square, \text{ y } \frac{1}{16}\square$$

y sus múltiplos; en este se pueden trabajar directamente las fracciones

$$:\frac{1}{36}\Delta, \frac{1}{18}\Delta, \frac{1}{9}\Delta, \frac{1}{6}\Delta, \frac{1}{4}\Delta, \frac{1}{3}\Delta, \frac{1}{2}\Delta$$

y sus múltiplos.

¿Cómo utilizo los tangrams para el desarrollo del pensamiento?

En la segunda parte del taller, propongo la comprensión de algunos conceptos básicos de álgebra utilizando el juego de los ocho elementos, lo primero es encontrar significado a expresiones algebraicas dentro de un contexto netamente geométrico, a través de la observación de cada una de las piezas que componen el tangram y su comparación con la figura base, asociando expresiones algebraicas a perímetros y áreas de figuras planas.

Posteriormente, demostraremos algunas identidades algebraicas y realizaremos ejercicios de mayor grado de complejidad como, por ejemplo: demostrar que con las piezas del juego de los ocho elementos solo es posible construir cinco polígonos convexos

Posteriormente trabajemos otro tipo de razonamiento con los tangrams reticulares, conexos y divisibles.

Referencias y bibliografía

Apostol, T. M., & Cantarell, F. V. (1999). Calculus: volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Reverté.

Castro Martínez, E., Flores Martínez, P., & Segovia Alex, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. Suma.

Chamorro, M.C. y Belmonte, J.M. (1989*). El problema de la medida*. Madrid, Síntesis.

Elffers, J. (1982): El tangram. Juego de formas chino, Labor, Barcelona.

Fernández Blanco, M. T. (2003). Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. Suma.

Luque, C. J., Mora, L. C., & Torres, J. A. (2006). El concepto de área.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Moratalla, P. T. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (3), 235-256.

Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática. Valparaiso: Ediciones Instituto de Matemática de la pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Russell, DS y Bolonia, EM (1982). Enseñanza de la geometría con tangramas. *El profesor de aritmética* , 30 (2), 34-38.

Segovia, I., Castro, E., & Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 10, 63-67.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Routledge.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education. In Activity and Sign, 117-135.

Siew, N.M.., Chong., C.L. y Abdullah., M.R. (2013). Facilitando el pensamiento geométrico de los estudiantes a través del aprendizaje basado en fases de van hiele utilizando tangram. *Revista de Ciencias Sociales* , 9 (3), 101.

Urrutia, M. C. M. (2000). De La Geometrıa al Algebra Pasando por el tangram. *Memorias del XI Encuentro de Geometria y sus aplicaciones*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Wang, F.T. y Hsiung, C.C. (1942). Un teorema sobre el Tangram. *The American Mathematical Monthly* , 49 (9), 596-599.

Valor y vector propio como concepto central de un curso de álgebra lineal

Natalia **Garzón**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
nataliagarzonl97@gmail.com
Solange **Roa F**uentes
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

Este documento muestra avances de una investigación que tiene como objetivo diseñar y desarrollar el ciclo de investigación de la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año (16 – 19 años). Para esto se exponen los elementos que componen la teoría APOE como referente teórico y metodológico de la investigación. Se describen los tres componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE que norman el diseño y desarrollo del proyecto. Finalmente se muestra un avance sobre el Análisis Teórico que destaca elementos cognitivos que sustentan el diseño del ciclo de investigación.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación universitaria; Valores y vectores propios; diseño de tareas; Álgebra lineal.

Introducción

El aprendizaje del álgebra lineal a menudo resulta difícil para los estudiantes, debido a la gran cantidad de nuevas definiciones, teoremas y operaciones. Según diferentes investigadores esto representa una fuerte carga cognitiva a la hora de comprender conceptos básicos de esta área de las matemáticas (Stewart et al., 2018; Thomas y Stewart, 2011; Oktaç y Trigueros, 2010; Dorier, 2000). La presentación tradicional de esta asignatura no evidencia un concepto de estudio que sirva de referente para el estudiante, en el caso de un curso básico de cálculo, dicho concepto puede ser el de derivada. Esto puede llevar a que el aprendizaje del álgebra lineal se base principalmente en la memorización y aplicación de algoritmos algebraicos que no permiten la reflexión del estudiante. En particular en esta investigación se estudian aspectos relacionados con la comprensión del concepto de valor y vector propio, que se propone como concepto central de un curso de álgebra lineal.

