EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Investigación

Volumen 10, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

Patrick Scott, Yuri Morales
y Angel Ruiz
Editores

CIAEM
IACME
desde - since 1961

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Investigación
[Volumen 10, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-794-6
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática*** **(XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: "un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas" (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con "sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo". Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional.*

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

El presente volumen es parte de la colección digital *Educación Matemática en las Américas 2023*, que corresponde a las *Memorias* de la *XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (celebrada en Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023).

Los diez volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Estos volúmenes se pueden revisar o descargar gratuitamente en la página ***Memorias XVI CIAEM*** del sitio principal del CIAEM.

A compreensão de termos e conceitos estatísticos contribuindo para o ensino de estatística: O que é censo e qual é a sua utilização?

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do ABC
Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br
Sandra **Salerno**
Universidade Federal do ABC
Brasil
sandrasalernosa@gmail.com
Luzia Roseli da Silva **Santos**
Universidade Federal do ABC
Brasil
luziaroselidasilvasantos@gmail.com
Ana Meiri de Oliveira **Morais**
Universidade Federal do ABC
Brasil
moraisanameire@gmail.com

Resumo

As competências derivadas da matemática tradicional, como a estatística, ganharam um papel importante nos últimos anos. O objetivo fundamental deste artigo foi analisar se alunos do Ensino Fundamental de uma escola no município de São Paulo, Brasil, compreendem o conceito de Censo e para o que ele é utilizado. Para a investigação, o problema foi abordado a partir de uma abordagem qualitativa, em uma análise textual multivariada, por meio da aplicação de um questionário a uma amostra composta por 44 alunos do ensino fundamental (11 a 14 anos) de uma escola pública da cidade de São Paulo. Os resultados finais revelaram que por meio da Classificação Hierárquica Descendentes - CHD, percebe-se que os alunos no processo de resolução da questão se apropriaram do significado de censo e sua utilização no dia a dia, bem como indica a apropriação de conceitos estatísticos que são importantes para a sua formação como cidadão.

Palavras-chave: Educação Estatística; Conceitos estatísticos; Censo; Ensino Fundamental; Análise textual multivariada.

Introdução

Partimos da premissa de que o ensino da estatística tem sido considerado, sob diversos pontos de vista, como aspecto essencial na formação elementar de cada pessoa, levando em conta que facilita os processos de interação com seu meio, seja por necessidades profissionais ou acadêmicas, possibilitando a análise oportuna e diferencial em busca de alternativas diversas em cada um de seus espaços de atuação.

Além disso, para Sosa & Astudillo (2010), como a estatística se tornou uma área interdisciplinar, conceitos formulados a partir de algumas áreas ou ciências, como as sociais, entre outras, podem ser encontrados de tal forma que em muitas ocasiões nos mesmos textos podem encontrar-se conflitos que não coincidiriam com aqueles que surgem da matemática. Para Tauber (2010), os conceitos estatísticos são transformados em insumos valiosos para uma área inexplorada por alguns, onde termos que parecem tão simples como média, variabilidade, distribuição, correlação, entre outros, são na verdade produto do exercício prático de outras mentes, havendo a transformação desses preceitos em diretrizes teóricas que foram reformuladas ao longo do tempo para torná-los mais compreensíveis para estudantes ou indivíduos de hoje.

Complementando essas ideias, para Pèrez (2010), a construção de um conceito estatístico parte dos conhecimentos prévios dos alunos e da forma como estes são reestruturados em significados compreensíveis, partindo de discursos, explicações ou exercícios que partem de concepções cotidianas e se integram à interpretação que deve ser dada em um determinado contexto, para poder prever ou organizar informações, que, tratadas adequadamente, tornam-se formas de aplicação do conhecimento para a solução, análise e definição de situações de sua realidade.

Em virtude disso, nossa questão de pesquisa é indicada pela relevância em compreender adequadamente conceitos estatísticos e assim, fornece mecanismos que visam fortalecer a pedagogia nesta área do conhecimento. Diante do exposto, surge a principal questão norteadora do estudo: Qual o domínio dos alunos do ensino fundamental (11 a 14 anos) associado à compreensão dos conceitos estatísticos que devem ser ensinados em sala de aula?
Assim, o objetivo desse estudo foi identificar o que alunos dos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro (11 a 14 anos) de uma escola no município de São Paulo, conhecem sobre o significado da palavra censo e para o que ele é utilizado.

Marco teórico

Carraher & Schliemann (2016) afirmam que os conceitos são aqueles que facilitam a aprendizagem profunda, a compreensão e o ensino de áreas-chave do conteúdo matemático e promovem desenvolvimentos-chave a longo prazo. Parece, então, que uma ideia é fundamental na medida em que contribui para a aprendizagem do aluno, bem como as habilidades e conceitos que se espera que promova.

No caso da estatística, Garfield & Ben-Zvi (2008) defendem o foco nas ideias fundamentais e suas inter-relações. Sugerem apresentar essas ideias ao longo de um determinado curso, revisando-as em diferentes contextos, ilustrando suas múltiplas representações e relações para auxiliar os alunos a reconhecer como a estrutura de suporte do conhecimento é formada.
No caso do conceito e significado de Censo, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (Brasil, 2010), indica-se que é um levantamento (recenseamento) de natureza demográfica e social, destinado a recolher informações as mais diversas sobre as características básicas da população que compõe o país. Entre as informações coletadas e computadas estão o número de homens, entre o total da população, o número de crianças, mulheres, ou ainda o número de indivíduos em suas diferentes faixas etárias (relativo à idade), ou mesmo a aferição do número de habitantes empregados ou aposentados, indivíduos de classes ricas, médias e pobres.

Para o IBGE *Educa@* (Brasil, 2022), o Censo Demográfico é realizado para que se possa conhecer quantos são os brasileiros, como são e onde vivem, por meio da coleta de informações em todos os domicílios de todos os municípios do Brasil. No Censo, são realizadas diversas perguntas sobre temas variados como Educação, Trabalho, Deficiência, cor ou raça, características dos domicílios, entre outras. Essa é a pesquisa mais abrangente do IBGE e gera informações para todos os municípios do Brasil. O Censo serve para retratar o Brasil e, assim, contribuir para que melhores decisões possam ser tomadas para o país. As informações do Censo são fundamentais para atualizar o conhecimento sobre a sociedade e o melhor planejamento de decisões tanto na esfera pública quanto nos outros setores.

Metodologia

Esta pesquisa é do tipo exploratório, de abordagem qualitativa e quantitativa por meio de questionário disponibilizado pelo *Google Forms* e analisado pelo *software* IRaMuTeQ (Interface R para Texto Multidimensional e Análise de Questionário) para identificar o que 44 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro (11 a 14 anos) de uma escola no município de São Paulo, conhecem sobre o significado da palavra censo e para o que ele é utilizado. A média de idade dos alunos é de 12,8 anos com desvio padrão de 1,01 anos, considerando também que se encontram na faixa etária esperada para esse nível de ensino; sendo que a maioria dos alunos tem idade entre 12 e 14 anos (86,3%).

Buscamos analisar os dados partindo da investigação dos termos e expressões escritas que tenham provocado nos alunos, o pensar e expressar por meio da escrita a sua compreensão intuitiva do que é censo e a sua utilização no dia a dia de um cidadão.
Em vista do objetivo deste trabalho buscamos identificar de que forma os alunos concebem, a partir do conhecimento do dia a dia e/ou do que aprenderam na escola, o significado ao termo *Censo* em Estatística e para o que ele é utilizado, por meio da realização de análises textuais, utilizando *software* IRaMuTeQ, qual seja, a Classificação Hierárquica Descendente – CHD.

O referido software, foi utilizado para realizar uma análise lexical quantitativa que considera a palavra como unidade, também oferecendo a sua contextualização no *corpus* ou no instrumento de pesquisa ou questionário. A pergunta realizada foi composta por conteúdos semânticos que formaram o banco de dados ou *corpus* analisado pelo *software*. Na aplicação do método da CHD, os textos ou respostas dos alunos foram classificados em função dos seus respectivos vocabulários, e o conjunto deles foi dividido em função da frequência das formas reduzidas. Em outras palavras, a CHD permitiu a análise das raízes lexicais e ofereceu contextos em que classes estão inseridas, de acordo com o segmento de textos do *corpus* da pesquisa (Camargo & Justo, 2013) ou ainda visou obter classes de segmentos de texto que apresentam vocabulário semelhante entre si, e diferente dos segmentos de texto das outras classes (Camargo, 2005).

Resultados

Utilizamos a interpretação sobre os resultados por meio da CHD que se sustenta na hipótese de que o uso de formas lexicais similares se vincula a representações ou conceitos comuns, no caso o de Censo. Assim, por meio dos resultados gerados pelo IRaMuTeQ, foi possível identificar que as partições que foram feitas no *corpus* do texto chegassem a duas classes finais, sendo que a Classe 1 representa 37,5% do *corpus* total e a Classe 2 representa 62,5%, identificado pelo dendrograma da Figura 1.

Portanto, as duas classes contêm as formas ativas ou palavras organizadas que apresentaram maior frequência, em ordem decrescente, e que são significativas para representar cada uma das classes por meio do teste de associação quiquadrado gerado nos relatórios do IRaMuTeQ, ou seja, a maior aderência delas na classe e entre as classes. O objetivo desta análise foi identificar como foi realizada a construção do discurso que compõe o *corpus* textual, identificando a estrutura base que relaciona as formas assim como, os temas por grau de relevância que conectam as partes importantes que caracterizam os textos contidos na base de dados.

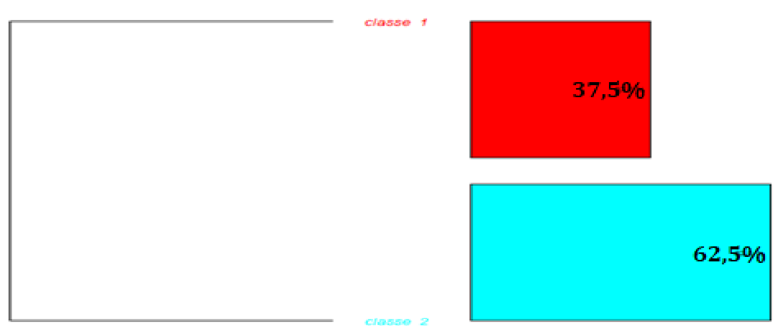


Figura 1. Dendrograma referente ao significado ao termo *Censo* em Estatística e para o que ele é utilizado, indicados pelos alunos do Ensino fundamental.

Em continuidade, indicamos as respostas de alguns alunos que geraram a Classe 1, na qual chamaremos de "Censo como recolhimento e estudo de informação referente à uma população" apresentando as associações do substantivo masculino "Informação" com as seguintes palavras periféricas: (1) substantivo feminino "População"; (2) substantivo masculino "Recolhimento"; (3) substantivo masculino "Estudo"; (4) substantivo feminino "Mulher"; (5) substantivo masculino "Homem"; (6) substantivo feminino "Criança", dentre outros. As destacamos por meio de fragmentos das falas de alguns alunos: 1) "É um estudo estatístico de uma população e que possibilita o levantamento de dados de várias informações, sendo alguns o número de homens, mulheres, crianças e idosos, onde e como vivem as pessoas, cor de pele, idade, se são alfabetizados, quantos trabalham. Esse estudo é realizado, normalmente, de dez em dez anos, na maioria dos países"; 2) "É um recolhimento de várias informações da população; serve para saber a quantidade de pessoas em municípios e suas condições de vida"; 3) "É uma equipe que reúne informações de mulheres, crianças, adolescentes". 4) "Ele reúne informações da população em geral"; 5) "Serve para recolhimento de dados de uma determinada cidade, estado ou país, como número de habitantes que moram em certa cidade", quantos homens e mulheres vivem naquela região".

As respostas de alguns alunos que geraram a Classe 2, que chamamos de "Censo como, por exemplo, o conjunto de dados dos habitantes de uma nação, estado, cidade, ou província" apresenta as associações do substantivo masculino "Dado" com as seguintes palavras periféricas: (1) substantivo de dois gêneros "Habitante"; (2) substantivo feminino "Cidade"; (3) substantivo masculino "Estado"; (4) substantivo feminino "Nação"; (5) substantivo masculino "Conjunto" e (6) substantivo feminino "Província". Destacamos por meio de alguns fragmentos de fala a descrição dessa classe: 1) "É o conjunto de dados estatísticos que informa diferentes características dos habitantes de uma cidade, um estado ou uma nação"; 2) "Conjunto dos dados estatísticos dos habitantes de uma cidade, província, estado, nação, ele é usado para populações que possibilita o recolhimento de várias informações"; 3) "Nunca tinha ouvido falar muito dessa palavra, mas para mim tem a ver uma pouco sobre conjunto de dados"; 4) "Vem do latim *census* e quer dizer conjuntos de dados estatísticos de habitantes de uma cidade, província, estado e nação; para saber informação do povo, quantos homens, crianças e idosos e como eles vivem"; 5) "Significa conjunto de dados como principal fonte sobre a situação da vida da população".

Podemos observar que as respostas são de certa forma homogêneas, visto que as pesquisas foram feitas através do *Google* e em *sites* que apresentam conteúdos parecidos e que se referem ao censo como um conjunto de dados estatísticos ou estudo estatístico que levanta informações numéricas sobre a quantidade de pessoas, seja homens, mulheres ou crianças. Vale destacar que é possível fazer diversos censos: eleitoral, escolar, agropecuário, demográfico, entre outros.

No caso de nosso estudo, percebe-se que, como foi proposto aos alunos pesquisa em *link* do IBGE[1], estes trouxeram definições e aspectos voltados ao censo demográfico e apresentando algumas variáveis que são buscadas nesse tipo de censo. Os alunos, em linhas gerais, indicam que censo ou recenseamento (demográfico) é uma pesquisa sobre a população de um determinado país ou território e que possibilita a coleta de diversas informações, tais como o número de habitantes, o número de homens, mulheres, crianças e idosos, onde e como vivem essas pessoas e o trabalho que realizam, entre outros aspectos. Esse estudo é realizado normalmente a cada dez anos na maioria dos países, bem como no Brasil pelo IBGE.

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU)[2], os censos estão entre os exercícios mais complexos e massificados com que uma nação se compromete. Requerem o mapeamento de todo o território, a mobilização e formação de muitos profissionais, a realização de uma vasta campanha pública, a adesão da população, a coleta de informação individual, a compilação de grandes quantidades de informação e a análise e divulgação de um vastíssimo número de dados.

[1] https://ibge.gov.br/ibge/estaitistica/popula%C3%A7%C3%A3o/cen
[2] https://unstats.un.org/unsd/demographic-social/census/

Os Censos integram um sistema estatístico nacional, incluindo, por exemplo, inquéritos, registros e arquivos administrativos. Fornecem, em intervalos de tempo regulares, o valor de referência da contagem da população, a nível nacional e local[3]. Para as pequenas áreas geográficas ou subpopulações, podem constituir a única fonte de informação para um conjunto alargado de características demográficas, socioeconómicas e no domínio da habitação[4].

Considerações finais

Para discutir os resultados desse agrupamento de atividades, partimos das considerações realizadas pela BNCC (Ministério da Educação, 2018) quando indica que a aprendizagem em matemática nos anos finais do Ensino fundamental (11 a 14 anos) está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Destaca-se que esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas estatísticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, é necessário destacar a importância da comunicação em linguagem estatística com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Além disso, os recursos e materiais didáticos precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos estatísticos.

Indicamos que por meio das análises textuais multivariadas, a CHD, percebe-se que os alunos no processo de resolução da questão se apropriaram do significado de censo e sua utilização no dia a dia, bem como indica a apropriação de conceitos estatísticos que são importantes para a sua formação como cidadão, convergindo para as indicações de Carraher & Schliemann (2016) e Garfield & Ben-Zvi (2008).

Ainda sugerimos o desenvolvimento de outra atividade considerando o conceito de censo segundo proposta de Franklin et al. (2007), ou seja, selecionar, por exemplo, um grupo musical para uma festa de final de ano de uma turma do Ensino fundamental, conduzindo um censo de classe e respondendo à pergunta de investigação estatística: De que tipo de música as crianças da nossa série gostam? Ainda considerando essa proposta, poderíamos sugerir que os alunos buscassem informações, perguntando qual o tipo de música que gostam e imaginar se a festa desses grupos seria, ou não, diferente da que eles pensariam.

Referências e bibliografia

Brasil. (2010). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Censo 2010. IBGE | Censo 2010

Brasil. (2022). IBGE Educ@. Você sabe o que é o Censo? IBGE - Educa | Crianças | Você sabe o que é o Censo?

Camargo, B. V. (2005). ALCESTE: Um programa informático de análise quantitativa de dados textuais. In Moreira, A. S. P., Camargo, B. V., Jesuíno, J. C., & Nóbrega, S. M. (Eds.) *Perspectivas teórico-metodológicas em representações sociais* (pp. 511-539). João Pessoa: Editora da UFPB.

Camargo, B. V., & Justo, A. M. (2013). IRAMUTEQ: um software gratuito para análise de dados textuais. *Temas de Psicologia*, 21(2), 513-518.

[3] https://vocepergunta.com/library/artigo/read/687534-quais-os-dados-do-censo
[4] ttps://censos.ine.pt/xportal/xmain?xpgid=censos21_sobre_censos&xpid=CENSOS21&xlang=p

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary mathematics education. En L. English, & D. Kirshner (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 191- 218). New York: Taylor & Francis.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. www.amstat.org/education/gaise/

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning*: connecting research and teaching practice. Dordrecht: Springer.

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília, Brasil. BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (mec.gov.br)

Pérez, R. (2010). *Nociones básicas de estadística*. Ed. Universidad de Oviedo. https://www.researchgate.net/publication/274068801_Nociones_basicas_de_Estadistica

Sosa, J., & Astudillo, M. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos*: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación (Tesis doctoral presentada en la Universidad de Salamanca). DDMCE_PintoSosaJE_DidacticoRepresentacionContenidos.pdf

Tauber, M. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas*, 1(12), 53-74. 20220514-Template-Estilo-CIAEM-ciego-Portugues-Ailton_Luzia-Sandra.docx

Abordagem sobre frações: uma análise do Contrato Didático como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5 º ano do Ensino Fundamental

Maria das Dores de **Morais**
Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
dora.pe@gmail.com

Resumo

Esse artigo é recorte de uma tese, objetivou analisar o contrato didático estabelecido como fator de influência no desempenho de frações dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em duas escolas municipais do estado de PE -Brasil. Para fundamentar, usamos a Teoria das Situações Didáticas, em especial, o conceito de contrato didático, pois esse fenômeno se circunscreve na relação do triângulo didático (professor, estudantes e saber). Para coletar dados, foram observadas aulas sobre frações. As análises dos dados nos deram indícios dos elementos constitutivos desse fenômeno, dentre eles: expectativas das professoras no conhecimento prévio dos estudantes sobre frações e seu aprofundamento; ocorrência dos efeitos: Topaze e Resposta mal compreendida; e o estabelecimento de regras: o numerador de uma fração deve ser sempre menor que o denominador, a ideia de fração enquanto divisão e dois números independentes, que denotaram o contrato didático como fator de influência no desempenho de frações.

Palavras-chave: Contrato Didático; Educação Matemática; Frações; Dificuldades

Introdução

O saber fração é parte das atividades humanas desde muito tempo. De outro modo, ele surgiu a partir das necessidades dos indivíduos, quando se depararam com medições de comprimento em que a unidade escolhida não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. No mundo contemporâneo, fração permeia as práticas sociais, inclusive, desde muito cedo. Dessa forma, sabe-se que as crianças já possuem um conhecimento intuitivo sobre ele, mesmo antes de chegarem à escola, baseando-se, essencialmente, em experiências vivenciadas no seu dia a dia (Cruz e Spinillo; 2014).

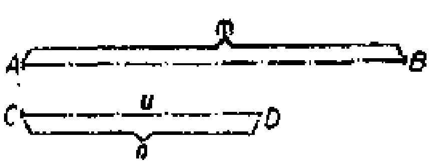
Apesar dos usos sociais, das articulações com outros campos e com outros conteúdos matemáticos, não é possível afirmar que eles são suficientes para a construção do conhecimento formal de fração. Segundo Powell (2019), a dificuldade no entendimento do número fracionário pode comprometer o progresso dos estudantes com outros conteúdos da área. Ademais, instrumentos avaliativos do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (Brasil, 2017) e Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco – SAEPE (Brasil, 2015-2019), aplicados aos estudantes brasileiros do Ensino Fundamental – EF, têm mostrado que eles apresentam um fraco desempenho no tocante à Matemática. Os indicadores de aprendizagem de desempenho têm evidenciado a problemática do fracasso escolar, na qual esse componente curricular tem se destacado pelos altos índices de reprovação e baixo rendimento escolar a ele associados. Na busca de entender melhor as raízes da problemática em levar os estudantes dos anos iniciais do EF a lidar adequadamente com frações, estamos a questionar se o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em função de seus elementos constituintes, pode nos ajudar a entender a relação existente entre esse fenômeno com a investigação de questões associadas ao fracasso escolar do saber escolar fração.[1]

Fundamentação Teórica

A Teoria das Situações Didáticas é utilizada por muitos professores para orientar a organização do trabalho pedagógico. Segundo Brousseau (1996), o seu foco é modelar situações de ensino e de aprendizagem de matemática adequadas para que a ação do estudante viabilize a construção do conhecimento. Diante disso, o autor propõe o triângulo das situações didáticas (BROUSSEAU, 1996).

Dele fazem parte: o professor, o estudante e o saber, caracterizados pelo dinamismo e pela complexidade que permeiam essa relação. Em relação a último elemento, o saber, no nosso caso, o escolar frações, é possível afirmar que esse conceito surgiu a partir de uma necessidade humana, em especial quando os indivíduos queriam saber, por exemplo, a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u, para o caso em que u não cabe um número inteiro de vezes em d. Nessa perspectiva, Caraça (1951) define esse novo número, conforme segue:

Sejam, fig. 1, os dois segmentos de reta AB e CD, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u - AB contém m vezes e CD contém n vezes o seguimento u.



[1] Iremos utilizar termo saber escolar fração ao longo do texto, por entendermos que "saber" é algo institucionalizado pela ciência. Dessa forma, podemos nos questionar se fração é um saber, visto que não existe na matemática, o que existe são os números racionais. Nesse sentido podemos considerar fração como um saber escolar. Além disso, consideramos como sinônimos os termos "fração" e "números fracionários".

Figura 1. Segmentos de recta $\acute{A}B$ e $\acute{C}D$. Diz-se, por definição, que a medida do segmento AB, tomando CD como unidade, é o número m/n e escreve-se: 1) AB = m/n.CD, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); sem for divisível por n, o número m/n coincide com o número inteiro que é cociente da divisão; sem não for divisível por n, o número m/n diz-se fracionário. Fonte: Adaptado de Caraça (1951, p. 35).

Pelo exposto, Caraça (1951) define um novo número, denominado de número fracionário, que associado aos números inteiros, originam o conjunto dos números racionais. Apesar dos usos sociais, das articulações com outros campos e com outros conteúdos matemáticos, não é possível afirmar que eles são suficientes para a construção do conhecimento formal de fração. Para Powell (2019), ao procurar trazer essa ideia para as práticas sociais, tais concepções fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido. Segundo o autor, a dificuldade no entendimento do número fracionário pode comprometer o progresso dos estudantes com outros conteúdos da área (Powell, 2019).

Diante desse contexto, percebemos a dificuldade relativa à aprendizagem desse saber escolar. Para Silva (2005) e Oliveira e Araman (2017), essa dificuldade pode ser observada tanto no processo de ensino quanto no de aprendizagem. Em geral, o fato é que existem entraves/limitações com que se deparam estudantes e professores. Pesquisas realizadas por Onuchic (2008) e Ponte e Quaresma (2014), dentre outros mostram que o ensino das frações constitui um dos temas matemáticos mais complexos com que os estudantes se deparam ao longo do ensino básico, por conta das suas diversas concepções, representações e pela própria natureza do número. Bertoni (2004); Morais e Landim (2019) ainda destacam que o trabalho excessivo com a ideia de parte e todo acentua essas dificuldades, já que ainda apresentam traços de uma abordagem tradicional.

Na busca de entender melhor as raízes da problemática em levar os estudantes dos anos iniciais a lidar adequadamente com frações, estamos a questionar se o CONTRATO DIDÁTICO, pode nos ajudar a entender a relação existente entre esse fenômeno com a investigação de questões associadas ao fracasso escolar. Entendemos esse fenômeno como um conjunto de comportamentos recíprocos esperados entre estudantes e professor, mediados por um saber específico. Em geral, esse construto teórico é visto como um fenômeno, pois emerge naturalmente no interior da sala de aula, quando um dado saber entra em cena e deve ser ensinado pelo professor. Podemos dizer que ele está intimamente relacionado à tríade estudante-professor- saber em uma relação didática (BROUSSEAU, 1986). O autor o define como os comportamentos do professor que são esperados pelos estudantes, e o conjunto dos comportamentos dos estudantes esperados pelo professor e ainda acrescenta: É uma relação que determina – explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo, implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o estudante, tem a responsabilidade de gerir, e então ele se tornará responsável, de uma maneira ou de outra, diante do outro. Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha- se a um contrato. (Brousseau, 1986, p. 51, tradução nossa).

Sendo assim, podemos dizer que as práticas e atitudes de professores e estudantes também estão imbuídas de um conjunto de regras, expectativas e normas, dentre outros elementos, a eles condicionantes diante do processo de ensino e aprendizagem. Isto quer dizer que é indiscutível o reconhecimento de elementos estabelecidos em relação aos sujeitos envolvidos e suas responsabilidades, que se parecem como cláusulas de um contrato pré-estabelecido e aceito por ambas as partes, quando se tem como objetivo construir conhecimentos.

Nos apoiamos em Almeida (2016) para entender alguns esses elementos citados, que denominamos de constitutivos do contrato didático: expectativas e regras, definidos pelo autor da seguinte forma: O primeiro, relaciona-se ao que o aluno espera do professor e ele espera do aluno em relação ao conhecimento em jogo. As regras podem ser vistas como explicitas e implícitas: as do primeiro grupo, são claras, expressas sem ambiguidade pelas partes em questão; as do segundo, são aquelas que não são explicitamente formuladas por um dos parceiros (quase sempre, o professor), mas que são construídas de forma mais subliminar e internalizadas pelos estudantes.

Em relação aos efeitos de contrato didático, Brousseau (1986, 1996, 2008); Henry (1991) e Pais (2008) os trazem à tona, cujos principais são: Topaze, Expectativa mal compreendida Jourdain, Uso Abusivo de Analogia e Deslize Metacognitivo. Nos deteremos nos dois iniciais, pois foram os encontrados no estudo. O Topaze acontece quando o professor, ao perceber os estudantes com dificuldades, tenta ajudá-los para que ele não cometa erros grosseiros e possa acertar, enquanto a expectativa mal compreendida, é entendida como aquela em que o professor acredita que a resposta do estudante será a que ele deseja.

Em geral, o que se tem percebido é que a existência desse fenômeno em sala de aula tem inspirado muitas investigações, especialmente as que têm por objetivo compreender o processo de ensino e aprendizagem. Uma dimensão importante do conceito de CONTRATO DIDÁTICO é que ele pode ser compreendido como um instrumento que pode auxiliar a análise das relações entre os elementos da relação didática: professor, estudante e saber. Por isso, consideramos importante estudá-lo como elemento teórico que pode nos ajudar a compreender o fracasso em relação à aprendizagem do saber escolar frações.

Metodologia

O estudo foi realizado com 42 crianças de duas turmas do 5º ano, com média de idade entre 09 e 14 anos. Ambos os grupos pertenciam a escolas públicas do município de Jaboatão dos Guararapes que apresentaram médias de proficiência SAEB (Brasil, 2017) abaixo das estaduais e nacionais. Para coletar os dados foram feitas audiogravações em aparelho smartphone, das aulas ministradas pelas professoras das duas turmas (Maria e Joana), de acordo com aceitação do termo de consentimento livre e esclarecido, assinados por elas. Ambas utilizaram seis aulas de 2h cada para trabalhar o conteúdo fração. Como material de análise, as aulas observadas e gravadas das professoras sobre o conteúdo frações, na perspectiva de identificar o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido, em função da Teoria das Situações Didáticas (Brosseau, 1996; 1998; 2008), com destaque aos componentes do Triângulo Didático: professor-estudante e saber, dentre outros. É importante salientar que direcionamos a gravação para as professoras e seus estudantes em atividades individuais ou coletivas, com o intuito de registrar as ações entre eles. Além disso, houve uma observação minuciosa e detalhada para a transcrição das aulas, em função do material coletado em áudio, com o objetivo de retratar naturalmente a realidade escolar vivenciada, particularmente o ambiente da sala de aula.

Esses registros nos deram indícios do fenômeno investigado, assim como sua relação com as dificuldades na aprendizagem de frações. Observamos, gravamos e transcrevemos as aulas das professoras (Maria e Joana), quando foi trabalhado o conteúdo fração. A análise desse material nos ajudou a verificar o contrato didático estabelecido como fator de influência no desempenho de frações dos alunos do 5º ano do EF em duas escolas municipais do estado de PE.

Resultados

Tomando com base os direcionamentos da TSD percebemos que em relação às situações de ensino, os exemplos utilizados foram bastante simples e limitantes, diferente do que vem sendo preconizado nos documentos curriculares PCN (Brasil, 1997) e BNCC (Brasil, 2017). Parece-nos que a escola ou a aula de Matemática têm o papel de provocar nos estudantes a tarefa de resolver "problemas" do cotidiano, geralmente o indivíduo nem precisa de escola ou do saber escolar para resolver tais problemas. Diferente disso, acreditamos que a proposta deve ser partir de situações cotidianas, com as quais os estudantes já convivem com maior familiaridade para favorecerem a construção de novos saberes e o desenvolvimento de competências que eles ainda não possuem.

Na análise entre os elementos do contrato didático e a influência na aprendizagem, observamos o estabelecimento de expectativas: A primeira, logo no primeiro dia, quando Maria e Joana começaram a aula lembrando que os estudantes já haviam estudado o conteúdo frações, mas na referida série eles fariam um estudo mais aprofundado. Este fato nos revela, de forma explícita, que o trabalho com o conteúdo frações já não era mais novidade para eles, ou seja, existiam expectativas por parte da professora de que se os estudantes já haviam estudado, o esperado era que já soubessem alguma coisa, como veremos no recorte a seguir:

Vamos começar hoje o assunto de fração. Para alguns não é assunto novo porque viram alguma coisa no 4º ano. Esse ano já falamos superficialmente sobre fração, sobre alguma receita que aparecia lá, algumas frações. Trabalhamos coisa pouca e agora vamos aprofundar (Professora Joana).

Uma segunda, ainda pautada nesse recorte, era de aprofundamento e compreensão dos diferentes significados de frações. Percebemos a adequação dessa expectativa com as orientações trazidas pelos documentos orientadores da escola básica, já que recomendam seu aprofundamento de forma gradativa, PCN (Brasil,1997), a partir do segundo ciclo e BNCC (BRASIL,2017) já iniciado no 2º ano do primeiro ciclo. Verificamos que essa expectativa não foi totalmente atingida, visto que as professoras trabalharam preponderantemente o significado parte-todo de frações.

Dentre os classificados por Brousseau (2008), foram observados dois deles: o primeiro foi o Topaze. Na tentativa de que os estudantes não errassem as respostas das perguntas realizadas, as professoras davam muitas dicas. A partir do momento em que forneciam essas pistas ao apontar as primeiras sílabas das respostas, incorria nesse efeito. Percebemos em muitos momentos que elas optavam por criar condições para dar as respostas aos estudantes, na expectativa de que eles avançassem em suas aprendizagens. Entretanto, esse comportamento fazia com que as professoras esquecessem do engajamento que eles deveriam ter no processo, visto que a resposta, que deveria ser pelos estudantes elaboradas, era antecipadamente determinada, como veremos nos recortes a seguir: "Professora Joana - Então eu digo que esse 1 é o meu número in... Aluno 1 - Inteiro. Professora Joana - Ainda nada... como eu leio isso aqui? Aluno 2 - Meio. Professora Joana - Meio ou me... Aluno 2 - Metade. Professora Maria - 50 dividido por 2, quanto dá? Faço 50/2, ou 50/2 (algoritmo) e encontro 25. Ela acertou então 25 questões, que é a me... Aluno1 – Tade"

Para Brousseau (1986), ao fornecer "pistas" e apontar antecipações por meio de dicas em sua fala no momento em que encontram dificuldades, faz com que eles não as superem nem avancem, esquecendo-se, porém, do engajamento necessário que deveriam ter nesse processo. O segundo, foi a resposta esperada ou expectativa incompreendida, podemos remetê-lo ao definido por Henry (1991) como efeito de expectativa incompreendida, entendido como aquele em que a professora acreditou que a resposta dos estudantes seria a que ela desejava.

Regras de Contrato Didático foram identificadas: A primeira, estabelecida explicitamente pelas professoras consistia em não ser possível dividir a fração quando o numerador fosse maior que o denominador. Professora Maria- Nessa aqui, por exemplo, tem o denominador maior que o numerador. 2/5. Posso dividir 2 laranjas para 5 pessoas? Aluno- Não. Apesar de não explicitar, observamos que a professora tinha essa regra internalizada, pois nas aulas iniciais apenas deu exemplos com frações em que o denominador era maior que o numerador. Os estudantes acabaram por internalizá-la também.

A segunda regra foi a noção de fração como dois números independentes, representados um sobre o outro. No decorrer das aulas, à medida em que as professoras tomaram como foco o denominador da fração e não a fração como um todo, levaram os estudantes à ideia de fração como dois números independentes. Para nós, essa situação dificulta a compreensão deles em ver fração como um número e favorece a ideia de seu conceito enquanto dois números, um que se escreve no numerador e o outro no denominador, comumente destacado por pesquisadores da área. É normal os estudantes perceberem a fração como uma combinação de dois números - numerador e denominador – e não como um número que exprime a relação entre a parte e o todo, em diferentes contextos e com significados variados (Powell, 2019).

A terceira, foi o trabalho excessivo com a concepção de fração enquanto parte e todo. Durante todas as aulas que observamos, esta foi majoritariamente a concepção apresentada pelas professoras. Bertoni (2004) destaca que um aspecto importante que acentua essas dificuldades são as escolhas do professor na apresentação desse conteúdo, já que ainda apresentam traços de uma abordagem tradicional.

A quarta e última regra foi a ideia de que o conceito de fração se resumia em uma divisão em partes iguais, como veremos no recorte a seguir. Professora - Agora, antes de continuar essa parte, se eu perguntar pra vocês o que é fração? O que vocês me dizem? Nós estamos estudando fração, pra chegar a uma fração nós fizemos o que com isso aqui? Nós fizemos o que com isso aqui? Estudante - Nós dividimos. Professora- Nós dividimos Professora - Mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual.

Observamos que a professora reforça a ideia construída pelos estudantes, e como o que ela diz é uma verdade para eles, constata-se o estabelecimento de mais uma regra de CONTRATO DIDÁTICO.

Para além das regras de CD identificadas, outra questão observada foi a ênfase em associar frações a situações relacionadas ao contexto dos estudantes, como a divisão de pizzas e chocolates. Para Powell (2019), ao procurar trazer essa ideia para as práticas sociais, associando-as a barras de chocolates, pizzas, dentre outras representações, como aconteceu nas aulas observadas, tais concepções fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido. Entretanto, o autor acrescenta que, para os alunos, essa perspectiva acarreta dificuldades cognitivas.

Considerações Finais

Em geral, nas aulas, que os estudantes não desenvolveram uma aprendizagem fundada em competências e habilidades necessárias para uma aplicação adequada dos conhecimentos, como preconizam os documentos oficiais, nesse nível de ensino. Consideramos que houve um pseudosucesso em relação à sua aprendizagem, visto que o que ficou na cabeça dos estudantes foi seu entendimento enquanto divisão de dois números, um que se escreve abaixo do outro.

Explorar o CONTRATO DIDÁTICO do ponto de vista teórico e prático também se configurou, no nosso entendimento, como uma valiosa contribuição desse estudo. Diferentemente do que foi visto na literatura, as pesquisas sobre esse fenômeno culminaram por adquirir certo caráter instrumental: tomava-se por base a noção e identificavam- se as suas caraterísticas na sala de aula. Nós utilizamos uma atribuição para esse fenômeno, alinhada à aprendizagem da Matemática e procuramos, na prática docente, analisá-los como fatores de influências no desempenho de frações (Santos et al., 2019).

Referências e bibliografia

Almeida, F.E. L. (2016). *O Contrato Didático e as organizações matemáticas e didáticas: analisando suas relações no ensino de equação do 1 grau a uma incógnita*. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e matemática), Universidade Federal Rural de Pernambuco. http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7438.

Bertoni, N. E. (2004). *Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das fraçõe*s. Palestra. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife.

Brasil. (1997). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*

Brasil. (2015). *Matrizes Curriculares de Referência para o Estado de Pernambuco*. Portal da Educação. Disponível em: http://www.portaldaeducacao.recife.pe.gov.br/content/matrizes-curriculares

Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*.

Brasil. SAEB (2015) . *Matemática. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*, 2015. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/- /asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/ . Acesso em: 27 ago 2018.

Brito Menezes, A.P.A. (2006). *Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental*. Tese 215 (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) -Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Brito Lima, A. P. de A., Câmara dos Santos, M. (2017). *Contrato Didático: Interface entre o psicológico e o didático na análise do processo de ensino-aprendizagem da matemática e das ciências*. Revista Debates Em Ensino De Química, 3(1), 6–27. Recuperado de https://www.journals.ufrpe.br/index.php/REDEQUIM/article/view/1355

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 7(2), p 33–115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau. G. (1996). *Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática*. In: BRUN, Jean (Org.). Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35- 113.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática. 128p.

Câmara Dos Santos, M. Maciel, A. (2007). *Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Ideias Associadas*, Bolema, Rio Claro (SP), v 20, n 28, pp. 163-177. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1536.

Caraça, Bento De Jesus. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Cruz, Maria Soraia Silva e Spinillo, Alina Galvão. (2014). *Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro*. Estudos de Psicologia (Natal) [online], v. 19, n. 4 [Acessado 6 janeiro 2023], pp. 241-249. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-294X2014000400001

Henry, M. (1991). *Didactique des Mathématiques: sensibilizations à ladidctique em vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques*. Laboratoire de Mathématiques- IREM, Bensaçon,

E Landim, Morais, M.D. (2019). *Análise praxeológica da abordagem de frações em um livro didático do 4º ano do Ensino Fundamental*. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo v. 21(5), pp. 555-565. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p555-565.

Nóbrega, Giselda Magalhães Moreno e Falcão, Jorge Tarcísio da Rocha. (2019). *Abordagem das Dificuldades de Ensino e Aprendizagem do Domínio da Estatística na Graduação em Psicologia: um olhar através do contrato didático.* Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. v. 33, n. 65 [Acessado 25 novembro 2022], pp. 1155-1174. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a09.

Oliveira, N; Araman, E.M.O. (2017). *Dificuldades na aprendizagem dos Números racionais manifestadas em dois níveis de escolaridade*. RPEM, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.175- 203, jan.-jun.

Pais, L.M. (2008). Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica.

Onuchic, L.D.L.R; Allevato, N.S.G; Noguti, F. C. H; Justulin, A. M. (2014). *Resolução de Problemas: teoria e Prática*. Jundiaí: Paco Editorial.

Ponte J P.& Quaresma, M. (2014). *Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória*. Uni-pluri/universidad, v. 14(1), 102-114

Powell, A. B. (2019). *How does a fraction get its name?* Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, v. 3 n. 3. https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

Silva, M. J. F. (2005). *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10923

Acceso al aprendizaje de las matemáticas para población con discapacidad intelectual

Elba Azucena **Martínez** Cárdenas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
elamartinezc@correo.udistrital.edu.co

Resumen

El acceso a la educación para todos es un derecho, garantizarlo en poblaciones marginadas como los niños con discapacidad intelectual, lleva a la emergencia de una reflexión didáctica para generar las condiciones que permitan el acceso al aprendizaje, no solo al entorno escolar. En la enseñanza de las matemáticas no se cuenta con el conocimiento suficiente de la discapacidad asociado al desarrollo de los procesos de aprendizaje cuando se presentan trastornos neurológicos, lo cual se requiere para eliminar barreras de aprendizaje. En la construcción de este proyecto de investigación doctoral, se plantea partir de los patrones aritméticos como un objeto matemático base para el desarrollo de ideas matemáticas, y caracterizar relaciones entre aspectos cognitivos, semióticos, afectivos y neuronales que se involucran en su aprendizaje, durante el desarrollo de juegos estructurados matemáticamente articulados con tecnologías de análisis de trayectorias de aprendizaje y seguimiento de ondas electroencefalográficas de atención y meditación.

Palabras clave: discapacidad intelectual, acceso al aprendizaje de las matemáticas, tecnología para el aprendizaje, tecnología en el análisis del aprendizaje, patrones aritméticos.

Discapacidad, Discapacidad Intelectual, Discalculia en el campo educativo

La población con discapacidad es uno de los grupos con mayor marginación en la educación, sobre quienes se deben centrar esfuerzos para favorecer su inclusión (UNESCO, 2016). El objetivo de desarrollo sostenible con visión hacia el 2030, enfocado en la educación y firmado por la UNESCO en el año 2015 cita “Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje para todos”, en correspondencia, en este trabajo se centra la mirada en la idea de promover oportunidades de aprendizaje para todos, y se considera que no solo se debe enfocar los esfuerzos al acceso, sino también en que se garantice el aprendizaje de todos en competencias pertinentes, “una vez que ya asisten a la escuela” (UNESCO, 2016, p.25); no solo corresponde incluir al estudiante en un aula, sino posibilitar el proceso de aprendizaje (Martínez, 2019).

Comprender el campo de la discapacidad requiere una visión interdisciplinar, de acuerdo con la Clasificación Internacional del Funcionamiento (en adelante CIF) propuesta por la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2001) y descrita en los criterios de diagnóstico DSM-5 (APA, 2013). La discapacidad se entiende actualmente de acuerdo con criterios de diagnóstico médico en los que se relacionan con las funciones de las personas a nivel corporal, mental sensorial y neurológico, sobre las cuales se establecen niveles de funcionalidad, que a su vez se asocian con posibilidades de apoyos para tener en cuenta con cada población de acuerdo con el trastorno específico que genera la discapacidad. Frente a la caracterización de trastornos se dan niveles y síntomas indicadores de nivel, que se asocian a apoyos correspondientes al nivel, se describen posibilidades de evidencia de más áreas afectadas y se establecen codificaciones que permiten en el campo de la salud categorizar todas las variables a un solo individuo, mostrando con todo esto la naturaleza de la diversidad de las personas.

En el campo educativo hay una emergencia de reconocer que la discapacidad, no solo refiere a un diagnóstico médico, sino que se asocia con el entorno y con la participación en el ambiente. El CIF refiere a una correlación de causa entre el trastorno considerado algunas veces enfermedad y las actividades, funciones y estructuras que desarrollan discapacidad y bloqueos para la participación e interacción con factores ambientales y personales (OMS, 2001). Este hecho denota que dependiendo los criterios que se tengan en cuenta en el diseño de un ambiente de aprendizaje, se propicia o no la inclusión y participación de todos, si hay una brecha muy amplia entre los requerimientos del entorno y los procesos de desarrollo de los estudiantes, se discapacita al estudiante, particularmente porque se le generan barreras a su aprendizaje.

La Discapacidad Intelectual (en adelante DI), está definida en el marco de los Trastornos del Desarrollo Neurológico, (trastorno del desarrollo intelectual) que comienza durante el período de desarrollo y que incluye limitaciones del funcionamiento intelectual como también del comportamiento adaptativo en los dominios conceptual, social y práctico (APA, 2013, p. 17). Uno de los tres criterios de identificación de la DI, se asocia con dificultades de aprendizaje de las matemáticas: “Evidentes en deficiencias en el razonamiento, la resolución de problemas, la planificación, el pensamiento abstracto, el juicio, el aprendizaje académico y el aprendizaje a partir de la experiencia” (Fernández, et.al., 2010; APA, 2013).

Incluido dentro de los trastornos del desarrollo neurológico, se encuentran los trastornos específicos del aprendizaje, entre los que se destacan dos síntomas asociados con las matemáticas:

> Dificultades para dominar el sentido numérico, los datos numéricos o el cálculo (p. ej., comprende mal los números, su magnitud y sus relaciones; cuenta con los dedos para sumar números de un solo dígito en lugar de recordar la operación matemática como hacen sus iguales; se pierde en el cálculo aritmético y puede intercambiar los procedimientos). Dificultades con el razonamiento matemático (p. ej., tiene gran dificultad para aplicar los conceptos, hechos u operaciones matemáticas para resolver problemas cuantitativos), (APA, 2013, p. 38).

Se emplea la Discalculia para referirse a un patrón de dificultades que se caracteriza por problemas de procesamiento de la información numérica, aprendizaje de operaciones aritméticas y cálculo correcto o fluido (APA, 2013, p.40). Se ha demostrado que la discalculia del desarrollo es una discapacidad de aprendizaje persistente, al menos a corto plazo, en aproximadamente la mitad de los preadolescentes afectados (Shalev, 2004). Así en la enseñanza de las matemáticas si no se reconocen los rasgos de discalculia en los estudiantes y no se realizan apoyos para eliminar barreras en su aprendizaje, estas dificultades persisten y pueden generar indicadores de discapacidad intelectual.

Existe una evidente una brecha entre la investigación y la práctica educativa, por lo que es necesario desde la investigación construir referentes que permitan guiar las practicas desde diseños accesibles. La investigación sobre las dificultades del aprendizaje matemático se ha duplicado cada década, pero la cuestión de cómo las lecciones aprendidas de la investigación y los laboratorios se pueden aplicar a la práctica diaria en las escuelas aún permanece (Fritz, et.al., 2019). Además, los profesores en la práctica no tienen el conocimiento necesario sobre el diagnóstico de estas dificultades (Reiss y Obersteiner, 2019).

De acuerdo con lo descrito desde la educación matemática hay una emergencia de conocimiento de la discapacidad, en la práctica pedagógica los profesores reciben un diagnóstico médico que requiere ser interpretado desde la reflexión didáctica para no generar ambientes discapacitantes y excluyentes. En este trabajo se centra la mirada en estudiantes diagnosticados con discapacidad intelectual que particularmente muestren rasgos de discalculia con el fin de caracterizar sus procesos de aprendizaje, en pro de aportar conocimiento al campo hacia la transformación de prácticas pedagógicas que permitan la accesibilidad a los ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares.

Aprendizaje de patrones aritméticos en poblaciones con DI que presentan rasgos de Discalculia en contextos escolares

Es necesario identificar los procesos y hechos que son indicadores de progresión en el aprendizaje, para entender de qué se trata el aprendizaje de las matemáticas, así como qué impide que un niño aprenda con éxito, se requiere explorar lo que hacen y piensan los niños mientras realizan las matemáticas. Para esto se ha de caracterizar adecuadamente el desempeño diciendo lo que los niños hacen, en lugar de atender a lo que no pueden hacer (Gaidoschik, 2019). Al realizar una búsqueda de los factores responsables de las dificultades en el aprendizaje de la matemática o de la discalculia, cada factor asociado puede brindar parte de la respuesta (Ashcraft, 2019). Dichos factores son útiles para el diseño de la intervención que favorezca el aprendizaje, Molnár y Csapó (2019) plantean que se pueden realizar más investigaciones con el sistema de evaluación de diagnóstico para explorar la razón de un desarrollo matemático atípico y las formas en que las diferentes dimensiones del conocimiento matemático se pueden mejorar de manera efectiva.

En la escuela se encuentra que se desestiman las posibilidades de aprendizaje que pueden tener los estudiantes con discapacidad intelectual, profesores y directivos estiman que la enseñanza de las matemáticas para estudiantes con DI consiste en el conteo y las operaciones con números, excluyendo del currículo espacios ofrecidos para el desarrollo de otras habilidades en esta área (Howard y Otros, 2018). Debido a que las dificultades de aprendizaje de las matemáticas no solo responden a razones neurológicas, sino también a la enseñanza, al entorno o de situaciones diversas vividas por los alumnos con o sin discapacidad, se encuentra ausencia de procesos de reflexión didáctica, ya que a priori se reduce la cantidad de saberes a enseñar, se concibe una visión utilitarista de las matemáticas, pensado desde lo que se necesita para desenvolverse en la vida cotidiana, considerando que no pueden se renuncia a una enseñanza que contribuya a resolver problemas (Broitman y Sancha, 2021).

Es importante comprender la complejidad de adquirir habilidades aritméticas, proceso en el cual se involucra un tipo complejo de cognición que incluye la lingüística (oral y escrita), lo espacial, la memoria, el conocimiento corporal y habilidades de función ejecutiva (Ardila y Roselli, 2002). Así la diversidad de aspectos desde los cuales comprender la discalculia, implica heterogeneidad entre los procesos de los niños, incluso si solo se observa la discalculia del desarrollo, justificando así que los investigadores continúen la búsqueda de las variables clave detrás de la variación individual en habilidades y dificultades numéricas (Fritz, et.al., 2019).

La reflexión didáctica desde el aprendizaje de las matemáticas en la población con DI con rasgos de discalculia lleva a considerar aspectos cognitivos de las matemáticas y el tipo de actividad matemática que se requiere propiciar para que sea accesible, Duval (2016) plantea si "¿la actividad matemática requiere solamente los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas muy específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza?" p. 62. La forma de entender las matemáticas incide en las dificultades de aprendizaje, ya que, si se concibe por ejemplo como una ciencia abstracta, se plantean procesos de enseñanza contrarios a las condiciones de desarrollo de los estudiantes, por ejemplo, estudiantes que se encuentran en la etapa de desarrollo de operaciones concretas (Nurfatanah, et.al., 2021).

Se caracteriza un problema de orden semiótico, desde la relación entre lo que se concibe que son las matemáticas por parte del profesor, lo que se propone enseñar, lo que puede o no aprender el estudiante con DI, qué se requiere para desarrollar habilidades de resolución de problemas en matemáticas, entre otros. Si se considera por ejemplo el conteo, como algo que aprenden los estudiantes con DI, planteado a priori por el profesor, al reducir las expectativas de aprendizaje, esta gran idea matemática caracterizada por Clements y Sarama (2015) cuenta con unos subprocesos en su desarrollo, que marcan niveles de comprensión y que se articulan a otras trayectorias de la aritmética inicial (Martínez, 2019), el no tener en cuenta todas las posibles entradas del conteo y las relaciones que se suscitan en el proceso de aprendizaje, muestra la ausencia de reflexión didáctica planteada previamente.

Enfatizando en objetos de la aritmética, se encuentra de forma particular que el número y el desarrollo de habilidades aritméticas, son aspectos que cuestan trabajo a las personas con discalculia (Geary, et.al.,2000), se puede ver la distinción que se gesta entre el objeto número y sus representaciones. Gallistel y Gelman (1992) consideran que estudiar la ontogenia del concepto de número, permite "discernir los medios por los cuales el lenguaje permite que el pensamiento humano trascienda algunas de las limitaciones impuestas por las representaciones (concepciones) preverbales que hacen que el lenguaje sea inteligible en primer lugar" p.72.

En correspondencia a las dificultades de aprendizaje indicadores de discalculia, se considera la necesidad de comprender los procesos de aprendizaje de la aritmética y se toma como objeto matemático de referencia los patrones aritméticos, los cuales según Clements y Sarama (2015), no solo se deben ver desde el procesos de identificación y generalización, sino como un habito de la mente, desde el cual se identifican relaciones aritméticas, cantidades, modelos, estructuras, que pueden llevar al aprendizaje de otras ideas matemáticas, como la subitización, el conteo, los procesos aditivos, la comparación, entre otros. Es decir, se proponen los patrones aritméticos desde un proceso de desarrollo con el fin de ver una progresión que lleva a involucrar a los estudiantes en la actividad matemática.

Tecnologías para el aprendizaje y tecnologías de análisis del proceso de aprendizaje

En este trabajo se considera el juego estructurado matemáticamente como un dispositivo didáctico que permite el proceso de aprendizaje, en el desarrollo del juego se pueden dar heurísticas de resolución de problemas (Guzmán, 1984). Adicional a esto juegos como “la escalera” en el grupo de investigación GIIPLYM y desde el proyecto ACACIA, han tenido una evolución en su presentación para hacerlo accesible a población sorda o ciega, y en la tecnología para el análisis del espacio del problema y del desarrollo del juego; se ha trabajado desde representaciones con lápiz y papel, tablas de Excel, circuitos conectados a Excel, robot que lee las emociones a través de los gestos que desarrolla una persona durante el juego y programación del juego para construir una representación del espacio del problema y del recorrido que hace el jugador en cada intento (Palomá, 2018). Por otro lado, este juego se articuló con una trayectoria hipotética de aprendizaje de la aritmética inicial, que permitió identificar la progresión en el aprendizaje de estudiantes con Discapacidad Intelectual (Martínez, 2019).

Ahora bien, la analítica de datos en los procesos de aprendizaje permite desarrollar modelos de representación de los datos que conlleven a comprender mejor las trayectorias de aprendizaje de los sujetos (Páez, et.al., 2021), con juegos como la escalera se presentan transformaciones de acuerdo con los movimientos realizados, lo que permite simular todos los posibles estados del problema, así como la representación de la ruta que toma cada sujeto para desarrollarlo.

Metodología

En este momento, en el planteamiento de un proyecto de investigación doctoral, se tiene como referente el juego la escalera, con el que se han desarrollado laboratorios en el grupo de investigación y se han propuesto representaciones de trayectorias de aprendizaje asociadas al juego. Con este juego se propone realizar estudios de caso de estudiantes escolarizados en básica primaria, con diagnóstico de discapacidad intelectual y que muestren rasgos de discalculia, integrando la lectura de ondas electroencefalográficas de atención y meditación, durante el desarrollo del juego, con el fin de establecer relaciones entre lo cognitivo que se involucra en los niveles de progresión de una trayectoria de patrones aritméticos, lo semiótico en torno a las formas de representación e interpretación del juego en evolución constante, lo afectivo en las formas de sentir que se suscitan ante el progreso, bloqueo o retroceso en el juego, frustración por no comprender y los aspectos neuronales, visibles a través de la lectura de ondas EEG, que dan cuenta de lo que ocurre biológicamente durante el desarrollo del juego.

En el proyecto se considera que el aprendizaje se produce por y desde la experiencia, involucrando en el desarrollo del juego, lo que propone Semetsky (2014), expandir los muros del aula tradicional y abrir el mundo a lo social y natural. Desde una visión semiótica aplicada a la educación, en el desarrollo del juego, cuando se realizan transformaciones, el jugador analiza las consecuencias de acciones, que pueden incidir en progreso, retroceso o bloqueo, esto al repetirse genera momentos de reflexión, que modifican las tendencias de acción de la persona, se va hacia adelante y hacia atrás, transformando sus interpretantes en la práctica (Semetsky,2014).

Laboratorio preliminar

El juego la escalera consiste en intercambiarlas posiciones de las fichas azules y rojas con el menor número de movimientos posibles. Las reglas son: las fichas se pueden desplazar a una casilla adyacente o saltar sobre una ficha del color opuesto. Con estas reglas, el espacio del problema del juego “la escalera” ha sido sistematizado y modelado en Matlab, por el equipo del Dr. John Páez y presenta representaciones como las que se observan en la Figura 1.

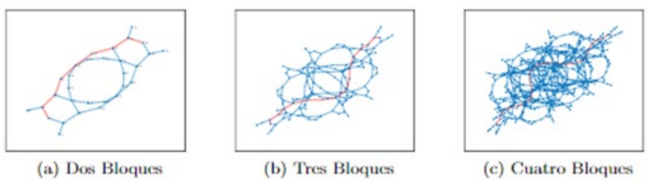


Figura 1. Representación del espacio del problema según cantidad de bloques.

En la figura 1, las líneas representan aristas y los puntos son estados del juego. La línea roja indica el camino más corto desde el estado inicial hasta el estado final del problema.

El equipo ha desarrollado pruebas con el software del juego vinculado al software de la diadema Neurosky Mindwave mobile II, la cual de acuerdo con (Marshall, 1995), es un electroencefalógrafo que permite distinguir tipos de frecuencias de las ondas cerebrales, las cuales se pueden distinguir entre sí y medir con cierto nivel de precisión en diferentes estados del sujeto. En la figura 2, se observa (a) el registro en el juego, (b) la interfaz del juego (se puede aumentar o disminuir número de fichas por partida) y (c) la diadema referenciada.

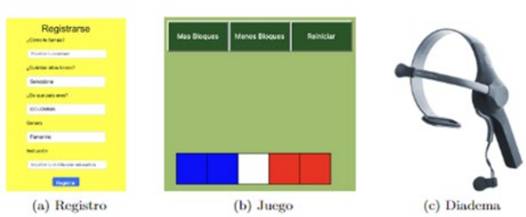


Figura 2. Materiales articulados en el laboratorio.

Con la articulación de estos equipos se han encontrado resultados en los que se presentan los niveles de atención presentes en cada estado del problema como se observa en los puntos de tonalidades de amarillo a rojo, en la Figura 3; en la que rojo es mayor atención y amarillo menor atención.

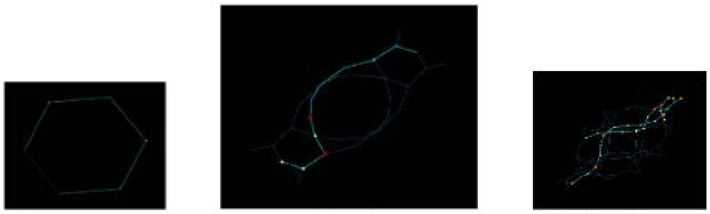


Figura 3. Resultados preliminares de laboratorio

Estos laboratorios preliminares se realizan con personas mayores de edad, con consentimientos informados. Estos ensayos permiten identificar si se están articulando bien las tecnologías de recolección de datos del proceso de aprendizaje, con el fin de proponer mejoras y tener completamente calibrados los softwares en el proceso experimental de esta investigación.

Conclusión

Este proyecto busca estructurar un trabajo interdisciplinar, que parte del planteamiento de una hipótesis en la que se relacionan aspectos cognitivos, semióticos, afectivos y neuronales, en el aprendizaje de patrones aritméticos, los cuales se pueden visibilizar durante la solución del juego "la escalera" realizando el seguimiento de ondas electroencefalográficas asociadas a la atención y la meditación, para encontrar en la minería de datos que provee esta tecnología, evidencia que sustente la relación entre los aspectos propuestos en la hipótesis involucrados en una trayectoria de aprendizaje de los patrones aritméticos articulada con el desarrollo de juegos; de esta manera, postular una hipótesis aplicable al diseño de trayectorias de enseñanza que relaciones aspectos cognitivos, semióticos, afectivos y neuronales, en el análisis didáctico y de esta manera elimine barreras de aprendizaje en la población con discapacidad intelectual con rasgos de discalculia.

Referencias y bibliografía

APA (2013). Guía de consulta de los criterios de diagnóstico del DSM-5. Arlington,VA, Asociación Americana de Psiquiatría.

Ardila, A. y Roselli, M. (2002). Acalculia and Dyscalculia. Neuropsychology Review, Vol. 12, No. 4. Plenum publishing Corporation.

Ashcraft, M. (2019). Cognitive and Motivational Underpinnings of Mathematical Learning Difficulties: A Discussion. En: International Handbook of Mathematical Learning Difficulties.

Broitman, C. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre Didáctica de la Matemática y Educación Inclusiva. Capítulo 3, en: La enseñanza de las matemáticas a alumnos con Discapacidad. La Plata. Ed. EDULP

Clements, D. y Sarama, J. (2015). El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad: El Enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje. Traducido por: León O. y Otros. Learning Tools LLC.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En: Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.

Fernández, J., Pérez, J, y Berruezo, P. (2010). Discapacidad Intelectual. Desarrollo, comunicación e intervención. Ed.CEPE. Madrid.

Fritz, A., Haase, V. y Räsänen, P. (2019). Introduction. En: International Handbook of Mathematical Learning Difficulties.

Gaidoschik, M. (2019). Didactics as a Source and Remedy of Mathematical Learning Difficulties. En: International Handbook of Mathematical Learning Difficulties.

Gallistel, C., y Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. Cognition. Vol. 44. University of California. Los Ángeles. Elseiver Science Publishers B.V.

Geary, D., Hamson, C. y Hoard, M. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children with Learning Disability. Journal of Experimental Child Psychology. Vol. 77. No. 3.

Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Santa Cruz de Tenerife.

Howard, S., San Martín, C., Salas, N., Blanco, P. & Diaz, C. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. Revista colombiana de investigación. No. 74.

Marshall, S. P. (1995). Schemas in problem solving. Cambridge University Press.

Martínez, E. (2019). Juego y trayectorias de aprendizaje de la aritmética inicial en ambientes de aprendizaje que incluyen estudiantes en situación de discapacidad intelectual. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Molnár, G. y Csapó, B. (2019). Technology-Based Diagnostic Assessments for Identifying Early Mathematical Learning Difficulties. En: International Handbook of Mathematical Learning Difficulties.

Nurfatanah, N., Yudha, C., Marini, A. y Sumantri, M. (2021). Development of matemathic media games education based on e-learning in the Planting of Basic Concepts in Numeracy. Journal of Physics: Conference Series.

OMS (2001). Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud: CIF. (WHO Library Cataloguing-in-Publication Data)

Páez, J., Cobos, J., Aguirre, D., Molina, R., y Lievano, L. (2021). Learning analytics: Exploring the hypothetical learning trajectories through mathematical games. En International conference in methodologies and intelligent systems for techhnology enhanced learning (pp. 156–165).

Palomá, N. (2018). Una trayectoria real del juego la escalera vinculada a hipótesis que potencian el Aprendizaje de las funciones desde poblaciones Diversas. Trabajo de grado para título de Maestría en educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia.

UNESCO (2016). Educación 2030. Declaración de Incheon y Marco de Acción, para el objetivo de desarrollo sostenible 4. Hacia una educación inclusiva, equitativa y de calidad y un aprendizaje a lo largo de la vida para todos.

Reiss, K. y Obersteiner, A. (2019). Competence Models as a Basic for Defining, Understanding, and Diagnosing Setudents´ Mathematical Competences. En: International Handbook of Mathematical Learning Difficulties.

Semetsky, I. (2014). Taking the edusemiotic turn: A body mind approach to education. Journal of Philosophy of Education, 48 (3), 490–506.

Shalev, R. (2004). Developmental Dyscalculia. Journal of Child Neurology.

Alfabetizando matematicamente: uma proposta de ensino para os anos iniciais do Ensino Fundamental

Diogo Sihe Balconi
Universidade Franciscana
Brasil
diogo.balconi@ufn.edu.br
Vitória de Mello Figueiredo
Universidade Franciscana
Brasil
vitoria.mello@ufn.edu.br
Andreia Medianeira Nunes Silveira Meller
Universidade Franciscana
Brasil
andreia.meller@ufn.edu.br
Greice Scremin
Universidade Franciscana
Brasil
greicescremin@ufn.edu.br
Luis Sebastião Barbosa Bemme
Universidade Franciscana
Brasil
luis.bemme@ufn.edu.br

Resumo

Este texto tem o objetivo de apresentar uma proposta de ensino com foco em introduzir o conceito de linhas poligonais, polígonos e padrões no primeiro ano do Ensino Fundamental, visando a alfabetização matemática. Os constructos teóricos versam sobre o ensino de Matemática e a alfabetização nesta área do conhecimento. Tal estudo caracteriza-se como qualitativo e visa atender às habilidades previstas por Danyluk (2015). As considerações indicam que propostas de ensino que emergem de contexto reais trazem potencialidades que permitem integrar a Matemática com outras áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Educação Matemática; Alfabetização Matemática; Anos iniciais do Ensino Fundamental; Geometria; Padrões; Ensino Integrado.

Introdução

O currículo da escola no contexto brasileiro está organizado a partir da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, que é um documento normativo, para instituições de ensino públicas e privadas, que orienta a elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. Sendo que este documento traz indicativos para as seguintes áreas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Neste texto nos atentaremos para a área da Matemática voltada para os anos iniciais do Ensino Fundamental que está organizada a partir de cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade estatística.

É nos anos iniciais do Ensino Fundamental que a criança inicia seu processo de construção de sentido nos diversos componentes curriculares, inclusive na matemática. Nesse estudo, o nosso interesse está na unidade temática Geometria que, conforme a BNCC, reitera que o estudo da mesma envolve um amplo conjunto de conceitos e procedimentos fundamentais para resolver problemas envolvendo diferentes áreas do conhecimento o que favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico (Brasil, 2018).

Uma vez que o ensino da matemática orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (Brasil, 2018).

A construção e reconhecimento de padrões e regularidades também são relevantes para a alfabetização Matemática, uma vez que, para estabelecer generalizações algébricas de um padrão é necessário identificar regularidades locais para que se possa, posteriormente, generalizar os termos da sequência que vão além do campo puramente perceptivo (Radford, 2006).

Além disso, os padrões permitem que os estudantes construam uma visão positiva da Matemática, uma vez que apelam fortemente para o desenvolvimento do sentido estético e da criatividade, estabelecendo desse modo conexões entre os diferentes temas, desenvolvendo deste modo a capacidade de classificar e ordenar informações, estabelecendo uma estreita ligação entre a Matemática estudada em aula e o mundo em que vivem (Vale & Pimentel, 2010).

A abordagem destes conceitos nos anos iniciais é importante, pois este estudo abre caminho para que os alunos desenvolvam habilidades necessárias para a resolução de problemas cotidianos. A capacidade de olhar, comparar, medir, estimar e generalizar são exemplos de contribuições oportunizadas pelo ensino da Geometria. Quando estes primeiros saberes estão bem conceituados, ofertam um embasamento e sustentação para que os discentes desenvolvam suas capacidades e, desse modo, aperfeiçoem suas noções de espaço, localização no ambiente e passem a se habituar com as formas que dispõem contato (Bulos, 2011).

Um aspecto fundamental quando pensamos na matemática dos anos iniciais é o conceito de alfabetização matemática. Segundo Danyluk (2015) tal conceito é entendido como um fenômeno que envolve a compreensão, a interpretação e a comunicação dos conteúdos escolares, fundamentais para a construção do conhecimento matemático. A autora ainda pontua que ser alfabetizado é compreender o que se lê e escrever o que se entende sobre as primeiras noções de aritmética, geometria e lógica.

Souza (2010) complementa esta ideia ao sublinhar que sendo a Matemática uma ciência abstrata e de linguagem simbólica é necessário que o aluno atribua sentido e significado aos signos e símbolos expressos pela linguagem. Diante disto, compreendemos que a alfabetização Matemática é desenvolvida pelos alunos quando estes dispõem de práticas didáticas que ilustrem os conceitos a serem apreendidos. Desse modo, a concepção do conteúdo estudado, junto da perspectiva discente em atribuir sentido àquilo que a eles é ensinado possibilita que a aprendizagem se efetive. Tal aprendizagem, acrescida dos saberes já constituídos pelo sujeito, favorece a solução de problemas não só no espaço pedagógico, mas também em ambientes de convívio social.

Diante do exposto, nesta comunicação, temos como objetivo apresentar uma proposta de ensino com foco em introduzir o conceito de linhas poligonais, polígonos e padrões no primeiro ano do Ensino Fundamental, visando à alfabetização Matemática. Tais conceitos são fundamentais para a construção tanto da Geometria Plana como da Espacial.

Metodologia

A pesquisa apresentada nesta comunicação é caracterizada como qualitativa, uma vez que está relacionada aos significados atribuídos pelos discentes às suas experiências vivenciadas e o modo como são compreendidas, visto que o cenário é representado em sala de aula (Pope & Mays, 2005).

Bogdan e Biklen (1982) complementam essa ideia ao afirmar que a investigação qualitativa fornece dados descritivos obtidos de maneira direta e participativa pelo pesquisador envolvido na ocasião, o processo da atividade é mais relevante que o produto final, sendo o retrato de perspectiva dos participantes da dinâmica o foco de atenção.

Perante o narrado, nessa proposta didática priorizamos o desenvolvimento discente em cada um dos momentos da atividade. Quais atribuições foram alcançadas por eles e qual o sentimento de participação gerado. Com isso, trabalhamos a importância de envolver-se com a atividade e os aprendizados construídos. De modo a evidenciar que o caminho percorrido para proceder a um determinado resultado foi mais significativo, sendo a existência desse percurso indispensável para conceituar este estudo como qualitativo.

O que apresentamos nessa comunicação é uma proposta de atividade de ensino voltada para o primeiro ano do Ensino Fundamental, visando ao desenvolvimento de uma alfabetização matemática a partir dos estudos dos conceitos de linhas poligonais, polígonos e padrões. Esta proposta da atividade de ensino foi construída partir dos pressupostos do conceito de alfabetização matemática que envolve a compreensão, interpretação e comunicação (Danyluk (2015). A Figura 1 apresenta uma síntese da proposta.

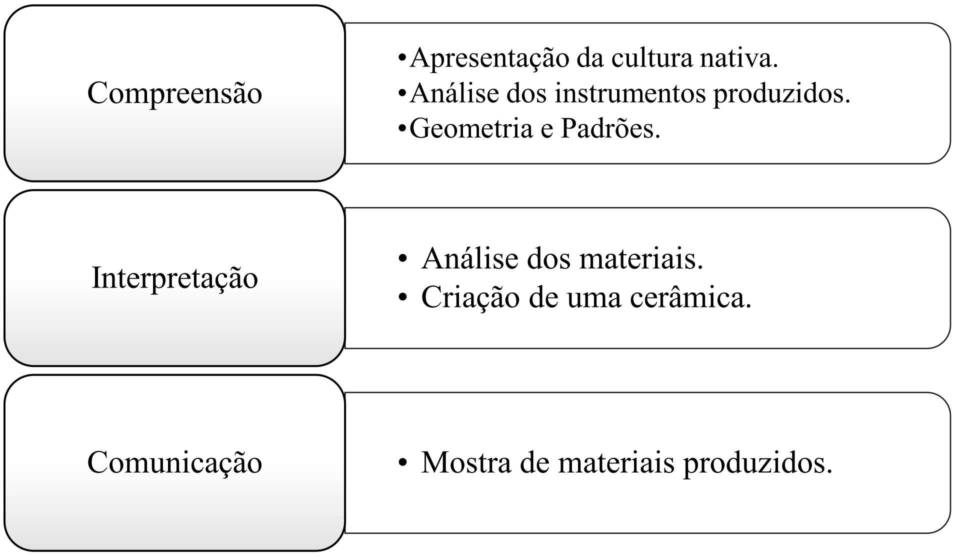


Figura 1. Síntese da proposta de ensino.

A seguir discutimos cada uma das atividades que compõem a proposta de ensino elaborada.

Resultados e discussões

Conforme apresentado na Figura 1, a proposta de atividade comtempla as três habilidades descritas em Danyluk (2015). Entendemos que essas três habilidades se dão de forma interrelacionada, no entanto, para fins didáticos propusemos atividades distintas que visam atender de modo mais específico cada uma delas.

No primeiro momento buscamos desenvolver com o aluno a compreensão dos conceitos estudados, para isso definimos quatro atividades. Entendemos que o primeiro passo para a alfabetização matemática envolve a compreensão, por parte do aluno, dos distintos conceitos que compõem a área da matemática. Essa compreensão perpassa por entender as relações que os conceitos possuem e sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Danyluk (2015) salienta que para aprender a linguagem matemática é necessário compreender o que está registrado em textos e na própria tecnologia onde são fixadas e comunicadas, pelos registros efetuados, ou seja, a alfabetização matemática envolve o processo de compreender a leitura e a escrita realizada empregando a linguagem desta área.

Primeira Atividade

Convite a um representante cultural dos povos nativos com intuito de realizar uma fala apresentando as populações indígenas que viveram e ainda vivem na região de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, destacando os costumes, rituais e materiais produzidos por eles. Na sequência, será organizada uma mostra com as cerâmicas, tecelagens, pinturas e instrumentos construídos por uma população nativa da cidade.

Segunda Atividade

A partir da fala realizada na primeira atividade e da mostra dos materiais expostos, o professor poderá questionar:

a) Você percebeu o modo como os instrumentos são decorados?
b) Quais os desenhos presentes nos instrumentos você mais gostou?
c) Tem algum desenho que você reconheceu? Sabe o nome?
d) Você percebe a repetição de algum desenho?

A partir das respostas dos alunos o professor irá chamar atenção para o modo como esses materiais são construídos e a forma como os mesmos são decorados, o que levará a discussão sobre as formas e padrões presentes nesses materiais.

Terceira Atividade

A partir das respostas dos alunos o professor irá apresentar a definição de linha poligonal, polígono e sua classificação.

Linha poligonal é uma linha formada apenas por segmentos de retas consecutivos e não colineares.

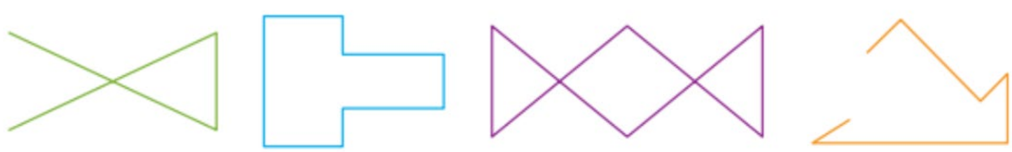


Figura 2. Exemplo de linhas poligonais.

As linhas poligonais podem ser abertas ou fechadas.

Figura 3. Exemplo de linhas poligonais abertas e fechadas.

Entre as linhas poligonais fechadas, há as linhas poligonais simples e as não simples:

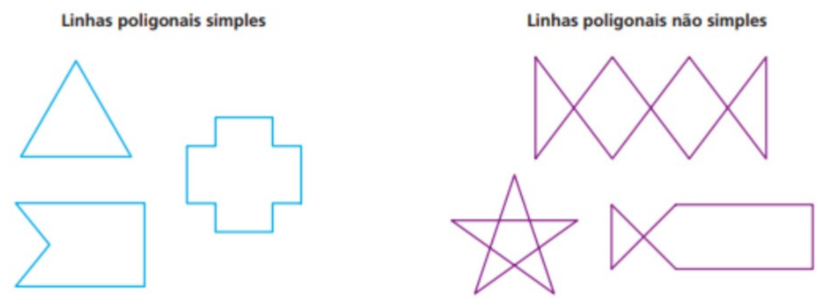


Figura 4. Exemplo de linhas poligonais simples e não simples.

A partir da discussão de linhas poligonais abertas e fechadas, simples e não simples iremos definir o conceito de polígono.

Toda linha poligonal fechada simples é denominada polígono.

Quarta Atividade

Após a discussão sobre linhas poligonais e polígonos, discutiremos o conceito de padrão, ilustrando com exemplos.

Padrão é o termo de sequência que se repete.

Já na habilidade de interpretação dos conceitos construímos duas atividades que apresentamos na sequência. Esta habilidade deriva da compreensão realizada, uma vez que para Danyluk (2015), a leitura da linguagem matemática ocorre a partir da compreensão e da interpretação dos signos e das relações entre os conceitos matemáticos. A autora ainda pontua que o sentido que é articulado na interpretação é o que permite desenvolver a compreensão, podendo deste modo comunicar este seu conhecimento aos outros por meio de proposições.

Quinta Atividade

Nesta atividade, os alunos irão analisar os instrumentos (cerâmica, cestas, tecelagens) e identificar os padrões que existem neles. Para isso, as crianças poderão representar suas percepções em uma folha de papel, destacando quais conceitos discutidos anteriormente eles reconhecem nessas representações.

Sexta Atividade

Os alunos poderão criar um padrão, inicialmente em um papel, para posteriormente construir uma cerâmica onde eles irão reproduzir o padrão elaborado. Nessa atividade além do trabalho com os conceitos de padrão, linhas poligonais e polígonos, também iremos explorar o processo de construção de uma cerâmica, relacionando deste modo outras área do conhecimento.

Por fim, a habilidade de comunicação dos conceitos construímos uma atividade que apresentamos na sequência. Danyluk (2015), salienta que a comunicação tem sentido de manifestação, ou seja, é o mostrar para o outro aquilo que foi compreendido e interpretado. Esta comunicação tem como base o compartilhando com o outro.

Sétima Atividade

Para a finalização da atividade iremos organizar uma mostra das cerâmicas produzidas pelos alunos. Onde os alunos terão que explicar o processo de criação e a escolha pelo padrão.

Considerações

Nesse texto apresentamos uma proposta de ensino com foco em introduzir o conceito de linhas poligonais, polígonos e padrões no primeiro ano do Ensino Fundamental, visando à alfabetização matemática.

A preocupação com a alfabetização matemática justifica-se pelo fato de que o ensino não pode pautar-se em memorizações, mas dar sentido ao mundo no qual estamos inseridos. A Geometria, em especial, nos permite reconhecer formas, localizarmos no espaço e desenvolvermos um senso estético.

Além disso, o estudo da Matemática a partir de elementos culturais, favorece a materialização dos conceitos e permite entender essa área do conhecimento como pertencente ao mundo que nos cerca, além disso esse trabalho tem potencialidade para a construção de um ensino integrado com as demais áreas do conhecimento, uma vez que abre para a possibilidade de discutir a história, a produção artística, cultural e escrita.

Salientamos que nesta proposta não temos a intenção de trazer uma prescrição de como o ensino de Matemática deve ser realizado, mas de propor caminhos para o processo de alfabetização nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, portanto, este trabalho necessita de novos olhares e diferentes interpretações que visem a qualificação do mesmo.

Bibliografia e referências

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.

Bodgan, R. & Biklen, S. K. (1982). Qualitative research for education. Boston: Allyn and Bacon.

Bulos, A. M. M. (2011, 26 a 30 de junho). O Ensino da Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental [Apresentação de trabalho]. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – IACME, Recife, Brasil.

Danyluk, O. (2015). Alfabetização matemática: as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre/Brasil: Sulina.

Pope, C. & Mays, N. (2005). Pesquisa qualitativa na atenção à saúde. Porto Alegre: Artmed.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: Alatorre, S.; Cortina, J.L.; Sáiz, M.; Méndez, A. (eds.). Vol. 1. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, p. 2-21, 2006.

Vale, I. & Pimentel, T. (2010). Padrões e Conexões Matemáticas no Ensino Básico. Educação e Matemática, 33-38, Lisboa.

Argumentação e provas em Matemática: o que dizem os licenciandos ingressantes?

Lilian **Nasser**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com
João Carlos **Caldato**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
profjoaocaldato@gmail.com
Ana Luiza Barbosa Cardoso **Silva**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
analuiza.cardosobs@gmail.com
Carlos Augusto **Aguilar Júnior**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
carlosaugustobolivar@hotmail.com

Resumo

Buscando problematizar e compreender o grau de aceitação de provas matemáticas por licenciandos ingressantes, este artigo faz um recorte da dissertação de mestrado de Caldato (2018). A partir dos dados levantados na pesquisa, é de relevância ressaltar uma resistência por parte dos licenciandos quanto à aceitação de provas matemáticas sem a necessidade de exemplos simples para sua confirmação. Desta forma, é possível observar que a compreensão sobre o conceito de provas matemáticas ainda causa dúvidas e resistência para o estudante, comprometendo o domínio do processo dedutivo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino superior; Ensino; Avaliação; Prova matemática; Brasil.

Introdução

Este artigo tem o objetivo de relatar uma investigação sobre o que os licenciandos ingressantes de Matemática pensam sobre algumas afirmações relacionadas à prova matemática, tais como: o lugar de argumentos baseados em exemplos e contraexemplos; o papel de representações e ambientes dinâmicos na busca de validar uma conjectura; a aceitação de argumentos de autoridade baseados na explicação do professor ou na exibição de um livro; a problemática entre provas que explicam e provas que provam (Hanna, 1990).

As discussões problematizadas ao longo do texto fazem parte de uma pesquisa ampla (Caldato, 2018), cuja segunda etapa está em andamento, realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). A primeira etapa da pesquisa de Caldato (2018) usou uma abordagem metodológica exploratória, com a aplicação de questionários e análises didáticas a *priori* e a *posteriori*. Este artigo é composto dessa seção introdutória e de outras quatro. Na fundamentação teórica são abordados os textos de Balacheff (1987, 1988), Harel e Sowder (1998) e Hanna (1990), que discutem as noções de prova e demonstração. A seção de procedimentos metodológicos descreve o questionário aplicado aos 78 estudantes ingressantes de cursos de Licenciatura em Matemática e, em particular, a questão escolhida para ser o foco deste artigo. Na descrição e análise dos dados, discute-se, a partir de 11 afirmativas, o que pensam os licenciandos ingressantes sobre prova matemática. Por fim, são apresentadas as considerações finais.

Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica desta investigação é norteada por Balacheff (1987, 1988), Harel e Sowder (1998) e Hanna (1990).

De acordo com Balacheff (1987), existe diferença entre prova e demonstração (ou prova matemática). A primeira noção consiste numa argumentação legitimada por certa comunidade e, uma vez que adquire uma dimensão social, é denominada prova no contexto considerado. Já a segunda noção se refere à prova situada no âmbito da comunidade matemática devido à particularidade da sua estrutura neste grupo social, pois é composta por uma sequência de afirmações articuladas segundo uma lógica dedutiva preestabelecida.

Além de problematizar tais noções, Balacheff (1988) elaborou uma tipologia de provas organizadas em quatro principais níveis considerando os raciocínios e conhecimentos apresentados por estudantes ao elaborar uma justificativa: *empirismo ingênuo*, *experiência crucial*, *exemplo genérico* e *experiência mental*.

O empirismo ingênuo é baseado na observação, em que o aluno assume como verdade a conjectura de um enunciado através da verificação empírica de poucos e simples casos. Já na experiência crucial se utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição, mas com leves indícios de uma possível generalização. No exemplo genérico, elege-se um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade com o intuito de deduzir as características que representam essa classe. Por fim, a experiência mental se baseia no raciocínio lógico dedutivo para garantir a validade de uma propriedade de forma genérica (para toda a classe de objetos) e não por meio de exemplos ou de um representante particular. Em vista disso, para que um estudante possa atingir o nível mais elevado, isto é, da experiência mental, e seja capaz de não somente compreender o significado de uma demonstração, mas também de demonstrar, é necessário que ele vivencie todos os níveis anteriores.

Por sua vez, Harel e Sowder (1998) estabeleceram a terminologia esquemas de prova, que resumidamente pode ser definido como argumentos convincentes, classificados em três categorias: *esquemas externos*, *empíricos* e *analíticos*. Sem pormenorizar, no esquema baseado em elementos externos (prova autoritária, prova ritual e prova simbólica) são fatores externos ao problema que influenciam na convicção do indivíduo. Esses fatores estão relacionados, por exemplo, ao uso de argumento de autoridade ou ao modo como ele é apresentado. Já o esquema empírico (prova indutiva e prova perceptiva) ocorre quando a validade de uma sentença é influenciada por evidências numéricas a partir da verificação de um ou mais exemplos, ou através da percepção. E o esquema analítico (provas transformacionais e provas axiomáticas) é identificado por apresentar três características essenciais: generalidade, pensamento operacional e dedução lógica.

De acordo com as descrições apresentadas anteriormente, é possível observar algumas articulações entre a tipologia e os esquemas de provas. A noção de prova pragmática cunhada por Balacheff (1988), em que se enquadram os níveis de prova intitulados empirismo ingênuo e experiência crucial, remete à definição de Harel e Sowder (1998) para a categoria denominada esquema de prova empírica (especialmente, a descrição do esquema de prova indutiva), visto que em ambos os modelos teóricos essas terminologias se referem ao uso de argumentos empíricos para validar uma sentença matemática. Já a noção de prova conceitual, onde está situado o nível de prova intitulado experiência mental, remete à descrição do esquema de prova analítica, pois faz menção ao uso de argumentos dedutivos para validar uma afirmação. Quanto ao nível de prova denominado exemplo genérico, que consiste num estágio de transição entre a prova pragmática e conceitual, também remete à descrição do esquema de prova analítica. O diagrama da Figura 1 (Caldato & Nasser, 2022) ilustra uma interpretação acerca da verossimilhança entre a classificação proposta na tipologia e nos esquemas de provas:

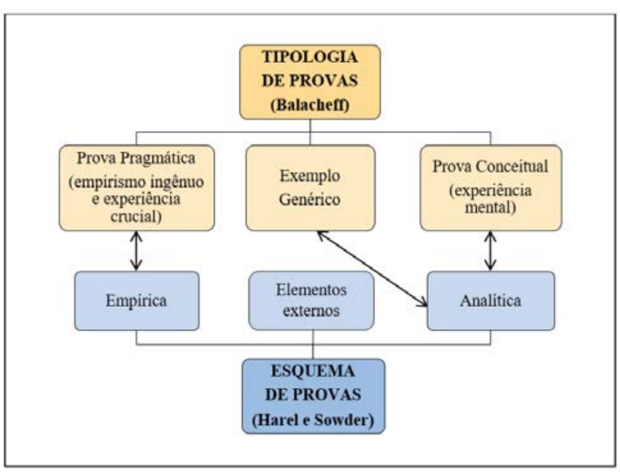


Figura 1. Diagrama das possíveis articulações entre a tipologia e os esquemas de provas.

É possível observar na Figura 1 que o esquema de prova baseado em elementos externos não foi relacionado neste diagrama. E a razão disso é que em Balacheff (1988) não encontramos nenhum tipo de prova similar a essa categoria de Harel e Sowder (1998).

Outra pesquisadora que tem significativas contribuições nesta temática é Gila Hanna. Em Hanna (1990) há uma distinção entre provas que provam (apenas mostram que o resultado é verdadeiro) e provas que explicam (não apenas mostram, mas também fornecem uma lógica baseada nas ideias/propriedades matemáticas que justificam as razões de ser verdadeiro). Para exemplificar, considere uma prova por indução ou por redução ao absurdo, a qual tende a validar que o resultado é verdadeiro, mas não explica tais razões.

Procedimentos Metodológicos

A primeira etapa da pesquisa de Caldato (2018) consistiu em um estudo de campo e os dados foram coletados por meio da aplicação de um questionário, composto por sete questões, a uma amostra por conveniência, constituída por 78 licenciandos ingressantes, de três instituições públicas brasileiras. É importante destacar que todos os licenciandos já haviam cursado o primeiro período nas suas respectivas instituições.

O foco deste artigo é em uma das sete questões descritas no instrumento de coleta de dados, cujo objetivo é investigar o grau de concordância sobre algumas afirmações concernentes à prova matemática. Por meio da escala Likert, os participantes deveriam avaliar, numa escala de 1 (Discordo Totalmente – DT) a 5 (Concordo Totalmente – CT), qual o seu grau de concordância em relação a onze afirmações sobre a prova matemática. Para efeitos de análise, realizou-se a junção das opções (1) e (2) para referir à ideia de discordância e a junção das opções (4) e (5) para remeter à ideia de concordância. No caso de não saber o que responder, o sujeito poderia assinalar a opção "Não Sei" (NS).

Descrição e Análise dos Dados

O Quadro 1 a seguir apresenta as onze afirmações descritas no questionário proposto aos licenciandos ingressantes.

Quadro 1
Afirmações relacionadas à prova matemática apresentadas aos licenciandos

a) Para provar que uma afirmação é falsa, basta exibir um contraexemplo.	**g)** A verificação empírica de uma conjectura por meio de muitos exemplos constitui uma prova matemática.
b) É possível utilizar apenas um desenho para provar um resultado matemático.	**h)** É possível provar uma propriedade matemática por meio de ambientes de geometria dinâmica como o *GeoGebra*.
c) Para demonstrar que um resultado é verdadeiro, podemos utilizar como argumentos a explicação do professor ou a exibição num livro.	**i)** Ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue que todos os casos específicos também são válidos.
d) Apesar de não serem considerados argumentos válidos em uma demonstração, utilizar figuras e buscar	**j)** Na Educação Básica, os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado.

exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para executá-la.	
e) Ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares.	**k)** Após mostrar que uma hipótese é verdadeira, é preciso verificar com alguns exemplos para ter certeza.
f) Só constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo lógico dedutivo baseado em um sistema axiomático (axiomas, definições, proposições e teoremas).	

Fonte: Caldato (2018).

Apesar da observação feita por Harel e Sowder (1998), de que os estudantes tendem a confundir a possibilidade da prova por contraexemplo com a impossibilidade da prova por exemplo(s), os itens (a) e (g) evidenciaram, respectivamente, que parte significativa dos participantes possui clareza com relação a essa problemática, já que 49 licenciandos (62,8% da amostra) concordaram que o uso de contraexemplos é suficiente para garantir que uma afirmação é falsa e quase a metade da amostra (36 participantes) discordou que a verificação empírica de uma conjectura constitui uma prova matemática.

Observou-se no item (b) que a maioria dos licenciandos (59% da amostra) discorda de que um simples desenho é suficiente para demonstrar um resultado matemático. No entanto, quando foram questionados no item (h) sobre a possibilidade de provar uma propriedade por meio de ambientes de Geometria Dinâmica (GD), como o GeoGebra, 36 estudantes (ou 46,2% da amostra) concordaram com tal afirmação. Isso parece contraditório, pois ambos fazem menção a argumentos unicamente visuais, sendo que a principal diferença entre eles é o caráter dinâmico que os *softwares* de GD oferecem aos usuários. Ainda com relação ao item (h), observou-se que foi a afirmação em que mais apareceu a opção (NS), assinalada 19 vezes. Para esse fato, propõem-se duas conjecturas: a primeira é que os licenciandos não possuem conhecimentos sobre o que seriam os *softwares* de GD; e a segunda, que deve ser a mais provável, é que tal assunto nunca foi problematizado com eles, isto é, o quão aceitável é uma demonstração que utiliza a tecnologia como recurso, como o famoso caso do Teorema das Quatro Cores, que foi demonstrado pela primeira vez em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador e que até hoje não possui uma demonstração sem auxílio da tecnologia. Além disso, é importante ressaltar que, nesta pesquisa, admite-se a possibilidade de uma representação visual ser aceita na validação de uma conjectura, desde que satisfaça as três características essenciais do esquema analítico (generalidade, pensamento operacional e dedução lógica) proposto por Harel e Sowder (1998). Em Nelsen (1993), é possível encontrar vários exemplos de representações visuais que remetem a um raciocínio lógico dedutivo.

Com relação ao item (c), que faz menção ao uso de argumentos de autoridade para ratificar uma propriedade, 35 licenciandos (44,9% da amostra) concordaram que é possível utilizar a explicação do professor ou a exibição num livro para demonstrar que um resultado é verdadeiro, reportando ao esquema de prova autoritário de Harel e Sowder (1998). Entretanto, esse tipo de argumento não consiste numa prova matemática. Além disso, no item (i), 37 participantes (47,4% da amostra) concordaram que ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue imediatamente que todos os casos específicos também são válidos, o que está de acordo com a noção de prova matemática.

Verificou-se no item (f) que 43 licenciandos (55,1% da amostra) concordaram que somente constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo dedutivo baseado num sistema axiomático, em consonância com Balacheff (1987). Contudo, acredita-se que o termo “somente” seja muito restritivo, pois, não se enquadram nesta definição as provas por absurdo ou por contraexemplos. Além disso, dentre esses licenciandos, 16 também concordaram que era possível provar uma propriedade por meio de ambientes de GD e 20 também concordaram que era possível demonstrar um resultado utilizando argumentos de autoridade, o que resulta numa lógica contraditória, permitindo inferir que: como a amostra foi constituída por ingressantes, muitos deles não dominam o significado de “sistema lógico dedutivo” e, consequentemente, a concepção de prova matemática que eles possuem está longe das definições adotadas nesta pesquisa. Por outro lado, apenas 18 estudantes (23% da amostra) atribuíram grau (3) no item (f), que seria a resposta adequada na visão dos autores.

Conforme indicado nos itens (g) e (b), o maior percentual dos licenciandos afirmou corretamente que não é possível provar uma sentença matemática por meio de exemplos ou de simples desenhos. Entretanto, parte significativa da amostra (68 estudantes) concordou que mesmo não sendo considerados argumentos válidos, o uso de figuras e exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para construir uma demonstração, conforme assinalava o item (d). Além disso, no item (j), a maioria dos licenciandos (56,4% da amostra) concordou com Hanna (1990), de que na Educação Básica os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado.

Por fim, o resultado que mais chamou a atenção foi em relação aos itens (e) e (k). Com base na afirmação (e), parte significativa dos licenciandos (65,4% da amostra) discordou que ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares. E na afirmação (k), que contradizia o item (e), isso foi ratificado, pois quase metade da amostra (36 participantes) concordou que após validar genericamente uma hipótese, é preciso ainda verificar com alguns exemplos para ter certeza. O fato destes licenciandos ingressantes assinalarem a necessidade de verificar uma conjectura por meio de exemplos, mesmo depois de demonstrá-la, é um indicativo de que, na visão deles, a prova matemática nem sempre é vista como um meio de validação, recorrendo a uma constatação numérica para convencimento próprio.

Considerações Finais

Neste artigo foi discutido o que pensam os licenciandos ingressantes sobre prova matemática. É possível observar que existe dificuldade, por parte dos participantes, em compreender o que é e a validade de uma prova matemática. Esse fato é compreensível, visto que são ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. Entretanto, por se tratar de futuros professores, os cursos de formação inicial devem problematizar e ressignificar tal dificuldade. Como será que isso está sendo enfrentado? É o que a segunda etapa da pesquisa de Caldato (2018) está investigando.

A análise dos dados, apresentada neste texto, corrobora com a problemática da prova por exemplos(s) apontada por Harel e Sowder (1998), na qual os estudantes tendem a validar suas conjecturas por meio de argumentações empíricas. Apesar dessa problemática, esses pesquisadores ressaltam que tais argumentos podem ajudar a gerar ideias de provas ou fornecer *insights* sobre a validade de uma conjectura. Da mesma forma, a utilização de ambientes virtuais de GD pode atingir o mesmo propósito, conforme descrito em Nasser, Ferreira e Vaz (2017).

As pesquisas de Aguilar Junior (2012) e Caldato, Utsumi e Nasser (2017) também verificaram uma predominância do empirismo ingênuo (Balacheff, 1998) nas justificativas dos discentes. Além disso, apesar de Harel e Sowder (1998) assinalarem uma confusão entre a possibilidade da prova por contraexemplo com a impossibilidade da prova por exemplo(s), neste estudo, parte significativa da amostra não apresentou essa dificuldade.

Com a adoção do ensino remoto durante o período de pandemia, muitos estudantes tiveram menos oportunidades de vivenciar atividades exploratórias envolvendo argumentação e provas. Espera-se que este artigo contribua para reverter esse quadro. Ou seja, que sua leitura fomente o desenvolvimento de atividades nos cursos de formação inicial de professores, a fim de incentivar os licenciandos a explorar a argumentação e provas em sua futura prática pedagógica, em todos os níveis de ensino.

Bibliografia e referências

Aguilar Junior, C. A. (2012). *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2012/114-postura-de-docentes-quanto-a-argumentacao-e-prova-nas-aulas-de-matematica-do-ensino-basico.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://www.jstor.org/stable/3482413.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London: Hodder and Stoughton.

Caldato, J. e Nasser, L. (2022). Interpretando e avaliando argumentações: uma análise com licenciandos ingressantes de Matemática, *VIDYA*, *42*(2), 25-44. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4208/3049.

Caldato, J. (2018). *Argumentação, prova e demonstração*: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em matemática. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2018/237-argumentacao-prova-e-demonstracao-uma-investigacao-sobre-as-concepcoes-de-ingressantes-no-curso-de-licenciatura-em-matematica.

Caldato, J., Utsumi, M. C. e Nasser, L. (2017). Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. *Triângulo, 10*(2), 74-93. https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01809605

Harel, G. e Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/Students%27%20Proof%20Schemes.pdf.

Nasser, L., Ferreira, M. L. e Vaz, R. F. N. (2017). Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de Licenciatura em Matemática, *VYDIA*, *37*(2), 499-513. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/2090/1956.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words*: *Exercises in Visual Thinking.* Mathematical Association of America, Washington, DC.

Argumentación en el aula de Matemática, una experiencia con estudiantes de 8º básico

Vicente Tomás **Pozo** Tapia
Universidad Alberto Hurtado
Chile
pozotapiav@gmail.com
Macarena **Valenzuela** Molina
Universidad Alberto Hurtado
Chile
mvalenzu@uahurtado.cl

Resumen

La argumentación en el aula de la matemática ha sido un enfoque de estudio durante los últimos años, principalmente, a través de la aplicación del modelo de Toulmin o derivaciones de este. En Chile el grupo de investigación Competencias Matemáticas y Solar & Deulofeu, han estudiado el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas con foco en el rol docente como promotor de dicha habilidad matemática. Este estudio de caso, tiene como objetivo, verificar si las condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación propuesta por Solar & Deulofeu, al ser aplicado en aulas de matemática con estudiantes de educación primaria, todo esto, a través del análisis de transcripciones de registros audiovisuales, siendo capaces de evidenciar, que la relevancia de la planificación y las estrategias comunicativas del docente son las principales herramientas que permiten la argumentación en la enseñanza de la matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Primaria; Argumentación; Situaciones argumentativas; Modelos argumentativos.

Objeto de estudio

El objeto de estudio del presente análisis se centra en las interacciones entre estudiantes con intervenciones docentes en un octavo básico según el currículo chileno, en la unidad de geometría, precisamente, la validación y aplicación del teorema de Pitágoras.

Fundamentación teórica

El presente estudio se centra en la argumentación en el aula en el contexto de la enseñanza de la matemática, donde, la base teórica de la argumentación se basa en el modelo de (Toulmin, 1958), pero, considerando las modificaciones propuestas por el principal marco de referencia de este estudio en Chile, (Solar & Deulofeu, 2016), las cuales toman como marco de referencia a la argumentación colectiva de Krummheuer (1995), que apunta a "cualquier instancia en que el profesor y los estudiantes establecen una sentencia que se puede asociar a la argumentación" (Solar & Deulofeu, 2016).

En base a estas modificaciones, se considerarán los siguientes conceptos claves para el posterior análisis de datos, los cuáles son:

a) Dato: Fundamento inicial que permite la argumentación, ante el cual, se toma una postura posteriormente.
b) Garantía: Determina si el fundamento inicial es válido o no (toma de postura)
c) Respaldo: Son los medios por los cuáles se busca sostener la garantía, siendo estos leyes, demostraciones, fórmulas o principios mediante los cuales se busca dar solidez a la garantía.
d) Refutador: Es el elemento que pone en duda al argumento, que debilitan el argumento y ponen en duda su tránsito hacia la conclusión. Al igual que la garantía, posee un respaldo.
e) Conclusión: Instancia en que un argumento es validado y aceptado por el medio social al que se presenta.

Otro elemento teórico relevante es lo referente a la oportunidad de participación, que se centra en que todo el grupo-curso tenga la posibilidad de participar, siendo clave el rol del docente al no validar o invalidar las garantías y respaldos de los estudiantes, sino que, dejando esta validación a los estudiantes. Ligado a esto, está presente la gestión del error, la cual se refiere, a que las ideas erradas funcionen como una oportunidad de aprendizaje clave en el proceso de desarrollo de cada estudiante. La última, es referente al tipo de preguntas, las cuáles, básicamente, se centran en que permitan respuestas que impliquen una explicación (más allá de un sí o un no), que no sean retóricas, realizar contra preguntas y que siempre las preguntas sigan el hilo conductor de la conversación. Estos tres elementos, son señalados por Solar & Deulofeu (2016) como las estrategias comunicativas que debe tener el docente.

Metodología

La metodología utilizada para el presente análisis de casos se centra en una metodología de estudio cualitativo (Flick, 2007), debido a su orientación hacia la investigación de las relaciones sociales entre individuos, a su vez, este estudio de casos es de carácter interpretativo descriptivo al analizar las acciones de las personas en un contexto específico (Manrique, Valle, & Revilla, 2022).

Los datos se interpretan a partir de un análisis de contenido (Flick, 2007), detectando temas en común, los cuáles, serán los momentos de la clase donde estudiantes argumenten su toma de decisiones o procedimientos en base a una situación previamente diseñada.

Finalmente, para llevar a cabo esta investigación, se utiliza como base el modelo de Flick (2007), utilizando las preguntas: ¿Está presente la argumentación en las aulas de matemática?, ¿Qué elementos permiten o facilitan la argumentación en la enseñanza de la matemática?

A partir de estas preguntas, el objetivo será determinar si los elementos planteados por Solar & Deulofeu (2016) incentivan la argumentación en la enseñanza de la matemática.

Dadas estas condiciones, el estudio requiere de la elaboración de una secuencia de clase que permita responder a la segunda pregunta, buscando comprobar si el diseño de clase permite desarrollar la argumentación en el aula en el contexto de la enseñanza de la matemática.

Para el presente estudio, el proceso de diseño de clase y posterior investigación toma como base la elaboración del plan de clase señalado por (Solar & Deulofeu, 2016), donde, su construcción debe orientar hacia un conflicto de ideas y también, a intervenciones que permitan la argumentación. Este proceso es:

1. Construcción de situación modelada: Alude a la construcción del momento sobre la cual se desarrollará, potencialmente, la argumentación en la clase. Esta debe partir desde una problematización previa del objeto de estudio, ante la cual, se estructura una propuesta de clase que permita a los estudiantes argumentar sus metodologías de resolución de problemas.
2. Espacio autónomo: Los estudiantes se enfrentan a la situación modelada y seleccionan la forma en que resolverán esta situación problemática. La situación, primeramente, debe presentar un objetivo claro que permita que en el espacio autónomo, los estudiantes puedan realizar una elección que les permita resolver el problema y/o ajustarlo a un elemento curricular.
3. Resolución individual de situación modelada: En este punto, se debe mediar según el medio de resolución seleccionado, de forma que, cada estudiante reciba apoyos que apunten a una autonomía progresiva que le permita resolver o no resolver la situación problema, siendo primordial que cuestionen la elección de su medio de resolución.
4. Presentación de resultados: Cada estudiante presenta su resultado (dato) el cual vendrá acompañado de una garantía la cual puede ser respaldada mediante una demostración y/o refutada por un par, mediante otra garantía con otro respaldo. En este punto, se desarrollan los puntos de conflicto que dan lugar a la argumentación.

Posterior a la implementación del diseño, prosigue el levantamiento de datos, el cual se centra en la selección de argumentos y planteamientos presentados por los estudiantes en el paso 4 y categorización en base al modelo de Solar & Deulofeu (2016). Para esto, el método de recolección de datos consiste en la transcripción de un registro audiovisual con el objetivo de tener registro de los argumentos de los estudiantes y también posibles representaciones gráficas.

Resultados

En base a las categorías de análisis presentadas previamente, en el caso estudiado los estudiantes lograron levantar cuatro categorías (datos, garantías, respaldos y refutador) de manera autónoma, siendo la conclusión un elemento mediado por el docente a cargo de la actividad.

Estas categorías, nacen a partir de la demostración del Teorema de Pitágoras a través del uso de material concreto o a partir de un registro simbólico, donde, cada estudiante, desarrolla una manera de demostrar el teorema para posteriormente, presentar su resolución en el pizarrón. A continuación, esta resolución (dato) es sostenida a través de una garantía (en este caso, algebraica o proporcionalidad) con su determinado respaldo (desarrollo de la resolución).

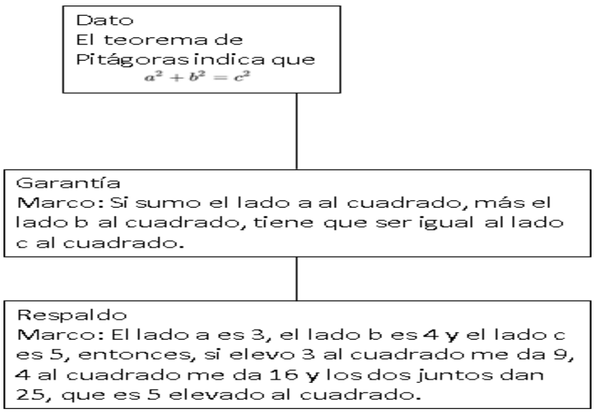


Figura 1. Argumentación de Marco según modelo de Toulmin.

La argumentación de Marco está acompañada que en cada lado del triángulo, coloca un pequeño cuadrado acompañado de sus medidas (3, 4 y 5 cm respectivamente).

Ante esto, se da la siguiente situación:
Profesor: ¿Están de acuerdo con lo que dijo Marco? Carla: No, yo lo hice de otra manera profesor
Josefa: Pero igual está bueno, ¿o no?
Carla: No, porque no usó ninguna figura.

Carla se acerca al pizarrón, yuxtapone un cuadrado a cada lado del triángulo, utilizando los valores de cada lado del triángulo (3cm, 4cm y 5cm) como los valores de los cuadrados.

Carla: Si junto este cuadrado [señalando el cuadrado de lado 3 cm] y este [señalando el cuadrado de lado 4 cm] formará este cuadrado [señalando este cuadrado de lado 5 cm).
Karina: Es como lo mismo, pero con dibujos, ¿o no? Profesor: Al parecer, ¿Qué dice Marco?
Marco: (asiente con la cabeza)
Profesor: ¿Y están de acuerdo con lo que hizo Carla?
Martin: Si, nosotros con Marcela lo hicimos de la misma forma, armamos dos cuadrados de lado 3 y 4, y después los juntamos en la diagonal del triángulo.
Profesor: ¿La diagonal? Martin: La hipotenusa profesor.
Profesor: Entonces, ¿Qué significa lo que hicimos?
Camila: Que si armamos cuadrados al lado de la base y de la altura, y los juntamos, es el cuadrado que se forma al lado de la hipotenusa.

Como bien indica (Solar & Deulofeu, 2016), uno de los elementos más relevantes para hablar de argumentación en el aula es la refutación, ya que da cuenta de posicionamientos opuestos con respecto a una premisa. En este caso, si bien, las resoluciones de Marco y Carla, son correctas, la resolución de Marco apunta a dar una garantía algebraica combinada con elementos geométricos, donde si bien, en la clase resolvió a partir de la utilización de cubos para representar cuadrados, esto, indica que utiliza este medio para darle explicación a la resolución algebraica, y por ende, es esta última resolución la que prima en su argumentación.

En cambio, Carla, utiliza en todo momento la representación gráfica de elementos geométricos relacionados a las representaciones de cuadrados construidas a partir de cubos, la cual, fue el método escogido por la mayoría del curso para la resolución de la situación inicial, la cual, tenía como indicaciones, utilizar cubos o papel para demostrar geométricamente la validez del teorema de Pitágoras, apareciendo aquí, una argumentación colectiva a partir de una refutación individual.

A raíz de esto, surge la pregunta ¿Por qué gran parte del curso aprueba la argumentación de Carla y no tanto la de Marco? Esta pregunta haya respuesta en que el objetivo de la actividad era resolver mediante la geometría, es por esto, que los estudiantes logran dar cuenta de esta situación y a raíz de aquello presentan un argumento refutador ante la resolución presentada por Marco, ya que, si bien, está resuelto correctamente, no explicita o no predominan argumentos geométricos para confirmar la validez del teorema.

Discusión de resultados

Al comparar los resultados de este análisis con los obtenidos por Solar & Deulofeu (2016), se pueden observar diversos elementos relevantes y que guardan relación entre sí, siendo capaces, de evidenciar en qué medida, el modelo presentado fomenta la argumentación en el contexto de la enseñanza de la matemática.

Estructura de la argumentación

Comparando los casos presentados por (Solar & Deulofeu, 2016), los cuales incluyen a la docente Matilde y Mónica, en las clases de estas profesoras al estar presente la argumentación, se presenta la estructura planteada por el autor, donde, a partir de un dato o premisa inicial conflictiva (ya sea, planteado por la docente o por un estudiante), es donde se originan los planteamientos de los estudiantes, donde, un estudiante presenta su garantía y a continuación, otro actúa como refutador de esta.

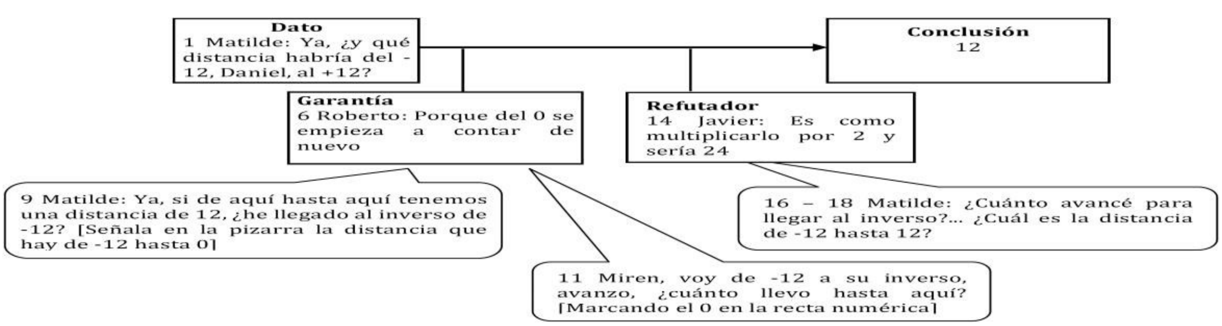


Figura 2. Cuadro de argumentación presentado en Solar (2016).

En la clase analizada, en la figura 1 se vio la argumentación de Marco según la estructura de Toulmin, donde, al finalizar el análisis de datos, se desprendió el siguiente cuadro, el cual, tal como se dio en los casos presentados por Solar & Deulofeu (2016), se presentan las situaciones de garantía y refutación con sus respectivos respaldos, de manera que, a la luz de la discusión de casos, se puede concluir que este modelo de argumentación se replica al ser aplicado en diferentes contextos.

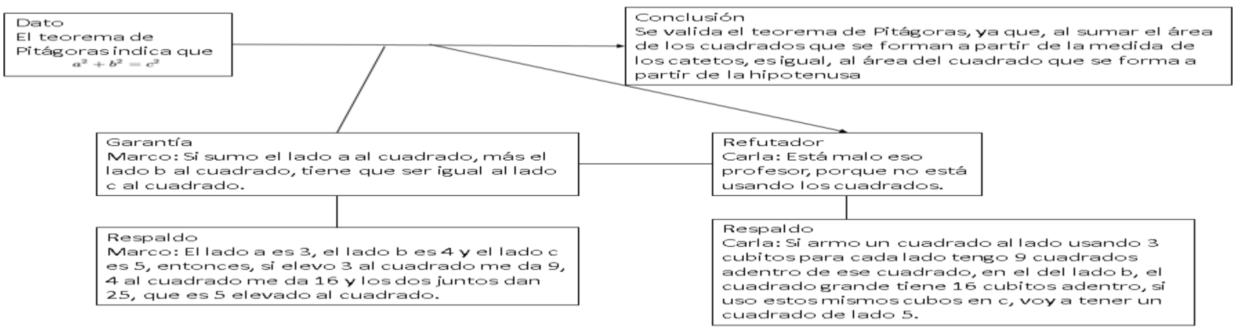


Figura 3. Mapa de argumentación de la clase según el modelo de Toulmin.

Relevancia de la planificación

Al observar los resultados, se puede desprender que la conclusión del curso pareciese indicar que el resultado de Marco es incorrecto, y es aquí, donde toma relevancia la planificación de clase que señala (Solar & Deulofeu, 2016), porque, si el objetivo de la actividad no hubiese sido especificado por el docente, la situación de argumentación para decir que la resolución de Marco estaba errada no se hubiese generado, ya que, corresponde a una correcta aplicación del teorema de Pitágoras, pero, el objetivo al ser "Validar el teorema de Pitágoras a través de material concreto" logra que la resolución de Marco no coincida con el objetivo de la actividad.

Esta situación al ser comparada con el caso de la docente Karina en (Solar & Deulofeu, 2016), busca aportar al modelo de planificación de clases presentado, ya que, en su texto señala que la planificación debe prevenir momentos de potencial argumentación y definir la gestión docente.

La planificación debe considerar la construcción de aquellos momentos e incitarlos en la planificación de la clase, es a raíz de esto, que este estudio busca aportar a que la gestión docente no solo debe remitirse a las habilidades comunicativas, sino que, también a intencionar los momentos de argumentación además de preverlos, de forma que el elemento procedimental y objetivo de la clase sea la argumentación.

Intencionar la argumentación en el aula es el punto de partida, donde cada estudiante desarrolla su método a través de la elección de un material concreto particular y que la explicitación de estos es en el marco de la oportunidad de participación (Solar & Deulofeu, 2016), donde, a través de la gestión del docente, los estudiantes participan de la discusión exponiendo sus argumentos, siendo estos apoyados o refutados por la clase.

Habilidades comunicativas para fomentar la argumentación

Otro elemento visualizado a partir del análisis, es que, las estrategias comunicativas del docente son las que incitan a la argumentación (Solar & Deulofeu, 2016), porque, en el momento que Marco presenta su resolución, es la pregunta que hace el docente al curso la que permite que Carla presente su refutación, pero, no tan solo aquello, pues, en el momento que Carla termina de argumentar su método de resolución, el docente, en lugar de señalar que está correcto o errado, interpela al curso si es que están de acuerdo con la resolución, siendo, los mismos integrantes de estos quienes indican que está correcto y la justificación del por qué el método es acertado.

Este elemento también está presente en (Solar & Deulofeu, 2016), donde, tanto en el caso de Matilde y Mónica, ninguna de las docentes indica el error inmediatamente (cabe destacar que en aquellos casos son errores conceptuales y no procedimentales como en el presente caso), por ejemplo, el caso de Matilde, busca que los estudiantes se den cuenta del error antes de advertirlo y Mónica busca que los estudiantes con respuestas correctas e incorrectas expongan, sin validar estas previamente, posibilitando así la argumentación, situación que también ocurre en el presente estudio, validando la relevancia de las habilidades comunicativas.

Conclusiones

Aquí, toma vital importancia, la situación modelada, ya que, considera cualquier tipo de respuesta por parte de los estudiantes y son ellos mismos quienes logran decidir si se acogen a ciertos planteamientos de sus pares y por qué motivos, donde el espacio autónomo cobra relevancia, ya que, los planteamientos surgen a través de la autonomía de resolución de un problema dado en la situación modelada. Esta autonomía, permite seleccionar los medios por los cuales se resolverá una determinada problemática, donde, no será necesaria una corrección inmediata por parte del docente en caso de elegir un medio que no logra cumplir el objetivo, puesto que, son los mismos estudiantes, que a través de la argumentación, validan el medio y la resolución como tal.

Esto, no significa que el docente sea un espectador de la clase, sino más bien, apunta a una mediación en el instante de resolución y parcialmente en el momento de presentación de argumentos en los casos que sea necesario, siendo, su vital aporte, en las conclusiones, las cuales, serán parte de la sistematización de la clase en el cierre de esta, a raíz de aquello, se vuelve relevante tomar registro continuo de la resolución y argumentos de los estudiantes en el pizarrón, de manera que, a partir del conocimiento creado a partir de los propios estudiantes, que se pueda generar una sistematización contextualizada. A su vez, como bien se indicó en el análisis de resultados, las habilidades comunicativas para promover la argumentación son claves, en especial, la gestión del error, ya que su correcta gestión, permite que sean los estudiantes quienes adviertan los errores y el porqué de estos.

Se destaca también, el rol de la planificación en el aula, ya que, el diseño de la clase es la que permite que se establezcan momentos para la construcción inconsciente de un argumento, la cual se traduce en la resolución individual, donde, en el momento de la argumentación, los estudiantes explicitan esta resolución como su argumentación, señalando el paso a paso y relacionando esto con el objetivo de la actividad y/o clase.

A su vez, se puede concluir que no siempre los medios seleccionados tendrán estrecha relación con el argumento a presentar, ya que, estos, si bien, pueden reforzar el argumento presentado, como también, reforzar ideas adquiridas previas a la clase, de manera que, sea esa idea o medio de resolución el que sea presentado como argumento y no el seleccionado en el espacio autónomo, aunque este caso, suele darse en estudiantes más aventajados en cuanto a los conocimientos generales del curso.

Referencias y Bibliografía

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa.* Madrid: Ediciones Morata.

Manrique, L., Valle, A., & Revilla, D. (2022). *La Investigación Descriptiva con Enfoque Cualitativo en Educación.* Lima.

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*, 1092-1112.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Argumentar para demostrar matemáticamente en el aula

Camilo **Arévalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Kmilo741a@gmail.com
Oscar J. **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Mónica A. **Diaz** Guarín
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Andreadg_323@gmail.com
Liz P. **Acero** Molina
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
lianllely@gmail.com

Resumen

Se indagó por los esquemas de argumentación que emergen de un grupo de estudiantes al interactuar con una situación problema en torno a la demostración geométrica. Algunos trabajos constatan el fracaso de la capacidad de los estudiantes para formular una demostración en matemáticas, Gascón (2001).
Ahora bien, se habla de argumentar, ya que está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo o en los que se certifica si algo es falso o verdadero; en este sentido la investigación analizará los esquemas argumentativos durante el proceso de demostración.
Con los elementos de reflexión determinados; se espera que un docente pueda considerar criterios asertivos, para valorar el conocimiento al que recurre un estudiante cuándo se enfrenta a un proceso de resolución de problemas y al análisis de los esquemas de argumentación que subyacen en la actividad demostrativa.

Palabras clave: Demostrar; Argumentar; Resolución de problemas; Esquema argumentativo; Situaciones problema; Situaciones didácticas.

Planteamiento del problema

Se indagó por los esquemas de argumentación que se pueden generar en cualquier espacio abierto a la disertación o al debate, obviamente desde ideales, posturas, justificaciones, conjeturas o razones para confrontar a un grupo de personas y buscar la veracidad de estas.

Un estudio realizado por Gutiérrez (2001), determina que los estudiantes no experimentan la necesidad de demostrar, especialmente al momento de establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración, pero esto se debe a que los estudiantes conciben la matemática como la memorización de algoritmos, limitándose a copiar los procesos que plantea y desarrolla el docente en sus clases, como señala Gascón (2001) y Balacheff (1988), quienes formulan; ¿Qué nivel de comprensión alcanzan los estudiantes en una demostración, si ésta se basa única y exclusivamente en la imitación?

Se deduce que los estudiantes no ven la demostración como un proceso de validación de sus conjeturas, sino que, en general, se reducen a explicaciones confusas que no satisfacen lo que se esperaría pudieran argumentar al momento de demostrar, ya que centran su mirada en el producto final y en la imitación/reproducción de algoritmos.

Ahora bien, la actividad de generar argumentos debe tener un carácter social y subyacen en el momento de validar cualquier tipo de afirmación (Toulmin, 2003), para ello, es necesario que los problemas que exijan la actividad argumentativa, deben ser abiertos, es decir, no podrá asegurarse un resultado o conclusión rápida, ya que como lo afirma: “Para el caso de la elaboración de argumentos orales, debe examinar que la solución no se restrinja a elaborar una respuesta sino a buscar alternativas de solución que garanticen el carácter de claridad, concisión, adecuación y de menor ambigüedad” (p. 3).

Por tal razón, al efectuar razonamientos sobre una situación, se garantiza que el estudiante genere conocimientos que posteriormente pueda aplicar en otra situación, como dice Duval (2000) (Citado por Gutiérrez, 2001), “es posible llegar a demostrar en el aula de clase desde los propios procesos de argumentación del estudiante, concibiendo el argumentar y el demostrar como un continuo, aunque con procesos diferentes de abstracción” (p. 145); esto para resaltar la actividad del estudiante, como sujeto crítico, propositivo y reflexivo de sus acciones.

En este sentido, la investigación tuvo como propósito responder a la pregunta: ¿Cuáles son los esquemas de argumentación que emergen en la práctica demostrativa de estudiantes de grado noveno y qué características tienen dichos esquemas?

Fundamentación teórica

Antes de trabajar en la tarea demostrativa es necesario reconocer que es demostrar, como se demuestra y que características debe tener un argumento para llegar a demostrar, es aquí cuando se establece la relación entre argumentar y demostrar que, aunque no son lo mismo, son procesos dependientes a la hora de abordar una serie de situaciones problema.

Ahora bien, Gutiérrez (2001) propone una clasificación que complementa la teoría de Balacheff (1988), está se enfoca en la interpretación, el análisis y razonamiento de situaciones en la geometría, enmarcando las demostraciones en dos grandes grupos, demostraciones empíricas en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las demostraciones deductivas, que se basan en el análisis y razonamiento de propiedades de abstracción formal. (Véase la figura 1)

Demostraciones empíricas	Demostraciones deductivas
Empirismo naif o ingenuo: los estudiantes seleccionan ejemplos específicos, reconociendo propiedades a través de la manipulación o la visualización (métodos perceptivos)	**Experimento mental:** aunque la demostración puede llegar a ser deductiva y abstracta, todavía se reconoce la ayuda del ejemplo, por tal razón se enmarcan dos tipos de experimentos; los *transformativos*, cuando la demostración se basa en la modificación de un enunciado y los *axiomáticos*, cuando la demostración es lógica y se sustenta a través de teoremas, definiciones y postulados, que garantizan y verifican su proceso.
Experimento crucial: aunque los estudiantes saben que es primordial la generalización en la demostración, lo hacen con el ejemplo menos especifico, estableciendo cuatro estructuras, la *ejemplificación*, cuando la demostración es mostrar un experimento crucial, el *constructivo*, cuando demuestra como obtuvo el ejemplo, el *analítico*, cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas y el *intelectual*, cuando la demostración se separa de lo empírico y se basa en propiedades matemáticas y relaciones deductivas.	
Ejemplo genérico: buscan evidenciar las transformaciones y propiedades abstractas, a través de la lógica matemática, pero todavía por medio de un ejemplo, teniendo en cuenta la etapa de generalización.	**Demostración formal:** sus demostraciones muestran una serie de pasos lógicos formales y sin recurrir a ejemplos.

Figura 1. Categorización de los procesos de prueba y demostración. Gutiérrez (2001)

Para identificar las acciones de los estudiantes, se consideró a Mason, Burton & Stacey (1992), quienes aluden a la resolución de problemas en matemáticas desde los procesos cognitivos “particularización y generalización” y con la propuesta de Polya (1989) del quehacer matemático dentro de un ambiente de resolución de problemas. (Véase la figura 2)

Una de las discusiones en las que se enmarcó la investigación, y que es necesario aclarar, es que los procesos de argumentación son diferentes a la demostración, ya que el primero habla de criterios de pertinencia y convencimiento del otro y de sí mismo, mientras que el segundo debe tener un sustento teórico válido y formal para mostrar la veracidad de un enunciado. El fin de cada una es diferente, la argumentación busca lo creíble en actividades de coherencia y la demostración busca la verdad desde los postulados de la lógica.

	Comprender el enunciado	Confección de un plan	Ejecución del plan	Examinar solución/ visión retrospectiva
POLYA	*1.- ¿Entendemos el problema? 2.- ¿Podemos replantear el problema en nuestras propias palabras? 3.- ¿Distinguimos cuáles son los datos? 4.- ¿Sabemos a qué queremos llegar? 5.- ¿Hay suficiente información? 6.- ¿Hay información extraña? 7.- ¿Es este problema similar a algún otro que hemos resuelto antes?*	*1.- Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura). 2.- Buscar un Patrón 4.- Resolver un problema similar más simple. 6.- Hacer una figura. 7.- Hacer un diagrama 8.- Usar propiedades 9.- Resolver un problema equivalente. 12.- Trabajar hacia atrás. 13.- Usar casos. 14.- Usar un modelo. 17.- Usar análisis dimensional.*	*1.- Implementar la o las estrategias que dedujimos o escogimos. 2.- Tomar el tiempo razonable y que sea necesario para resolver el problema. 3.- solicitar sugerencias 3.- Si es necesario hay que volver a empezar.*	*1.- ¿Es la solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema? 2.- ¿Hay una solución más sencilla? 3.- ¿Podemos ver cómo extender nuestra solución a un caso general?*
	Fase de abordaje	**Fase de ataque**		**Fase de revisión**
Mason Burton Stacey	Prepara el terreno para un posterior ataque eficaz y se debe dedicar el tiempo conveniente, es decir ¡leer atentamente el problema! El trabajo en esta fase se estructura hacia tres preguntas: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?	Esta fase inicia cuando el problema ya se ha instalado en la mente, cuando la persona se ha apropiado de él y termina cuando se abandona o resuelve. En esta fase se pueden poner en juego diversos planes y ensayar diferentes enfoques.		Cuando se tiene una solución o se abandona el problema se revisa el trabajo hecho. Esto requiere comprobar lo que se hizo y reflexionar sobre los procesos a la par

Figura 2. Fases y etapas de resolución de problemas Polya (1989) y Mason, Burton & Stacey (1992)

Un argumento tiene lugar cuando a partir de unos **datos** se elabora una **afirmación** (conclusión). El paso de los **datos** a la **conclusión** es el **garante** y hace referencia a una regla o principio general. El **garante**, también se debe sustentar en un grupo de afirmaciones que hacen parte de un conjunto de contenidos o creencias denominado **respaldo**. Las refutaciones o reservas son el conjunto de circunstancias en las cuales el garante se podría anular. (Carranza, et al., 2013). (Véase la figura 3)

El aprendizaje en matemáticas debe ser significativo para el estudiante y el docente debe estar atento al desarrollo y evolución de este, enfatizando primordialmente en el saber matemático, como lo menciona Camargo (2013); es así como debemos librarnos de evaluaciones donde cada vez es más recurrente el examen escrito y donde los argumentos del estudiante frente a lo que hace no es tenido en cuenta.

Según Vygotski (1929) (Citado en Vergel, 2014) se puede plantear una distinción entre los procesos mentales naturales “inferiores” de la percepción, la atención, la memoria y la voluntad, ya que estas se enfatizan en proceso generales y las funciones “superiores” que aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos o en este caso como se le denominaría a la emergencia de los esquemas de argumentación a la hora de realizar la denostación en geometría.

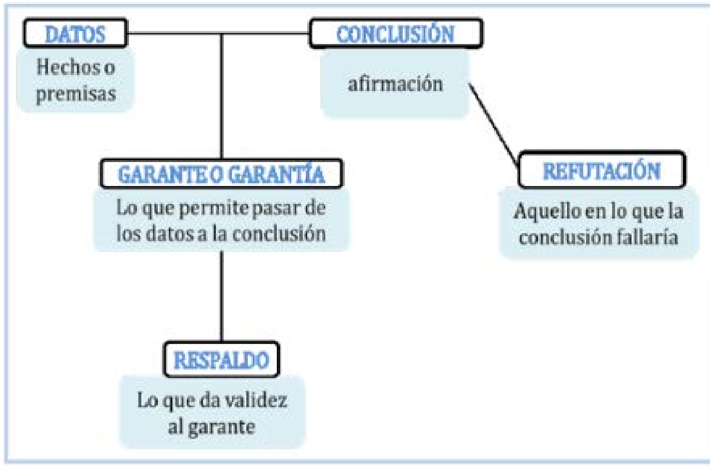


Figura 3. Estructura de un argumento de Toulmin. Carranza (2013)

Metodología de investigación

La propuesta se desarrolló como una investigación de carácter cualitativo en tanto se encarga de indagar y describir textualmente lo sucedido en los momentos de resolución de problemas; desde un diseño fundamentado en los esquemas de argumentación que emergen al demostrar.

Es de carácter descriptivo, porque busca definir y especificar los esquemas de argumentación que intervienen en el proceso de resolución de situaciones geométricas, en cuanto su principal objetivo es identificar y caracterizar aquellos esquemas argumentativos que se generan en el aula con miras a trabajar frente a la necesidad de demostrar en geometría.

Al adoptar la investigación de carácter cualitativo como enfoque teórico y metodológico, fue necesario reconocer el contexto en el que se desenvuelve el estudiante, con el fin de que las situaciones problema que se propongan sean creíbles, lógicas y permitan acciones de estos para darles solución.

La investigación se llevó a cabo en la IED Hernado Durán Dussan que se encuentra ubicada en la localidad de Bosa, cuenta con 800 estudiantes en la jornada mañana; es de naturaleza oficial, imparte una educación integral fundamentada en los valores. La población es el grado Noveno que lo integran 42 estudiantes, dependen económicamente del sustento de sus padres y sus edades oscilan entre los 14 y 16 años.

Las técnicas de recolección de la información fue la observación, por tal motivo se usaron dispositivos mecánicos (videograbación), estableciendo un registro fílmico de los diversos aspectos y sujetos observados.

La situación problema presentada a los estudiantes puso en juego su creatividad para diseñar y crear; por lo que se fue indispensable obtener datos a través de los archivos, cálculos o registros elaborados por el estudiante, por tanto cada integrante del grupo llevaba un cuaderno resolutor (Carpeta); en el que consignó cada proceso, argumento, idea, duda, etc. que surgía durante el proceso demostrativo; el objetivo de ello es que no se pierda ninguna afirmación, argumento, justificación o pregunta, que se genere en el proceso demostrativo.

Cabe aclarar que las dos primeras sesiones se realizaron de manera individual, mientras el estudiante identificaba la situación y se apropiaba del trabajo, durante las siguientes cuatro sesiones se desarrolló de forma grupal, considerando que la producción argumental y discursiva de los estudiantes emergía mucho más al trabajar en equipos.

Es importante aclarar que, en las carpetas de los estudiantes, se plantearon preguntas orientadoras y la situación problema con su respectiva gráfica, (Ver figura 4):

Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de triángulo equilátero, bordeado por dos canales de riego. Él quiere sembrar plantas de arroz de tal forma que la distancia de cada planta a cada canal sea la misma

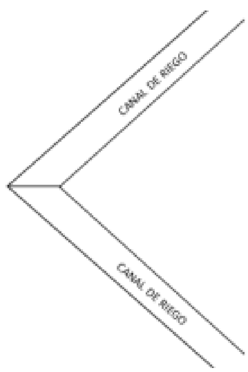


Figura 4. Presentación de la situación

Las preguntas orientadoras de la situación:

- ¿Dónde se podría llegar a sembrar las plantas? (Ten en cuenta el gráfico)
- ¿Cuántas plantas de arroz se pueden sembrar?
- ¿Cómo podría describirle a Don Gustavo el sitio donde debe sembrar las plantas? (Ten en cuenta el gráfico)

Ahora bien, antes de la implementación, la función del investigador era fijar diferentes respuestas que los estudiantes podrían realizar a cada pregunta, estableciendo variables en el proceso de resolución de problemas y brindando al estudiante la manera de abordar la situación sin llegar afectar o inmiscuirse en el proceso de resolución de estas.

Descripción de los datos

En la solución planteada por la estudiante Nº4 (Ver figura 5) al determinar ¿dónde deben estar ubicadas las plantas?, señala que las plantas deben quedar entre los canales de riego o quedar exactamente en medio de ellos.

Se presenta la articulación de la propuesta de Toulmin (2003) respecto a las evidencias que surgieron por parte de la estudiante; de sus afirmaciones y razones se generó el siguiente esquema que representa el argumento emitido para convencer al docente de la solución propuesta; su manera de convencer se enfatiza en explicar las razones por las cuales garantiza que las plantas estén ubicadas en un sitio especifico; pero, cabe aclarar, que al recurrir al contenido y definición de los paralelogramos la estudiante garantiza dicha cuestión, estableciendo una red de conceptos enlazados en los que podría llegar a construir conceptos como la bisectriz teniendo en cuenta las propiedades y características del mismo.

En esta ocasión se transcribe la producción de la estudiante al responder la entrevista y por medio del dialogo se enuncia lo declarado y se contrasta con la teoría propuesta para rescatar los elementos del argumento y de alguna manera llegar a caracterizarlos.

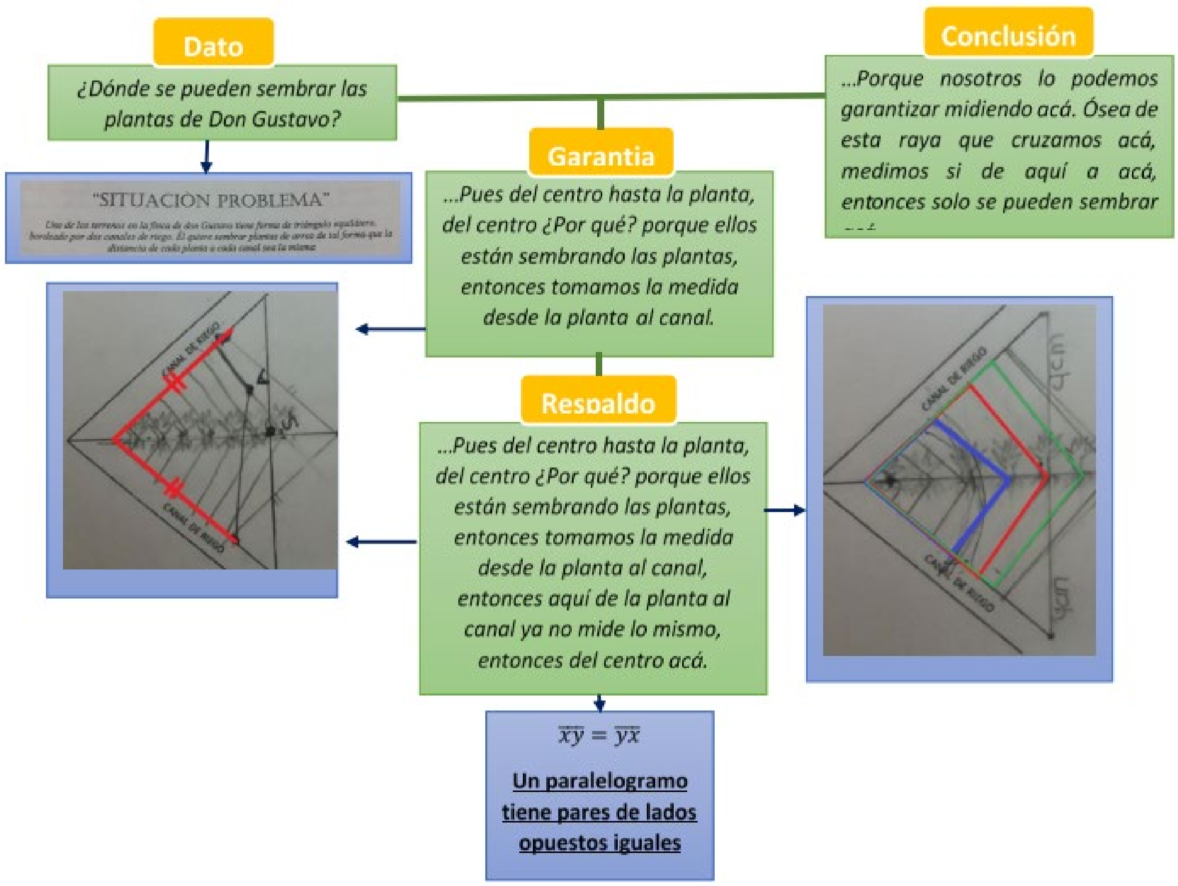


Figura 5. Esquema de argumentación

En el esquema argumentativo se contemplan los elementos de todo modelo de argumentación de Toulmin (1958); en el que la estudiante expone sus diseños en forma de dato estableciendo que es lo que le pide la situación, lo que plantea y lo que expone su enunciado.

Se evidencia la articulación entre los conceptos teóricos de la propuesta y los datos que surgieron en la implementación del instrumento, para ello se construyó el esquema de argumentación, aseverando que este alcanza cuatro de los elementos que tiene un argumento.

Conclusiones y reflexiones finales

Como se evidencia, la resolución de situaciones problema garantiza el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, constituyendo distintas definiciones matemáticas; donde se ponen en juego los elementos del modelo argumentativo de Toulmin, apoyado en las justificaciones que emergen en una secuencia argumentativa lógica dentro de las matemáticas.

En este sentido, se manifiesta que el modelo argumentativo de Toulmin es aplicable en cualquier espacio abierto a la disertación, al debate y al diálogo, no solo para esquematizar la ruta argumentativa, sino también para caracterizar las acciones de reflexión sobre la argumentación.

Es por ello, que la propuesta generó esquemas de argumentación dentro de procesos de socialización y resolución de problemas, y de esta manera surgió la necesidad de generar procesos de justificación en el aula, donde el estudiante en lugar de memorizar y reproducir, se concientice sobre la responsabilidad de crear, justificar y validar, superando algunos problemas de enseñanza de la demostración y su trivialización en las prácticas docentes actuales.

Para finalizar, desde la propuesta de Gutiérrez (2001) no solo se hablaría de una demostración empírica que nace desde los mismos procesos ejercidos por el estudiante, sino por el contrario se estaría hablando del paso a las demostraciones deductivas y más específicamente a la etapa de experimento mental, ya que la estudiante por medio del ejemplo y al tomar medidas exactas del gráfico que otorgaba la situación, logró determinar que los lados del paralelogramo iban a ser iguales y que justo el lado que compartían se convertiría en el sitio específico donde Don Gustavo debía sembrar las plantas de arroz y todo esto, desde la caracterización con los elementos del argumento que plantea Toulmin.

Bibliografía y referencias

Balacheff, N. (1988). Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas. (Traducción. Primera Edición: Agosto 2000). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Camargo, L. Gutiérrez, A. & Fiallo, J. (2013). Acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista de integración, 31(2), 181-205.

Carranza, E., Álvarez, I., Ángel, L., & Soler, M. (2013). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. Números, 85(1), 75-90.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), 129-159.

Gutiérrez, A. (2001). Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). Pensar matemáticamente. (1. ª ed. - 2. ª reimpresión, 1.992). Barcelona: Labor.

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Zugazagoitia). México: Trillas

Toulmin, S. (2003). The uses of argument. (Updated Edition). England: Cambridge University Press.

Vergel, R. (2014). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9(3), 193-215.

Avançando o Pensamento Matemático com base nos resultados das Neurociências Cognitivas[1]

Karly B. **Alvarenga**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
karly@ufg.br

Resumo

Este trabalho apresenta um Modelo Teórico de Construções Mentais Matemáticas e alguns resultados de análises realizadas com base nele. Tal modelo foi elaborado subsidiado pelas ideias sobre o Pensamento Matemático Avançado e pelas Neurociências Cognitivas. A pesquisa faz parte de um conjunto de investigações realizadas pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Goiás-Brasil. A coleta de dados foi realizada por meio das resoluções de provas de estudantes, tanto da educação básica, quanto superior, cedidas e autorizadas por eles. Os resultados indicam que se eles têm consciência das possíveis construções mentais matemáticas e as empregam ao resolverem as situações-problema, eles podem avançar seus pensamentos matemáticos.

Palavras-chave: Construções Mentais; Epistemologia Matemática; Neurociências Cognitivas; Pensamento Matemático; Pesquisa Qualitativa; Pesquisa Interpretativa; Pesquisa teórica-empírica e descritiva; Modelo Teórico; Matemática.

O contexto

Este trabalho apresenta os resultados de um recorte de um conjunto de investigações realizadas pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás- Brasil. A maior parte desses estudos está centrado teoricamente, tanto nos referenciais das Neurociências Cognitivas, mais especificamente da Neuromatemática, quanto das ideias sobre o Pensamento Matemático

[1] Esse trabalho não seria possível sem a participação dos componentes do GEEM e sem o financiamento de bolsas para eles da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Avançado (PMA) (Dreyfus, 1991; Harel & Sowder, 2005; Tall, 1995; Dubinsky & McDonald, 2001), aqui encarado como O Avanço do Pensamento Matemático (Alvarenga et al.,2018; Alvarenga & Domingos, 2020). Desde o início do século XXI, com o avanço das tecnologias de imageamento os pesquisadores de vários países têm direcionado suas pesquisas em mapear as áreas de ativação cerebral quando se estuda matemática. (Leikin et al., 2014; Amarilc & Dehaene, 2018; De Smedt & Verschaffel, 2010; Alvarenga, 2020; Dehaene, 2022 e outros).

Assim, nesse contexto, temos investigado as construções mentais (ou ações mentais, ou ainda, processos mentais) matemáticas de estudantes da educação básica e superior quando estão resolvendo situações-problema. Baseados então nas ideias, principalmente, de Dreyfus (1991), Harel e Swoder (2005), Dubinsky e McDonald (2001) e nos resultados de estudos relacionados à Neuromatemática, desenvolvemos um modelo teórico de construções mentais matemáticas (MTCMM) e ele serviu de referência para analisarmos e classificarmos tais ações matemáticas.

Esse modelo explicita diversas possibilidades de ações as quais os estudantes e professores conscientes delas, podem melhorar os desenvolvimentos de seus pensamentos matemáticos.

Modelo Teórico de Construções Mentais Matemáticas (MTCMM)

A abstração é a chave mestra da aprendizagem matemática e pode ser compreendida sob diversos ângulos e aqui nós corroboramos com a caracterização de Dreyfus (2014, p.6) que para ele "Os educadores matemáticos, por outro lado, são mais interessados nos processos que levam aprendizes a compreender uma estrutura do que na estrutura em si. [...], a abstração é um processo e não um objeto" *(*Abbagnano,2007, p. 15*)*. Da mesma forma, em linhas gerais "O processo todo do conhecer pode ser, segundo Aristóteles, descrito com a A.[sic]: O conhecimento sensível consiste em assumir as formas sensíveis sem a matéria assim como a cera assume a marca do sinete sem o ferro ou o ouro de que ele é composto (*De an.,* II, 12, 424 a 18)" *(op.cit*, p. 15*)*. "E o conhecimento intelectual recebe as formas inteligíveis abstraindo-as das formas sensíveis em que estão presentes *(ibid.,* III, 7, 431 ss.)" *(op.cit*, p. 15*)*. E São Tomás de Aquino segue o mesmo caminho quando "reduz o conhecimento intelectual à operação de A.[sic]: abstrair a forma da matéria individual e assim extrair o universal do particular, a espécie inteligível das imagens singulares" *(op.cit*, p. 16*)*. Então, o que o nosso grupo encara como abstração, em especial, matemática, é que ela é um **processo da cognição subjacente a todo desenvolvimento do pensamento matemático**, isto é, para avançar o pensamento matemático é necessário abstrair propriedades do objeto, do ente estudado. Assim, as construções mentais são frutos da abstração. O que temos como direção é a necessidade de explicitar várias possibilidades de ações mentais e, para avançar o pensamento matemático, assentamos na mobilização de algumas dessas ações.

Em nossos estudos tiramos o foco da relação avançado-complexo e centramos na possibilidade de empreender um pensamento avançado para qualquer conteúdo, em qualquer nível escolar, mas, para isso é importante ativar várias áreas cerebrais, pois a aprendizagem matemática não se restringe a oxigenar intensamente somente uma área específica. Alvarenga (2020) mapeou os inúmeros resultados das Neurociências Cognitivas os quais retratam a diversidade de regiões neuronais quando se estuda determinados conteúdos matemáticos, como:

aritmética, álgebra, geometria: equações, contagem, funções, polígonos, gráficos de funções, dentre outros.

Além dessas possibilidades, parte do MTCMM, possui relação com os estudos de Investigação Matemática (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009), Modelagem Matemática (Bassanezi, 2002) e dialoga estreitamente com a teoria de Resolução de Problemas (Polya, 2006)

Mediante tais estudos entendemos que quanto mais tais construções mentais forem explicitadas e incentivadas, maior é a chance de um desenvolvimento matemático avançado. O MTCMM (Figura 1) explicita-as e, ao ter consciência delas, o estudante pode empregá-las de forma coerente e consciente, ativando então, várias regiões cerebrais as quais as envolvem e, dessa forma, ele pode cada vez mais fortalecer seus caminhos neuronais, melhorando seu desempenho em um processo espiralado de: conhecimento, autoestima, emoções positivas, motivação, atenção e ir aprofundando seus estudos matemáticos. Neste artigo, adotamos a concepção de que apresentar um PMA é apresentar uma capacidade cognitiva de realizar conexões entre várias ações mentais para resolver uma situação-problema matemática (Alvarenga, 2021).

Visualizar	Representar	Generalizar
Classificar	Identificar	Simplificar
Sintetizar	Induzir	Interpretar
Fazer “mostrações”	“Numerizar”	“Graficar”
Compensar	Formalizar	Demonstrar/Provar
Geometrizar	Algebrizar	Dar contraexemplos
Flexibilizar interpretações	Flexibilizar contextos	Estimar, fazer aproximações
Modelar	Evidenciar	Elaborar casos particulares
Manipular expressões de baixo para cima	Organizar, desorganizar e reorganizar	Analisar a direção inversa da manipulação
Fazer analogias entre outros conteúdos	Comparar por meio de problemas semelhantes	Convencer o outro, explicar verbalmente
Conectar experiências anteriores (*met-before*)	Usar linguagem matemática adequada	Repensar, refazer e repensar, isto é tentar, tentar e tentar…
Criar a própria linguagem matemática	Traduzir da língua materna para a linguagem matemática simbólica	Traduzir da linguagem matemática para a língua materna
Transpor informações (estar coerente; conectar informações)	Transpor ideias (mudar de um contexto para o outro)	Fazer cálculos com números reais
Argumentar de forma textual sem a formalização ou linguagem matemática	Encapsular processos em objetos, desencapsular objetos em processos	Manipular expressões da direita para a esquerda, quando possível. Reverter

Figura 1. Modelo Teórico de Construções Mentais Matemáticas (MTCMM).

A Metodologia de Pesquisa

A coleta de dados de nossas investigações sempre é realizada por meio de resoluções de provas de estudantes, as quais são cedidas pelos seus professores e autorizadas pelo Conselho Ético de Pesquisa da Universidade Federal de Goiás. Em geral, não sabemos como as aulas são ministradas, mas em conversas informais com os docentes, percebemos que elas são tradicionais, expositivas, seguindo o modelo: definição, exemplos e exercícios. Porém, nosso foco não é entender como os participantes são ensinados.

Dependendo da oportunidade analisamos semestralmente em torno de 40 a 45 provas independentemente do conteúdo. As resoluções são distribuídas entre os componentes do GEEM e semanalmente nos reunimos para discutirmos as análises. O nosso interesse não são os erros e nem os acertos, mas as construções mentais que eles apresentaram mobilizar em suas resoluções. As avaliações já corrigidas, em geral, são entregues, nós as digitalizamos e devolvemos em um curto espaço de tempo para não prejudicar o planejamento docente. Antes das análises, propriamente ditas, discutimos sobre as possíveis ações mentais (ou construções mentais, ou ainda processos mentais) (AMs) necessárias para as resoluções, depois verificamos quais dessas apareceram e, também, se apareceu alguma diferente das que esperávamos.

As análises foram realizadas de forma qualitativa, sob a concepção reivindicatória/participatória, onde ação participativa é dialética e se concentra em produzir mudanças nas práticas, sugerindo uma agenda de ação para a mudança de concepção do ensino e da aprendizagem matemática, não como reprodução de conhecimento, mas como criação de matemática (Creswell, 2010). Quanto aos objetivos a pesquisa é exploratória, descritiva e explicativa, de maneira complementar.

Alguns resultados

Para melhor exemplificar as nossas análises, escolhemos para esse artigo a apresentação de duas questões aplicadas em níveis escolares diferentes.

A pergunta 4 foi aplicada a uma turma do 1º ano do ensino médio de uma escola da rede privada situada em Goiânia (capital do estado de Goiás - Brasil), na ocasião do retorno às aulas presenciais, depois do período pandêmico. O objetivo do professor era propiciar um momento avaliativo depois de algumas aulas de revisão de conteúdos, ministrados no 9º ano do ensino fundamental II.

Análise 1

Questão 4. Para equilibrar o número de meninos e meninas que vão participar de uma competição, devem ser convocados grupos de cinco meninas e quatro meninos. Quantas meninas e quantos meninos deverão ser convocados para se obter um total de 45 participantes?

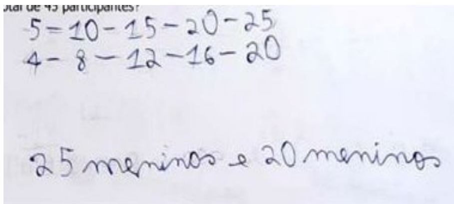
<table>
<tr><td colspan="2">Na resolução a seguir era esperado que o aluno empregasse, pelo menos, as ações mentais: interpretar- para compreender e analisar os dados que se têm e o que se pede; uso linguagem matemática adequada – mesmo que a linguagem seja exclusivamente numérica; identificar - qual o plano deve ser usado, reconhecer as variáveis que estão em jogo e as relações entre elas; classificar - para resolver é preciso separar a quantidade de meninos de meninas e conectar com experiências anteriores- para utilizar o método que já foi estudado em sala de aula ou em outra ocasião.</td></tr>
<tr><td>

Figura 2. Questão 4, estudante A (EA)
Fonte: dados da pesquisa.</td><td>Nesse caso, localizamos as AMs:
classificar -separou os alunos de acordo com suas características para resolver a questão; interpretar- interpretou certo a questão somando de ‘‘5 em 5’’ e de ‘‘4 em 4’’ até chegar ao resultado que somado equivale a 45 participantes; traduzir da língua matemática para a língua materna ao escrever- ‘’25 meninas e 20 meninos’’, na resposta; numerar- conseguiu enxergar repetições, utilizou cálculos numéricos e realizou comparações e utilizar a linguagem matemática correta- o estudante utilizou um traço, para separar os números adicionados de 5, ou de 4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Essa resolução nos chamou a atenção por sua simplicidade. Das provas examinadas, esse resolvente foi o único que seguiu esse caminho. Ele aparenta ter um PMA, nesse contexto, pois a sua resolução foi simples, correta e objetiva.</td></tr>
</table>

Análise 2

A questão 5 foi aplicada a uma turma de Cálculo Diferencial e Integral na Universidade Federal de Goiás, com aproximadamente um mês e meio de aula.

Questão 5. Sejam $f\colon \Re \rightarrow \Re$ e $a, L \in \Re$

1. O que o símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = L$, representa para você?
2. Usando sua resposta ao item 1, mostre que $\lim_{x \to 1} 2x = 2$

<table>
<tr><td colspan="2">Essa questão poderia ser respondida de diversas maneiras, sendo possível a mobilização de algumas AMs: interpretar, geometrizar, graficar, interpretar, algebrizar, numerizar, conectar experiências anteriores, formalizar, demonstrar/provar, criar sua própria linguagem matemática, dentre outras.</td></tr>
<tr><td></td><td>EB responde à questão 5.1 a partir da formalização matemática, usando a definição por Epsilon e Delta. Em seguida, na pergunta 5.2, responde também de acordo com a definição, mostrando domínio e segurança com o conteúdo. Ele identifica o símbolo e escreve o seu significado a partir da definição - está usando o processo Classificar. Além disso, ao escrever corretamente, pela definição, está mobilizando simultaneamente os processos Formalizar, Usar a linguagem matemática adequada e Demonstrar/prova. Por fim, ao mostrar que $\lim_{x \to 0} 2x = 2$, também</td></tr>
</table>

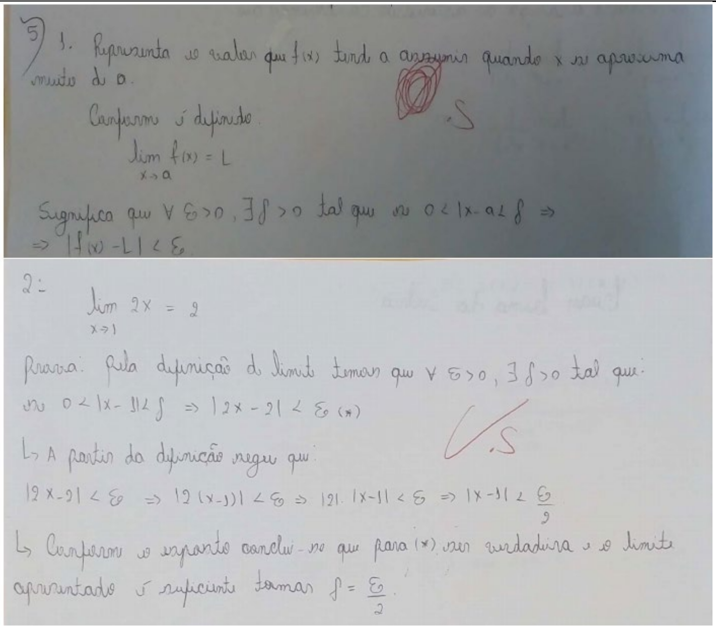


Figura 3. Questão 5, estudante B (EB)
Fonte: dados da pesquisa

usando a definição, está usando o processo **Interpretar**, aplicando o conceito definido para chegar ao resultado.
Quando utiliza sua resposta do primeiro item para responder o segundo da questão, podemos notar que a resposta apresentada por ele não é uma simples repetição metódica. É conectado a resposta 5.2 à 5.1, em que ele consegue aplicar sua ideia de Limite de uma função para um caso particular. Assim, ele **transpõe informações.**

Dessa forma, ele apresenta diversos processos descritos no MTCMM Além disso, percebemos que os processos (ou ações) mentais apresentados na resposta interagem entre si, ou seja, os processos não são apresentados de forma isolada. Por exemplo, ao tempo que classifica que naquela questão irá usar o conceito de limite, **o conecta** essa informação com a formalização matemática do conceito. Segundo Dreyfus (1991), a interação simultânea entre os processos mentais contribui para a obtenção de um PMA. Podemos dizer que o respondente está no caminho do desenvolvimento avançado do seu pensamento matemático ao tempo que apresenta de forma simultânea a interação dos processos citados.

A formalização matemática foi o caminho escolhido pelo EB para resolver o que é solicitado na questão, no entanto os caminhos que indicam o desenvolvimento do pensamento matemático não são únicos. Ele demonstra um procedimento **guiado somente pelo algébrico** e**,** portanto**,** a sua visualização do conceito de limite de uma função não é englobada por nenhuma visualização geométrica, diferente do que foi apresentado pelos outros respondentes.

Comentários Finais

Os resultados das análises indicaram que muitos participantes estavam muito perto de desenvolver um pensamento matemático avançado e que, com certeza, se eles tivessem estudados sob um processo consciente das possibilidades de construções mentais matemáticas eles teriam mais facilidade para mobilizá-las e empregá-las para uma correta resolução das situações-problema.

Assim, sugerimos que os professores sempre evidenciem as ações propostas no MTCMM e, inclusive, acrescentar outras que não apareceram nesse modelo teórico. E ainda, cabe ressaltar que, aprender matemática significa mobilizar inúmeras áreas cerebrais e que quanto mais complexo o conteúdo matemático, mais regiões são ativadas para empreender o estudo - diferentes construções mentais empreendidas, diferentes áreas de maior oxigenação mobilizadas, mais aprendizagem.

Referências e bibliografia

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. Martins Fonte. 1026 p.

Alvarenga, K. B. (2020). Neurociência cognitiva e matemática. In Pina N. R. S.& Dörr, R. C. (Eds.). *Cenários de Pesquisa em Educação Matemática*. Paco Editorial.

Alvarenga (2021). Maneiras de Avançar o Pensamento Matemático na Educação Básica com Respaldo das Neurociências. In *A Educação Matemática na Escola: Pesquisas e Práticas Goianas* [E-book]. (Eds.) Faria, E.C.; Gonçalves Júnior M.A. & Moraes, M. G. Cegraf UFG.

Alvarenga, K. B. & Domingos, A (2020). *Ressignificação do Pensamento Matemático Avançado*. Relatório de pós-doutorado. Não publicado

Alvarenga K. B.; Santos M. A. S.& Silva G. R. (2018) Pensamento Matemático: gráficos de funções polinomiais e áreas no ensino superior. *Anais do 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* - 5º SIPEMAT.

Amarilc M. & Dehaene S. (2016) Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. *Proc. Natl. Acad. Sci*. 113(18).

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Contexto.

Creswell, J. W. (2010). Projeto de Pesquisa. Métodos qualitativos, quantitativo e misto. Artmed.

De Smedt B. & Verschaffel L. (2010). Traveling down the road: from cognitive neuroscience to mathematics education … and back. *ZDM Mathematics Education*, 42,649–654.

Dehaene S. (2022). *É assim que aprendemos*. Contexto

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: D. Tall (org.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus T. (2014). Abstraction in Mathematics Education. In Lerman S.(Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp.5-8). Springer.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. Dalam D. H. (Ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Kluwer Academic Publishers

Harel, G. e Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*. 7(1), 27-50.

Leikin, M.; Waisman, I.; Shaul, S.& Leikin, R. (2014) Brain Activity Associated with Translation from a Visual to a Symbolic Representation in Algebra and Geometry. *Journal of Integrative Neuroscience*, 13(1),35-59.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo.Interciência.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.& Oliveira, H. (2009). *Investigação Matemática na Sala de Aula*. Autêntica.

Tall D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In Meira, L.; Carraher, D. (Ed.). *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. UFPE. v. 1. 1995.

Avances en la caracterización de las relaciones, diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad a través de la resolución de problemas geométricos en secundaria

Carlos Fernando **Chávez** Castiblanco
Colegio Virginia Gutiérrez de Pineda
Colombia
cfchavez@educacionbogota.edu.co
Osvaldo **Rojas** Velásquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Esta investigación busca avanzar en la caracterización del pensamiento divergente, subyacente a la resolución de problemas geométricos con múltiples soluciones, a través del análisis de un sistema de actividades aplicado con estudiantes de secundaria en la ciudad de Bogotá, explorando las relaciones entre el pensamiento divergente y la creatividad a través de la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. La investigación se aborda desde un enfoque mixto con un diseño de investigación acción aplicando métodos de análisis-síntesis, observación participante, instrumentos de contenido, además de ser coherente con las tendencias psicométricas y pragmáticas de la creatividad. El análisis permite concluir que el pensamiento divergente presenta dos facetas, infructuoso y enfocado-ineficiente. El primero no se relaciona con la creatividad mientras que en el segundo puede o no surgir la creatividad dependiendo de la originalidad de las ideas propuestas.

Palabras clave: Educación matemática; educación secundaria; creatividad; pensamiento divergente; Geometría; resolución de problemas; Bogotá; Colombia.

Introducción

La creatividad resulta importante en educación, puesto que favorece la socialización de ideas, fortalece la autoestima de los estudiantes, constituye un punto de encuentro entre la imaginación y la realidad, y permite desarrollar procesos de creación. Actualmente las grandes ideas que promueven cambios en el mundo, no necesariamente, provienen de acudir a los métodos científicos ya conocidos y verificados, sino que provienen precisamente de las ideas creativas, no solo aportando novedad, sino también aportando nuevos cuestionamientos y problemas a las diferentes disciplinas. Por lo tanto, la educación, y en este caso específico la educación matemática, debe responder a este llamado, en el que se deben aunar esfuerzos por comprender y alentar los procesos creativos de los estudiantes.

En términos generales estudios como los de Guilford (1967), Runco (2008, 2012, 2017) y más particularmente investigaciones en el ámbito de la educación matemática como los de Ervynck, G. (2002), Sriraman (2009), Haavold, P., & Sriraman, B. (2018) Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013) sugieren que la creatividad es una habilidad que puede ser motivada, ejercitada y desarrollada mediante distintos tipos de actividades. En esta investigación, se centran los esfuerzos en comprender, cómo se manifiesta la creatividad geométrica y su relación con el pensamiento divergente. El objetivo es conseguir avances en la caracterización de las fronteras, relaciones y diferencias entre el pensamiento creativo y el pensamiento divergente.

Marco teórico

En primer lugar, se tendrán como referentes teóricos las ideas de Guilford (1967), quien trata de proporcionar una fundamentación sobre el concepto de inteligencia y desarrolla una teoría sobre la estructura del intelecto, considerando todo comportamiento mental según una estructura de tres categorías, las cuales son: de contenido, operacionales y productivas. A su vez dentro de las categorías operacionales, se encuentra el pensamiento divergente, el cual surgió en relación con las aptitudes de pensamiento creativo, puesto que tienen propiedades exclusivas que implican, fluencia, flexibilidad y aptitudes de elaboración. En esta categoría el conocimiento es básico, puesto que si no hay conocimiento no hay memoria, sino hay memoria no hay producción, y si no hay conocimiento y producción no puede haber ideas creativas. En este sentido, en la producción divergente existe una clara dependencia con el conocimiento y la memoria.

En segundo lugar se tienen en cuenta los trabajos realizados por Runco (2012) quien estudia más afondo las aptitudes del pensamiento divergente y concluye que las más representativas son la fluidez, entendida como la cantidad de ideas, de todo tipo, que surgen en relación con una situación o problema, la flexibilidad como la capacidad de abordar problemas con diversas ideas que utilizan variedad de categorías conceptuales y la originalidad que suele definirse en términos de infrecuencia estadística. Sin embargo, también recalca que el pensamiento divergente puede llevar a una alta originalidad que carece de encaje y eficacia, y esto es precisamente la razón por la cual el pensamiento divergente no es sinónimo de resolución creativa de problemas, puesto que regularmente conduce a ideas muy originales, pero la originalidad no es suficiente para la creatividad, puesto que las cosas creativas de todo tipo ya sean ideas, soluciones, productos, inventos, etc, además de ser originales deben ser efectivas Runco (2008).

En tercer lugar, se consideran los planteamientos de Storme (2015) quien asegura que las tareas de pensamiento divergente generan muchas soluciones breves a un problema, mientras que las tareas de pensamiento convergente permiten integrar varias ideas y concretarlas en una solución elaborada a un problema. A estos dos procesos los llama divergente- exploratorio y convergente integrador.

En cuarto lugar se toman elementos de las ideas de Cropley (2017) quien considera que ante situaciones desconocidas o problemas los individuos generan posibles opciones y luego las prueban por su utilidad, por lo que el pensamiento divergente puede ayudar a proporcionar información para revelar una elegante solución a un problema matemático como alternativa a un enfoque tradicional, sin embargo el pensamiento divergente se hace importante especialmente cuando hay varias formas de completar una tarea o resolver un problema, de otro modo puede contribuir a un pensamiento ineficiente.

Finalmente, se han diseñado, adaptado e implementado problemas geométricos con múltiples soluciones puesto que según varios investigadores en educación matemática (Leikin y Lev 2007; Silver 1997) proporcionan un instrumento adecuado para la medición de la creatividad, por lo que se considera un insumo para establecer los objetivos de la investigación. En este estudio se asumen las definiciones de pensamiento divergente propuestas por Guilford (1967), y extractos de las relaciones entre estos constructos teóricos propuestas por Runco (1996), Storme (2015) y Cropley (2017) con el fin de concretar definiciones operacionales propias que permitan un avance en la caracterización.

Metodología

Este estudio fue guiado por un enfoque de investigación mixto, con un diseño de investigación acción. Este diseño "… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula" (Minerva, 2006, p. 116). Por lo que se considera que permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente en el aula. Este diseño permite examinar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, lo que permite afinar y enriquecer las actividades dirigidas a la resolución de problemas geométricos con múltiples vías de solución, con el fin de hacer evidente diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad, así como establecer focos de acción docente, donde se pueda intervenir a futuro, con el propósito de desarrollar la creatividad de los estudiantes de secundaria. Por otro lado, también se genera la experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico, que propicie el establecimiento de conexiones entre conceptos y ramas de la matemática propias de la matemática escolar.

En el desarrollo de la investigación se utilizan métodos de análisis-síntesis y empíricos como la observación participante e instrumentos de contenido, a través de un análisis estadístico descriptivo de la información. La muestra la conforman homogénea y a conveniencia de 60 estudiantes entre los 12 y 18 años en los grados de escolaridad de secundaria.

Por otra parte, en cuanto al desarrollo en el aula, en cada una de las actividades, se expone una pequeña explicación de los problemas a los estudiantes, con el fin de que comprendan de manera clara lo que deben hacer y se aclaran dudas en cuanto a las posibilidades de solución que propongan. También se indaga en el acto, mediante cuestionamientos o se pide aclaración en los casos en los que los estudiantes aporten ideas o estrategias fuera de lo común o potencialmente creativas.

A cada estudiante se le facilitan hojas con el problema copiado varias veces, con el fin de promover libremente el desarrollo de ideas, construcciones auxiliares, formular ideas, equivocarse y continuar en otra figura del problema nueva. De esta manera también queda evidencia de los intentos fallidos que posteriormente se analizaran. Al finalizar cada actividad los estudiantes tienen un espacio en las hojas para explicar ideas o estrategias con sus propias palabras. A continuación se presenta un ejemplo de las actividades propuestas:

Área cuadrilátero-triangulo

Objetivo: Promover la construcción de líneas auxiliares, para determinar el área de diferentes maneras de una figura compuesta por un cuadrilátero y un triángulo.

Problema: Para la figura que se muestra a continuación. Hay varias formas diferentes de determinar su área.

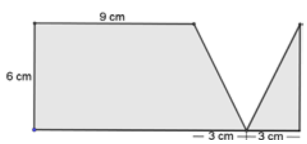


Figura 1. Problema propuesto a los estudiantes.

Determina el área de la figura de todas las maneras en que puedas y describe con tus palabras tus ideas lo más detalladamente posible. Si te equivocas no borres ni taches lo que hiciste, solo pasa a la siguiente figura. Si puedes explicar en qué te equivocaste también es importante dicha explicación con tus palabras

Resultados

En cuanto la aplicación de las actividades propuestas y su posterior análisis se puede concluir que promueven de manera efectiva la fluidez, flexibilidad y originalidad, los cuales son aspectos importantes para el desarrollo de la creatividad. Se pudo evidenciar que a pesar de que haya una gran fluidez de ideas en el desarrollo de un problema, esto no necesariamente conduce directamente a soluciones y mucho menos a soluciones creativas del problema propuesto. También que las ideas creativas no surgen de la nada y que una dinámica entre el pensamiento divergente y el pensamiento convergente es prácticamente necesario para explorar nuevos caminos que pueden conducir a soluciones creativas. No solo en las respuestas correctas hay creatividad, la mayoría de las soluciones originales, fueron producto de la exploración de varias estrategias y la posterior combinación de ellas. En muchos casos las ideas no resultaban eficaces por diferentes factores, como imprecisiones, procedimientos incorrectos entre otros, que mediante un ajuste podrían hacerse eficaces y originales, es decir soluciones creativas.

Una potencialidad de los problemas propuestos fue el hecho de que tuvieran múltiples soluciones, puesto que permitió que los estudiantes menos aventajados pudieran concretar algunas soluciones y a los estudiantes más adelantados, les permitió explorar diversas estrategias y en algunos casos las combinaron, para concretar soluciones creativas. Otra potencialidad de las actividades propuestas fueron los problemas con infinitas soluciones, puesto que permitieron a los estudiantes generar diferentes familias o conjuntos de soluciones. Las soluciones más elaboradas y con mayor nivel de detalle aportadas por los estudiantes, son las que exploran la combinación de más de una de las estrategias propuestas. El tener más elementos y conocer más a fondo el problema permite establecer conexiones entre las ideas producidas con anterioridad y las ideas nuevas.

Tanto las construcciones auxiliares, como las composiciones y recomposiciones de figuras hacen parte fundamental de las ideas creativas para varios de los problemas propuestos. Se observaron dos tipos de construcciones auxiliares, una en las que se aprovecha su practicidad y generan soluciones más cortas y se evitan algunos cálculos y otras que dan la impresión de ser exageradas e innecesarias, pero que debido a su rareza terminaron siendo originales y creativas. También se pudo evidenciar que una misma construcción auxiliar en algunos casos promueve diferentes procesos de solución por diferentes estudiantes o simplemente un solo estudiante percibe varias formas de proceder mediante la misma construcción. Esto también se considera como un factor que promueve el establecimiento de conexiones entre conceptos y que por ende puede favorecer el desarrollo de la creatividad.

En cuanto a los procedimientos para conseguir ideas originales se encontraron ideas muy simples y originales, mientras que en otros casos hay gran elaboración. Se considera que las actividades propuestas promueven estas dos formas de producir soluciones originales, a veces la creatividad en la escuela es el resultado de recordar y establecer relaciones entre diferentes conceptos aprendidos, pero en otros casos precisamente consiste en hacer evidente un camino más corto en el que se evitan procedimientos innecesarios. Por otra parte, en las actividades se evidenció la consecución de soluciones creativas a partir de la modificación de soluciones convencionales.

Por otra parte, se logró identificar dos facetas del pensamiento divergente, una que tiene que ver con el pensamiento divergente infructuoso y otra que tiene que ver con el pensamiento divergente enfocado-ineficiente. El pensamiento divergente infructuoso a pesar de que no aportar ideas a la solución del problema, si sirve a muchos estudiantes para iniciar un proceso de descarte y validación de ideas mediante el pensamiento convergente. Este proceso se puede apreciar claramente cuando se abordan las ideas del pensamiento enfocado-ineficiente, donde se rechazan las ideas infructuosas y se aceptan y ajustan las demás ideas en soluciones convencionales y soluciones creativas.

Se pudo establecer que cuando hablamos de pensamiento divergente infructuoso, no estamos en presencia de ideas creativas, lo cual puede ser la principal diferencia entre pensamiento divergente y la creatividad. El pensamiento divergente en esta fase se puede ver más como una lluvia de ideas que generan los estudiantes, en muchos casos azarosas, incompletas e incomprensibles, que no aportan nada a la solución del problema, sin embargo, como ya se mencionó en el apartado anterior, para algunos estudiantes esto hace parte del proceso creativo y puede considerarse la etapa de preparación según la psicología Gestalt.

Por otro lado, el pensamiento divergente enfocado-ineficiente y la creatividad si están relacionados, puesto que, en esta faceta del pensamiento divergente, se proponen ideas convencionales y originales de las cuales surgen las soluciones convencionales y las ideas más profundas y elaboradas, se convierten en soluciones creativas. Este proceso se hace mediante la validación que permite el pensamiento convergente.

Producto del pensamiento divergente enfocado-ineficiente, también surgen ideas originales que no se logran concretar, puesto que los estudiantes no tienen los conocimientos específicos para desarrollar la idea, o incluso se comenten errores en los cálculos o procedimientos. Estas ideas también son consideradas creativas.

Bibliografía y referencias

Cropley, D. H. (2017). Psychological and Neuroscientific Perspectives on Mathematical Creativity and Giftedness. En R. Leikin, & B. Sriraman, *Creativity and Giftedness. Advances in Mathematics Education* (págs. 183-199). Springer, Cham.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 42-53). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. (N. Cortada de kohan, Trad.) New York: McGraw-hill.

Haavold, P., Hwa Lee, K., & Sriraman, B. (2018). Creativity in Mathematics. *Encyclopedia of Mathematics Education.*

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 161-168.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 159-166.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Runco, M. A. (1996). Personal creativity: Definition and developmental issues. *New Directions for Child Development*, 72, 3-30.

Runco, M. A. (2008). Commentary: Divergent Thinking Is Not Synonymous with Creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 93-96

Runco, M. A. (2012). Divergent Thinking as an Indicator of Creative Potential. *Creativity Research Journal*, 66-75.

Runco, M. A. (2017). Divergent Thinking. *Springer Science+Business Media*, 1-5.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Analyses*, 75-80.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 13-27.

Storme, M. (2015). A cross-cultural study of task specificity in creativity. *Journal of Creative Behaviour*, 1-15.

Caracterización del pensamiento geométrico espacial a partir de la resolución de problemas de empacado

Angel Leandro **Romero** Santiago
Departamento de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño
Colombia
anromero57@uan.edu.co
Osvaldo Jesús **Rojas** Velásquez
Departamento de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Enseñar geometría a partir de la resolución de problemas evoca un aprendizaje significativo y por ende se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El limitado manejo del componente geométrico (transformaciones geométricas) y de las habilidades de visualización e imaginación limitan la resolución de problemas de empaquetado en la geometría espacial. Esta investigación se dirige a fortalecer la resolución de problemas de empaquetado desde el manejo de las herramientas TIC y del material manipulativo para desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes de la educación primaria. La investigación asume un enfoque cualitativo con diseño de investigación acción. La implementación de las actividades propicia el fortalecimiento en el manejo de herramientas tecnológicas y material manipulativo, la motivación e interés hacia el estudio de la geometría y un robusto pensamiento espacial en el contexto de la resolución de problemas de empaquetado.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria; Resolución de problemas; Empaquetado; Transformaciones geométricas; Geometría espacial; TIC, Material manipulativo; Colombia.

Introducción

Desde sus inicios la matemática ha sido concebida como una herramienta para dilucidar las relaciones cuantitativas que hay en nuestro entorno educativo. Además, ha estado articulada alrededor de la idea de un pensamiento geométrico y principalmente en el pensamiento espacial. Sinclair y Bruce (2015) destacan la importancia de enseñar la geometría desde la escuela primaria, puesto que allí se evidencia de mejor manera la construcción del concepto basado en el dibujo y los movimientos, desde el papel de la tecnología en los procesos geométricos y la importancia de la geometría transformacional en el plan de estudios como eje transversal de la implementación geométrica en la escuela primaria.

Es importante destacar en el contexto de la enseñanza aprendizaje de la matemática, el papel crucial que juegan las transformaciones en el campo de la geometría espacial y su relación con algunas de los cuerpos geométricos que allí se presentan. El desarrollo de la presente investigación busca crear en los estudiantes un conocimiento robusto para el dominio teórico-práctico del proceso de empaquetamiento.