Los estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias que desarrollan en sus programas un curso de Álgebra Lineal de la Universidad Industrial de Santander (Colombia), no son ajenos a esta problemática. En dicha institución es posible encontrar diferentes y muy diversos contenidos y desarrollos dentro de los cursos, que no reflejan la naturaleza generalizadora y unificadora del álgebra lineal. Por tanto, el propósito de esta investigación es diseñar y desarrollar el Ciclo de investigación de la teoría APOE para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un primer curso de álgebra lineal de la Universidad Industrial de Santander. Nos referimos a un concepto central, como aquel concepto que para su construcción necesita conectarse con otros conceptos fundamentales de la disciplina; además, un concepto central debe permitirles a los estudiantes acercarse a la naturaleza generalizadora y unificadora, en este caso del álgebra lineal (Dorier et al., 2000). La importancia que tiene el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz simétrica se centra es las múltiples aplicaciones a la ingeniería, entre las que cabe destacar: el problema de la diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante, entre otras.

El concepto de valor y vector propio ha sido estudiado desde la perspectiva de la Educación Matemática desde hace casi dos décadas (Parraguez et al.,2020; Betancur, 2020; Karakok, 2019; Salgado y Trigueros, 2015; Gol Tabaghi, 2014; Thomas y Stewart, 2011). Es posible identificar categorías de estudio del concepto de vector y valor propio desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, estas están relacionadas con: la representación del valor y vector propio (Parraguez et al., 2020; Karakok 2019; Caglyan, 2015; Gol Tabaghi 2014); las dificultades relacionadas con lo algorítmico (Thomas y Stewart, 2011); el análisis de libros de texto (Betancur, 2020); y análisis cognitivos del valor y vector propio (Parraguez et al., 2020; Betancur, 2020; Karakok, 2019; Salgado y Trigueros, 2015).

Bajo este panorama, se propone el siguiente objetivo de investigación: Diseñar y desarrollar el ciclo de investigación de la teoría APOE para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un curso de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander. A continuación se describen los principales referentes teóricos, así como algunos avances en el diseño del Ciclo de investigación.

Teoría APOE: Constructos teóricos y metodológicos

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de la Educación Matemática desarrollada en sus inicios por Ed Dubinsky y el grupo de investigadores de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés). Dubinsky toma el concepto de Abstracción Reflexiva planteado por Piaget, para explicar principalmente cómo un individuo pasa de un estado de conocimiento a otro (Arnon et al., 2014). La teoría APOE es una teoría cognitiva que permite describir cómo un estudiante puede comprender los conceptos matemáticos y aporta aspectos clave para su enseñanza. Para esto define constructos teóricos principalmente identificados como mecanismos y estructuras mentales que organiza y relaciona en modelos cognitivos definidos como: Descomposiciones Genéticas.

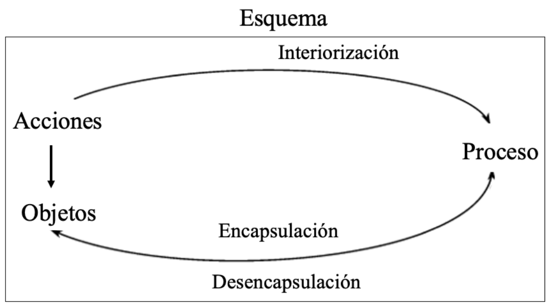


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al., 2014, p.18)