Desde la postura de los congresos y reuniones, en el ICME se resalta la importancia del papel que juega las transformaciones geométricas en la educación y principalmente en la educación primaria. En el ICME 13 y 14, en el Topic Study Group (TSG) 12 y 8 respectivamente, se precisa la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, el cual genera una serie de subtemas, donde se observa el papel de las transformaciones geométricas en el aprendizaje y enseñanza de la geometría (subtema 8 en ambos documentos).

El CERME desde su postura europea, abre un espacio para el impacto en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela. En los últimos años en su working group teams (TWG) 4, se discuten sobre: el uso de habilidades espaciales en niños para resolver problema geométrico, evolución de la comprensión de las formas geométricas en niños y los entornos tecnológicos para la geometría en los primeros años de la educación formal.

Algunos encuentros colombianos como el ECME y EGA, resaltan el papel de la geometría en el desarrollo de habilidades matemáticas en los niños y niñas. Dentro de estos grupos investigativos se destaca la importancia de la enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas, el uso de herramientas tecnológicas y su relación con el uso de material manipulativos en el desarrollo del pensamiento espacial.

Por otra parte, dentro del estado de arte se presenta a Chase (1908) y Williford (1972), los cuales enfatizan sobre la importancia que ha tomado la enseñanza de la geometría en los últimos años en la escuela primaria. Estos autores destacan el aporte indiscutible que tiene para el desarrollo de la matemática concebir un proceso basado en la capacidad de visualización, abstracción, creación y desarrollo del pensamiento matemático de manera formal dentro de una etapa inicial.

Por último, la experiencia docente de varios especialistas destaca el papel de la geometría en el contexto de la escuela primaria, la cual, a través del tiempo ha sido relegada como un "complemento" a los procesos de formación matemático que se enseñan al finalizar cada periodo "en una semana" o al finalizar el año. Esta forma de concebir la geometría conlleva a no desarrollar las habilidades propuestas para la temática por temas de tiempo y otras actividades que afectan los espacios establecidos para tal fin dentro de la institución educativa.

Se presenta dentro de la investigación como objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en escuela primaria. Se deriva como objetivo general favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para propiciar un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza.

Marco teórico

Como antecedentes bibliográficos, se toman todas aquellas fuentes de consulta que para esta investigación han aportado a la temática abordada, hoy en día la educación tradicional, las TIC, el material manipulativo y la resolución de problemas han creado entornos de aprendizaje más llamativos, enriquecedores y actualizados. Desde estos entornos educativos se busca generar en el estudiante una mayor motivación e interés por la adquisición de nuevos conocimientos desde un campo más contextualizado para el estudiante. Es por ello, que la presente investigación se enmarca en la resolución de problemas retadores, el papel de la visualización matemática y su significado, el uso de materiales didácticos y tecnológicos en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial desde el empaquetamiento geométrico.

Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

El estudio formal de la matemática se inicia desde los primeros años de la educación primaria, en el cual juega un papel importante el pensamiento geométrico. Especialistas en tema han abordado la solución de problemas dentro de sus investigaciones como una estrategia didáctica y pedagógica para fortalecer el pensamiento matemático (Pólya, 1965; Fridman, 1972; Krulik Y Rudnik, 1980; Martínez, 1981; Schoenfeld, 1985; Mayer, 1986; Sánchez, 1994; Garret, 1995; Rizo 1996; Álvarez, 1996; Kilpatrick, 1998; Sriraman, 2010 y Bong y Leal 2015).

La definición o interpretación de problema no es tan trivial como se cree, sin embargo, se tiene el aporte de varios especialistas e investigadores. Dichas definiciones se canalizan de forma general como una situación, la cual presenta una o varias dificultades que no muestran solución directa o inmediata como es planteado por Falk (2001) cuando se habla de problema retador.

Es indispensable trabajar de forma continua con los estudiantes la resolución de problemas retadores y no ejercicios que ameritan seguir pasos rutinarios. La resolución de dichos problemas conduce a los estudiantes a buscar información, reflexionar, conjeturar y probar dentro de la integración de conceptos, procedimientos y actitudes.

Fundamentación de la visualización matemática

Dentro del proceso de formación teórica, se ha centrado el interés en la visualización enfocada a la semiótica de los cuerpos, en particular de las figuras geométricas espaciales, puesto que son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado el aprendizaje de la geometría desde la primaria hasta la educación profesional.

La definición de visualización matemática ha sido propuesta por varios investigadores, los cuales aportan directamente a la construcción de los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática (Presmeg, 1986; Zimmermann y Cunningham, 1991; Guzmán, 1996; Duval, 1999; Arcavi, 2003; entre otros). Estos autores han investigado sobre la importancia de la visualización en la educación matemática y como esta puede favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula de matemáticas.

El trabajo continuo desde la visualización en geometría, fortalece los procesos mentales de los estudiantes desde su reconocimiento inmediato al igual que el uso de sus conocimientos previos. El buen uso de la visualización matemática conduce a los estudiantes a identificar y construir; conjeturas, procesos, conceptos y actitudes para los procesos de enseñanza aprendizaje.

Fundamentación del pensamiento espacial

La formación continua en los distintos niveles educativos debe enfrentar el uso de las tecnologías, materiales manipulativos, entre otros; como herramientas pedagógicas en el marco del desarrollo del pensamiento espacial, con el fin de desarrollar estrategias que le sirvan para enfrentar y solucionar las necesidades de la sociedad presente y futura en el contexto que se desenvuelven los estudiantes en su vida diaria.

El reconocimiento, manipulación y dominio conceptual de los cuerpos geométricos en el espacio, requiere del estudio de conceptos de propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos relacionados. También, propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos de los propios cuerpos y las coordinaciones entre ellos.

Las posturas planteadas anteriormente se basan en Flores (1991) y Arboleda (2011), quienes, por otra parte, ven el pensamiento geométrico espacial como un pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional, como un reflejo inmediato del contexto. Lo cual, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y su desenvolvimiento en el contexto inmediato.

Fundamentación de los problemas de empaquetado

Desde la postura de Smalley (2018), los problemas planteados de empaquetado se perciben como una clase de problemas de optimización en matemáticas que implican intentar empaquetar objetos en contenedores, desde una visión geométrica determinada. El objetivo es empaquetar un solo contenedor, o varios según sea el caso, lo más densamente posible o empaquetar todos los objetos usando la menor cantidad de contenedores posible.

Para la concepción de empaquetado es importante tener presentes algunos elementos conceptuales que contribuyen al desarrollo del pensamiento geométrico desde dicha perspectiva geométrica de empaquetamiento:

- Desde la postura de Salguero y Gutiérrez (2019), el proceso que permite almacenar o disponer un producto para su traslado se define como empaquetado. Se trata de la acción que lleva a guardar o a recubrir el producto en cuestión, de manera tal que quede preparado para el transporte, organización, guardado en un contenedor.

- El “embalaje terciario” (envase, empaque y embalaje) cuya única función es la de almacenar, proteger, conservar y transportar varias unidades “cuerpos” del mismo producto en grandes cantidades.
- La optimización del empaquetado, hace referencia al mayor ajuste de la necesidad del empaqueto desde el uso de espacios, materiales entre otros.

De lo anterior, se establece una estructura conceptual que orienta el empaquetamiento contribuyendo al desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

Metodología

En la Institución Educativa Departamental Bicentenario de Funza se presentan dificultades en la enseñanza aprendizaje de procesos de empaquetamiento. Estas dificultades limitan un desarrollo vigoroso del pensamiento geométrico por parte de los estudiantes. Con el fin de alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación se presenta el siguiente diseño de la metodológico:

Se asume un paradigma cualitativo, con un enfoque netamente cualitativo. La presente investigación enfoca sus esfuerzos en las acciones y el motivo de las mismas, buscando siempre explicar lo captado en el contexto del estudiante.

Por otra parte, se asume un diseño de investigación acción, dicho diseño propicia contextos donde se permite explorar, buscar, identificar y conjeturar en el campo de la geometría. Este diseño permite contribuir al favorecimiento del proceso de enseñanza aprendizaje de los procesos de empaquetamiento en el espacio.

La población tomada para la presente investigación se enmarca en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Departamental Bicentenario del municipio de Funza. La muestra de la investigación está conformada por 35 estudiantes de grado quinientos uno pertenecientes a la sede San Andrés.

Actividad diagnóstica

A continuación, se propone la siguiente actividad inicial que lleva como nombre “vamos a empaquetar los bloques” y tiene como objetivo identificar las nociones de empaquetamiento, optimización y el papel de las transformaciones geométricas desde la visualización de su contexto y el material manipulativo.

La actividad plantea la siguiente situación problema: un diseñador de interiores quiere empacar los bloques que necesita en un contenedor con el fin de reducir los gastos para su contratación. Para realizar dicho empaquetado debe tener en cuenta algunas condiciones tales como:

a. Todos los bloques son iguales.
b. Los bloques tienen las siguientes medidas 12cm x 16cm x 10cm.
c. El contenedor debe tener cuatro pisos de bloques.
d. El contenedor posee unas dimensiones de 48cm x 40cm en su base.

e. Dado el primer bloque (bloque inicial), para construir cada piso solo se permite rotar o trasladar el bloque.
f. Cada piso posee un bloque inicial diferente, como se indica (ver Figura 1).

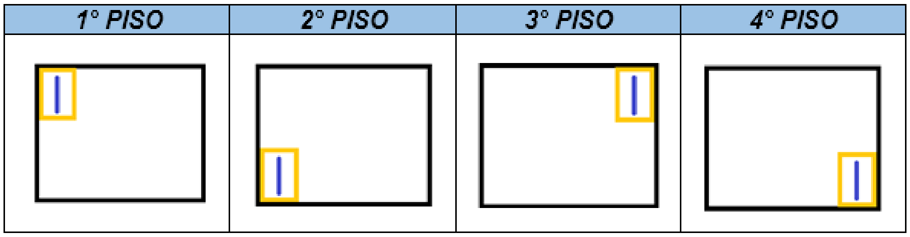


Figura 1. Pisos iniciales de empaquetamiento.

Para la solución de la situación planteada se plantean algunas preguntas orientadoras por parte del docente, las cuales conducen a los estudiantes por un camino correcto hacia la solución de unos problemas planteados (ver Figura 2).

Figura 2. Trabajo de la situación problema.

Análisis de resultados

Se realiza un análisis de la implementación de la actividad con el fin de enfatizar en las diferentes soluciones que presentan los estudiantes en los problemas propuestos, estos problemas tienen como objetivo robustecer la enseñanza aprendizaje de la geometría a través de los problemas de empaquetado. La actividad propuesta cuenta con evidencias fotográficas, bitácora y videos con el fin de constatar las ideas, desempeños y conclusiones a las que llegan de manera individual los estudiantes.

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Al iniciar la implementación de la actividad, los estudiantes muestran gran inquietud y curiosidad por el ejercicio a desarrollar por cada uno de ellos. Por otra parte, se indica la metodología de trabajo y las condiciones de clase.

Se entrega la actividad inicial y se indica que se debe realizar la lectura del título y el objetivo de la actividad e identificar los problemas propuestos en la guía entregada. Es importante destacar que los estudiantes al ver la guía con una sonrisa en su rostro indican que: *"… vamos a trabajar en geometría, ¿y con esos bloques que parecen de verdad? Están bonitos* *pero chiquitos…”*[1]*,* mostrando interés por la asignatura y el trabajo que se puede realizar con materiales manipulativos conocidos.

La actividad se desarrolla de manera grupal con el fin de identificar el impacto en el grupo y cada estudiante. Cada uno de los 35 estudiantes (ver Figura 3) conforman la muestra que participan activamente de las actividades planteadas.

Figura 3. Grupo muestral de grado quinto.

Motivación en el desarrollo de la actividad. Los estudiantes muestran curiosidad, un poco de miedo y preocupación por los problemas planteados al igual que por el uso de las herramientas propuesta en la actividad. Además, presentan interés por compartir sus resultados, hallazgos y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de los problemas planteados, es decir, se generó un ambiente de confianza y aprendizaje.

Logros obtenidos en la actividad inicial. Basados en la observación directa, el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes y las intervenciones realizadas, se evidencia que:

- El 100% de estudiantes realizan un desarrollo de las actividades con agrado, dedicación e interés por el aprendizaje.
- Se fortalece la participación, actitud y confianza de los estudiantes en la adquisición de las habilidades geométricas.
- Fortalecimiento en el uso del material manipulativo, al igual que en la metodología implementada para el desarrollo de la actividad.
- Se evidencia en algunos estudiantes una buena capacidad de observación, análisis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Dificultades obtenidas en la actividad inicial. Dentro de la aplicación de la actividad inicial se presentan las siguientes dificultades:

- Se presenta dificultad en plasmar las ideas, conjeturas o conclusiones de manera escrita de cada uno de los problemas planteados.
- Dificultad en el reconocimiento de los cuerpos geométricos y manejo conceptual de empaquetamiento.

[1] Opinión de los estudiantes.

- Menos del 30% de los estudiantes no presentan una solución al problema planteado, sin embargo, no alcanza el resultado o no identifica los errores presentados.
- Se evidencia en la mayor parte del grupo la baja capacidad de observación, análisis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Una gran oportunidad para incorporar el uso de las TIC en las clases, sin embargo, para algunos no es tomado como una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje de la geometría.

El desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, la motivación por lo aprendido, los logros alcanzados y las dificultades presentadas, establecen el estricto orden del análisis de los resultados obtenidos mediante la implementación de cada una de las actividades propuestas.

La observación directa y el análisis de las actividades desarrolladas por cada uno de los estudiantes, son los pilares para identificar las estrategias, las interacciones y los procesos heurísticos utilizados en la resolución de los problemas planteados en la actividad.

El uso de instrumentos como el material manipulativo como recursos didácticos, es importante para identificar los diferentes procesos geométricos desarrollados en la resolución de los problemas, lo cual favorece el desarrollo del pensamiento geométrico espacial desde los primeros años académicos.

Referencias y bibliografía

Arboleda, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante del modelo del Van Hiele, con los estudiantes de sexto grado del Colegio San José de la comunidad marista. *XII Encuentro colombiano de matemática educativa.* Universidad del Quindío. Armenia, Colombia.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*

Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Florez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para nivel medio superior en Cuba. *Tesis doctoral. ICCP*, La Habana, Cuba.

Pólya, G. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. *Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*.

Smalley, I. (2018). Simple regular sphere packings in three dimensions. *Revista de matemáticas MAA.* Vol. 36.

Caracterización y Sistematización de las Funciones de la Argumentación en el aula de Matemática de Educación Media

Jorge **Olivares-Aguilera**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
jorge.olivares.a01@pucv.cl
Manuel **Goizueta**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
manuel.goizueta@pucv.cl

En las últimas décadas los esfuerzos educativos se han centrado en la formación de personas capaces de participar activamente en la vida social y política de forma responsable y comprometida, desarrollando su identidad, moral y pensamiento crítico (Martijn, et al., 2015). Esto ha llevado al énfasis en la enseñanza de la argumentación como una forma de discurso para promover el entendimiento entre las personas (Jiménez-Aleixandre y Erduran, 2007).

Sin embargo, el desarrollo de la argumentación puede estar en dificultad si no se considera un aspecto relevante: su propósito.

La argumentación es sensible al contexto, su función puede variar dependiendo de la situación y de las personas involucradas (Schwarz, 2009). Por ejemplo, en un debate político, con frecuencia se entiende la argumentación como una disputa cuyo propósito es hacer prevalecer el propio punto de vista por sobre otros mediante estrategias como la desacreditación del 'contrincante', el uso de falacias, o el apelo a los sentimientos del jurado. En cambio, en el ámbito educacional la argumentación puede entenderse como una actividad colectiva, cuyo propósito es llegar a una conclusión mutuamente aceptable por medio de reglas prestablecidas y compartidas (Durand-Guerrier et al., 2012) buscando el entendimiento –en ambos sentidos de la palabra–, esto es, comprender lo que la otra persona quiere decir y acordar un punto de vista que sea satisfactorio para todas las partes. Es decir, la argumentación puede tener distintas funciones según el propósito que se persigue en la conversación. En nuestro proyecto buscamos comprender las funciones de la argumentación en el aula de matemáticas como una manera de entender su papel en el aprendizaje.

Considerando la demostración como un tipo de argumentación, De Villiers (1993) propone cinco funciones de la demostración: verificar, comunicar, explicar, descubrir y sistematizar. Sostiene que la función de verificar es la que predomina, pues se asocia la demostración a la verificación de la veracidad de un enunciado matemático, invisibilizando las demás y su relevancia como parte de la actividad matemática. Otros autores señalan que la demostración tiene la función establecer criterios estéticos (Johnsona y Steinerberger, 2019). En el caso del aula, Goizueta y Solar (2019) consideran que la argumentación permite a los estudiantes ordenar y sistematizar sus ideas, haciéndolas accesible a otros. Esto otorga al profesor el poder "observar" el pensamiento de sus estudiantes, evaluar su comprensión y tomar decisiones pedagógicas. Por su parte, los argumentos del profesor tienen la función, entre otras, de socializar formas epistémicamente aceptables de justificación matemática (Boero et al., 2008).

A pesar del reconocimiento de diversas funciones en la literatura, el aspecto funcional de la argumentación no suele ser el foco. Para comprender las funciones de la argumentación en el aula, hemos realizado inicialmente un análisis de corpus bibliográfico que nos ha permitido caracterizarlas y sistematizarlas elaborando así un estado del arte. Con estos resultados hemos construido un marco teórico con el que estamos desarrollando un instrumento de observación para el aula dirigido a la identificación, caracterización y sistematización de las funciones de la argumentación que son observables como parte de la actividad matemática de estudiantes y profesores.

Referencias y bibliografía

Boero, P., Douek, N., y Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language: Approaches to theoretical aspects of mathematics. In L. D. English (Ed.), *International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 262-295). Routledge.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S.S., Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In Hanna, G., de Villiers, M. (eds) Proof and Proving in Mathematics Education. New ICMI Study Series. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_15

Goizueta, M., y Solar, H. (2019). Relaciones entre la argumentación en el aula de matemáticas y la mirada profesional del profesor. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 241-280). Graó.

Jiménez-Aleixandre, M.P., Erduran, S. (2007). Argumentation in Science Education: An Overview. In Erduran, S., Jiménez-Aleixandre, M.P. (Eds) *Argumentation in Science Education. Science & Technology Education Library*, (pp. 3-27). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6670-2_1

Johnsona, S. y Steinerberger, S. (2019). Intuitions about mathematical beauty: A case study in the aesthetic experience of ideas. *Cognition*. 189, 242-259. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2019.04.008

Martijin, T., ten Dam, G., Geijsel, F. y van Wessum, L. (2015). Fostering teachers' professional development for citizenship education. *Teaching and Teacher Education*, 49, p. 118-127. https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.03.008

Schwarz, B.B. (2009). Argumentation and Learning. In Muller Mirza, N., Perret-Clermont, AN. (Eds) Argumentation and Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_4

Competencias de indagación y modelización matemática en contextos históricos en educación primaria y secundaria

Pere Joan **Falcó Solsona**
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
España
pfalcoso7@alumnes.ub.edu
Gemma **Sala Sebastià**
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
España
gsala@ub.edu
Adriana **Breda**
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
España
adriana.breda@ub.edu
Carlos **Ledezma**
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
España
cledezar25@alumnes.ub.edu

Resumen

La presente investigación forma parte de la tesis doctoral que lleva a cabo el primer autor, bajo la dirección de tesis de la segunda autora, y la colaboración de los otros dos autores. Dicha investigación se centra en el estudio de los subprocesos comunes entre los procesos de indagación y de modelización matemática, y de las sinergias que se pueden establecer entre ambos procesos, con el objetivo general de caracterizar una competencia conjunta de indagación y modelización matemática. Para ello se implementa una secuencia didáctica de contexto histórico-arqueológico, diseñada según los Criterios de Idoneidad Didáctica, para que promueva el desarrollo de la indagación y la modelización matemática, con 93 participantes de 12-13 años en una escuela de Catalunya (España). También se analiza la reflexión sobre la propia práctica del profesorado que realizó la implementación de la secuencia didáctica. Esta investigación está en curso en el momento de escribir esta comunicación, pero se espera poder exponer los resultados en el congreso.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación secundaria; Enseñanza; Aprendizaje; Enfoque Ontosemiótico; Modelización; Indagación; Investigación educativa; Pensamiento geométrico; Universitat de Barcelona; España.

Introducción

El presente estudio se refiere a una investigación en curso, recientemente iniciada, vinculada a la tesis doctoral del primer autor. Se diseñó una secuencia didáctica de la cual se ha realizado una primera implementación para obtener evidencias de la emergencia de subprocesos comunes entre los procesos de indagación y modelización matemática: La implementación se llevó a cabo durante el mes de febrero de 2023, y actualmente en el mes de marzo del mismo año se están analizando los datos obtenidos; teniendo en cuenta que esta comunicación se envía a finales de febrero de 2023, se describe la investigación planificada, los constructos teóricos que la sustentan y los resultados esperados, pero no se pueden presentar aún resultados ni conclusiones definitivos. Aunque serán presentados en la fecha del congreso.

Existe abundante literatura sobre los procesos de indagación y modelización matemática (Artigue & Blomhøj, 2013; Blomhøj, 2004; Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003; Maaß, 2006; Maaß & Doorman, 2013; National Reserarch Council, 1996; Rocard et al., 2007.; Sala Sebastià, 2016), aunque se ha hecho muy poco hincapié en los puntos de conexión entre ambos procesos. Dichos puntos de conexión, tratados en un par de publicaciones recientes (Sala Sebastià, Barquero, et al., 2021; Sala Sebastià, Font, et al., 2021), evidencian que los subprocesos comunes pueden convergir en sinergias que potencien o influyan en el desarrollo tanto de la modelización como de la indagación. En este sentido, los autores se plantearon la necesidad de la caracterización de una competencia conjunta de indagación-modelización matemática, descrita de forma que facilite a los docentes el diseño y la implementación de secuencias didácticas de alta idoneidad didáctica para la enseñanza y aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos a partir de contextos próximos que motiven una indagación.

Las preguntas de investigación que el trabajo aborda son las siguientes: ¿De qué manera los procesos de indagación y modelización matemáticos se relacionan en la implementación de la secuencia de aprendizaje basada en un contexto arqueológico próximo a los participantes? ¿Qué subprocesos comunes podemos identificar? ¿Qué competencias desarrollan los participantes?

A partir de estas preguntas, se plantearon los siguientes objetivos que guiaron el estudio: El primer objetivo (O1) es diseñar e implementar una secuencia didáctica en la que se den los procesos de indagación y modelización matemática, así como, una guía de implementación con orientaciones para el profesorado. Esta secuencia didáctica diseñada siguiendo criterios de idoneidad didáctica está basada en un contexto arqueológico próximo a los participantes. El segundo objetivo (O2) es analizar los subprocesos de modelización matemática y de indagación que se identifiquen en la implementación, así como aquellos comunes a los dos procesos. El tercer objetivo (O3) es analizar el desarrollo de las competencias de indagación y modelización de los participantes. Y el cuarto objetivo (O4) es estudiar los aspectos de reflexión sobre la propia práctica del profesorado que emergen posteriormente a la implementación de la secuencia didáctica diseñada.

Marco teórico

Competencia de indagación matemática

Una de las definiciones de la indagación con más consenso es la dada por los National Science Education Standards (National Reserarch Council, 1996), que contempla los distintos subprocesos incluidos en el proceso de indagación: la observación; el planteamiento de preguntas; la búsqueda en libros y otras fuentes de información para ver aquellas cosas que ya son conocidas; la revisión de este conocimiento bajo la luz de pruebas experimentales; el uso de herramientas para recoger, analizar e interpretar datos; la propuesta de respuestas, explicaciones e interpretaciones; y la comunicación de resultados (National Reserarch Council, 1996, p. 23).

Por su parte, Sala Sebastià (2016) define la indagación matemática como la capacidad de formularse preguntas de investigación e intentar responderlas usando las matemáticas, planteándola como una competencia metodológica (centrada en el aprendizaje y la adquisición de métodos de trabajo y estrategias que permitan resolver problemas en el contexto escolar y, a largo plazo, en la vida adulta) y transversal (que se desarrolla a lo largo de las distintas áreas y materias del currículum). Además, esta autora desarrolla una propuesta de caracterización de la competencia de indagación donde se definen los distintos subprocesos que la conforman, dando distintos indicadores para facilitar la identificación y la evaluación de los procesos de indagación de los estudiantes. Partiendo de dicha caracterización, Sala Sebastià, Barquero y Font (2021) han elaborado un esquema del proceso de indagación matemática que expresa el carácter dinámico, cíclico y de constante evaluación y construcción de hipótesis de los estudiantes, y que es la base de la primera propuesta que aparece en la literatura de identificación de procesos comunes entre ambas competencias.

Competencia de modelización matemática

En palabras de Blomhøj, un modelo matemático es “la relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y una situación o fenómeno de naturaleza no matemática, por el otro lado”[1] (Blomhøj, 2004, p. 21). El mismo autor destaca que en aplicar las matemáticas a una situación extra matemática hay necesariamente un modelo matemático involucrado explícita o implícitamente en dicha aplicación; así como que el hecho de ser capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y los conceptos matemáticos utilizados en una situación de modelización matemática como objetos separados pero interrelacionados, es condición epistemológica necesaria para que un estudiante pueda experimentar con un modelo matemático y reflexionar sobre las relaciones existentes en él (Blomhøj, 2004).

De los distintos modelos existentes, se trabajó con el de Blomhøj ya que interesa cómo expone el desarrollo de los subprocesos que integran el proceso de modelización que propone, la naturaleza cíclica del proceso, el hecho de que tiene en cuenta aspectos como el conocimiento previo necesario (tanto teórico como experiencial) para dar significación a la situación de aprendizaje generada por el conflicto cognitivo propuesto por el problema y poder obtener así un

[1] Traducción propia.

modelo matemático. Este modelo es, además, la base de la primera propuesta que aparece en la literatura de identificación de procesos comunes entre ambas competencias.

Primera propuesta de ciclo conjunto de proceso de indagación-modelización matemática

Las sinergias identificadas entre los dos procesos descritos se encuentran en dos artículos de reciente publicación (Sala Sebastià, Barquero, et al., 2021; Sala Sebastià, Font, et al., 2021) que son los que servirán de base a la investigación de este proyecto. Cabe destacar que estas publicaciones toman como modelo descriptivo del proceso de modelización la propuesta de Blomhøj, mencionada previamente, entre otras propuestas posibles, argumentando que es una conceptualización del proceso de modelización ampliamente aceptada y en el cual el proceso es descrito de manera dinámica, con subprocesos por los cuales los estudiantes no necesariamente deben avanzar siempre secuencialmente (Sala Sebastià, Barquero, et al., 2021), cosa que facilita la comparación con el modelo del proceso de indagación. Para conceptualizar el proceso de indagación, ambos trabajos toman como modelo la propuesta de Sala Sebastià, mencionado previamente, ya que describe, al igual que el modelo elegido para conceptualizar la modelización, el proceso de indagación como un proceso dinámico con subprocesos bien desarrollados. Esta elección de modelos facilita la emergencia de puntos de conexión entre ambos subprocesos en los estudios llevados a cabo.

Se observa que los dos procesos están motivados de forma habitual por preguntas del mundo natural del entorno próximo al estudiante y que conectan situaciones reales con el conocimiento matemático que se pretende construir (Sala Sebastià, Barquero, et al., 2021). También se señala que "parte importante del proceso de indagación consiste en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática" (Sala Sebastià, Font, et al., 2021, p. 126). Se pudo establecer una comparativa entre los procesos de indagación y modelización descritos, respectivamente, por Blomhøj (2004) y Sala Sebastià (2016), llegando Sala Sebastià, Barquero et al. (2021) a una primera propuesta de modelo integrado (representada en la Figura 1).

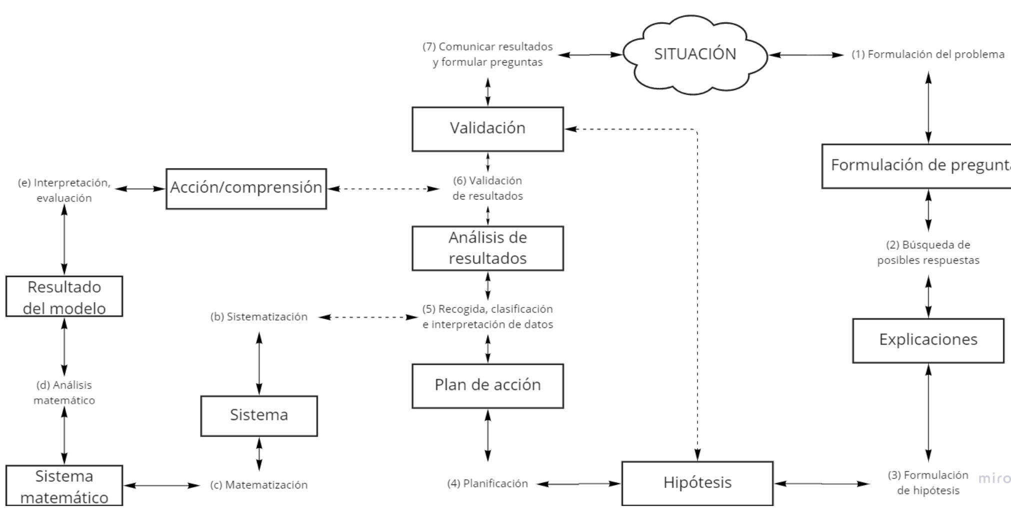


Figura 1. Propuesta de modelo integrado de los procesos de indagación i de modelización matemática. (Sala Sebastià, Barquero, et al., 2021). Traducción propia.

Criterios de idoneidad didáctica

Los Criterios de Idoneidad Didáctica (en adelante CID) del Enfoque Ontosemiótico (EOS) son pautas para diseñar, valorar y mejorar las actividades de aprendizaje con la finalidad que tengan una alta idoneidad didáctica. Son un constructo que nace de los consensos existentes en la comunidad educativa sobre cómo debería ser una buena enseñanza de las matemáticas y, por tanto, se ha observado en numerosas ocasiones que docentes que no han sido formados previamente en el uso de los CID reflexionan sobre la propia práctica docente haciendo uso implícito de ellos (Breda et al., 2018).

Los CID valoran seis idoneidades, dándose especial importancia al equilibrio entre ellas al diseñar una secuencia didáctica: idoneidad epistémica (que las matemáticas que se enseñan sean de calidad), idoneidad cognitiva (que los conceptos matemáticos sean significativos para el alumnado y adecuados a sus conocimientos previos), idoneidad interaccional (que la enseñanza promueva interacciones para identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales), idoneidad mediacional (que la enseñanza se adecue a los recursos disponibles), idoneidad afectiva (que se promueva la motivación e implicación del estudiante) e idoneidad ecológica (que la enseñanza se adecue al proyecto educativo y al currículo) (Godino & Burgos, 2020).

Diseño de la secuencia didáctica y plan de implementación

El diseño de la secuencia didáctica se ha apoyado en la aplicación de los Criterios de Idoneidad Didáctica para garantizar un diseño que implique una alta idoneidad didáctica. Por ejemplo, en relación con la idoneidad afectiva, la secuencia diseñada se basa en un contexto histórico, concretamente arqueológico, próximo y significativo para los estudiantes, como se detallará a continuación, que actuará no sólo como una excusa para el planteamiento del problema a resolver, sino como una fuente esencial de datos a partir de la cual realizar hipótesis y sacar conclusiones justificadas relevantes para la indagación y modelización que se lleve a cabo.

La secuencia didáctica se implementó en febrero de 2023 en un curso de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) de una escuela concertada en la ciudad de Badalona (Catalunya, España); participaron en ella los 93 alumnos de los tres grupos clase del curso. Los participantes trabajaron en equipos de investigación colaborativos de 5 componentes, organizados considerando ciertas responsabilidades rotativas a lo largo de las sesiones de implementación. La escuela, que tiene dos edificios (uno para la etapa de infantil y primaria, y otro para la etapa de secundaria y bachillerato), tiene que hacer obras para reforzar el muro que rodea el patio del edificio de primaria; este edificio está situado justo delante del Museu de Badalona, un museo bajo el cual se encuentran parte de las ruinas de la antigua ciudad romana de *Baetulo* (nombre romano de la ciudad de Badalona). Además, dado el desnivel de la calle, el patio que queda rodeado por el muro que hay que reforzar está por debajo del nivel de la calle que separa la escuela del museo. Hasta este punto, toda la situación es real, y la gran mayoría de los alumnos de 1º de secundaria la conocen, ya que cursaron primaria en la escuela; las obras que se están llevando a cabo en el muro, además, se ven desde la calle.

La situación problemática que se plantea es que, en el momento de excavar para reforzar los cimientos del muro, se han encontrado unos trozos de cerámica que claramente podrían corresponder a objetos incompletos con forma de cuerpos de revolución (platos, cuencos, jarrones). Se dice a los participantes que se comunicó el hallazgo al Museu y que éste que envió un par de técnicos en arqueología a documentar las piezas y elaborar un primer informe arqueológico. A partir de aquí, se les explica que las piezas han sido cedidas temporalmente a la escuela que, aprovechando que el alumnado de 1º de secundaria ha estado estudiando las características de la sociedad romana y el proceso de romanización de Catalunya (España), encarga a las clases de 1º de secundaria que investiguen el origen de las piezas.

Para llevar a cabo la implementación de la secuencia didáctica se ha contado con la colaboración de arqueólogas del Museu, que ha cedido algunas piezas auténticas de cerámica romana que no están actualmente en exposición (están habitualmente guardadas en el almacén del Museu) y que reúnen suficientes características observables para que los estudiantes puedan deducir (a través de sus conocimientos previos sobre la sociedad romana y sobre la antigua ciudad de Baetulo en particular, o bien a través de fuentes documentales accesibles que pueden consultar) el periodo concreto en que fueron hechas, así como, sus usos (doméstico, religioso, social), la clase social a la que pertenecieron sus dueños, etc. Con el asesoramiento del Museu se establecieron algunos protocolos para del trato que deben tener las piezas (solamente pueden tocarse con guantes, por ejemplo). Para una simulación creíble del hallazgo se realizó un informe preliminar imitando los informes reales que hace el equipo de arqueólogos del Museu habitualmente, se facilitaron fotografías del proceso de la extracción de las piezas del yacimiento descubierto, así como, otros objetos contextuales que pueden arrojar luz sobre su origen, etc. El problema planteado utilizó, pues, el contexto histórico y arqueológico como fuente básica para promover el proceso de indagación, y remitió a un contexto próximo a la vida cotidiana de los alumnos (el hallazgo es verosímil y se ha hecho en un lugar donde que jugaban hasta hace pocos meses), de modo que puede ser altamente motivador. En una de las sesiones los participantes tuvieron que fechar los objetos utilizando pruebas de carbono 14 simuladas (con el consecuente uso del significado de las gráficas de tipo exponencial y familiarizándose con el uso de Geogebra) y elaborar modelos tridimensionales de los objetos completos a partir de los trozos de cerámica encontrados. Para ello, trabajaron con diversas hipótesis sobre la reconstrucción de los objetos en su estado original, a partir de los trozos de cerámica encontrados. Así pues, completaron los distintos cuerpos de revolución aplicando las propiedades geométricas del círculo. Posteriormente, vectorizaron el objecto utilizando el programa Tinkercad para así reproducirlo a partir de impresión 3D con el objetivo de poder exponer las piezas y todo su proceso de indagación. Finalmente, los distintos grupos acudirán al Museu a presentar sus informes para poder contrastar el trabajo que han hecho con el que hacen los expertos arqueólogos, pudiendo visitar el laboratorio de restauración del Museu (no abierto al público) y observando cómo se trabaja en la restauración de piezas de cerámica romana.

Los equipos de investigación tuvieron que documentar todo el proceso realizado emitiendo informes que fueron contrastando en puestas en común programadas con los otros equipos. El proceso de implementación de la secuencia y el análisis de los datos obtenidos está reflejado en la Tabla 1.

Tabla 1
Planificación de los pasos de la implementación de la secuencia didáctica (elaboración propia)

MOMENTO	DATOS	INSTRUMENTOS
Previo a la implementación: diseño de la secuencia didáctica.		
Sesión 1: Presentación del caso Se presenta el hallazgo de las piezas de cerámica a los alumnos (de forma conjunta el director de la escuela y un arqueólogo/a del Museu). Los estudiantes se plantean preguntas acerca de los objetos encontrados para determinar qué información puede buscar y descubrir, y comprueban el mapa de la antigua Baetulo para saber qué había en el lugar del hallazgo.	D1. Evidencias de la competencia de indagación matemática del alumnado. D2. Evidencias de la competencia de modelización matemática del alumnado.	I1. Observación directa de las sesiones i toma de notas. I2. Grabación de las sesiones. I3. Producciones del alumnado.
Sesión 2: Datación de las piezas El informe preliminar del Museu afirma que junto a las piezas se han encontrado restos de materia orgánica y contiene la concentración de carbono 14 de estos restos, que se usará para la datación de las piezas a partir de gráficos con Geogebra.	D1. D2.	I1. I2. I3.
Sesión 3: Características y origen Los estudiantes llevan a cabo una investigación sobre los usos y tipos de cerámicas del periodo romano en el que se han fechado las piezas, comparan con lo que pueden observar de éstas y elaborar y contrastan hipótesis hasta llegar a un consenso.	D1. D2.	I1. I2. I3.
Sesión 4: Descubrimos la figura original Utilizando propiedades geométricas del círculo y los cuerpos de revolución, los estudiantes descubren la forma y las dimensiones originales de las piezas encontradas.	D1. D2.	I1. I2. I3.
Sesión 5: Diseño y reconstrucción de las piezas Con la información obtenida en la sesión anterior y el uso de programas de diseño accesible, los estudiantes elaboran un modelo informático 3D de la pieza con Tinkercad, que se imprimirá en 3D.	D1. D2.	I1. I2. I3.
Sesión 6: Visita al Museu, informe y exposición Con toda la información recogida, se visita el Museu para contrastar los hallazgos y pedir asesoramiento. Se ofrece una exposición abierta a la ciudad para que todo el mundo que quiera pueda ver las piezas encontradas y los modelos que reproducen el original, así como la información encontrada por los estudiantes.	D1. D2.	I1. I2. I3.
Posterior a la implementación: reflexión del alumnado sobre el propio proceso de aprendizaje, realización de entrevistas semiestructuradas con el alumnado y el profesorado, grupos de discusión con los docentes participantes	D1. D2. D3. Evidencias del desarrollo de la competencia de reflexión del profesorado sobre su propia práctica.	I4. Herramientas de coevaluación y autoevaluación que fomenten la metacognición del alumnado. I5. Grabación, transcripción y notas de las entrevistas con el alumnado. I6. Grabación, transcripción y notas de les sesiones de grupos de discusión. I5. Grabación, transcripción y notas de las entrevistas con el profesorado.

Una vez implementada esta secuencia didáctica, se organizará un grupo de discusión para estudiar los aspectos de reflexión sobre la propia práctica del profesorado que puedan emerger y poder relacionarlos con los Criterios de Idoneidad Didáctica.

Del análisis de los datos recogidos en la implementación, se espera poder obtener resultados acerca el desarrollo de los procesos de indagación y modelización matemática por parte de los participantes que permitan identificar los subprocesos comunes a ambos. De este modo, con los datos analizados y contemplando las caracterizaciones de las competencias de modelización y de indagación (Sala Sebastià, 2016) se espera poder proponer una primera caracterización de la competencia conjunta de indagación-modelización matemática (que sería refinada en posteriores trabajos) para las fechas del CIAEM.

Referencias y bibliografía

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling—A theory for practice. En B. A. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Ed.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (p. 145-159). Göteborg Univ., National Center for Mathematics education.

Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Godino, J., & Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Paradigma*, *XLI*(e), 80-106. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p80-106.id872

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, *38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K., & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM*, *45*(6), 887-899. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7

National Reserarch Council. (1996). *National Science Education Standards* (p. 4962). National Academies Press. https://doi.org/10.17226/4962

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Wlaberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A New Pedadogy for the Future of Europe*.

Sala Sebastià, G. (2016). *Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*.Tesi Doctoral. Universitat de Barcelona.

Sala Sebastià, G., Barquero, B., & Font, V. (2021). Inquiry and Modeling for Teaching Mathematics in Interdisciplinary Contexts: How Are They Interrelated? *Mathematics*, *9*(15), 1714. https://doi.org/10.3390/math9151714

Sala Sebastià, G., Font, V., & Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante*, 116-139. https://doi.org/10.48489/QUADRANTE.23590

Concepções alternativas sobre o conceito de função de alunos de cursos de ciências exatas

Jeanne Denise Bezerra **de Barros**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
jeanne@ime.uerj.br
Cláudia Ferreira Reis **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br
Augusto Cesar **de Castro Barbosa**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
accb@ime.uerj.br
Marcus Vinicius **Tovar Costa**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
marcus.tovar@ime.uerj.br

Resumo

Neste trabalho abordamos o tema função e os possíveis obstáculos para sua compreensão. Exploramos a questão das concepções alternativas no processo ensino-aprendizagem deste tópico e como elas se manifestam no ensino formal. O objetivo do trabalho é procurar esclarecer como, a partir do conhecimento das concepções alternativas, o professor pode iniciar o processo para o correto entendimento desse conceito pelo estudante. No primeiro dia de aula, foi feita uma pergunta para duas turmas de Cálculo II e uma de Cálculo I da Universidade do Estado do Rio de Janeiro sobre o que os estudantes entendiam por função. O resultado mostrou que a maior parte dos alunos não construiu corretamente esse conceito no Ensino Básico.

Palavras-chave: Educação Matemática; Funções; Cálculo; Concepções Alternativas; Educação Universitária.

Concepções Alternativas

Em Matemática e em diversos campos das Ciências da Natureza, o questionamento aos estudantes pelo professor, em especial quando um conteúdo novo é introduzido, desempenha um importante papel no processo ensino-aprendizagem. A resposta desse estudante, em geral, é dada a partir do conhecimento adquirido, não só na escola, mas, principalmente, por meio de suas experiências diárias (Ruberley & Nardi, 2015).

Obviamente, esse conhecimento é repleto de imprecisões e informações, de fato incorretas, baseadas muitas vezes no chamado “senso comum” (Santos, 1998). Essas concepções foram bastante exploradas na Física, em especial na década de 1980, e eram denominadas “concepções espontâneas” (Hoffmann et al., 2017). Neste trabalho, abordamos essa forma de pensamento no campo da Matemática e nos referiremos a ela como concepção alternativa (CA).

O educador tem que estar atento às CAs, uma vez que se constituem em um obstáculo na correta compreensão dos conceitos científicos (Nardi & Gatti, 2004). Dessa forma, convém explorar esse tipo de pensamento, explicitando suas falhas e limitações, no sentido de colocar o raciocínio do aluno na direção dos modelos e conceitos científicos atuais (Carvalho, 1989).

Em Matemática, especialmente, o entendimento correto e preciso de um determinado conceito é fundamental para se avançar em qualquer de seus ramos de estudo. Assim, também em Matemática, um caminho possível a ser adotado pelo professor é confrontar as CAs com os conceitos tidos como corretos. Mas, para superar os obstáculos estabelecidos pelas CAs e desenvolver em seus estudantes uma visão crítica do conteúdo estudado, um ponto de fundamental importância é que os professores tenham um domínio muito bom desses conteúdos (Delizoicov & Angotti; Pernambuco, 2011). Deve ser destacado que, nesse ponto, tem-se uma situação que nem sempre é de fácil solução, e requer um grande esforço por parte dos professores, uma vez que estes, como qualquer pessoa, trazem consigo CAs em diversas áreas do conhecimento para a sala de aula (Sanmartí, 2014).

Conceito de Função

Lima e Ersching (2016) apontam a necessidade de desenvolver as habilidades cognitivas do indivíduo em aprender Matemática e, afirmam ainda os autores, não se trata apenas de ter habilidade nas operações matemáticas pois existem instrumentos para auxiliá-lo. Segundo os autores, “desafios matemáticos exigem habilidades para solucioná-los de forma ‘pensante’, pela tomada de decisões, pela definição de estratégias a seguir para a resolução de problemas com perspectiva crítica” (Ramos, 2004 como citado em Lima & Ersching, 2016, p. 1). Por isso, eles acreditam que a capacidade cognitiva de assimilar conceitos é um dos fatores preponderantes no ensino-aprendizagem em Matemática (Lima & Ersching, 2016, p. 1).

O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática e está presente em diversas áreas do conhecimento. No entanto, nota-se uma grande dificuldade por parte dos estudantes em conectar esse tópico a situações de seu dia a dia (Barreto, 2008).

O estudo de funções pode ser interpretado como o estudo de correspondências entre grandezas variáveis. Formalmente, dados dois conjuntos X e Y, não vazios, uma função é uma lei que associa a cada elemento de X um único elemento de Y (Apostol, 1976). Uma função pode ser representada por uma tabela, um gráfico, uma regra verbal ou na forma de uma expressão algébrica. É interessante apresentar a função com o uso dessas representações a fim de tornar mais ampla a compreensão desse conceito.

Apesar da importância da função como instrumento para o estudo quantitativo de fenômenos de diversas áreas científicas, este é um conceito de difícil compreensão para os estudantes do Ensino Básico, dado seu aspecto abstrato. Um dos caminhos para superar tal dificuldade é adiar a introdução do simbolismo algébrico, dando preferência a uma abordagem mais concreta, através de uma "fundamentação verbal e de uma simbolização gradual" (Schoen, 1995, p. 138). De forma similar, a teoria histórico-cultural de Vigotsky reforça o uso de símbolos para assimilação de conceitos científicos. Os conceitos científicos, diferentemente dos conceitos formados no cotidiano, são adquiridos em processo que começa na generalização (abstrato) e termina em situações específicas (concreto). O processo é orientado e organizado pelo educador - por meio de símbolos escritos, conhecimentos dos atributos essenciais relacionados ao conceito etc. (Talízina, 1988 como citado em Pacheco & Núñez, 1998). Acreditamos que o processo de ensino de conceitos científicos deve ser realizado de forma gradual, em que se pese o conhecimento anterior do educando.

Há mais de trinta anos, Ponte (1990) já nos indicava a necessidade de introduzir o conceito de função no currículo da Escola Básica em Portugal. Para compreender a forma de ensino de função, Ponte (1990) expõe como foi o desenvolvimento do conceito a partir da Idade Moderna. Segundo o autor, "o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objecto de estudo corrente em Matemática remonta apenas aos anos finais do Século XVII" (Ponte, 1990, p. 3). Ele dialoga com Klein que, no início do século XX, argumentou que "a noção de função devia estar presente em todo o ensino da Matemática" (Ponte, 1990, p. 6).

Traçando um esboço de como a função foi pensada pelos matemáticos, Ponte elenca três elementos essenciais na formação do primitivo conceito de função (Ponte, 1990, p. 5):

a. a notação algébrica;
b. a representação geométrica;
c. a ligação com os problemas concretos da Física.

Em identidade com esses elementos, podemos considerar, na atualidade, uma prevalência do ensino-aprendizagem de função a partir de um deles, em detrimento do ensino do conceito. Para Ponte (1990), busca-se ensinar a ideia de função ainda no Ensino Fundamental, correspondente ao 3º Ciclo (Escola Primária) em Portugal, seja por diagramas de Venn, máquinas de transformação, ou exercícios para calcular o valor inverso de um dado ponto do conjunto imagem. Entretanto, "[...] essas classes de funções (como exemplos dados) não possuem quaisquer aplicações significativas nem propriedades interessantes. Trata-se apenas de versões fortemente trivializadas de um conceito matemático" (Ponte, 1990, p. 7-8). É quando o autor aponta para a trivialização no ensino que, certamente, não contribui para a aprendizagem do conceito de função. Segundo o autor, "o problema da trivialização não tem solução fácil. Ele tem de ser enfrentado qualquer que seja a abordagem. É um problema muito sério porque fornece aos alunos uma imagem distorcida da Matemática" (Ponte, 1990, p. 7).

Atualmente, no Brasil, o Ensino Médio, última etapa da Escola básica para ingresso na universidade, é norteado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mais novo documento normativo que norteia o conhecimento mínimo a ser seguido pelas escolas brasileiras de forma a garantir o direito à aprendizagem e a formação integral do estudante. No que diz respeito à Matemática, a BNCC parte da hipótese de que a aprendizagem está fortemente ligada à compreensão dos objetos matemáticos, bem como de suas aplicações. A BNCC frisa que o desenvolvimento do pensamento matemática deve ser embasado por sete ideias fundamentais. Segundo a BNCC:

> […] os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento (Brasil, 2018, p. 268).

Ainda, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), função é um objeto de conhecimento que se destaca nas habilidades de interpretar e compreender situações em diversos contextos; de propor ações a partir desse conhecimento matemático; de resolver problemas e analisar suas soluções; de utilizar diferentes registros de representação matemáticos; de identificar padrões e criar relações entre entes matemáticos; de investigar conjuntos de dados (Brasil, 2018).

Concepções alternativas sobre o conceito de função

As concepções alternativas em Matemática são menos comuns de se revelarem quando comparadas com as ciências da natureza, pois grande parte dos conceitos matemáticos envolvem um grau razoável de abstração e não estão diretamente ligados às observações do dia a dia dos estudantes. O caso do conceito de função não é diferente, uma vez que "localiza-se num patamar que vai além da compreensão dos fenômenos a que se aplica, pois pode generalizá-los e resolver vários problemas fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática" (Zuffi & Pacca, 2002).

As concepções dos estudantes acerca de um conceito matemático abstrato, como o de função, podem e devem ser estudados no sentido de conduzi-los ao correto entendimento desse conceito, porém é necessário que anteriormente tenha sido feita a sua introdução formal. Conforme já citado, muitas vezes, o professor recorre ao que Ponte (1990) chama de trivialização, que significa montar uma versão ultrassimplificada, de um determinado conceito, na tentativa de abordá-lo de forma mais concreta ou intuitiva. Como exemplo, pode-se citar a analogia estabelecida entre função e uma máquina que transforma elementos de um dado conjunto em elementos de outro. No entanto, essa abordagem não é capaz de transmitir o conceito correto em toda a sua dimensão. Muitas vezes, ela pode se tornar, em um segundo momento, um obstáculo ao pleno desenvolvimento do assunto, deixando o estudante preso a uma ideia limitada do que é função.

Tendo em mente essa dificuldade, procuramos então conhecer as ideias prévias sobre o conceito de função dos estudantes de Cálculo de algumas turmas de períodos iniciais dos cursos de Física e Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Na primeira aula de Cálculo I e Cálculo II das turmas de Engenharia e Física foi feita a seguinte pergunta: "O que você entende por função?".

Resultados e considerações finais

A análise de dados nessa pesquisa qualitativa seguiu a técnica de Análise de Conteúdo (Bardin, 2022). O *corpus* textual é composto por 28 respostas da turma de Cálculo I e 46 da turma de Cálculo II. É mostrada na Figura 1 o conjunto categorial formado por: (a) nenhum ou pouco entendimento; (b) função como transformação – máquina; (c) função como equação; (d) função como relação entre dois conjuntos; (e) função como gráfico; (f) definição de função.

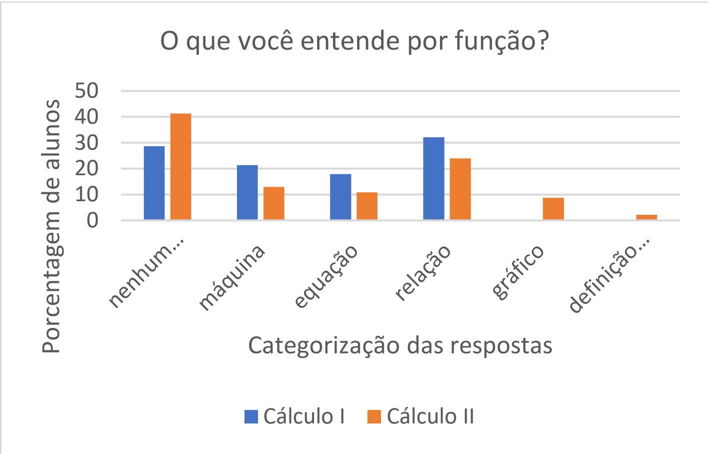


Figura 1. Resultados.

A pesquisa mostra um resultado surpreendente em que apenas 1 aluno em 74 deu a definição correta de função, ressaltando que 45, que já haviam sido aprovados em Cálculo I, não têm entendimento satisfatório sobre o que é função. Outro resultado alarmante é que 8 dos 28 estudantes de Cálculo I e 19 dos 46 de Cálculo II demonstraram pouca ou nenhuma compreensão do que é função. Por exemplo, "função é o artifício utilizado para resolver as variáveis" e "contas para facilitar a Matemática". Dentre as 12 respostas, 6 de cada disciplina, que associam função à ideia de máquina, vale destacar a seguinte: "como uma máquina que recebe valores e retorna outros valores". Essa resposta é um exemplo do que Ponte (1990) chama de "trivialização" da Matemática no Ensino Básico.

Podemos resumir o resultado obtido em uma palavra – fracasso. Todos os respondentes estudaram função durante quatro anos no Ensino Básico, a maioria mais um semestre na primeira disciplina de Cálculo e, ainda assim, não conseguiram aprender o conceito. Estamos convictos da necessidade de trabalhar as concepções alternativas em sala de aula em todos os níveis de ensino e, a partir daí, direcionar o processo de ensino-aprendizagem para o correto entendimento do conceito de função. Acreditamos na necessidade de ampliar a amostra de dados para realizar uma análise mais aprofundada do tema, o que pretendemos realizar em breve.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPERJ pelo suporte financeiro.

Bibliografia e referências

Apostol, T. M. (1976). *Calculus*, v. 1. (2a ed.) Editorial Reverté.

Bardin, L. (2022). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.

Carvalho, A. M. P. (1989). *Física: proposta para um ensino construtivista*. EPU.

Delizoicov, D., Angotti, J. A., & Pernambuco, M. M. (2011). *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos* (4a ed.). Cortez.

Hoffmann, J. L., Nahirne, A. P, & Strieder D. M. (2017). Concepções Espontâneas em Física: Calouros de um Curso de Licenciatura. *Arquivos do Mudi*, 21(3), 90-101.

Lima, C. P., & Ersching, K. (2016). Canal Virtual de Ensino de Matemática: uma abordagem baseada em concepções alternativas. *Anais da IX Amostra de Iniciação Científica e Tecnológica Interdisciplinar*. IFSC, campus Videira. https://docplayer.com.br/50977073-Canal-virtual-de-ensino-de-matematica-uma-abordagem-baseada-em-concepcoes-alternativas.html

Menna Barreto, M. (2008) *Matemática e Educação sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários* [Dissertação de Mestrado, PPG-Ensino de Matemática, UFRGS]. Repositório Digital da UFRGS. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/12669

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Nardi, R., & Gatti, S. R. T. (2005). Concepções Espontâneas, Mudança Conceitual e Ensino de Ciências: uma revisão sobre as investigações construtivistas nas últimas três décadas. *Revista de Educação em Ciências e Matemática*, 1(2), 115-144.

Pacheco, O. G., & Núñez, I. B. (1998). Formação de Conceitos Segundo a Teoria de Assimilação de Galperin. *Cad. Pesq.*, 105, 92-109.

Ponte, J. P. (1990). O Conceito de Função no Currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.

Ruberley, R. S., & Nardil, R. (2015). Mapas Conceituais e Concepções Alternativas em Física: uma proposta de estruturação. *Debates em Educação Científica e Tecnológica*, 5(4), 187-206.

Sanmartí, N. (2014). *Didáctica de las ciências em la educación secundaria obligatoria*. Sintesis Educación.

Santos, M. E. V. M. (1998). *Mudança conceptual na sala de aula: um desafio pedagógico epistemologicamente fundamentado*. (2a ed.) Livros Horizonte.

Schoen, H. L. (1995). Ensinar álgebra elementar focalizando problemas. In Coxford, A. F., & Shulte, A. P. (Orgs.), *As idéias da álgebra* (135-144). Atual.

Talízina, N. F. (1988). *Psicología de la Enseñanza*. Progreso.

Zuffi, E. M. & Pacca, J. L. A. (2002). O Conceito de Função e Sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências. *Ciência & Educação*, 8(1), 1-12.

Concepto de variable en una tarea de comparación de funciones para estudiantes de Educación Primaria

María del Carmen **Pérez**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
España.
mcperezmartos@ugr.es
Antonio **Moreno**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
España
amverdejo@ugr.es

Resumen

En esta comunicación mostramos parte de los resultados del análisis de una sesión perteneciente a una investigación más amplia. Nuestro objetivo es describir las evidencias del uso de la variable en relación funcional encontradas en un grupo de 24 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años) al comparar funciones. Para alcanzar este objetivo, realizamos un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva y hacemos uso de un modelo de análisis de elaboración propia confeccionado a partir del Modelo 3UV propuesto por Ursini y Trigueros (2006). La recogida de información se realiza mediante audio, vídeo y por escrito. Entre los resultados obtenidos destacamos que, al resolver esta tarea de comparación de funciones, hay conceptos como el dominio que los alumnos ponen en juego al poner de manifiesto los aspectos característicos que el Modelo 3 UV propone para el uso de la variable estudiado.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación Primaria; Enseñanza presencial; Investigación Educativa; Pensamiento Algebraico; Pensamiento Funcional; Variable; Conceptualizaciones de la Variable; Representación.

Introducción y antecedentes

El pensamiento algebraico, según Radford (2012), es una forma particular de reflexionar en la matemática y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. Este autor considera que la naturaleza del pensamiento algebraico emerge en los estudiantes como una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente, con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas.

El pensamiento algebraico y el pensamiento funcional (Cañadas y Molina, 2016), están presentes hoy día en los documentos curriculares de primaria en diferentes países (Morales et al., 2018), incluido España (Real Decreto, 2022). En Kieran (2022) se realiza una revisión de investigaciones previas sobre pensamiento algebraico en edades tempranas, y coinciden en la necesidad de profundizar en dicho pensamiento por parte de los estudiantes de primeras edades.

Este estudio lo centramos en el concepto de variable y en sus formas de representación, y justificamos su importancia con base en todo lo anterior. Vamos a dar respuesta con este trabajo a preguntas como ¿Qué observamos sobre la interpretación de la variable en relación funcional? ¿Qué representaciones usan los alumnos para representar la variable? En todo momento con el objetivo de describir las evidencias del uso de la variable en relación funcional encontradas en un grupo de 24 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años) al comparar funciones.

Pensamiento Funcional

Autores como Dubinsky y Harel (1992), señalan que la idea de función es considerada una de las más importantes en la matemática y, por lo tanto, se ha de tomar como eje central de la educación matemática. Como señalan Cañadas y Molina (2016), cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del *early algebra*. Estas mismas autoras describen el pensamiento funcional como "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 211), el cual es beneficioso para los estudiantes por su conexión con otros contenidos matemáticos, otras áreas de conocimiento y cursos educativos superiores. Dentro del marco de la propuesta *early algebra*, existen estudios que evidencian que los niños presentan capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde cursos tempranos (Blanton y Kaput, 2011), lo cual potencia la viabilidad de que este pensamiento sea nutrido por el currículo y por la enseñanza. Cabe destacar que dentro del pensamiento funcional es de suma importancia el significado que se le da tanto a la variable, como a su representación.

La variable

El pensamiento funcional depende de la comprensión de ciertas ideas clave, de entre las cuales la variable es fundamental. El concepto de variable es problemático para los estudiantes debido a que se utiliza con diferentes significados (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Por su parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente tres usos de la variable: (a) incógnita específica, (b) número general y (c) relación funcional. Con base en esta última idea, la investigación más amplia de la que forma parte este estudio, la centramos en la identificación de estos tres usos de la variable.

Así pues, apoyaremos nuestro estudio en un modelo que ayuda a la identificación de estas tres interpretaciones: el *Modelo 3UV*. Este modelo fue propuesto por Ursini y Trigueros (2006), y en él se presenta una descomposición del concepto de variable en el cual se incluyen, la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los tres usos de la variable considerados. Según este Modelo, la interpretación de la variable en relación funcional se identifica mediante los siguientes aspectos característicos:

F1: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica (interpretar);
F2: determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente (interpretar y manipular);
F3: determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente (interpretar y manipular);
F4: reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación (interpretar);
F5: determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra (manipular);
F6: expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema (simbolizar).

Las acciones que vienen entre paréntesis se corresponden con la modificación realizada al Modelo 3UV y explicada más adelante en la metodología.

Por otro lado, según Smith (2017), existen tres tipos de relaciones en las funciones lineales que involucran valores de las variables, y estas son la recurrencia, la correspondencia y la covariación, y considera que hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los alumnos las relaciones de correspondencia o covariación.

Los sistemas para representar cantidades indeterminadas y relaciones funcionales son variados, entre ellos encontramos el lenguaje natural, tablas, gráficos, símbolos algebraicos o representación pictórica. Radford (2012) habla también de formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales.

Metodología

Tomamos para este trabajo una sesión dentro de un experimento de enseñanza, sobre la que realizamos un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva (Cortés e Iglesias, 2004). Llevamos a cabo este estudio con un grupo de 24 estudiantes de quinto de educación primaria con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, y concretamente en esta sesión se les propuso una tarea escrita, de respuesta abierta, sobre la comparación de las funciones 2x y 3x-7, elaborada *ad hoc* por los investigadores. Dicha tarea es la siguiente:

Juan tiene ahorrado algo de dinero (solo tiene euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos: te doblo tu dinero o te triplico tu dinero y tú me das 7 euros.

Juan quiere elegir el mejor trato. ¿Qué debe hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato. ¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?

Con tus compañeros de equipo resume vuestras conclusiones en la cartulina. Luego utilizaréis la cartulina para explicar vuestras conclusiones al resto de la clase.

Hubo varias fuentes de información: ficha de trabajo y cartulina escrita, y videograbaciones y audiograbaciones de las sesiones.

Para caracterizar las respuestas y analizar más específicamente cómo los alumnos interpretaron, simbolizaron y manipularon, realizamos una ampliación del Modelo 3UV. Esta ampliación añade la asignación de cada uno de los aspectos característicos de la interpretación de la variable analizada con uno de estos tres conceptos vistos como acciones, a saber: manipular, simbolizar o interpretar. Esta asignación aparece más arriba en el apartado anterior y la realizamos en función de la acción que, como investigadores, consideramos que se desarrolla con cada uno de los ítems del modelo.

Organizamos la clase en 5 grupos, y asignamos una letra a cada uno, por lo que tenemos los grupos A, B, C, D y E. De cada grupo tenemos un vídeo de la presentación final, (excepto del Grupo E) y luego varios vídeos, de unos grupos una cantidad y de otros otra, de la realización de la ficha y la cartulina. Principalmente lo que analizamos fueron las transcripciones de todos los vídeos de los distintos grupos participantes, atendiendo a expresiones, lenguaje y también a los gestos, además de las cartulinas realizadas por cada grupo.

Resultados

Comenzamos mostrando que, al resolver esta tarea de comparación de funciones, los estudiantes pusieron en juego algunos conceptos asociados a la relación funcional.

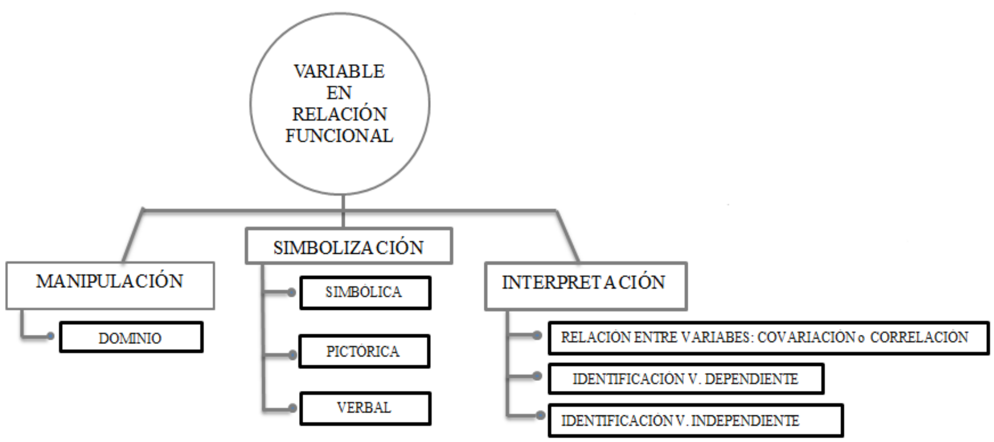


Figura 1. Mapa Conceptual Resultados.

Dentro de la acción de manipulación se identificó la aproximación al concepto de dominio. Con este hacemos alusión a las aportaciones de los alumnos que evidenciaron la identificación por parte de los mismos de los valores que puede tomar la variable independiente de cada función involucrada. Este ítem lo incluimos dentro de la acción de manipular puesto que los alumnos lo que hacían era manipular una y otra vez la relación funcional, probando, para ver los valores que sus variables podían tomar. Una evidencia en relación a este concepto es la siguiente:

- si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º porque no tiene 7 euros. Aquí podrían estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \geq 2\}$. (Transcripciones Grupo A).

Las diferentes formas encontradas de representar la variable y la relación funcional fueron representación simbólica, representación pictórica y representación verbal o natural. La representación verbal o natural fue la más identificada. En los vídeos y en las producciones escritas se evidencia que esta es la forma principal mediante la cual el alumnado expresó y se comunicó con el pensamiento funcional en lo cual coincidimos con Radford (2012). Un ejemplo de esta representación es el siguiente:

> *- Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* (Transcripciones Grupo D).

La representación simbólica se identificó siempre que se hizo uso de letras o símbolos para representar la variable, como se puede ver en la Figura 2.

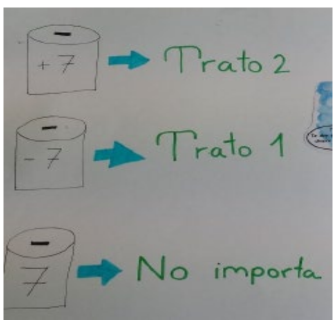


Figura 2. Representación simbólica Grupo D

La representación pictórica se identificó siempre que se hizo uso de los dibujos para representar la variable. Esta última únicamente se identificó en un caso, que se puede ver en la Figura 3.

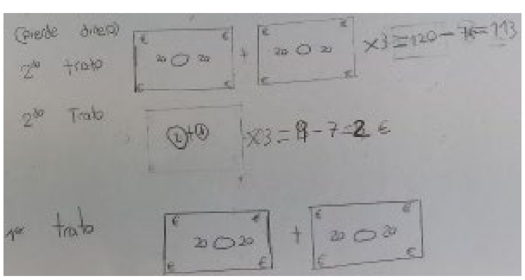


Figura 3. Representación pictórica Grupo E.

Y terminamos con la acción de interpretar, en la cual aparecen tres conceptos, a saber: la relación entre variables, la identificación de la variable dependiente y la identificación de la variable independiente. En el primero de estos ítems identificamos dos tipos de relación, la covariación y la correlación. Evidencias de estos tipos de relación son:

- *Depende del dinero que tenga.* (Covariación: Grupo E).
- *Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* (Correlación: Grupo D).

Los últimos dos conceptos los consideramos en total relación con este último, siempre que se identifica la relación entre variables se va a identificar al menos una de las variables, y va a surgir la necesidad de identificar qué variable es la dependiente en el problema (en el ejemplo de covariación del grupo E están identificando que la variable independiente es el dinero que tiene).

Conclusión

El análisis del concepto de variable en esta tarea de comparación de funciones pone de manifiesto que los alumnos son capaces de interpretar la variable en relación funcional y que surgen conceptos matemáticos en el proceso. Estos conceptos matemáticos son el dominio, la representación simbólica, la pictória, la verbal, además de las relaciones de correlación y covariación y la identificación tanto de la variable dependiente como de la independiente. Así, en base a lo defendido por Smith (2017) e indicado en los antecedentes, podemos afirmar que se evidencia relación funcional entre estos alumnos de quinto de primaria. Como conclusión final afirmamos que prestamos el apoyo a todos los autores mencionados que defendían que los alumnos a esas edades son capaces de pensar algebraica y funcionalmente, aunque cierta parte de la comunidad docente considere lo contrario.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Bibliografía y Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, y E. Knuth, *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (págs. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). *Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades.* En E. Castro, E. Castro; J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218).Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/

Cortés, M. e Iglesias, M. (2004). *Generalidades sobre Metodología de la Investigación.* Universidad Autónoma del Carmen. http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1750.

Dubinsky, E., y Harel, G. (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy.* En E. Dubinsky y G. Harel (Eds,), Mathematical Association of America (MMA).

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education.54*, 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6.

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. 36(3)*, 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 6(4),*, 117-133. https://doi.org/10.30827/pna.v6i4.6139.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, (24386- 24504). https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Schoenfeld, A. H., y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher, 81(6)*, 420-427. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420

Smith, E. (2017). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton, *Algebra in the early grades* (págs. 133-160). Alan H. Schoenfeld. https://doi.org/10.4324/9781315097435.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática, 6(03)*, 90-108. http://funes.uniandes.edu.co/9736/

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿ Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18(3)*, 5-38. http://funes.uniandes.edu.co/13136/

Conocimiento del profesor sobre las características del aprendizaje de las ecuaciones lineales con coeficientes racionales

Adelso **Perdomo**
Universidad Científica del Sur
Perú
aperdomo@cientifica.edu.pe
Hugo **Parra-Sandoval**
Universidad del Zulia
Venezuela
hugoparras@hdes.luz.edu.ve
Gabriela **Prieto**
Universidad del Zulia
Venezuela
gabrielacprietof@gmail.com

Resumen

Se identifican, analizan e interpretan los conocimientos que un profesor de matemática, del ciclo básico universitario, utiliza para reconocer cómo los estudiantes aprenden ecuaciones lineales con coeficientes racionales. La investigación es de carácter cualitativo naturalista interpretativa. Considerando el modelo MTSK, se encontró que el profesor, en primer lugar, evidencia un conocimiento de las dificultades asociadas al aprendizaje de las ecuaciones lineales con coeficientes racionales; en segundo lugar, hace uso del error para así lograr una mejor comprensión conceptual y procedimental entre sus estudiantes, aprovechando el error como recurso para el aprendizaje y por último, posee una teoría personal sobre el uso de las igualdades numéricas que utiliza para generar en sus estudiantes aprendizajes de tipo algebraico.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor; MTSK; Conocimiento didáctico del contenido; Conocimiento del aprendizaje de las matemáticas; Ecuaciones lineales con coeficientes racionales.

Introducción

El presente escrito es parte de una investigación más amplia en la que se estudia el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemática en un contexto de educación superior; para el caso que interesa, la atención se centra en analizar los conocimientos que un profesor de matemática utiliza para reconocer los procesos de aprendizaje de sus estudiantes del ciclo básico universitario. Por ello se ha dirigido la mirada hacia modelos descriptivos y analíticos, como el del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo, et al., 2018) que permite una aproximación a dicho conocimiento docente. La intención es caracterizar, por medio este modelo, los conocimientos del profesor sobre cómo sus estudiantes aprenden un contenido matemático (ecuaciones lineales con coeficientes racionales) o qué aspectos de enseñanza contribuyen a su aprendizaje.

Referentes teóricos

En los años 80 Shulman (1986) marca de manera clara distintos conocimientos que debería poseer todo profesor; en particular, introdujo la idea del Conocimiento Didáctico del Contenido como fusión entre el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido, propio de la labor docente. Luego, en la primera década de los 2000 surgen modelos como el Knowledge Quartet (KQ) desarrollado por Rowland, Huckstep & Thwaites (2005) y el de Loewenberg Ball y sus colaboradores, quienes presentan su modelo denominado MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) (Loewenberg Ball et al., 2008), con la idea de contextualizar la propuesta de Shulman al caso del profesor de matemáticas. Luego, en la década siguiente, surgen otros modelos y entre ellos el del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo et al., 2018). Este modelo permite establecer descripciones e interpretaciones de forma organizada tomando en cuenta los múltiples conocimientos (matemático, didáctico del contenido y las creencias y concepciones sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje) que intervienen en las labores de aula destinada a la enseñanza-aprendizaje de un determinado contenido matemático.

El modelo MTSK contempla dos dominios, el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); este último, hace referencia al conjunto de conocimientos de carácter didáctico que un profesor de Matemática necesita saber y poner en práctica durante la ejecución de una sesión de aprendizaje. Este dominio se compone de tres subdominios: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Para responder al objetivo de esta presentación, se centra la atención en el subdominio conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), que permite caracterizar el conocimiento que un profesor de Matemática dispone para interpretar el proceso de aprendizaje de sus estudiantes; esto significa que le permite precisar vacíos conceptuales y procedimentales y concepciones sesgadas en las formas de pensamiento matemático que pudieran estar presentes en los estudiantes. En este subdominio se presentan las siguientes categorías: conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje, teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a un contenido matemático e intereses y expectativas de los estudiantes. Todas estas categorías se enfocan en los conocimientos del profesor sobre cómo los estudiantes aprenden un contenido matemático o qué aspectos de enseñanza contribuyen a su aprendizaje (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Metodología

Esta investigación es de tipo naturalista interpretativa (Flick, 2015) porque se estudian los hechos tal y como sucedieron en una sesión de aprendizaje del ciclo básico universitario del área profesional gestión empresarial y el enfoque es interpretativo porque se identifican, analizan e interpretan las diferentes manifestaciones del conocimiento que en él surgen sobre cómo los estudiantes aprenden ecuaciones lineales con coeficientes racionales o qué aspectos de enseñanza contribuyen a su aprendizaje durante el episodio estudiado. Para conservar el anonimato los actores se identifican como profesor (P) o estudiante (Ei, donde i=1, 2, 3, …). El objetivo es caracterizar los conocimientos del profesor sobre cómo los estudiantes aprenden un contenido matemático (ecuaciones lineales con coeficientes racionales) o qué aspectos de enseñanza contribuyen a su aprendizaje. Para ello se toma en cuenta el subdominio del PCK denominado conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).

De las categorías planteadas en el KFLM, se consideraron tres que surgieron en el episodio que se presenta, estas son: conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje y teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.

Presentación de los resultados y discusión

Con la intención de identificar los conocimientos que el profesor dispone sobre cómo los estudiantes aprenden ecuaciones lineales con coeficientes racionales o qué aspectos de enseñanza contribuyen a su aprendizaje, se toma en cuenta 3 de las 4 categorías del subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje y teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a un contenido matemático. Se presenta a continuación el análisis y discusión de los resultados por cada una de las categorías ya señaladas.

Categoría: conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las ecuaciones lineales con coeficiente racional.

El profesor muestra conocimiento sobre una dificultad que manifiestan los estudiantes al momento de resolver una ecuación lineal con coeficientes racionales pues presenta una resolución que recrea un razonamiento procedimental erróneo. Dicho conocimiento podría ser producto del análisis que el profesor ha realizado a los errores, conceptuales y procedimentales, manifestados por los estudiantes en experiencias anteriores. Esto le permite utilizar el error como una oportunidad de aprendizaje y así tener un mayor acercamiento a los conceptos de interés. En el siguiente diálogo se manifiesta lo aquí señalado.

P: Para concluir esta parte de recojo de saberes previos, me gustaría que me digan si la resolución de la siguiente ecuación es correcta o no y por qué.

$$\frac{2}{3}x + 4 = \frac{3}{4}x$$
$$mcm(3;4) = 12$$
$$12.\frac{2}{3}x + 4 = 12.\frac{3}{4}x$$
$$8x + 4 = 9x$$
$$4 = x$$

Se observa que este razonamiento erróneo consiste en multiplicar por el mínimo común múltiplo solo los términos de la ecuación cuyos denominadores permitieron su cálculo.

El profesor, con la presentación de esa situación, muestra de forma anticipada la manera procedimental que ejecutan los estudiantes de forma errónea. Su conocimiento sobre la dificultad asociada al aprendizaje de las ecuaciones lineales con coeficientes racionales se puede resumir de la siguiente manera: Si $\frac{a}{b}x + c = \frac{p}{q}x$, siendo x la incógnita y b y q distintos de cero, entonces $mcm(b;q)\frac{a}{b}x + c = mcm(b;q)\frac{p}{q}x$

Se pudiera considerar que el docente también conoce que esta forma errónea de resolver una ecuación lineal con coeficientes racionales se debe a una frase evocada por los estudiantes: "Se divide por el de abajo y se multiplica por el de arriba".

P: Revisen nuevamente la resolución mostrada. ¿Estará bien?
E2: Yo creo que sí. Se divide por el de abajo y se multiplica por el de arriba.
Profesor: Podrías explicar en qué consiste esa frase.
E2: ¿Cuál frase profe?
Profesor: Esa de "divide por el de abajo y multiplica por el de arriba".
E2: Primero se calcula el 12.
Profesor: El mínimo común múltiplo.
E2: Sí, se calcula el mínimo común múltiplo de 3 y de 4. Entonces 12 se divide entre el de abajo que es 3, da 4, y 4 se multiplica por el de arriba que es 2, da 8. También 12 se divide entre 4, da 3, y se multiplica por 3 y da 9.
P: ¿Todos están de acuerdo?

En el supuesto que el profesor no hubiese conocido la razón por la cual los estudiantes interactúan de esa forma con las ecuaciones lineales, entonces con la intervención del E2 ahora integra a su conocimiento especializado la justificación procedimental que siguen algunos estudiantes en este tipo de resoluciones.

Categoría: formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje.

El profesor muestra conocimiento sobre cómo el error se puede usar como una estrategia para lograr una mejor comprensión conceptual y procedimental entre sus estudiantes. Con esta estrategia toma ventaja en la atención y tratamiento de un error, y lo usa como un recurso que favorezca el aprendizaje significativo.

P: ¿Todos de acuerdo? ¿Cómo podemos estar seguros de que la respuesta es 4?
E4: ¡Reemplazando! ¡Ya lo compruebo!
P: Por favor, todos comprueben.
E3: No me da profe. Me sale que 6,6 es igual a 3.
E2: Puede ser que sacaste mal la cuenta porque el procedimiento está bien (esto lo dice mirando la solución proyectada en la pizarra).
E4: A mí me da lo mismo que a ti (dirigiéndose a E3). Me da una cosa loca.
P: Revisen nuevamente la resolución mostrada. ¿Estará bien?

Por otro lado, el profesor también muestra conocimiento sobre el proceso que siguen los estudiantes al resolver una ecuación lineal con coeficientes racionales: ellos interactúan con la ecuación y consideran que su resolución está dada cuando la incógnita queda despejada, pero no advierten que es importante comprobar el resultado obtenido. De allí que la intervención del profesor, cuando indican que la respuesta es 4, sea preguntar sobre cómo estar seguros de que esa es la respuesta correcta.

E3: Sí, está bien resuelta. La respuesta es 4.
P: ¿Todos de acuerdo? ¿Cómo podemos estar seguros de que la respuesta es 4?
E4: ¡Reemplazando! ¡Ya lo compruebo!
P: Por favor, todos comprueben.

Categoría: teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a las ecuaciones lineales con coeficiente racional.

Se puede notar que el docente conoce sobre el potencial que tiene la fase de recojo de saberes previos para acceder a las formas de pensamientos de los estudiantes y a partir de ella abordar el contenido: explorar preconcepciones, vacíos, obstáculos y fortalezas conceptuales, ideas matemáticas, entre otros. De modo que la información encontrada en esta fase se convierta en un verdadero puente para extenderse, con altos criterios de intervención y discusión, a los conceptos que se pretenden abordar y enseñar. También conoce sobre la necesidad de generar conflicto cognitivo entre los estudiantes antes de iniciar con el desarrollo de la temática planificada en su sesión de aprendizaje.

Por otro lado, se pudiera considerar que el profesor maneja una teoría personal sobre el uso de las igualdades numéricas para generar aprendizajes en las de tipo algebraico. Por ejemplo, si en una igualdad numérica se multiplica algunos de sus términos por un número $K \neq 0$, entonces resultaría una desigualdad. Parece que esta teoría personal sirve para convencer a los estudiantes sobre la necesidad de que el mínimo común múltiplo multiplique a todos los términos de una ecuación y no solo a los coeficientes cuyos denominadores generaron ese mínimo común múltiplo.

P: Tomen la igualdad 2+4=6. ¿Qué ocurría si el número 2 se multiplica por 3?
E4: Da una cosa loca. Me da que 10 es igual a 6.
P: ¿Y por qué crees que sucede eso?
E3: Profe, pero ¿por qué lo multiplica por 3?
P: Dije 3 solo por multiplicar por un número, pero pudo haber sido cualquier otro: 5, 6, 9.
E3: ¿Y por qué multiplica solo a 2?

P: ¿Y qué pasaría si 3 multiplica a cada uno de los términos de la igualdad y no solo a 2?
E3: Sería 6 más 12, 18. Me da que 18 es igual a 18.
E4: Si multiplica a todos sí te da, pero si lo haces con el primero no te da.
P: La igualdad queda afectada si solo multiplicas a algunos términos de ella.
El profesor registra en la pizarra 2(3)+4=6, FALSO; 2+4(3)=6, FALSO; 2+4=6(3), FALSO; 2(3)+4(3)=6(3), CIERTO.
P: ¿Cómo puede esto ayudarnos a entender la resolución de la ecuación?

Consideraciones finales

El análisis del conocimiento del profesor de matemática que utiliza para reconocer los procesos de aprendizaje de sus estudiantes del ciclo básico universitario, permite llegar a unas consideraciones finales. En primer lugar, se evidencia por parte del profesor un conocimiento de las dificultades asociadas al aprendizaje de las ecuaciones lineales con coeficientes racionales. El profesor, posiblemente, desde sus experiencias previas, conoce de las dificultades de sus estudiantes al momento de multiplicar por el mínimo común múltiplo los diferentes términos de una ecuación lineal con coeficientes racionales; él sabe que cuando uno o más términos de la ecuación no presenta un coeficiente expresado en fracción, el estudiante tienden a no multiplicarlo por el mínimo común múltiplo, de ahí que presenta un caso donde ese error hace su aparición. Este tipo de error está asociado a la aritmética y, aunque se supone que debería estar superado, persiste, coincidiendo de esta manera con un estudio realizado por Booth et al. (2014).

En relación a las formas de interacción con las ecuaciones lineales con coeficiente racional, el profesor hace uso del error para así lograr una mejor comprensión conceptual y procedimental entre sus estudiantes, aprovechando el error como recurso para el aprendizaje (Regolini & Climent, 2021). Por último, en relación a las teorías formales y/o personales de aprendizaje asociadas a las ecuaciones lineales con coeficientes racionales, el docente evidencia poseer una teoría personal sobre el uso de las igualdades numéricas para generar en sus estudiantes aprendizajes de tipo algebraico; entre otras interviene con el fin de generar conflictos cognitivos porque sabe que estos promueven el aprendizaje entre sus estudiantes.

El conjunto de conocimientos aquí señalados caracteriza en el profesor un conocimiento sobre el aprendizaje de sus estudiantes. Este conocimiento se manifiesta entre sus teorías, el uso de errores que él sabe que cometen con frecuencia sus alumnos para, desde ahí, provocar conflictos cognitivos, promoviendo así la reflexión y la metacognición, elementos claves para generar aprendizajes (Korthagen, 2010; Parra-Sandoval, 2020).

Bibliografía y referencias

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *Journal of Problem Solving*, *7*(1), 10–23. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Flick, U. (2015). El diseño de investigación cualitativa. Ediciones Morata, S.L.

Korthagen, F. A. J. (2010). 27419198005. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, *24*, 83–101. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27419198005

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Parra-Sandoval, H. (2020). Problematización y conocimiento especializado del formador de profesores de Matemáticas. *Paradigma*, *XLI*, 251–270. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2020.p251-270.id873

Regolini, M., & Climent, N. (2021). Método de la inversa: el conocimiento especializado de una profesora universitaria. *Método de La Inversa: El Conocimiento Especializado de Una Profesora Universitaria*, 247–254. https://cdn.congresse.me/ho20198vnz5ar0pp4l3wt33iit5t

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Shulman, L. S. (1986). Those who understand .. Shulman (1986). *American Educational Research Association*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/1175860

De lo concreto a lo indeterminado. Un estudio de caso sobre el proceso de generalización en un contexto funcional

Romina **Narváez**
Universidad de Granada
España
rnarvaez@correo.ugr.es
María D. **Torres**
Universidad de Granada
España
mtorres@ugr.es
María C. **Cañadas**
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es

Resumen

Esta investigación es parte de un estudio más amplio realizado en España sobre el pensamiento funcional en infantil y primaria. Nuestro objetivo de investigación es describir el proceso de generalización (abducción, inducción y generalización) realizado por un estudiante de cuarto de primaria (9 años) durante el desarrollo de una entrevista individual que consideró la función lineal ($y=3x+1$). La metodología es un estudio de caso de carácter intrínseco, donde describimos lo sucedido con el estudiante durante su proceso de generalización, identificando, además, las estructuras que el estudiante evidenció a lo largo de la entrevista. Dentro de los hallazgos, destacamos que el estudiante valida y reafirma la estructura de la función que evidencia previamente (fase de abducción) generalizando con casos indeterminados, sin pasar por el trabajo con casos lejanos. Como conclusión expresamos que no es necesario pasar por todas las fases del proceso de generalización para generalizar. Así también, que la identificación de estructuras es una característica clave dentro del proceso de generalización.

Palabras clave: Educación primaria; estudio de caso; estructura, generalización; pensamiento funcional; proceso de generalización; razonamiento abductivo; razonamiento inductivo.

Antecedentes y marco teórico

La introducción de modos de pensamiento algebraicos en edades tempranas se centra en la generalización a partir de la observación de regularidades en una situación matemática planteada (Radford, 2013). Entre los distintos modos de pensamiento algebraico para educación primaria, nos ubicamos en el pensamiento funcional. Este pensamiento se centra en la relación entre dos (o más) cantidades que covarían; específicamente, involucra los tipos de pensamiento que van desde relaciones entre cantidades concretas hasta la generalización de esas relaciones (Kaput, 2008. p. 143).

Asumimos aquí la concepción dual de la generalización, como proceso y como producto de dicho proceso (Harel y Tall, 1991). La generalización como proceso implica: (a) identificar los elementos comunes a todos los casos, (b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó y (c) obtener resultados más amplios que los casos particulares (Ellis, 2007; Radford, 2013). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). Al generalizar, los estudiantes pueden incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar la estructura de la relación funcional (Cañadas y Castro, 2007). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones tanto por razonamientos abductivos como inductivos (Rivera, 2007; Torres et al., 2021). En la figura 1 recogemos un modelo que relaciona en tres fases el proceso de generalización con los diferentes razonamientos (abducción, inducción y generalización) (Torres et al., 2021).

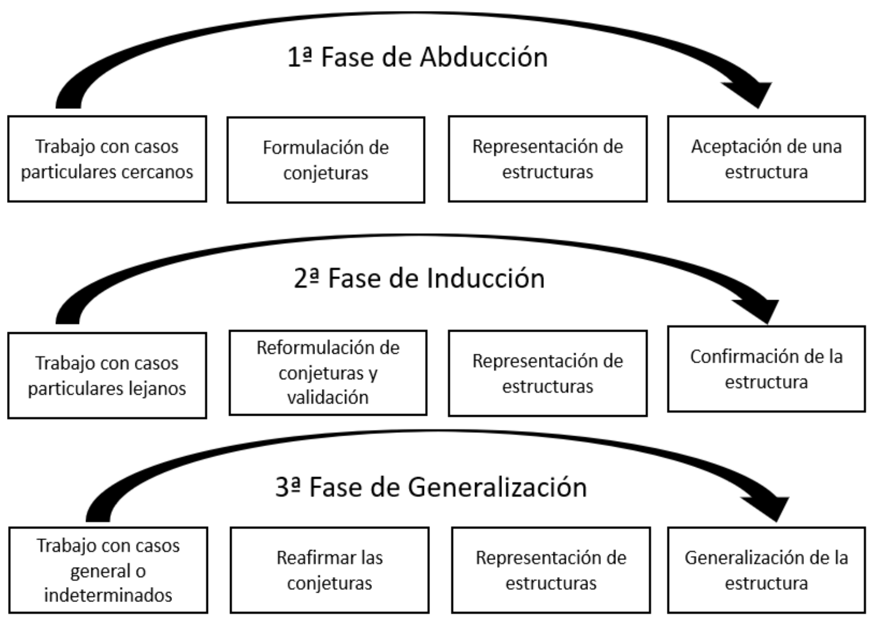


Figura 1. Proceso de generalización (Torres et al., 2021).

Dentro de este modelo, la estructura hace referencia a la regularidad evidenciada entre las variables de una función, siendo un elemento clave en el proceso de generalización. Para nuestro estudio fue clave, puesto que nos ayudó a evidenciar cuando el estudiante cambió de fase en dicho proceso.

Como lo expresamos, este modelo considera tres fases. La primera, fase de abducción, comienza con el trabajo con casos particulares cercanos. En esta fase se lleva a cabo un razonamiento abductivo por el cual se prueba repetidamente y se formulan conjeturas (Rivera y Becker, 2003). La fase de inducción parte de los casos particulares lejanos que son aquellos que necesitan del conocimiento de la estructura para dar el resultado; son valores más grandes que no se pueden dibujar o contar según el nivel académico del estudiante. La fase de inducción tiene un carácter comprobatorio y no creador, es decir, los razonamientos inductivos no aportan conocimiento nuevo (Pierce, 1965). Su función es la de verificación de la estructura previamente aceptada por abducción que, en algunos casos, puede modificarse durante la misma fase. Finalmente, para generalizar habrá que imponer la presencia de casos indeterminados o generales con los que el estudiante pueda reafirmar la estructura validada durante la fase de inducción. De esta manera el estudiante podrá expresar la generalidad de la relación funcional, a través de la generalización de esta estructura.

Para este estudio nos planteamos como objetivo analizar el proceso de generalización que sigue un estudiante de cuarto de primaria (9 años) cuando aborda una tarea con una función lineal ($y=3x+1$). Para ello, usaremos el modelo presentado anteriormente.

Metodología

Nuestra investigación es cualitativa de carácter descriptiva y explicativa. Específicamente, presentamos un estudio de caso intrínseco (Stake, 2005). El sujeto de investigación es un estudiante de cuarto de primaria (9 años) de un colegio concertado de Granada (España). Este estudiante participó un experimento de enseñanza, que realizamos con su grupo-clase. Durante el experimento de enseñanza, implementamos cuatro sesiones de trabajo, donde planteamos tareas de generalización con contextos cercanos, utilizando las funciones $f(x)= 2x+1$; $f(x)= x+3$ y $f(x)= 2x$. Posteriormente, realizamos entrevistas individuales a un grupo de estudiantes. El estudiante de este estudio fue seleccionado porque fue muy participativo durante las sesiones de clase. La buena disposición para trabajar y conversar es necesaria para la realización de la entrevista. Además, al revisar su entrevista, observamos que la investigadora solo trabajó con casos cercanos e indeterminados, sin presentarse casos con cantidades lejanas. La entrevista duró 36 minutos aproximadamente donde trabajamos la siguiente situación “En el cumpleaños de Isabel le regalará la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños”, involucrando la función $f(x)= 3x+1$. Transcribimos la entrevista y analizamos el proceso de generalización con base en las categorías dadas en el modelo del proceso de generación detallado en la figura 1 (Torres et al., 2021).

Resultados y análisis

Durante el desarrollo de la entrevista se trabajó con diversos casos (cercanos e indeterminados) donde el estudiante evidenció distintas estructuras. Al inicio de la entrevista, la investigadora realizó la introducción de la tarea. En esta primera aproximación el estudiante identifica la estructura $3x+1$. A continuación, detallamos una parte de la entrevista donde se observa esta situación. Utilizamos la letra I para referirnos a la investigadora y la letra E para referirnos al estudiante:

1. I: El siguiente caso es cuando fueron seis invitados. ¿qué piensas? Cuando fueron seis invitados, necesitó 19 globos.
2. E: 19 globos, ¿y van seis? Pues pone uno en la puerta y tres para cada uno.
3. I: Entonces como sabes esto…
4. E: Contando... Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez... o dividiendo.
5. I: ¿Cómo?
6. E: Pues si somos seis amigos y hay 19 globos...
7. I: Y la puerta...
8. E: Y la puerta. Pues se divide tres por seis, sale 18, más me sobra uno y lo pongo en la puerta.
9. I: ¿Y serían?
10. E: Pues totalmente 19.

Observamos como en la línea 8 el estudiante evidencia claramente la estructura 3x+1 en esta primera aproximación. Posterior a la introducción de la tarea, la investigadora continuó presentando casos particulares cercanos. En esta etapa el estudiante estaba en la fase de abducción, periodo de prueba donde el estudiante está probando diferentes estructuras que pueden dar respuesta a la tarea dada. En esta fase realizó la identificación de estructuras. En primer lugar, identificó la estructura $3x+1$, expresando que "¿el tres? es lo que le damos a cada niño y el uno, lo que le damos a la puerta". Después identificó las estructuras $5x$ y $x+1$. En esta parte de la entrevista el estudiante expresó que se le debe dar la misma cantidad de globos a cada niño, pero la cantidad fue diferente a la función que se está trabajando. Un ejemplo de esto es cuando identifica la estructura $x+1$ expresando "es seis porque uno para la puerta, otro para él, otro para él y otro para él". La investigadora al observar que el estudiante no avanzaba revisó junto a él los ejemplos anteriores. Posterior a ello, el estudiante identificó nuevamente la estructura $3x+1$. En el siguiente fragmento de la entrevista lo detallamos:

1. I: Ahora si fuesen diez invitados, ¿cuántos globos necesito?
2. E: Sumando tres por cinco...tres por 10.
3. I: Lo anotamos ese cálculo y yo te digo el resultado.
4. E: Tres por 10 igual a 30. Necesitamos 30 globos.
5. I: ¿Esos tres qué significa?
6. E: Lo que le dio a cada uno.
7. I: ¿Y ese 10?
8. E: El número de invitados.
9. I: ¿Y qué pasa con la puerta?
10. E: Que le sumo la puerta y es igual a 31.

En esta situación observamos que el estudiante aceptó en este primer período de prueba (fase abductiva) la estructura $3x+1$ avanzando en su proceso de generalización. Para observar si se reafirma o no en su identificación de la estructura, indagamos en su trabajo con nuevos casos particulares. En esta fase se pasó de trabajar con casos cercanos a casos indeterminados. El primer caso indeterminado fue introducido así: "Isabel quiere invitar a muchos invitados". Consideramos que el estudiante ha reafirmado una estructura evidenciada cuando la usa en más de dos ocasiones de manera correcta para un caso indeterminado. A continuación, detallamos parte de la entrevista y respuesta escrita en la figura 3:

1. I: Pero ella sabe el número, solo que no te lo quiere decir a ti. Solo te dice que son muchos. ¿Cómo le explicas tú a ella qué tiene que hacer para saber la cantidad de globos?...
2. E: Multiplicar y darle tres globos a cada uno. Multiplica por tres [Escribe en la tabla, segunda celda continua a "muchos"]
3. I: Y ahí cuando multiplique por tres si son muchos, ¿qué hace después?
4. E: Muchos por tres... Igual a muchos globos.
5. I: ¿Solo multiplica por tres? ¿Qué pasaba con la puerta?
6. E: Más uno es igual a muchos globos uno.

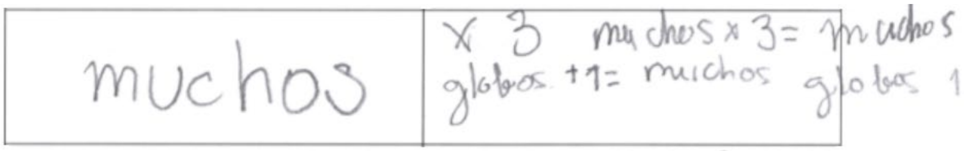


Figura 3. Respuesta escrita del estudiante en tabla de datos.

El estudiante vuelve a expresar que se debe "multiplicar y darle tres globos a cada uno más uno". Con esto evidenciamos que está reafirmando la estructura (por medio de los casos indeterminados), que había aceptado previamente (fase de abducción), generalizando la estructura.

Para finalizar la entrevista, la investigadora le propuso dos casos particulares relativos a la forma inversa de la función trabajada. Esta parte de la entrevista evidencia que el estudiante reafirmó nuevamente su elección de estructura, ya que la usó para dar respuesta a las cuestiones planteadas. Un ejemplo fue con trece globos, donde el estudiante indicó que es cuatro porque se divide 13 por 3, que es el número de globos y eso da como resultado 4. En la figura 4 mostramos su respuesta escrita:

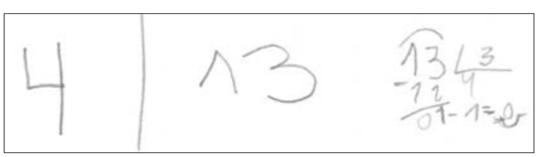


Figura 3. Respuesta escrita del estudiante en tabla de datos.

Discusión y conclusiones

Este estudio evidencia que el estudiante de cuarto de primaria tiene capacidades para generalizar del mismo modo que lo reflejan otros estudios con diferentes edades (e.g., Cañadas y Castro, 2007; Stephens et al., 2017; Torres et al., 2021). En este caso particular, el estudiante generalizó la relación funcional $f(x)= 3x+1$. El proceso de generalización realizado por el estudiante partió desde la fase de abducción, trabajando con casos particulares cercanos, donde identificó diferentes estructuras que después validaría con los siguientes casos a trabajar (cercanos e indeterminados). En Torres et al. (2021) la validación de la estructura se hacía en la fase de inducción, momento en el que los estudiantes trabajaron con casos particulares lejanos previos a los indeterminados. Este estudio da un ejemplo de cómo puede validarse la estructura identificada con casos indeterminados y lograr generalizar, sin necesidad de trabajar con casos lejanos. Consideramos relevante analizar el proceso de generalización de más estudiantes y comparar esos resultados con los obtenidos en el trabajo de Torres et al. (2021) y así dar una mirada más crítica al proceso de generalización.

Destacamos la importancia del trabajo con casos cercanos para que los estudiantes prueben diferentes estructuras y acepten una de ellas para más tarde poder confirmarla. Esto es clave para lograr generalizar. En este estudio de caso, el estudiante identificó previamente distintas estructuras que le ayudaron a aceptar y validar la estructura correspondiente. Con este estudiante no se trabajó con casos lejanos, pero esto no fue obstáculo para que el estudiante generalizara. Al trabajar con casos cercanos y luego con casos indeterminados, permitió que el estudiante validara su estructura y la confirmara con los casos indeterminados. Concordamos además con lo expresado por Torres et al. (2022) que la identificación de estructuras es una característica clave, ya que nos permite interpretar fases dentro del proceso de generalización.

Así mismo observamos que las intervenciones de la investigadora permitieron que el estudiante respondiera y guiara su trabajo hacia la generalización. Consideramos relevante en un futuro trabajo estudiar las relaciones que existen con el proceso de generalización y las mediciones realizadas. De la misma manera, consideramos que habrá que atender a las justificaciones que realizan los estudiantes sobre sus validaciones y reafirmaciones, para estudiar en más profundidad el proceso de generalización.

Agradecimientos

Proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). LEA. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2.

Peirce, C. (1965) Collected Papers of Charles Sanders Peirce. En C. Hartshorne y P. Weiss (Eds.), *The Belknap Press of Harvard University Press.* Cambridge, MA, USA.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encamación Castro* (pp. 3-12). Granada, Spain: Editorial Comares.

Rivera, F. y Becker, J. R. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 63-70.

Stake, R. E. (2005) Investigación con estudio de casos. Madrid, Morata.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021*). Generalization process by second grade students.* Mathematics, *9*(10), 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637.

Desenho de tarefas: uma possibilidade para qualificar o ensino

Luis Sebastião Barbosa Bemme
Universidade Franciscana
Brasil
luis.bemme@ufn.edu.br
Eleni Bisognin
Universidade Franciscana
Brasil
eleni@ufn.edu.br
Silvia Maria de Aguiar Isaia
Universidade Franciscana
Brasil
luis.bemme@ufn.edu.br
Vanilde Bisognin
Universidade Franciscana
Brasil
vanilde@ufn.edu.br

Resumo

Nesta comunicação temos como objetivo apresentar uma reflexão sobre o desenho de tarefas como um elemento qualificador do ensino. Tal estudo é de caráter qualitativo em uma abordagem descritiva e explicativa. Entende-se que esta ação é de grande relevância à medida que favorece ao professor adequar ou elaborar situações problemas que sejam coerentes ao nível de desenvolvimento de seus alunos e aos contextos nos quais estão inseridos. As reflexões apresentadas nessa comunicação indicam que, embora o desenho de tarefas não seja uma atividade trivial, esta traz ganhos qualitativos na aprendizagem do estudante uma vez que aproxima os conhecimentos matemáticos ao nível de desenvolvimento dos alunos além de favorecer a integração entre distintas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Educação Básica; Qualificação da atuação docente; Desenho de tarefas; Professor de Matemática.

Introdução

Quando pensamos nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática não podemos deixar de considerar o papel fundamental do professor, já que é ele quem organiza e propõe as tarefas de ensino, deste modo, qualificar os processos de aprendizagem necessariamente perpassa pela necessidade de qualificarmos os processos formativos docente, ou seja, é necessário investirmos em pesquisas que tragam à tona elementos que são fundamentais para a atuação deste profissional da área da Educação.

Neste sentido nessa comunicação temos como objetivo apresentar uma reflexão sobre o desenho de tarefas como um elemento qualificador do ensino. Essa temática é necessária e fundamental para que possamos qualificar a atuação do professor que ensina Matemática. Quando nos voltamos as aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, vimos que ainda há um protagonismo no uso do livro didático, sendo que este ainda é o principal recurso de apoio ao professor.

Não discutimos a importância desse recurso uma vez que a construção da Matemática é essencialmente sequencial, onde um conceito depende do outro, e o livro didático, nesse sentido, fornece uma ajuda útil para essa compreensão da construção desta área do conhecimento (Dante, 1996), no entanto, muitas vezes o modo como os livros abordam os assuntos ou propõe as atividades de ensino, estão distantes dos níveis de aprendizagens e dos contextos emergentes dos alunos em questão.

Desse modo, entendemos que o desenho de tarefa é uma ação que pode aproximar o ensino com a realidade dos alunos, respeitando o nível de desenvolvimento dos mesmos. Gusmão (2019) define tarefa como um conjunto amplo de propostas que envolvem problemas, atividades, exercícios, projetos, jogos, experiências e investigações que podem ser utilizados pelo professor visando a aprendizagem matemática dos alunos. O autor pontua ainda que "as tarefas condicionam não somente as aprendizagens como também a forma como os estudantes percebem a matemática" (Gusmão, 2019, p.2).

Além disso Penalva e Llinares (2011) sublinham que as tarefas são instrumentos potentes quando utilizadas de forma adequada, uma vez que há uma relação muito grande e próxima entre a aprendizagem de novos conceitos pelos estudantes e o modo como o professor realiza a gestão destas tarefas em sala de aula. Esta constatação serve para os distintos níveis e modalidades de ensino.

O desenho por sua vez é entendido como um processo que envolve ações de criar, idealizar e produzir situações e recursos de aprendizagem que sejam autênticas e originais. (Gusmão & Font, 2020). Nesse sentido quando aliamos o conceito de tarefa com o de desenho resultamos em um processo de construção onde o professor, a partir de objetivos claros e bem definidos, constrói uma proposta de ensino voltada para seu espaço real de atuação.

No entanto, desenhar tarefas de ensino não é algo trivial, Gusmão (2019) ressalta alguns critérios que precisam ser levados em conta para a seleção, desenho ou gestão de tarefas, são elas: i) *selecionar os conteúdos* a partir de testes diagnósticos visando identificar as reais necessidades; ii) *planejar o desenho* a partir do que é previsto no currículo escolar, considerando a forma como o conteúdo pode ser apresentado e as possíveis dificuldades dos alunos ao resolvê-lo; iii) *desenhar a tarefa* de modo que esta seja acessível, cuidando da linguagem e dos elementos essenciais para que a mesma seja considerada uma boa tarefa; iv) *realizar a intervenção* em diferentes momentos, considerando a realidade em que se desenvolve; v) *redesenhar a tarefa*, ou seja, o momento de rever e reajustar a tarefa de modo a melhorá-la para uma nova aplicação.

Além disso, ao desenhar as tarefas de ensino o professor precisa levar em conta o grau de desafio e de estrutura fechada ou aberta da mesma. Na tarefa fechada fica claro o que é dado e o que é pedido para aluno, já a tarefa aberta, comporta indeterminações em pelo menos em um desses aspectos (Ponte, 2005). Provocados por essas questões, na sequência deste texto, apresentamos os caminhos metodológicos deste estudo.

Metodologia

Tal estudo caracteriza-se como qualitativo com princípios de uma pesquisa descritiva e explicativa. A pesquisa de caráter qualitativo se caracteriza pela intepretação dos fenômenos e a atribuição de significados que são fundamentais no processo de investigação. Tal pesquisa não requer o uso de técnica estatística e o processo de análise e discussão dos dados tem como base o próprio ambiente no qual se investiga (Prodanov & Freitas, 2013).

Aliado a abordagem qualitativa utilizamos os princípios de uma pesquisa descritiva e explicativa. Por pesquisa descritiva entendemos aquela que exige do pesquisador uma série de informações sobre o que se está investigando. Esse tipo de estudo busca descrever os fatos e fenômenos da realidade em questão (Triviños, 1978).

Já a pesquisa explicativa centra-se em identificar os fatores que influem para a ocorrência dos fenômenos, ou seja, este tipo de pesquisa explica o porquê das coisas através dos resultados oferecidos, sendo que a mesma pode ser a continuação de uma pesquisa descritiva, já que a identificação de fatores que determinam um fenômeno exige que este esteja suficientemente descrito (Gil, 2007).

Nessa comunicação nossa pretensão é discutir teoricamente o conceito de desenho de tarefas, a partir da literatura vigente, para que possamos fazer um exercício de construção de uma proposta a partir dos pressupostos discutidos. Para isso apresentamos um desenho de tarefa voltada para o sexto ano do Ensino Fundamental, construída a partir de um infográfico presente em um livro didático de circulação nacional no Brasil.

Desenhando uma tarefa de ensino

Provocados pelas reflexões teóricas apresentados anteriormente e partindo de uma situação apresentada no livro Matemática 6º ano de autoria de Bianchini (2015), construímos uma proposta de uma tarefa de ensino para o sexto ano do Ensino Fundamental que vise o trabalho com a construção, comparação, interpretação e inferências a partir do levantamento de dados e do conceito de porcentagem.

Inicialmente o infográfico presente na Figura 1 pode ser apresentado ao aluno de modo que ele leia as informações presentes no mesmo sem a interferência direta do professor.

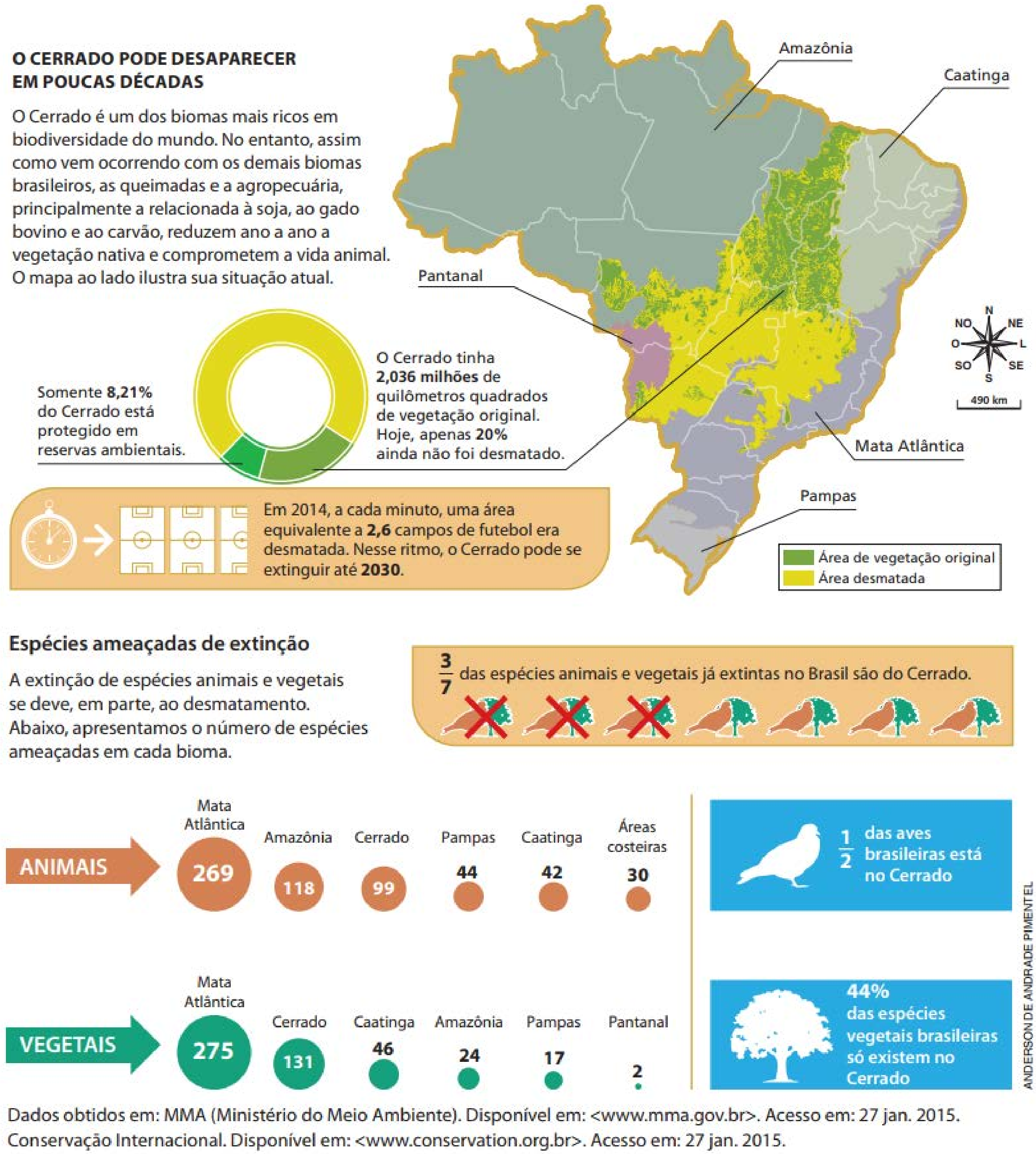


Figura 1. Infográfico sobre o desmatamento do cerrado (Bianchini, 2015).

Após a leitura o professor poderá questionar sobre: a) Você sabe em que regiões o Brasil está dividido? b) Já estudou sobre os biomas que compõem o nosso país? c) Qual o bioma predominante no Estado do Rio Grande do Sul?

As reflexões iniciais têm como objetivo despertar a curiosidade e a necessidade de uma pesquisa sobre essas temáticas. O professor, a partir dos dados disponibilizados no site da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – EMBRAPA (https://www.embrapa.br/contando-ciencia), solicitará que os alunos completem o Quadro 1[1].

Quadro 1
Dados sobre os biomas brasileiros.

	Bioma Amazônia	**Bioma Caatinga**	**Bioma Cerrado**	**Bioma Mata Atlântica**	**Bioma Pampa**	**Bioma Pantanal**
Número de espécies de plantas	*30 mil*	*932*	*12 mil*	*15.700*	*3 mil*	*2 mil*
Números de espécies de mamíferos	*311*	*178*	*251*	*298*	*102*	*152*
Números de espécies de aves	*1.300*	*591*	*856*	*992*	*476*	*582*
Números de espécies de anfíbios	*163*	*79*	*209*	*370*	*50*	*47*
Números de espécies de répteis	*350*	*177*	*262*	*200*	*97*	*127*
Números de espécies de peixes	*1.800*	*241*	*800*	*350*	*50*	*269*
Espécies de plantas ameaçadas de extinção	*152*	*43*	*637*	*1.544*	*146*	-
Espécies da fauna ameaçadas de extinção	*24*	*46*	*266*	*380*	*49*	-

Fonte: dados Embrapa. 2022.

A partir dos dados coletados no site indicado, os alunos serão convidados a responderem as seguintes questões:

Questão 01. Em qual bioma brasileiro encontra-se o maior número de espécies de plantas? Neste bioma também encontramos o maior número de espécies de plantas ameaçadas de extinção?

Questão 02. Considerando o número de espécies de mamíferos nos biomas brasileiro, quanto por cento se encontra no bioma Pampa?

Questão 03. Considerando o bioma do Cerrado, qual a porcentagem de plantas que podem entrar em extinção? Que ações podemos tomar para evitar que isso ocorra?

Questão 04. Existe um bioma que abriga 28,85% das espécies de répteis, que bioma é este? Você sabe explicar por que isso acontece?

[1] Dados disponibilizados em (https://www.embrapa.br/contando-ciencia), acessado em 20 de outubro de 2022.

Questão 05. É possível organizar um gráfico com as informações presentes no Quadro 1? Qual a melhor forma de comunicar esses resultados?

Questão 06. Dos dados coletados, qual chamou mais a sua atenção? Por quê?

Essas questões que apresentamos são apenas algumas possibilidades que poderão ser exploradas a partir dessa tarefa elaborada. O professor, dependendo do ano em que está atuando e dos conteúdos que precisa desenvolver, pode aprofundar estes dados e relacionar com outras áreas do conhecimento, evidenciando deste modo a matemática como uma ferramenta simbólica que nos auxilia na compreensão do mundo em que vivemos.

Entendemos que a proposta apresentada pode ser um elemento de reflexão para o professor, uma vez que o processo de desenho ou (re)desenho de tarefas é de fundamental importância e contribui para a formação didática e matemática dos docentes já que favorece a junção de conhecimentos disciplinares e pedagógicos, além do domínio de contextos para além da matemática que visam ultrapassar os problemas e exercícios comuns aplicados nas escolas (Godino, 2013).

Considerações finais

Nesta comunicação buscamos apresentar uma reflexão sobre o desenho de tarefas de ensino como um elemento qualificador da atuação docente. Para isso partimos de um infográfico presente em um livro didático de fácil acesso aos professores dos anos finais do Ensino Fundamental e construímos uma proposta de ensino que envolve não somente o conhecimento matemático, mas visa estimular o aluno a busca de informações e a tomada de decisões diante de uma problemática posta.

Entendemos que o desenho de tarefas de ensino não é uma tarefa trivial e, portanto, necessita ser considerada nos cursos de formação como uma possibilidade para a qualificação do ensino de Matemática. Além disso, reconhecemos que sua construção demanda tempo para o estudo e planejamento e por vezes um trabalho compartilhado entre os professores, já que dependendo da situação, diferentes conhecimentos precisam ser mobilizados.

Como evidenciado na proposta apresentada, o desenho de tarefas abre a possibilidade de um trabalho integrado entre as áreas o que favorece a compreensão do aluno que a Matemática é uma ciência viva e que perpassa e sustenta distintos conhecimentos situados em nosso contexto social.

Por fim destacamos que essa comunicação não tem como objetivo prescrever um modo para o ensino de Matemática nem de apresentar uma proposta de tarefa de ensino pronta, mas de provocar reflexões de como, utilizando de recursos e informações de fácil acesso, podemos buscar qualificar os processos de ensino dessa área do conhecimento.

Bibliografia e Referências

Bianchini, E. (2015). Matemática. São Paulo, SP: Moderna.

Dante, L. R. (1996). Livro didático de Matemática: uso ou abuso?. *Em aberto, 69,* 83-97. http://emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2375

Gil, A. C. (2007). Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo, SP: Atlas.

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/282325853_Diseno_y_analisis_de_tareas_para_el_desarrollo_del_conocimiento_didactico-matematico_de_profesores.

Gusmão, T. C. R. S. (2019). Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In: Encontro Baiano de Educação Matemática. Anais[...] Ilhéus, Bahia. https://casilhero.com.br/ebem/mini/uploads/periodico/files/2019/PA2.pdf

Gusmão, T. C. R. S. & Font. V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. Educação Matemática Pesquisa, 22, 666-697. http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/179282/1/705768.pdf

Penalva, M. C. & Llinares, S. Tareas matemáticas en la educación secundaria. In: Goñi, J. M. (Ed.). Didáctica de las matemáticas (pp. 27-34). Barcelona: Grao.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Prodanov, C. C. &Freitas, E. C. (2013). *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. Novo Hamburgo, RS: Feevale.

Triviños, A. N. S. (1987). Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo, SP: Atlas.

Dificultades en la operatoria de los números enteros: Análisis de los obstáculos en el aprendizaje del estudiante

Matías **Cornejo** Roco
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
matias.cornejo2019@umce.cl
Valeria Llanos **González**
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
valeria.llanos2019@umce.cl
Noemí **Pizarro**
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl

Resumen

La enseñanza de la matemática ha mostrado instancias donde los y las estudiantes presentan dificultades en su aprendizaje, por lo que es necesario identificarlas para trabajarlas en favor del aprendizaje de los estudiantes. Este estudio se centra en la identificación de los obstáculos epistemológicos y didácticos que surgen en la enseñanza de las operaciones aritméticas de los números enteros en estudiantes de Educación Primaria. Para llevar a cabo el estudio, se realizaron dos grupos focales de cinco estudiantes de enseñanza primaria cada uno, pertenecientes a los cursos donde se inicia la enseñanza de los números enteros. Los resultados obtenidos muestran la presencia de obstáculos epistemológicos desarrollados en estudiantes relacionados con los algoritmos de adición y multiplicación.

Palabras clave: Obstáculos epistemológicos; Obstáculos didácticos; Números enteros; Números negativos; Educación; Tipos de representaciones.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas se encuentra presente a lo largo de toda la escolaridad, existen instancias donde posiblemente se evidencian diversos tipos de problemas y obstáculos de aprendizaje. Orrantia (2006) comenta que en el área matemática donde más dificultades presentan los estudiantes es en la aritmética, y que estas dificultades posteriormente afectan en otras áreas como la geometría, probabilidad, etc. En el caso de los números enteros, Zapatera (2021) evidencia la existencia de obstáculos epistemológicos que surgen en su enseñanza, donde los estudiantes siguen trabajando con estos como si fuesen números naturales. Para el tratamiento de estas dificultades es indispensable identificar los problemas desde la raíz, es decir, desde que se realizó la enseñanza de los contenidos. Al solucionar estas dificultades, en un futuro se les facilitará el aprendizaje de nuevos conocimientos que incluyan estas operaciones, como lo pueden ser el uso de números enteros en polinomios de grado 2 o mayor. Considerando lo anterior, este documento presenta parte de una investigación que responde a la pregunta ¿Qué problemáticas surgen en el proceso de aprendizaje de operaciones aritméticas de números enteros en la escuela? Para ello, se entrevista a estudiantes de 7° y 8° año básico y se observan obstáculos en la operatoria de los números enteros.

Referentes Teóricos

El concepto de obstáculo es acuñado por Bachelard (1938) el cual lo define como aquellos problemas para el aprendizaje que surgen por el mismo acto de conocer debido a una necesidad funcional, pero dificultan el aprendizaje interfiriendo con el aprendizaje de los conocimientos reales. Además, comenta que “la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación” (p. 19), por lo que se pueden abordar dentro de la enseñanza en el aula.

En cambio, Brousseau (2007) define a los obstáculos como conocimientos los cuales se consideraron válidos en cierto momento, pero dicha validez se pierde cuando el campo de implementación se cambia o se amplía. Los nuevos conocimientos válidos se contraponen con los obstáculos ya desarrollados, sobre esto Brousseau menciona: “El obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento. Por el contrario, opone resistencia a su adquisición, a su comprensión, frena su aplicación, subsiste en estado latente y reaparece de forma imprevista” (2007, p 46). A diferencia de Bachelard, Brousseau les da importancia a estos obstáculos debido a su validez temporal, a diferencia de Bachelard quien los considera como un problema el cual debe rechazarse desde el inicio por su no veracidad. (Cid, 2016)

En la interpretación de Glaeser (1981) sobre los obstáculos, este adopta una postura más general, en la cual caben definiciones como de error, dificultad, desconocimiento. Esto se contrapone a las definiciones de Bachelard y Brousseau, debido a que cabe la posibilidad de considerar como obstáculo algo desconocido, la ausencia de un conocimiento.

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos según el origen entre que estos tienen, se categorizan como obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos. “Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo” (1983, p.73). Todos aquellos obstáculos que dependan única y exclusivamente del trabajo docente se considerarán como didácticos. Sin embargo, también se infiere que hay obstáculos que se presentan dentro de la enseñanza de las matemáticas, pero que no se consideran como tal, los cuales podrían ser epistemológicos debido a su pertinencia en las matemáticas. Además, agrega que “éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría evitarlo” (1983, p. 72), por lo tanto, estos obstáculos son evitables mediante decisiones didácticas adecuadas.

Por otra parte, define los obstáculos ontogenéticos como “los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo: el desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.” (Brousseau, 1983, p 73), por lo que la causa es externa a la enseñanza de las matemáticas o el actuar docente.

Glaeser (1981) clasifica los obstáculos epistemológicos que se evidencian dentro del desarrollo de los números enteros en la historia en seis categorías, los cuales son:

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. No se aceptan números negativos aislados de manera aislada, como en las soluciones a problemas.
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Se aceptan los números negativos de forma aislada, pero no se le da un significado real, se les considera falsas.
3. Dificultad para unificar la recta real. Se les da un sentido a las cantidades negativas, pero se consideran completamente opuestas a lo positivo. Debido a esto se trabaja como dos semirrectas opuestas y no como solo un sistema unificado. (Cid, 2016)
4. La ambigüedad de los dos ceros. Se concibe como la existencia de un cero absoluto y un cero arbitrario, los cuales no coexisten en un mismo espacio. No se puede pensar en una cantidad negativa como algo menor que nada, dado que el cero es absoluto.
5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Las operaciones realizadas con números negativos se centran únicamente a las cuales se pueda aplicar en un contexto real. No se operan de manera abstracta descontextualizada.
6. Deseo de un modelo unificador. La necesidad de encontrar un modelo concreto que justifique tanto la adición como la multiplicación, lo cual no existe.

La enseñanza de los números enteros va de la mano con las diferentes formas de representaciones. Jerome Bruner (1969) en su libro *Toward a Theory of Instruction* define tres tipos de representaciones, formas en las cuales los estudiantes aprenden y reproducen sus conocimientos, representaciones concretas, pictóricas y simbólicas. Muñoz (2019) menciona que “En Chile se plantea desde el Ministerio de Educación, la enseñanza de las Matemáticas con el modelo concreto-pictórico y simbólico (COPISI) que está basado en los modos de representación propuestos por Bruner.” (p 23)

Según los Planes de Estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (2016), los números enteros se enseñan principalmente en dos instancias, 7° y 8° básico (12 y 13 años). En 7° básico se les enseña el concepto de número entero y cómo sumar y restar, mientras que en 8° básico se centra en la enseñanza de la multiplicación y división de números enteros.

Marco metodológico

La metodología de investigación utilizada es cualitativa, mediante un estudio de caso para identificar obstáculos en el aprendizaje de los números enteros que presentan estudiantes de 7° y 8° básico (12 y 13 años) en un colegio municipal de Maipú, Chile.

Como instrumento de recolección de datos se contempla la realización de un grupo focal y una entrevista semi estructurada. En particular, en esta comunicación se reporta lo que corresponde a la aplicación del grupo focal, ya que la entrevista se tiene pendiente de aplicar en una segunda parte del estudio.

La intención de este grupo focal es identificar posibles obstáculos asociados a la operatoria aritmética de los estudiantes de dichos cursos. En este participaron diez estudiantes, las preguntas correspondientes a 7° Básico fueron sobre la adición y sustracción, mientras las aplicadas a 8° Básico trataron sobre la multiplicación y división de números enteros. Los entrevistados se escogieron al azar entre los integrantes de un curso de cada nivel educativo, los cuales posteriormente mencionaron que eran buenos en matemáticas y tenían resultados sobre la media de sus respectivos cursos.

Entre las preguntas realizadas se preguntó: ¿Qué es un número entero? ¿Qué es un número negativo? ¿Qué ejemplos de números negativos conocen? ¿Se les hace fácil o difícil cuando resuelven operaciones con números enteros? ¿Cómo se suman los números enteros? ¿Cómo se restan? ¿Cómo se multiplican? ¿Cómo se dividen? y ¿Estos números se pueden observar en la vida cotidiana?

Para el análisis de la información se clasificaron las respuestas de los estudiantes a partir de los obstáculos epistemológicos de Glaeser, o si pertenecen a algún otro tipo de obstáculo. Además, se intentó relacionar aquellos obstáculos con las representaciones del modelo COPISI utilizadas por los estudiantes.

Resultados y análisis de datos

En cada grupo se discutieron sobre los conocimientos que tenían sobre los números enteros, haciendo los conocimientos pertinentes a su nivel educativo. El grupo 1 representa a los 5 estudiantes de 7° Básico y el grupo 2 representa a los otros 5 estudiantes de 8° Básico. Los estudiantes se enumeran desde E1 hasta E10.

Ambas entrevistas se inician preguntando a los estudiantes ¿Qué es un número negativo? y ¿Qué ejemplos conocen? donde la respuesta principal fue “un número con un signo menos” y ejemplos de números como “menos cinco” o “menos trece”. Después se preguntó acerca de la negatividad del cero, cuestión que en ambos casos respondieron que no es posible, pues es neutro.

Luego se preguntó ¿Qué se les facilita o dificulta cuando trabajan con números enteros? Entre las respuestas se observa “por ejemplo menos nueve menos un número positivo tiene que cambiar el signo a suma y el otro número a la derecha negativo” (E4); “Es como confuso” (E1); “fácil el de la recta numérica” (E3); “Algunas veces no les entiendo (...) porque a mí se me hace más fácil con los números positivos que con los números negativos” (E5).

Al preguntar sobre la adición y sustracción de números enteros en el Grupo 1, estudiantes muestran algunos algoritmos propios de estas operaciones en sus palabras como “Cuando es menos menos, se cambia a más” o “Se restan, porque son de diferente signo” (E4) cuando se habla de la adición. Sin embargo, esto mismo provoca dificultades a estudiantes, pues uno comenta “Eso es lo que a mí me confunde, si se suma o se resta” (E1).

Cuando al grupo 2 se le pregunta sobre la multiplicación y división de números enteros, si bien la mayoría responde adecuadamente, se observó una confusión entre el algoritmo de estas operaciones con el de la suma y resta, pues entre las respuestas se observó “Si los dos son negativos se quedan con el mismo signo” (E7).

Ambas entrevistas se finalizan preguntando sobre las representaciones que conocen o utilizan en el aula para estos números, en el grupo 1 los estudiantes comentan acerca de representaciones concretas como el nivel del mar, deudas, temperatura y el uso de la recta numérica, mientras que en el grupo 2 los estudiantes prefieren el uso de representaciones simbólicas por sobre las concretas, agregando el hecho de que no fueron capaces de mencionar una representación de este último tipo cuando se les consultó, a excepción de la recta numérica.

Al analizar los obstáculos epistemológicos establecidos por Glaeser en las respuestas dadas por los estudiantes, no muestran graves problemas para trabajar en la recta numérica (Obstáculo 3), ni para identificar al 0 como neutro (Obstáculo 4). Tan solo se puede identificar la dificultad para dar un sentido a las cantidades negativas aisladas en estudiantes de 8° básico, pero esto se puede deber al abandono de representaciones concretas y utilizar en su mayoría representaciones simbólicas. Si bien los estudiantes de ambos cursos no parecen tener problemas con la implementación de representaciones abstractas, se puede inferir que, al menos en 8° Básico, el tratamiento de representaciones concretas se considera levemente para la enseñanza de los números enteros.

En ambas entrevistas se puede identificar a estudiantes a los cuales se les complica trabajar con los signos negativos. Está el caso de E7, quien confunde el algoritmo utilizado en la adición con el de la multiplicación de números enteros. Esta situación se clasifica como un obstáculo epistemológico, puesto que dicho estudiante aprendió a sumar y restar números negativos, pero al momento de tener que utilizar otro algoritmo para la multiplicación y división, los conocimientos del estudiante entran en conflicto debido a las similitudes que comparten.

También está el caso de E4, en sus respuestas se identifica que este no diferencia el signo operacional y el posicional perteneciente al número entero. Esto se puede asociar a que todavía no establece una diferencia entre ambos signos, quizás debido a que en sus conocimientos previos solo se consideraba el signo operacional. El considerar estos como iguales en su nivel actual no presenta problemas, puesto que en la adición se puede manejar adecuadamente. Sin embargo, esto resaltará como obstáculo cuando el estudiante deba aplica dichos conocimientos en potencias y polinomios, donde realmente esta diferencia de signos es importante.

Para finalizar el análisis, cabe destacar que en ambos grupos se mostraba un correcto uso de la recta numérica, y además la reconocían como una representación que facilitaba el aprendizaje de las operaciones con números enteros.

Conclusión

A partir de los resultados y los análisis realizados, se muestra que en los estudiantes surge un obstáculo epistemológico al momento de aprender sobre la multiplicación y división de números enteros, pues este algoritmo de resolución entra en conflicto con el utilizado para la adición y sustracción. También se puede observar que los estudiantes trabajan los signos operacionales y posicionales de manera indistinta.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser, se puede concluir que los estudiantes no presentan estos problemas en la actualidad. Estos obstáculos se encontraron en la construcción de los números enteros, por lo que quizás sea más pertinente trabajar con estudiantes que se encuentren recién aprendiendo sobre estos números.

Además, el uso de representaciones no se considera como el causante de obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes, sino más bien se observa que el uso de estas (como la recta numérica) facilita la visualización y la enseñanza de los números enteros.

Los resultados obtenidos permiten tomar conciencia de las posibles dificultades que pueden desarrollar los estudiantes, lo cual es relevante para un mejor desarrollo de técnicas y didácticas para la enseñanza de los números enteros. Además, estos datos pueden servir como referencias para futuras investigaciones cualitativas y cuantitativas relacionadas con la enseñanza de los números enteros.

Estos resultados se utilizarán como base para un futuro, pues como se mencionó, este estudio se continuará posteriormente, esto con el fin de verificar y profundizar los datos obtenidos sobre los obstáculos que se evidencian en el aprendizaje de los números enteros.

Referencias y bibliografía

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal (1ª edición).

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Bruner, J. S. (1969). Hacia una teoría de la instrucción. Ciudad de México, México: Unión Tipográfica Editorial HispanoAmericana.

Cid Castro, E., & Brousseau, G. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan https://zaguan.unizar.es/record/112529 .

Glaeser, G. (1983). *Une science naissante: la didactique expérimentale des mathématiques*. Séminaire de Philosophie et Mathématiques, (14), 1-12.

Ministerio de Educación (2016). *Bases Curriculares Séptimo Básico a Segundo Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Muñoz Cornejo, P. (2019). *Análisis de números enteros en textos escolares ministeriales de séptimo y octavo año básico: 2009-2018*. [Tesis de Magister, Universidad Alberto Hurtado]. Repositorio de la Universidad Alberto Hurtado https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/25951

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71):158-180.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. *Avances en matemáticas educativas teorías diversas no. 8,* 121-135.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas sobre los productos notables: un estudio de caso

Yarod Bustamante **Silva**
Universidad Central de Chile
Chile
yarod.bustamante@alumnos.ucentral.cl
Felipe Huerta **Molina**
Universidad Central de Chile
Chile
felipe.huertam@alumnos.ucentral.cl
Neftalí Reyes **Yáñez**
Universidad Central de Chile
Chile
neftali.reyes@alumnos.ucentral.cl
Nicolas Sanchez **Acevedo**
Universidad Central de Chile
Chile
nicolas.sanchez@ucentral.cl

Resumen

Las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas han ido evolucionando a través del tiempo, en sus inicios con los trabajos de Shulman, pasando por el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, hasta llegar al Modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En esta propuesta nos apoyaremos en este último modelo (MTSK, de sus siglas en inglés) para caracterizar los conocimientos que posee una profesora en el contenido de productos notables. La investigación se apoya en un paradigma cualitativo bajo un estudio de caso, la recolección de datos y análisis de estos se realizan sobre observaciones de clases y entrevistas de una profesora.

Palabras claves: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas; estudio de caso; productos notables; cualitativo.

Introducción

Es considerado de suma importancia que el establecimiento de formación inicial de los profesores que lo cursan cubra las necesidades sobre los dominios del contenido, así como de la didáctica (Graciano y Aké, 2019). En la formación inicial es relevante guiar las habilidades de enseñanza-aprendizaje para que estas no se alejen de la realidad de los establecimientos, en los cuales se ocupan diferentes habilidades que, en los cursos de formación inicial, en el caso de estos últimos terminan siendo academicistas en el mejor y peor sentido de la palabra (Ball *et al.*, 2008).

Estos cursos academicistas terminan siendo un problema para los docentes en formación, los cuales acaban utilizando los mismos recursos academicistas aprendidos en su formación. Este problema está sumado a los ejercicios monótonos y repetitivos utilizados en clase (Espinoza *et al*., 2020).

Como lo mencionamos anteriormente el conocimiento del profesor debe manipular otro tipo de registros como lo son las representaciones algebraicas y geométricas de productos notables que resultan útiles para visualizar el objeto matemático, las que recaen en las mismas representaciones que por consiguiente generan dudas en los estudiantes, como, por ejemplo; si es que estas representaciones siempre serán así en cualquier tipo de contexto.

En la misma línea del contenido, pero esta vez en la práctica de productos notables, Méndez (2008) menciona que los estudiantes realizan relaciones verbales con procedimientos algebraicos los cuales terminan siendo contraproducentes en su proceso de aprendizaje debido que, en los ejercicios, si a estos les cambiamos los coeficientes de los términos del binomio, de un número entero a una raíz, terminan errando debido a su leve dominio en estas operaciones. Si bien es cierto que podemos interpretar las falencias de los estudiantes en la práctica del contenido, podemos visualizar una facilitación de la apropiación del contenido matemático al realizar un tratamiento didáctico, lo que podría permitir desarrollar un pensamiento matemático más efectivo y un desarrollo óptimo de habilidades matemáticas (Wagner *et al*., 2017).

A partir de lo expuesto anteriormente, este trabajo tiene por objetivo explorar el conocimiento especializado de una profesora de educación media al enseñar el contenido de productos notables.

Marco teórico de la investigación

En esta investigación utilizaremos un referente teórico el cual el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK).

En el marco teórico Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) (Ver Figura 1) se compone de dos dominios que nos permite caracterizar el conocimiento del profesor de Matemáticas, el primero es el dominio del Conocimiento Matematico (MK) y el segundo es el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); ambos dominios, están relacionados con los contenidos matemáticos. Asimismo, tanto el MK como el PCK están impregnados por las creencias, las cuales son el centro del modelo, de los profesores en relación con la enseñanza de las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Por consiguiente, describiremos los subdominios que se encuentran dentro de los dominios MK y PCK.

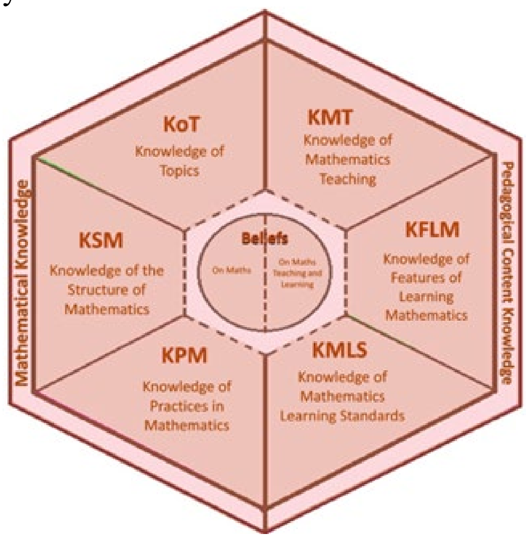


Figura 1. El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo *et al*.,2018)

Dominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Dominio del Conocimiento Matematico (MK)

Este dominio se compone por tres subdominios:

El conocimiento de los temas (KoT): Es el conocimiento profundo y fundamentado de todo el contenido matemático tanto general como escolar. Se trata de conocer el contenido que se intenta enseñar con un mayor nivel de profundización de este. Este subdominio incluye el conocimiento de relaciones intraconceptuales, es decir, relaciones dentro del propio contenido.

El Conocimiento de la estructura matemática (KSM): Este subdominio trata las conexiones que existen dentro del contenido a observar, ya sean conexiones entre contenidos, conexiones de simplificación, complejización, transversales y auxiliares.

El Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM): En este subdominio se trata del conocimiento del procedimiento matemático y cómo se construyen las matemáticas, por ejemplo, como se define o como se demuestra el contenido.

Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio del marco contiene otros tres subdominios los cuales son:

El Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT): Son los conocimientos que posee el profesor respecto a las distintas representaciones que tiene el contenido para su aprendizaje. Esta incluye recursos virtuales como materiales, actividades, y su potencialidad.

El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Es el conocimiento que tiene el docente sobre lo que está estipulado sobre lo que debe aprender un estudiante dependiendo de su nivel educacional.

El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este subdominio puede ser descrito como el conocimiento fundamentado en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia.

Metodología

Método y contexto

Durante la extensión de la investigación, se trabaja un planteamiento sobre la realidad subjetiva, tal que se presenta a la profesora en su propia realidad y que bajo su contexto se extiende que la educación formada por el aula de clases recibe la descripción como un constructo social. Por lo que la investigación brinda información contextualizada y que puede ser analizada por otros de distinta manera, aludiendo a la definición de paradigma interpretativo, como es mencionado en Bassey (1995).

Además, esta investigación posee un enfoque cualitativo, el cual se sitúa en el plano social y busca ahondar en este, por lo que como define Stake (1998) "intenta facilitar la comprensión al lector, ayudar a comprender que las acciones humanas importantes pocas veces tienen una causa simple, y que normalmente no se producen por motivos que se puedan averiguar" (p40). Por lo que, el estudio busca relacionar estas acciones de la profesora, con los conocimientos que moviliza durante sus clases de productos notables.

Por otra parte, al situar la investigación en un solo caso, se define este tipo de estudio como un estudio de caso del cual Stake (1998) lo describe como "el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (p8). Entonces se establece que el aula de clases y su práctica de enseñanza, como una actividad importante, por lo que se busca estudiar esta singularidad de la profesora ante tal importancia de su accionar en la educación.

Como se mencionó anteriormente nuestro sujeto de estudio es una profesora de matemática, la cual consta con estudios de pregrado en ingeniería mecánica y pedagogía en matemática, siendo esta última carrera puesta en práctica unos 20 años en aula de clases. Siendo este el motivo de nuestro estudio, ya que situamos a la profesora como una docente con una amplia experiencia.

Además, posterior a sus estudios de pregrado la profesora posee un magister en educación emocional, por lo que sus clases se ven reflejadas en una cercanía al estudiante, es más la profesora reconoce los ánimos de cada estudiante durante la clase, logrando una adaptación hacia ellos para saber cómo llevar la clase a clase de los cursos que ella maneja en cada año.

Métodos de recolección de datos

En el proceso de recolección de datos, se realiza una entrevista inicial indagatoria a la profesora, la cual consta de 6 preguntas cuyo objetivo es evidenciar en las respuestas los dos dominios que establece el marco teórico MTSK, el primero es el conocimiento de las matemáticas (MK) y el segundo es el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Luego se procede a analizar las respuestas que entrega la profesora, en busca de evidenciar los conocimientos de los subdominios establecidos por el MTSK.

Como parte de la investigación posteriormente se llevarán a cabo grabaciones de clases en donde se busca evidenciar este conocimiento de los subdominios en el aula de clases, ya sea con lenguaje verbal y/o físico durante sus prácticas pedagógicas.

Tabla 1

Entrevista indagatoria para explorar en el conocimiento especializado de la profesora

Subdominio	Pregunta	Objetivo
Conocimiento de los temas (KoT)	¿Qué conocimiento moviliza sobre los productos notables?	Lo que se espera de esta pregunta es que la profesora nos responda en términos generales su conocimiento sobre los productos notables, tanto de la parte matemática como la parte de la matemática escolar que debe ser enseñada.
Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	¿Qué contenidos pueden estar relacionados con productos notables? ¿Cómo se relacionan estos contenidos?	El objetivo de esta pregunta es que nos describa sus conocimientos respecto a los contenidos que se relacionan con productos notables respecto a las conexiones que tienen entre estos.
Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	¿Qué procedimiento utiliza para enseñar la resolución de problemas en productos notables?	El objetivo de esta pregunta es que la profesora nos comente su forma de presentar el contenido de productos notables, donde se busca que la profesora nos diga si utiliza demostraciones, comprobaciones, etc.
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	¿De qué forma guía el contenido de productos notables? ¿Qué realiza para obtener una	La pregunta busca que la profesora nos diga qué conocimientos presenta sobre

	secuencia de aprendizaje?	recursos, ya sean virtuales o físicos para guiar la enseñanza de los productos notables.
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Si un alumno resuelve el siguiente ejercicio $(x+2)^2$ y el resultado le da que es x^2-4. ¿Que realizara usted para explicarle al alumno que el procedimiento es incorrecto?	El objetivo de la pregunta es que, en base a un contexto hipotético, nos represente sus conocimientos para resolver el error del estudiante.
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Referente a la enseñanza de productos notables ¿El contenido de productos notables va acorde con las enseñanzas previas que tienen los estudiantes?	El objetivo de la pregunta es evidenciar su conocimiento del currículum nacional sobre el grado y que se enseña con el contenido de productos notables.

Fuente: Elaboración propia

Resultados y conclusiones preliminares

Con las respuestas que entrego la profesora a las preguntas de la entrevista de acercamiento se analizaron algunos fragmentos de ellas para caracterizar e identificar sobre que subdominio y categoría la profesora hacía referencia y concluir que conocimiento la profesora maneja a priori a la observación y grabación de clases sobre el contenido.

En la primera pregunta la cual se hace referencia al KoT la profesora responde:

> L4-L6 Profesora: y de ahí pasamos a productos notables, y los productos notables también los podemos relacionar con las áreas, cálculo de áreas estableciendo que tenemos medidas algebraicas.

Por lo cual, en este fragmento de la respuesta se identifica una evidencia de conocimiento sobre conexiones de simplificación (KSM), dado que la profesora conoce la relación del cálculo de área (desde la perspectiva de la geometría euclidiana) y con la noción de área desde un punto de vista algebraico con los productos notables.

Luego en la pregunta que hace referencia al subdominio KFLM la profesora responde:

> L1 Profesora: Claro, primero cuando nosotros tenemos aquí una potencia es igual este es un error super frecuente

En este fragmento de la respuesta se identifica una evidencia conocimiento de fortalezas y dificultades (KFLM), ya que la profesora conoce que el error presentado del cuadrado del binomio es, en palabras de ella, super frecuente en los estudiantes, por ello la profesora conoce algunos de los errores que comenten los estudiantes al momento de resolver cuadrados de binomio.

Con la entrevista realizada se buscaba lograr identificar que conocimiento maneja la profesora a priori sobre el contenido de productos notables, para luego conseguir identificar y caracterizar que conocimiento maneja la profesora en el aula de clases, con los resultados que obtuvimos se identificaron algunos subdominios sobre las conexiones que realiza con el contenido y aquellos errores o dificultades que poseen los estudiantes con los productos notables, en el primero se reconoce una conexión de simplificación, es decir, una conexión con contenidos posteriores como es el cálculo de áreas, el cual lo utiliza para hacer una representación del cuadrado de binomio, en el segundo la profesora identifica un error sobre el cuadrado de binomio, el cual lo reconoce como un error frecuente. Por ello la profesora conoce el contenido, dicho esto el trabajo con la profesora no ha terminado, por ello se busca grabar clases de ella para lograr identificar y caracterizar aquellos subdominios que la profesora maneja a la hora de enseñarle a los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253

Espinoza-Vásquez, Gonzalo. (2020). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función. 10.13140/RG.2.2.27753.52320.

Graciano, Judith; Aké, Lilia (2019). *Conocimiento matemático para la enseñanza de productos notables: un estudio de tres casos.* Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 4, pp. 192-200

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a. ed..). México D.F.: McGraw-Hill.

Jiménez, V., & Comet, C. (2016). *Los estudios de casos como enfoque metodológico*. ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades, 3(2). https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=575774

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Méndez T. (2008). *Dificultades en la práctica de productos notables y factorización*. Revista del Instituto de Matemática y Física. 11(15).

Stake, R. E. (1998). Investigación con estudio de casos. Morata.

Wagner O, G., Giraldo V, A. M., Hoyos, E. A. & Gutiérrez Z, H. (2017). El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables. *Revista de Investigaciones Universidad del Quindío*, *26*(1), 139-144. https://doi.org/10.33975/riuq.vol26n1.140

El trabajo colaborativo en la implementación de tareas de modelización matemática originadas en la práctica ingenieril

Camilo Andrés **Ramírez** Sánchez
Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia
Posgrado en Matemática Educativa - CICATA, Instituto Politécnico Nacional.
México
caramirezs@poligran.edu.co
Sandra Milena **Rojas** Tolosa
Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia
srojasto@poligran.edu.co
Avenilde **Romo** Vázquez
Cinvestav
México
avenilde.romo@cinvestav.mx
Rebeca **Romo** Vázquez
Universidad de Guadalajara
México
rebeca.romo@academicos.udg.mx

Resumen

En esta comunicación se presenta una propuesta didáctica para un curso de álgebra lineal que surge de una actividad ingenieril de modelización matemática. En su desarrollo se consideran elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, con el propósito de responder a la problemática evidenciada de la falta de integración entre la matemática enseñada en la universidad y la que se usa en la práctica profesional de un ingeniero. La propuesta se enmarca en el estudio de una mezcla de sonidos a través del método de la Separación Ciega de Fuentes, de manera que el estudiante motivado por el estudio de una cuestión abierta construya y utilice diversos conceptos y procesos del álgebra lineal. Los resultados obtenidos muestran que la propuesta constituye un proceso de transformación desde la práctica ingenieril a la enseñanza, y que bajo ciertas condiciones ecológicas su implementación posibilita una actividad de modelización matemática en la clase.

Palabras clave: Modelización matemática; Formación de ingenieros; Álgebra lineal, Diseño de tareas; Ingeniería didáctica

Introducción

Esta comunicación muestra avances de una investigación doctoral donde se reflexiona sobre las matemáticas que deben ser enseñadas a los futuros ingenieros y el papel de la modelización matemática en su formación. En la enseñanza universitaria, la desconexión entre la matemática que se enseña en el ciclo básico de formación y su uso en el ciclo avanzado es uno de los principales factores que promueve la memorización de algoritmos y conceptos (Florensa, Bosch & Gascón, 2019; Vázquez *et al*., 2016), estudios y comunidades internacionales han reflexionado al respecto e identificado que la modelización matemática permite fortalecer la relación entre el mundo matemático y el no matemático (Barquero *et al*., 2018; Domínguez-García *et al*., 2016; Romo-Vázquez *et al*., 2012). A partir de los referentes teóricos de la TAD y de la metodología de la ingeniería didáctica (ID) se diseñó una propuesta didáctica de modelización matemática para un curso de álgebra lineal de la formación de futuros ingenieros, basada en un problema de modelado inverso proveniente de la ingeniería; el análisis de la Separación Ciega de Fuente (BSS). Una vez diseñada la propuesta se compartió con una docente que no participó en el diseño, pero que la implementó en uno de los grupos. Esto motivó la reflexión sobre la solidez de la propuesta didáctica y los mecanismos utilizados para difundirla con la docente, quien no tenía conocimientos previos sobre la BSS. Para presentar dicha reflexión, se muestran primeramente los elementos teóricos y metodológicos que sustentaron el diseño de la propuesta didáctica y posteriormente la forma en que fue compartida con la docente.

Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La TAD propone un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional (Chevallard, 2019). Dos nociones resultan fundamentales, la de *praxeología* y la de institución. La *praxeología* permite el análisis de la actividad mediante cuatro componentes: el **tipo de tareas** (T) que corresponde a 'lo que se hace', la **técnica** (τ) que es 'la forma en que se hace', la **tecnología** (θ) que es 'el discurso que produce, explica y valida la técnica', y la **teoría** (Θ) que corresponde a 'discursos más generales que producen, explican, validan y justifican las tecnologías'. La *institución* es "una organización social estable que permite enfrentar tareas problemáticas de manera eficaz, gracias a los recursos materiales e intelectuales, que ponen a disposición de sus sujetos, así como, a las restricciones que definen para la realización de dichas tareas" (Castela y Romo, 2011, p. 85, traducción propia). La construcción y reconstrucción de praxeologías en determinada institución constituye un proceso de estudio. Un dispositivo didáctico que puede producirse en coherencia con la noción de praxeología de la TAD es el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) puesto que surge de la "necesidad de fundamentar las organizaciones didácticas en una epistemología realmente funcional, en la que los saberes aparezcan como 'máquinas' productoras de conocimiento útiles a la creación de respuestas *R* a cuestiones *Q*" (Bosch & Gascón, 2010, p. 82). El objetivo de los REI es reemplazar la pedagogía de "inventariar" y de los "monumentos" de los saberes con la de "investigar" y "cuestionar". Un REI es un dispositivo didáctico enmarcado en la Pedagogía de Investigación y Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Chevallard, 2019). La PICM está enfocada en el estudio de cuestiones *Q* que posibilitan la investigación en el aula. Los estudiantes al abordar *Q* producen una respuesta *R* con sentido propio, es decir, *R* no es necesariamente la misma que se divulga en las fuentes de difusión. Las preguntas *Q* deben de ser abiertas e investigables. Su estudio permite generar nuevas cuestiones, cuyas respuestas existentes $R^{\blacklozenge}$, asociadas a conceptos, son parte del medio didáctico *M*, constituido por todos los recursos que se utilizan para estudiar *Q* y producir $R^{\heartsuit}$ (Bosch & Gascón, 2010; Serrano, 2012).

La propuesta didáctica. REI: Análisis y separación de mezclas

Contexto Experimental

La propuesta didáctica consiste en el diseño y experimentación de un REI en un curso virtual donde se transpuso una praxeología BSS de la ingeniería en una praxeología BSS escolar a través de una situación de separación de melodías. Se implementó en la Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano (IUPG), Bogotá, Colombia, en dos cursos de álgebra lineal impartidos en la modalidad virtual para futuros ingenieros. Su programa se compone de cuatro unidades temáticas: ecuaciones lineales, matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Su duración fue de ocho semanas en el segundo semestre del 2020.

El sistema de evaluación está compuesto por actividades con diferente puntuación de acuerdo con su complejidad: dos actividades de puntos evaluables (evaluaciones en línea) en las semanas 2 y 6 (50 y 100 puntos respectivamente), una evaluación final en línea en la semana 8 (150 puntos), una actividad transversal denominada ***trabajo colaborativo*** que se desarrolla durante las semanas 3, 4, y 5 (150 puntos), la sustentación individual (en línea) del trabajo colaborativo en la semana 7 (40 puntos) y una autoevaluación (en línea), también en la semana 7 (10 puntos), para un total de 500 puntos. Adicionalmente, los estudiantes cuentan con dos espacios sincrónicos semanales para la profundización de temas o solución de dudas.

Las condiciones institucionales permiten utilizar el ***trabajo colaborativo*** como el espacio para el desarrollo del REI, mediante diferentes actividades, tanto individuales como grupales, la participación en foros de discusión y entrega de informes; los espacios sincrónicos se usaron para la confrontación de ideas, planteamiento de preguntas orientadoras para abordar posibles dificultades y consolidación de las respuestas construidas por los estudiantes. Los dos docentes que implementaron el REI en los dos grupos trabajaron colaborativamente, tanto en la fase de análisis a priori como en la de experimentación, como se detalla a continuación.

Metodología del diseño: la Ingeniería Didáctica (ID)

La ID ofrece una ruta para diseñar e implementar situaciones didácticas, se estructura en cuatro fases: *análisis preliminar*; *diseño y análisis a priori*; *experimentación y análisis in vivo*; *análisis a posteriori y validación*. Con base en la adaptación de estas fases para el diseño de los REI (Barquero y Bosch, 2015, Garcia *et al*., 2019), se generó una nueva adaptación que permitió considerar el análisis praxeológico de la actividad de modelización matemática de la BSS como se ilustra en la figura 1. El enfoque presentado no se centra en la epistemología del conocimiento matemático escolar considerado clásicamente, sino en el desarrollo de la transposición didáctica de una praxeología en el ámbito ingenieril a una praxeología escolar. En este enfoque también se tiene en cuenta la gestión del REI para que docentes no afines con la TAD, la metodología de la ID y con la BSS pudieran implementarlo.

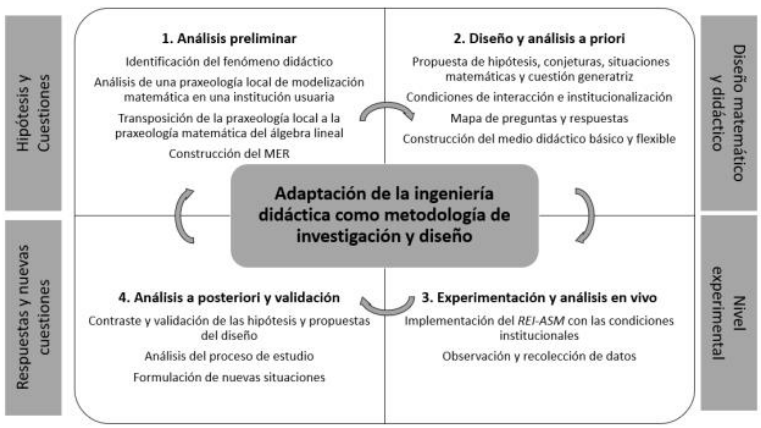


Figura 1. Adaptación de las fases de la Ingeniería Didáctica para el desarrollo de esta investigación

Fase 1. Análisis Preliminar

Un fenómeno didáctico identificado en la formación de futuros profesionales es la falta de conexiones entre las matemáticas enseñadas y las matemáticas utilizadas en los lugares de trabajo. En las carreras ingenieriles, los cursos iniciales se enmarcan en el paradigma de la visita de obras y monumentalización del saber (Chevallard, 2019). En el curso virtual de álgebra lineal el profesor tiene la libertad de diseñar el proyecto para el ***trabajo colaborativo***, por lo que es posible integrar el estudio de modelos matemáticos como una introducción a la modelización matemática. Sin embargo, este proyecto no suele estar relacionado con temas de ingeniería, ya que difícilmente los profesores de matemáticas conocen la forma en que los modelos matemáticos son utilizados en la ingeniería y en su enseñanza. Para el desarrollo del REI se propuso estudiar la praxeología de modelización matemática Separación Ciega de Fuentes (P-BSS) de la práctica ingenieril, esta praxeología ha sido trabajada en investigaciones anteriores (Romo-Vázquez *et al*., 2012; Vázquez *et al*., 2016), en esta investigación se profundizó el análisis de la BSS con la colaboración de una experta y se construyó transposición a los primeros contenidos del curso de álgebra lineal: sistemas de ecuaciones lineales, vectores y matrices.

Por medio de esta transposición se construyó una praxeología escolar (Pe-BSS) conformada por: ***tipo de tarea (T).*** Modelar una mezcla simulada de tres melodías producidas por tres instrumentos, ubicados arbitrariamente. ***La técnica*** $(\boldsymbol{\tau})$**.** Encontrar el sistema de ecuaciones lineales que expresa mediante combinaciones lineales la relación entre los sonidos de los instrumentos, las intensidades y mezclas. Discretizar las mezclas y resolver los sistemas de ecuaciones para encontrar las melodías discretizadas y así reconstruir las señales originales. ***La tecnología*** $(\boldsymbol{\theta})$**.** Las nociones de función continua y de espacio vectorial garantizan la existencia de las mezclas como funciones continuas. El trabajar las señales como vectores permite representarlas como combinaciones lineales y modelarlas por medio de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La existencia y unicidad de la solución se basa en elementos del álgebra lineal, el modelo matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y la noción de matriz inversa. El estudio de señales de audio se basa en el procesamiento de señales. ***La teoría*** $(\boldsymbol{\Theta})$**.** *Geometría Euclidiana*, *Álgebra de números reales, Álgebra Lineal* y *Teoría de Señales.*

El Modelo Epistemológico de Referencia (MER), entendido como modelo teórico que justifica y analiza la transición y evolución de los saberes y praxeologías entre la institución de la ingeniería y la institución de enseñanza de las matemáticas, surge como alternativa al modelo epistemológico dominante de la enseñanza clásica, permitiendo construir un modelo didáctico alternativo que permita interpretar el conocimiento matemático y fundamentar cómo se puede organizar su estudio en la institución de enseñanza. El MER se materializa como el conjunto de praxeologías regionales (que incluyen varias técnicas y tecnologías asociadas a la misma teoría) y locales (que incluyen más de una técnica) de modelización matemática de la BSS (P-BSS) y su transposición a las praxeologías locales de modelización matemática en la enseñanza del Álgebra Lineal (Pe-BSS).

Fase 2: Diseño y análisis a priori

Se diseñó un REI llamado análisis y separación de mezclas (REI-ASM) cuya situación problémica es la separación de tres melodías mezcladas y la pregunta generatriz Q_0 es la siguiente: *¿Cuál es el proceso matemático para separar los sonidos de los audios?*, que es abierta y cuya hipótesis es que permite construir la Pe-BSS cuyo **tipo de tarea** (T) es: *modelar una mezcla simulada de tres melodías producidas por tres instrumentos, ubicados arbitrariamente*. El proceso que permite estudiar y dar respuesta a Q_0 se dividió en tres componentes, cuyo análisis permitió identificar los elementos iniciales del medio didáctico, el cual se construye con el proceso en cadena de cuestiones y respuestas, ya sean construidas por la academia o por el equipo de estudiantes/docentes. De esta manera se estructuró el mapa inicial de preguntas-respuestas (figura 2), que permitió esbozar un posible recorrido para la construcción de la praxeología escolar.

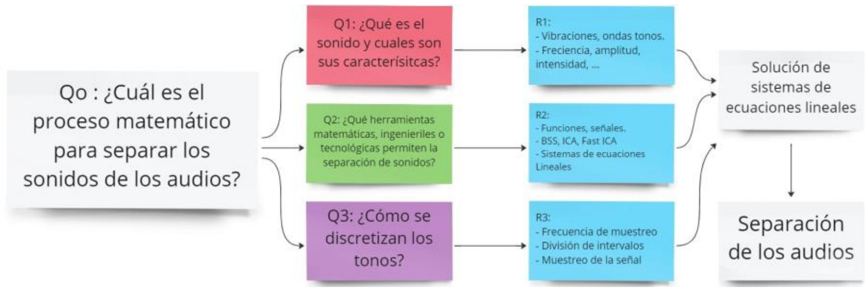


Figura 2: Mapa de preguntas y respuestas del análisis a priori

Por la naturaleza del REI, las componentes del medio didáctico (*M*) no suelen ser concebidas a priori, sin embargo, debido a la complejidad de la pregunta inicial se consideró necesario generar elementos del medio como las preguntas y respuestas "selladas" iniciales (*R*), las obras (O) y el uso de aplicativos (A) que permitieron que los estudiantes validaran sus hipótesis de manera experimental y aportaran a la construcción de $R^{\heartsuit}$. De esta manera, el REI se puede representar con el *esquema herbartiano ampliado*:
$[S(X;\ Y;\ Q) \hookrightarrow \{\, R_1^{\diamondsuit}, R_2^{\diamondsuit}, R_3^{\diamondsuit}, \dots, R_n^{\diamondsuit}, O_1, O_2, \dots, O_p, A_1, A_2, \dots, A_j\} \hookrightarrow R^{\heartsuit}$

Se escogió el desarrollo de los aplicativos en *Jupyter* bajo el código de programación de Python, ya que es un lenguaje de programación con múltiples librerías que permiten el trabajo con matrices, señales y sonidos, entre otros, es software libre y el usuario puede modificar el código para formular hipótesis y experimentar diferentes situaciones que ayuden a construir una posible respuesta.

Fases 3 y 4. Experimentación y análisis in vivo; análisis a posteriori y validación

El desarrollo del REI se dividió en cuatro fases relacionadas con los momentos del proceso de estudio (Chevallard, 2019; Serrano, 2012): la **fase 1** fue el primer encuentro con el tipo de tarea, la **fase 2** el momento exploratorio y desarrollo de la técnica, la **fase 3** el momento de trabajo con la técnica, y la **fase 4** a un momento final de institucionalización. Cada fase se inició con las preguntas consideradas relevantes para guiar el estudio de Q0. Con base en los avances de cada sesión el equipo docente diseñó o modificó las actividades y los aplicativos para que los estudiantes investigaran las preguntas escogidas grupalmente. Los encuentros sincrónicos resultaron fundamentales, ya que se promovió establecer un consenso de las respuestas halladas y de nuevas preguntas para la continuación del proceso de estudio.

Los docentes se reunieron para intercambiar información sobre las participaciones de los estudiantes de cada curso, revisar los informes entregados por los equipos, consolidar el avance de las respuestas y estructurar el desarrollo de las siguientes actividades, modificando los aplicativos cuando fuera necesario. En el esquema de la Figura 3 se presentan cuestiones derivadas propuestas por los estudiantes durante la experimentación del REI-ASM. Los momentos de institucionalización se realizaron mediante los encuentros sincrónicos donde presentaron las conclusiones de los informes, construyeron respuestas o modificaron las existentes, se propusieron nuevas preguntas y actividades a desarrollar. Es importante enfatizar que los encuentros sincrónicos se llevaron a cabo con la participación de ambos grupos de estudiantes y fueron liderados por los dos docentes.

Reflexión final

Una de las principales dificultades del diseño de estos dispositivos es el estudio de situaciones ingenieriles, ya que los docentes afines a los cursos de formación matemática inicial no siempre cuentan con el conocimiento específico de la ingeniería y muchas veces existe una línea divisoria entre las dos formaciones: la matemática va por un lado mientras que los cursos ingenieriles por otro. Ingresar a las lógicas de la modelización matemática en ingeniería es una tarea compleja, y cuando esta es desarrollada con el objetivo de diseñar un dispositivo didáctico suele quedar como un caso aislado de diseño e implementación (Romo y Artigue, in press). Con el objetivo de comunicar el dispositivo didáctico, se conformó un equipo docente en el que la docente que no participó en el diseño del REI pudiera apropiarse de sus elementos constitutivos y pudiera implementarlo en un curso. Este tipo de trabajo colaborativo entre docentes para implementar los REI en el aula ha sido experimentado en otras investigaciones (Markulin *et al*., 2022). Un análisis más fino podría permitir elucidar la forma en que la docente se apropió del REI diseñado, ¿cuáles fueron los desafíos que enfrentó para estudiar la praxeología escolar de la BSS? ¿Sus conocimientos sobre la física del sonido fueron suficientes o tuvo que realizar estudios complementarios? ¿Qué la motivó a participar en la implementación del REI? Asimismo, resulta necesario investigar sobre la forma en que el trabajo colaborativo permitió a los docentes generar una gestión común del REI, modificar cuestiones, generar nuevos elementos para el medio: proponer tareas concretas, elegir cuestiones derivadas generadas por los estudiantes, generar nuevos aplicativos etc. Se considera que el estudio de este trabajo colaborativo puede aportar elementos para generar mecanismos de difusión de los REI entre profesores universitarios y de esta manera integrar paulatinamente la modelización matemática en la formación de futuros ingenieros.

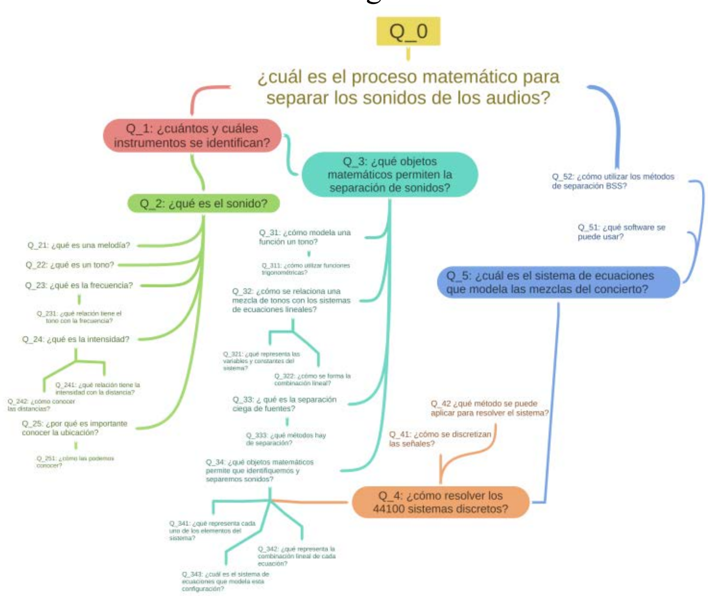


Figura 3. Mapa de preguntas y respuestas de la experimentación del REI-ASM

Referencias y bibliografía

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. *Task Design In Mathematics Education* (pp. 249-272). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Barquero, B., Bosch, M. & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM*, *50*(1-2), 31-43. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z

Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et dáction* (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Castela, C., & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79–130.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114.

Domínguez-García, S., García-Planas, M. & Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1076-1086. https://doi.org/10.1080/0020739x.2016.1153736

Florensa Ferrando, Ignasi & Bosch, Marianna & Gascón, Josep. (2019). Análisis a posteriori de un REI-FP como herramienta de formación del profesorado. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*. 21. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p382-394

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Markulin, K., Bosch, M., Florensa, I., Montañola, C. (2022). The evolution of a study and research path in Statistics. *Épijournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*, *I*, 1-24. https://doi.org/10.46298/epidemes-7584

Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R., y Velez-Pérez, H. (2012). De la ingeniería Biomédica al aula de Matemáticas. *ReCIBE. Revista electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica, 1.*

Romo, A., & Artigue, M. (in press). Challenges for research on tertiary mathematics education for non-specialists: Where are we and where are we to go? In R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen. C. Winslow. (Eds.). Practice Oriented Reseach in Tertiary Mathematics Education, (pp. xxx–xxx). Springer.

Serrano, L. (2012). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad Ramon Llull. España.

Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R. & Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educacion Matematica*, *28*(2), 31-57. https://doi.org/10.24844/em2802.02

Enseñanza de las secuencias en grados 4° y 5° atendiendo la diversidad de estudiantes

Ingrid Janeth **Jácome** Anaya
Universidad Industrial de Santander - Universidad de Los Lagos
Chile
jacomeaij@gmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Resumen

Teniendo en cuenta la importancia de desarrollar el pensamiento algebraico y variacional desde la Educación Infantil entendiendo que cada estudiante tiene particularidades de aprendizaje distintas, se presentan avances de una investigación que tiene entre sus objetivos específicos "Construir diseños didácticos de matemáticas para la educación básica, ajustados a una estructura curricular flexible y adaptable, en los que se haga uso de variadas tecnologías que permitan el acceso a estudiantes con Necesidades Educativas Especiales". Se muestra la estructura de un diseño didáctico para la enseñanza de Secuencias y Patrones en los grados 4° y 5° y el resultado obtenido en la rúbrica de evaluación, en el que se tuvieron en cuenta algunos principios y pautas del DUA, los Estándares Básicos de Competencia, los procesos de generalización de patrones y la propuesta dada por Parada (2021), donde se sugiere trabajar en cuatro niveles distintos de profundidad con contextos cercanos al estudiante.

Palabras clave: Currículo; flexibilidad; adaptación; inclusión educativa; clase de matemáticas.

Introducción

Muchas de las dificultades presentadas en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria se dan principalmente por la introducción tardía del álgebra (Bojorque, et.

al., 2021; Becker y Rivera, 2008; Kaput, 2000; Vergnaud,1988), en ese sentido, Vergnaud (1988) afirma que trabajar con tareas del pensamiento algebraico promueve en los estudiantes un mayor grado de generalidad y para promover el desarrollo de dicho pensamiento, en los primeros años de escolaridad deberían usarse tareas que "incluyan las relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149). Así mismo, Dreyfus (1991), menciona que dichas tareas deben promoverse por medio del uso de patrones, los cuales se encuentran presenten en sucesiones y secuencias numéricas y/o figurales.

En Colombia se establece que en los grados 4° y 5° los estudiantes deberían tener habilidades para "Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica, representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales" (MEN, 2006, p. 83), y en ese sentido, se pretende promover el desarrollo del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos por medio de la "la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 2006, p. 66).

Por su parte, autores como Romero, Carrillo y López (2018) resaltan la importancia de promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde la Educación Infantil atendiendo a las características y particularidades de todos los estudiantes pues todos tienen derecho a tener oportunidades de aprendizaje acorde a sus habilidades. En la constitución política de Colombia (1991, Art. 67) se establece la educación como "un derecho de la persona … cuyos responsables son el Estado, la Sociedad y la Familia".

En ese sentido, se establece que las instituciones educativas deben plantear en el Proyecto Educativo Institucional, la promoción de la inclusión educativa donde se garantice el derecho fundamental a la educación a partir de la Resolución 2565 de 2003. Los docentes colombianos cuentan con documentos de referencia tales como los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) donde se definen las competencias que se deben promover en el aula de clase para los diferentes conjuntos de grados de acuerdo con los Pensamientos Matemáticos definidos en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y se pretende relacionar los estándares con actividades específicas a partir de los pensamientos, respectivamente. Sin embargo, estos documentos de referencia definen competencias, estándares y pensamientos sin tener en cuenta la diversidad en el aula, puesto que no considera las habilidades y capacidades de cada individuo, lo que significa que en "en muchas instituciones educativas aún se vulnera el derecho a la educación" (Sáenz, 2012, p. 193).

De lo anterior y siendo conscientes de la importancia del aprendizaje del algebra en estudiantes desde temprana edad atendiendo la diversidad en el aula, en esta oportunidad se muestra la estructura de un diseño didáctico para la enseñanza de Secuencias y Patrones para los grados 4° y 5° en el contexto de los Juegos Olímpicos de Tokio 2020 y los resultados obtenidos en la rúbrica de validación del diseño, entendiendo que cada niño tiene particularidades de aprendizaje distintas. Este diseño está enmarcado en un proyecto de investigación que tiene entre sus objetivos específicos "Construir diseños didácticos de matemáticas para la educación básica, ajustados a una estructura curricular flexible y adaptable, en los que se haga uso de variadas tecnologías que permitan el acceso a estudiantes con Necesidades Educativas Especiales".

Aspectos conceptuales

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se encuentran pocas investigaciones que promuevan la atención a la diversidad en el aula sin segregar a los estudiantes. Por lo general, aquellas investigaciones se centran en atender a un estudiante o un pequeño grupo con una sola Necesidad Educativa Especial (NEE). Bruno y Noda (2010) manifiestan que en dichas investigaciones predomina el componente clínico y el uso de tareas y actividades alejadas de la realidad de los estudiantes. Específicamente en la construcción del pensamiento algebraico, Romero, Carrillo y López (2018), plantean una situación de enseñanza para estudiantes con discapacidad intelectual del concepto de equivalencia teniendo en cuenta los principios de "Early Algebra" que, aunque dicha propuesta está pensada para estudiantes regulares, es de gran importancia plantear actividades con el fin de promover la atención a la diversidad en el aula que les permita a los estudiantes desarrollar sus capacidades intelectuales, culturales y sociales.

Una de las problemáticas a las que se enfrenta el profesor de matemáticas es no haber tenido una formación suficiente sobre cómo aprenden las personas con NEE, cómo promover la atención a la diversidad y cómo él puede abrir la mirada hacia la heterogeneidad del aula.

Cuando el profesor se ha hecho sensible ante su compromiso para atender esa diversidad del aula e indaga sobre los recursos disponibles para hacerlo, se encuentra con lineamientos curriculares poco flexibles y pensados para personas con características comunes, sin deficiencias, dificultades o limitaciones.

En el decreto 1421 de 2017 se presentan orientaciones acerca de los ajustes razonables que deberían realizarse en los diferentes niveles de la educación escolar para la atención a la diversidad, como lo son: el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) y el Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR). El primero es un modelo que combina una mirada y un enfoque inclusivo de la enseñanza con propuestas para su aplicación en la práctica y el segundo es una herramienta que permite contrastar el currículo con las características y necesidades del estudiante, con la finalidad de definir los ajustes razonables y apoyos pedagógicos que le permitan al estudiante la participación en el aula de clase.

Diseño Universal de Aprendizaje (DUA)

El enfoque DUA se define como:

En educación, comprende los entornos, programas, currículos y servicios educativos diseñados para hacer accesibles y significativas las experiencias de aprendizaje para todos los estudiantes a partir de reconocer y valorar la individualidad. Se trata de una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes, a través de objetivos, métodos, materiales, apoyos y evaluaciones formulados partiendo de sus capacidades y realidades. Permite al docente transformar el aula y la práctica pedagógica y facilita la evaluación y seguimiento a los aprendizajes (Decreto 1421, 2017, p. 4)

En efecto, para el diseño se presenta, se tuvieron en cuenta algunos de los principios y las pautas establecidos en el DUA (Alba, Sánchez y Zubillaga, 2014), los cuales son:

Principio I. ¿Qué se aprende? Se debe tener en cuenta que todos somos diferentes en la forma en que se percibe y comprende la información, lo que hace conveniente facilitar múltiples formas y opciones de representación de la información y los contenidos.