La Figura 1 muestra las estructuras mentales y la manera como se relacionan a través de mecanismos que propician su construcción. La construcción de un concepto puede iniciar por la aplicación de Acciones como las estructuras más básicas, pero no menos importantes, que pueden dar paso a la construcción de un concepto o noción matemática. Una Acción es una transformación o un conjunto de transformaciones que pueden ser aplicadas sobre un Objeto construido previamente. Las Acciones son percibidas por el individuo como algo externo. Esta estructura se caracteriza generalmente por realizarse paso a paso en un orden específico; en diferentes investigaciones las Acciones se han relacionado con la aplicación de algoritmos o procedimientos. Una Acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. La teoría APOE propone que la evolución de las Acciones surge a partir de la reflexión que el individuo potencia gracias a su experiencia aplicándolas repetidamente al resolver situaciones que involucran el concepto en construcción. Las transformaciones que se aplican gracias a un estímulo externo se interiorizan en un Proceso, la interiorización es el mecanismo que permite la reflexión del individuo sobre aquello que realiza. Tal como menciona Dubinsky (1997):

> Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas. (p. 96)

La estructura Proceso es una Acción interiorizada, que el individuo ya no tiene que realizar paso a paso. Como resultado de la interiorización, el individuo reflexiona previamente para determinar el alcance o validez de cada paso que antes realizaba en la Acción. Así, puede decidir si aplicar o no todos los pasos o hacerlo en un orden diferente. Los Procesos se explican desde la teoría APOE como el resultado de la interiorización de Acciones o como la coordinación de dos o más procesos. El mecanismo de coordinación permite poner dos o más Procesos juntos y estructurarlos en un único Proceso. La importancia del mecanismo de coordinación radica en que la evolución de las estructuras asociadas a la construcción de un concepto matemático, requieren de un único Proceso para dar paso a su encapsulación y por ende a su evolución en un Objeto. Un Proceso evoluciona en un Objeto gracias al mecanismo de encapsulación; este mecanismo permite el paso de una estructura dinámica a una estática. De tal manera que el foco de atención del individuo está en determinar el tipo de nuevas Acciones que son posibles aplicar sobre él para generar Objetos de la misma naturaleza. Otra manera de promover la encapsulación se relaciona con estructurar el concepto como un elemento que pertenece a un conjunto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; 2012).

A continuación, se presenta el Ciclo de investigación que guía el diseño y desarrollo de esta investigación.

Ciclo de Investigación

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que fundamenta el diseño, la implementación y validación de descomposiciones genéticas. Este ciclo está compuesto por tres componentes: i. Análisis teórico, ii. Diseño e implementación de un modelo de clase y iii. Recolección y análisis de datos. A continuación, se describe el diseño de cada componente y se muestran los primeros avances de la investigación.

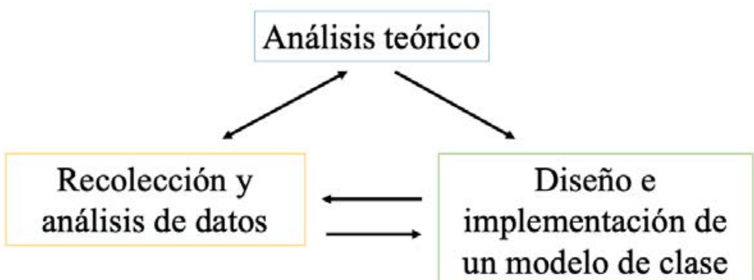


Figura 2. Ciclo de investigación (adaptado de Arnon et al., 2014, p. 94)

Análisis Teórico

El análisis teórico en esta investigación parte de una reflexión sobre la necesidad de organizar el desarrollo curricular de un curso de álgebra lineal que hace parte del programa de estudiantes de ingeniería y ciencias en una universidad pública de Colombia. Para esto se toman como referentes de estudio diferentes investigaciones en didáctica del álgebra lineal, que incluye: el análisis de libros de texto, la identificación de dificultades, el estudio de aspectos epistemológicos y análisis cognitivos de conceptos fundamentales del álgebra lineal.

Como un primer resultado de los elementos estudiados en esta componente, se decide tomar el concepto de valor y vector propio como concepto central que guía el desarrollo conceptual del curso.

Dado que el resultado principal de esta componente consiste en una descomposición genética, se toman como referente los análisis construidos previamente sobre el concepto de valor y vector propio y se destacan aspectos para tener en cuenta. Además, se parte de tres descomposiciones genéticas sobre el concepto de valor y vector propio (Salgado y Trigueros, 2015; Parraguez et al., 2020; Betancur et al., 2022) para destacar las relaciones que logran establecer con conceptos como: sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal y transformación lineal. Con base en lo anterior se quiere diseñar un modelo cognitivo genérico que destaca la construcción del valor y vector propio como eje central de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año.