Principio II: ¿Cómo se aprende? Reconocer, que el estudiante tiene diferentes formas de expresar y comunicar lo que ya sabe, de esta manera se debe pensar en múltiples formas de acción y expresión, más aún, opciones para la interacción física como lo son el material concreto, las herramientas tecnológicas, entre otras.

Principio III: ¿Por qué se aprende? Comprender que el componente emocional es una variable existente en el proceso de enseñanza y por esta razón se deben proporcionar opciones para captar el interés y mantener el esfuerzo en base a múltiples formas con las que se puede implicar al estudiante.

Por otra parte, Ecured (2015) en Heredia y Moscoso, (2019) clasifican los ritmos de aprendizaje de los estudiantes en: i). Rápido, se encuentran aquellos estudiantes que tienen gran capacidad de captar y retener información, no necesitan gran acompañamiento de los profesores pues sus habilidades se desarrollan con mayor facilidad, ii). Moderado, aquellos que realizan las actividades y alcanzan los objetivos y metas esperadas en el tiempo establecido, reteniendo información necesaria y iii). Lento, aquellos que presentan desmotivación para aprender, bajo nivel de atención y dificultades de aprendizaje y procesamiento de información.

En ese sentido, en la investigación de la cual emerge este reporte y tomando en consideración los resultados y definiciones mostrados en el párrafo anterior, para abordar el objeto matemático de estudio, secuencias y patrones, se formula la pregunta problematizadora ¿Cómo organizar las competencias de natación sincronizada?, con cuatro niveles de profundidad diferentes acordes a las características de los estudiantes. De acuerdo con Parada (2021), los niveles de profundidad de los diseños son:

Nivel de profundidad 1: Las actividades están dirigidas a estudiantes con mayores dificultades, a nivel físico, intelectual o psicosocial. Estos estudiantes son muy visuales y su principal medio de comunicación es la oralidad, por lo que las actividades deben utilizar recursos visuales o concretos, además, de contar con un apoyo constante por parte del profesor y la familia.

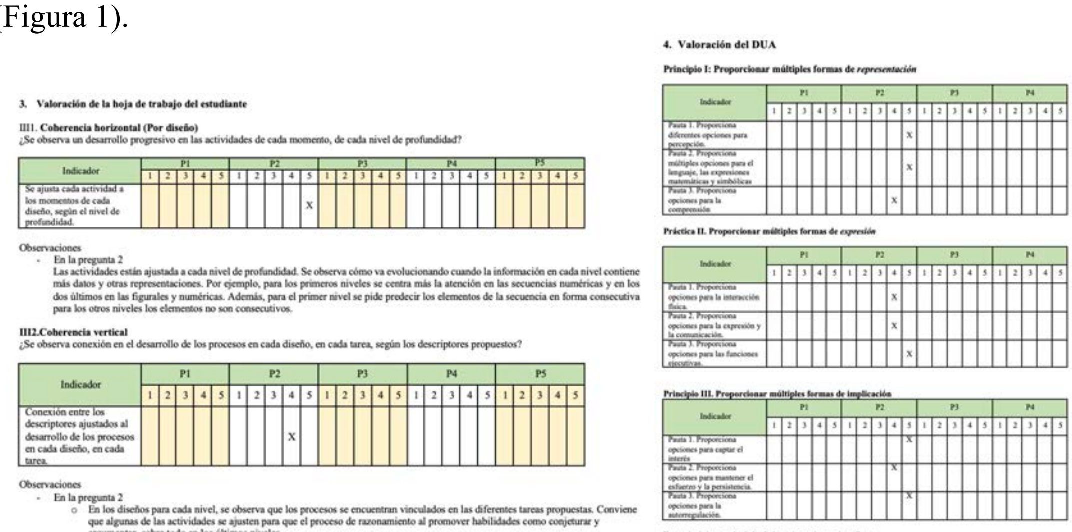
Nivel de profundidad 2: Las actividades están dirigidas a estudiantes con dificultades moderadas en las categorías mencionadas en el nivel anterior. Por otra parte, este grupo de estudiantes posee mejores habilidades de comunicación escrita y oral que el nivel anterior, sin embargo, las actividades deberán tener un enfoque similar en el uso de materiales y la atención prestada por el profesor.

Nivel de profundidad 3: Las actividades están dirigidas a estudiantes con dificultades leves, por lo que se puede utilizar un lenguaje matemático más preciso y una menor guía y supervisión por parte del profesor.

Nivel de profundidad 4: Las actividades están dirigidas a estudiantes que poseen capacidades excepcionales en matemáticas, por lo que es necesario diseñar actividades que promuevan la curiosidad, la demostración y la formulación de nuevas preguntas e ideas.

Así mismo, cada diseño en cada nivel de profundidad, está compuesto por cuatro momentos le permitirán a los estudiantes conceptualizar el objeto matemático de estudio, en el primer momento se plantean actividades para la introducción del objeto matemático de estudio a partir del contexto, incorporando actividades motivadoras y lúdicas; en el segundo momento se posibilita el proceso de matematización del objeto matemático donde las intervenciones del profesor se dan con la finalidad de promover la construcción individual de los saberes necesarios para abordar el objeto matemático; en el tercer momento, se espera que los estudiantes pongan en práctica los saberes construidos en los dos momentos anteriores; finalmente; en el cuarto momento se presentan tareas con la finalidad de valorar los desempeños de los estudiantes.

Dentro del proyecto, se diseñó un instrumento de evaluación de los diseños, los cuales están conformados por material para el estudiante, material para el profesor y una tabla de propósitos y descriptores asociados a las habilidades de los procesos matemáticos (Fiallo y Parada, 2018) y pensamientos propuestos por el MEN (2006). Con dicha rúbrica se pretende evaluar el diseño completo. Para efectos de este reporte, nos centraremos en la valoración del material para los estudiantes, en cuanto a: i). Coherencia horizontal, que hace referencia a la progresión del objeto matemático y la forma en la que se pretende enseñar en cada nivel de profundidad de acuerdo con los propósitos y descriptores asociados a los pensamientos matemáticos propuestos por el MEN (2006); ii). Coherencia vertical, que hace referencia a la forma de mostrar el objeto matemático en los cuatro momentos y la articulación de las tareas propuestas con las habilidades enmarcadas en cada proceso matemático; y iii). Valoración del DUA, la cual hace referencia al uso de las pautas y principios de este en el diseño valorado (Figura 1).



3. Valoración de la hoja de trabajo del estudiante

III1. **Coherencia horizontal (Por diseño)**
¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.										X															

Observaciones
- En la pregunta 2
  Las actividades están ajustada a cada nivel de profundidad. Se observa cómo va evolucionando cuando la información en cada nivel contiene más datos y otras representaciones. Por ejemplo, para los primeros niveles se centra más la atención en las secuencias numéricas y en los dos últimos en las figurales y numéricas. Además, para el primer nivel se pide predecir los elementos de la secuencia en forma consecutiva para los otros niveles los elementos no son consecutivos.

III2.Coherencia vertical
¿Se observa conexión en el desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea, según los descriptores propuestos?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Conexión entre los descriptores ajustados al desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea.									X																

Observaciones
- En la pregunta 2
  - En los diseños para cada nivel, se observa que los procesos se encuentran vinculados en las diferentes tareas propuestas. Conviene que algunas de las actividades se ajusten para que el proceso de razonamiento al promover habilidades como conjeturar y argumentar, sobre todo en los últimos niveles.

4. Valoración del DUA

Principio I: Proporcionar múltiples formas de *representación*

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.										X										
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas										X										
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión									X											

Práctica II. Proporcionar múltiples formas de *expresión*

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.									X											
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.									X											
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.										X										

Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés										X										
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.									X											
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.										X										

Este principio se valoró desde las orientaciones al profesor

Figura 1. Rubrica de evaluación versión estudiante. Coherencia vertical, horizontal y DUA,

Proceso metodológico

Para promover el desarrollo del Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, se tuvieron en cuenta los procesos de generalización de patrones propuestos por Dreyfus (1991), dar cuenta de una característica común, generalizar la característica común en todos los términos de la secuencia y determinar una regla que permita encontrar cualquier término de la secuencia. Así mismo, el diseño estuvo enmarcado el contexto de los Juegos Olímpicos de Tokio 2020, específicamente en el deporte de natación sincronizada, donde se plantea la pregunta problematizadora ¿Cómo organizar las competencias de natación sincronizada?

La situación problema consiste en organizar las competencias de natación sincronizada teniendo en cuenta que los equipos están conformados por parejas, donde cada nivel de profundidad exige un nivel de abstracción distinto del patrón encontrado en la secuencia presentada, así como el uso de distintos patrones de acuerdo con la conformación de equipos formados por tríos y cuartetos.

Para el diseño y valoración de este, se tuvieron en cuenta las siguientes fases:

1. Fase de diseño. Consistió en la búsqueda de contextos y situaciones que dieran cuenta del uso de secuencias y patrones, así como la revisión de propuestas didácticas dadas en la enseñanza y promoción del pensamiento variacional, con la finalidad de proponer la pregunta problematizadora y diseñar las tareas en cada nivel de profundidad, en los cuatro momentos. El diseño está conformado por material de trabajo para el estudiante, material para el docente y la tabla de propósitos y descriptores.

2. Fase validación a través de la rúbrica. Se valoraron los materiales del estudiante, profesor y tabla de propósitos del diseño realizado en la primera fase de acuerdo con los ítems mencionados en la rúbrica.

3. Fase de análisis de los resultados de la rúbrica. Revisión y análisis de los resultados dados en la rúbrica de evaluación

4. Fase de rediseño. A partir de la tercera fase y teniendo en cuenta las observaciones dadas en la rúbrica, se realizaron ajustes y rediseños de las tareas presentadas en el material del estudiante, profesor y tabla de descriptores.

Primeras reflexiones

Teniendo en cuenta los resultados dados en la rúbrica de evaluación en el material del estudiante, donde se valoró la coherencia vertical, horizontal y el uso del DUA, se realizaron algunos ajustes en las tareas diseñadas en cada nivel de profundidad, como la forma en la que se presenta la situación problema, el uso de material concreto y el permitirles a los estudiantes utilizar distintas formas de representar sus respuestas y soluciones.

Agradecimientos

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Referencias y bibliografía

Alba, C. Sánchez, J. y Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Pautas para su introducción en el currículo. En proyecto: *Aplicación del Diseño Universal para el Aprendizaje y utilización de materiales digitales accesibles: implicaciones para la enseñanza de la lectoescritura y formación del profesorado.*

Becker, J. y Rivera, F. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40 (1), p. 1.

Bojorque, G., Gonzales, N., Wijns, N., Verschaffel, L., y Torbeyns, J. (2021). Enfoque espontáneo en estructuras matemáticas: patrones y clasificación. *PODIUM*, (40), 125–142. https://doi.org/10.31095/podium.2021.40.8

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV (pp. 141-162). Lleida: SEIEM

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library,* 11, p. 25-41.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por Geogebra.* Ed: Ediciones UIS.

Heredia, M., y Moscoso, C., (2019). El trabajo cooperativo, una estrategia para la atención a diferentes ritmos de aprendizaje. (Trabajo de investigación para optar el título de licenciado). Universidad de Cuenca. Ecuador.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18 (1),* 139-151.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá, D.C: MEN.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, D.C: MEN.

Romero, P., Carrillo, C. y López, M. (2018). La noción de equivalencia en alumnos con discapacidad intelectual: construcción de su pensamiento algebraico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31 (2)*, p. 1332-1337.

Saénz, L. (2012). Derecho a la educación inclusiva en el marco de las políticas públicas. *Revista de derecho principia IURIS (17)*, p. 1-424.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des matematiques et de l' informatique, p. 189-19

Estudio de las creencias de profesores de matemáticas a partir del análisis de sus prácticas

Graciela Rubi **Acevedo** Cardelas
Universidad de Los Lagos
Chile
gracielarubi.acevedo@alumnos.ulagos.cl
Luis Roberto **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

Comenzar el estudio de la relación entre creencias y prácticas de profesores de matemáticas, a través del análisis de sus prácticas, implica decisiones teóricas y metodológicas. En particular, es necesario determinar cuáles son los elementos del proceso de estudio que constituyen una manifestación de la creencia. En este trabajo, proponemos a las normas, de acuerdo con el planteamiento propuesto por el Enfoque Ontosemiótico, como aquellos elementos que deben ser analizados para poder determinar las creencias de los profesores. Se presentan algunos referentes teóricos que sustentan este planteamiento y se muestra un ejemplo en el que se operativizan estas ideas. A partir de esto es posible identificar las creencias de un futuro profesor respecto de lo que son los números, así como sus creencias respecto de lo que son una definición y una demostración en matemáticas.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación; Enseñanza; Formación docente; Enfoque Ontosemiótico; Investigación teórica; Matemáticas.

Introducción

El estudio de la relación entre creencias y prácticas de profesores ha sido tradicionalmente realizado comenzando por la identificación de las creencias –a partir de encuestas, entrevistas, cuestionarios, narrativas, etc.– y, posteriormente, contrastando estos resultados con las observaciones de las clases de los docentes. Los resultados de estas investigaciones no logran un consenso respecto de determinar si las prácticas de los docentes son consistentes con sus creencias o no (Fives & Buehl, 2012).

Una causa de esta situación es que, si bien se puede considerar a las creencias como predisposiciones para la acción (Rokeach, 1968), lo cierto es que las acciones de los docentes dependen de diversos elementos contextuales (la actitud de los alumnos, las condiciones escolares, etc.). Por lo tanto, no es posible inferir 'a ciencia cierta' qué acciones realizará un docente, una vez que se hayan identificado sus creencias.

Además, en un episodio de clase, se ponen en juego diversas creencias; las cuales pueden, incluso, entrar en conflicto entre sí. Sin embargo, el mismo individuo será capaz de resolver dicho conflicto (Leatham, 2006), desarrollando una nueva creencia o valorando alguna sobre de la otra.

De esta manera, consideramos realizar el estudio de la relación entre prácticas y creencias de profesores de matemáticas, comenzando por el análisis de sus prácticas y, a partir de ello, inferir las creencias que dieron lugar a ellas. Esta decisión implica tomar algunas consideraciones teóricas y metodológicas, en particular, respecto de los momentos del proceso de estudio que es necesario observar y, a partir del cual, se inferirán las creencias. En este trabajo se propone utilizar la noción de "normas" planteada en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos como el elemento del proceso de estudio en donde se manifiestan las creencias de los docentes. En la siguiente sección se describen las consideraciones teóricas que sustentan esta propuesta y más adelante se muestra un ejemplo en el cual se operativizan estas ideas.

Referentes teóricos

La relación entre las creencias de los profesores y las prácticas didáctico-matemáticas que realizan en su labor, implica la coordinación de dos dimensiones distintas: la personal y la social. Las creencias se encuentran en la primera, al ser consideradas conocimientos subjetivos de las personas; mientras que, las interacciones que se dan para la negociación de significados en un proceso de estudio involucran la dimensión social.

Esta relación ha sido estudiada por autores como Cobb y Yackel (1996), quienes proponen la relación de las normas sociales y sociomatemáticas con las creencias. Estos autores consideran a las normas sociales como expresiones de los aspectos normativos que se esperan en el aula, y a las normas sociomatemáticas como regularidades en los patrones de interacción que son específicas de las matemáticas. Por otro lado, consideran a las creencias como la comprensión que usa una persona para evaluar una situación. Así mismo, relacionan estas dos nociones asumiendo a las creencias como los "correlatos psicológicos de las normas" (Yackel & Rasmussen, 2002, p. 316).

De esta manera, consideramos a las normas como los elementos dentro del proceso de estudio en los cuales focalizar nuestra atención, para a partir de ellas, identificar e inferir las creencias de los profesores de matemáticas.

Dentro del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) la noción de norma es considerada como "el conjunto de reglas del 'juego del lenguaje' en el que participan profesores y alumnos cuando intervienen en un proceso de cognición e instrucción" (Godino et al., 2009). Y se amplían las categorías, proponiendo la siguiente tipología:

- *Normas epistémicas*. Aquellas que regulan las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución.
- *Normas cognitivas*. Aquellas que regulan la manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos.
- *Normas interaccionales*. Aquellas que regulan las interacciones docente-discente y discente-discente.
- *Normas mediacionales*. Aquellas que regulan el uso de los recursos humanos, materiales y temporales.
- *Normas afectivas*. Aquellas que regulan la afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio.
- *Normas ecológicas*. Aquellas que regulan la relación con el entorno (sociocultural, político, laboral, …) en el que se desarrolla el proceso de instrucción.

Consideramos que estas categorías pueden permitir el acceso a creencias de los profesores respecto de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje; creencias sobre las interacciones, los medios y los afectos que se involucran en un proceso de estudio, y creencias sobre los aspectos contextuales en los que tiene lugar dicho proceso.

Aspectos metodológicos

Para ejemplificar las ideas presentadas previamente, se comparten los resultados de una investigación cualitativa en la que se analizó un proceso de estudio utilizando el planteamiento teórico previamente mencionado.

La información se recopiló a través de una observación no participante, la videograbación y la transcripción de una clase en la que se estudiaron las potencias de base racional y exponente entero.

Esta clase fue impartida en un proceso de microenseñanza de profesores en formación, en el cual, un futuro profesor tenía el rol de docente y el resto tenían el rol de alumnos.

La transcripción se codificó usando la letra P para identificar los diálogos de quien tiene el rol de profesor y la letra A con algún subíndice para denotar a los diálogos de quienes fungen el rol de alumnos. Y, posteriormente, fue analizada buscando identificar las normas que en él tenían lugar. En un primer momento se identificaron las normas que fueron puestas en juego de manera explícita y, posteriormente, aquellas que se podían inferir a partir del discurso de los participantes. En este documento se presentan algunas normas epistémicas identificadas.

Resultados

El proceso de instrucción comienza con el futuro profesor que asume el papel de docente (P) compartiendo que el objetivo de la clase es "mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero". Ante esto, un futuro profesor que funge con el rol de estudiante

(A1) pregunta respecto a qué se refieren los conceptos de “potencias de base racional y exponente entero”.

En la primera columna de la Tabla 1 se comparte la transcripción del diálogo que se da a partir de dar respuesta a A1. Mientras que en las columnas siguientes se describen las normas epistémicas que se identificaron, ya sea porque fueron mencionadas explícitamente por quien funge como profesor (P) o como alumno (A); o bien, porque pueden ser inferidas a partir del discurso de los participantes.

Tabla 1
Normas epistémicas identificadas durante el proceso de estudio

Transcripción del episodio de clase	Normas epistémicas establecidas explícitamente	Normas epistémicas inferidas
P: Los números racionales se pueden escribir de dos formas, si ustedes recuerdan. Una era de forma decimal, ¿y la otra? ¿alguien me quiere ayudar? A1: ¿Fraccionaria? P: ¿Cuál, señorita? A1: ¿Fracciones? P: Fracciones, ¿cierto? Estas son de las dos formas en que vamos a encontrar estos números.	N1: Los números racionales se pueden representar como fracciones o como decimales.	N2: Definir un tipo de números implica describir las maneras en las que éstos se pueden representar.
P: Además, hoy vamos a trabajar con números enteros, ¿cuáles son los números enteros? A1: Los negativos y los positivos P: Los negativos y los positivos. Bien.	N3: Los números enteros son los negativos y los positivos.	N4: Definir un conjunto de números implica describir los tipos de números que lo constituyen.
P: ¿Qué pasa A2? Lo veo como que no me cree mucho. A2: Entonces ¿El -2,3 es un entero? P: El -2,3 es un decimal, y ¿ese a qué conjunto pertenece? A2: No lo sé, profesor. P: Te lo acabo de decir. A3: A los racionales. P: Los racionales. Esa es la diferencia.	N5: -2,3 no es un entero porque es un racional.	
P: O sea, nosotros empezamos a contar con 1, 2, 3… Esos son los naturales. Cuando hablamos de enteros, son los mismos números, pero les agregamos algo. A2: ¿El cer…? P: El signo negativo.	N6: Los números enteros son los mismos números que los naturales solo que se les agrega el signo negativo.	N7: Definir un conjunto de números implica mostrar los elementos que pertenecen a él.

P: Cuando hablamos de racionales estamos hablando de números que son decimales y fracciones. A1: ¿Los racionales solamente son los decimales y fracciones? El 1, el 2 y los negativos ¿esos no son racionales? P: Los negativos también son racionales.	N8: Los números racionales son números que son decimales y fracciones. N9: Los negativos son racionales.	N10: Definir un conjunto de números implica determinar sus relaciones con otros conjuntos.
P: De hecho, es muy importante tu pregunta, porque nosotros debemos tener en cuenta que los enteros pertenecen al conjunto de los racionales, ¿por qué? A1: Porque me acuerdo de que los números naturales eran desde el 1 hasta… creo que el infinito positivo. Los enteros tenían a los naturales. Me acuerdo de que hacíamos círculos y unos estaban contenidos dentro de otros. Y los naturales eran más chiquititos, los enteros contenían a los naturales y también creo que tenían negativos. Y los racionales eran más grandes y tenían los naturales adentro y a los enteros y tenían fracciones y tenían decimales. P: Exacto. Eran como esas muñequitas rusas que unas contenían a otras. Lo mismo pasa con los conjuntos.	N11: Los decimales y las fracciones son tipos de números contenidos en los racionales. N12: Los naturales son más chicos que los enteros.	
P: Pero ¿por qué un entero pertenece también a los racionales? porque si se dan cuenta, nosotros hablamos de decimales y fracciones y ¿qué pasa? que un entero nosotros lo podemos escribir como una fracción. Esa es la explicación matemática.		N13: Una demostración matemática implica el uso de procedimientos de cálculo. N14: Una demostración no es matemática si los argumentos son derivaciones lógicas de propiedades de los conjuntos.

Fuente: Elaboración propia.

Las normas epistémicas identificadas las podemos agrupar en las siguientes categorías: Normas respecto a los tipos de números (N1, N3, N5, N6, N8, N9, N11, N12), normas respecto a las características de las definiciones de números (N2, N4, N7, N10) y normas respecto a lo que constituye una demostración matemática (N13, N14).

A partir del análisis de las normas que tienen lugar dentro del proceso de estudio, inferimos que algunas de las creencias del profesor son:

Creencias respecto a los tipos de números. Los números naturales son los números 1, 2, 3, … hasta el infinito positivo; los números enteros se construyen agregando un signo negativo a los números naturales; tanto los números enteros como los naturales son, a su vez, racionales; y, estos últimos pueden representarse como fracciones o como decimales.

Creencias respecto a las definiciones matemáticas. Para definir un conjunto de números es posible enlistar los elementos que lo componen, enlistar los subconjuntos que lo componen, describir las propiedades que lo caracterizan o determinar cómo se relacionan los subconjuntos que lo componen.

Creencias respecto a las demostraciones matemáticas. Para realizar una demostración matemática que nos permita determinar si un subconjunto de números está contenido en otro, no basta con utilizar propiedades de los conjuntos, sino que es necesario operar para identificar si una representación puede ser escrita en términos de otra.

Conclusiones

En este documento se ha considerado que, para el estudio de la relación entre creencias y prácticas de los profesores de matemáticas, es conveniente comenzar analizando sus prácticas. Para ello, proponemos el uso de la noción de normas y su tipología planteado por el Enfoque Ontosemiótico. A través de la identificación de éstas, es posible inferir algunas creencias de profesores.

Si bien se lograron ejemplificar estas ideas mediante el análisis de un fragmento del proceso de estudio, es importante considerar que, para tener un mayor nivel de fiabilidad en un estudio de este tipo, se requiere de la observación de una cantidad considerable de sesiones de clase, tales que permitan identificar regularidades en las prácticas del profesor, además de complementar el análisis de las transcripciones, con instrumentos tales como entrevistas que permitan validar o desechar las creencias inferidas desde la práctica.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt Regular Nº1200005 financiado por la Agencia de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias y bibliografía

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. Educational Psychologist, 31(3), 175–190.

Fives, H., & Buehl, M. M. (2012). Spring cleaning for the "messy" construct of teachers' beliefs: What are they? Which have been examined? What can they tell us? In K. R. Harris, S. Graham, & T. Urdan (Eds.), Educational Psychology Handbook: Vol. 2. Individual Differences and Cultural and Contextual Factors (Vol. 2, pp. 471–499). American Psychological Association.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 91–102.

Rokeach, M. (1968). Beliefs, attitudes, and values: A theory of organization and change. Jossey-Bass.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? (pp. 313–330). Kluwer Academic Publishers.

Estudio de los cuerpos geométricos en la escuela secundaria: una revisión sistemática de literatura

Alexánder **Álvarez** Colorado
Universidad de Antioquia
Colombia
Alexander.alvarez1@udea.edu.co
Camilo **Montoya-Puerta**
Universidad de Antioquia
Colombia
Camilo.montoyap@udea.edu.co
Santiago **Herrera** Giraldo
Universidad de Antioquia
Colombia
Santiago.herrera2@udea.edu.co
María Camila **Ocampo-Arenas**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Camila.ocampo@udea.edu.co
María Denis **Vanegas** Vasco
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Maria.vanegas@udea.edu.co

Resumen

En este artículo se propone realizar una revisión sistemática de literatura en la que se plantea como objetivo indagar acerca de cómo se ha abordado el estudio de los cuerpos geométricos en el panorama investigativo de las Didáctica de las Matemáticas en el ámbito local e internacional. La recolección de los datos se realizó sobre cinco fuentes cuya selección final ubicó 16 artículos, los criterios de selección fueron i. que la publicación se haya realizado posterior al año 2006, ii. que el foco de estudio de los artículos se refiera a la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos y la geometría espacial. El análisis de los documentos realizó por medio del software NVivo y fichas bibliográficas. Los resultados obtenidos se encuentran, de un lado, las diferentes apuestas teóricas y metodológicas en esta temática y, por otro lado, la ausencia de estudios que enlacen el STEAM en el marco de la TAD.

***Palabras clave*:** estudio de los cuerpos geométricos; revisión de literatura; Teoría Antropológica de lo didáctico.

Introducción

El estudio de los cuerpos geométricos ha tomado relevancia sobre el campo investigativo en el panorama internacional de la Didáctica de las Matemáticas. En el caso de Colombia, las sucesivas reformas curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006), han permitido poner sobre el panorama investigativo el estudio de la geometría en la escuela; en particular de la geometría espacial. Pese a que en la comunidad investigativa hay consenso acerca de la importancia en el estudio de la geometría espacial, debido a los diferentes vínculos que permite establecer respecto a las actividades humanas (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004), su estudio sobre la práctica, en algunas instituciones escolares, ha tenido poca relevancia. Incluso, algunos maestros manifiestan no estar preparados para llevar a cabo su enseñanza (Aguayo, 2019).

Dicho lo anterior, es de especial interés para esta revisión de literatura identificar cómo se ha abordado desde de la investigación en Didáctica de las Matemáticas el estudio de los cuerpos geométricos en las instituciones escolares en el ámbito local e internacional, desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas, en particular a los que se refieren a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, (En adelante, TAD). Debido a que, esta revisión hace parte de un trabajo de grado que pretende desarrollar un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) respecto al estudio de los cuerpos geométricos en la enseñanza secundaria en Colombia.

Metodología

En este trabajo se empleó una revisión sistemática de literatura como técnica para recolectar información relevante sobre el estudio de los cuerpos geométricos. Esta, según Rother (2007) citando a Castro (2006) es una revisión implementada para responder alguna pregunta específica, en la cual se emplean métodos explícitos y sistemáticos para identificar, seleccionar y evaluar de manera crítica los estudios, y para recolectar y analizar los datos de estos estudios incluidos en la revisión.

La recolección de los datos se realizó en las actas de los congresos CMF y 4e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique; Google-Scholar, en la base de datos Scielo y el repositorio digital Funes. Para organización y el análisis de dicha revisión se emplearon el software NVivo (Para el empleo de este programa se cuenta con la licencia del grupo de investigación al cual pertenecen los investigadores) y fichas bibliográficas. Asimismo, los criterios para la selección fueron: fecha de publicación no anterior a 2006 —fecha de publicación de los documentos de orientación curricular, referente principal del trabajo general que engloba esta propuesta— y, que el foco de estudio de los artículos se refiera a la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos y la geometría espacial. Así, se recolectaron 40 artículos en la búsqueda de la cual se seleccionaron 16 luego de la depuración realizada. Se emplearon las ecuaciones de búsqueda: enseñanza + cuerpos geométricos, estudio + geometría espacial.

Resultados

De acuerdo con lo anterior, se identificaron cuatro perspectivas teóricas dominantes en relación con el estudio de los cuerpos geométricos, estas son: el modelo de Van Hiele, las Tecnologías de la Información y la Comunicación, la TAD, y el enfoque STEAM y la modelación matemática (véase la tabla 1). Las cuáles serán abordadas a continuación en el ámbito internacional y colombiano.

Tabla 1
Resultados revisión de literatura.

Fuente	M. Van Hiele		TIC		STEAM y Modelación		TAD		Total
	Col	Inter	Col	Inter	Col	Inter	Col	Inter	
Scholar	1	0	2	1	0	1	1	2	8
CMF	0	0	0	0	0	0	0	1	1
E4 TAD	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Scielo	0	1	0	0	0	0	0	1	2
Funes	0	1	1	0	1	0	0	1	4
									16

Fuente: Elaboración propia a partir de los dados.

Estudio de los cuerpos geométricos en el contexto internacional

En el caso de España, Rojas y Sierra (2020), tras una indagación en el currículo de la escuela secundaria obligatoria, en adelante ESO, concluyen que existe una ausencia de cuestiones a las que respondan los conocimientos geométricos. Este trabajo es continuado en Rojas y Sierra (2021) y Rojas y Sierra (2021), en donde, de un lado, identifican algunas restricciones que impiden el estudio estas en la ESO, y de otro lado, llevan a cabo un proceso de modelización espacio-geométrica mediante la elaboración de un Recorrido de Estudio e Investigación. Entre los resultados de estos estudios se encuentra la posibilidad de abordar de modo funcional parte de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo en la ESO y superar la rigidez de la actividad matemática escolar.

Por otra parte, Labrigui-Rubio (2022) plantea el estudio de los cuerpos geométricos mediante el enfoque STEAM. En esta se propone el desarrollo de un modelo de una ciudad sostenible por parte de los estudiantes, por medio de metodologías activas como el aprendizaje basado en proyectos y el aprendizaje cooperativo. Los estudiantes diseñaron los edificios de la ciudad, con el uso de softwares de geometría dinámica y entornos CAD y la impresión 3D para dar forma al modelo.

En otra propuesta Gutiérrez y Jaime (2012), presentan dos modelos didácticos para la enseñanza de la geometría espacial en los diferentes niveles educativos, a saber, el modelo Van Hiele y el Modelo Vinner. Basados en estos modelos proponen algunas situaciones acerca de los desarrollos planos de figuras tridimensionales. Estos modelos, permitieron generar reflexiones frente a la enseñanza de la geometría espacial, debido a que los maestros pueden considerar las representaciones gráficas, tanto físicas como mentales, en las clases de la geometría. En esta misma línea, Diez y Roa (2018), proponen el estudio de los cuerpos geométricos mediante el uso de tinkerCAD y la impresión 3D, articulando los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele. Plantean la realización de algunas actividades mediante el modelado 3D, como juntar varias figuras simples para luego calcular su volumen.

En el caso de Francia, Pavlopoulou y Patronis (2018), propusieron a los estudiantes la lectura y el análisis geométrico de la novela *Flatland* (E. Abbott, 1884). Este análisis derivó en la construcción de una configuración profunda acerca de cómo se veían los cuerpos geométricos para los habitantes de Flatland. El objetivo final de la propuesta fue que los estudiantes construyeran cooperativamente la continuación de la historia con base en dicho análisis. Por su lado, Bloussier y Richard (2014), trabajan la visualización de los cuerpos geométricos en el espacio desde la proyección estereoscópica asociada con la vista que ofrecen las salas de cine 3D y la proyección en perspectiva vinculada a la pintura renacentista. Se observó como la proyección estereoscópica produce un dibujo y sus representaciones con un dominio operativo más amplio que la proyección en perspectiva, puesto que la proyección estereoscópica permite producir respuestas acordes a las figuras trabajadas.

En el caso de Argentina, Berenguel y Parra (2021), en marco de la TAD, realizaron un estudio en el nivel secundario, donde proponen el diseño y la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación, partiendo de la pregunta generatriz ¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm2? Los estudiantes realizaron un análisis en el que formularon nuevas preguntas respecto a las características de dicho envase y dieron respuestas que posibilitaron la emergencia y estudio de los conceptos matemáticos relacionados con el estudio de los cuerpos geométricos de una manera funcional, con sentido y con una *razón de ser*.

Estudio de los cuerpos geométricos en el contexto local

Botero y Rendón-Mesa (2022), emplean la modelación como conexión entre las matemáticas y las experiencias culturales; así, proponen una situación en la cual los estudiantes deben optimizar una lámina de cartón industrial para elaborar el desarrollo plano de un envase en forma de prisma rectangular. Por su lado, Parada y Díaz (2021), enmarcados en la TAD, analizan algunas praxeologías locales respecto a los cuerpos geométricos, para luego proponer una nueva configuración praxeológica, con base en el modelo de Van Hiele, y articulada en el software dinámico de GeoGebra. Enmarcado, también, en el modelo de Van Hiele, Marín (2021), muestra la planificación, elaboración e implementación de una propuesta para la enseñanza de la geometría espacial que permitió la conceptualización de figuras y cuerpos geométricos. La cual deriva en una nueva metodológicas que vinculan los contextos de los estudiantes. Por otro lado, Rios-Cuesta, Zabala-Jaramillo, et al, (2022), desarrollaron una unidad didáctica con el fin de mejorar el componente métrico espacial en las pruebas saber mediante el uso del software Cabri. Este permitió una mayor abstracción, interacción y visualización de las figuras geométricas.

Gaitán, Moreno y Yopasá (2021), mediante el uso de aplicaciones de modelado 3D y realidad aumentada, articulada al Modelo de Van Hiele, la teoría para la resolución de problemas de Pólya y el desarrollo de competencias STEM, buscaron generar en los estudiantes aprendizajes significativos relacionados con el pensamiento geométrico. Esta propuesta permitió ver el celular como una herramienta con sentido en el aula. Por otra parte, Jaimes-Rico y Ramírez-Rodríguez, (2020), mediante el diseño e implementación de una secuencia didáctica, abordaron el estudio de los cuerpos geométricos por medio del uso de la realidad aumentada (RA) en celulares y tabletas, a través de las aplicaciones ARTRIC y Geometry-AR. En los resultados obtenidos se evidenció que la implementación de las actividades mediadas por RA tuvo un impacto positivo que se vio reflejado en los estudiantes.

Conclusiones

Esta revisión sistemática de literatura deja entrever la diversidad de apuestas teóricas y metodológicas que existen frente a la investigación de los cuerpos geométricos. Allí se muestran diferentes materiales didácticos aplicados y la identificación de algunas posibilidades asociadas a su estudio. Muestra, también, la existencia de la tendencia a emplear en el estudio de la geometría espacial las TIC modelación. Además, se evidencia — tanto en congresos internacionales que tienen como tema principal la TAD, como de otra índole — la ausencia de estudios que enlacen el STEAM en el marco de la TAD, particularmente a lo que refiere la elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia. Lo que lo que lo convierte en un campo abierto y fértil para la investigación en Didáctica de las matemáticas.

Referencias y bibliografía

Aguayo Álvarez, L. M (2019). Proyecto de aula que contribuya a la enseñanza de la geometría espacial a través del uso de material didáctico. Facultad de Ciencias.

Berenguel Rinaldi, A., y Parra, V. E. (2021). Enseñanza de cuerpos geométricos en el nivel secundario argentino: implementación de una actividad de estudio e investigación. Revista Números, 109, 7-39.

Blossier, M., & Richard, P. R. (2014). Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 17 (4 -2), 327-342.

Botero, O. E., y Rendon-Mesa, P. A. (2022). Cuántos empaques: Una propuesta de enseñanza de modelación en diferentes niveles formativos. En Serna, Edgar (Ed.), Situaciones de modelación matemática para el aula:

Aportes para diferentes niveles formativos (pp. 40-46). Medellín, Colombia: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda. 1-94.

Díez Molina, C., y Roa, J. (2018). Uso de las impresoras 3D para la Enseñanza de la Geometría de los sólidos siguiendo el modelo de Van Hiele. In VIII CIBEM, Julio 2017, Madrid 300-308. Departamento de Magisterio de Educación Infantil.

Gaitán Rosas, J. C., Moreno Granado, C. D., y Yopasá Murcia, M. (2021). Modelado 3d y realidad aumentada para la enseñanza de los sólidos geométricos. (Tesis de maestría, Universidad la Gran Colombia), Colombia, Bogotá.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (32), 55-70.

Jaimes-Rico, S y Ramirez-Rodriguez, W. (2020). Implementación de la Realidad Aumentada (Ra) Como Herramienta Didáctica Para la Enseñanza de Cuerpos Geométricos. (Tesis de maestría, Universidad de Santander), Colombia, Santander.

Marín Orrego, J. (2021). Propuesta de una estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas enfocada en el pensamiento espacial para los estudiantes del grado sexto. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia), Colombia, Antioquia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Labrigui-Rubio, M. (2022). Enfoque STEAM: Enseñanza-aprendizaje de la geometría en 4º de ESO a través del diseño de la ciudad sostenible. (Tesis de maestría, Universidad Internacional de La Rioja), España, La Rioja.

Parada, M., y Díaz, Y. (2021). Avances de una Configuración Didáctica: Praxeologías para la Enseñanza y el Aprendizaje de Cuerpos Geométricos Mediante Geometría Dinámica. Socializar las experiencias de investigación de estudiantes a nivel de Pregrado y Posgrado en la Facultad de Estudios a Distancia y otras universidades con convenio con la FESAD., 40-44.

Pavlopoulu, K. y Patronos T. (2018).Qu'est-ce Qu'il Se Passe Quand Une Figure Geometrique Rencontre Flatland? [Affiches GT4]. EMF2018-Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines, Paris, France.

Ríos-Cuesta, Wilmer; Zabala-Jaramillo, Luis Albeiro; Barriga-Arceo, Eugenio; Parraguez, Marcela; Roa-Fuentes, Solange; Huincahue, Jaime; y Morales, Astrid (2022). Construcción del concepto de volumen del prisma: una propuesta desde la modelación y representación con geometría dinámica y matemática condicional. En Zabala, Luís; Ramos-Rodríguez, Elisabeth (Eds.), Experiencias en el aula de Matemáticas. México: Editorial Kali., 21-61.

Rojas Suárez, C., y Sierra Delgado, T. Á. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. Avances de investigación en educación matemática, (20), 41-63.

Rojas Suárez, C., y Sierra Delgado, T. Á. (2021). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. Educación matemática, 33(1), 208-239.

Rojas Suárez, C., y Sierra Delgado, T. Á. (2020). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Educação Matemática Pesquisa, 22(4).

Rother, E. T. (2007). Revisión sistemática X Revisión narrativa. Acta paulista de enfermagem, 20, v-vi.

Estudio de una tarea sobre Función Exponencial con base en el Espacio de Trabajo Matemático

Jorge Luis **Vivas** Pachas
Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú
jorge.vivas@pucp.edu.pe
Jesús Victoria **Flores** Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú
jvflores@pucp.pe
Tito Nelson **Peñaloza** Vara
Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú
npenalozav@pucp.pe
Verónica **Neira** Fernández
Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú
vneira@pucp.pe

Resumen

En el presente artículo se analiza el Espacio de Trabajo Matemático esperado en una tarea sobre función exponencial orientada a estudiantes de carreras de Humanidades. La investigación se desarrolla bajo la mirada del Espacio de Trabajo matemático (ETM) y tiene una metodología cualitativa. Dentro del análisis se evidencia la posible activación de las génesis y los planos verticales, así como los paradigmas que caracterizan el ETM esperado sobre función exponencial. Entre los principales resultados tenemos, en base a la producción matemática esperada, la activación de las *génesis semiótica* e *instrumental* y del plano vertical [Sem-Ins], así como identificar que se privilegia el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Palabras clave: Espacio de Trabajo matemático; Espacio de Trabajo Matemático esperado; carreras de Humanidades, función exponencial.

Introducción

La noción de función exponencial es de suma importancia en el currículo de Matemática de nuestro país, tanto en el nivel secundario como en el superior. En las carreras de Humanidades, esta función, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo: en Psicología se usa para medir el nivel de aprendizaje en un determinado tiempo; en Economía para analizar la inflación y capitalización; en Administración para analizar el interés compuesto; en Derecho Forense para entender el informe del médico forense acerca del tiempo descomposición de los cuerpos en caso de asesinatos; en Arqueología para determinar la edad de los artefactos como los huesos y otras fibras; etc. Todas estas aplicaciones justifican la enseñanza de la Función exponencial en carreras de Humanidad y es por ello por lo que nos enfocaremos en entender el Trabajo Matemático que realizan los estudiantes al resolver una actividad sobre esta función.

Investigaciones en Didáctica de la Matemática muestran la pertinencia de investigar este tema, especialmente con relación a los procesos la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

Con relación a investigaciones sobre función exponencial y el trabajo matemático, Vivas (2020) analizó el trabajo matemático personal de estudiantes al resolver problemas de función exponencial, la cual estuvo dirigida a estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades, siendo de corte cualitativo experimental. La recopilación de datos se obtuvo por medio de una tarea que contenía dos preguntas, las cuales generan en los estudiantes la necesidad de utilizar instrumentos para resolver las situaciones, y de esta manera el análisis de las acciones permite identificar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo que, según el autor, fueron los más predominantes.

Por otro lado, Baquedano (2021) realiza una investigación con estudiantes de tercero de secundaria en donde busca caracterizar el trabajo matemático desarrollado por ellos al enfrentarse a una tarea de modelación matemática para construir el concepto de función exponencial mediante la Ley de Enfriamiento de Newton. Las categorías de análisis fueron elaboradas a partir de la articulación entre el ciclo de Modelación Matemática (Borromeo-Ferri, 2010) y el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). En uno de los resultados obtenido destaca la activación del plano Semiótico Discursivo [Sem-Dis] en aquellas preguntas que permitían transitar por las distintas fases del ciclo de modelación, además, indica que el concepto de proporcionalidad inversa fue un obstáculo didáctico a la hora de construir el concepto de función exponencial en situaciones de modelación.

Respecto a la enseñanza de la función exponencial Arredondo (2020) analiza el espacio de trabajo matemático idóneo de los docentes en la enseñanza de la función exponencial en cursos de matemáticas de carreras de letras y ciencias humanas, en el dominio del análisis, mediante situaciones de modelación de interés compuesto, crecimiento y decrecimiento poblacional, y cuya metodología fue el estudio de caso. Mediante observación de las clases y el análisis de las producciones de los docentes, se reconoció la activación de las génesis y los tres planos verticales del esquema del ETM, los cuales privilegian los paradigmas del análisis Aritmético/Geométrico (AG) y del análisis Calculatorio (AC).

Función exponencial

Consideramos nociones extraídas de Stewart et al (2007) respecto a la función exponencial.

Definición: Para $a > 0$, la función exponencial con base a está definida por: $f(x) = a^x$. Para $a \neq 1$, el dominio de f es $\mathbb{R}$, el rango es $]0;\ +\infty[$ y la gráfica de f tiene una de las formas mostradas en la figura 1.

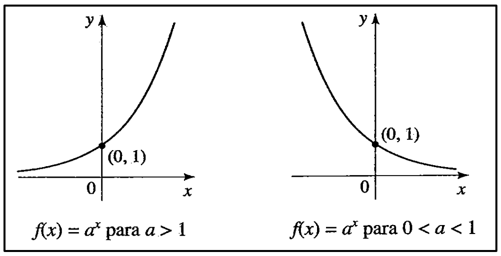


Figura 1. Formas de la gráfica de la función exponencial de base a

En la figura 2 mostramos las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para diferentes valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0;\ 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. En dicha figura puede verse que existen tres tipos de funciones exponenciales $f(x) = a^x$: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a = 1$, $f(x)$ es constante; si $a > 1$, la función crece rápidamente, y mientras más grande sea la base, más rápido será dicho crecimiento.

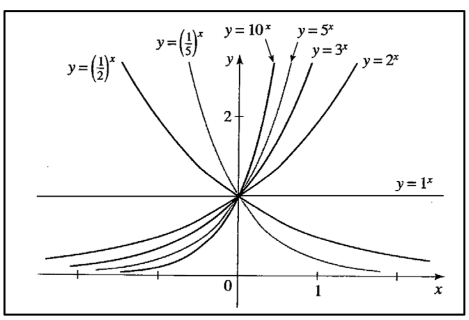


Figura 2. Formas de la gráfica de la función exponencial de base a

Aspectos teóricos y metodológicos

Espacio de Trabajo Matemático

De acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), el Espacio de Trabajo Matemático (en adelante ETM), es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en el contexto educativo y está basado en la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. El plano epistemológico está compuesto por tres componentes o polos a saber: *el representamen*, que se constituye de los registros de representación semiótica; *los artefactos*, que son elementos materiales o simbólicos utilizados y *el referencial teórico*, que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El plano cognitivo se compone de los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante una *génesis semiótica*, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental*, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción y una *génesis discursiva* de la prueba, que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático. Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación dinámica de dos o incluso tres génesis.

Por ello, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales, que son el plano Semiótico Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].

Otro aspecto del ETM que se considera en la teoría es la noción de paradigma como "el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico" (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016, p. 7) en un contexto educativo. En relación con el dominio del Análisis, específicamente en el paradigma del Análisis Matemático estándar, se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Aritmético/ Geométrico (AG), que permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis Calculatorio (AC), en el que las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos y, Análisis Real (AR), que es caracterizado por una mirada global a las características de la noción matemática, con reglas que dependen de la topología usada.

Por otro lado, Henríquez-Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes aplican técnicas y conocimientos de acuerdo con el paradigma en cuestión. Esto permite reconocer la importancia que tienen las tareas en el sentido de promover el trabajo matemático de los estudiantes pues constituyen el medio para la resolución de problemas. En este trabajo de investigación, la noción de tarea está basada en la definición que propone Sierpinska (2004) y adaptada por Nechache (2017):

Una "tarea matemática" se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, que se sabe que los estudiantes pueden resolver de manera oportuna en un espacio de trabajo matemático bien definido (p. 72).

Asimismo, Gaona (2022) resalta la importancia que adquieren las tareas al afirmar que, si bien no forman parte del ETM, impulsan la activación del trabajo matemático. Con relación al diseño de tareas, Gaona (2022) sostiene que el ETM, por una parte, puede orientar el diseño de las tareas una vez definidos los objetivos, específicamente, quien diseña se puede preguntar si su tarea fomenta alguna o varias génesis o planos verticales, lo que permite hablar de ETM potencial de la tarea.

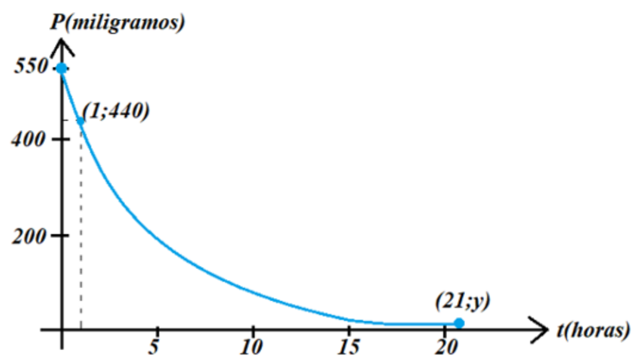
Aspectos metodológicos

La investigación que desarrollamos es cualitativa, porque se prioriza el análisis del fenómeno didáctico en cuestión. Por ello, para el análisis del trabajo matemático esperado, utilizamos el método diseñado por Kuzniak y Nechache (2018), en el que señalan que la acción matemática es objetivada y tomada del discurso escrito (producción escrita) u oral (entrevista, etc.) y que un episodio está constituido por una serie de acciones matemáticas que el estudiante realiza para llevar a cabo una tarea. Este método está constituido por dos etapas que permiten realizar un análisis pormenorizado de la producción matemática del estudiante. La primera etapa consiste en identificar las acciones matemáticas presentes en la producción matemática para luego agruparlas en episodios e interpretarlas en términos del ETM, es decir, identificar la activación de las génesis y los planos verticales. La segunda etapa consiste en dar una idea global de la circulación del trabajo matemático y emplea el esquema del ETM. En esta investigación, este método es adaptado con el propósito de analizar la producción matemática esperada y consideramos la primera etapa del análisis.

La tarea y su análisis

La tarea está pensada para ser llevada a cabo en una sesión de clase con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada en Lima, Perú. En esta clase, la resolución de problemas sobre función exponencial requiere el uso de su representación algebraica y gráfica. Por consiguiente, esta tarea consta de tres preguntas que favorecen el cambio de estos dos tipos de representación a partir de la interpretación de un problema extra matemático. Es así que, en la presente investigación, se analiza el Espacio de Trabajo Matemático esperado en la resolución de la tarea (ver figura 3).

La concentración de un medicamento en el organismo de una persona después de haber sido ingerido ha ido disminuyendo. Esta situación se representa en el siguiente gráfico.



Además, se sabe que la regla de correspondencia de esta gráfica es de la forma $\boldsymbol{P(t) = C \cdot A^t}$, donde t representa el tiempo transcurrido en horas.
Según esta información, responda lo siguiente:

a) Determine la regla de correspondencia y rango de la función que modela esta situación.
b) Interprete los valores de las constantes C y A hallados en el inciso anterior, de acuerdo con la situación planteada.
c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrió desde que se ingirió el medicamento, para que la concentración del medicamento en el organismo sea de 110 miligramos?

Figura 3. Tarea sobre función exponencial

ETM esperado y su análisis

En la solución propuesta que se considera, es posible identificar cinco episodios (E). Para el ítem a, en el primer episodio (E1) se determina la regla de correspondencia. Luego, a pesar de que no se solicita determinar el dominio, los estudiantes entienden que la regla de correspondencia queda plenamente establecida en la medida que esté acompañada de su dominio. En ese sentido, en el segundo episodio (E2) se determina el dominio y en el tercer episodio (E3) se determina el rango. Por su parte, en el ítem b, que consiste en la interpretación de las constantes, se constituye el cuarto episodio (E4). Finalmente, en el ítem c, el quinto episodio (E5) se resuelve una ecuación exponencial.

Análisis para el ítem a. En el **E1**, se espera que el estudiante identifique, en la representación gráfica de P, los dos puntos de paso que permitan determinar el valor de las constantes C y A. Para ello, se usa el modelo $P(t) = C \cdot A^t$ y se reemplazan las coordenadas de los puntos de paso, del siguiente modo: $(0; 550) \to P(0) = 550 \to C \cdot A^0 = 550 \to C = 550$ y $(1; 440) \to P(1) = 440 \to 550 \cdot A^1 = 440 \to A = 0{,}8$.

En términos del ETM, la representación gráfica de los puntos $(0; 550)$ y $(1; 440)$ es tomada como *representamen* y su identificación como puntos de paso de la representación gráfica de P expresa un proceso de *visualización*, lo cual evidencia la activación de la *génesis semiótica*. Luego, la regla de correspondencia es usada como *artefacto simbólico* y realiza un proceso de *construcción* para obtener el valor de las constantes C y A. Esto da cuenta de la activación de la *génesis instrumental*. En consecuencia, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, en el **E2**, se espera que el estudiante reconozca a las abscisas de los puntos extremos de la representación gráfica de P como los extremos del intervalo que representa su dominio, es decir, $[0; 21]$. En el ETM, esta acción matemática evidencia la activación de la *génesis semiótica*.

Asimismo, en el **E3**, se espera que el estudiante determine el valor de la ordenada del punto de paso $(21; y)$, el cual constituye el extremo inferior del intervalo que representa su rango. Para ello, se usa la regla de correspondencia: $(21; y) \to y = P(21) = 550 \cdot 0{,}8^{21} \approx 5{,}07$.

Dentro del ETM, la representación gráfica del punto $(21; y)$ es tomada como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificarlo como punto de paso de la representación gráfica de P, dando lugar a la activación de la *génesis semiótica*. En seguida, la regla de correspondencia es empleada como *artefacto simbólico* para obtener el valor de y mediante un proceso de *construcción* que se traduce en la activación de la *génesis instrumental*. Estas acciones son reflejadas en la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Análisis para el ítem b. En el **E4**, para la interpretación de $C = 550$, se espera que el estudiante reconozca al valor de 550 como imagen de $x = 0$, mediante la función P. En el ETM, esta acción matemática da lugar a la activación de la *génesis semiótica*.

Por otro lado, para la interpretación de $A = 0{,}8$, se espera que el estudiante determine en qué porcentaje varía la concentración del medicamento en el organismo con relación a una unidad de tiempo anterior, es decir $(0{,}8 - 1)\% = -20\%$.

En términos del ETM, las operaciones aritméticas son usadas como *artefactos simbólicos* y realiza un proceso de *construcción* para obtener un porcentaje, lo cual manifiesta la activación de la *génesis instrumental*. Luego, el signo negativo del porcentaje es tomado como *representamen* para ser interpretado como una disminución, mediante un proceso de *visualización*. Ambos procesos permiten evidenciar la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Análisis para el ítem c. En el **E5**, se espera que el estudiante identifique al valor de 110 como imagen de algún t, mediante la función P. Dentro del ETM, esta acción matemática revela la activación de la *génesis semiótica*. Posteriormente, condición $P(t) = 110$ se constituye en el planteamiento de la ecuación exponencial $550 \cdot 0{,}8^t = 110$.

Para resolverla, las operaciones producto o cociente son tomadas como *artefactos simbólicos* y realiza un proceso de *construcción* para obtener la ecuación equivalente $0{,}8^t = 0{,}2$. Es decir, se produce la activación de la *génesis instrumental*. Finalmente, las propiedades del logaritmo son empleadas como *artefactos simbólicos* para realizar un proceso de *construcción* que lo lleva resolver la ecuación. Esta acción evidencia la activación de la *génesis instrumental* y, en consecuencia, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Finalmente, la producción matemática esperada involucra un trabajo matemático que se sitúa en el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG). Esto, debido a que en la resolución de la tarea se consideran interpretaciones que tienen su origen en los cálculos obtenidos o que surgen dentro de su propio contexto, por ser una tarea extra-matemática.

Consideraciones finales

El análisis de la producción matemática esperada permite conocer cuáles serían los procesos y componentes (cognitivas y epistemológicas) involucrados en la resolución de la tarea presentada. Estos procesos y componentes, identificados a partir de la interpretación de las acciones matemáticas, caracterizan el Espacio de Trabajo Matemático esperado en la resolución de la tarea. En ese sentido, en esta producción matemática solo se reconoce la activación de las *génesis semiótica* e *instrumental*. Esto debido a que resolución de la tarea solamente demanda procesos de *visualización* y *construcción*. Además, la activación de ambas génesis describe la articulación de procesos en los cuales se privilegian la identificación y exploración de los objetos, desenvolviendo una competencia asociada al descubrimiento, lo cual evidencia la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Asimismo, en la producción matemática esperada se describe un trabajo matemático que se posiciona en el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Por otro lado, el análisis de la producción matemática esperada, bajo la mirada del ETM, fortalece la pertinencia de este marco como herramienta teórica a fin de caracterizar el trabajo matemático en la resolución de tareas, debido a que su uso permite describir y organizar las articulaciones entre componentes epistemológicas y cognitivas.

Agradecimiento

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA y por el apoyo brindado.

Referencias y bibliografía

Arredondo Rivas, R. A. (2020). Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/17661

Baquedano, A. C. (2021). Construcción de la función exponencial a partir de la ley de enfriamiento de newton. Comisión organizadora, 86. Recuperado de: https://www.sochiem.cl/wp-content/uploads/actas-jnem-2021-santiago-xxiv-ucsh.pdf#page=96

Gaona, J. (2022). Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la teoría de espacios de trabajo matemático. *PädiUAQ, 5*(10), 1–18. Recuperado de: https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/issue/view/67/74

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime, 17*(4), 9–10. Doi: https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.

Montoya, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. En *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739-754. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales deDidactique Et De Sciences Cognitives, 19*, 67–90.

Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007) Introducción al Cálculo. Editorial Thomson, Buenos Aires (1ra ed), 261-263.

Vivas-Pachas, J. L. (2020) Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre función exponencial. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104

Evidencias de pensamiento funcional en 5 años: uso de tablas de funciones

Sandra **Fuentes**
Universidad de Granada
España
sandrafuentesm@gmail.com
Lourdes **Anglada**
Centro Universitario María Inmaculada de Antequera
España
lourdesanglada@eummia.es
María C. **Cañadas**
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es

Resumen

Esta comunicación es parte de una investigación más amplia sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria desarrollada en España (www.pensamientoalgebraico.es). Analizamos el trabajo de un niño de 5 años, al resolver tareas de generalización que involucran funciones lineales y el uso de tablas. El objetivo de investigación es evidenciar el pensamiento funcional al trabajar con tablas de funciones. Entrevistamos a un alumno de último curso de infantil, a quien planteamos cinco tareas que involucraban las funciones $f(x)=x$, $f(x)=x+1$, $f(x)=x-1$, $f(x)=x+2$ y $f(x)=2x$, se le planteó el uso de tablas de funciones, las cuales son completadas en conjunto (alumno e investigadora), se le pregunta por las relaciones que observa a medida que se va llenando con datos. Concluimos que las tablas de funciones, no solo ayudan al niño a organizar la información, sino que además le permiten descubrir regularidades y llegar a la generalización, evidenciando así, pensamiento funcional.

Palabras clave: Early algebra; Educación infantil; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional; Representación tabular; Tablas de funciones.

Introducción

El desarrollo del pensamiento funcional se puede trabajar desde los primeros años de escolarización. El pensamiento funcional es uno de los enfoques del *early algebra* que se considera más adecuado para introducir el pensamiento algebraico (Carraher, Martínez, y Schliemann (2008)), en él se pretende buscar la variabilidad entre dos o más conjuntos.

Las investigaciones sobre pensamiento funcional, en estos últimos años, se están enfocando en los primeros cursos de primaria y último año de infantil (e.g. Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al., 2017; Fuentes y Cañadas, 2021), y se enfocan en la generalización, estrategias, estructuras y las representaciones que utilizan al resolver un problema. Las tablas son una representación con potencial en los primeros cursos y, sin embargo, han sido escasamente trabajadas (Brizuela et al., 2021).

Algunos países han incorporado el pensamiento algebraico dentro de sus directrices curriculares: Estados Unidos, Australia, Singapur, Chile (Pincheira y Alsina, 2021). España, incorporó en primaria el sentido algebraico, pero aún no en infantil. Sin embargo, podemos observar algunos contenidos relacionados con el sentido algebraico, como, por ejemplo: identificar característica de los objetos, establecer relaciones entre conjuntos, entre otros. Es importante destacar que para lograr desarrollar el sentido algebraico, debemos verlo a través del juego y de situaciones contextualizadas y desafiantes que le hagan sentido al alumno (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 a y b).

El objetivo que abordaremos en este trabajo es evidenciar el pensamiento funcional al trabajar con tablas para representar los valores de las funciones.

Marco teórico y antecedentes

El pensamiento funcional es un proceso cognitivo que se centra en las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016).

Las tablas son un tipo de representación y suelen ser usadas para almacenar datos. En las tablas de funciones los pares de datos están relacionados a través de una función matemática, es así que al almacenar estratégicamente los datos, podemos extraer información de las interacciones matemáticas que en ella se observan (recurrencia, correspondencia y covariación).

Blanton y Kaput (2011) concluyeron que niños de primero (6-7 años) trabajaron con tablas para representar valores de funciones y obtener de ellas relaciones funcionales. En la investigación de Martí (2009), alumnos de 2° y 5° de primaria utilizaron las tablas para almacenar datos. El autor concluyó que el leer y analizar los datos de las tablas requiere ser aprendido y practicado, ya que hasta las personas mayores tienen dificultad al hacerlo.

Brizuela et al (2021) trabajaron el pensamiento funcional con tablas con un niño de 5 años. En la investigación se diseñaron y aplicaron tres entrevistas (inicial, intermedia y final), se le plantean al alumno, tareas de pensamiento funcional que involucran funciones lineales y se le plantea utilizar tablas de forma espontánea. Algunas de sus conclusiones son que las tablas son utilizadas por el niño para ordenar los datos, pero que también las utiliza para encontrar conexiones entre los datos.

Metodología

Esta investigación es de carácter descriptivo y exploratorio (Hernández et al., 2010), ya que describe los procesos de un alumno en torno a su pensamiento funcional y el uso de tablas. Es exploratorio, ya que son escasas las investigaciones que trabajan con el uso de tablas de funciones en infantil.

Después de trabajar con los alumnos de una clase de infantil de 5 años, en tareas de pensamiento funcional, entrevistamos a 6 de ellos con buena disposición y podían comunicar lo que hacían. A 4 de ellos les planteamos el uso de tablas. Para este informe, analizamos la entrevista de un alumno, ya que evidenció relaciones entre los valores de las variables involucrados en las tablas que construía. Lo llamaremos Bradley.

En este trabajo describimos pequeños extractos de las entrevistas donde se evidencia pensamiento funcional en el uso de tablas. El alumno destacó en las sesiones con el gran grupo, dando respuestas que guiaban la discusión del salón. Como en esas sesiones se involucró a todos los alumnos, se perdieron las individualidades, que se aprecian en las entrevistas. En el gran grupo se les planteó la misma tarea y funciones, pero el objetivo estaba definido solo en la generalización, no en el uso de tablas. En el pizarrón se les plantearon tablas escritas con tiza, se puso título a las columnas, se van planteando los datos y construyendo junto al alumno las respuestas, esto dependía de como avanzaba en cada una de las cuestiones.

El equipo de investigadores diseñó tareas de generalización que involucraban funciones lineales, en el contexto de una fiesta de cumpleaños. Le planteamos a Bradley preguntas sobre casos particulares, a modo de juego. Les pedimos que verbalizaran las acciones que los llevaban a esos valores. Le presentamos en la pizarra una tabla con valores de la función y lo invitamos a utilizarla, con la intención de que registrara los datos pero que además la lea y encuentre regularidades entre las dos columnas o parejas de datos.

Cada una de las tareas involucraba una función lineal. La variable independiente era el número de niños invitados a la fiesta. Las variables dependientes era el número de gorros ($f(x)=x$), el número de globos y el globo de la puerta ($f(x)=x+1$), el número de cajas de zumo cuando a un niño no le gustan los zumos ($f(x)=x-1$), el número de platos para la tarta, considerando los platos del papá y la mamá ($f(x)=x+2$) y el número de pegatinas si van 2 en cada bolsita sorpresas ($f(x)=2x$), respectivamente.

Análisis de datos y discusión

Analizamos los datos, exponiendo extractos de la entrevista, donde Bradley hace explícita las relaciones funcionales y cuál es la forma en que utiliza las tablas. En la figura 1 se muestra una foto del trabajo realizado con el niño en la construcción y análisis de la tabla.

Figura 1. Niño trabajando con tablas de funciones.

En la entrevista no necesitó utilizar material concreto en las primeras cuatro tareas, aunque se le dio la posibilidad de utilizarlo cuando lo considerara necesario. Se apoyó de material concreto en la tarea 5, donde tenían que duplicar la cantidad de elementos.

A continuación, describimos cada una de las tareas propuestas a Bradley.

Tarea 1: Relación entre el número de niños y número de gorros necesarios para la fiesta de cumpleaños (f(x)=x). Cuando, en conjunto con la investigadora, estaban construyendo la tabla, se le planteó el número de niños (1, 2 y 3) y Bradley contestó por el número de gorros (1, 2, 3).

Bradley (B): 4 niños, 4 gorros.
Investigadora (I): ¿Cómo lo sabes? ¿Cómo llegaste a ese número de gorros?
B: Si hay un niño, un gorro, porque no *caberían* más cabezas.
I: ¿Y si hay dos niños?
B: Pues dos gorros... no pueden ser 4, porque no tienen 2 cabezas.

Se le preguntó por números grandes, fuera del ámbito numérico que corresponde a su edad (20 y 50). Para 50 niños, dijo "lo mismo". Es decir, generalizó lo descubierto en casos cercanos. Se le preguntó por *x* niños y respondió "necesitamos lo mismo" y colocó la letra x en la columna de los gorros. Utilizó la tabla como almacenamiento de datos, pero cuando lo necesitó, hizo referencia a datos que ya tenía anotados en la tabla, cuando llegó a la conclusión que eran iguales, mostró en la pizarra las parejas que avalaban su argumento. Almacenó los datos y percibió la relación de igualdad en ambas columnas.

Tarea 2: Relación entre el número de niños y número de globos, además del globo de la puerta del piso para anunciar el cumpleaños. La investigadora construyó la tabla con los valores 1 niño y 2 globos, recordándole que uno debe quedar en la puerta.

B: 2 niños, 3 globos... 2 globos para los niños y el de la puerta, entonces son 3, anotó en la tabla la pareja (2,3), siguió anotando las parejas (3,4), (4,5) y (5,6).
I: ¿Ves algo raro en la tabla?
B: No, nada, está bien.
I: ¿Cómo sabes qué número va?
B: Por la puerta.
I: ¿Y si son 20 niños?
B: Después del 20. ¿Quién va?... Ah, el 21.

Aunque no lo sabía escribir, sabía que era el que venía después, por lo que evidenció pensamiento funcional y generalizó. Al incluir la letra *x,* dijo "¿Quién viene después?... a, b, c, ..." y comenzó a recitar el alfabeto hasta llegar a la *y*. Por tanto, asoció el orden alfabético con el orden numérico, aunque sabía que es la *y*, en la tabla escribió *x*. En esta tarea, utilizó la mayor parte del tiempo, la tabla como almacenamiento.

Tarea 3: Relación entre el número de niños y número de zumos, sabiendo que a uno de los niños que está en la fiesta no le gustan los zumos.

I: ¿Si hay un niño en la fiesta?

B: Este es el niño que no le gustan los zumos... cero. Si son 2 niños... 1 zumo. Si son 3 niños... 2 zumos.

I: ¿Cómo lo sabes?

B: A lo que contesta apuntando a las parejas escritas en la tabla, indicando desde los zumos a los niños. Cero, uno. Pero sigue desde los niños a los zumos; dos-uno, tres-dos, cinco-cuatro... Si hay 5 niños, solo son 4, como a uno no le gustan.

Cuando se le consultó por 10 niños, escribió 9 en la pizarra. Consideramos que evidenció pensamiento funcional, y usó la tabla como almacenamiento y estableció relaciones funcionales en ella.

Tarea 4: Relación entre el número de niños y número de platos para la tarta, guardaremos tarta para el papá y la mamá. La investigadora escribió en la tabla 1 niño

B: 3... y completó en la tabla las parejas (2,4) y (3,5)

I: ¿Cómo sabes que son esos los resultados?

B: Le estoy sumando 2 a los niños, el plato del papá y de la mamá.

Siguió escribiendo en el pizarrón las parejas (10,12) y (8,10) sin dificultad. Utilizó la tabla como almacenamiento y estableció relaciones funcionales entre las parejas.

Tarea 5: Relación entre el número de niños y número de pegatinas, en cada bolsita sorpresa hay 2 pegatinas. Se escribió en la tabla los valores 1 niño-2 pegatinas, le preguntamos por las pegatinas para 2 niños y contestó "3". Al no salir de su error, le facilitamos el material concreto, colocó las 2 caritas y a sus lados colocó 2 estrellas...

B: 2 niños, 4 estrellas. También utilizó el material concreto para 3 niños, escribió la pareja (3,6), pero verbalmente dijo que ya lo sabía

I: ¿Y si son 5 niños?

B: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10... son 10 pegatinas. Contó por cada dedo dos números. Son 2 para un niño, dos para otro y dos para otro, a todos 2 para que no peleen".

La tabla la usó como almacenaje solamente.

Conclusiones

Nuestro objetivo era evidenciar pensamiento funcional al trabajar con tablas de funciones, el cual fue logrado. Encontramos evidencias de pensamiento funcional al relacionar las dos variables incluidas en la tarea. Además, utilizó las tablas de funciones, no sólo como almacenamiento de información, sino que logró establecer relaciones funcionales en ella.

Concordamos con Brizuela (2021), Blanton y Kaput (2011) y Martí (2009), en que el uso más frecuente de las tablas es el de ordenamiento de los datos y que hay niños que pueden ver más allá de solo los datos y encontrar relaciones funcionales entre ellos, como en el caso de Bradley.

El rol del mediador cumple un papel fundamental para desvelar esas relaciones matemáticas que intuitivamente los alumnos ven en los datos y que deben ser formalizadas. Esta investigación confirma que el uso de las tablas de funciones permite a los alumnos llegar a la generalización y establecer conexiones funcionales entre los datos. La implementación en el aula de las tablas de funciones, es posible con actividades contextualizadas y con preguntas que lleven a los alumnos a mirar los datos de las tablas más allá de solo un ordenamiento.

Sabemos que no podemos generalizar, pero aportamos evidencias que es posible y provechoso el trabajo con tablas de funciones en niños de infantil.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Española de Investigación y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Beca de doctorado en el extranjero n° 72210402, Gobierno de Chile.

Bibliografía y Referencias

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as route into algebra in elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer.

Brizuela, B., Blanton, M. y Kim, Y. (2021). A Kindergarten Student's Use and Understanding of Tables While Working with Function Problems. 10.1007/978-3-030-69657-3_8.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40* (1), 3-22.

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), (pp. 1-13).

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x) = 3x y f(x) = 5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269-277). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación, 5° edición. McGraw Hill.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Sense Publishing.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 56*, 24386-24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 28*, 1-33.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*, 153-180.

Formação continuada de professores de Matemática e o uso das tecnologias de informação e comunicação: Algumas considerações a partir de um levantamento bibliográfico

Ivonete Pereira Amador
Universidade Franciscana
Brasil
ivoneteamador@yahoo.com.br
Luis Sebastião Barbosa Bemme
Universidade Franciscana
Brasil
luis.bemme@ufn.edu.br
Silvia Maria de Aguiar Isaia
Universidade Franciscana
Brasil
sisaia@ufn.edu.br

Resumo

Esta comunicação tem como objetivo apresentar o resultado de um levantamento bibliográfico realizado sobre a formação continuada de professores de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, a partir o uso das tecnologias de informação e comunicação. Tal estudo é de caráter qualitativo, sendo que para a seleção dos trabalhos utilizou-se as plataformas CAPES, BDTD e periódicos e artigos SciELO, delimitando o período de tempo de 2012 até 2021. A análise dos trabalhos deu-se a partir de uma abordagem descritiva e interpretativa dos mesmos. Os resultados indicam que há necessidade de desenvolver formação continuada para os professores de Ensino Fundamental de Matemática, proporcionando a construção de atividades didáticas diferenciadas com o uso das tecnologias da comunicação e informação para alicerçar a prática pedagógica deste professor, de modo que eles possam desenvolver planejamentos e estratégias, para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem do aluno.

Palavras-chave: Formação continuada de professores; Educação Matemática; Tecnologias da informação e comunicação

Introdução

Esta comunicação tem como objetivo apresentar o resultado de um levantamento bibliográfico realizado sobre a formação continuada de professores de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, a partir o uso das tecnologias de informação e comunicação.

A preocupação com a formação docente justifica-se pelo fato de que para o exercício de qualquer profissão é necessária uma preparação profissional, esta requer apropriação de certos "saberes" e "fazeres", isto é, conhecimentos e procedimentos que são específicos de cada profissão. Neste sentido o tornar-se professor é um processo constante e que se dá ao longo de toda a trajetória profissional.

A formação de professores compõe o caminho responsável pela constituição de uma sonhada qualidade de ensino. Para Ponte (1998) a formação do professor há que atender não só o que o professor precisa saber em termos de conhecimentos específicos, mas também ao que ele é capaz de fazer e aos valores que assume na sua prática profissional. Nesse viés, a formação continuada deve dispor de instrumentos, para que o professor estabeleça uma relação da sua teoria com a prática docente de forma inovadora, dando subsídios para o uso das tecnologias digitais, resolução de problemas, além de repensar sua prática de forma crítica e reflexiva, buscando deste modo tornar o ensino mais prazeroso e capaz de envolver os alunos no processo de aprendizagem.

Nesse cenário de grandes e rápidas mudanças, o professor precisará estar preparado para os novos e crescentes desafios de uma geração que nunca esteve tão conectado com as tecnologias digitais. Assim o ofício de ser professor está mais desafiador e para minimizar estes desafios e melhorar sua prática docente, aponta-se como alternativa a formação continuada. Para Schnetzler (2003), três razões têm sido usualmente apontadas para justificar a formação continuada de professores:

> [...] a necessidade de contínuo aprimoramento profissional e de reflexões críticas sobre a própria prática pedagógica, pois a efetiva melhoria do processo ensino-aprendizagem só acontece pela ação do professor; a necessidade de se superar o distanciamento entre contribuições da pesquisa educacional e a sua utilização para a melhoria da sala de aula, implicando que o professor seja também pesquisador de sua própria prática; em geral, os professores têm uma visão simplista da atividade docente, ao conceberem que para ensinar basta conhecer o conteúdo e utilizar algumas técnicas pedagógicas. (Schnetzler, 2003, p.27).

Portanto, uma formação continuada precisa considerar diferentes formas de como ensinar. O acesso às tecnologias será significativo para o desenvolvimento das atividades curriculares, pois por meio delas pode-se fazer ligações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento tornando uma aprendizagem, mais contextualizada e próxima a realidade do aluno.

A partir da prática pedagógica planejada os recursos didáticos assumem um novo papel frente aos meios tecnológicos aplicados na educação. Segundo Moran (2008) a tecnologia tem o poder da sedução, aprendemos muito por meio dela e com ela, pois estas são pontes que abrem os horizontes, as portas para o mundo, medeiam o nosso conhecimento de forma abstrata ou concreta, possibilitando uma melhor compreensão da realidade, e desenvolvimento das potencialidades dos educandos.

Para muitos o uso das tecnologias é visto como uma concepção transformadora, uma visão mediadora que auxilia no processo de ensino e aprendizagem, conduzindo ao raciocínio lógico, isto é, o domínio de novas habilidades e entendimentos. Mas sempre devemos considerar que existirá problemas que podem estar associados à inclusão de novas tecnologias em sala de aula, o que acaba se tornado um desafio tanto para professores como para os alunos, que precisam saber lidar com uma metodologia diferenciada. Para Moran, Masetto e Behrens (2013, p.36),

> Os docentes podem utilizar os recursos na educação, principalmente a internet, como apoio para a pesquisa, para a realização de atividades discentes, para a comunicação com os alunos e dos alunos entre si, para integração entre grupos dentro e fora da turma, para a publicação de páginas web, blogs, vídeos, para a participação em redes e entre muitas outras possibilidades.

A escola pode se converter em um espaço de produção do conhecimento pedagógico, desde que consideremos as práticas e os problemas que são oriundos desde contexto que é diverso e complexo. Consideramos que a formação continuada de professores necessita garantir ao professor uma atuação que respeite as demandas oriundas do seu local de trabalho, para que ele se sinta parte do processo e formador de saberes. Assim, acreditamos que seu compromisso com a sua própria formação ultrapasse ações puramente técnicas e burocráticas para ser um formador de saberes.

Metodologia

A metodologia qualitativa é flexível e, se identifica com o estudo de caso. Conforme Gil (2008) procura interpretar fenômenos e atribuir significados ao sistema próprio dos entrevistados. Também conhecida como pesquisa empírica, pode valer-se de modelo da realidade pesquisada para testar e validar hipóteses.

O processo de levantamento de pesquisas para compor este estudo utilizou-se de três bases de dados: banco de teses e dissertações da CAPES, banco de dados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e banco de periódicos e artigos do portal SciELO, onde buscamos resultados de pesquisas de doutorado, utilizando como delimitação temporal o período de 2012 a 2021 e como descritores foram usados os termos *"formação continuada de professores" AND "matemática"AND "tecnologias" NOT "anos iniciais"*.

O primeiro refinamento realizado se deu através da exclusão de teses que se afastaram dos descritores mencionados. Foi constatada nas setes teses apresentadas no quadro 1 uma atenção dos pesquisadores em relação à formação continuada para os estudos de uso das tecnologias na perspectiva da Educação Matemática Crítica (EMC).

Quadro 1
Síntese dos trabalhos selecionados

Ano	Programa	Instituição	Título	Autor
2013	Ensino de Ciências	UNICSUL	Formação continuada de professores de matemática com uso das tecnologias de informação na perspectiva da Educação Matemática Crítica.	Marcio Bennemann
2014	Educação	UNESP	Formação continuada de professores de Matemática com enfoque colaborativo: contribuições para o uso reflexivo dos recursos da WEB 2.0 na prática pedagógica.	Cláudio Zarate Sanavria
2015	Informática na Educação	UFRGS	A formação continuada de professores de matemática: uma inserção tecnológica da plataforma Khan Academy na prática docente.	Denise Aparecida Fontana Nisxota Menegais
2016	Educação	UFMS	Formação continuada de professores e a apropriação das tecnologias de informação: o percurso de uma intervenção formativa.	Rodrigo Claudino Diogo
2018	Educação Matemática	UNESP	Potencialidades didáticas e pedagógicas do facebook com uma comunidade de prática virtual para a formação continuada de professores de matemática.	Maria Angela Oliveira de Oliveira
	Educação	UFPR	Formação continuada de professores para o uso de tecnologia digital da informação e comunicação baseada na teoria do mobile learning para o ensino de matemática.	Learcino dos Santos Luiz
2019	Educação Matemática	UNESP	Formação continuada de professores com uso de tecnologias digitais: produção de atividades de conteúdos matemáticos a partir do currículo paulista.	Tiago Giorgetti Chinellato

Fonte: Dados da pesquisa

Resultados e discussões

O primeiro trabalho a compor esta análise é de autoria de Bennemann (2013), e está intitulada *"Formação continuada de professores de matemática com uso das tecnologias de informação na perspectiva da Educação Matemática Crítica".* O autor relata que as tecnologias de informação e comunicação, quando utilizadas de modo a enriquecer o raciocínio do aluno, contribuído com raciocínios diferentes e estruturas matemáticas, certamente favorecerão e potencializarão as ações do aluno e do professor, que poderão ir além daquilo que se faz, regularmente, sem a utilização de tais tecnologias (Bennemann, 2013).

Entretanto, não se trata de considerar que somente com as tecnologias tais ações sejam possíveis, mas que, ao utilizá-las, professores e alunos poderão dedicar maiores esforços às análises, já que os procedimentos serão agilizados e enriquecidos pela diversidade de opções oferecidas pelas tecnologias.

Em sua pesquisa com nove professoras que não conheciam a Filosofia da ECM e não faziam uso didático da TIC o autor , identificou após a formação um envolvimento em discussões que lhes instigaram e compreensões da importância do aspecto investigativo numa perspectiva crítica frente a Matemática e ao contexto social, "matematizando" situações relevantes aos alunos, assim a utilização das TIC objetivando desenvolver um ECM, mostrou-se um caminho promissor, o pesquisador ressalta a importância de ouvir as inquietudes dos professores e chamá-los a participar do caminhar em busca da melhoria do ensino de Matemática.

Já Sanavria (2014), contribui com esta discussão ao devolver a pesquisa "*Formação continuada de professores de Matemática com enfoque colaborativo: contribuições para o uso reflexivo dos recursos da WEB 2.0 na prática pedagógica*". Tal investigação contou com oito professores do Ensino Fundamental séries finais e Ensino Médio, tendo como objetivo investigar como uma formação continuada pode contribuir para que os professores de Matemática conheçam e façam uso dos recursos da Web 2.0 identificando elementos que contribuíram para o seu uso reflexivo.

Para que isso ocorra, o autor defende que o primeiro passo é despertar a reflexão como elemento de aperfeiçoamento, permitindo que o professor assuma o papel de protagonista de sua trajetória profissional. Através da formação que vivenciaram com os professores refletiu-se os anseios no que diz respeito a disseminação do uso reflexivo das tecnologias. Por meio da colaboração, os professores passaram a ver no grupo a possibilidade de transformar as suas práticas, rompendo barreiras do isolamento e visualizando o potencial do coletivo, do compartilhamento e principalmente ir em busca de crescimento e renovação.

No estudo "*A formação continuada de professores de matemática: uma inserção tecnológica da plataforma Khan Academy na prática docente*" de autoria de Menegais (2015), o foco está na inserção das TIC e na inclusão dos laptops, o que gerou a necessidade de uma formação continuada de professores como uma das ações políticas públicas em educação. Deste modo o estudo teve como objetivo de analisar como professores de Matemática da educação básica podem aprimorar sua prática docente, levando em consideração a realidade, o conhecimento do estudante na cultura digital com o desenvolvimento da inteligência e do raciocínio.

Os encontros foram destinados as discussões coletivas e momentos de relatos sobre as implicações das tecnologias no ambiente escolar, assim como oficinas práticas para buscarem o contato com a plataforma Khan Academy (a plataforma oferece exercícios, vídeos educativos e um painel de aprendizado personalizado que habilitando os alunos a estudarem no seu próprio ritmo, em sala de aula ou em casa). Nas conclusões o autor pontua que as professoras tomaram consciência da integração das tecnologias como recursos pedagógicos de qualidade no contexto educacional e "[...] puderam reconhecer os meios que empregavam nas interações entre elas e os alunos, os motivos de suas escolhas ou das modificações usadas nas ações" (Menegais, 2015). O pesquisador reforça a necessidade de oferecer cursos de formação continuada que abordem o uso das TIC dentro da realidade dos contextos escolares.

Já Diogo (2016), em sua pesquisa intitulada, “*Formação continuada de professores e a apropriação das TIC: o percurso de uma intervenção formativa*”, realizada com oito professores do último ano do Ensino Fundamental (EF), propôs desenvolver e analisar ações que apropriassem os conhecimentos sobre as TIC e seu uso como instrumento da atividade docente, por professores de Ciências e Matemática do nono ano do EF.

Para a realização da pesquisa o autor se aproximou da tendência crítico-dialética de investigação com base na Teoria de Leontiev e nos desdobramentos de Egeström. Segundo Diogo (2016), em seus pressupostos a teoria da atividade humana explica o desenvolvimento do psiquismo humano e da consciência a partir das atividades que o homem realiza para se relacionar como mundo. O pesquisador, concluiu através dos resultados obtidos que “uma formação continuada de caráter aberto é capaz de favorecer as apropriações de conhecimentos sobre o uso das TIC, mas também sugere diferentes possibilidades de pesquisas futuras (p. 179)”.

A quinta pesquisa a compor este estudo, intitulada “*Potencialidades didáticas e pedagógicas do Facebook com uma comunidade de prática virtual para a formação continuada de professores de matemática*” de autoria de Oliveira (2018), teve como objetivo investigar as inter-relações existentes entre as potencialidades didáticas e pedagógicas do Facebook e os momentos formativos na perspectiva de uma comunidade de prática virtual com a participação de dez professores do EF e EM.

Para Oliveira (2018), os procedimentos e a metodologia aplicada permitiram analisar as inter-relações existentes, a “reificação” da prática dos professores, negociações de significados e os compartilhamentos de experiências e informações de aprendizagem sobre a prática docente no processo de formação de professores de Matemática e a possibilidade de desenvolver no Facebook um processo de ensino e aprendizagem de forma interativa.

Luiz (2018), se integra a este estudo, ao desenvolver uma pesquisa denominada “*Formação continuada de professores para o uso de tecnologia digital da informação (TDIC) e comunicação baseada na teoria do mobile learning para o ensino de matemática”* que analisa as características de uma ação pedagógica inovadora que possivelmente podem surgir ou se desenvolver quando o professor passa a ser capaz de criar e aplicar projetos de ensino para 63 professores através da rede pública no modelo semipresencial utilizando a plataforma Moodle.

Para Luiz (2018) os pontos positivos de sua investigação foram a aproximação entre a academia e a escola pública, a aprendizagem de alguns professores sobre o uso das TDIC na educação e os novos repertórios de estratégias de ensino que foram marcados por características de uma ação pedagógica inovadora. Já os pontos negativos versam sobre a necessidade de reflexões e a adaptações para futuras edições do curso, principalmente pela desistência dos professores.

Por fim, o estudo “Formação continuada de professores com uso de tecnologias digitais: produção de atividades de conteúdos matemáticos a partir do currículo paulista” de autoria de Chinellato (2019), relata quais as perspectivas que os professores têm quando participam de uma formação continuada com tecnologias e elaboram atividade utilizando o software GeoGebra.

Para o pesquisador os cursos de formação continuada devem ser feitos com os professores, e não para os professores.

A importância de ressaltar isso, deve-se ao fato de que as atividades realizadas durante o curso vieram da demanda de sala de aula dos docentes. Assim os cursistas puderam sugerir e elaborar atividades a serem trabalhadas no computador e com o GeoGebra, para isso acontecer segundo Chinellato (2019), é preciso que o formador faça parte do processo e que tenha vivências e experiências nas temáticas, é necessário também que antes das formações continuadas busquem conhecer o ambiente educacional do professor, isto é, os laboratórios de informática nas escolas ou recursos tecnológicos.

Considerações finais

Nesta comunicação buscamos apresentar o resultado de um levantamento bibliográfico realizado sobre a formação continuada de professores de Matemática nos anos finais do ensino fundamental a partir o uso das tecnologias de informação e comunicação.

Para os trabalhos selecionados e analisados evidenciam a necessidade de desenvolver formações continuadas para os professores de Ensino Fundamental de Matemática, proporcionando a construção de atividades didáticas diferenciadas para alicerçar a prática pedagógica deste professor, de modo que eles possam desenvolver planejamentos e estratégias, para o desenvolvimento do aluno.

Nesse sentido, escrever sobre desafios docentes, formação de professor e tecnologias da informação e comunicação são, ao mesmo tempo, uma reflexão de conflitos, crenças e utopias. Para Saviani (2016, p.63) cabe considerar que se a "educação, pertencendo ao âmbito da produção não material, tem a ver com ideias, conceitos, valores, símbolos, hábitos, atitudes, habilidades". Com isso, exercer uma prática pedagógica que conduza uma aprendizagem satisfatória de Matemática, a reflexão de seus métodos e estratégias é necessária. Para Ponte (1998) na formação do professor há que atender não só ao que ele tem de saber, mas também ao que é capaz de fazer e aos valores que assume na sua prática profissional.

Bibliografia e referência

Bennemann, Marcio (2013). *Formação Continuada de Professores de Matemática com o Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação na Perspectiva da Educação Matemática Crítica* [Tese de Doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo]. Banco de teses e dissertações da CAPES. https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1082077

Chinellato Tiago Giorgetti (2019). *Formação continuada de professores com uso de tecnologias digitais: produção de atividades de conteúdos matemáticos a partir do currículo paulista* [Tese Doutorado Universidade Estadual Paulista] Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UNESP. http://hdl.handle.net/11449/191183

Diogo, Rodrigo Claudino (2016). *Formação continuada de professores e a apropriação das tecnologias de informação: o percurso de uma intervenção formativa* [Tese Doutorado Universidade Mato Grosso do Sul]. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações UFMS. https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3008

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6ª ed. São Paulo: Atlas.

Luiz, Learcino dos Santos (2018). *Formação continuada de professores para o uso de tecnologia digital da informação e comunicação baseada na teoria do mobile learning para o ensino de matemática*. [Tese Doutorado Universidade Federal do Paraná]. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFPR. https://hdl.handle.net/1884/59471

Menegais, Denise Aparecida Fontana Nisxota (2015). *A formação continuada de professores de matemática: uma inserção tecnológica da plataforma Khan Academy na prática docente*. [Tese Doutorado, Universidade Federal Rio Grande do Sul, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações UFRGS. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/122036

Moran J.M; Masetto, M.T.; Behrens, M.A. (2013). *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 21º ed. Campinas: Papirus.

Oliveira, Maria Angela Oliveira de (2018). *Potencialidades didáticas e pedagógicas do facebook com uma comunidade de prática virtual para a formação continuada de professores de matemática.* [Tese Doutorado, Universidade Estadual Paulista]. Biblioteca Digital de Teses e dissertações da UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154916

Ponte, J. P. (1998). *Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98, realizado em Guimarães*. Publicado In Actas do ProfMat 98 (pp. 27-44). Lisboa: APM. https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/1710

Sanavria, Claudio Zarate (2014). *Formação continuada de professores de matemática com enfoque colaborativo: contribuições para o uso reflexivo dos recursos da Web 2.0 na prática pedagógica* [Tese Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente]. Biblioteca Digital de Teses e dissertações da UNESP. https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/123934/000831573.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Saviani, D. *Educação escolar, currículo e sociedade*: o problema da Base Nacional Comum Curricular. Movimento-Revista de Educação, (4). 2016. https://doi.org/10.22409/mov.v0i4.296

Schnetzler, Roseli Pacheco. ROSA, Maria Inês de Freitas Petrucci dos Santos; *A investigação ação na formação continuada de professores de ciências*. Ciência e Educação, v. 9, n. 1, p. 27-39, 2003. http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v9n1/03.pdf.

Formas normativas de razonamiento que soportan el progreso matemático en una comunidad de aula en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas

Jorge **Rada-Olivero**
Cimate-UAGro. Universidad Autónoma de Guerrero
México
jarmadorada@gmail.comm
Guadalupe **Cabañas-Sánchez**
Cimate-UAGro. Universidad Autónoma de Guerrero
gcabanas@uagro.mx

Resumen

Documentamos formas normativas de razonamiento que soportan el progreso matemático en una comunidad de aula de nivel superior, desde lo colectivo. Se estudian a partir de una situación semirreal, cuya interpretación y explicación favorece el uso de la ecuación lineal diofántica, al implicar el uso de números enteros positivos en su explicación. El análisis de los datos empíricos se apoyó de un enfoque analítico que utilizó el modelo de argumentación de Toulmin y dos criterios para identificarlas. Los resultados corresponden a dos formas normativas de razonamiento que soportan el progreso matemático colectivo: 1) lenguaje algebraico y 2) ecuación lineal, ambas cumplen el criterio 2, entendido como uno de los dos criterios necesarios en el modelo argumentativo para dar cuenta de la evolución del razonamiento matemático y aparecen al interpretar la situación semirreal.

Palabras clave: Razonamiento matemático; Formas normativas de razonamiento; Ecuaciones lineales diofánticas; perspectiva Sociocultural; Modelo Argumentativo de Toulmin.

Introducción

El contexto del estudio es el razonamiento matemático, que como proceso del pensamiento es fundamental para comprender y hacer matemáticas (Kaplan et al., 2020). En educación matemática, hay una fuerte demanda en la investigación asociada al razonamiento matemático de los estudiantes en las aulas de clases (Cetina-Vázquez, 2019), ya que contribuye en evidenciar conexiones entre ideas, representaciones y contextos, asi como de argumentaciones y justificaciones (Wawro, 2011) que movilizan al resolver problemas o situaciones matemáticas diversas. El razonamiento matemático ha sido objeto de estudio desde diferentes enfoques y marcos teóricos (e.g., Cetina-Vázquez et al., 2019; Conner et al., 2014; Kaplan, et al., 2020). Desde una perspectiva sociocultural, se ha estudiado a partir de las interacciones que tienen lugar en el salón de clases de matemáticas (e.g., Cetina-Vázquez et al., 2019; Stephan y Rasmussen, 2002) y se analiza desde lo individual y/o lo colectivo. Este tipo de investigaciones contribuyen a estudiar el progreso matemático en los estudiantes durante el tratamiento de determinado concepto matemático. Se explica con base en las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución de ese progreso. Es en ese ámbito que se ubica la presente investigación, en particular, interesa comprender y caracterizar las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de educación superior, al interpretar y explicar una situación semirreal, en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas. En este sentido, la pregunta que orienta el estudio, es: ¿Qué formas normativas de razonamiento implican la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de educación superior al interpretar y explicar una situación semirreal, en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas? Para dar respuesta a la pregunta planteada, se ha trazado el siguiente objetivo, caracterizar las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de educación superior, al interpretar y explicar una situación semirreal, en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas

Marco conceptual

Razonamiento matemático

El razonamiento matemático se entiende en el sentido de English (2004, en Kaplan et al., 2020, p. 2), en términos de habilidades como "reunir evidencia, analizar datos, establecer conjeturas, construir argumentos, sacar y validar conclusiones lógicas y probar afirmaciones".

Formas normativas de razonamiento

Nos basamos en la perspectiva sociocultural de Cobb y Yackel (1996), quienes establecen dos constructos teóricos para analizar desde lo colectivo el razonamiento matemático. En esta investigación se analizan las formas normativas de razonamiento en estudiantes de educación superior que surgen cuando uno o más individuos resuelven problemas, explican su pensamiento, representan sus ideas, etc.

Por normativo entendemos [...] que una idea o forma de razonar funciona como si fuera una verdad matemática en el aula. “Esto significa que determinadas ideas o formas de razonamiento funcionan en el discurso del o los individuos” (Rasmussen et al., 2015, p. 262):

Aspectos metodológicos

Es una investigación de tipo cualitativa con carácter interpretativo (Erikson, 2012) en el que interesa comprender a profundidad las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de educación superior al interpretar y explicar una situación semirreal, en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas.

Participantes y contexto

Participaron cinco estudiantes matriculados en un posgrado en matemática educativa. Se involucraron en el estudio durante un curso de Didáctica de la Matemática, en el que se les desafió a interpretar y explicar una situación considerada como semirreal, en el sentido de Skovsmose (2000), en la que se requirió del uso del concepto de una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ y sus propiedades. La situación se planteó en un ambiente de papel y lápiz. La resolvieron en dos momentos, individual y grupal. La situación:

"A la señora encargada de la cafetería la contrataron para que elabore una comida para 122 personas. Le pusieron como requisito que, al momento de servir acomodará a los comensales de manera que en las mesas no queden lugares vacíos. En el negocio en que va a alquilar el mobiliario le dijeron que solo cuentan con mesas con cupo para 6 o para 8 personas" (Cabañas-Sánchez, 2021, p. 30; Vargas, et al., 2013, p. 267).

Análisis de las formas normativas de razonamiento

Para documentar las formas normativas de razonamiento, se reconstruyó y analizó la argumentación de los estudiantes, a través de las producciones escritas y verbales. La reconstrucción de la argumentación se sustenta de la adaptación del modelo argumentativo de Toulmin, reportada en Rasmussen et al. (2015).

Modelo argumentativo de Toulmin

El modelo argumentativo de Toulmin (Figura 1) se constituye de seis elementos: Datos (D), Aserción (A), Garantía (G), Soporte (S), Cualificador Modal (CM) y Reserva (R). La adaptación en Rasmussen et al. (2015) consistió en considerar a la conclusión (C) en lugar de Aserción.

En el estudio, este modelo es utilizado para analizar la estructura de la argumentación suscitada por el argumentador y las ideas expresadas en la argumentación y hacer un seguimiento de cómo funcionan estas ideas en su discurso, con el fin de reconocer aquellas que se convierten en parte de las formas normativas de razonamiento al resolver un problema en el contexto de las ecuaciones lineales diofánticas.

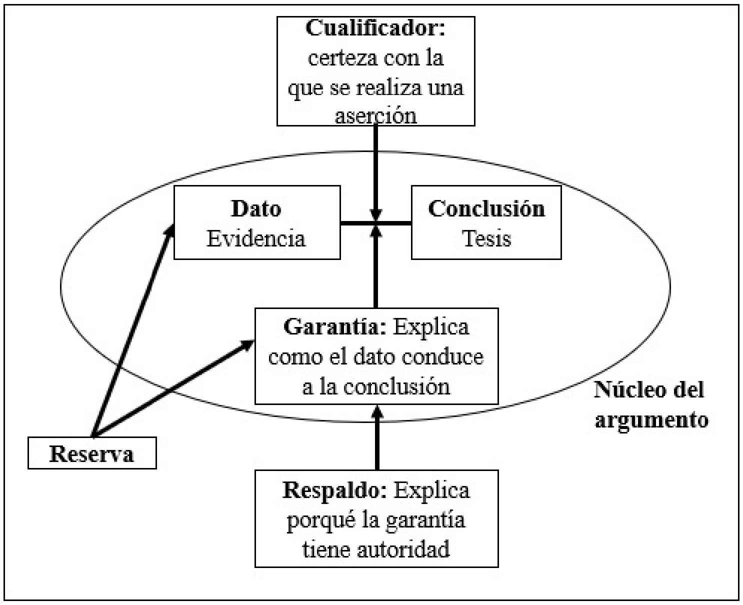


Figura 1. Modelo argumentativo de Toulmin. Adaptado de Rasmussen et al. (2015, p.263).

Son dos los criterios utilizados para determinar cuándo una forma de razonamiento se constituye en normativa (Rasmussen, 2015):

Criterio 1 (C1): Los respaldos y/o garantías para una conclusión en particular ya no aparecen en las explicaciones y, por lo tanto, la idea matemática expresada en el núcleo del argumento es evidente por sí misma, o

Criterio 2 (C2): Cualquiera de las cuatro partes de un argumento (dato, garantía, conclusión, respaldo) cambian de posición (es decir, de función) dentro de los argumentos subsiguientes y no son cuestionadas.

Resultados

El estudio de las formas normativas de razonamiento toma como base la reconstrucción de la argumentación presentada por los estudiantes tanto en el proceso de resolución escrita como verbal. El modelo argumentativo de Toulmin y los dos criterios establecidos en Rasmussen et al. (2015), fueron fundamentales en su identificación y caracterización. El análisis de los datos se ha ubicado al momento, en la interpretación de la situación semirreal. En ese contexto, se han caracterizado dos formas normativas de razonamiento (véase Tabla 1), que dan cuenta de cómo los estudiantes interpretan la situación.

Un ejemplo de ello se da en la elección del método de solución, donde por iniciativa de un estudiante se sugiere el uso de ecuaciones diofánticas, esta sugerencia se toma y pasa a normar en la clase: E1 (Estudiante): “Creo que el problema puede resolverse usando ecuaciones diofánticas”. (Estudiante 1, comunicación personal, 30 de abril de 2022). A partir de ahí empieza a analizarse el problema con base en este tipo de ecuaciones y sus propiedades.

Tabla 1
Formas normativas de razonamiento matemático

Formas normativas de razonamiento	Criterios
Lenguaje algebraico	C2
Ecuación lineal	C2

Nota. Elaboración propia desde los datos.

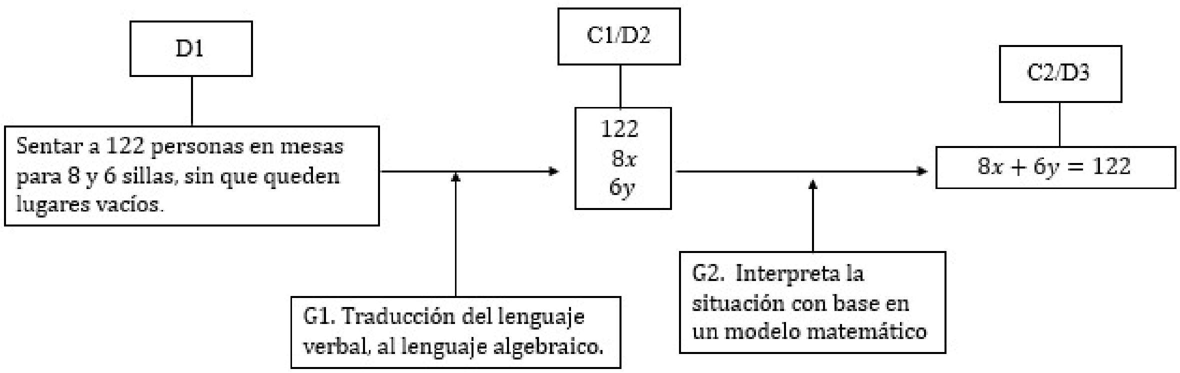


*Figura 2***.** Reconstrucción de la argumentación.

Un ejemplo de cómo se cumple uno de estos criterios para identificar y caracterizar las formas normativas de razonamiento basadas en el marco interpretativo de Cobb y Yackel (1996), se muestra en la figura 2, en la que se observa cómo una conclusión (C) cambia de posición, en este caso, se convertirse en un dato (D), durante el proceso argumentativo de los estudiantes, mientras desarrollan la solución del problema al resolverlo en el contexto de las ecuaciones lineales diofánticas. En este sentido, se cumple el criterio 2 en el que la conclusión cambia de posición (a dato), constituyéndose así, en una forma normativas de razonamiento. En la figura 2, se representa como: C1/D2.

Reflexiones

La reconstrucción de la argumentación que contribuyó a identificar las dos formas normativas de razonamiento en los avances que se reportan, requirió de tres de los seis elementos del modelo argumentativo de Toulmin, el dato, la conclusión y la garantía. Estos elementos, corresponden al núcleo de un argumento en el modelo. Identificar y caracterizar las formas normativas de razonamiento matemático, que los estudiantes evidencien al interpretar y explicar la situación semirreal de esta investigación, desde la perspectiva sociocultural, contribuirá, además, en caracterizar las prácticas matemáticas articuladas en ese proceso.

Referencias y bibliografía

Cabañas-Sánchez, G. (2021). Aprendizaje dialógico en Matemáticas. Los actos dialógicos en el proceso. *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas 94*, 28-33.

Cetina-Vázquez, M. (2019). Prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en el marco del pensamiento funcional en un aula de clases de primaria. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cetina-Vazquez, M., Cabanas-Sanchez, G., y Sosa-Moguel, L. (2019). Collective mathematical progress in an introductory calculus course during the treatment of the quadratic function. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *7*(2), 155-169. DOI:10.18404/ijemst.552427

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4)*,* 175–190. DOI: 10.5951/jresematheduc.27.4.0458

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 401–429, doi:10.1080/10986065.2014.921131

Erickson, F. (2012). Qualitative research methods for science education. En B. J. Fraser *et al*. (eds.), *Second International Handbook of Science Education*. (pp. 1451–1469). Springer. DOI:10.1007/978-1-4020-9041-7_93

Kaplan, H. A., Gulkilik, H., y Emul, N. (2020). Role of formal constraints in reasoning: an approach through 2D Euclidean geometry in undergraduate mathematics. *Internation al Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52* (3), 1–18. https://doi:10.1080/0020739X.2020.1738578

Rasmussen, C., Wawro, M., y Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 259-281.

Skovsmose, O. (2000): Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6*(1), pp. 3–26

Stephan, M., y Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 21* (2), 459–490.

Vargas, A.; Cabañas-Sánchez, G.; Meza, E. (2013): Una situación de modelación de lo lineal. *Memoria de la XVI Escuela de Invierno de Matemática Educativ*a, pp. 266-272.

Wawro, M.J. (2011). *Individual and collective analyses of the genesis of student reasoning regarding the invertible matrix theorem in linear algebra* (Tesis doctoral inédita). Universidad de California, San Diego.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Heurísticas y sesgos de probabilidad que presentan estudiantes con trastorno del espectro autista

Bernabé **Solís** de la Rosa
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila
México
bernabesolisdelarosa@gmail.com
Irene **Polo** Blanco
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria
España
Irene.polo@unican.es

Resumen

Este trabajo se desarrolla en el campo de la Educación Estocástica, específicamente en el ámbito de la probabilidad frecuencial. Se realizó un estudio exploratorio con tres alumnos diagnosticados con trastorno del espectro autista (TEA) de 11, 12 y 17 años de edad. Se aplicó un cuestionario que tiene como objetivo evaluar el pensamiento probabilístico de alumnado con TEA (Sabariego et al., 2021). En este trabajo se analizan las respuestas a una de las preguntas del cuestionario sobre lanzamiento de monedas. Los resultados muestran que los tres los escolares presentaron en sus argumentos sesgos asociados con la heurística de la representatividad y sesgos deterministas. En particular los tres evidenciaron la falsa creencia de que un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto período (falacia del jugador) (Serrano et al., 1998).

Palabras clave: Educación Matemática; Educación; Evaluación, Educación para población con necesidades especiales, Resolución de problemas; probabilidad, España, México.

Introducción

El trastorno del espectro autista (TEA) es un trastorno neurobiológico del desarrollo que se manifiesta durante los primeros años de vida y dura toda la vida. Las principales características son: deficiencias persistentes en la comunicación y las interacciones sociales y los patrones restrictivos y repetitivos de comportamiento, intereses o actividades (Asociación Americana de Psiquiatría [APA], 2013).

En los últimos años, se ha incrementado la prevalencia del colectivo en los entornos educativos, por tal motivo, es necesario proporcionar a este alumnado una atención educativa inclusiva de calidad que posibilite su presencia, participación y aprendizaje en las aulas ordinarias y que, además, valore sus diferencias como fuente de enriquecimiento (López, Vidal y López, 2022).

Específicamente, en el área de matemáticas, Goñi et al (2022) muestran en sus resultados la necesidad de buscar estrategias metodológicas que les ayuden a superar las dificultades en matemáticas del alumnado con TEA. García-Moya et al. (2022), por ejemplo, evidencia las dificultades para resolver problemas matemáticos de palabras en producto cartesiano.

López y Ojeda (2012) realizaron un estudio en el que plantearon preguntas relativas al enfoque frecuencial de la probabilidad a seis niños (13 a 15 años) de sexto grado con diversas afecciones (síndrome de Down, retraso mental y autismo). En dicho estudio, se destaca la necesidad de aplicar actividades donde se planteen diversas situaciones aleatorias para obtener datos respecto a la idea de probabilidad frecuencial que tienen los estudiantes.

Aunado a la idea anterior, Vásquez (2020) señala que es importante desarrollar desde temprana edad en los alumnos, el pensamiento estocástico, mediante cuestiones relacionadas con la incertidumbre y el riesgo del mundo real que los lleve a una toma de decisiones a conciencia para crear un mundo más sostenible.

Sabariego et al. (2021) diseñaron, validaron y construyeron un cuestionario que permite identificar creencias, fortalezas y debilidades que tiene el colectivo TEA respecto a conceptos probabilísticos, así como conocer los términos y expresiones probabilísticas que emplean en contextos probabilísticos cotidianos.

Con lo anterior, el propósito de este trabajo es observar el razonamiento probabilístico del estudiantado con TEA, mediante una actividad que requiera poner en práctica sus argumentos sobre la probabilidad en el experimento del lanzamiento de una moneda.

Marco Teórico

Uno de los principales intereses en el enfoque frecuencial, es identificar los sesgos que pueden cometer los escolares, al enfrentarse a un problema de razonamiento probabilístico. los tres principales son: heurística de la representatividad, sesgo de equiprobabilidad y el enfoque en el resultado aislado (Serrano et al., 1998).

Entenderemos por sesgo a la tendencia errónea del escolar que se manifiesta cuando se interpretan los datos (por ejemplo, cuando se piensa que una secuencia que no siga un patrón determinado de caras y cruces en el lanzamiento de una moneda es más probable que otra que alterne caras y cruces), y heurística a los procesos cognitivos que se utilizan para reducir la complejidad de un problema durante el proceso de resolución (Batanero et al., 1994)

Para fines del presente estudio, se detallará la heurística de la representatividad, el cual consiste en evaluar la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto de la población de la que proviene. Entre los sesgos más comunes, que surgen de la utilización de esta heurística son: la insensibilidad al tamaño de la muestra y las concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias.

La insensibilidad al tamaño de la muestra se produce cuando se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, afirmando la convergencia de los valores de los estadísticos en un tamaño relativamente pequeño de la muestra, dicho fenómeno también se conoce como creencia en la ley de los pequeños números (Serrano et al., 1998; Batanero et al. 1994).

Las concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias, cuyo error mayormente cometido se denomina como falacias del jugador. Bersabé (1995) describe dos tipos; la falacia del jugador tipo I, esto es, la creencia de que la probabilidad de un suceso futuro aumenta, cuanto mayor es la racha favorable anterior del suceso contrario y la falacia del jugador tipo II, esto es, la creencia de que se puede detectar un suceso favorable basándose en la simulación del experimento donde había una racha favorable de ese mismo suceso.

Metodología

El tipo de investigación cualitativa que se llevará a cabo es mediante el estudio de caso. La muestra estuvo conformada por tres estudiantes con TEA, con edades de 11, 12 y 17 años, los cuáles, a partir de ahora se nombrarán por el pseudónimo A, B y C respectivamente. A y B cursaban sexto grado de educación primaria y C estaba matriculado en educación especial. Los tres pertenecen a la provincia de Cantabria, España. La siguiente tabla muestra el coeficiente intelectual (CI) medida con la escala Wechsler de inteligencia para niños (WISC-IV),

Tabla 1
CI de los participantes del estudio

Escolar	CI (WISC-IV)
A	93
B	104
C	62

Fuente: Elaboración propia

Se analiza una pregunta del cuestionario diseñado, construido y validado por Sabariego et al. (2021) el cual es un instrumento que evalúa las intuiciones probabilísticas primarias en estudiantes con TEA. Dicho cuestionario está concebido para ser realizado en formato oral. A continuación, se muestra el ítem cinco junto con las indicaciones del protocolo, cuyo contenido es la comprensión de la idea de independencia en la repetición de un experimento (propiedad de pérdida de la memoria).

> El entrevistador, sacará una moneda y le dirá al estudiante: Al lanzar una moneda al aire, ¿Qué puede salir? si el estudiante no contesta, se le dará una moneda para que la examine

> y la lance y así compruebe que puede salir cara o cruz. Si el estudiante no conoce la respuesta se le enseñarán varias monedas y se le explicará qué son la cara y la cruz de cualquier moneda, también se le pedirá que lance una de ellas, y que compruebe que pueda salir cara o cruz. Luego se le dirá: imagínate que lanzas al aire una moneda cinco veces y que te sale las cinco veces cara, ¿qué piensas que saldrá cara o cruz? ¿por qué?

Como se puede observar, el ítem evalúa si el estudiantado usa la heurística de la representatividad en sus juicios al obtener sobre la probabilidad de obtener diferentes secuencias en el lanzamiento de una moneda.

Resultados

Los estudiantes B y C muestran con sus respuestas, conocimiento respecto a el espacio muestral del experimento aleatorio del lanzamiento de una moneda. El estudiante A, requirió de apoyo por parte del evaluador para conocer el espacio muestral. En general, los tres escolares evaluados presentan el mismo razonamiento probabilístico, cometiendo concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias. El error que se puede observar con una frecuencia del 100% es la falacia del jugador.

El estudiante A, por ejemplo, luego de que el evaluador le explicó el experimento, en el cual, aparecen cinco caras contestó que el resultado sería ahora una cruz.

> A: Pues… yo entiend… lo de lo contrario… Yo creería que igual el número ya.
> Evaluador: Igual el número. ¿Por qué?
> A: Porque como ya han salido 5 veces la cara y ya son… bastantes ¿no?... unas cuantas veces… pues ya la sexta… ya diría que… igual cambia la cosa.

Se puede observar en la frase “igual cambia la cosa” que, en efecto, el estudiante considera que luego de una racha de caras, lo más probable es que ahora salga cruz.

El estudiante B, justifica su respuesta en primera estancia, de manera determinista, pues solo expresa verbalmente que saldrá cruz.

> Evaluador: La lanzas y sale cara, la lanzas y sale cara, así cinco veces. Si la tiras otra vez, ¿qué piensas que saldrá?
> B: Aaah, cara
> Evaluador: Vale, ¿por qué?
> B: Porque seguro que la lanzo y la estoy haciendo en la posición de la cara…
> Más adelante de la conversación y con la finalidad de discernir su respuesta, se le vuelve a explicar la situación, lo que permitió, considerar, que su razonamiento muestra el error de la falacia del jugador tipo I.
> Evaluador: Tú imagínate que yo la tiro, sin mirar y sin hacer ningún truco. Yo la tiro y sale
> B: Cruz
> Evaluador: Cara y la tiro y sale cara, así cinco veces seguidas. Y la tiro y sale cara y la tiro…

B: Es imposible que salga cinco veces
Evaluador: Bueno yo tengo…
B: Yo he probado un millón de veces
Evaluador: Bueno imagínate que pasa y luego la tiro otra vez
B: Cruz
Evaluador: ¿Por qué?
B: Porque estoy seguro de que es cruz
Evaluador: Bueno imagínate que pasa y luego la tiro otra vez
B: Cruz
Evaluador: ¿Por qué?
B: Porque estoy seguro de que es cruz
Evaluador: ¿Por qué?
B: Porque después de cinco veces, saldrá cruz y después cara
Evaluador: Vale, ¿seguro, seguro?
Finalmente, el escolar C, muestra el error de la falacia del jugador, sin embargo, su argumento puede indicar también otro tipo de sesgo, el cual toma en cuenta su experiencia personal
Evaluador: La lanzas y sale cara, la lanzas y sale cara, así cinco veces. Si la tiras otra vez, ¿qué piensas que saldrá?
C: Cara cara cara…. Pues supongo que será cruz, que siempre me ha pasado eso.
Evaluador: Vale, ¿por qué?
C: porque siempre que sale una cosa muy repetida, digo cara cara cara… pues entonces ahora también cara, y no, sale cruz [hace gesto de fastidio]
Evaluador: Entonces si sale 5 veces cara piensas que si la tiramos otra vez saldrá...
C: Cruz
Evaluador: ¿Por qué?
C: [Repite el mismo argumento]

Conclusiones

Se pudieron distinguir básicamente un tipo de sesgo, el cual corresponde a la falacia del jugador del tipo 1, no obstante, se presentan argumentos que pueden indicar un sesgo determinista, o un sesgo asociado a la experiencia de cada estudiante.
Se concluye discutiendo la importancia de crear recursos educativos adaptados a alumnado con TEA que permitan efectuar simulaciones de experimentos aleatorios y reflexionar puntualmente en que las rachas favorables de un evento al azar no determinan la ocurrencia del siguiente resultado.

Agradecimientos

A Irene Polo-Blanco, Melody García-Moya y Pilar Sabarriego por las transcripciones de las entrevistas y a Juncal Goñi-Cervera por la evaluación en formato oral de la aplicación del cuestionamiento.

Referencias y bibliografía

American Psychiatric Association. (2013). Diagnostic and Statistical Manual of Mental

Disorders (DSM-5). American Psychiatric Association.

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Bersabé, R. (1995). Sesgos cognitivos en los juegos de azar: La ilusión de control. *Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones*.

García-Moya, M., Polo-Blanco, I., Blanco, R. y Goñi-Cervera, J. (2022). Teaching Cartesian Product Problem Solving to Students With Autism Spectrum Disorder Using a Conceptual Model-Based Approach. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 108835762211218. https://doi.org/10.1177/10883576221121806

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., & Bruno, A. (2022). El papel del lenguaje y del contexto en la resolución de problemas en alumnado con trastorno del espectro autista. *Formación del Profesorado en Educación Matemática. 14*, 71-85.

López, J. M.; Ojeda, A. M. (2012). La probabilidad en educación especial: experiencia en el sexto grado. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 395-404). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Sabariego, P., Polo-Blanco, I., García-Moya, M. y Goñi-Cervera, J. (2021). Diseño, construcción y validación de un cuestionario para evaluar el pensamiento probabilístico en alumnado con trastorno del espectro autista. En A. Vico, L. Vega y O. Buzón (Eds) *Entornos Virtuales para la Educación en Tiempos de Pandemia: Perspectivas Metodológicas* (pp. 438-468). Dykinson. ISBN 978-84-1377-640-8.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(1), 7-25.

Vásquez Ortiz, C. (2020). Educación Estocástica en el aula escolar: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad., 3(2), 1-20. ISSN: 2603-9982

Independência de eventos na avaliação de jogo (in)justo: quais compreensões possuem crianças e adultos?

Rita **Batista**
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Brasil
rica.basil@gmail.com

Resumo

A pesquisa objetivou analisar compreensões de crianças e adultos acerca de justiça em jogos, considerando três demandas cognitivas da probabilidade: aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades. O recorte apresentado neste texto está focado na aleatoriedade, e, especificamente, na independência de eventos. O estudo foi realizado com 15 crianças (5º ano) e 15 adultos da Educação de Jovens e Adultos por meio de uma entrevista clínica audiogravada, em que os participantes tiveram que analisar jogos e avaliar se eram justos ou não. Ao avaliar o jogo da Loto, que apresentava cartelas com números sequenciados e não sequenciados, a maioria dos participantes (26) apresentou argumentos equivocados, demonstrando fragilidade de compreensão em sequências aleatórias e em independência de eventos. Os resultados apontaram ainda que, apenas a idade não amplia o entendimento acerca de elementos da probabilidade, uma vez que as compreensões apresentadas pelos adultos foram similares às apresentadas pelas crianças.

Palavras-chave: Probabilidade; Aleatoriedade; Independência de eventos; Crianças e adultos; Justiça em jogos.

Introdução

A importância do ensino da probabilidade tem sido evidenciada em diversos estudos e defendida por vários pesquisadores como Bryant e Nunes (2012), Borovcnik (2016), Batanero et al (2016), Gal (2004), entre outros. Os documentos oficiais que norteiam os currículos no Brasil, como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017) ampliou fortemente o trabalho pedagógico com temas probabilísticos que se inicia já com crianças de 6 anos de idade, mas as mudanças advindas dessas orientações ainda não foram observadas quando da finalização dessa pesquisa. Assim, os estudos continuam apontando fragilidade de compreensão relativa à probabilidade em diversos grupos, incluindo professores (Campos e Pietropaolo, 2013; Felisberto de Carvalho, 2017).

Fischbein (1987) defende que há conhecimentos de natureza probabilística que não se desenvolvem com o passar do tempo, ou seja, apenas com a maturidade, sem que haja intervenção por meio do ensino. Esse autor aponta que há conhecimentos intuitivos que permanecem sem evolução, se não forem intencionalmente desenvolvidos. Esses conhecimentos iniciais, que ele denomina de intuições primárias (ideias, crenças, conhecimentos que independem de instrução formal) podem evoluir, para o que ele chama de intuições secundárias que são compreensões mais elaboradas e formalmente aceitas conceitualmente.

A presente pesquisa, considerou as afirmativas de Fischbein (1987) para constatar (ou não) se havia diferenças de compreensões entre crianças e adultos acerca da independência de eventos, tomando como pano de fundo a análise de jogos justos e injustos. Assim, o recorte apresentado nesse texto, traz dados e reflexões sobre as compreensões dos participantes, quais sejam, crianças e adultos com nível de escolaridade semelhante sobre um importante elemento da probabilidade: a aleatoriedade.

Aportes teóricos

Os aportes teóricos que deram sustentação às análises dessa pesquisa, se consubstanciaram basicamente nas demandas cognitivas de Bryant e Nunes (2012) e nos construtos do pensamento probabilísticos de Tarr e Jones (1997) e Jones (2006), entre outros.

Para Bryant e Nunes (2012) a probabilidade é um conceito complexo e que para sua ampla compreensão é necessário o desenvolvimento de quatro demandas cognitivas: compreensão da aleatoriedade, formação e categorização do espaço amostral, comparação e quantificação de probabilidades e entendimento de correlações (relações entre eventos.

Nesse espaço, exploraremos mais detidamente a primeira demanda que é foco do estudo explorado. Assim, a aleatoriedade, segundo os autores, é uma parte importante da vida das pessoas, no entanto, a compreensão da natureza e consequências dessa demanda é sutil, uma vez que até adultos podem apresentar entendimento equivocado sobre o tema. Alguns elementos da aleatoriedade são mais difíceis de compreender do que outros, como é o caso da independência de eventos. Crianças e adultos costumam fazer um julgamento equivocado ao observar que ao sair quatro vezes a face 2 no lançamento de um dado, há uma maior probabilidade de sair a mesma face (erro de recência positiva) ou de sair outra (recência negativa), imputando equivocadamente uma influência (inexistente) de um ensaio sobre o outro. Os autores defendem ainda que a aleatoriedade é base indispensável para ser justo: embaralhar as cartas para garantir que todos os jogadores tenham a mesma chance de pegar um bom jogo, lançar uma moeda para decidir lado do campo num jogo de futebol, fazer sorteio das equipes de um campeonato, são situações aleatórias que garantem justiça na escolha.

Jones, Langrall, Thornton e Mogill, (1997) compuseram quatro construtos para identificar os níveis possíveis do pensamento probabilístico de uma pessoa. Os construtos considerados foram: espaço amostral, probabilidade de um evento, comparações de probabilidade e probabilidade condicional. Para cada um desses construtos, quatro níveis de pensamento, que refletem um continuum do raciocínio subjetivo ao numérico, foram estabelecidos. Em cada nível e nos quatro construtos, os descritores de aprendizado foram desenvolvidos e usados para gerar tarefas de probabilidade para a pesquisa realizada por eles.

Posteriormente, Jones (2006) realizou um refinamento no quadro do pensamento probabilístico (Jones et al, 1997), com foco na *independência de eventos* que serviu para analisar os dados do recorte apresentado nesse texto, em conformidade com a Tabela 1.

Tabela 1
Adequação do construto Probabilidade Condicional, considerando independência de eventos

Nível 1 Subjetivo	Nível 2 Transitório	Nível 3 Quantitativo informal	Nível 4 Numérico
- Considera que eventos consecutivos são sempre relacionados. - Possui crença difusa de que podem controlar o resultado de um evento. - Usa raciocínio subjetivo que impede qualquer foco significativo em independência. - Exibe confiança indevida na previsão de resultados	- Mostra algum reconhecimento sobre eventos consecutivos se estão relacionados, ou não. - Usa frequentemente uma estratégia de "representatividade", seja uma orientação de recência positiva ou negativa. - Reverte para o raciocínio subjetivo.	- Reconhece quando o resultado do primeiro evento influencia ou não o resultado do segundo evento. Em situações de reposição, vê o espaço amostral como restaurado. - Diferencia, embora imprecisamente, eventos independentes e dependentes em "com" e "sem" situações de reposição. - Reverte para a representatividade.	- Distingue eventos dependentes e independentes em situações de reposição e não-reposição, usando probabilidades numéricas para justificar seu raciocínio. - Observa os resultados de ensaios sucessivos, mas rejeita uma estratégia de representatividade. - Reluta ou recusa previsões de resultados quando os eventos são igualmente prováveis.

Nota. Jones (2006) (tradução nossa)

Metodología

O estudo foi realizado com 15 crianças do 5º ano, com média de idade de 11 anos e 15 adultos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), com escolarização equivalente às crianças e com idade entre 28 e 67 anos. Ambos os grupos pertenciam a escolas públicas do município do Cabo de Santo Agostinho, no estado de Pernambuco, Brasil, residentes em comunidade de baixo nível socioeconômico. Os participantes nunca tiveram ensino formal acerca da probabilidade, dessa forma, as compreensões apontadas por eles são de natureza intuitiva.

O estudo foi realizado por meio de entrevistas clínicas individuais que foram audiogravadas em aparelho smartphone. A entrevista clínica é baseada no método clínico piagetiano e, neste estudo, ele foi inspirado nas contribuições de Carraher (1998). Para esta autora, o método clínico possibilita refletir sobre as ações, respostas, escolhas e comportamento dos sujeitos sobre uma determinada situação proposta. É uma análise do raciocínio do sujeito.

O jogo da Loto, especificado a seguir, foi utilizado para observar as compreensões sobre aleatoriedade, com foco na independência de eventos. Foi apresentado aos participantes a seguinte situação:

Num jogo de "Loto", há bolas numeradas de 1 a 90. Serão sorteadas 6 bolas do saco. Veja as cartelas que os amigos receberam para participar do jogo. A cada bola sorteada, eles marcam o número correspondente na cartela. Ganhará quem completar mais rápido sua cartela. Veja as cartelas de algumas crianças (Figura 1).

PEDRO

16	18	20
24	26	28

FELIPE

44	12	27
32	6	53

ANA

1	2	3
4	5	6

Figura 1: Cartelas do jogo Loto. Elaboração própria.

Analise as cartelas das crianças e responda:

a) O jogo é justo para Pedro, Felipe e Ana? Justifique.
b) Se você respondeu que era injusto o que poderia ser feito para torná-lo justo?

Resultados

Para fins de análise, os participantes adultos foram identificados como A1, A2, A3...A15 e as crianças como C1, C2, C3...C15. As análises levaram em consideração, mais fortemente, as compreensões que envolvem demandas cognitivas da probabilidade propostas por Bryant e Nunes (2012) e os construtos do pensamento probabilístico propostos por Jones (2016) e Jones et al (1997).

Na Tabela 2 são mostrados os resultados das crianças e adultos quando indagados sobre o jogo da "Loto": se justo ou injusto. As respostas foram classificadas em corretas, parcialmente corretas ou incorretas.

Tabela 2:
Resultados da avaliação do Jogo da Loto, por crianças e adultos

Participantes	Respostas corretas	Parcialmente corretas	Respostas incorretas
Crianças	3	3	9
Adultos	1	2	11

Observação: um adulto não respondeu

Nota. Elaboração própria a partir dos dados da pesquisa (2021)

Apenas três crianças e um adulto foram capazes de julgar o jogo como justo e apresentar uma justificativa coerente para esse julgamento. Os participantes que julgaram corretamente o jogo como justo e que apresentaram justificativas coerentes, informaram que:

• *C3: "Pode ser, porque qualquer um pode ganhar. Qualquer um tem a mesma chance de ganhar. Pode ser na sorte".*

• *C5: "Sim. Porque é uma questão de sorte, né? Acho que todos têm a mesma chance de ganhar porque tem todos esses números aqui no saco, né?"*

• *A2: "É justo. Acho que qualquer um pode ganhar. O que eu pegar, se não servir para o Felipe pode servir para o Pedro. Tem que arriscar... um tem o outro não tem. Tirando a pedrinha qualquer um desses pode ganhar".*

Aparentemente estes participantes não foram influenciados pelas sequências (ordenadas ou não) nas cartelas, como os que consideraram o jogo injusto. Eles julgaram que, todos teriam as mesmas chances, ou seja, que qualquer um dos três jogadores poderia vencer, pois tinham iguais condições.

Algumas respostas foram consideradas parcialmente corretas, pois embora apontassem para alguma coerência, como por exemplo, algo que remetesse a regras, havia equívoco no julgamento final, como no caso de C8 que afirmou: "*Acho justo, porque os três estão com uma cartela. Felipe tem mais chances de ganhar que os outros porque tem os números' mais altos. Ana tem menos chance porque os números dela são muito baixos e muito dificilmente ela vai ganhar, não vai vir os números dela, porque eles são iniciais*". C8, corretamente, informou que era justo porque os três possuíam apenas uma cartela (regras), mas incorretamente julgou que há mais chance de saírem números mais altos".

A maioria dos participantes tomou como elemento central da avaliação da justiça no jogo a observância das sequências aleatórias, que, para muitos, não foi considerada equiprovável. Muitas pessoas têm dificuldades em avaliar uma sequência aleatória, em função da falta de compreensão acerca da independência de eventos (BRYANT e NUNES, 2012; Bennett, 2003). Essa falta de compreensão de que cada resultado de ensaio é aleatório e independente do anterior ou do posterior, faz não apenas as crianças, mas também adultos julgarem equivocadamente uma sequência aleatória, imaginando, por exemplo, que a cartela de Felipe (6, 12, 27, 32, 44, 53) por não ser sequenciada teria mais chances de vencer que a de Ana (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Os alunos (adultos e crianças) que julgaram o jogo injusto, em sua totalidade, acreditavam que as chances seriam diferentes. Ao todo, seis adultos e cinco crianças informaram que o jogo era injusto e apontaram justificativas em relação às chances diferentes dos jogadores, como observado nas justificativas a seguir:

- *C1: Não. O de Ana está 'seguido'. É injusto para ela porque os números dela é mais menor e o dos outros é mais maior. Felipe tem mais chances de ganhar porque tem os números maiores. É o mais fácil de ganhar porque o pequeno é mais difícil de sair.*

- *A1: Acho que não. Porque aqui tá em 'frequência'1e aqui não está em 'frequência'. Se fosse em frequência ia estar 16, 17, 18, 19, 20, 21. Os números aqui é maior, os daqui é mais baixo. Acho que não é justo não, porque jogaram mais pedra pequena pra Ana. Ela pode até ganhar. Se for numeração mais alta quem ganha aqui é Felipe. Todo jogo que acho que não sai número seguido frequente... não sai. Eles jogam no diferenciado. É muito raro sair assim por exemplo, 44, 45 e 46. Quando cai assim, só cai 2 números seguidos.*

Bryant e Nunes (2012) afirmam que a expectativa de irregularidade em uma sequência aleatória leva muitos adultos a se confundirem e considerarem uma determinada sequência sem um padrão específico como mais provável que outra sequência particular consecutiva, por exemplo. E nessa perspectiva, as crianças parecem se comportar da mesma forma que os adultos. Estes pesquisadores pontuaram a 'heurística da representatividade' em que as pessoas tendem a ver sequências inconsistentes e desordenadas como característica da aleatoriedade. No presente estudo também foram observados tais fatos.

Em conformidade com os níveis do pensamento probabilístico de Jones (2006) que trata do construto 'independência', o Nível 1, denominado Subjetivo, está relacionado às crianças que apresentaram predisposição para julgar os eventos consecutivos como sempre relacionados, e o Nível 2, considerado Transitório, mostra algum reconhecimento sobre eventos consecutivos. Os estudantes envolvidos apresentam compreensões típicas dos Níveis 1 e 2, verificado em justificativas como C2 que afirmou que ‘*os primeiros números são mais difíceis d*e pegar’. Neste argumento repousa uma compreensão de que os eventos estão relacionados. Pessoas com essa compreensão parecem não perceber a imparcialidade das leis do acaso (Bennett, 2003) ao estabelecerem alguma relação de dependência ou de alguma forma de ligação entre os ensaios.

Considerações Finais

O estudo enfatizou fragilidades de compreensão de crianças e também de adultos acerca de independência de eventos, por falta de entendimento de sequências aleatórias, confirmando estudos apontados por Bryant e Nunes (2012). Os adultos apresentaram compreensões semelhantes às crianças, sugerindo que a maturidades desses sujeitos não consolidou esses conhecimentos probabilísticos, como defende Fischbein (1987).

Enfatiza-se, portanto, a importância de ensinar elementos da probabilidade desde os anos iniciais do ensino fundamental, com a intenção de que conhecimentos mais elaborados sobre o tema se consolide para que os futuros cidadãos possam tomar decisões conscientes e pautados em dados reais.

Referências

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. & Sánchez, E (2016). Research on Teaching and Learning Probability, ICME 13 – Hamburg.

Bennett, D.J. (2003). Aleatoriedade. São Paulo: Martins Fontes. ISBN 85-336-1792-5

Brasil. Base Nacional Comum Curricular (2017) Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília, DF.

Bryant, P.& Nunes, T. (2012). Children’s understanding of probability: a literature review. Nuffield Foundation. ISBN: 978-0-904956-86-3 https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/NUFFIELD_FOUNDATION_CUoP_SUMMARY_REPORT.pdf

Borovcnik, M. (2016). Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.3, 1491-1516. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31495

Campos, T. M.& Pietropaolo, R. C. (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In R. Borba, & C. Monteiro (Orgs.), Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática, p. 55- 91. Recife: UFPE.

Carraher, T. N. (1998). O método Clínico usando os exames de Piaget. 5. Ed. São Paulo: Cortez.

Felisberto De Carvalho, J. I. (2017). Um estudo sobre os conhecimentos didáticos matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. 2017. 344f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/12168/1/JOS%C3%89%20IVANILDO%20FELISBERTO%20DE%20CARVALHO.pdf

Fischbein, E (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht: D. Reidel.

Gal, I (2004). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers. https://www.semanticscholar.org/paper/Exploring-Probability-in-School%3A-Challenges-for-and-Jones/a8418cc0b1794e067f0686a385ee3c35882d4874

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. & Mogill, T. A. (1997). Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. Educational Studies in Mathematics, Vol. 32, No. 2 Fev., p. 101-125. Springer. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/Bulletin_Jones.pdf

Jones, G. A (2006) The challenges of teaching probability in school. Queensland, Australia: Griffith University. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/Bulletin_Jones.pdf

Tarr, J.E., & Jones, G.A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. Mathematics Education Research Journal, 9(1), 39-59.

Internacionalização em Casa na Engenharia: percepções de docentes argentinos e brasileiros

Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Ana Maria Velloso **Nobre**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
anobre@pucsp.br
Marys Margarita **Arlettaz**
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones
Argentina
marysarlettaz@gmail.com
María Beatriz **Bouciguez**
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
boucigue@fio.unicen.edu.ar
Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br

Resumo

Neste artigo, apresentam-se percepções de oito docentes, quatro argentinos e quatro brasileiros, acerca de uma atividade de Internacionalização em Casa desenvolvida junto a vinte estudantes, sendo dez de duas instituições de ensino superior da Argentina e os outros dez de duas instituições do Brasil. Os dados analisados foram obtidos por meio da transcrição do registro audiovisual de parte do encontro final realizado durante a atividade, no qual os professores dialogaram acerca dos aspectos que, para eles, eram os mais importantes de serem ressaltados a respeito do que haviam experienciado ao longo dos outros encontros. As percepções analisadas dizem respeito ao uso de recursos tecnológicos durante a atividade, à diferença entre as questões propostas, ao modo de trabalhá-las durante a atividade e àqueles normalmente presentes em sala de aula e às dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Palavras-chave: Internacionalização em casa; Engenharia; Percepções docentes; uso de recursos tecnológicos; Dificuldades dos estudantes.

Introdução

Este artigo é fruto de um projeto de pesquisa, intitulado *A Internacionalização em Casa: uma possibilidade no Novo Normal*, em desenvolvimento no âmbito do *Programa de Incentivo à Internacionalização* (PIPRINT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo[1]. Participam quatro docentes pesquisadores das instituições brasileiras Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e Instituto Mauá de Tecnologia e outros quatro professores investigadores das instituições argentinas Faculdade de Engenharia da Universidad Nacional de Misiones e Faculdade de Engenharia da Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

O projeto foi proposto com o objetivo de oportunizar a estudantes de Engenharia, desde o seu ingresso no curso, a formação de engenheiros com perfil internacional por meio da realização de atividades *online* de internacionalização vinculadas a questões relativas à Matemática, construídas conjuntamente por docentes brasileiros e argentinos, nas quais grupos de estudantes, havendo em cada um deles ao menos um representante de cada instituição envolvida, trabalham conjuntamente na resolução de problemas diretamente vinculados à Engenharia ou à mobilização de formas de pensar características desta área. Assume-se neste projeto que o termo *Internacionalização em Casa* (IeC) refere-se a: "atividades e experiências de ensino e de investigação desenvolvidas nas unidades curriculares [...] por meio do estabelecimento de espaços formativos auxiliados pelas TDIC" (Lima et al., 2021, p. 115). Por meio destas, visa-se o "desenvolvimento, por parte dos estudantes, de competências globais e interculturais, oportunizando-os a interagir com pessoas de culturas estrangeiras sem terem de estudar no exterior e [...] sem sequer necessitarem sair de suas casas" (Lima et al., 2021, p. 115).

A primeira situação trabalhada vinculou-se a um tema de interesse social: a propagação da Covid-19. A escolha por esta temática pode ser ratificada pelas palavras de Cantoral e seus colaboradores, que afirmam ser "essencial desenvolver entre a população uma forma matemática de pensar que, baseada em práticas socialmente compartilhadas, permita alcançar uma melhor compreensão comunitária do fenômeno e orientar uma boa tomada de decisões (Cantoral et al., 2020, p. 2).

[1] Edital PIPRINT 11915/2022

As questões[2] elaboradas pelo grupo de docentes participantes, quatro argentinos e quatro brasileiros, todos responsáveis por ministrar, em suas instituições, aulas de Matemática na formação do futuro engenheiro, foram inspiradas nas reflexões apresentadas por Rebollo-Perdomo (2020) no artigo intitulado *Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19*. Estas foram resolvidas colaborativamente por 20 estudantes voluntários do primeiro ano do curso de Engenharia, sendo cinco de cada uma das quatro instituições envolvidas no projeto, em encontros síncronos de duas horas de duração cada, quatro reunindo os estudantes dos dois países e outros realizados separadamente na Argentina e no Brasil. O grupo de estudantes que participou da atividade era homogêneo em relação aos seguintes aspectos: todos tinham a mesma faixa etária, eram ingressantes no ensino superior, finalizaram a Educação Básica remotamente em razão da pandemia de Covid-19 e manifestaram interesse em participar voluntariamente, em um horário diferente do usual de suas aulas, da atividade que seria proposta. A diferença entre esses sujeitos, além, obviamente, de suas características pessoais, constituintes de suas personalidades, é a cultura em que estão inseridos, uma vez que são estudantes de dois países diferentes e, consequentemente, com contextos educacionais distintos. Mas, na visão dos proponentes desta atividade de IeC, o convívio com essas diferenças é uma das principais riquezas da experiência. Neste artigo, o foco de análise estará nas percepções dos professores argentinos e brasileiros envolvidos neste projeto acerca de suas vivências nesta primeira atividade de IeC.

Subsídio teórico: o que se entende por percepção neste artigo?

Do ponto de vista teórico, as análises realizadas neste artigo são subsidiadas pela noção de *percepção*. No entanto, este termo é empregado em trabalhos científicos com diferentes significados. É fundamental, portanto, explicitar qual a definição assumida na pesquisa realizada.

Braghirolli et al. (1997), em uma abordagem psicológica, compreendem a percepção como um processo básico do comportamento humano. Afirmam que:

> as informações do meio externo são processadas em dois níveis: os níveis da sensação e da percepção. [...] a sensação é entendida como uma simples consciência dos componentes sensoriais e das dimensões da realidade (mecanismo de recepção de informações). A percepção supõe as sensações acompanhadas dos significados que lhes atribuímos como resultado da nossa experiência anterior. Na percepção, nós relacionamos os dados sensoriais com nossas experiências anteriores, o que lhes confere significado (mecanismo de interpretação de informações) (Braghirolli et al., 1997, p. 67).

Essa ideia apresentada por Braghirolli et al. (1997) é concordante à definição de percepção explicitada por Abbagnano (2007): a de que a percepção é uma operação realizada pelo ser humano em suas relações com o ambiente e está vinculada à interpretação dos estímulos e à atribuição de significados para eles. Barber e Legge (1976, p. II) complementam afirmando que a percepção pode ser definida como o "processo de recepção, seleção, aquisição, transformação e organização das informações fornecidas através dos nossos sentidos". Na acepção de Gáspari e Schwartz (2005, p. 70), a percepção é "um fenômeno complexo que conjuga uma gama de operações que se processam no enredo psicológico humano perpassando, não apenas pelas sensações como, também, pela memória, pela comparação, pela associação, pelo juízo, entre

[2] Disponíveis em: https://drive.google.com/file/d/1n3boMLAsyOYNTlY4U5EAy_4E23lOLArZ/view?usp=sharing

outros. Ainda de acordo com as autoras, a percepção "envolve todo repertório de experiências introjetadas pelo ser humano, ao longo de sua existência" (Gáspari & Schwartz, 2005, p. 70). Em consonância à esta ideia, Chauí (1999) destaca que a percepção envolve toda a personalidade do sujeito, sua história pessoal e suas concepções.

Neste artigo, articulando as ideias dos autores anteriormente mencionados, emprega-se o termo percepção com o seguinte significado: um fenômeno complexo envolvendo, por um lado, o repertório de experiências que determinado sujeito introjetou ao longo de sua trajetória de vida (e, no caso de um docente, particularmente de sua trajetória profissional) e que é composto não apenas por sensações, mas também pelos significados a elas atribuídos a partir de vivências anteriores e, consequentemente, pela memória, pela comparação, pela associação, pelo juízo etc. E, por outro lado, contemplando a personalidade do sujeito, sua história pessoal e suas concepções. Desta forma, assume-se que os professores, ao evidenciarem suas percepções a respeito da primeira atividade de IeC que vivenciaram, o fazem atribuindo a ela significados a partir de suas personalidades, de suas concepções, de suas trajetórias docentes até aquele momento, de suas memórias e de comparações entre outras atividades das quais participaram ao longo de suas atuações profissionais como professores universitários.

Breve caracterização dos docentes participantes

Os oito docentes envolvidos nesta investigação lecionam ou em algum momento já lecionaram aulas de Matemática em cursos de Engenharia. Além disso, estão comprometidos em oportunizar aos seus estudantes uma aprendizagem de Matemática que seja significativa e que efetivamente possa contribuir para que se desempenhem bem em seus cursos, tanto nas disciplinas básicas como nas específicas, ao mesmo tempo em que desenvolvam os pensamentos crítico, criativo e analítico que favorecerão, tanto suas atuações cidadãs na sociedade, quanto suas futuras atuações profissionais. Têm, ao longo de suas trajetórias profissionais, participado de eventos nacionais e internacionais relativos aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Engenharia, produzido artigos científicos e materiais didáticos e realizado constantes estudos acerca da docência e da aprendizagem em cursos nos quais a Matemática não é objetivo central, mas uma ferramenta a ser desenvolvida.

Dos quatro docentes argentinos participantes das atividades, três são graduados em Engenharia: um em Elétrica (com especialização em Educação e TIC), outro em Civil (com mestrado em Docência Universitária) e outro nas habilitações Química Industrial e do Trabalho (com especialização em Ensino de Ciências Experimentais – com menção em Química); têm, respectivamente, 30, 43 e 26 anos de magistério. O outro professor argentino é graduado em Matemática, doutorando em Ensino de Ciências Exatas e Naturais e atua na educação há 8 anos.

Os quatro docentes brasileiros têm a Matemática como área de formação; dois deles têm doutorado em Educação Matemática, um é mestre nesta área e outro tem doutorado em Psicologia da Educação. Três destes atuam na docência há mais de 40 anos e outro há 13 anos.

Metodologia

Para obter os dados acerca da percepção dos oito docentes participantes da atividade, transcreveu-se e analisou-se o registro audiovisual do primeiro momento do encontro final realizado, no qual, enquanto os estudantes, em outras salas virtuais, elaboravam uma síntese do trabalho desenvolvido ao longo da atividade, os professores dialogaram acerca dos aspectos que, para eles, eram os mais importantes de serem ressaltados a respeito do que haviam experienciado ao longo dos encontros. Estas percepções, externalizadas pelos docentes durante este diálogo, se deram a partir do acompanhamento atento do trabalho dos grupos de estudantes durante todos os encontros que compuseram a atividade. É relevante destacar que, como afirmam Braghirolli et al. (1997), uma condição essencial para que haja percepção é a atenção. Neste sentido, ao acompanharem o trabalho dos estudantes, selecionaram, por meio da atenção – e evidentemente a partir suas expectativas que acabam ocasionando a percepção mais aguçada de certos elementos em detrimento de outros – alguns aspectos do ambiente de aprendizagem que estavam observando.

Uma vez transcritos os diálogos, para a análise dos dados coletados, foram empregados princípios da Análise de Conteúdo, na concepção de Bardin (2001). As categorias não foram estabelecidas *a priori*, mas emergiram da exploração dos dados. Tais categorias são as seguintes: (C1) uso de recursos tecnológicos; (C2) diferença entre as questões e o modo de trabalhá-las durante a atividade e àqueles normalmente presentes em sala de aula; (C3) dificuldades enfrentadas pelos estudantes; (C4) competências requeridas do estudante durante a atividade. Neste artigo, discorre-se acerca das categorias (C1), (C2) e (C3), ou seja, analisa-se como os docentes que participaram desta atividade de IeC, a partir do repertório de experiências que acumularam ao longo de suas trajetórias profissionais, de sua personalidade, suas concepções e sua história pessoal, atribuíram significados ao que observaram acerca das temáticas inerentes a estas três categorias.

(C1) uso de recursos tecnológicos

Especialmente os argentinos salientaram a não familiaridade dos estudantes de suas universidades com o uso de ferramentas tecnológicas, como o Excel, o GeoGebra, o Symbolab e o Wolfram Alpha. Essa dificuldade foi também percebida pelos docentes brasileiros em relação a alguns de seus estudantes, porém com menor intensidade, uma vez que, notou-se que nos grupos que recorreram aos *softwares*, isto se deu justamente por iniciativa dos discentes brasileiros. No entanto, em alguns grupos, os estudantes do Brasil também não recorreram a qualquer recurso além do lápis e papel, o que evidencia que a familiaridade com os recursos tecnológicos, embora certamente esteja de alguma maneira vinculada ao processo de ensino empregado em cada país, está também associada às características pessoais de cada estudante.

A não familiaridade com as Tecnologias Digitais de Informação e de Comunicação (TDIC), percebida em alguns grupos, teve como principal consequência o dispêndio de uma quantidade de tempo, acima da planejada, na realização dos cálculos demandados pelas questões propostas.

Outra percepção, ainda no âmbito desta primeira categoria, diz respeito às possíveis influências sobre os estudantes das formas como os professores empregam as TDIC em sala de aula e como os estimulam e autorizam a usar estes recursos. Para esse conjunto de docentes, é importante que o professor não apenas apresente aos estudantes diretamente produtos obtidos por meio de *softwares*, mas que realizem estas produções passo a passo, junto aos alunos, dando-lhes oportunidades de acompanhar os raciocínios nelas mobilizados. Esta prática, que durante o período de aulas remotas emergenciais, em decorrência do cenário pandêmico, era bastante comum não deveria ser abandonada nas aulas presenciais.

Deve-se também explorar as potencialidades dos *softwares* para a comunicação em Matemática. O grupo de professores destacou que, durante a realização das atividades, ao invés de recorrerem a editores de texto específicos para a escrita em linguagem matemática, os estudantes fizeram uso de recursos não adequados a este fim, como o Paint.

Destacou-se ainda a necessidade de repensar sobre a questão de não permitir que os alunos utilizem os *softwares* nas avaliações, apesar de, muitas vezes, incentivarem seu emprego durante as aulas. Na visão dos professores, estes recursos poderiam ser empregados como ferramentas mais de análise do que de cálculo. Poderiam ser utilizados até mesmo nas provas se, nestas, fossem propostas questões nas quais as TDIC não responderiam diretamente à questão, sendo somente um instrumento, sem qualquer funcionalidade se não houver a mobilização de conhecimentos por parte dos estudantes.

Ao refletirem sobre a atividade, destacaram que o uso dos recursos tecnológicos poderia ser reorientado no intuito de fomentar o desenvolvimento do pensamento complexo dos estudantes, e, consequentemente, suas habilidades de resolver problemas e de modelizar uma situação, aspectos inerentes às suas futuras atuações profissionais como engenheiros.

Por fim, um aspecto relevante salientado e que tem influência direta na possibilidade de um uso mais abrangente das TDIC, inclusive nas avaliações, é a infraestrutura tecnológica das instituições e o acesso dos estudantes a tais recursos quando estes não estão disponíveis nas escolas. Uma vez que, em muitas instituições, não há salas de aula suficientemente equipadas para que todos os docentes possam empregá-las simultaneamente e que os discentes nem sempre contam com recursos financeiros para adquirir equipamentos pessoais que possam ser levados para as aulas, é necessário investir em políticas institucionais de inclusão digital.

(C2) diferença entre as questões e o modo de trabalhá-las durante a atividade e àqueles normalmente presentes em sala de aula

Os docentes perceberam que os estudantes enfrentaram maiores dificuldades na parte inicial da atividade, contemplando questões que exigiam traduzir um enunciado da linguagem natural para a linguagem simbólica, trabalhar com modelos, compreender as variáveis presentes, aquelas que não estão sendo consideradas e o que está sendo representado por meio do modelo elaborado. Argumentaram que este é um trabalho com o qual os estudantes, recém-ingressos no ensino superior, não estão acostumados; é algo muito novo para eles, independentemente de terem vivenciado o período pandêmico e, portanto, conhecerem o contexto no qual as atividades estavam inseridas. Já nas questões finais da intervenção, quando precisaram interpretar o que haviam feito e analisar gráficos, realizaram discussões mais fluidas, uma vez que eram atividades com as quais já tinham maior familiaridade e sentiam-se mais confiantes em desenvolvê-las.

Os entraves enfrentados pelos estudantes nas atividades iniciais estão, na visão dos docentes, relacionados às suas vivências, durante suas trajetórias educacionais, de um ensino no qual, mesmo na universidade, não se privilegia a resolução de problemas, mas sim exercícios rotineiros.

Outro ponto que, na percepção dos docentes, merece destaque diz respeito aos estudantes terem podido, por meio da ação realizada, participar de uma atividade desafiadora, mas com um caráter diferente do que estão habituados em sala de aula, uma vez que não estavam sendo cobrados e nem avaliados. Seus engajamentos dependiam exclusivamente de seus interesses e comprometimentos e suas atuações poderiam ocorrer de modo mais natural, sem qualquer preocupação em expressar seus raciocínios.

Uma questão que gerou debates entre os professores e que dividiu opiniões foi a pertinência ou não de uma preparação prévia para este tipo de atividade. Na percepção de alguns, antes de implementar uma atividade como esta junto a estudantes, deveríamos identificar os objetos matemáticos nela mobilizados, os recursos tecnológicos que poderiam ser empregados, entre outros aspectos e, a partir disto, realizar uma preparação prévia com os discentes para que estes, na resolução do problema, pudessem focar suas atenções apenas à situação com a qual estavam trabalhando. Para outros, no entanto, essa preparação pode não ser adequada porque promover a iniciativa e a proatividade do estudante para buscar novos conhecimentos necessários e despertar sua curiosidade é parte essencial da formação de um engenheiro, que enfrentará problemas para os quais, muitas vezes, não terá ferramentas imediatas para resolvê-los.

Como resultado dos debates, conjecturou-se que, mais do que uma preparação prévia para um problema específico, poderia ser importante direcionar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática para o desenvolvimento de estratégias de pensamento e para o uso de recursos relevantes para a resolução de problemas, em âmbito mais geral, de modo a potencializar formas de raciocínios mais próximas daquelas requeridas de um engenheiro.

(C3) dificuldades enfrentadas pelos estudantes

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante a atividade relacionam-se, na percepção dos docentes, principalmente a dois diferentes aspectos. Em primeiro lugar, ao ingresso recente no ensino superior e o fato de ainda não estarem completamente adaptados à vida universitária, ao funcionamento das disciplinas, de seus planos de estudos etc. São alunos que ainda trazem em si, de maneira muita arraigada, a cultura do Ensino Médio. A atividade foi desafiadora também no sentido de compreenderem a seriedade com que deve ser enfrentada uma experiência como esta, na qual têm a possibilidade de trabalhar colaborativamente em equipes e compartilhar conhecimentos e vivências com colegas de outros países, outras culturas e de outras instituições de seus próprios países, o que também será necessário em seu futuro cotidiano profissional.

Em segundo lugar, há fragilidades em relação a conhecimentos prévios para a atividade, especialmente a noção de constante de proporcionalidade e a interpretação dada à ideia de taxa de variação, extremamente importantes e fundamentais em um curso de Engenharia, uma vez que muitas das situações da área pressupõe a mobilização do pensamento variacional. Os estudantes dos dois países, por conta dessas fragilidades, demandaram muito tempo para resolver a questão inicial da atividade, que requeria a obtenção de um modelo matemático a partir destas ideias. Além disso, os docentes salientaram que, pelo fato de os estudantes estarem cursando uma primeira disciplina de Cálculo, ainda não estavam suficientemente familiarizados com as noções de razão incremental e de variação.

Considerações finais

As análises dos dados obtidos por meio desta primeira atividade de IeC, sob diferentes perspectivas, têm evidenciado a este grupo de docentes o quão importante é engajar os estudantes do ensino superior, particularmente os de cursos de Engenharia, desde o início de seus percursos formativos, em situações de aprendizagem efetivamente desafiadoras; acreditar nos potenciais dos alunos de superar obstáculos de diferentes naturezas, de trabalhar de forma colaborativa e de desenvolver suas autonomias aproximando, sempre que possível, as experiências em sala de aula ou as atividades extraclasse de cenários mais semelhantes àqueles que viverão em seus futuros cotidianos profissionais. Não é uma tarefa simples, nem para os estudantes e nem para os professores, mas, da mesma maneira que os primeiros, para efetivamente desenvolverem conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que serão requeridos em seu exercício profissional precisam ser desafiados a continuamente superar barreiras, os docentes também não podem se acomodar, devem estar sempre dispostos a quebrar paradigmas e trilhar novos caminhos em busca de oportunizar aprendizagens mais efetivas aos seus alunos. As análises desta primeira experiência contribuirão para o repensar de diferentes aspectos, principalmente o incentivo do emprego de recursos tecnológicos para a resolução de problemas, na proposição e na implementação das atividades futuras do projeto de IeC. Espera-se que este artigo possa também inspirar a realização de outros projetos desta natureza.

Bibliografia y referências

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes.

Barber, P. J., & Legge, D. (1976). *Percepção e Informação*. Rio de Janeiro: Zahar.

Bardin, L. (2001). Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Braghirolli, E. M., Bisi, G. P., Rizzon, L. A., & Nicoletto, U. (1997). *Psicologia Geral*. Petrópolis: Vozes.

Cantoral, R., Ríos Jarquín, W., Reyes Gasperini, D., Cantoral Uriza, E. A., Barrios, E., Fallas Soto, R., ..., & Bonilla Solano, A. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 23(1), 1-19.

Chauí, M. (1999). *Convite à Filosofia*. São Paulo: Ática.

Lima, G. L.; Paula, M. R.; Bianchini, B. L.; Cossú, C. M. F. A.; Santos, E. A.; Gomes, E., ..., & Gonzatti, S. E. M. (2021). O Novo Normal no ensino de Ciências Básicas e Matemática na Engenharia: os caminhos abertos – e pedras neles reveladas - pelas experiências vivenciadas durante a pandemia de Covid-19. In A. M. Tonini &

T. R. D. S. Pereira. (Orgs.), *Formação em Engenharia: tecnologia, inovação e sustentabilidade* (pp. 92-146). Brasília: ABENGE.

Gáspari, J. C., & Schwartz, G. M. (2005). O idoso e a ressignificação emocional do lazer. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 21(1), 69-76.

Rebollo-Perdomo, S. (2020). Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19. *Materials matemàtics*, 1-12.

Internacionalización en Casa: desarrollo de competencias en la Ingeniería

Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Mariano **Ferreyro**
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Província de Buenos Aires
Argentina
ferreyromariano@gmail.com
Marys Margarita **Arlettaz**
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones
Argentina
marysarlettaz@gmail.com
Sergio Iván **Sedoff**
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones
Argentina
sergiosedoff@gmail.com

Resumen

En este artículo se analizan las competencias que pudieron ser desarrolladas o movilizadas por un grupo de 20 estudiantes de Ingeniería al participar en actividades insertas en una experiencia de Internacionalización en Casa conducida por ocho profesores de cuatro instituciones de educación superior diferentes, dos brasileñas y dos argentinas. Se analizaron las transcripciones de las reuniones virtuales celebradas con los estudiantes y las respuestas que estos dieron a un cuestionario sobre sus percepciones de la experiencia. Se han podido desarrollar y/o movilizar competencias matemáticas, competencias globales y competencias interculturales, siendo estas últimas las que se exigen a los profesionales con perfil internacional.

Palabras clave: Internacionalización en Casa; Ingeniería; Competencias matemáticas; Competencias globales; Competencias interculturales.

Introducción

Este artículo es el resultado de un proyecto de investigación, titulado *La internacionalización en casa: una posibilidad en la nueva normalidad* que se desarrolla en el contexto del Programa de Incentivos a la Internacionalización (PIPRINT) de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo[1]. Participan cuatro profesores investigadores de las instituciones brasileñas Pontificia Universidade Católica de São Paulo e Instituto Mauá de Tecnologia y otros cuatro profesores investigadores de las instituciones argentinas Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

El proyecto se propuso con el objetivo de brindar a los estudiantes de Ingeniería, desde el momento en que se incorporan a la carrera, la oportunidad de formar ingenieros con perfil internacional mediante la realización de actividades de internacionalización en línea vinculadas a temas relacionados con las Matemáticas, construidas conjuntamente por docentes brasileños y argentinos, en las que grupos de estudiantes, cada uno de ellos con al menos un representante de cada institución involucrada, trabajan en conjunto para resolver problemas directamente vinculados a la Ingeniería o a la movilización de formas de pensamiento propias de esta área. En este proyecto se asume que el término Internacionalización en Casa (IeC) se refiere a: "actividades y experiencias de enseñanza e investigación desarrolladas en las unidades curriculares [...] a través del establecimiento de espacios formativos auxiliados por las TIC" (Lima et al., 2021, p. 115). A través de ellas, se pretende el "desarrollo, por parte de los estudiantes, de competencias globales e interculturales, dándoles la oportunidad de interactuar con personas de culturas extranjeras sin tener que estudiar en el extranjero y [...] sin necesidad siquiera de salir de sus casas" (Lima et al., 2021, p. 115).

La primera situación en la que se trabajó estuvo relacionada con un tema de interés social: la propagación del Covid-19. La elección de este tema puede ser respaldada por las palabras de Cantoral y sus colaboradores, quienes afirman que es "imprescindible desarrollar entre la población un pensamiento matemático que, basado en prácticas socialmente compartidas, permita lograr una mejor comprensión comunitaria del fenómeno y orientar una buena toma de decisiones" (Cantoral et al., 2020, p. 2).

Las preguntas[2] preparadas por el grupo de profesores participantes, inspirado por Rebollo-Perdomo (2020), fueron resueltas de forma colaborativa por veinte alumnos voluntarios del primer curso de Ingeniería, cinco de cada una de las cuatro instituciones implicadas en el proyecto en reuniones sincrónicas de dos horas cada una, cuatro que reúnen a estudiantes de ambos países y otras que se celebran por separado en Argentina y Brasil. En este artículo, el foco de análisis estará en las percepciones de los profesores argentinos y brasileños involucrados en

[1] PIPRINT Edital 11915/2022

[2] Disponibles en: https://drive.google.com/file/d/1n3boMLAsyOYNTlY4U5EAy_4E23lOLArZ/view?usp=sharing

este proyecto sobre sus experiencias en esta primera actividad de IeC. En este artículo, el análisis se centrará en las competencias que podrían desarrollar y/o movilizar los estudiantes argentinos y brasileños que participan del proyecto.

Aportes a la movilización de competencias observados en la experiencia

En la profesión que nos ocupa, la de formar ingenieros competentes es una meta a la que están abocados los países latinoamericanos. El gran desafío, es crear espacios de trabajo interdisciplinario entre los diferentes ciclos que caracterizan a estas carreras en sus diseños curriculares, condición necesaria para la formación de un profesional competente. Esta meta lleva consigo la oportunidad, muchas veces postergada, de la interacción entre las disciplinas del ciclo básico, que en general contiene a la Matemática, y los ciclos intermedio y superior.

En la experiencia que realizamos referida específicamente a la enseñanza de la Matemática nos centramos especialmente en las competencias matemáticas, pero también se movilizan otras competencias de distinta naturaleza, como se explicará a lo largo de este artículo.

La noción de *competencia matemática* tiene referentes que tratan el concepto en los distintos niveles educativos. Se observa que más allá de las diferentes acepciones se encuentran puntos en común que aportan al tema coincidiendo en una perspectiva de la Matemática como disciplina formativa y de soporte para el desarrollo de conocimientos en distintas profesiones, para el accionar laboral y en la vida misma de las personas. Merece especial mención la definición dada por el matemático danés Mogen Niss, según la cual: "la competencia matemática es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos extra matemáticos, en los que estas juegan o podrían jugar un papel" (Niss, 2002, p.6).

Niss (2002) define ocho competencias matemáticas, organizadas en dos grupos. El primer grupo se relaciona con *la capacidad de hacer y responder preguntas, en y con las matemáticas*: (C1) pensar matemáticamente; (C2) plantear y resolver problemas matemáticos; (C3) modelar matemáticamente; y (C4) razonar matemáticamente. El otro grupo de competencias tiene que ver con *la capacidad de manejar y administrar el lenguaje matemático y las herramientas*: (C5) representar entidades matemáticas; (C6) manipular los símbolos y el formalismo matemático; (C7) comunicarse en, con, y sobre la matemática; y (C8) hacer uso de ayudas y herramientas.

Son pocas las teorías referidas a la enseñanza de la Matemática en el nivel superior y específicamente a la enseñanza de la Matemática para carreras de Ingeniería en línea con la formación de competencias matemáticas para la profesión. En una de estas, la Teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias (TMCC), se centran en las problemáticas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática en profesiones en donde la Matemática no es una meta por sí misma. En este marco se supone que "las competencias son las fortalezas del futuro profesionista para enfrentar una situación problemática en su ámbito profesional y laboral, haciendo uso de la integración de todo su bagaje de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que son movilizados en sus estructuras cognitivas" (Camarena, 2021, p. 107).

Los *conocimientos* y *habilidades* tienen su base de desarrollo en los denominados *Eventos Contextualizados*, que se definen, según Camarena (2021), como problemas, proyectos o estudios de caso que se comportan como entes integradores de las disciplinas, ellos no son ejercicios o problemas rutinarios, deben causar un conflicto cognitivo en los estudiantes al leer el enunciado y también deben motivarlos e intrigarlos para querer continuar con la tarea. Por lo tanto, la enseñanza de la Matemática que pretenda la formación de competencias matemáticas no puede proponerse desde compartimentos estancos, tema a tema en forma fragmentada, es imprescindible una concepción interdisciplinaria de la Matemática con las demás disciplinas de la carrera. Tampoco es posible lograr esta formación en un determinado ciclo sino en forma transversal con una propuesta de enseñanza coherente y continua, en espacios curriculares y aún extracurriculares como el que nos ocupa.

Los otros dos componentes, las *actitudes* y *valores* se consideran importantes en la formación del futuro profesional, involucran lo afectivo en lo cognitivo, son transversales a los ciclos de formación y algunos son independientes de la carrera profesional que se desarrolle, como el saber trabajar en equipo, la honestidad, honradez, responsabilidad, etc..

Además de las competencias matemáticas, es esencial proporcionar a los futuros ingenieros el desarrollo y/o la movilización de otros tipos de competencias. Rauer et al. (2021) se refieren a las denominadas *competencias globales*, que se trata de las capacidades para: examinar cuestiones locales, globales e interculturales; comprender y apreciar las percepciones y visiones del mundo de los demás; participar en interacciones abiertas, eficaces y adecuadas con personas de diferentes culturas; y actuar en favor del bienestar colectivo y el desarrollo sostenible.

Lima et al. (2021) basándose en las ideas de Voogt y Roblin (2012) y Stallivieri (2021), plantean que se requieren *profesionales con un perfil internacional*, que "se comuniquen bien, dominen diferentes idiomas, sean resilientes, creativos, críticos, colaborativos, con aguda conciencia global, capaces de moverse en entornos multiculturales, actuar en escenarios inciertos, resolver problemas, trabajar en red, utilizar las TDIC y participar en cocreaciones en entornos remotos" (Lima, 2021 et al, p. 113).

Otro tipo de competencia que el futuro ingeniero debe desarrollar es la *intercultural* que, como destacan Lima et al. (2021, p. 114) es definida "como el proceso de desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes específicas a lo largo de la vida que conducen a comportamientos y comunicaciones efectivas y apropiadas en las interacciones interculturales".

Para analizar las competencias que pudieron desarrollar o movilizar los participantes en la experiencia, se analizaron las transcripciones de las grabaciones de audio y vídeo de las reuniones celebradas y las respuestas dadas por los estudiantes a un cuestionario destinado a identificar sus percepciones de lo vivido a lo largo del trabajo. Estos análisis se presentan a continuación.

Desarrollo o movilización de competencias en nuestra experiencia

El conjunto de actividades que integraron la experiencia desarrollada puede considerarse como un Evento Contextualizado, que, tal como se define y considera en la TMCC se destaca como motor para el desarrollo de competencias matemáticas, específicamente de competencias matemáticas para la profesión y para la vida considerando a la Matemática como herramienta y disciplina formativa. Algo muy importante es que los temas, conceptos y algoritmos matemáticos a trabajar no son explícitos, de manera que los estudiantes deben hacer uso de su bagaje de conocimientos y con ayuda de los docentes guías encauzarse hacia la mejor opción para dar respuesta a la cuestión.

En lo que se refiere específicamente a competencias matemáticas contrastamos con el punto de vista de Niss (2002); en el primer grupo aquellas relacionadas con *el pensar matemático tendiente a la resolución de problemas e involucrando la modelación matemática,* están presentes en la propuesta, de la misma manera y en forma paralela también las del segundo grupo *relacionadas con el manejo del lenguaje matemático y de herramientas de apoyo*, todas necesarias para resolver la situación planteada de forma integrada, no aisladas.

Pero resulta particularmente interesante analizar la experiencia desde la mirada de la TMCC. Se observa el desarrollo de los cuatro componentes (conocimientos, habilidades, actitudes y valores) que hacen presencia en la definición de competencias. *Conocimientos*: se puso en juego las temáticas que los estudiantes consideraron como posibles herramientas de resolución del evento, la obtención de datos a partir de la lectura reflexiva del enunciado y la discusión entre pares con apoyo de los docentes. Se involucró aquí también la interpretación y decodificación de la información y el pensamiento lógico. En opinión de los profesores que participaron en la experiencia, si hay un aspecto que potenciar en las clases de Matemática es la lectura completa del problema a resolver: *se ha observado que estos elementos deben ser mejor trabajados durante las clases, ya que, sobre todo en el primer encuentro, los alumnos, a pesar de haber vuelto al enunciado del problema en numerosas ocasiones, nunca lo leían completamente para buscar pistas que pudieran ayudarles a seguir resolviéndolo.*

En una segunda instancia, ante la herramienta matemática que permite modelar la situación podemos identificar distintas *habilidades*: habilidad para pasar del lenguaje coloquial o natural al lenguaje simbólico; habilidad para identificar variables, constantes y algoritmos y cómo utilizarlos; habilidades para aplicar heurísticas; habilidad para trabajar con distintas representaciones como las simbólicas y las gráficas que le permitieron una mejor visualización de la situación y comparación de distintos modelos para la toma de postura frente al problema. El testimonio de dos de los sujetos participantes en la experiencia destaca aprendizajes relacionados con los elementos mencionados en este párrafo.

Un estudiante, refiriéndose a una situación que requería la determinación de una constante de proporcionalidad, afirma que: *aprendí algo muy interesante: el rol de las constantes, porque yo al principio me puse a buscar una fórmula que siempre nos da un número sin encontrar ningún tipo de constante y en ese caso ahí me corrigió el docente y me mostró, me hizo leer bien el problema y ahí pude aprender cómo se buscaba la constante, de qué forma podíamos hacer eso [...] así que fue muy interesante*. Señala otro estudiante: *después en los consecutivos modelos que desarrollamos nosotros logramos entender y notar que las matemáticas en estos contextos nos dan sólo una aproximación para estimar o dar un panorama de lo que podría pasar, pero nunca vamos a lograr un resultado certero. [...] hay que entender, interpretar que nos podría dar, cuál sería el resultado correcto.*

Las habilidades referidas al manejo de la informática como medio de apoyo para la resolución se destacan aquí con el conocimiento y la elección del *software* adecuado. Esta instancia resultó muy interesante ya que ante la puesta en escena de las ventajas encontradas a la hora de realizar cálculos, la motivación se potencia y permite que los estudiantes tomen conciencia de la necesidad del manejo informático. A este respecto, un participante comenta: *el* software *es muy importante y nosotros tenemos que incluir como estudiantes cada vez más, por ejemplo GeoGebra, que nos permitió entender toda la función que modela el comportamiento del Covid desde los contagios a lo largo del de la Argentina.*

Las *actitudes* se involucraron en la experiencia, especialmente en lo que hace a la responsabilidad tomada por los estudiantes en una actividad que no está dentro del curso y por lo tanto no será evaluada, cumplieron con las pautas establecidas para las reuniones virtuales, la participación estuvo marcada por iniciativas positivas, siempre dispuestos a escuchar a sus pares y docentes. Los profesores que participaron en la experiencia notaron cambios en las actitudes de algunos de los alumnos participantes durante las clases del curso regular. Uno de los profesores señala: *una de las participantes era una chica muy callada y tímida durante las clases. Pero después[...] cambió: participa en las clases, hace preguntas, se entusiasma y busca nuevos conocimientos de forma autónoma. La experiencia le dio seguridad.*

En cuanto a las *competencias globales* e *interculturales*, imprescindibles de desarrollar por parte de quienes aspiran a convertirse en *profesionales con perfil internacional*, la experiencia permitió afrontar, ejercitar y superar el reto de comunicarse en otro idioma, lo cual es fundamental dado que, como señala uno de los profesores del equipo: *en el mundo profesional hay que comunicarse con personas de otros países y hay que saber hacerse entender y eso no es fácil*. Así, en actividades como esta, como señala otro profesor, *el idioma puede ser un obstáculo, pero también puede ser un desafío.* Según los estudiantes participantes, la comunicación fue un gran desafío entre los grupos de Brasil y Argentina debido a los diferentes idiomas, pero se llevó a cabo con una buena predisposición para entenderse y lo lograron. Uno de los estudiantes brasileños comenta incluso: *he aprendido a comunicarme con más claridad y a realizar un análisis crítico de un problema*.

El trabajo en equipo de forma colaborativa entre sus miembros, otro elemento muy importante para un profesional con perfil internacional, aunque se necesita tiempo para que se establezca de manera efectiva, se pudo resolver en buen nivel más allá de que algunos miembros no se conocen personalmente y en parte se complica desde el espacio virtual. Según uno de los estudiantes que participó: *uno de los puntos positivos fue que pudimos relacionarnos con gente de otro país incluso sin haber salido de casa. Y también el trabajo en equipo, que creo que el mercado laboral considera importante y fue muy diferente a las actividades que estamos acostumbrados a realizar en el aula*. Las actividades, tal como se desarrollaron, permitieron destacar *valores* como la sinceridad sin reservas el "*no sé*" o "*no te entiendo*" acompañado de una total empatía en el trabajo conjunto así como la paciencia ante el compañero que manifiesta con humildad no saber "*por dónde andan*" con el *software* o algún algoritmo. Además, como señala un estudiante brasileño: *las principales lecciones aprendidas fueron las diferencias de puntos de vista, incluso con los propios brasileños. Muchos vinieron con ideas diferentes a las que yo tenía, y esto fue muy enriquecedor*.

La interacción con personas de diferentes culturas y la posibilidad de ejercitar la comprensión de diferentes visiones del mundo y de diferentes realidades sobre un tema determinado (en este caso, la situación en Argentina y Brasil durante la pandemia del Covid-19), que son elementos constitutivos de las *competencias globales*, también pudieron ejercitarse a lo largo de la experiencia. Respecto a esto, uno de los estudiantes brasileños comenta: *lo que me resultó muy interesante fue su perspectiva sobre la pandemia. Cuando empecé a escribir, dije: en Brasil, debido a los conflictos políticos, acabamos con un* déficit *en la economía. Entonces los argentinos dijeron que en Argentina era lo mismo. Me parece interesante este intercambio de experiencias. Este intercambio de cómo era en cada lugar, para ver que, queriéndolo o no, era muy similar*. Uno estudiante argentino comentó que uno de los puntos positivos de la experiencia fue *conocer gente de otras partes del mundo lo cual es un plus, ya que la realidad de los brasileños no es la misma que la que vivimos en Misiones, donde la población es muy pequeña y la gente tiene otras actitudes. Incluso en relación con Buenos Aires tenemos actitudes diferentes*.

Para concluir

La experiencia extracurricular tan particular permite vislumbrar la posibilidad de cambios que vayan acompañando la formación de competencias para la profesión. El descubrimiento temprano de cuál será el uso de la Matemática posibilita en los estudiantes la motivación a involucrarse en un aprendizaje significativo de la misma. Es lógico suponer que las acciones como las llevadas a cabo no alcanzan para el desarrollo de las competencias matemáticas tal como se las describen y pretende, pero, consideramos que si se logra despertar intereses como los que percibimos en el grupo de estudiantes de ambos países, es un granito de arena que merece atenderse.

Bibliografia y referências

Camarena, G. P. (2021). *Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Recuperado de https://edunse.unse.edu.ar/libros/digitales/

Cantoral, R., Ríos Jarquín, W., Reyes Gasperini, D., Cantoral Uriza, E. A., Barrios, E., Fallas Soto, R., ..., & Bonilla Solano, A. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 23(1), 1-19.

Kowalski,V., Erck , I., Enriquez,H., & Arlettaz, M. (2020). *Programa de Posgrado La Matemática en la Formación de Ingenieros Competentes* – UNaM - Misiones, Argentina. Serie Materiales de Apoyo - Segunda Edición: mayo 2020.

Lima, G. L.; Paula, M. R.; Bianchini, B. L.; Cossú, C. M. F. A.; Santos, E. A.; Gomes, E., ..., & Gonzatti, S. E. M. (2021). O Novo Normal no ensino de Ciências Básicas e Matemática na Engenharia: os caminhos abertos – e pedras neles reveladas - pelas experiências vivenciadas durante a pandemia de Covid-19. In A. M. Tonini & T. R. D. S. Pereira. (Orgs.), *Formação em Engenharia: tecnologia, inovação e sustentabilidade* (pp. 92-146). Brasília: ABENGE.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish kom project. Recuperado de http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1213/docs/KOMkompetenser.pdf

Rauer, J. N., Kroiss, M., Kryvinska, N., Engelhardt-Nowitzki, C., & Aburaia, M. (2021). Cross-university virtual teamwork as a means of internationalization at home. *The International Journal of Management Education*, 19(3), 1-13.