Diseño e implementación de un modelo de clase

Esta componente parte de la reflexión sobre los contenidos fundamentales del curso, a partir del estudio de diversos análisis teóricos desarrollados previamente y que se asocian principalmente con el concepto de valor y vector propio. En esta investigación participan un promedio de 30 estudiantes universitarios de primer año que desarrollan un curso de álgebra lineal (16-25 años) de la Universidad Industrial de Santander, ubicada en Bucaramanga (Colombia). Para desarrollar esta componente se toma como fundamento el ciclo ACE, este ciclo es considerado por la teoría APOE como una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) Actividades; (C) discusión en el aula; (E) Ejercicios.

Las actividades que se proponen buscan potenciar la construcción de cada uno de los conceptos requeridos para desarrollar el concepto de valor y vector propio, apoyadas en las de estructuras mentales de la descomposición genética preliminar. Para esto se toma la definición de Tarea dada por Trigueros y Oktaç (2019):

> Para nosotros, una tarea matemática, una situación problemática o una actividad pueden implicar diversos grados de profundidad de conocimiento y razonamiento matemático, así como conexiones con conceptos en dominios no matemáticos, según los objetivos de investigación o enseñanza que se persigan. Nuestro enfoque será, desde una perspectiva APOE, en los principios de diseño que motivan la construcción de conceptos específicos (p. 2).

El desarrollo de las tareas se hará de manera grupal e individual, se realizarán cada dos semanas durante el desarrollo de un semestre académico con duración aproximada de dos horas. Para las actividades grupales se pedirá a los estudiantes conformar grupos de tres que permanecerán constantes todo el semestre. Las tareas que se propone diseñar en esta componente buscan potenciar la construcción de cada uno de los conceptos requeridos para desarrollar el concepto de valor y vector propio, apoyadas en las de estructuras mentales de la descomposición genética preliminar. Con base en la discusión en clase, se espera que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando y construyan estructuras mentales que fomenten la comprensión de los conceptos.

Recolección y análisis de datos.

En esta investigación se realiza una constate toma de datos a través de la aplicación de cuestionarios de clase y entrevistas didácticas individuales y grupales que buscan determinar el avance de los estudiantes en la comprensión de conceptos relacionados al valor y vector propio. Cada vez que se aplican estos instrumentos se retroalimente la componente anterior y se toman decisiones sobre el desarrollo del curso. Además, la descomposición genética propuesta en la primera componente se refina, esto permite describir con mayor detalle las estructuras y los mecanismos considerados inicialmente.

Comentarios finales

Los resultados de esta investigación se consideran fundamentales para las decisiones de diseño y desarrollo de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año. Esto dado que permite guiar el desarrollo de los contenidos, establecer la naturaleza de las tareas y por tanto el nivel de comprensión que los estudiantes pueden alcanzar sobre los principales conceptos del álgebra lineal. Esta investigación busca establecer una conexión entre los resultados teóricos ofrecidos desde APOE en Educación Matemática y la práctica de las aulas de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory a framework for research and curriculum education. *New York: Springer Netherlands*.

Betancur, A. (2020). Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Betancur, A., Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y los eigenvectores refinación de un modelo cognitivo. *AIEM – Avances de investigación en educación matemática*, 22, 23 – 46. https://doi.org/10.35763/aiem22.4005

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131-153.

Campos, V. (2017). Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. a (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 1–81). *Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers*.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA*, 85- 106.

Gol, S. (2012). Dynamic geometric representation of eigenvector. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 53 –58).

Karakok, G. (2019). Making connections among representations of eigenvector: what sort of a beast is it? *ZDM*, *51*(7), 1141-1152.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 199-232.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(1), 89-112.

Salgado, H. (2015). El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal. Instituto Politecnico Nacional, Mexico.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209–246). *Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.*

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. *Springer*.

Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. 23, 275 - 296.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55.

Índice alfabético de autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje

Volumen 2, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

ISBN: 978-9945-18-786-1

9 789945 187861

https://ciaem-iacme.org