Rebollo-Perdomo, S. (2020). Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19. *Materials matemàtics*, 1-12.

Internacionalización en Casa: percepciones de estudiantes de ingeniería argentinos y brasileños

Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontificia Universidad Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontificia Universidad Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Ana Maria Velloso **Nobre**
Pontificia Universidad Católica de São Paulo
Brasil
anobre@pucsp.br
Mariano **Ferreyro**
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
ferreyromariano@gmail.com
María Beatriz **Bouciguez**
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina
boucigue@fio.unicen.edu.ar
Sergio Iván **Sedoff**
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Misiones
Argentina
sergiosedoff@gmail.com

Resumen

Este artículo presenta las percepciones de estudiantes de ingeniería, argentinos y brasileños, sobre una actividad de Internacionalización en Casa realizada en modalidad virtual, en la que participaron cuatro instituciones de Educación Superior, dos de cada país. Adoptamos la definición de percepción como aquella relacionada con las visiones y opiniones de los estudiantes sobre una experiencia vivida que puede influir en la forma en que entienden su importancia y la de las Matemáticas para su formación. Las percepciones se infirieron a partir de las respuestas a un cuestionario. Entre los resultados, destacamos: la valorización del trabajo en grupo con colegas de diferentes nacionalidades, que la actividad propuesta esté relacionada con la realidad y el cotidiano del futuro ingeniero, la valorización de las Matemáticas, el uso de TIC, la necesidad de búsqueda de los conceptos matemáticos pertinentes para la solución del problema, la necesidad de mayor frecuencia para este tipo de actividad.

Palabras clave: Internacionalización en casa; Educación matemática; Trabajo colaborativo; Formación de ingenieros; Percepciones de los estudiantes.

Introducción

Este artículo es fruto de un proyecto de investigación titulado *La Internacionalización en Casa: una posibilidad en la Nueva Normalidad*, en desarrollo en el ámbito del Programa de Incentivo a la Internacionalización de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (convocatoria PIPRINT 11915/2022). Participan del mismo, cuatro docentes investigadores de las instituciones brasileñas Pontificia Universidad Católica de São Paulo e Instituto Mauá de Tecnologia y otros cuatro profesores investigadores de dos instituciones argentinas, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Dado que el contexto pandémico experimentado desde principios de 2020, además de los innumerables efectos adversos sobre la población mundial, como señalan Cardarello Compiani y López Pérez (2021, p. 5), también, aunque forzadamente, señaló caminos y oportunidades hasta entonces aún no explorados adecuadamente, como por ejemplo, el empleo de "herramientas informáticas de forma más ágil y activa para realizar reuniones y actividades que anteriormente dependían de algunos desplazamientos, no solo dentro de la institución, sino también con otras instituciones asociadas en el exterior".

El proyecto mencionado se encuentra actualmente en desarrollo y tiene como objetivo, brindar oportunidades a los estudiantes de Ingeniería, desde su ingreso a la carrera, para realizar actividades vinculadas a cuestiones relativas a las Matemáticas asumiendo como premisa la importancia de la "introducción de actividades de internacionalización en línea, en las unidades curriculares de Ciencias Básicas y Matemáticas", posibilitando, desde el inicio de la carrera, la formación de ingenieros con perfil internacional. Se asume, entonces, que el término *Internacionalización en Casa (IeC)* se refiere a:

> actividades y experiencias de enseñanza e investigación desarrolladas en las unidades curriculares [...] a través del establecimiento de espacios formativos ayudados por las TIC, promoviendo el desarrollo por parte de los estudiantes de competencias globales e interculturales, brindándoles la posibilidad de interactuar con personas de culturas extranjeras sin tener que estudiar en el exterior y [...] sin necesidad de salir de sus casas. (Lima et al., 2021, p. 115)

La elección de la temática trabajada estuvo vinculada a un tema de interés social: la propagación del Covid-19, la cual puede ser respaldada por las palabras de Cantoral y sus colaboradores, que afirman que es "fundamental desarrollar entre la población una forma matemática de pensar que, sustentada en prácticas socialmente compartidas, permita alcanzar mejor entendimiento comunitario del fenómeno y orientar la toma acertada de decisiones" (Cantoral et al., 2020, p. 2).

Las preguntas[1] elaboradas por el grupo de docentes participantes (responsables de asignaturas de Matemáticas en la formación de ingenieros), surgen de una adaptación de una problemática planteada por Rebollo-Perdomo (2020) en su artículo "Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19".

Los resultados de esta primera etapa del proyecto pueden ser analizados desde diferentes perspectivas, tales como: las percepciones de los estudiantes, las percepciones de los docentes y las competencias que pudieron ser movilizadas o desarrolladas por los participantes. Este análisis es fundamental para identificar sus potencialidades, los obstáculos a los que hay que hacer frente y los posibles cambios que deberían realizarse para su continuidad. Aunque la Internacionalización en Casa se presenta como una posibilidad reforzada por el contexto de la pandemia, el hecho de que nosotros, como investigadores y profesores, la consideremos interesante no justifica su aplicación. Es necesario un análisis científico detallado que explique las ventajas, los inconvenientes y los retos de estas experiencias, un análisis que también podría servir de ayuda a otros profesores e investigadores para poner en práctica y mejorar este tipo de actividades.

En este artículo, el análisis estará focalizado en las percepciones de los estudiantes argentinos y brasileños involucrados en este proyecto acerca de sus vivencias en esta actividad de IeC.

La definición de percepción empleada en este estudio

Desde el punto de vista teórico, los análisis presentados en este artículo están sujetos a la noción de percepción. Sin embargo, se trata de un término polisémico, es decir, empleado, en diferentes contextos, con diferentes significados. Por lo tanto, es esencial explicar qué definición de percepción consideramos en este análisis.

Inspirados en las ideas de Mercat, El-Demerdash y Trgalova (2018), asumimos *percepción* como las visiones y las opiniones de los estudiantes acerca de determinada experiencia vivenciada y que, en el caso específico de la actividad de IeC de la cual participaron, pueden influir en cómo comprenden la importancia de este tipo de vivencia y de las Matemáticas para sus formaciones y la forma en que se comportan ante problemas, especialmente aquellos que requieren la movilización de conocimientos matemáticos. De esta forma, asumimos que, al evidenciar sus percepciones acerca de la primera actividad de IeC que experimentaron, los estudiantes lo hicieron atribuyéndoles significados a partir de sus personalidades, de sus concepciones, de sus trayectorias escolares y universitarias hasta ese momento, de sus recuerdos y comparaciones con otras actividades de las cuales participaron a lo largo de sus procesos formativos.

---

[1] Disponibles en: https://drive.google.com/file/d/1n3boMLAsyOYNTlY4U5EAy_4E23lOLArZ/view?usp=sharing

Metodología

Las preguntas elaboradas por el grupo de docentes participantes, basadas en la adaptación de la problemática planteada por Rebollo-Perdomo (2020) en el artículo mencionado anteriormente, fueron resueltas colaborativamente por 20 estudiantes (cinco de cada institución) del primer año de carreras de Ingeniería que se ofrecieron voluntariamente.

Se realizó un primer encuentro, para que los sujetos de la investigación pudieran conocer a sus pares, a los profesores, los objetivos de las actividades de las cuales participarían y la dinámica que sería empleada en las reuniones posteriores. Luego se celebraron dos encuentros del grupo completo (profesores y estudiantes) con el objetivo de resolver un primer problema que impulsó las discusiones futuras. Los encuentros siguientes, fueron organizados por grupos de cada país en forma separada para que pudieran reflexionar sobre cuestiones referentes a las particularidades de cómo la pandemia transcurrió en cada uno de ellos. Finalmente, en un encuentro colectivo, se realizó un debate comparando los estudios realizados por ambos grupos, tanto desde el punto de vista de los datos encontrados como de los factores que pudieron haber influido para comportamientos diferentes en los dos países, cerrando con la exposición de cada uno de los participantes respecto a las percepciones sobre la experiencia.

Para obtener datos acerca de la percepción de los estudiantes, recurrimos al análisis de las respuestas dadas por los ellos a un cuestionario[2] con preguntas sobre las percepciones relativas a dos dimensiones: la experiencia y los problemas propuestos, además de tres cuestiones finales referidas a los aspectos positivos y/o aprendizajes y sobre los aspectos negativos, obstáculos y/o falencias con los que se encontraron al participar en esta actividad de IeC.

Percepciones acerca de la experiencia vivida

Con respecto a las expectativas de los estudiantes que se ofrecieron voluntariamente para participar en la actividad, todos manifestaron que se cumplieron; para quince de ellos en forma completa, además, cinco participantes expresaron que lograron ejercitar y mejorar las estrategias de trabajo en equipo. A continuación, transcribimos algunas de las expresiones vertidas por los estudiantes al respecto: *socializar con una nueva cultura y un idioma diferente para construir más conocimiento; una idea interesante y divertida; estar en contacto con otras perspectivas e ideas frente a problemas matemáticos. En definitiva, presenciar cómo los estudiantes de otras instituciones educativas analizarían un determinado problema; aprender de la relación que existe entre las matemáticas y la vida real; poder tener contacto con problemas reales de ingeniería; mejoré la capacidad de relacionar variables y entender textos*, entre otras.

En la percepción de los estudiantes, la participación en la experiencia brindó la oportunidad de mejorar sus habilidades para comunicarse con los compañeros, incluso enfrentando, en ocasiones, dificultades con el idioma que, en su opinión, no constituían efectivamente un obstáculo, sino un desafío. Además, la actividad los animó a salir de su zona de confort para exponerse con personas desconocidas, con la posibilidad de cometer errores, lo cual

[2] Disponible en: https://drive.google.com/file/d/1Ks8bRjoWMLKovv6duW8Lv9qsXss3YtMn/view?usp=share_link

fue posible porque se estableció un ambiente donde entraba en juego la capacidad de diálogo, discusión y pensamiento crítico para resolver un problema real.

Durante la resolución de las consignas que componían la actividad, se observa en la Figura 1, que un mayor número de argentinos prefieren trabajar individualmente y luego socializar las resoluciones; pedir orientación a los profesores antes de actuar; analizar los caminos de las resoluciones y respuestas a argumentar. A su vez, es levemente mayor el número de brasileños que prefieren trabajar en equipo; analizar globalmente el problema a partir del enunciado; escuchar y monitorear las respuestas de los compañeros y proponer estrategias de resolución.

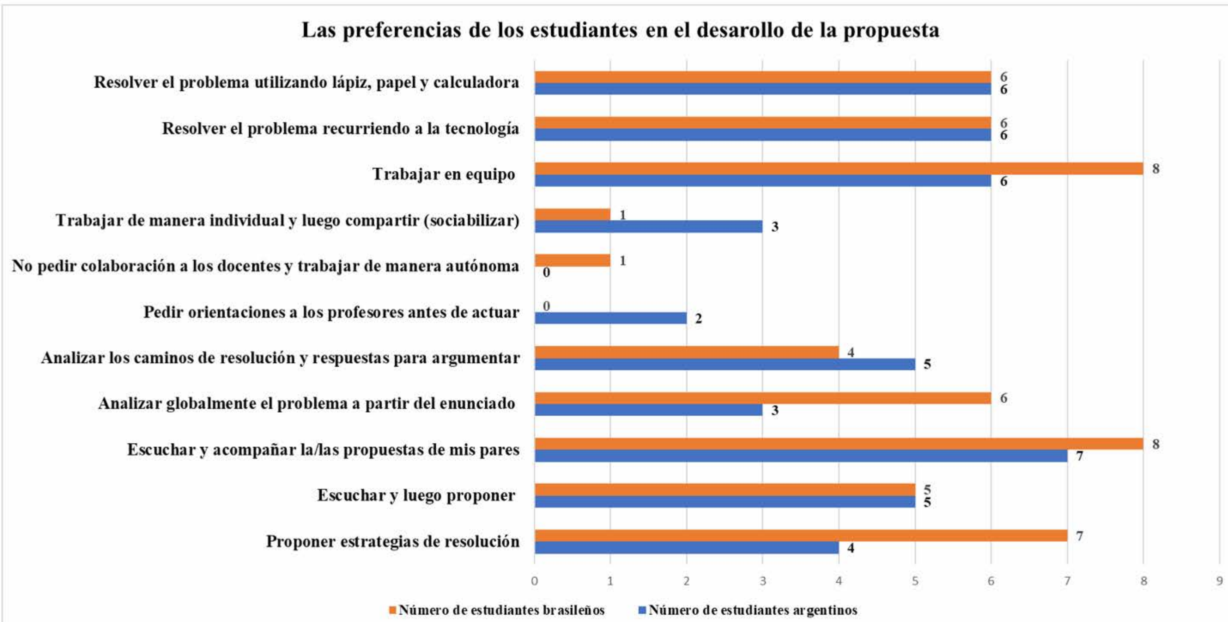


Figura 1. Representación gráfica de las preferencias de los alumnos durante el desarrollo de la actividad.

En cuanto a la posible contribución de la actividad a la formación de un ingeniero con perfil internacional, en general, los participantes percibieron que la actividad aportó en este sentido destacando que este tipo de experiencia permite un primer acercamiento a la resolución de problemas reales cuyo nivel de complejidad es aceptable para el nivel académico; ayuda a buscar soluciones a problemas a pesar de haber ciertos obstáculos, cómo comunicarse con gente con distinto idioma y distinto lugar de residencia y obtener una mayor comprensión de las posibilidades de la Ingeniería, entre otros.

Percepciones sobre los problemas propuestos

Al respecto, ocho de los 20 participantes, expresan que la manera de trabajar durante la actividad fue la misma que normalmente emplean al resolver problemas en las clases regulares de Matemáticas de sus cursos, destacando que, si bien hubo alguna diferencia, ésta se vincula a la utilización de recursos tecnológicos, por ejemplo, Excel. Por su parte, los restantes 12 estudiantes perciben diferencias significativas en el modo de trabajo que adoptaron durante la experiencia de IeC. Destacaron, por ejemplo: *nosotros mismos teníamos que encontrar el marco* *teórico de validez del problema mediante el cual pudiéramos acercarnos a la solución; no teníamos una explicación previa de cómo resolver el problema, sino que nosotros teníamos que buscar la forma de hacerlo; había diferentes puntos de vista y formas de razonar; requirió un contacto con otras plataformas diferentes de las cotidianas y trabajo de datos que no estábamos acostumbrados a ello; fue una implementación de lo que veo en el salón de clases, en clase aprendemos los cálculos y en la actividad propuesta los aplicamos*.

En la percepción de todos los participantes, las cuestiones resueltas durante la actividad pueden ser trabajadas en las propias disciplinas de sus cursos de grado. Dieciocho estudiantes no traen ningún argumento contrario acerca de esta posibilidad; otros dos, a pesar de estar de acuerdo en que es posible, hacen algunas salvedades relacionadas con el tiempo demandado por este tipo de actividad. Los alumnos que se manifestaron favorablemente a la inserción de problemas como los propuestos en el aula, entre otros aspectos destacan: *porque entonces podés ver donde podés aplicar lo que vas aprendiendo en el aula y llevarlo a la sociedad y tratar de resolver problemas; permite un abordaje distinto a los problemas que requieren de mayor pensamiento crítico para abordar distintos caminos de resolución; brinda aprendizajes para relacionarte con pares y para aprendizaje propio también; ayuda con el desarrollo de las habilidades personales; finalmente, sí, ya que tenía todos los conocimientos necesarios previamente, siendo el reto saber cuándo y dónde aplicar este contenido.*

Al ser cuestionados si les gustaría trabajar, a lo largo de sus formaciones, con problemas como los propuestos en la actividad de IeC, 18 participantes afirmaron que sí. Justifican esa respuesta por medio tanto de argumentos similares a los utilizados en las respuestas anteriores como explicitando otras percepciones positivas acerca de los tipos de preguntas trabajadas: *siento que el trabajo se hace más llevadero de esa manera; creo que es un buen trabajo mental además de que nos prepara para el campo laboral; este tipo de problemas que intentan "predecir" sucesos futuros me resulta interesante y me gustaría trabajarlos siempre; nos brinda un trabajo con el razonamiento y análisis de textos que ayuda en varias materias; encontrar una solución a un problema es a lo que se dedica un ingeniero, no importa que formación específica tenga, debe estar a la altura y es una de las razones por la que hago esta carrera; el hecho de que esté vinculado a problemas reales y los solucionemos, además de desafiarme, me deja con una sensación del deber cumplido y de que realmente podemos impactar en el mundo*.

Percepciones sobre aspectos positivos y/o aprendizaje y percepciones sobre aspectos negativos y obstáculos

Muchas de las percepciones de los alumnos sobre los puntos positivos de la experiencia y/o los aprendizajes que aporta ya han sido explicitadas en los apartados anteriores. Sin embargo, merecen ser destacadas algunas otras notas realizadas sobre estos aspectos, como, por ejemplo, las siguientes: *la actividad fue muy buena para el desarrollo de competencias en lógica y resolución de problemas; posible aprender nuevos temas matemáticos mejor uso y manejo del software; se logró simular una empresa internacional y enfatizar la importancia del español para la comunicación internacional*.

En cuanto a los puntos negativos y obstáculos, el aspecto más mencionado por los estudiantes fue el hecho de que se trataba de una actividad virtual. A pesar de darse cuenta del potencial de los recursos tecnológicos para realizar experimentos como este, señalaron que la virtualidad también, en algunas ocasiones, los enfrenta a problemas técnicos inevitables e imprevistos. Otro obstáculo que expresaron tiene que ver con la comunicación en el lenguaje matemático para compartir con sus compañeros los procesos de resolución de problemas, que a menudo los hacían con lápiz y papel.

El idioma y el uso de software fueron señalados por algunos de los participantes como obstáculos y por otros como desafíos.

Conclusiones

Esta propuesta favoreció el estudio de una matemática en contexto acorde a las exigencias profesionales de una carrera para no matemáticos.

Aunque no es habitual en las consideraciones finales de un trabajo científico, hemos optado aquí por aportar algunas voces de estudiantes que no habían sido mencionadas anteriormente porque entendemos que reafirman y enfatizan los resultados obtenidos.

En primer lugar, se transcribe el testimonio de un estudiante acerca de sus percepciones sobre la experiencia que revelan cuánto fue valorada: *estos problemas son importantes para nuestra formación profesional, no sólo para resolver problemas y realizar cálculos sino también para comunicarnos. Muchas empresas Internacionales tienen gente de diferentes países, no siempre hablan el mismo idioma y creo que ese es el mayor problema, para un Ingeniero el trabajo en grupo es fundamental, es decir, la comunicación es importante para que todos estén al tanto de lo que está pasando y cuáles son las necesidades*. Esta apreciación nos desafía a continuar diseñando, mejorando y elaborando actividades que den continuidad al proyecto de IeC.

También consideramos oportuno poner en consideración algunas de las sugerencias dadas por los estudiantes: *analizar si las actividades se pueden realizar con su debido tiempo y probablemente ver más aspectos; que haya más espacios de comunicación de ideas entre distintas universidades, ya que solo tuvimos una puesta en común de la solución final; hacerlas más seguido para desarrollar mejor nuestras habilidades personales; debería haber mayor rotación entre equipos y mayor duración del proyecto en su conjunto; realizar proyectos que involucren ingenierías específicas ya que es posible trabajar con problemas más complejos; sería interesante por último tener la resolución de las cuestiones, para esclarecer dudas*.

Estas reflexiones ejercen dos tipos de papel: perfeccionar las próximas actividades de IeC a ser realizadas y contribuir a repensar la forma en la que son abordadas las clases de asignaturas Matemáticas en los cursos de Ingeniería de Argentina y de Brasil con todos los estudiantes matriculados.

Los testimonios de los estudiantes presentados a lo largo de este artículo evidencian que la realización de actividades como la que proponemos trae beneficios tanto para la formación de los mismos como para el perfeccionamiento de nuestras prácticas docentes.

La implementación de este tipo de propuestas nos invita a replantearnos nuestras visiones sobre las Matemáticas en carreras de ingeniería y nos enfrenta a la constante necesidad de arriesgarnos y salir de nuestra zona de confort.

¡Esperamos la participación de otros docentes en este desafío! ¿Es difícil? Sin duda, pero la satisfacción de escuchar de nuestros estudiantes que efectivamente aprendieron y que vislumbraron la Matemática en el contexto específico de sus futuras actuaciones profesionales recompensa todos los esfuerzos.

Bibliografía y Referencias

Cantoral, R., Ríos Jarquín, W., Reyes Gasperini, D., Cantoral Uriza, E. A., Barrios, E., Fallas Soto, R., Castillo Bárcena, D, Cantoral Farfán, E., Galo Alvarenga, S., Flores García, R., Paredes Cancino, C, García Zaragoza, V. & Bonilla Solano, A. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 23(1), 1-19.

Cardarello Compiani, M. B., & López Pérez, M. L. (2021). *Internationalization at home: new challenges and opportunities in times of Covid*. Recuperado de http://wsa.al.senai.br/wp-content/uploads/2021/06/Internationalization-at-home-new-challenges-and-opportuni.pdf . Accedido el 29 de octubre de 2022.

Lima, G. L., Paula, M. R., Bianchini, B. L., Cossú, C. M. F. A., Santos, E. A., Gomes, E., ..., & Gonzatti, S. E. M. (2021). O Novo Normal no ensino de Ciências Básicas e Matemática na Engenharia: os caminhos abertos – e pedras neles reveladas - pelas experiências vivenciadas durante a pandemia de Covid-19. In A. M. Tonini & T. R. D. S. Pereira. (Orgs.), *Formação em Engenharia: tecnologia, inovação e sustentabilidade* (pp. 92-146). Brasília: ABENGE.

Mercat, C., El-Demerdash, M., & Trgalova, J. (2018). Perceptions of Mathematics. In S. Pohjolainen et al. (Eds.). *Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe (A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia)* (pp. 17-31). Cham: Springer https://doi.org/10.1007/s10551-019-04115-w

Rebollo-Perdomo, S. (2020). Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19. *Materials matemàtics*, 1-12.

Introdução do conceito de função: uma proposta investigativa com calculadora científica

Suellen Moura de **Paiva**
Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista
Brasil
sm.paiva@unesp.br
Sueli Liberatti **Javaroni**
Educação Matemática, Universidade Estadual
Paulista Brasil
sueli.javaroni@unesp.br
Maria Teresa **Zampieri**
Educação Matemática, Universidade Estadual
Paulista Brasil
maite.zampieri@gmail.com

Resumo

Temos por objetivo promover a discussão de uma atividade voltada para a introdução do conceito de função, discutindo os conceitos de variáveis dependentes e independentes contextualizadas no cenário do transporte urbano, utilizando a calculadora científica. Utilizamos como suporte metodológico a experimentação com tecnologias por meio da investigação matemática e o processo de Imaginação Pedagógica, ao considerarmos os possíveis diálogos e dúvidas que poderiam surgir no desenvolvimento da atividade. Ressalta-se que o uso das calculadoras para o ensino de Matemática é recomendado pelo Currículo do Estado de São Paulo – Brasil, para fins de cálculos extensos, dando enfoque ao processo de investigação e aos aspectos analíticos da situação-problema a ser resolvida. Acredita-se que essa atividade possa contribuir para que professores se sintam preparados em trabalhar com o uso das tecnologias digitais, em especial com as calculadoras, para o ensino-aprendizagem de Matemática, sendo uma alternativa investigativa para introdução do conceito de função.

Palavras-chave: Educação Matemática; Tecnologias Digitais; Recurso Didático; Calculadoras.

Introdução

No presente artigo, discutimos uma proposta de atividade voltada a estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, visando a introdução do conceito de função, relacionados a variáveis dependentes e independentes, com o uso da calculadora científica. Essa proposta está vinculada ao projeto temático intitulado "Ensino e aprendizagem de Matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor", que engloba projetos de iniciação científica, mestrado e doutorado, em que o objetivo é a investigação de possibilidades do uso de calculadoras científicas e gráficas no ensino de matemática na Educação Básica. Tal projeto é uma parceria entre o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e a Casio Brasil Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, aprovado sob Processo nº: 3221/2021 – CCP – FUNDUNESP, com vigência de 2 anos a partir de janeiro de 2022.

Ademais, ressaltamos ainda que tal proposta foi pensada e elaborada como proposta de atividade piloto, para ser aplicada pela professora Leandra (colaboradora do projeto temático) em suas aulas com o primeiro ano do Ensino Médio, para que depois pudesse ser aprimorada para ser aplicada em um curso de formação, cenário de pesquisa da primeira autora deste artigo.

Para o delineamento da proposta, utilizamos como suporte metodológico a experimentação com tecnologias (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014) por meio da investigação matemática, tendo como recurso didático a calculadora científica Casio Classwiz FX-991LAX.

Quanto à experimentação com tecnologias, os referidos autores apontam dentre outros aspectos, as seguintes características como "geração de conjecturas matemáticas; exploração de diversificadas formas de resoluções" além da "elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas" (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014, p. 51-52). E como uma tecnologia digital, as calculadoras podem proporcionar essa experimentação, já que "a exploração conceitual com uso da calculadora tem sido cada vez mais recomendada, pois permite que os alunos se concentrem nas regularidades, na análise dos resultados e não apenas no algoritmo" (Selva; Borba, 2010, p.55).

A incorporação da tecnologia em salas de aula de matemática se dá, principalmente, à medida que as tarefas sejam desenvolvidas com foco em experimentação, visualização e demonstração, características da segunda fase apontadas por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). O uso da tecnologia de forma incorporada suscita a perspectiva da criação de um ambiente em sala de aula fundamentado em ambientes investigativos.

Para atingirmos os objetivos esperados, a proposta que trazemos neste artigo foi elaborada pelos autores e discutida com os colaboradores do projeto, de modo que tal proposta fosse pensada e planejada para os anos finais do Ensino Fundamental, considerando as habilidades[1] essenciais do Currículo do Estado de São Paulo – Brasil (São Paulo, 2019).

[1] Habilidade utilizada como referência: EF09MA06.

Ainda, tal proposta contempla a competência cinco da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[2], Matemática para o ensino fundamental, sendo ela “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, p. 267, 2018). Além disso, consideramos também os possíveis diálogos e dúvidas que poderiam surgir para os estudantes no desenvolvimento da atividade, sob a luz do processo de Imaginação Pedagógica (Milani, 2015), de modo que nossas sugestões pudessem ser replicadas ou adaptadas por professores da Educação Básica, levando em consideração cada contexto escolar.

O processo do qual nos pautamos, consiste em nos imaginarmos em um cenário em que nos colocamos no lugar dos professores, antecipando uma prática docente e criando possibilidades para essa prática. Milani (2015), relata situações vividas por estagiárias do curso de Licenciatura em Matemática ao colocaram-se na posição de professoras para criar uma situação, explicitar as falas e ações dos alunos e professor e, enfim, imaginar um cenário em que o diálogo estaria acontecendo, ou seja, o resultado desse processo seria a criação de um diálogo imaginário.

Além disso, Skovsmose e Borba (2004), ao conceituarem imaginação pedagógica, declaram que esse processo “oferece possibilidades de mudança, pois a existência de alternativas mostra que a situação atual não é ‘uma necessidade’” (Skovsmose; Borba, 2004, p. 216, tradução nossa).

Posto isso, de maneira geral, temos como objetivo neste artigo apresentar uma proposta de atividade para ser desenvolvida com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, que tem como finalidade a compreensão do conceito de função, consolidando a ideia de dependência entre duas variáveis, por meio da investigação dos valores do transporte urbano de um determinado trecho da região de Bauru, cidade do interior de São Paulo – Brasil. A atividade proposta será descrita mais detalhadamente no item a seguir.

Descrição da atividade

Sugerimos que a proposta didática aqui apresentada seja realizada em grupos de 3 a 4 estudantes, ficando a critério do professor tal organização. No primeiro momento, seria interessante que o professor responsável pela turma realizasse a leitura compartilhada da atividade que será trabalhada. Por se tratar de uma atividade com um texto introdutório longo, os alunos podem aproveitar melhor essas informações quando lidas coletivamente, em que discussões a respeito do que se se é tratado em cada trecho podem vir a surgir, gerando mais interesse dos estudantes.

Nesse momento inicial, o professor poderia sugerir aos estudantes a imergirem no tema, propondo algumas questões para discussão, tais como: “vocês costumam viajar para cidades da

[2] Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a educação infantil, ensino fundamental e ensino médio no Brasil.

região?", "qual meio de transporte mais utilizado por vocês nessas viagens?", "vocês viajam em família, entre amigos ou sozinhos?", "O valor gasto é algo considerado na hora de escolher a forma de ir até seu destino?", entre outras possibilidades, esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir. No segundo momento, após a organização dos estudantes em grupos (pensando na discussão coletiva das atividades) e da leitura compartilhada da atividade, o professor deverá pedir para os estudantes discutirem entre si a melhor estratégia para solução do problema proposto, registrando suas ideias e procedimentos na folha de resposta.

A calculadora científica será utilizada no desenvolvimento da atividade para dar suporte aos cálculos e estratégias de resolução, sugerimos ainda a utilização da funcionalidade 8 da calculadora, a Planilha, como subsídio tecnológico de resolução. Um tutorial[3] da utilização da calculadora em tal funcionalidade poderá ser disponibilizado como auxílio ao uso desse recurso didático, mas por conter as respostas esperadas em cada etapa, sugerimos a utilização do mesmo como encerramento das atividades, ou seja, quando os alunos já possuem a solução do problema, podendo essa ser encontrada de outra maneira, não necessariamente a descrita no passo a passo.

Por fim, um terceiro e último momento, após a apresentação do passo a passo da ferramenta Planilha da Calculadora aos estudantes, sugerimos a reflexão e discussão das questões trabalhadas na atividade pelo professor com os estudantes.

Espera-se que a familiarização das grandezas permita aos estudantes identificarem, primeiramente, os processos de generalização e, consequentemente, a realização de conversões para o registro algébrico. Devemos destacar que o uso das calculadoras científicas no desenvolvimento da atividade deve ser visto como complemento, subsídio ou enriquecimento do estudo proposto e jamais como substituto da abordagem analítica dos conteúdos que consideramos imprescindível. Diante disso, trazemos Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) onde destacam que mesmo com tantas referências ao uso das tecnologias digitais, esse uso sozinho não é suficiente para se resolver os problemas do ensino e da aprendizagem. Sendo assim, é preciso que o professor reveja e adeque suas metodologias para usar as tecnologias com fins educativos em sala de aula.

A seguir, apresentamos a nossa proposta de atividade, onde trazemos detalhadamente e integralmente o que poderá ser proposto aos estudantes pelo professor de Matemática.

Quadro 01
Proposta de atividade

Atividade – Valor do transporte urbano
Se você utiliza o transporte urbano, provavelmente já se viu em uma situação em que não sabia se chamava um carro de aplicativo ou se iria de ônibus até seu destino. Isso acontece porque o preço é variável, e, em certos momentos, é mais vantajoso pedir um carro de aplicativo do que utilizar o transporte público de sua cidade. Sabemos que o preço do ônibus urbano é um valor fixo, cobrado a cada viagem utilizada, independente da distância que você percorre dentro de uma de suas linhas. Já nos carros de aplicativo isso não acontece porque o preço é variável. Em certos momentos é mais vantajoso, mas em outros não. Para saber se a corrida vale a pena

[3] Link do tutorial proposto para a atividade: https://docs.google.com/document/d/1TxYVv-BU7JuXcnWpxXBINIRJ4u5Za8p4/edit?usp=share_link&ouid=109673685994651539322&rtpof=true&sd=true

ou não, dentro da sua realidade financeira, é importante entender como ela é calculada. Utilizaremos o aplicativo de transporte Uber como referência em nossa atividade.

Aplicativo de transporte – oferta e demanda

Como muitos outros serviços, a Uber obedece a lei da oferta e demanda. Em resumo, são dois os motivos que podem levar a esse desequilíbrio no serviço da Uber: um pico de solicitação de corridas anormal, ou poucos motoristas disponíveis para atender corridas. Atualmente, o preço dinâmico da Uber funciona através do acréscimo de um valor fixo ao que seria o valor original da corrida, com isso, se a dinâmica é de R$2,00, basta adicionar esse valor no preço original da corrida.

Como saber o valor da viagem quando peço um Uber?

Os valores de cada viagem da Uber são definidos por **cinco critérios**:

1. **Tarifa base:** o preço inicial da viagem, um valor fixo semelhante a bandeirada no táxi; fator que sofre acréscimo no caso das tarifas dinâmicas.
2. **Preço mínimo:** apesar de partir de um valor inicial, o valor da tarifa não pode ser inferior ao preço mínimo estabelecido, resguarda os motoristas de viagens muito curtas por preços muito pequenos;
3. **Custo por minuto:** quanto você será cobrado por minuto enquanto a corrida durar;
4. **Custo por quilômetro:** quanto você será cobrado por cada km rodado na corrida;
5. **Booking fee (taxa de reserva):** possível tarifa adicional para cobrir custos adicionais presentes em todas as viagens das categorias Uber X e Juntos. Exemplo: viagens que necessitam do pagamento de pedágios.
6.

Com isso, a Uber calcula tarifa sua tarifa da seguinte forma:

VALOR FINAL = Valor base + (Valor por tempo x tempo da corrida) + (Valor por distância x distância da corrida)

Ônibus urbano – Bauru ↔ Macatuba

Para irmos de Bauru para Macatuba, e vice-versa, podemos ir por dois caminhos: passando por Lençóis Paulista (caminho A) ou por Pederneiras (caminho B), como mostra a figura abaixo. A distância entre essas duas cidades varia entre os caminhos A e B.

Figura 1. Percurso Bauru/Macatuba
Fonte: Google Maps

Podemos fazer essa viagem de três formas diferentes: de ônibus até Lençóis Paulista/Pederneiras e o restante utilizando um carro de aplicativo; somente com um carro de aplicativo; utilizando um automóvel próprio. Esse trajeto Bauru ↔ Macatuba não conta com um ônibus direto entre essas duas cidades, em ambos os caminhos (A ou B). Com isso, considere os seguintes valores cobrados no ônibus urbano para cada trajeto: Bauru ↔ Lençóis Paulista: R$18,00 e Bauru ↔ Pederneiras: R$12,08.

É possível entender e estimar o valor cobrado pela empresa Uber consultando[4] o próprio aplicativo. Basta colocar o local de partida e o destino final, como se fosse pedir uma viagem e clicar sobre o valor da categoria desejada, aparecerá um detalhamento do preço como este:

Figura 2. Detalhamento do preço no aplicativo Uber[5] entre Lençóis Paulista/Macatuba e Pederneiras/Macatuba.
Fonte: Aplicativo Uber

Como vimos anteriormente, além da distância percorrida em uma corrida, o tempo gasto em cada viagem também é levado em consideração na hora de pagar pela mesma, isso porque no cálculo do preço final essa variável também é considerada no valor a ser pago pelo passageiro. Adotemos então, a duração de aproximadamente 26min no percurso entre Lençóis Paulista↔Macatuba e 34min entre Pederneiras↔Macatuba.

Sabendo que a distância entre Lençóis Paulista ↔ Macatuba equivale a 17,5km, Pederneiras ↔ Macatuba equivale a 21,7km, o tempo de viagem de cada percurso e considerando os valores de cada passagem de ônibus citada anteriormente e a maneira como o aplicativo cobra suas tarifas por viagem, você saberia dizer qual o melhor trajeto a ser utilizado entre Bauru ↔ Macatuba e qual a melhor forma de utilizar os transportes disponíveis (Ônibus e Uber)? Utilize a funcionalidade 8 da calculadora científica (Planilha) para organização e registro de seus dados, bem como os cálculos realizados em cada etapa da atividade. Como suporte, confira no tutorial as orientações dessa funcionalidade, caso encontre alguma dificuldade com a ferramenta, discuta com os demais colegas e/ou peça ajuda ao professor.

Após a escolha do melhor trajeto e as justificativas de tal escolha, discuta com seus colegas, e registre na folha de atividades, as questões a seguir:

1) Caso você viajasse com mais dois amigos, a melhor opção financeira seria a mesma inicial?
2) Você saberia estimar o valor gasto por você e seus amigos caso optassem por utilizar ônibus + Uber e somente o Uber?
3) Poderíamos estabelecer uma relação Matemática que represente essas situações, Ônibus + Uber e somente Uber?
4) É possível determinar qual (ou quais) variável é dependente e qual (ou quais) é independente em cada situação?

Fonte: Elaborado pelas autoras

[4] Disponível em: https://www.uber.com/global/pt-br/price-estimate/
[5] Essas informações foram obtidas por meio de uma simulação de viagem no aplicativo da Uber.

Considerações Finais

Pautados na perspectiva do processo de Imaginação Pedagógica (Milani, 2015) e da experimentação com tecnologia (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014), neste artigo apresentamos uma proposta de atividade investigativa para introdução ao conceito de função com o uso de uma calculadora científica. Essa atividade faz parte do material desenvolvido em um projeto temático em desenvolvimento, que tem como propósito investigar e refletir sobre os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos mediados pelas calculadoras científica e gráfica. Esperamos que esse trabalho possa estimular a discussão do uso de calculadoras nas aulas de Matemática da Educação Básica, além de servir de auxílio ao professor para o uso desse recurso didático. Além disso, esperamos ter fomentado a situações-problemas do cotidiano de forma atrelada à abordagem dos conceitos trabalhados.

Ademais, almejamos abarcar as orientações do Currículo Paulista (São Paulo, 2019), que está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) com relação ao uso das calculadoras e da integração curricular. Entretanto, levando em consideração a importância de ir além do que é proposto nos documentos oficiais, esperamos que essa proposta, que se pautou na experimentação com tecnologias de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), provoque a discussão sobre a importância de se recorrer também à literatura científica na área de Educação Matemática na elaboração de planos de aula.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.* Brasília. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 27. 10. 2022.

Borba, M. C, Scucuglia, R. R. S, Gadanidis, G. (2014) *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 149 p.

Milani, R. (2015) *O processo de aprender a dialogar por futuros professores de matemática com seus alunos no estágio supervisionado.* 239f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro.

São Paulo (2019). *Currículo paulista:* anos finais do ensino fundamental. [S.l.: s.n.], Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/05/Habilidades-essenciais-_-Anos-Finais_Matemática_atualizada-02_05_2022.pdf Acesso em: 27. 10. 2022.

Selva, A. C. V.; Borba, R. E. S. R. (2010) *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. Autêntica,* 118 f.

Skovsmose, O.; Borba, M. (2004) Research methodology and critical Mathematics Education. In: Valero, P.; Zevenbergen, R. (Org.). Researching the socio-political dimensions of mathematics education: issues of power in theory and methodology. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 207-226.

Investigação Matemática no contexto de hortas escolares

Luciana Boemer Cesar **Pereira**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Brasil
lucianapereira@utfpr.edu.br
Marilda Ferreira **dos Santos**
Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Brasil
marildasantos305@gmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar os resultados de uma pesquisa que objetivou realizar uma experiência de Investigação Matemática no contexto de uma horta escolar com o conteúdo de volume de troncos. Para tanto, a pesquisa que se classifica como qualitativa, aplicada do tipo participante, contou com etapas em sala de aula e também no espaço da horta da escola com práticas de plantio, além disso, um questionário de avaliação foi aplicado. As ações realizadas visam mostrar que atividades práticas investigativas no contexto da Educação Matemática tendem a aproximar a Matemática da realidade e motivar estudantes na aprendizagem. Além disso, ao que tange a utilização do contexto de hortas e geometria, as ações promovem momentos de interdisciplinaridade que são fatores importantes na formação de um sujeito crítico, com bom raciocínio, competente e preparado para os desafios do futuro.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Médio; Ensino Presencial; Investigação Matemática; Pesquisa Educacional; Geometria; Horta escolar; Interdisciplinaridade; Brasil.

Introdução

O Ensino de Matemática vem passando por mudanças ao longo da história, neste sentido, a disciplina de Matemática que por vezes se apresenta marcada por dificuldades de aprendizagem, precisa ser pensada de modo a proporcionar uma Educação Matemática de forma motivadora e interdisciplinar. Sendo assim, uma forma de contribuir para motivar a aprendizagem são as atividades de campo, que no ensino de Ciências e Matemática são aquelas que envolvem “o deslocamento dos alunos para um ambiente alheio aos espaços de estudo contidos na escola” (Fernandes, 2007, p. 22). Outro fator que pode colaborar com os ensino e aprendizagem são as metodologias para o Ensino de Matemática, em especial a Investigação Matemática, que surge para superar a aprendizagem técnica, para abordar conteúdos de maneira diferenciada e possibilitar ao aluno relacionar a Matemática com seu cotidiano.

Neste sentido, atividades com hortas em pequenos espaços utilizando vasos para plantio podem contribuir para o ensino de Ciências e Matemática, ajudando a estimular os alunos a aprender de forma interdisciplinar. No âmbito do Ensino de Matemática, conceitos de Geometria podem ser incorporados na prática, afim de mostrar a indissociabilidade do conhecimento.

Diante do exposto, este texto apresenta os resultados de uma pesquisa que objetivou realizar uma experiencia de Investigação Matemática no contexto de uma horta escolar com o conteúdo de volume de troncos.

Ensino de Matemática e Horta escolar

Metodologias que visam o ensino de Matemática abordadas de forma diferenciada tem seu potencial na aprendizagem e cada uma delas tem sua particularidade na qual “almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias” (Paraná, 2008, p. 48). Neste sentido, se faz pertinente trazer alguns breves relatos de ações encontradas no meio científico sobre o Ensino de Matemática no contexto de hortas e a interdisciplinaridade.

Neste meio é comum ações desenvolvidas nas escolas com uso de sequências didáticas que explicitam os conteúdos das disciplinas e sua relação com a horta no ambiente escolar. Um exemplo desta interação é o trabalho de Trentin e Pereira (2021), que elencaram as contribuições de uma sequência de Ensino sobre horte e Geometria em uma escola do campo. Para as autoras, atividades como esta são capazes de modificar o preconceito que alguns alunos que não gostam de Matemática cultuam, e que acabam tornando o aprendizado em Matemática por vezes mais difícil. Porém, a Matemática pode ser trabalhada de diversas maneiras, tornando o aprendizado em Matemática mais fácil de compreender e mais motivador, utilizando práticas fora da sala de aula.

Com relação ao uso da metodologia de Modelagem Matemática, Schrenk e Vertuan (2018, p.01), ao partirem de uma situação-problema sobre “calcular quanto a escola poderia economizar, se ao invés de comprar alguns produtos eles plantassem na horta. Os autores concluem que “os estudantes perceberam que os conteúdos que eles aprendem e as situações-problemas que eles presenciam em sala de aula tem importância para sua vivência fora da sala de aula”.

Nesta linha, Moraes e Grützmann (2021, p. 01) ao relatarem um experiencia de horta escolar como estratégia para o Ensino de Matemática, descrevem que o objetivo foi tornar as aulas de Matemática “mais atraentes, dinâmicas e criativas, voltadas para a realidade dos alunos", com relação aos conteúdos abordados, os autores relatam que na prática realizada foi possível trabalhar com "perímetro, área, medidas e problemas matemáticos" (p.05). Além disso, sugerindo interdisciplinaridade, o projeto envolveu também a criação de Histórias em Quadrinhos sobra as medições realizadas na horta.

Na área da Matemática pode ser aplicado na implementação da horta, em especial num pequeno espaço, conceitos de geometria, na forma dos vasos e na estrutura das plantas, além de cálculos com grandezas e medidas, e razão e proporção. Sendo assim, a horta nas escolas permite que o aluno construa seu próprio conhecimento, fazendo com o que o aluno ajude a plantar, cuidar e consumir. Ou seja, a partir do contato que o sujeito tem com os objetos de conhecimento, ativa-se a produção de significados, que leva ao amadurecimento do indivíduo, o deixando pronto para a construção do próprio conhecimento (Silva, 2012).

Daneliv e Lewandowsk (2016) ao realizarem um trabalho em um 6º ano de uma escola rural, apresentaram a importância da horta escolar para o desenvolvimento de atividades educativas, desenvolvendo atividades desde o preparo do solo, implantação das culturas, tratos culturais até a colheita e degustação, que envolveram o trabalho de educação ambiental, educação alimentar, cultivo, consumo de hortaliça e compostagem. Para os autores, o trabalho desenvolvido levou os alunos a valorizarem o espaço escolar, deu significado à aprendizagem e permitiu o desenvolvimento de práticas pedagógicas direcionadas [...] aproximando o ensino da realidade cotidiana do educando, [...]possibilitou unir teoria e prática gerando aprendizagem. (Daneliv & Lewandowsk, 2016, p. 02).

As práticas com hortas também proporcionam um pequeno contato com a natureza, tornando-se uma experiência válida para o aluno que agrega diversas áreas do conhecimento na escola, tendo acesso a um laboratório vivo. Além disso, essas práticas podem ser usadas para promover a interdisciplinaridade, pois, ao realizar a "interação das disciplinas científicas, de seus conceitos, diretrizes, de sua metodologia, de seus procedimentos, de seus dados e da organização de seu ensino" (Fazenda, 2011, p.35) estamos proporcionando que projetos interdisciplinares tragam aplicabilidade de conteúdos relativos às disciplinas de Ciências e Matemática.

Logo, na formação básica dos alunos, a Matemática é uma área importante, mesmo sendo considerada complexa, tanto dentro do meio escolar quanto fora, porém, ela é essencial para o preparo dos alunos na cidadania. A Matemática demonstra dois lados, onde um é a sua obrigatoriedade e reconhecimento e sua importância no currículo, e no outro lado onde se questiona o porquê se estudar Matemática, no qual os estudantes se revoltam por não chegar em um resultado positivo em algumas questões na aprendizagem.

Investigação Matemática

A metodologia de Investigação Matemática surge como uma forma de superar a aprendizagem técnica, serve para abordar conteúdos de maneira diferenciada, possibilitando ao aluno relacionar a Matemática com situações concretas e que fazem parte de seu cotidiano. Para Saramago (2009), no âmbito do Ensino de Matemática, se faz necessário "favorecer ao aluno, a reflexão, análise e compreensão de sua vivência, de sua experiência, de sua realidade concreta e, especialmente, do que ele pode fazer nela e por ela, para transformá-la, para melhorá-la cada vez mais. (Saramago, 2009, p. 109).

Logo, com a metodologia de Investigação Matemática o aluno é induzido “a justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante seus colegas e o professor” (Ponte et al., 1998, p. 10), possibilitando que ele faça o papel de matemático, pesquisando e construindo seus conhecimentos. A Investigação Matemática se desenvolve na sala de aula em três fases:

Na primeira fase das atividades é importante que “[...]o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos colegas” (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006, p.28). Nesta fase, faz-se necessário certo cuidado, pois “se a introdução inicial do professor for demasiado pormenorizada relativamente o que “é para fazer” poderá condicionar a exploração a realizar pelos alunos” (p.28). A primeira fase deve ser breve para que o aluno não perca o interesse pela tarefa.

Na segunda fase ocorre o desenvolvimento do trabalho, após os alunos terem compreendido o que está sendo pedido, cabe ao professor observar e prestar apoio se necessário aos estudantes. Nessa fase eles começam a trabalhar em grupos e as interações do grupo são importantes para o desenvolvimento das investigações. Esta fase caracteriza a atividade investigativa como, “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e ainda a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (Ponte et al., 2009, p. 29).

Na terceira fase os educandos precisam compreender o significado de investigar, e ao expor, possibilita desenvolver a capacidade de se comunicar matematicamente, pensar sobre as atividades, intervir sempre que quiserem fazer um comentário, pois, “o professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente”. (Ponte et al., 2009, p.41).

Contudo, a Investigação Matemática o educador cria um ambiente que permite o educando não se prender na individualidade, possibilitando haver uma socialização em sala através da troca de ideias entre os mesmos, o que induz os educandos a serem criativos e ativos em sua prática.

Metodologia

A pesquisa caracteriza-se como qualitativa, aplicada, interpretativa do tipo participante. Foi realizada no Colégio Estadual de Dois Vizinhos. Este Colégio está localizado no perímetro urbano, no centro Norte do Município de Dois Vizinhos, Paraná, Brasil. Os participantes das ações foram os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da escola, do período da tarde. Também participaram um professor de Matemática que cedeu as aulas para as ações e uma professora de laboratório de Ciências que acompanhou as atividades de plantio.

O desenrolar da pesquisa se deu por regime de etapas, fazendo intervenções interdisciplinares, com o intuito de trabalhar com os alunos conteúdos acerca do objetivo de cada etapa: Organização do projeto na escola, articulação com os professores da escola e compra dos materiais necessários; ação didática na aula de Matemática com a utilização dos vasos e o conteúdo de volume de troncos de cone e cilindro na perspectiva da Investigação Matemática; ação didática com plantio de hortaliças e condimentares em vasos.; Aplicação de um questionário com a finalidade de obter a satisfação dos envolvidos nas ações.

Os dados foram coletados por meio de imagens dos momentos das ações, anotações no diário de bordo da pesquisadora e pelo questionário de satisfação. Cabe destacar, que o projeto que norteou a pesquisa foi submetido à apreciação do Comitê de Ética em pesquisa da UTFPR, sob registro CAAE: 52919021.1.0000.0177, com parecer número: 5.156.971.

Resultados

Em um primeiro momento (uma hora/aula) em sala de aula, foi apresentado aos alunos o plano de trabalho do que iria ser realizado, mostrando quais materiais seriam trabalhados e apresentado o problema matemático a ser resolvido, que seria calcular o volume de 5 (cinco) tipos de vasos, configurando a primeira etapa da Investigação Matemática.

Na sequência foram formados grupos de alunos, e cada grupo ficou com um tipo de vaso para ser calculado o volume. A atividade foi realizada com: vaso de base quadrada, vaso de base circular maior, vaso de base circular menor, vaso de base retangular maior e vaso de base retangular menor. Os materiais utilizados pelos alunos foram barbante, fita métrica e calculadora. Após a organização deles em grupos, foi entregue uma atividade na qual eles precisavam investigar qual era o volume dos vasos. Na figura 1 apresenta-se o cálculo realizado.

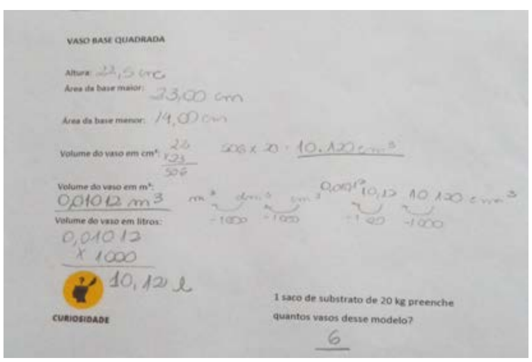


Figura 1. Realização dos Cálculos na etapa 2 da investigação
Fonte: Arquivos dos autores (2022)

Neste contexto, quando um estudante é incentivado a buscar a solução de um problema sem mostrar qual a fórmula ou o caminho a ser seguido, se instiga a criatividade na qual o aluno tem a liberdade de expor suas estratégias. Se formos observar, nesta prática existe uma investigação por trás, neste caso podemos citar a Investigação Matemática onde o participante é convidado a ser um pesquisador matemático buscando seu próprio conhecimento.

Ponte et al. (1998, p.10) afirmam que: “as atividades de investigação contrastam claramente com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino aprendizagem, uma vez que são muito abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir". Os estudantes puderam por meio das medidas realizadas nos vasos propor maneiras de se chegar ao valor do volume dos vasos, também puderam em grupo realizar discussões e troca de conhecimentos entre os colegas.

No encontro seguinte (uma hora/aula), a pesquisadora trabalhou com os alunos uma fórmula existente para o cálculo de volume (figura 2) e explicou que os vasos são representações geométricas de troncos de cone e de pirâmide. Além disso, foram feitos alguns questionamentos relacionando volume e quantidade de substrato que cada vaso precisaria. E também foi trabalhado a conversão de unidades de cm^3 para litros.

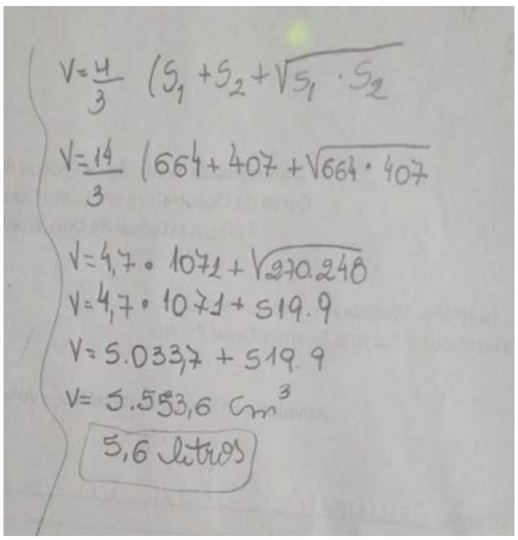


Figura 2. Realização dos Cálculos de volume dos vasos com a fórmula de volume de troncos
Fonte: Arquivos dos autores (2022)

Na fórmula utilizada era necessário o cálculo de área da base maior (s_1) e base menor (s_2), dessa forma foi necessário o trabalho com conteúdos de unidades de medida, volume de tronco de cone e pirâmide e área de figuras planas. Corroborando com Moraes e Grützmann (2021), nesta atividade também se destaca algumas contribuições como "dar significado a aprendizagem; tornar o conhecimento concreto, de maneira interativa e colaborativa; estimular a compreensão do conteúdo através da discriminação visual e concreta, fixando conceitos; desenvolver a capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais; adquirir estratégias de resolução". (Moraes & Grützmann, 2021, p. 07). Logo, as atividades com Investigação Matemática promovem momentos de desafios que podem gerar competências de raciocínio para além do problema matemático em questão.

Após a realização da Investigação Matemática, os alunos foram convidados a realizar o plantio das hortaliças nos vasos que calcularam o volume. Neste contexto, Daneliv e Lewandowsk (2016) relatam que a importância da horta para a educação escolar se verifica ao propor o desenvolvimento das atividades educativas, onde desenvolvem etapas de plantio. Para os autores, essas ações levam os alunos a valorizarem o espaço escolar, dando significado à aprendizagem.

Além da prática de plantio, foram conceituados alguns aspectos referentes à utilidade das plantas e também informações sobre quais plantas podem ser plantadas juntas no mesmo vaso, e quais precisam ficar sozinhas no vaso. Uma sugestão, por exemplo, de plantas que podem ser plantadas em vasos juntas seria o Alecrim e a Sálvia, já a losna, precisa ficar sozinha. Neste momento da prática de plantio foi possível consolidar a interdisciplinaridade. Na sequência serão apresentadas as imagens dos momentos de plantio de cada tipo de vaso, figura 3.

Figura 3. Realização do plantio nos vasos que calcularam o volume
Fonte: Arquivos dos autores (2022)

O processo interdisciplinar pode ser percebido ao longo de toda prática. Cada grupo ficou responsável por plantar o tipo de vaso que havia calculado o volume. Os temperos e condimentares plantados foram: Alecrim, Osmarim, Sabia Verde, Arruda, Manjericão verde, Manjericão Roxo, Losna, Alcachofra, Manjerona, Hortelã, Menta, Kinor, Cidró, Alho Poró, Estragão, Estévia, Orégano, Tomilho, Coentro, Lavanda, Poejo e Boldo. Contudo, os alunos se mostraram interessados e participativos nas atividades, ajudando e aprendendo a fazer o plantio correto. Além disso, eles questionaram muito sobre "para que serve" cada tipo de tempero e condimentar.

Após a realização das ações, foi aplicado um questionário de satisfação para avaliar as atividades realizadas. Foi um total de dezesseis alunos que responderam ao questionário de satisfação. Os dados obtidos pelo questionário mostram que a maioria considerou as ações como bom e ótimo, sendo 62,5% como bom, 25% como ótimo e 12,5% como regular. Dessa forma, este resultado mostra que as ações foram bem aceitas pela maioria dos estudantes.

Contudo, no geral as ações realizadas contaram com a participação ativa de todos os alunos dessa turma, e espera-se que ao menos as ações tenham mostrado que é possível utilizar conceitos de Matemática e Ciências no contexto de hortas.

Conclusão

Acredita-se que as ações contribuíram com a escola positivamente, trazendo uma proposta de ensino interdisciplinar e mostrou-se que é possível construir uma horta em pequenos espaços utilizando vasos de diversos formatos. Além disso, o ensino através de ações didáticas no meio escolar contribui com o aprendizado e desenvolvimento dos alunos, pois eles participam das aulas com mais interesse pelo conteúdo.

E assim foi na ação realizada, os alunos se interessaram pela atividade, tendo participação, tanto nas etapas da Investigação Matemática realizando os cálculos, quanto no plantio. Ao realizar o cálculo do volume dos vasos, os alunos puderam relembrar conteúdos de Geometria já vistos nas aulas de Matemática anteriormente e além do mais puderam ter acesso a informações técnico-científica sobre o plantio e a oportunidade de replicar as ações em suas residências.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA e da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

Referências e bibliografia

Daneliv, L.; Lewandowski, H. (2016). Horta escolar: um instrumento ecoalfabetizador no Ensino Fundamental. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_cien_unicentro_luciodaneliv.pdf

Fazenda, I. (2011). *Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: Efetividade e ideologia*. 6 ed. São Paulo: Loyola.

Fernandes, J. A. B. (2007). *Você vê essa adaptação? A aula de campo em ciências entre o retórico e o empírico*. Tese (doutorado) - Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-14062007-165841/publico/TeseJoseArturBarroso.pdf

Moraes, S. C. R., & Grützmann, T. P. (2021). A Horta escolar como estratégia para o Ensino de Matemática*. In: XIV EGEM – Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Pelotas – RS – Brasil.* *https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/002.pdf*

Paraná. Secretaria de Estado da Educação. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica para a disciplina de Matemática***:** Curitiba: SEED. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P.; Brocardo, J; Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica editora, 2009.

Silva, J. A. (2012). *Educação em Ciências: epistemologias, princípios e ações educativas***.** 1ª Ed. CRV, Curitiba-PR.

Schrenk, M.J., & Vertuan, R.E. (2018). Modelagem Matemática e horta escolar: o ensino de Matemática aliado às experiências dos estudantes. *VIII EPMEM – Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, Cascavel – PR- Brasil*. http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPMEM/VIII_EPMEM/paper/viewFile/766/388

Trentin, E.S., & Pereira, L.B.C. (2021). Horta e Geometria: contribuições de uma sequência de Ensino no contexto de uma escola do campo. *Educação Matemática em Pesquisa: perspectivas e tendências, (1)*. https://dx.doi.org/10.37885/201202423

Investigando a função quadrática com calculadora: uma discussão com estudantes de uma escola pública paulista

Franciele Santos **Teixeira**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
fs.teixeira@unesp.br
Maria Teresa **Zampieri**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
maite.zampieri@gmail.com
Sueli Liberatti **Javaroni**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
sueli.javaroni@unesp.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos e discutimos um recorte de uma pesquisa de Mestrado em andamento. Buscamos abordar de que maneira estudantes de uma disciplina de uma escola pertencente ao Programa de Ensino Integral, vinculada à diretoria de ensino - regional de São Carlos, São Paulo, Brasil, participam de um processo de investigação matemática através de uma indagação feita pelas proponentes da disciplina. A discussão é fundamentada a partir da tentativa dos estudantes em conferir seus resultados das raízes de funções quadráticas propostas pela professora de Matemática desses alunos. A partir disso, foi feita uma pergunta aos estudantes de modo que pudessem pensar em aspectos da função do segundo grau e explorar a calculadora, principalmente para fazer testes para a criação de conjecturas. Desta forma, destacamos o processo de investigação através de indagações aos estudantes e como ele se sucedeu por meio da calculadora científica.

Palavras-chave: Investigação matemática; Função polinomial de segundo grau; Calculadora científica; Tecnologias digitais; Disciplina eletiva.

Introdução

Neste artigo abordamos um recorte de dados gerados em uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento. Tal pesquisa tem por objetivo compreender as possibilidades propiciadas pelas calculadoras científicas e gráficas na abordagem de conceitos matemáticos por estudantes do Ensino Médio.

O cenário de investigação desta pesquisa é composto pelo oferecimento e desenvolvimento de uma disciplina eletiva[1] em uma escola pública pertencente ao Programa de Ensino Integral (PEI)[2], mais especificamente na Escola Estadual Professor de Oliveira Rocha. A disciplina eletiva ministrada é intitulada "Calculática: explorando questões matemáticas do cotidiano através de calculadoras" e tem como objetivo discutir conceitos matemáticos, de maneira investigativa, atrelados ao cotidiano dos estudantes, tais como: orçamento familiar, taxa de juros, entre outros.

Neste artigo, apresentaremos e discutiremos um recorte dos dados referente ao primeiro encontro. Neste encontro inicial buscamos deixar os estudantes livres para que explorassem como achassem melhor a calculadora científica, de modo que pudéssemos observar o que emergiria desse primeiro contato. Um grupo de alunos escolheu procurar na calculadora como fazer para explorar a função polinomial de segundo grau, conteúdo que estava sendo abordado na disciplina de Matemática desses estudantes. Ao longo do texto, focaremos nas falas e nas discussões levantadas pelos alunos, pois esse movimento fez com que outro grupo se envolvesse na investigação e até mesmo a professora da escola, também responsável pela disciplina eletiva. As discussões levantadas e indagações feitas foram baseadas no convite à investigação de Skovsmose (2000) e Ponte (2010) e na experimentação com tecnologias (Borba et al., 2021), buscando instigar os estudantes.

Ressaltamos ainda que a pesquisa é vinculada ao projeto temático "Ensino e aprendizagem de Matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor", sendo uma parceria entre o Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e a Casio Comercio Ltda. Salientamos ainda que a pesquisa foi aprovada no Comitê de Ética de Bauru, número de processo 63584122.8.0000.5398.

Referencial Teórico

Entendemos como tecnologia digital o conjunto de tecnologias que propicia a transformação de qualquer linguagem ou dados em zeros ou uns (0 e 1) e também apresenta como forma final na tela de um dispositivo digital alguma linguagem conhecida por nós, seja ela textual, imagem, vídeo, entre outros (Cunha, 2018). Dessa maneira, entendemos que as calculadoras científica e gráfica são tecnologias digitais e que elas podem contribuir no processo de ensino-aprendizagem.

O uso dessa tecnologia digital é defendido por alguns autores (Selva & Borba, 2010; Bonafini, 2004) por ser um objeto portátil e pelo seu possível manuseio em ambientes fora da sala de aula. Dessa forma, a calculadora pode ser uma aliada para que estudantes explorem, pensem em problemas e possam investigar com ela, pois defendemos que o apertar de teclas deve estar ligado ao levantamento de conjecturas, podendo validá-las, representar de múltiplas maneiras e ressaltando a possibilidade de realizar tentativas e erros (Zampieri, 2018). Além disso, "é importante ressaltar que a calculadora não resolve por si só o problema, ela não determina a operação, nem como a mesma deve ser digitada no teclado e, nem também, interpreta o resultado obtido. Todas essas tarefas devem ser realizadas pelo aluno, que é o ser pensante na aprendizagem" (Selva & Borba, 2010, p.46).

Sendo então uma tecnologia digital, a calculadora pode ser utilizada como possibilidade para metodologias alternativas em sala de aula e com isso atrelamos seu uso a experimentação com tecnologias de Borba et al. (2021). Esses autores destacam que a experimentação proporciona "a descoberta de padrões ou singularidades entre apresentações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos. Há, assim, uma dimensão "empírica" envolvendo pensamento e aprendizagem matemática" (Borba et al., 2021, p.58).

Ligada a essa compreensão, dialogamos com Skovsmose (2000) acerca dos cenários para investigação, que para ele "é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações" (Skvosmose, 2000, p.72). O convite à investigação é simbolizado por perguntas do tipo "O que acontece se…" e partem do professor. Já para Ponte (2010, p.15), "investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões", ou seja, busca-se compreender algo de modo aprofundado.

Ao fazer perguntas e dependendo da maneira que são feitas, o professor pode desafiar os estudantes a aceitarem o desafio. E assim, "quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo" (Skovsmose, 2000, p.72).

Dessa forma, acreditamos que a calculadora pode ser uma aliada a esse processo investigativo, proporcionando ambiente de discussão entre estudantes-estudantes e estudantes-professores. E ainda, ela pode ser o ponto de partida para curiosidades ou questões a serem postas aos educandos, de forma que discutam e testem possibilidades. Na seção a seguir apresentamos uma discussão feita em sala de aula em que identificamos esse movimento.

Descrição do Momento e Análise da Atividade

Toda a proposta das aulas da disciplina eletiva foi feita pela primeira autora deste texto e Mirella, professora da escola. Dessa maneira, por ser uma turma de anos diversos, 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio, optamos nesse primeiro encontro em solicitar que os estudantes se apresentassem, falando nome, ano e se a eletiva havia sido a primeira opção de escolha dos alunos. Além disso, pedimos para que respondessem um formulário dando sugestões de temas para serem discutidos ao longo da disciplina. Em seguida, expomos que teríamos acesso a calculadora científica modelo fx-9911lax e a calculadora gráfica modelo cg-50 posteriormente devido a parceria com a Casio. Explicamos que para aquela aula havíamos planejado que os estudantes explorassem livremente a calculadora científica. Com esse movimento, pensamos em ver como os educandos reagiriam, em um primeiro momento, à calculadora e o que emergiria disso. Ademais, antes dos estudantes começarem a explorar, fizemos uma pequena apresentação sobre alguns menus da calculadora e como acessar algumas de suas funcionalidades.

Com as informações dadas, um grupo formado por dois estudantes escolheu explorar o conteúdo de função quadrática, pois era o que estava sendo abordado na disciplina de Matemática naquela ocasião. Deste modo, não havíamos preparado a investigação para um tema específico e a discussão surgiu conforme a exploração desse grupo e de seus interesses. Sendo assim, destacamos que foram encorajados desde o início da disciplina eletiva a discutir com os colegas, trabalhando em grupos, conforme aponta Ponte (2010).

Para a discussão sobre função quadrática, os estudantes utilizaram o menu "Equação/Função" referente a funcionalidade "A" da calculadora. Nessa funcionalidade os discentes podem digitar a função ou equação desejada e a calculadora retorna os valores das raízes, reais ou complexas, x mínimo ou máximo e y mínimo ou máximo de uma função do segundo grau.

Figura 1. Interface da calculadora científica (Autoria própria).

Em um primeiro momento, uma dupla de estudantes estava usando a calculadora para conferir se a tarefa que a professora de Matemática havia deixado estava correta, então substituíram os valores de *a*, *b* e *c* da função $f(x) = x^2-(\frac{3}{2})x-(\frac{5}{2})$, nesse caso com a=1, b=$-\frac{3}{2}$ e c= $-\frac{5}{2}$. Porém, ao conferirem o que fizeram no caderno e o que estava aparecendo no visor da calculadora, perceberam que obtiveram raízes diferentes. Com isso, indagamos:

> Você está vendo se a calculadora fez certo? [Maria Teresa]
> Estamos só corrigindo. [Estudante 1]
> Ela (a calculadora) acertou? [Maria Teresa]
> Ela acertou, mas eu fiz errado. [Estudante 1]
> E você achou o erro? [Maria Teresa]
> Achei. Eu troquei o "b" pelo "c", ao invés de colocar o "b" aqui (aponta para o caderno) eu coloquei o "c". [Estudante 1] (Estudante 1 fez referência aos parâmetros *a*, *b* e *c* da função)

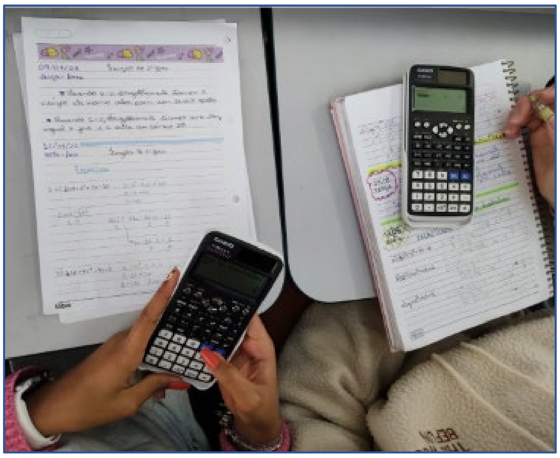


Figura 2. Estudantes manuseando a calculadora (Autoria própria).

Com essa discussão dos estudantes vimos uma oportunidade de continuar debatendo sobre algumas características da função do segundo grau. Com isso, perguntamos: “A calculadora não nos fornece o valor do delta, apenas as raízes, será que a partir dos valores delas conseguimos encontrar o delta dessa função?”. Posto isso, “por mais modesto que seja, há sempre algo que o professor pode fazer para captar a sua atenção: uma pergunta, uma observação, um desafio” (Ponte, 2003, p.12). Assim, ao colocarmos essa questão, fizemos um convite aos estudantes para que eles adentrassem em um cenário para investigação, como propõe Skovsmose (2000). Entretanto, o autor reforça que um ambiente de aprendizagem só se torna um cenário para investigação se os estudantes aceitam o convite. E foi o que aconteceu, pois após a pergunta, a dupla de educandos compartilhou-a com outros colegas, colocando-os na discussão para que pensassem juntos. Agora em um grupo maior, os estudantes decidiram explorar o problema proposto utilizando a calculadora e fizeram algumas tentativas. Com esse movimento, além de discutir a questão do delta da função de segundo grau, para o caso dado, o grupo começou a explorar alguns recursos da calculadora:

> O que são esses botões ‘ALPHA’ E ‘SHIFT’? [Estudante 2]
> É porque assim, está vendo que aqui tem duas cores, aí você, pra você querer o rosinha você tem que apertar o “alpha” e apertar aqui, entendeu? Isso que a Mi (uma das professoras proponentes da disciplina) me falou. Ah, equação, número de incógnitas? Não sei, você viu, Estudante 3? Vai… [Estudante 3]

Para uma primeira tentativa, esse grupo tentou utilizar a funcionalidade “1-Calcular” da calculadora científica, colocando os valores já conhecidos de *a*, *b* e *c* da função que tinham testado, depois sugerimos que testassem mais valores, destacando a experimentação com tecnologias, pois estava sendo proporcionado a esses estudantes “exploração diversificada de soluções, envolvimento com um novo tipo de linguagem [ressaltamos a tecnológica devido ao uso da calculadora] na comunicação matemática, além da escrita e identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado” (Borba et al., 2021, p.58).

Vendo a movimentação do grupo, a professora Mirella, com quem fizemos parceria para o desenvolvimento da disciplina eletiva, se aproximou e indagou o que estava acontecendo. Os estudantes relataram que fizemos uma pergunta e que estavam tentando descobrir se havia alguma maneira de fazer o que foi pedido. Encaramos essa movimentação como positiva, já que a professora também se colocou no processo de investigar, e tentou fazer esse movimento diretamente no papel e trazendo os discentes para a discussão.

A partir da raiz ela chegou na equação e depois chegou no delta. Mas o que é esse lance de menos b sobre a. Tem alguma lógica? [Estudante 3]
Essas aqui não são as raízes da equação? Então essa equação é desse tipo aqui: x menos uma raiz vezes x menos a outra raiz. [Professora Mirella]
Ah, porque isso aqui tudo tem que ser igual a zero, né? [Estudante 3]

Por uma das raízes da função de segundo grau que os estudantes estavam manuseando ser racional, os educandos tiraram dúvidas sobre operações realizadas, além de tentarem recordar alguns conceitos da função do segundo grau com a professora.

Essa daqui, por que $x - \frac{5}{2}$? [Estudante 3]
Porque eu fiz x menos uma raiz e x menos a outra raiz. [Professora Mirella]
Mas o que isso quer dizer? [Estudante 3]
Hum, o que isso quer dizer? O que significa a raiz de uma equação? Significa o número que eu vou colocar aqui e fazer isso daqui dar zero, certo? [Professora Mirella]
Certo! [Estudante 3]
Então, uma equação do segundo grau ela é quebrada em dois fatores desse tipo aqui. Ela vai ter duas raízes, então eu posso escrever $ax^2 + bx + c = 0$, isso é uma equação do segundo grau ou eu posso escrever x menos a primeira raiz e x menos a segunda raiz igual a 0. Aí, disso daqui, quando eu faço a distributiva aqui, aqui eu tinha número, aqui eu não tenho, então vai ficar: x ao quadrado, menos x vezes x2, menos x vezes x1, aqui menos com menos mais e aqui -x1x2 e igual a 0. [Professora Mirella]

Destacamos que a maneira que foi desenvolvido o raciocínio, foi ressaltado aos estudantes que o valor do coeficiente *a* era igual a 1 e por esse motivo não precisávamos pensar nele por enquanto, mas de qualquer forma a professora destacou que por ter aparecido números racionais na expressão após fazer a distributiva $(x^2-(3/2)x-(5/2))$, haveria a possibilidade de multiplicar a expressão encontrada por 2. A partir dessa discussão, a professora e os estudantes conseguiram ainda comentar sobre as relações de Girard e se essa seria uma maneira de encontrar o delta referente a função do segundo grau dada.

Percebemos o interesse dos estudantes e que houve algum entendimento, já que depois dessa discussão direta com a professora e as dúvidas tiradas, eles se reuniram novamente e conversaram sobre o que foi feito. Sendo assim,

> A forma como o professor interage com os alunos de um grupo é também de grande importância. Se não responde às perguntas dos alunos, estes podem perder sua motivação para continuar a trabalhar na tarefa. Se dá a resposta, ele anula a maior parte do benefício que a tarefa pode ter para aprendizagem dos alunos. Isto mostra como o professor tem que lidar permanentemente com muitos dilemas na condução da comunicação na sua sala de aula. (Ponte, 2010, p.24).

Portanto, apesar dessa aula ter sido um primeiro contato com a calculadora, os estudantes começaram a adentrar no processo de investigação e com isso destacamos a forma como a professora da escola e nós contribuímos para esse contato inicial. Assim, buscamos ao longo da disciplina instigar os estudantes a investigar em matemática, sendo capazes de formular questões que podem evoluir conforme o trabalho avança (Ponte, 2010). Dessa forma, ao longo da disciplina temos nos debruçado a instigar os alunos a realizarem investigações matemáticas.

Considerações Finais

Ao longo deste artigo expomos um recorte de dados de uma pesquisa de mestrado, que mostra a discussão entre um grupo de alunos com as proponentes da disciplina acerca de abordagens do conteúdo de função quadrática na calculadora científica.

Por meio dos questionamentos que convidaram os estudantes a realizarem uma investigação, percebemos que a calculadora despertou o interesse deles, possibilitando a realização de testes e o levantamento de conjecturas e respectivas validações/refutações acerca de um conteúdo que eles estavam estudando concomitantemente na disciplina de Matemática.

O questionamento acerca da possibilidade de encontrar o delta da função polinomial de segundo grau a partir de suas raízes foi o convite para que os estudantes iniciassem a investigação com a calculadora. Percebemos que os estudantes aceitaram esse convite, o que possibilitou uma discussão maior entre os colegas de sala e as proponentes da disciplina acerca do significado das raízes da função quadrática. Almejamos que esse movimento aqui retratado contribua para fomentar o diálogo acerca do uso das calculadoras em atividades de cunho investigativo.

[1] As disciplinas eletivas são uma estratégia para ampliar o universo cultural do estudante e fazem parte da Parte Diversificada do currículo. Ela é baseada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (artigo 26), em que é fornecida as diretrizes para a concepção das disciplinas eletivas nas escolas pertencentes ao PEI (São Paulo, 2014, p. 14 e p.28). Além disso, os estudantes escolhem qual disciplina eletiva farão durante o semestre.
[2] O Programa de Ensino Integral tem como intuito "lançar as bases de um novo modelo de escola e de um regime mais atrativo na carreira do magistério" (São Paulo, 2014, p.6), além disso esse modelo busca focar no protagonismo juvenil e privilegiar os "quatro pilares da Educação adotados pela UNESCO: o aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a ser" (São Paulo, 2014, p.8).

Bibliografia e referências

Bonafini, F. C. (2004). Explorando conexões entre a matemática e a física com o uso da calculadora gráfica e do CBL [Doutorado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"]. Repositório Institucional UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91120

Borba, M. C; Scucuglia, R. R. S. & Gadanidis, G. (2021). Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. (3rd ed). Autêntica.

Cunha, M. F. (2018). Tecnologias digitais em cursos de licenciaturas em Matemática de uma universidade pública paulista [Doutorado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"]. Repositório Institucional UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/180540

Ponte, J. P. da. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat, 1-23.

Ponte, J. P. da. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21, 13-30.

São Paulo (Estado). (2014). Diretrizes do Programa de Ensino Integral. São Paulo: [s. n.]. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/342.pdf Acesso em: 28 nov. 2022.

Selva, A. C. V. & Borba, R. E. S. R. (2010). O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. (1st ed). Autêntica.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. Bolema, 14, 66-91.

Zampieri, M. T. (2018). Ações colaborativas de formação continuada de educadores matemáticos: saberes constituídos e mobilizados [Doutorado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"]. Repositório Institucional UNESP. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152733

La clase de Matemática transformada en un laboratorio: Una revisión de literatura

Adrián Antonio **Marín-Zapata**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
aantonio.marin@udea.edu.co
María Camila **Ocampo-Arenas**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
camila.ocampo@udea.edu.co
María Denis **Vanegas** Vasco
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
maria.vanegas@udea.edu.co

Resumen

El objetivo principal de esta revisión panorámica de literatura es conocer en términos generales, esas concepciones en el campo investigativo, frente a la clase de matemáticas transformada en espacio de experimentación y construcción del saber matemático. Para esto, se realiza la búsqueda en las bases de datos Dialnet y Scielo a partir de las categorías de búsqueda y selección de la información; además, es posible identificar dentro del análisis de los textos leídos, la importancia del aprendizaje experimental que se transforma en aprendizaje significativo, y con esto las relaciones entre los estudiantes y el saber matemático se modifica. Al implicar de igual forma la transformación de las maneras de comprender el mundo, por parte de los estudiantes que asumen las matemáticas como una alternativa para entender y descifrar la realidad.

Palabras clave: Clase de matemáticas; Laboratorio; Aprendizaje experimental; Saber matemático; Aprendizaje Significativo.

Introducción

Es de vital importancia para el campo de la Educación Matemática en general, posibilitar la transformación de las formas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en los diferentes contextos de la educación. En este sentido, la reconfiguración de la clase de matemáticas es una apuesta valiosa que puede posibilitar dicha transformación. Una de estas posibles formas de reconfiguración yace en concebir a la clase de matemáticas como un laboratorio para la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. Esta forma de ver la clase de matemáticas permite, de un lado, ver al estudiante como un científico en la clase de matemáticas, estableciéndose como un sujeto que construye conocimiento; y de otro lado, posibilita un ambiente aprendizaje rico en diversas maneras de llevar los conocimientos matemáticos a los diferentes contextos. Releyendo a Larrosa (2006) en términos de lo que posibilita concebir la clase de matemática como un laboratorio, da lugar a *experienciar* dicha clase como aquello que *nos pasa* y no como eso que pasa; es decir, que permite la transformación de los sujetos.

Debido a lo anterior, surge el interés de indagar en esta revisión de literatura sobre las experiencias vividas dentro de las clases de matemáticas al ser transformadas en espacios de experimentación y construcción de los saberes matemáticos. En primer lugar, se aborda la metodología que guía esta revisión; luego, se describen en términos de categorías los documentos hallados en diferentes bases de datos referidas a i. La concepción de la clase de matemáticas como un laboratorio, ii. Las formas de concebir el saber matemático en relación a la clase de matemáticas vista como laboratorio; por último, se presenta unas conclusiones. En esta revisión se encontraron 25 artículos, de los cuáles, luego de una depuración basada en criterios de búsqueda, se analizaron 7.

Metodología

En relación con el objetivo de este escrito, se emplea una revisión panorámica de literatura, la cual, según Guirao (2015) pretende identificar los conceptos principales que sustentan los laboratorios en el área de matemáticas, las principales fuentes y tipos de evidencias disponibles que den cuenta del uso de los mismos en otros escenarios para reconocer potencialidades y asuntos por mejorar a la hora de utilizarlos.

En este sentido, para dicha revisión, se aplica una búsqueda sobre las bases de datos Dialnet y Scielo, las cuales fueron seleccionadas por el posicionamiento en la comunidad investigativa de Educación Matemática y por la accesibilidad que se tiene desde la universidad a la que pertenecen los autores.

Para el proceso de búsqueda se utilizaron las ecuaciones de búsqueda: Laboratorios de matemáticas + aprendizaje; aprendizaje experimental + matemáticas, estas permitieron reconocer los avances investigativos en el área, sin embargo, fue necesario utilizar algunos criterios de selección dado el volumen de información encontrada. Dichos criterios fueron:

i. Que en título, resumen o palabras claves, se refiera explicita e implícitamente a las ecuaciones de búsqueda.
ii. Se seleccionan documentos en habla hispana.
iii. Se seleccionan documentos de acceso abierto.

La búsqueda arrojó 25 textos, de los cuáles con base a los anteriores criterios se seleccionaron 7. Los textos se analizaron por medio de fichas de lectura y una tabla de organización cronológica. A continuación, se describe el panorama investigativo hallado.

Resultados: posibilidades para la transformación de la clase de matemáticas en un laboratorio experimental

De acuerdo con lo anterior, se identifican dos categorías de importancia para la investigación. Estas son: i. El saber matemático en relación al aprendizaje basado en la experiencia. ii. Comprensiones de los laboratorios en la clase de matemáticas. A continuación, se definen las categorías establecidas.

El saber matemático en relación al aprendizaje basado en la experiencia

A lo largo de esta revisión de literatura, cobran vida algunas comprensiones frente a la creación de aprendizajes significativos en los estudiantes, desde lo vivido y experimentado, como alternativa a esas maneras tradicionales de aproximarse al saber matemático y que este tiene sentido en el mundo real. Es por esta razón, que Casallas (1999) problematiza que “en nuestros estudiantes, no basta con existir físicamente en el entorno para comprender la realidad que vive, es mediante el lenguaje que construimos y comprendemos la realidad” (p.1). Un lenguaje que en las palabras de Rojano (1994) es entendido como las matemáticas y en especial las matemáticas escolares, que comienzan a redefinir esas relaciones entre el saber matemático y los estudiantes, ya que “los sujetos son vistos como usuarios potenciales del lenguaje matemático” (p.2).

En estas posturas, se reconoce una alternativa que conduce desde los argumentos a la factibilidad de un proceso de creación de un espacio, donde el uso de ese lenguaje matemático dentro de lo cotidiano sea una constante y posibilite esa cercanía al mundo real. Así mismo, se establece que en el proceso de transformación de las relaciones estudiantes y saber matemático, se reconozca la necesidad de un cambio, en el que las clases de matemáticas se conviertan en espacios donde la posesión del saber se construye en esa interacción entre el mundo y los conceptos. Ya que, como tarea para redefinir la labor de la escuela, “debemos transformar el conocimiento escolar hacia uno que enriquezca las interacciones de los estudiantes con el entorno” (Casallas, 1999, p.4).

Por otro lado, de esos cambios que son necesarios generar en las clases de matemáticas partiendo del aprendizaje experimental, los autores, hacen un llamado a reflexionar, respecto al proceso de enriquecimiento de la interacción entre el estudiante y el entorno. Aspecto que repercute en la relación de una u otra forma del estudiante y el saber matemático, entrando en juego elementos históricos de las concepciones propias de las matemáticas.

Unas concepciones de las matemáticas, que han implicado que sean entendidas simplemente desde la exactitud y la infalibilidad de sus postulados, generando un estancamiento en la producción de ideas y la comprensión de otras; ya que como dicen Godoy et al. (2014) “por tradición y facilidad en matemática el rigorismo ha sido tomado en alta estima, mientras que el ensayo y error de la experimentación se subestima” (p.116). Aspecto que dentro del espectro escolar; muchos ven como improcedente proponer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde el proceso en el cual el saber matemático se construye al experimentar con el mundo de las ideas y el mundo real; y no solo desde conocer o memorizar conceptos, y realizar listas de ejercicios sin ningún fin práctico o relación con alguna situación de la realidad.

Comprensiones de los laboratorios en la clase de matemáticas

De lo improcedente, al salir de la norma establecida para enseñar y aprender matemáticas, surgen alternativas que redefinen las concepciones que se tienen respecto a esta ciencia. Es así que, Jiménez (2010) plantea que existen “dos formas básicas de concebir los conceptos matemáticos: una como entes abstractos y otra como entes que tienen relación con el mundo” (p.3). aspecto que en términos de esta investigación repercuten en el valor que va tomando el acto experimental, y las implicaciones que tiene en un ambiente en el cual se pretenda enseñar y aprender matemáticas, con alternativas en las que conocer al mundo sea un medio para que el estudiante se relacione con el saber de forma intencionada. A continuación, se presentan dos concepciones de los laboratorios rastreados.

Laboratorios intencionados. En este apartado, se presentan algunas de las experiencias relacionadas a la creación de laboratorios en la escuela, bajo una intención concreta. En este sentido los planteamientos de Godoy et al. (2014) y Jiménez (2010) proponen que dentro de la creación y descripción del cómo la clase de matemáticas se convierte en un laboratorio, está presente la idea, de que dentro de este espacio de formación no se subestima el error producto del experimentar; sino, que debe dar importancia a la capacidad para identificar el error y aprender de ello y poder pensar en las matemáticas y sus conceptos como esos entes que tienen mucho que ver con el mundo.

Para ello, él maestro es visto como un artífice de posibilidades, donde él construye las condiciones en las que el saber se transforma en la medida en que llega al estudiante y repercute en sus formas de comprender el mundo, desde lo funcional de los conocimientos y en este caso del saber matemático, ya que como dice García (2016) “el educando asiste a la escuela con la intención de aprender algo funcional, algo que le sirva para la vida, pero la génesis de la funcionalidad de los aprendizajes está en los conocimientos y sentimientos previos” (p.3).

Bajo esta lógica de construir conocimientos a partir de la experiencia, no solo se aporta al estudio de las matemáticas dentro del ambiente escolar, sino que también se aporta a las dinámicas de relacionamiento entre los individuos, ya que como afirma Godoy et al (2014) al "hacer prácticas en los salones de clases es parte del objetivo, la experimentación, la consulta y la simulación, además de la convivencia y la interacción grupal" (p.120). Demuestra la factibilidad de no solo transformar la relación que existe entre los individuos y el saber, sino aportar a ese entramado de relaciones entre los humanos, al presentar otra de las muchas intenciones que existen en la creación de laboratorios dentro de la escuela.

Laboratorios de Matemáticas. Para esta revisión panorámica, se rescata la realización de experimentos dentro de los laboratorios, como una de tantas maneras en que el proceder, estudiar y el crear, no tienen que ser siempre con objetos tangibles, sino que pueden ser situaciones que desde la imaginación puedan ser abordas y estudiadas con todo el rigor que implica hacer un experimento dentro de la clase de matemáticas como laboratorio. Con relación a esas vivencias que miran hacia la creación de espacios en el que se aprenda en torno a lo que se prueba y se verifica con la experiencia, en el dialogo con los conceptos. Donde "se buscan formas efectivas de involucrar a docentes y estudiantes en la construcción de un aprendizaje significativo de las ciencias que convoque, interese y entusiasme" (Calderón et al, 2015, p.5).

Además, es esencial fundamentar las ideas desde las experiencias que otros ya han tenido frente a la creación de laboratorios, no solo de matemáticas, sino de laboratorios referidos a otras disciplinas que son creados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Calderón et al. (2015) proponen que "el laboratorio puede y debe ser usado para estimular la curiosidad y el placer por la investigación y el descubrimiento. Da a los alumnos la posibilidad de explorar, manipular, sugerir hipótesis, cometer errores y reconocerlos y por tanto aprender de ellos" (p.5).

Los docentes Calderón et al. (2015) presentan una alternativa en la que las ciencias pueden ser estudiadas desde un laboratorio de bajo costo, haciendo uso de las TIC, y de esta forma presentar como aporte conceptual y práctico a la desigualdad que habita en todas partes, planteando en este caso un enfoque pedagógico en el cual el aprendizaje se da por inmersión en el medio y en el contacto con los objetos de aprendizaje.

De manera que, al leer y aproximarse a las ideas que en el mundo se han creado frente a concebir la clase de matemáticas desde otra mirada. Se comprende que se puede identificar una propuesta en la cual Bridi et al. (2010) nos relatan lo vivido con estudiantes del cuarto año de escuela primaria, dentro de la creación de un laboratorio de biología para la enseñanza de la matemática, determinando que se pueda pensar con precisión, en estudiar matemáticas por medio del estudio de fenómenos del mundo; en los cuales otras ciencias se encargan de su comprensión.

Conclusiones

En este documento se tuvo como objetivo conocer en términos generales, esas concepciones en el campo investigativo, frente a la clase de matemáticas transformada en espacio de experimentación y construcción del saber matemático. Para abordarlo se realizó una revisión de literatura que nos permitió reconocer los avances en el campo y la importancia de los laboratorios en las clases de matemáticas. La revisión de literatura arrojó por un lado la importancia que en los laboratorios de matemáticas tiene la relación entre lo vivido, aprendido y sentido por los estudiantes, y por otro lado las comprensiones que se tienen con respecto a los laboratorios en las clases de matemáticas.

Al referenciar el primer hallazgo se reconoce que lo vivido, aprendido y sentido permite la construcción de aprendizajes significativos, lo que implica tener presente el vínculo entre el objeto de aprendizaje y lo funcional de eso que se aprende. En este sentido, se reconoce que la clase de matemáticas convertida en laboratorio es un pretexto, para problematizar la cercanía de los saberes matemáticos con el estudiante, donde, de manera experimental interactúa con ellos y los resignifica. De tal manera, que implica generar con ellos aprendizajes que perduran en el tiempo, es así que esta revisión de literatura permite identificar, que, dentro de la creación de un espacio de laboratorio en la clase de matemáticas, entran las posibilidades de estudiar otras ciencias en relación con las matemáticas.

Con respecto al segundo hallazgo de la revisión de literatura, se identifica como los laboratorios en el área de matemáticas se convierten en una posibilidad para desarrollar procesos de interdisciplinariedad, donde otras ciencias del conocimiento unidas a las matemáticas expliquen o traten de dar solución a un fenómeno. En esta línea, se demuestra la posibilidad de proponer al mundo una clase de matemática que se transforma en laboratorio, con la intención de que los estudiantes modifiquen esa relación con el saber matemático, y con ello la relación, comprensión e imaginarios, que los estudiantes tienen del mundo, esto se modifica en la medida en que las matemáticas resignifican lo que comprenden de la realidad.

Finalmente, se reconoce la necesidad de seguir indagando con respecto a esta metodología en las aulas de matemáticas, sus posibilidades y aquellos asuntos que implican por un lado la evaluación de los conocimientos y su aplicabilidad en otro tipo de escenarios.

Referencias y bibliografía

Bridi, J. H., Sant'Ana, M. D. F., Geller, M., y Silva, J. D. (2010). El uso de actividad de latoratorio de biología para la ensenanza de matemática en los años iniciales: una estrategia interdiciplinaria de enseñanza y aprendizaje. *Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)*, *12*, 131-150.

Calderón, S.E.; Núñez, P.; Di Laccio, J.L.; Iannelli, L.M. y Gil, S. (2015). Aulas-laboratorios de bajo costo, usando TIC. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 12*(1), 212-226.

Casallas, J. F. R. (1999). La matemática como herramienta en la construcción y conocimiento del entorno. *Paideia Surcolombiana*, (7), 77-84.

García, J. V. (2016). La clase de matemáticas como laboratorio epistemológico. *REIEC*, *11*(2), 28-38. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273349183003

Godoy, J., Fraire, R., Saucedo, R., y Flores, S. (2014). El aula como laboratorio de matemáticas aplicadas. In *Ciencias Naturales y Exactas Handbook T-II: Congreso Interdisciplinario de Cuerpos Académicos* (pp. 105-116). ECORFAN.

Guirao Goris, S. J. A. (2015). Utilidad y tipos de revisión de literatura. Ene, 9(2).

Jiménez, A. (2010). La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase. *Educación y Ciencia*, *13*, 135-150.

Larrosa, J. (2006). Sobre la experiencia. *Aloma. Revista de Psicologia i Ciències de l'Educació, 2006, num. 19, 87-112*.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 12(1), 45-56.

Las funciones semióticas en investigaciones sobre Educación Matemática. El caso particular de los profesores de Matemáticas al abordar tareas de ecuaciones algebraicas

Gladys **Mejia** Osorio
Secretaria de Educación de Bogotá
Colombia
gladys6m@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta cómo las funciones semióticas permiten poner en evidencia las relaciones y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, relacionadas con una tarea sobre interpretaciones de ecuaciones, y como estas relaciones y dificultades son similares a las que encuentran los estudiantes. En el análisis de los datos se emplean algunos lineamientos metodológicos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se evidenció que los profesores reconocen la equivalencia sintáctica entre dichas expresiones, pero no su equivalencia semántica, pues al dotarlas de sentido y significado las asocian con objetos matemáticos diferentes, basados en que tales ecuaciones tienen formas diferentes; estas dificultades son similares a las reportadas con estudiantes.

Palabras clave: Semiótica; Funciones semióticas; Educación Matemática; Sentidos Tratamiento; Articulación de Sentidos.

Introducción

En la última década diversos estudios en Didáctica de las Matemáticas resaltan la importancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tanto, las representaciones semióticas son la única vía para acceder y manipular los objetos matemáticos. Al respecto, Duval (1993, 2017) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilitan una manipulación sobre estos.

Uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas radica en que tanto estudiantes como profesores reconozcan un mismo objeto matemático por medio de diferentes representaciones semióticas, que les posibilite expresar y representar ideas matemáticas, así como transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que este autor denomina *tratamientos* y *conversiones,* respectivamente.

Respecto a las conversiones y tratamientos D´Amore (2006), Santi (2011) y Rojas (2012) muestran evidencias que las dificultades en la comprensión de las matemáticas se asocian con las transformaciones de tratamiento y no solo son relacionados con las transformaciones de conversión como lo manifiesta (Duval, 2004). Por su parte D´Amore (2006) reporta la experiencia que ha tenido con algunos estudiantes quienes, frente a una representación simbólica de un objeto matemático, asignan un cierto sentido, realizan de manera adecuada transformaciones a dicha representación, en el interior del respectivo sistema semiótico de representación, obteniendo otra representación del mismo objeto al cual le asignan un nuevo sentido, pero éste no es relacionado entre sí con el sentido inicial, aspecto que permite concluir que en matemáticas las transformaciones de tratamiento podrían ser causa de dificultades en la aprehensión de objetos matemáticos por parte de los aprendices.

En otras palabras, se presenta el siguiente fenómeno: una misma persona que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica a otra representación de un objeto matemático, conservando el mismo registro semiótico, atribuye significados diversos a las dos escrituras, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia, en la mente de un estudiante, lo que D´Amore (2006) ha denominado como **cambio de sentido** y Rojas (2012) como **no articulación semiótica.** El presente estudio centra la atención en la transformación semiótica de tratamiento, y tiene como propósitos indagar sobre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento, además de establecer similitudes y diferencias con respecto a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas.

Fundamentación teórica

Para el análisis de las producciones de los profesores se empleó algunas herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), para el caso particular de este trabajo se muestra las relaciones que establecen los profesores por medio de las funciones semióticas. Desde el enfoque ontosemiótico se considera un objeto matemático como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas (Godino, 2002). La práctica matemática es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, et al., 2012).

En la práctica matemática se activa una **configuración** de objetos primarios que describen seis tipos (Font, et al., 2013), a saber: (1) El ***Lenguaje*** (términos, expresiones, gráficos, etc.); (2) Los ***Conceptos*** (mediante definiciones o descripciones); (3) Las ***Proposiciones*** (enunciados sobre conceptos); (4) Los ***Procedimientos*** (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.); (5) Las ***Situaciones*** (problemas, tareas, ejercicios, etc.); y (6) Los ***Argumentos*** (validan las proposiciones y procedimientos).

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las diferentes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002). En este estudio el análisis se centra en la faceta ***expresión-contenido***, debido a que permite clasificar las relaciones que establecen los sujetos por medio de las funciones semióticas entendida como una correspondencia entre un objeto **antecedente**[1] [expresión - significante] y un **consecuente** [contenido - significado] establecidos por un **sujeto** [persona o institución] según un criterio o regla de correspondencia. En términos de funciones semióticas Rojas (2012) asume la ***articulación semiótica*** como el proceso de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que se relacionan entre sí; de manera análoga se asume la no articulación semiótica como el proceso interrumpido de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que no se logran relacionar entre sí.

Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Rodríguez, et al., 1996; Goetz &Lecompte, 1988), el cual resulta pertinente para analizar los sentidos asignados a representaciones semióticas y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas en el ejercicio de relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas que se obtienen mediante tratamiento, lo que ha sido denominado ***articulación semiótica*** (Rojas, 2012, 2014). Para estudiar el fenómeno de la *articulación de sentidos* o *articulación semiótica* se realizó un *estudio de caso colectivo*, debido a que el fenómeno a estudiar tiene múltiples variables (Stake,1994) como: la formación matemática de los profesores matemáticas que incide en el lenguaje matemático utilizado; los signos empleados; los significados que otorgan a estos; las representaciones movilizadas; las que son movilizadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; los significados personales otorgados a los diferentes objetos matemáticos; la visión epistemológica y ontológica de las matemáticas, etc.

La población estuvo conformada por 32 profesores de educación secundaria en ejercicio.[2] Para identificar las dificultades se seleccionaron aquellos profesores que, mínimo en tres tareas

---

[1] Desde el EOS se diferencia los tres elementos que intervienen en una función semiótica: por un lado, la expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo); por otra parte, el contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor); y finalmente se tiene una referencia al criterio o regla de correspondencia, es decir, el código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido.

[2] La población que hace parte de este estudio está conformada por profesores que se desempeñan en educación secundaria (media vocacional, 16-18 años), ubicados en 8 regiones de Colombia (Atlántico, Magdalena, Huila, Antioquia, Guajira, Bogotá, Zona rural de Bogotá y Cundinamarca).

de las cuatro propuestas, aplicaron una serie de procedimientos y reglas matemáticas (tratamientos) que les permitió reconocer la equivalencia sintáctica de expresiones, pero que desde el aspecto semántico no relacionaron entre sí los sentidos o significados de dichas expresiones, y por tanto no establecieron una articulación semiótica. Los análisis y resultados que se presentan en este documento corresponden a la tarea sobre interpretación de ecuaciones, la cual fue trabajada previamente por Rojas (2012) con una población conformada por estudiantes de secundaria (media vocacional). Tarea que se describe a continuación:

(Tarea – Interpretaciones de ecuaciones). *En lo que sigue, asuma que* **x** *e* **y** *representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$?
   (a) Marque con una **x** la respuesta que considera correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente (ítem 1), y luego respóndala.

¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, es ______________________________ ?
   (a) Marque con una **x** la respuesta que considere correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

La tarea presenta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, la cual corresponde a una "cónica degenerada" (dos rectas paralelas). Cabe señalar que algunas personas pueden aludir que en las evidencias que aquí se presentan los profesores no reconocen desde lo sintáctico la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, en tanto el sentido asignado inicialmente no corresponde con el significado institucionalmente establecido, aspecto importante pero que no es relevante en el presente estudio, puesto que se desea mostrar que los sentidos asignados están relacionados con la "forma" de la ecuación, por ejemplo, en este caso una ecuación cuadrática, un polinomio o, incluso, una circunferencia, y, la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, es relacionada con una ecuación lineal o la suma de números reales igual a su inverso.

Resultados

Frente a los resultados obtenidos sobre la interpretación de las ecuaciones $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y $x + y = \frac{1}{x+y}$, los profesores asignan sentidos en relación con la forma de estas, por ejemplo, la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es relacionada con una circunferencia, una ecuación de segundo grado o un polinomio de segundo grado, etc. La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es asociada con una ecuación lineal o con la suma de dos números reales igual a su opuesto. Frente a esta tarea: 4 profesores que conforman el estudio de caso colectivo realizan una interpretación a la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, demuestran que esta ecuación es equivalente a $x + y =$

$\frac{1}{x+y}$ [equivalencia sintáctica], pero al dotar de sentido y significado la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, esta no coincide con la interpretación asignada inicialmente [equivalencia sintáctica].

Las soluciones realizadas por el grupo de profesores permiten identificar 15 funciones semióticas que éstos establecen. En el primer ítem que indaga por la interpretación que los profesores asignan a la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, fungiendo como el antecedente de las funciones se identifica; la función **F1,** *«una figura de puntos* (x, y), *tales que* $(x + y) = 1$*»;* segundo, la función **F2,** «*suma del cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno*»; tercero, la función **F3,** «*ecuación cuadrática*»; cuarto, la función **F4,** «*trinomio cuadrado perfecto*»; quinto, la función **F5,** «*una ecuación de alguna representación cónica*»; sexto, la función **F6,** «*una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1*»; séptimo, la función **F7,** «*relación entre dos variables*», octavo, la función **F8,** «una curva»; noveno, la función **F9,** «*expresión algebraica*»; décimo, la función **F10,** «*una circunferencia*»; la función **F11** «*una diferencia de cuadrados»*. Al asignar significado a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, que funge como antecedente de las funciones se identifican los consecuentes de las funciones **F12,** «*una igualdad entre un número y su inverso»*, la función **F13,** «*igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas con* $x + y \neq 0$» y la función **F14,** «*una ecuación lineal*». Finalmente, la función semiótica **F15,** en el cual los profesores corroboran y reconocen la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones. Los cuales fungen como consecuentes de las funciones.

Conclusiones

Con base a los resultados encontrados se encontró evidencias, si bien algunos profesores que reconocen la ***equivalencia sintáctica*** entre las expresiones algebraicas (ecuaciones), no necesariamente logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, no reconocen la ***equivalencia semántica*** entre ellas, pues al dotar de sentido o significado dichas expresiones se les asocia con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Los resultados corroboran que no solo las transformaciones de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino que estas dificultades también son asociadas con las transformaciones de tratamiento (D´Amore 2006, Santi 2011, Rojas 2012), incluso por parte de profesores de matemáticas en ejercicio.

El trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas reportado en este estudio muestra que el análisis mediante las funciones semióticas posibilita reconocer las relaciones que establecen los profesores que dejan en evidencia algunas similitudes entre las dificultades que encuentra este grupo y las dificultades que encuentran los estudiantes, al realizar la misma tarea, para articular sentidos asignados a expresiones matemáticas obtenidas mediante tratamiento, previamente reportadas en la literatura. Tomando como referencia los resultados documentados por Rojas (2012) frente al trabajo realizado por los estudiantes, uno de los grupos en los que se clasifican las dificultades encontradas es el denominado "reconocimiento icónico de las expresiones". En el presente documento se muestran evidencias de que los sentidos asignados a expresiones algebraicas por parte de los profesores de matemáticas también se relacionan con dicho "reconocimiento icónico" de dichas expresiones.

Los resultados obtenidos muestran que tanto estudiantes como profesores asignan sentidos a las expresiones (ecuaciones) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ en relación con un reconocimiento icónico de tales expresiones. Las producciones de los profesores se clasificaron en los siguientes subgrupos:

a) ***Forma de las variables***. Los profesores que se ubican en esta subcategoría reconocen la equivalencia de las ecuaciones desde el punto de vista sintáctico, pero que dotar de sentido y significado la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no reconocen dicha igualdad (equivalencia semántica). Al respecto Rojas (2012) mostro evidencias que éste tipo de argumentos son similares a los dados por los estudiantes quienes expresan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde a una circunferencia puesto que: "*no puede ser una circunferencia, porque en una (ecuación) las variables están al cuadrado y en otra no*», la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, "*no se ve como una circunferencia, porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado*" (Rojas, 2012, p.78). Al igual que los profesores, los estudiantes aceptan la equivalencia ***sintáctica*** entre las dos ecuaciones, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas y reconocen que a partir de una ecuación se puede obtener la otra. Resultados que muestran, que tanto, para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la "*circunferencia*", "*parábola*", "*ecuación de segundo grado*", etc., caracterizada por tener las variables elevadas al cuadrado, sobre la comprobación de la *equivalencia sintáctica* realizada inicialmente.

b) ***Restricción en los dominios***. En este subgrupo se encuentran los profesores que reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes, pero la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde con el sentido asignado a la primera ecuación puesto que, la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que pueden tomar x e y, en el cual $x \neq -y$, argumentan "*no, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones en su dominio $x + y \neq 0$*», «*puesto que, la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tener x e y, en los números reales es decir que $x \neq -y$* »". Estos resultados muestran, que tanto para los profesores como estudiantes prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a una circunferencia, una ecuación de segundo grado, o un polinomio de segundo grado, etc., que se caracteriza por tener las variables elevadas al cuadrado, o como manifiestan algunos profesores la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ tiene un dominio más restringido, aspectos que influyen para ver las expresiones como dos objetos matemáticos diferentes (no reconocen la equivalencia semántica).

Los resultados permiten concluir que las dificultades encontradas por los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas, obtenidas mediante tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, en tanto admiten la equivalencia sintáctica entre dos expresiones algebraicas, pero no reconocen la equivalencia semántica de las mismas.

Referencias y bibliografía

D'Amore. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En Radford, L. y D'Amore, B. (eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. Relime, 9(4), pp. 177-196. Disponible en línea: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/580%20Objetos%20y%20sentido%20RELIME%20speciale.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5(1), 37–65. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Edited by Tânia M.M. Campos. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*: 237-284. Recuperado: https://www.researchgate.net/publication/282325795_Un_enfoque_ontologico_y_semiotico_de_la_cognicion_matematica

Godino, J. D; Castro, W.; Ake, L. &Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema. 26*(42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000200005

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata. Recuperado de: https://upeldem.files.wordpress.com/2018/03/libro-etnografc3ada-y-disec3b1o-cualitativo-en-investigacic3b3n-educatica-j-p-goetz-y-m-d-lecompte.pdf

Rodríguez, G. Gil, J. & García, E. (1996). *Métodos de investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe. https://doi.org/10.24310/mgnmar.v2i2.12937

Rojas, P. (2012). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de: 327 Universidad Distrital Francisco José de Caldas Doctorado Interinstitucional en Educación. Recuperado de: https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarzonPedroJavier2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rojas, P. (2014). Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. DOI: https://doi.org/10.14483/9789588832333

Santi, G. Objectification and semiotic function. *Educ Stud Math 77, 285–311* (2011). https://doi.org/10.1007/s10649-010-9296-8

Stake, R. (1994). Case Study, en N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236-247). London: Sage. Recuperado de_ https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf

LEI - Laboratório de Estudos de Inclusão, pesquisas desenvolvidas com foco na inclusão

Ana Paula de Souza **Colling**
Prefeitura Municipal de Tupandi-RS
Brasil
apcolling1@gmail.com
Maria Adelina Raupp **Sganzerla**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
masganzerla@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como objetivo trazer a discussão sobre a importância de pesquisas relacionadas à educação inclusiva, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento matemático, apresentando o Laboratório de Estudos de Inclusão (LEI), um espaço de pesquisa, trocas, aprendizagem e muita reflexão sobre o tema, inserido dentro de um curso de pós-graduação no Brasil. Trazemos um histórico desde sua implementação até as pesquisas desenvolvidas, com um breve relato daquelas já concluídas e panorama das que estão sendo realizadas. Concluímos trazendo a importância de desenvolvermos mais pesquisas sobre o tema, principalmente na área das ciências, visto que a inclusão escolar é uma realidade do contexto educacional brasileiro e há necessidade de professores e ambientes de ensino capazes de receber os alunos com deficiência e auxiliar os mesmos no seu processo de aprendizagem para a vida em sociedade.

Palavras-chave: Educação Matemática; Tecnologia Assistiva; Inclusão Escolar.

Introdução

A inclusão e o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes com deficiência, transtorno global do desenvolvimento e altas habilidades traz consigo a discussão sobre métodos de ensino eficazes, que busquem tornar os ambientes escolares capazes de receber todos os alunos, visando ao desenvolvimento, ao respeito das diferenças e potencializando as habilidades de cada pessoa.

O PPGECIM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA, localizado no município de Canoas/RS, iniciou suas atividades no ano 2001 com a abertura de seu programa de Mestrado, com objetivo de promover e realizar pesquisas na área de Ensino, qualificando e aperfeiçoando o pesquisador docente da Educação Básica e do Ensino Superior, de modo a desenvolver e fomentar processos educacionais em Ciências e Matemática na perspectiva das demandas contemporâneas. As mudanças no cenário educacional trouxeram consigo novos desafios e novas possibilidades de pesquisa e, no ano de 2010, com a instituição do programa de Doutorado, teve origem a linha de pesquisa "Educação Inclusiva em Ensino de Ciências e Matemática", com o objetivo do desenvolvimento e análise de processos de ensino e aprendizagem na educação inclusiva.

Na referida linha de pesquisa, têm-se concluídas, até o ano de 2022, 15 dissertações e 4 teses relacionadas ao tema inclusão, compactuando com a ideia de que para a inclusão escolar ocorrer, de acordo com Scardua (2008), é necessário comprometimento por parte de todos os envolvidos, estudantes, professores, pais, comunidade escolar e gestores, valorizando a diversidade e construindo oportunidades de aprendizagem, como forma de articular a inclusão em defesa do direito que todos os alunos têm de estarem aprendendo, sem nenhum tipo de discriminação ou restrição.

A busca por respostas sobre o processo de inclusão escolar trouxe para o programa novas pesquisas e novos desafios frente à temática. Com a aprovação do Edital UNIVERSAL-MCTI/CNPq n° 14/2013, contemplando o Projeto "Estratégias de ensino e de aprendizagem com alunos de inclusão na educação básica: intervenções pedagógicas na área da Matemática e Ciências", dentro do programa se constituiu o Laboratório de Estudos de Inclusão – LEI, um ambiente voltado para investigar os processos de ensino e de aprendizagem na área de Ciências e Matemática, tendo como sujeitos de pesquisa professores de sala de aula regular da educação básica e do Atendimento Educacional Especializado – AEE e alunos de inclusão com diferentes deficiências, transtornos e síndromes.

Em 2016, foi aprovado o Edital de Apoio a Projetos de Tecnologia Assistiva - CNPq/MCTIC/SECIS nº 20/2016, com o Projeto "Tecnologias Assistivas para a Educação Matemática no Ensino Fundamental", integrando novas ações junto ao LEI, como a promoção e o desenvolvimento de Tecnologias Assistivas considerando recursos de acessibilidade para alunos com deficiência visual do Ensino Fundamental, envolvendo hardware e software para a Educação Matemática.

Neste artigo, apresenta-se um breve relato sobre o contexto da educação inclusiva no Brasil, o LEI e algumas das pesquisas realizadas dentro deste espaço de estudo, o qual têm sido um ambiente enriquecedor de promoção de trocas de experiências sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos com deficiência, da Educação Básica ao Ensino Superior.

Educação Inclusiva no Brasil

A educação inclusiva no Brasil é constituída por várias normativas, Leis e Decretos, estando fundamentada na Constituição Federal de 1988, que determina a igualdade de condições à matrícula na escola para todas as pessoas, independentemente de sua condição física ou intelectual e, também, a oferta de Atendimento Educacional Especializado (AEE), preferencialmente no ensino regular (Brasil, 1988).

A Lei Federal de Diretrizes e Bases da Educação n° 9.394/1996 (Brasil, 1996) e a Resolução CNE/CEB n° 02/2001, que institui Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica (Brasil, 2001b), abordam a flexibilidade de um currículo diferenciado para o público-alvo da Educação Especial; com o documento de Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (Brasil, 2008), obtiveram-se mudanças conceituais e estruturais na organização do sistema educacional. Entre algumas das mudanças, citam-se: transversalidade da educação especial desde a Educação Infantil até a educação superior; Atendimento Educacional Especializado; formação de professores para o Atendimento Educacional Especializado e demais profissionais da educação para a inclusão escolar; participação da família e da comunidade; acessibilidade urbanística, arquitetônica, nos mobiliários e equipamentos, nos transportes, na comunicação e informação e articulação intersetorial na implementação das políticas públicas.

Afirmou-se, a partir do Decreto n° 7.611 (Brasil, 2011), que o AEE deve estar inserido na proposta pedagógica da instituição de ensino, envolvendo a família e, sobretudo, atender as necessidades dos alunos de inclusão. Em 2015, foi instituída a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência, Lei n° 13.146 (Brasil, 2015), na qual, em seu Artigo 3º, são definidas considerações sobre acessibilidade, desenho universal, barreira, adaptações, entre outras.

Segundo o INEP/EDUCACENSO (2022), as escolas da rede pública de ensino receberam 1.194.844 matrículas, no início do ano de 2021, de alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades, compreendendo Educação Básica, ou seja, Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos.

Tendo um número significativo de alunos de inclusão inseridos na Educação Básica e levando em conta todo amparo legal para que esses estudantes tenham uma educação de qualidade, que respeite suas limitações e explore suas potencialidades, torna-se relevante conhecer e refletir sobre questões voltadas às peculiaridades desses sujeitos voltadas para o ensino de Matemática e Ciências.

Karagiannis, Stainback e Stainback (1999) afirmam que a sociedade, os professores e especialistas diversos devem se unir na busca por recursos consistentes para efetivar a inclusão escolar, pois esta, além de preparar os alunos com deficiência para a vida em comunidade, proporciona aos profissionais habilidades frente aos desafios, auxiliando a sociedade na conscientização quanto ao valor social da igualdade entre as pessoas, trazendo consigo resultados positivos em busca da paz social. Os autores ainda afirmam que o valor da escola inclusiva está no benefício social da igualdade, ensinando pelo exemplo que, apesar das diferenças, têm-se os mesmos direitos, sendo ainda que, para alunos com deficiências cognitivas importantes, as habilidades sociais sejam fundamentais frente às acadêmicas.

A inclusão escolar tem como princípio oferecer garantia e apoio necessário para que todos tenham oportunidades de desenvolvimento das suas potencialidades, independentemente das dificuldades e diferenças, com respeito à capacidade individual de cada aluno com deficiência. Cabe à escola oferecer respostas e instrumentos adequados que respeitem as singularidades dos alunos com deficiência, promovendo o desenvolvimento independente das diferenças intelectuais ou físicas e, dessa forma, o LEI traz consigo a oportunidade de desenvolvimento de pesquisas na busca pelo ensino de qualidade que queremos, repensando modelos e práticas, desenvolvendo métodos e materiais, seja por meio de pesquisas ou discussões sobre a realidade na qual estamos inseridos.

Metodologia

A metodologia utilizada neste artigo é qualitativa, visto que, ao realizá-la, obtém-se um leque de opções e visões dentro do seu contexto, pois são características desse modelo de pesquisa a complexidade e a pluralidade. Dentro dessa perspectiva, apresenta-se uma pesquisa bibliográfica acerca dos estudos conduzidos junto ao LEI, reconhecido pelo CNPq como Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática na perspectiva da Educação Inclusiva.

Lima e Mioto (2007) apontam que a pesquisa bibliográfica é um dos métodos utilizados junto à pesquisa qualitativa. Os autores ainda afirmam que para a realização de um levantamento de dados qualitativos é necessário identificar informações relevantes ao tema pesquisado, sendo necessário seguir critérios e métodos que apontem a coerência dos conceitos relacionados e o embasamento teórico necessário.

Ao tratar da pesquisa bibliográfica, é importante destacar que ela é sempre realizada para fundamentar teoricamente o objeto de estudo, contribuindo com elementos que subsidiam a análise futura dos dados obtidos. Portanto difere da revisão bibliográfica uma vez que vai além da simples observação de dados contidos nas fontes pesquisadas, pois imprime sobre eles a teoria, a compreensão crítica do significado neles existente (Lima; Mioto, 2007, p. 44).

Para essa pesquisa, alguns critérios de seleção foram traçados, relacionando sua origem e aderência aos temas abordados:

- Tipos de documentos selecionados: dissertações de mestrado e teses de doutoramento realizados junto ao LEI.

- Período selecionado: de 2010 a 2022, iniciando no ano de criação do programa de doutorado e da linha de pesquisa “Educação Inclusiva em Ensino de Ciências e Matemática”.

O LEI tem por objetivo desenvolver processos investigativos, envolvendo temáticas da Educação Inclusiva, contemplando métodos, estratégias de intervenção para o ensino e a aprendizagem de Ciências e Matemática. As inquietações do grupo estão relacionadas à aprendizagem de conceitos científicos pelos alunos com deficiência, formação de professores, inclusão social, desenvolvimento da autonomia, entre outros. São participantes das pesquisas alunos com deficiência, transtorno global do desenvolvimento, altas habilidades, professores de escolas inclusivas, gestores, pais, escolas regulares, escolas especiais e equipes multidisciplinares.

Para o desenvolvimento das pesquisas, são realizadas observações e intervenções em sala de aula, no AEE, no LEI, junto a alunos e professores, enfatizando o Ensino de Ciências e Matemática, além de entrevistas e questionários com pais, gestores e equipe multidisciplinar. Dentre as pesquisas já realizadas, têm-se quatro teses concluídas, as quais estão descritas na sequência:

- Sganzerla (2020), com a tese intitulada "Deficiência Visual e a educação matemática: estudo sobre a implementação de Tecnologia Assistiva", investigou o processo de implementação de TA considerando a deficiência visual na perspectiva da educação matemática, implementando TA para o ensino de conceitos matemáticos aos estudantes cegos e/ou de baixa visão, tendo como participantes da pesquisa cinco estudantes com deficiência visual, dois cegos e três com baixa visão; e cinco professoras, três do Atendimento Educacional Especializado; e duas da sala de aula regular, de uma escola inclusiva da região metropolitana de Porto Alegre.

- Colling (2018), com a tese intitulada "Olhares da inclusão: um estudo de caso sobre a aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen", trazendo diferentes olhares sobre o processo de inclusão escolar e o caminho percorrido por uma aluna com uma síndrome rara, com objetivo de investigar o processo de aprendizagem desta na perspectiva da educação matemática, envolvendo neste estudo a trajetória entre escola inclusiva, escola especial e escola inclusiva, reflexões sobre formação de professores e adaptação curricular.

- Nunes (2018), com a tese intitulada "Alunos com TDAH em Atendimento Educacional Especializado: um estudo sobre a aprendizagem de conceitos Matemáticos", investigou sobre como se constituem os processos de intervenções pedagógicas, visando à aprendizagem de conceitos matemáticos de alunos com Transtorno de Déficit de Atenção/Hiperatividade em Atendimento Educacional Especializado no município de Gravataí/Rio Grande do Sul, tendo como participantes 4 alunos, diagnosticados com o TDAH associado à Deficiência Intelectual em Atendimento Educacional Especializado, matriculados na rede municipal de ensino.

- Arnoldo Junior (2014), com a tese intitulada "Estudo da emancipação de sinais matemáticos em língua brasileira de sinais e língua gestual portuguesa: inquietações sobre uma erebas brasileira", refletiu sobre o estudo de Libras, analisando a emancipação de sinais matemáticos em Língua Brasileira de Sinais (Libras) e Língua Gestual Portuguesa (LGP), isto é, o processo pelo qual o léxico é reconhecido e empregado pelas comunidades surdas.

Quanto às pesquisas de Mestrado concluídas, têm-se quinze dissertações e, destas, destacamos:

- Nunes (2021), investigou como se constituem as relações numéricas na perspectiva de uma estudante com paralisia cerebral, considerando os conceitos matemáticos iniciais, os esquemas protoquantitativos e as situações-problemas envolvendo o número.

- Brito (2019), trazendo uma pesquisa cujo objetivo geral é investigar como se constituem as relações numéricas de alunos com Transtorno do Espectro Autista dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considerando as bases da aprendizagem matemática, a contagem, os esquemas protoquantitativos e resolução de situações- problema.

- Felipe (2019), com o objetivo de investigar as percepções sobre educação inclusiva, a partir da implementação de um curso de extensão, durante a formação inicial de professores que ensinam Matemática na Educação Básica, propôs-se a implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um curso de Educação Matemática Inclusiva para futuros professores, que estão em processo de formação.

- Bereta (2019) traz uma pesquisa com objetivo de investigar o processo de adaptação curricular realizada por professores que ensinam Ciências, na perspectiva da educação inclusiva, nas escolas regulares, buscando elaborar, implementar e avaliar um curso sobre adaptação curricular e o ensino de Ciências, fornecido a professores do Ensino Fundamental, no município de Gravataí/RS.

- Silva (2018) apresenta a pesquisa realizada em uma escola de Educação Profissional, que possui o Programa Jovem Aprendiz, com a proposta de investigar como os alunos com deficiência (re)articulam conhecimentos matemáticos para o mercado de trabalho. Nesse contexto, buscou-se inspiração em Metodologias Ativas por valorizar estratégias diversificadas de ensino, na Educação Profissional, por direcionar o sujeito para a sua atuação produtiva na sociedade e na Educação de Adultos, além de relacionar a Educação Matemática Crítica, com o intuito de conectar os saberes adquiridos às potencialidades dos aprendizes para o mercado de trabalho.

- Sganzerla (2014), integrante do Programa Observatório da Educação, Edital n° 38/2010/CAPES/INEP, objetivou investigar quais as potencialidades e limitações de uma TA, a Contátil, desenvolvida para o ensino de conceitos básicos de Matemática, considerando a deficiência visual. O Material Dourado foi (re) adaptado, com base nos princípios do design instrucional, da acessibilidade e da usabilidade, à realidade das crianças com deficiência visual.

Verificando os dados do INEP/EDUCACENSO (2022) que apontam para o número de matrículas da rede pública de ensino no ano de 2021 de alunos com deficiência, transtornos globais de desenvolvimento e altas habilidades, observa-se que as pesquisas concluídas vêm ao encontro da busca pelo ensino de qualidade que se almeja oferecer a todos. Para tanto, no LEI estão sendo desenvolvidas pesquisas com propostas de estudo de inclusão escolar, buscando promover o ensino e a aprendizagem dos alunos nos diferentes contextos.

Santarosa *et al.* (2010) trazem que a educação inclusiva é um valor que redesenha um futuro no processo educativo brasileiro, havendo necessidade de desconstruir o conceito de diferente, romper com a visão reducionista centrada no aluno com deficiência e assumir a multiplicidade de necessidades que aspectos sociais, econômicos e culturais naturalmente revelam, sendo fundamental a reconstrução das ações e dos conceitos de ensino e de aprendizagem. Observa-se, com as pesquisas, a preocupação com a realização de pesquisas abordando diferentes deficiências, formação de professores e gestores, comunidade escolar, utilização e implementação de novas tecnologias, ensino de conceitos científicos e matemáticos, sempre buscando a inserção social do aluno, o desenvolvimento de suas habilidades, o fortalecimento das potencialidades e a construção da autonomia.

Considerações Finais

A Educação Inclusiva trouxe para as escolas brasileiras um novo cenário, refletindo diretamente nos cursos de Pós-Graduação e, dentro do PPGECIM, o LEI tem sido um espaço de investigação dos processos de ensino e de aprendizagem, tendo como sujeitos de pesquisa alunos com diferentes deficiências, transtornos globais de desenvolvimento e altas habilidades, professores de sala de aula regular da Educação Básica ao Ensino Superior, professores responsáveis pelo AEE, pais, equipe multidisciplinar, entre outros.

As pesquisas desenvolvidas em nível de Mestrado e Doutorado refletem os questionamentos quanto ao processo de inclusão escolar, apontando benefícios, visualizando desafios, estimulando a aprendizagem e o ensino de qualidade, buscando o aprimoramento daqueles responsáveis pelo atendimento dos alunos na escola, seja por meio de entrevistas, reflexões, observações, formações e intervenções. Busca-se a construção de conhecimentos científicos e matemáticos, bem como, a autonomia e inserção social de todos, respeitando o tempo e a capacidade individual de cada sujeito.

O caminho a ser percorrido é longo, repleto de desafios a serem superados, mas espera-se que tanto as pesquisas desenvolvidas, como aquelas em construção dentro do LEI, contribuam com a busca pela inclusão e pela equidade social e escolar dos alunos com deficiência, bem como, impulsionem as práticas inclusivas em nosso país e promovam cada vez mais pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem na perspectiva do Ensino de Ciências e Matemática dentro de nossas instituições.

Referências e bibliografia

Arnoldo Junior, H. (2014) *Estudo da emancipação de sinais matemáticos em língua brasileira de sinais e língua gestual portuguesa*: inquietações sobre uma erebas brasileira. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Bereta, M. S. (2019). *Adaptação curricular no ensino de ciências:* reflexões de professores de escolas inclusivas. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Brasil. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988*. Brasília. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/Constituicao Compilado.htm. Acesso em: 20 fev. 2020.

Brasil. (2011). *Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011*. Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado e dá outras providências. Brasília. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011- 2014/2011/ Decreto/D7611.htm. Acesso em: 20 dez. 2019.

Brasil. (2015). *Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015*. Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm. Acesso em: 15 mar. 2019.

Brasil. (1996). *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ ccivil_03/leis/ L9394.htm. Acesso em: 20 fev. 2020.

Brasil. (2008). *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. MEC/SECADI. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=16690-politica-nacional-de- educacao-especial-na-perspectiva-da-educacao-inclusiva-05122014&Itemid=30192. Acesso em: 20 fev. 2020.

Brasil. (2001b). *Resolução CNE/CEB Nº 2, de 11 de setembro de 2001*. Institui Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CEB0201.pdf. Acesso em: 20 fev. 2020.

Brito, S. C. C. (2019). *Bases da aprendizagem matemática e o Transtorno do Espectro Autista*: um estudo sobre relações numéricas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Colling, A. P. de S. (2018). *Olhares da Inclusão:* estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen. Tese de Doutorado. PPGECIM/Ulbra: Canoas.

Felipe, M. A. (2019). *Educação inclusiva:* percepções na formação inicial de professores que ensinam matemática na educação básica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

INEP/EDUCACENSO. (2022). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sinopse estatística da educação básica 2021*. Brasília: Inep. Disponível em: http://inep.gov.br/sinopses-estatisticas-da-educacao-basica. Acesso em: 02 ago. 2022

Karagiannis, A.; Stainback, S.; Stainback, W. (1999). *Fundamentos do Ensino Inclusivo*. In: STAINBACK, S.; STAINBACK, W. Inclusão: um guia para educadores. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Lima, T. C. S. De; Mioto, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. *Revista Katalysis*, v. 10, p. 35-45.

Nunes, C. (2018). da S. Alunos com TDAH em atendimento educacional especializado: um estudo sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Nunes, J. F. de Q. (2021). *Reflexões sobre as relações númericas na perspectiva de uma estudante com paralisia cerebral*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Santarosa, L. M. C. et al. (Org.). (2010). *Tecnologias digitais acessíveis*. Porto Alegre: JSM Comunicações.

Scardua, V. M. (2008). A inclusão e o ensino regular. *Revista FACEVV*, Vila Velha, nº. 1, p. 85–90. Disponível em: https://docplayer.com.br/-inclusao-e-o-ensino-regular-valeria-mota-scardua.html. Acesso em: 05 mar. 2020

Sganzerla, M. A. R. (2020). *Deficiência Visual e a educação matemática*: estudo sobre a implementação de Tecnologia Assistiva. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Sganzerla, M. A. R. (2014). *Contátil:* potencialidades de uma Tecnologia Assistiva para o ensino de conceitos básicos de matemática. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Metodologias ativas para potencializar os conhecimentos matemáticos para aprendizes em situação de vulnerabilidade e/ou com deficiência

Livia Ferreira Paim da **Silva**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
livpaim@hotmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

A pesquisa destaca um recorte com as primeiras ações de metodologias ativas planejadas para a pesquisa de doutorado, realizada com jovens aprendizes em situação de vulnerabilidade e/ou com deficiência. Com o objetivo de investigar como são (re)construídos os conceitos matemáticos quando aplicados ao contexto social e de preparação para o trabalho. Foram utilizados vídeos com conhecimentos matemáticos aplicados no dia a dia do aprendiz, e assim tornando a abordagem qualitativa mais favorável por valorizar a coleta de dados e a interação dos participantes com o recurso. Com as participações, testes e relatos foi possível identificar que a matemática se faz presente no comportamento dos participantes, mesmo que não reconheçam formalmente os conceitos aplicados.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Profissional; Educação Inclusiva; Metodologias Ativas; Pessoa com Deficiência.

Introdução

Falar em metodologias ativas e aplicar suas orientações pedagógicas nos dias de hoje é um dos caminhos para oportunizar uma sala de aula inovadora, disruptiva e inclusiva. O espaço da educação profissional, pode ser personalizado para atender públicos diversos como é o caso de alunos em situação de vulnerabilidade social e/ou que possuem alguma deficiência, permitindo que cada aluno construa o seu aprendizado no seu tempo, independentemente de seu nível escolar.

Nesse contexto, a pesquisa apresenta um recorte da tese de doutorado na área de educação matemática inclusiva, com a construção e utilização de vídeos, elaborados com o intuito de disseminar os conhecimentos matemáticos para a rotina de trabalho do aprendiz. Utilizou-se desse recurso tecnológico por ser o mais acessível enquanto as aulas presenciais dos alunos estavam suspensas por conta da pandemia.

Sendo assim, a pesquisa retrata as particularidades, as mudanças e adaptações que os jovens aprendizes tiveram ao interagir com os conhecimentos matemáticos utilizando os recursos de vídeo.

Reflexões teóricas

Nos últimos anos pesquisas científicas apontam o crescente uso do termo metodologias ativas em suas fundamentações teóricas, termo este definido para uma série de estratégias e recursos que proporcionam a mudança de posicionamento do papel entre o professor e o aluno, definindo o aluno como o protagonista, atuante na construção de seus saberes. Lovato et al (2018) apontam que a necessidade de um novo processo de ensino e aprendizagem emerge das mudanças sociais, da necessidade de ter um indivíduo crítico, colaborativo, com capacidades de (re)aprender, de se relacionar e desenvolver competências comportamentais. Por isso a busca por personalizar o jeito de aprender, considerando, o indivíduo e seu contexto social, suas expectativas e vivências, seus conhecimentos e suas emoções.

O uso de estratégias de ensino como as metodologias ativas podem realizar resgastes de aprendizados que ao longo da caminhada escolar não haviam sido internalizados, favorecendo aos novos saberes a construção de novos significados ao que é aprendido ou (re)aprendido. Entre os diversos conceitos que embasam o estudo, encontra-se em Valente (2018) um argumento que motiva a aplicação de metodologias ativas na educação para o trabalho:

> As metodologias ativas procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas fornecer e receber feedback, aprender a interagir com colegas e professores, além de explorar atitudes e valores pessoais (Valente, 2018, p.28)

Pessoas com deficiência ou que estão em situação de vulnerabilidade social trazem a sua bagagem, suas interações e relações sociais construíram saberes ao longo de suas vidas e podem refletir em suas percepções e interesses para continuarem aprendendo. Muitas vezes há no cenário escolar, de forma equivocada, a percepção de que a matemática no currículo não se apresenta como algo útil no cotidiano, com contribuições para a vida do indivíduo em sociedade, mas, no contexto desta investigação, ao se perceber que estes saberes estão atrelados a uma oportunidade para conquistar uma vaga de trabalho, ou para realizar atividades que promovam autonomia e segurança na tomada de decisões, percebe-se mudanças na postura dos apreendentes, com maior interesse em aprender, em se apropriar de conceitos matemáticos.

Olhar para as dificuldades de aprendizagem, ou para a falta de interesse do aluno em atuar na sua formação, permite reavaliar a maneira de conectar os conhecimentos e buscar por estratégias acessíveis, como o caso dos recursos tecnológicos. Dambrós (2019) é um dos autores que defende essa ideia e Santos (2008, p. 33) enfatiza que “a aprendizagem somente ocorre se quatro condições básicas forem atendidas: a motivação, o interesse, a habilidade de compartilhar experiências e a habilidade de interagir com os diferentes contextos”, essas condições não relatam conteúdos, mas sim as relações sociais e sua importância na motivação para o outro se desenvolver.

Para Lovato et al (2018), as metodologias ativas não excluem ou limitam a participação dos alunos, ao contrário, elas estimulam a interação e integração entre eles, destacando as competências individuais de cada um. Nesse aspecto é preciso compreender como usufruir das novas estratégias de ensino, o que as diferenciam das demais e reconhecer qual método combina com o momento de aprendizagem vivida pelos alunos. No que tange a educação profissional, as metodologias ativas de aprendizagem são complementares, pois conforme indica a LDBEN 9394/96 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), em seu Artigo 39. 28 “A educação profissional integrada às diferentes formas de educação, ao trabalho, à ciência e à tecnologia, conduz ao permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva”.

Portanto faz-se necessário encontrar recursos que provoquem o aprendiz para a criação de conexões, inseridos a um contexto para “compreender e aprender o conteúdo proposto em uma perspectiva motivacional, incentivando-o a explorar, pesquisar, refletir e organizar ideias” (Maria, 2019, p.15)

Metodologia

O presente recorte da tese destaca uma das formas de investigar os conhecimentos matemáticos já adquiridos pelos jovens aprendizes, utilizando recursos de vídeo e redes sociais, saindo do contexto tradicional de ensino e colaborando com o contexto atual de pandemia. Nesse aspecto a abordagem qualitativa se mostra mais pertinente pois conforme já mencionado por Bogdan e Biklen (1994, p.49), “a investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo”.

Nesse contexto, é importante destacar o quão rica é a pesquisa qualitativa, pois permite, de maneira detalhada, observar as particularidades e valorizar as potencialidades dos sujeitos, considerando os comportamentos, ações e reações no caminhar da pesquisa, valorizando de modo particular cada interpretação e inter-relação entre os participantes e os recursos utilizados (Minayo, 2001). Com esse intuito, a pesquisa foi dividida em etapas, sendo a etapa 1 com o mapeamento dos participantes, a etapa 2 com a investigação dos conhecimentos matemáticos, a etapa 3 com as interações e práticas e a etapa 4 para a análise dos dados.

As interações tiveram inicio em outubro de 2021[1], inicio do contrato da turma, até dezembro de 2022. Todas as terças-feiras ocupando a carga horária de 1h e 30min por aula, isso porque os alunos ficam apenas 1 dia da semana na instituição formadora, o restante da carga horária da semana é na empresa.

Os participantes da pesquisa fazem parte de uma Escola de Educação Profissional que oferece turmas de Jovem Aprendiz, atrelados a um contrato de trabalho, os alunos se comprometem com a carga horária de 4 horas diárias, sendo cumpridas parte na instituição formadora e parte na empresa contratante. A turma possui 15 jovens com deficiência intelectual, as atividades da pesquisa são realizadas com a turma inteira, porém fazem parte da escrita das atividades de pesquisa, os 7 jovens os quais os país e/ou responsáveis autorizaram suas participações. O foco da pesquisa está em trabalhar as potencialidades de cada um com as metodologías ativas, portanto os laudos foram utilizados apenas para caracterizar o grupo, não sendo utilizado para o planejamento de nenhuma das atividades aplicadas.

Resultados

As atividades iniciais da pesquisa foram elaboradas em vídeos (Figura 1), com a proposta de investigar os conhecimentos matemáticos do cotidiano do trabalho dos aprendizes, conhecimentos como: organização do tempo, planejamento do tempo, rotinas que utilizam o raciocínio lógico e conhecimentos gerais sobre quantidades, e os cuidados com a apresentação pessoal para o trabalho.

Inicialmente 2 temas principais foram abordados, um que investigasse a organização dos participantes com relação ao tempo, a separação das tarefas por ordem de importância e a distribuição do tempo para dar conta da rotina pessoal e do trabalho. E o outro voltado para a higiene pessoal mas com o contexto de quantidade, relacionando tamanhos, porções, volume e tempo. Os vídeos foram compartilhados via *whatsapp*, em um grupo o qual todos os aprendizes estavam inseridos, juntamente com um link disponível para que fosse possível rever o conteúdo quantas vezes quisessem.

Cada vídeo tem em média 6 minutos e oferece o conteúdo contextualizado a realidade vivida do aprendiz no trabalho, com diferentes formas de compreensão e com exercícios para que reflita e imagine como o conteúdo pode ser aplicado em seu dia a dia. Outro destaque está nos diferentes formatos de abordar o mesmo tema, permitindo que cada um se identifique e escolha como compreende melhor e aplicar esse conhecimento em seu contexto.

Figura 1. Print das telas interativas do vídeo 1.

[1] Neste mesmo ano o projeto de pesquisa recebeu a aprovação pelo Comitê de ética. CAAE: 44330821.8.0000.5349.

Com relação ao vídeo 1. Os sete participantes da pesquisa não utilizam o relógio analógico, apenas o digital, mas quando foram convidados a experimentar conseguiram identificar as respostas solicitadas na atividade, inclusive um dos participantes mencionou que sabia a tabuada do 5 olhando no relógio em casa.

Outra percepção foi em relação as diferentes organizações de tempo, quanto ao momento de acordar, se arrumar, e ir até o trabalho, após assistirem o vídeo, os jovens foram convidados a construir um passo a passo sobre a rotina diária de trabalho, desde o momento em que acordam até o momento em que chegam em casa. Mesmo sem a compreensão de calcular o tempo, ou estipular um tempo para cada tarefa cada um construiu sua rotina estipulando metas como 7:15min preciso sair de casa para pegar o ônibus, então se alguma tarefa tivesse ficado pela metade ou faltasse, ela não é realizada pois o horário de pegar o ônibus é considerado mais importante.

Assim cada um estabelecia algumas referências de horário que considerava importante, entre as principais escolheram o horário do ônibus, o de chegada ao trabalho, o horário de intervalo do trabalho e o de saída para casa.

As principais dificuldades encontradas foram na utilização dos minutos, conseguiam somar o tempo gasto para as tarefas, mas quando era solicitado que dissessem qual horário deveriam sair de casa nenhum dos participantes conseguiu quantificar. No entanto, o mesmo aprendiz que disse usar o relógio para a tabuada do 5, sugeriu que os minutos das atividades fossem somadas no relógio, conseguindo então encontrar os 30 minutos na hora que deveria sair para o trabalho. Dessa forma em cada momento que interagiam com o vídeo, com a situação de resolver um problema que estava contextualizado e no desafio de elaborar um passo a passo de suas rotinas conseguiam articular e mobilizar os recursos cognitivos necessários para encarar as situações propostas (Perrenoud, 2000).

Com relação ao vídeo 2. A rotina da higiene pessoal é algo que impacta no trabalho, a vestimenta e a aparência são cuidados necessários, exigem uma série de conhecimentos matemáticos que se organizados podem trazer benefícios aos participantes, impactando em sua autonomia.

Os alunos foram questionados sobre: o que fazem ao acordar, o que consideram higiene pessoal, quantas vezes devem escovar os dentes ao dia, qual a quantidade de pasta de dente adequada na escovação, no momento do banho qual a temperatura da água, como devem lavar os cabelos, qual a quantidade de produto que deve ser utilizado, quanto tempo deve ser gasto no banho, qual a frequência que as roupas devem ser lavadas, entre outras.

Entre as respostas: uma aluna mencionou que mãe quem lava seus cabelos pois ela gasta muito shampoo, outro aluno disse que não controla o tempo de banho, outra diz que lava os cabelos todos os dias, todos acreditam que os dentes devem ser escovados 3 vezes ao dia, mas muitos desconheciam sobre a quantidade ideal de creme dental e um aluno respondeu que é importante ter um kit higiene com escova de dentes, creme dental e desodorante para usar entre a escola e a empresa.

Após a interação com o vídeo, que mostra as quantidades ideais de creme dental, shampoo, temperatura de água para lavar os cabelos, cuidados com as roupas e administração de tempo. Cada um pensou nas principais atividades que realiza e quais ações podem agregar a suas rotinas. Apenas 3 dos 7 participantes realizavam toda a sua rotina com autonomia, os outros existia a interferência de algum familiar, ou para acordar, ou escolher a roupa, lavar e arrumar o cabelo, ou até avisar para finalizar o banho.

Um dos participantes disse que iria mostrar em casa e pedir que o deixasse usar os conhecimentos, outro disse que não sabia como poderia se organizar e o vídeo iria ajudar. Outro sugeriu uma tabela com os dias da semana para controlar o uso das roupas e ainda uma aluna falou sobre a economia de água se controlar o tempo de banho e a temperatura da água para lavar os cabelos.

No vídeo é sugerido que a quantidade de shampoo a ser utilizada é referenciada pelo desenho de uma moeda de R$1,00. Os alunos foram convidados a realizar o exercício e refletir se a quantidade que utilizavam era pouca ou muito se comparado a moeda. A aluna, a qual a mãe lava os cabelos se espantou e disse compreender o motivo de a mãe não deixá-la lavar os cabelos.

Para estruturar os vídeos pensou-se nas experiências e conhecimentos prévios de cada um com a proposta de contextualizar e tornar relevante o aprendizado, de modo pudessem trazer sua realidade como sugere Fernandes (2015, p.15) “deve-se partir da realidade vivenciada no cotidiano, possibilitando, assim, o entendimento das diferentes formas de resolver o mesmo problema, no desejo de ampliar sua estrutura cognitiva e tornar a aprendizagem mais significativa”.

Para eles a metodologia se fez ativa quando permitiu solucionar problemas, aperfeiçoar maneiras de fazer determinada atividade ou até simplificar ou adaptar a rotina para ganhar tempo, permitindo repensar os hábitos de vida, e construir habilidades que oportunizam maior autonomía e fazem parte do ambiente de trabalho.

Independentemente de serem jovens em situação de vulnerabilidade e/ou com deficiência, a matemática faz parte de seu cotidiano e pode potencializar suas competências para o trabalho pois de maneira lógica faz sentido, as habilidades de articulações com o tempo e organização do mesmo podem ser decorrentes da interação social, de maneiras particulares que encontraram para articular os saberes (Vygotsky, 1998).

Assim foi possível perceber que a matemática não era percebida como conceito, utilizar a soma para calcular o tempo necessário para cada atividade, mas apareceu como um comportamento para organização, e assim fazendo sentido em seu uso.

Os conhecimentos matemáticos se fizeram presentes como recurso para conquistar mais autonomia, para tomar decisões e para atuar em sociedade. Com as responsabilidades que o mundo do trabalho traz, o repensar e revisar os conhecimentos prévios reforçam os argumentos de Skovsmose (2001, p.80.) quando afirma que a “matemática faz uma intervenção real na realidade, não apenas no sentido de que um novo insight pode mudar as interpretações, mas também no sentido de que a matemática coloniza parte da realidade e a rearruma".

Por isso que o uso de metodologias ativas se torna viável e com melhores resultados, pois em seu processo flexibiliza e avança os conhecimentos conforme o envolvimento e capacidade do aluno, ao mesmo tempo em que valoriza e aperfeiçoa os saberes anteriormente adquiridos. A matemática passa a fazer parte do cotidiano e se torna um recurso necessário para tomar decisões, se relacionar, testar, questionar, desenvolver o raciocínio lógico e principalmente desenvolver as competências que colaboram para sua formação de cidadão, em seus comportamentos e ações (Skovsmose, 2001).

Conclusão

A educação profissional, por meio da inserção do jovem aprendiz em situação de vulnerabilidade e/ou com deficiência traz a oportunidade de destacar as competências singulares de cada um, considerando o que possuem de melhor em suas habilidades. No caso das atividades de vídeo, elaboradas por conta de uma necessidade pontual imposta pelas regras de convivência do Covid 19, de certa forma, foi possível simular as mudanças repentinas que acontecem nas empresas, fazendo com que as rotinas e formas de trabalhar se alterem.

O desacomodar e encontrar novos caminhos para utilizar o que se sabe é o desafio de todo e qualquer colaborador, independente se possui uma deficiência. No caso dos participantes, sair da rotina tradicional para a rotina do trabalho é uma mudança significativa, e com as interações, recursos e atribuição de importância ao que estão fazendo é perceptível que encontram estratégias lógicas para realizarem suas tarefas. O saber contar, dividir o tempo e a organização do tempo são internalizados conforme testes e experimentações, fazendo da matemática parte do seu cotidiano para interação social, fazendo com que percebamos, que a prática e a rotina podem atribuir significados que não foram compreendidos pelos conceitos.

Encontrar brechas nos conhecimentos matemáticos já adquiridos para reconstruir ou ressignificar a usabilidade contínua desses conhecimentos, fortalece sua importância de aprendizado, ao mesmo tempo em que retomar e apresentar outros caminhos permite que as habilidades dos saberes matemáticos sejam renovados e aperfeiçoados trazendo novos significados ao que estão aprendendo.

Nessa perspectiva que as metodologias ativas colaboram para tornar necessário, fazer com que o aluno sinta que precise buscar aquele conhecimento, seja por curiosidade, para solucionar um problema ou para se sentir capaz. A posição de sujeito ativo em seu processo de aprendizagem é um comportamento que deve ser internalizado, para as mudanças e relações de trabalho, assim como para seu relacionamento social.

Por isso, quando se trata de aprendizagem para um grupo tão diverso, o uso das metodologias ativas no sentido de compreender como cada um aprende e se sente confortável para avançar traz melhores resultados. Por mais que os conhecimentos e conceitos prévios de matemática não foram formalmente apresentados, o grupo trouxe diferentes perspectivas para articular os conhecimentos, baseadas em suas experiências e compreensões. Ao mesmo tempo reconhecem que outras abordagens frente a seus conhecimentos prévios podem ser agregadas, o utilizar a matemática pode auxiliar e fazer parte de suas rotinas de vida e do trabalho.

Referências e bibliografia

Brasil. Lei nº.9.394, de 20 dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da educação Nacional. Diário Oficial da União. Brasília, 23 dez. 1996. Recuperado em 10/11/2022:https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto – Portugal: Porto Editora.

Dambrós, A. (2019). A sala de aula invertida aplicada na educação de jovens e adultos: estratégias para o ensino de química. 79f. Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville.

Fernandes, L. T. (2015) Aprendizagem significativa: uma proposta de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana espacial no ensino médio. 2015. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal – RN.

Lovato, F. L. Michelotti, A. Silva, C. B. Loretto, E. L. S. (2018). Metodologias Ativas de Aprendizagem: uma Breve Revisão. Revista Acta Scientiae. Canoas, v.20, n.2, mar./abri. p. 154-171. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3690

Maria, R, P. (2019). Indicadores para a construção de REA na educação superior em uma perspectiva de inclusão. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação) -- Universidade do Oeste Paulista – Unoeste, Presidente Prudente, SP.

Minayo, M. C. S. (2001). Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: Minayo, M. C. S (org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes.

Perrenoud. P. (2000). 10 novas competências para ensinar: convite à viagem. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Santos, J. C. F. (2008). Aprendizagem Significativa: modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação.

Skovsmose, O (4. Ed). (2001). Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus.

Valente, J, A. (2018). A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midiologia. In: Bacich, L.; Moran, J. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, p. 27-28.

Vygotsky, L. (1988). A formação social da mente. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes

Modelo pedagógico para la enseñanza aprendizaje para la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de grado quinto de primaria con TDAH.

Randy **Zabaleta** Mesino
Escuela de Ciencias Básica, Universidad de Nacional Abierta y a Distancia UNAD
Colombia
randy.zabaleta@unad.edu.co
Osvaldo Jesús **Rojas** Velásquez
Universidad de Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

El TDAH es una de las problemáticas más destacada en las aulas escolares. Los estudiantes que presenta el diagnóstico se les hace un poco más difícil el proceso de aprendizaje de las matemáticas y en particular resolución de problemas matemáticos, por las barreras que se evidencia en los síntomas de atención, impulsividad e hiperactividad. El objetivo es proponer un modelo pedagógico inclusivo que permita orientar las acciones pedagógicas, didácticas para favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos en niños de grado quinto de primaria que tienen la condición. La metodología de investigación acoge el paradigma cualitativo con un diseño de acción participativa. Se identifican tres escenarios de acuerdo a cada subtipo del TDAH, para alinear las estrategias psicopedagógicas con los diseños de actividades acorde con el estilo de aprendizaje que le favorece al estudiante con la condición específica, para que los mismos adquieran las competencias resolutoras.

Palabras clave: Educación Matemática; TDAH; Modelo pedagógico; Resolución de problemas; Quinto de primaria.

Introducción

Los estudiantes con TDAH presentan una condición muy visible, en donde es difícil controlar el poder quedarse quieto, generando así conflictos en la convivencia escolar. Además, es limitada la concentración en las lecciones impartidas en el aula y esos síntomas influyen de manera negativa en la comprensión de los conceptos fundamentales de matemática, afectando el aprendizaje de esta en su nivel de escolaridad. Por otra parte, cada día se aportan cifras de deserción escolar a causa del TDAH, la adaptación escolar de los niños demanda de esfuerzo colectivo de las autoridades escolares, maestros, equipo psicosocial y padres de familia. Este esfuerzo va dirigido a que se genere un espacio equitativo, en donde se propicie un ambiente de aprendizaje no sólo para los estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE), sino para toda la comunidad escolar.

Por otra parte, en el International Congress on Mathematical Education (ICME 14) celebrado en el 2021, el TSG 4 aborda la Educación matemática para estudiantes con necesidades especiales, el cual enfoca su atención en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en estudiantes con necesidades especiales. Este TSG centra sus discusiones en saber quiénes son los estudiantes con la condición, en las formas de organización de la clase y los recursos de apoyo, en la variedad de marcos para estudiar la educación matemática de los estudiantes que requieren apoyo especial, y en los enfoques y métodos de la investigación en educación matemática para estudiantes con necesidades especiales.

Diversas investigaciones abordan la enseñanza aprendizaje en los estudiantes con TDAH. Obrer, (2014) caracteriza el TDAH y el TDAH + DAM, su etiología, además enfatiza en los problemas de aprendizaje que se provoca en el campo de las matemáticas, y las medidas que pueden tomarse en el aula de la etapa secundaria obligatoria. Por su parte, Sala y Casajús, (2008) describen las dificultades de aprendizaje de los estudiantes con TDAH en la resolución de problemas aritméticos verbales.

La revisión del estado del arte, los resultados de la encuesta a docente, de las entrevistas y la experiencia del investigador determinan las siguientes oportunidades de mejoras:

- Construcción de actividades diversificadas y ajustadas a la necesidad de los TDAH.
- Implementación de recursos diversos en la resolución de problemas.
- Mejorar las prácticas docentes para el acompañamiento a estudiantes con TDAH.
- Mejorar las relaciones familia escuela a través de la implementación de talleres dirigidos a las escuelas de padres para el manejo del TDAH.

Se identifican las siguientes investigaciones las cuales caracterizan algunos predictores del rendimiento matemático en los estudiantes con TDAH:

Zentall y Ferkis, (1993) examinaron la resolución de problemas matemáticos en jóvenes con discapacidades de aprendizaje (DA), trastornos por déficit de atención (TDA) y trastornos por déficit de atención con hiperactividad (TDAH). Plantean que su capacidad cognitiva y la lectura contribuyen a las habilidades de comprensión necesarias para eliminar información extraña, manejar múltiples operaciones y transformar la información verbal dentro de los problemas. Además, expresan que el cálculo lento afecta la resolución de problemas. Sala y

Lacoste (2008) consideran que en los TDAH los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas son específicos y están generados por la misma sintomatología del trastorno, lo cual provoca retrasos académicos; También ponen de manifiesto que en general los alumnos con TDAH en todos los ciclos, tanto de primaria como de secundaria, obtienen puntuaciones inferiores a los alumnos neurotípicos.

Modelo pedagógico para la enseñanza aprendizaje para la resolución de problemas matemáticos en niños de grado quinto con TDAH

El modelo pedagógico que se propone consta de tres partes: parte 1, los fundamentos teóricos del modelo, parte 2, caracterización y necesidad, y parte 3, resolución del modelo.

Primera parte: Fundamentos Teóricos

Se identifican los fundamentos teóricos y su influencia en la práctica del quehacer docente, la manera en cómo se debe movilizar para lograr una apropiación efectiva en la construcción del conocimiento matemático en la resolución de problemas en los estudiantes.

Fundamentos Filosóficos. Se consideran los postulados filosóficos de Davis y Hersh (1988) y Lakatos (1978) sobre la Educación Matemática. Hersh (1997) establece la importancia de hacer compresible las matemáticas a través del contexto social del estudiante, como parte de su cultura. Lakatos (1978) establece el papel protagónico que tiene un problema para propiciar una conjetura por parte del estudiante, para la construcción del conocimiento matemático. *Fundamentos Psicológicos*. Se asumen los aportes de Vygotsky (1962) sobre el papel de los símbolos y el lenguaje en el desarrollo del pensamiento, la Zona de desarrollo próximo y la Ley genética fundamental del desarrollo (Vygotsky,1962) según Sesento (2017). *Fundamentos Pedagógicos y Didácticos*. Se asume una perspectiva constructivista y Vygotskiana o social, la cual implica ayudar y guiar al alumno a desarrollar sus poderes de expresión matemática escrita, es decir, la retórica matemática, porque solo bajo una guía explícita, el alumno puede dominar, internalizar y apropiarse de este conocimiento retórico, de manera gradual. *Fundamentos de la Educación Matemática*. Se acogen los principios del modelo TRU de Schoenfeld (2017), la visualización matemática de Arcavi (2003) y la teoría de la resolución con las fases y estrategias propuestas por Schoenfeld.

Segunda parte: Caracterización y Necesidad

En esta parte se enfatiza en la caracterización de los procesos pedagógicos iniciales en el contexto y población de estudio. Además, se muestra la necesidad de cambio para implementar el modelo pedagógico inclusivo, el cual en la práctica pedagógica es reflejo de las tendencias teóricas valoradas. A partir de la revisión de la literatura, las entrevistas a especialistas, la encuesta a docentes y la experiencia del investigador, se establece la caracterización del proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas en los niños con TDAH en las instituciones educativas del norte del departamento de Bolívar: Docentes, Estudiantes, relación-comunidad-escuela y familia, concepción del proceso, métodos, organización de la docencia y la evaluación.

Resolución del modelo pedagógico. Se fundamenta en los siguientes principios: Múltiples formas de representación (MFR), Demanda Cognitiva (DC), Proporcionar múltiples formas de acción y expresión (MFAE), Motivación hacia la matemática (MM), Evaluación formativa (EF) y Empoderamiento (aprender a pensar, EAP).

A continuación, se comparten el gráfico que describe cada fase del modelo pedagógico. La fase 1 se denomina reconocimiento, la fase 2 se conoce como diseño, ajuste y acción pedagógica y finaliza con la fase 3 que se conoce como evaluación y validación de las competencias resolutoras.

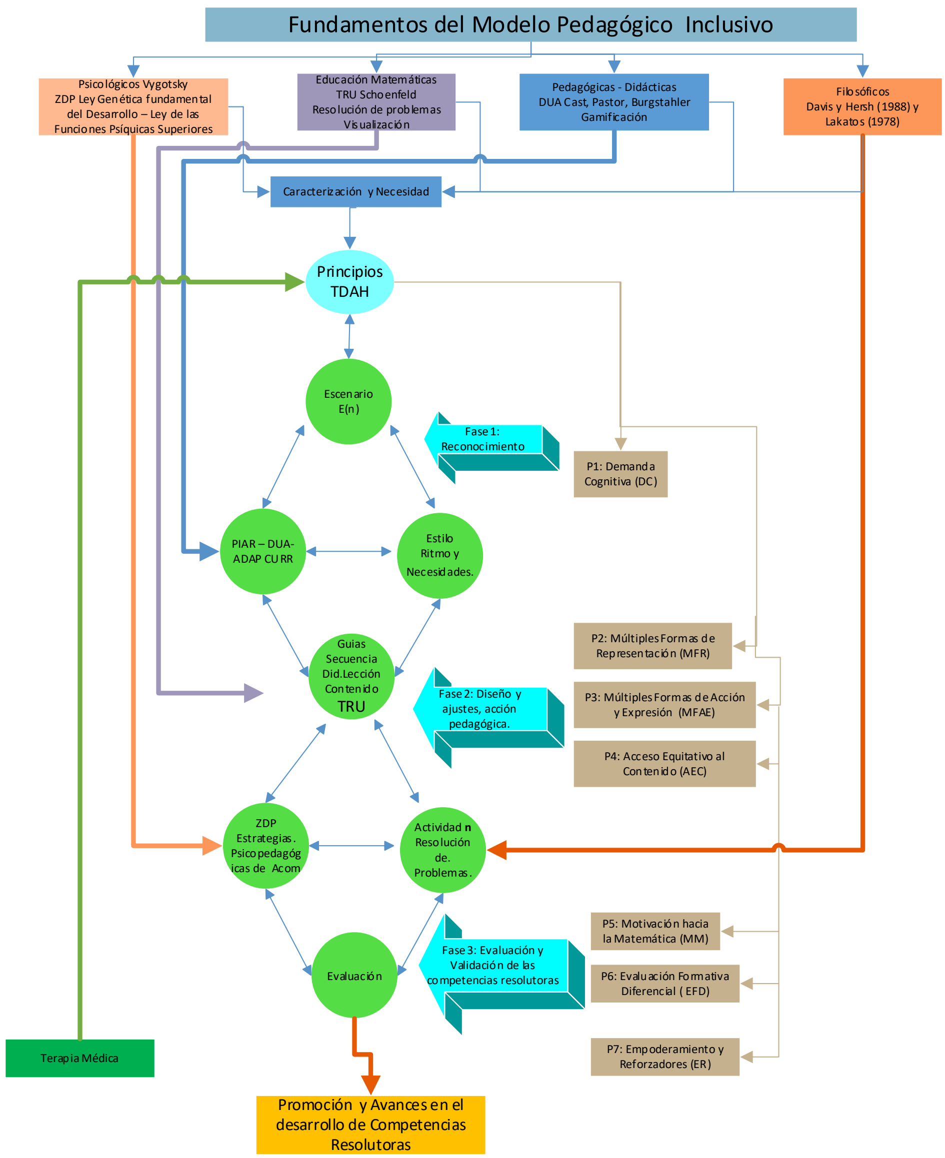


Figura 1. Esquema del Modelo Pedagógico Inclusivo para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Resolución de Problemas.

La fase 1, se denomina reconocimiento, en esta se dispone de un escenario denotado por E(n), en él se establece y se declara todo el diagnóstico que presenta el estudiante por parte del profesional de neuropsicología, que inicia con la remisión del docente al equipo de psicología de la institución educativa. Esta caracterización influye directamente en el componente que se denomina *Estilo, Ritmos y Necesidades*, ahí se identifican las necesidades derivadas de la condición del trastorno, se utilizan diferentes estilos de aprendizaje que favorecen al estudiante, reconociendo el ritmo que evidencia el alumno en respuestas a los estímulos que se le plantean. Luego en el componente correspondiente al *PIAR (Plan individual de ajustes razonables) – DUA (Diseño universal para el aprendizaje) – Adaptación Curricular*, se identifican todas las barreras que impiden que el estudiante que presenta el trastorno pueda activar el principio correspondiente a la Demanda Cognitiva. Es aquí en donde los ajustes y adaptaciones se hacen evidentes para lograr lo que se desea en la DC, es decir, se implementan los aspectos de flexibilidad acorde a las necesidades del estudiante. Dado que el diagnóstico es cambiante en los TDAH las tres componentes: el escenario E(n), el estilo, ritmo y necesidades junto con el PIAR - DUA y las adaptaciones curriculares se relacionan e integran directamente. Las barreras para que sean eliminadas requieren que se identifiquen las necesidades del estudiante para alinearlos a las estrategias que favorezcan el proceso de aprendizaje.

La fase 2 del modelo, correspondiente al *diseño, ajuste y acción pedagógica*. En los componentes de esta fase, se activan los principios múltiples formas de representación (MFR), múltiples formas de acción y expresión (MFAE) y el acceso equitativo al contenido (AEC). En la fase se establece por parte del docente los diseños de lecciones de aprendizaje, guías de actividades con todas las estrategias que se deben orientar de acuerdo con las barreras que se identificaron en la fase previa.

Para la propuesta de actividad se acogen los criterios del modelo TRU de Schoenfeld (2017), para fortalecer las competencias en la resolución de problemas en los niños con TDAH. Así mismo, la fase 2 integra *los componentes psicopedagógicos, la zona de desarrollo próximo (ZDP) de Vygotsky y la resolución de problemas*. En el componente psicopedagógico se asumen todas las consideraciones prescritas por el profesional médico, el terapeuta, se identifican los medicamentos y sus efectos en el estudiante para incluir en las estrategias los tiempos exactos que se deben aprovechar por causa del mejoramiento de la atención, hiperactividad e impulsividad. A su vez prever los efectos contrarios cuando el fármaco ha dejado su acción; también, la implementación de ajustes para flexibilizar los derechos básicos de aprendizajes DBA, los horarios de clases que le favorecen a los TDAH, los lugares de intervención escolar y extraescolar, la planificación de las actividades con las particularidades de los TDAH. En el componente del ZDP se ejercitan las estrategias de apoyo donde el docente brinda al estudiante los recursos didácticos que él requiere para el dominio conceptual demandado en su nivel de escolaridad, logrando cierta independencia con la extensión de la zona del desarrollo próximo.

En la fase 3, denominada *Evaluación y validación de las competencias resolutoras*, se activan los principios de la Motivación hacia la Matemática (MM), Evaluación formativa diferencial (EFD) y el Empoderamiento y Reforzadores (ER).

La evaluación es uno de los componentes más importantes del modelo, se usan instrumentos como rúbricas de valoración cuantitativa y cualitativa con indicadores que permiten clasificar el avance del desempeño en las competencias resolutoras para la solución de problemas en los estudiantes. Al considerar la Evaluación Formativa diferencial, se comprende en qué estadio de dominio se encuentra el estudiante para poder establecer un plan de acompañamiento con las características particulares que imprimen el factor diferencial de la evaluación.

Se tiene en cuenta los componentes de flexibilidad como el tiempo, los códigos de comunicación reducidos, la verbalización de la actividad, el momento propicio acorde a la medicación suministrada y los ajustes en los DBA declarados para el nivel de escolaridad en el que se desarrolla la investigación.

Las fases 1, 2 y 3 antes descritas, junto a los fundamentos filosóficos, psicológicos, didácticos y de la educación matemática, como también, la atención de los profesionales de salud, terapeutas y neuropsicólogos, la acción de la familia, los compañeros de clases y los docentes, dan lugar el modelo pedagógico para la resolución de problemas matemáticos en niños con TDAH en quinto grado de la básica primaria, con las relaciones de cada componente que se integran en cada fase.

Estos referentes aunados al carácter contextual del aula, los entornos socioculturales, las diferentes representaciones utilizadas por partes de los estudiantes contribuyen en el mejoramiento de la gestión del conocimiento, para influir en la formación matemática y futuros ciudadanos.

Las estrategias pedagógicas y didácticas serán proyectadas de acuerdo al escenario que describe el contexto del estudiante, el primero corresponde al subtipo de TDAH/ I, lo llamaremos E(1), es el TDAH inatento. Este presenta con mayor profundidad esa condición, muestra dificultad para prestar atención y finalizar una tarea asignada, específicamente cuando se requiere una concentración continua y hay una demanda de esfuerzo mental. Todos los diseños, planeaciones desde el punto de vista psicopedagógico y didáctico, descritas en el modelo pedagógico se focalizan para eliminar todas las barreras de la inatención profunda; El segundo corresponde al subtipo de TDAH/ HI, lo llamaremos E(2), es el TDAH hiperactivo-impulsivo, presenta con mayor profundidad estas condiciones, muestran la necesidad de moverse con mucha frecuencia, no controlan sus impulsos. Además, por lo general no presentan problemas de atención, específicamente no pueden mantenerse sentados en el aula de clases y no pueden controlar su comportamiento. Todos los diseños, planeaciones desde el punto de vista psicopedagógico y didáctico, descritas en el modelo pedagógico se focalizan para eliminar todas las barreras de la del comportamiento hiperactivo- impulsivo, demandando escenarios y laboratorios que propicien un ambiente de aprendizaje controlado para los que tienen esa condición; El tercero corresponde al subtipo de TDAH/C, lo indica por E(3). Es el TDAH combinado, presenta con mayor profundidad dificultad de hiperactividad- impulsividad y falta de atención. Muestran la necesidad de moverse con mucha frecuencia, no controlan sus impulsos, y además evidencia significativamente problemas en la atención. Así mismo todos los recursos didácticos de apoyo que se requieren el escenario, se focalizan en la eliminación todas las barreras de la del comportamiento hiperactivo- impulsivo y de inatención, demandando un ambiente de aprendizaje controlado para los que tienen esa condición combinada.

Al modelar el contexto real en el cual se desenvuelven los niños con TDAH, es necesario integrar y conectar los diferentes subtipos. Rodríguez y Quenza (2017) expresan con claridad el cambio que se presenta el diagnóstico de los TDAH, lo que indica que bajo ciertas circunstancias un estudiante puede pasar de un escenario a otro, es decir, del escenario E(1) al escenario E(2) ó del E(2) al E(3) ó del E(3) al E(1) y viceversa. Esos cambios en el diagnóstico por el acompañamiento recurrente con los especialistas del equipo médico, sugieren que las estrategias psicopedagógicas, didácticas también cambien, con fin de favorecer el mejor ambiente en el cual el estudiante pueda avanzar en la gestión del conocimiento y el desarrollado de las competencias matemáticas para la resolución de problemas. A continuación, se muestra en la Figura 2 del modelo operativo que describe la práctica en el aula, lo cual constituye un aporte importante a la gestión del conocimiento de los estudiantes con TDAH:

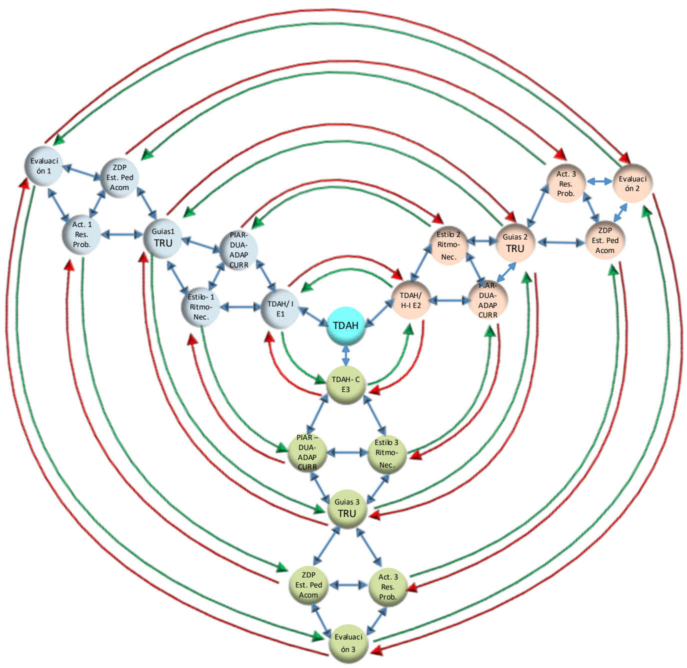


Figura 2. Modelo operativo que describe la práctica en el aula.

Las flechas de color rojo indica que el estudiante no ha mejorado su condición en el escenario del diagnóstico que se encuentra, lo cual sugiere que en la práctica sitúe en el escenario más apropiado que le ayude a eliminar las barreras que impiden el desarrollo autónomo de la gestión del conocimiento que lo conduzca al aprendizaje efectivo; por otro lado la flecha verde indica que el estudiante mejora y domina su condición comportamental permitiendo ser situado en un escenario más flexible y cómodo para el estudiante, es decir el número de estrategias serían menores puesto que el estudiante se ha empoderado en la forma de gestionar su aprendizaje adquiriendo favorablemente las competencias resolutora de problemas matemáticos.

Conclusiones

Con el modelo pedagógico inclusivo propuesto, podemos observar la intervención pedagógica del docente en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. Integra la acción de la familia para reforzar y controlar desde la casa la continuidad de la ruta de apoyo para el aprendizaje. Además, declara todas las estrategias que interactúan en el aula de clases con el apoyo de sus compañeros. Las consideraciones didácticas presentes, tienen un peso ponderado por las condiciones y particularidades de los TDAH que están bajo prescripción médica, lo que implica una relación escuela – familia – comunidad, unido al acompañamiento interdisciplinar.

Para lograr que el estudiante alcance las competencias resolutoras, el modelo apunta a la conexión del mismo con la resolución de problemas, lo integra a un contexto escolar normal no necesariamente en una escuela inclusiva. Lo que implica que la acción del docente permite que el estudiante sea empoderado en el sentido que asuma la responsabilidad en el aula, le asigne las tareas, y ese ambiente de empoderamiento logre que el estudiante sea manejado por el docente, regule su comportamiento y atienda en clase. Las competencias resolutoras son evaluadas a través de las rúbricas cualitativas teniendo en cuenta el método de Wilcoxon con una prueba inicial y una prueba final.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 52(3), 215-241.

Davis, P J and Hersh, R (1988) Descartes Dream· the World According to Mathematics, Hannondsworth, Middlesex, Penguin Books.

Hersh, R. (1997). What is mathematics, really? New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1978). Science and pseudoscience. Philosophical papers, 1, 1-7.

Montero, P. R. (2003). La zona de desarrollo próximo (ZDP)": procedimientos y tareas de aprendizaje. Editorial Pueblo y Educación.

Obrer-Marco, C. (2014). TDAH y Matemáticas: propuestas para mejorar el proceso enseñanza–aprendizaje de los alumnos de la ESO (Master's thesis).

Sala, N., y Lacoste, Á. (2008). El alumnado con déficit de atención e hiperactividad (TDHA) en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles obligatorios. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, 63-83.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). Journal of Education, 196(2), 1-38.

Schoenfeld, A. H. (2017). Teaching for robust understanding of essential mathematics. Essential mathematics for the next generation: What and how students should learn, 104-129.

Sesento, L. (2017). "Reflexiones sobre la pedagogía de Vygotsky", Revista Contribuciones a las Ciencias Sociales, (abril-junio 2017).

Zentall, S. S., y Ferkis, M. A. (1993). Mathematical problem solving for youth with ADHD, with and without learning disabilities. Learning Disability Quarterly, 16(1), 6-18.

Número racional: significado y representaciones semióticas

Osmar Erlin **Andrade** Mosquera
Universidad del Quindío
Colombia
oeandradem@uqvirtual.edu.co
Eliécer **Aldana** Bermúdez
Universidad del Quindío
Colombia
eliecerab@uniquindio.edu.co
Humberto **Colorado** Torres
Universidad del Quindío
Colombia
colorado@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta ponencia hace parte de un estudio más amplio, en la formación doctoral, que trata sobre el pensamiento numérico y el objeto matemático de los números racionales. El objetivo es lograr una comprensión duradera y consciente de este concepto en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa en Colombia. Para ello, se ha utilizado un marco teórico semiótico cognitivo: los Registros de Representación Semiótica. En el aspecto metodológico, se optó por la Ingeniería didáctica en sus fases. Los resultados permiten concluir que hay dificultades iniciales en la construcción de este concepto. Debido, a que están acostumbrados a trabajar solo en el conjunto de los números naturales y el de los enteros. Además, existen dificultades en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro. Porque, no hay coordinación entre los diferentes registros y no logran comprender que dos representaciones distintas pueden representar un mismo objeto matemático.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación secundaria; Aprendizaje; Cognitivismo; Pensamiento Numérico; Valle del Cauca; Colombia.

Introducción

El aprendizaje y compresión del número racional en los estudiantes, en las últimas tres décadas no ha mejorado (Lortie-forgues, Tian & Siegler, 2015). A pesar de las reformas que se han incorporado en el sistema educativo y los numerosos estudios sobre su enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar. Permitir que los estudiantes alcancen un desarrollo en la compresión conceptual de este objeto matemático permitirá el éxito académico, profesional y ocupacional, por la presencia de éste en todas y cada una de las áreas del saber y en la vida cotidiana. Con el fin de mejorar los aprendizajes en los estudiantes en el objeto matemático de los números racionales, se ha utilizado como marco teórico los Registros de Representación Semiótica. Ya que estos permiten la movilización de estos registros de representación para la comprensión de este concepto en los estudiantes. En ese sentido, Duval (2004), expresa, que "sin semiosis no hay noesis". Es decir, que sin registros de representación no hay comprensión del objeto matemático estudiado. Este estudio tuvo como propósito lograr una comprensión duradera y consciente de los números racionales, a través de la habilidad de cambiar de un registro de representación a otro, en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa en Colombia.

Referentes teóricos

Significado y representación de los números racionales

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, un aspecto importante y problematizador que se resalta en las investigaciones en educación matemática y en didáctica de las matemáticas, es distinguir un objeto matemático de su representación (Duval, 2004) y en especial, saber qué es lo que este designa. Por lo tanto, Iori (2017) afirma que es ingenuo confundir objetos reales con los objetos matemáticos, ya que los objetos matemáticos carecen de referencias ostensivas. De la misma manera Duval (2017) distingue de acuerdo con el modo de acceso a los objetos, dos tipos de objetos epistemológicamente. El primero es *accesible a través de la percepción*. Es decir, que es una relación de causa y efecto. Porque se accede a ellos de manera directa y multisensorial o indirecta y monosensorial, recurriendo a la utilización de instrumentos para su representación. El segundo tipo es que hay *objetos que no son accesible en absoluto*, ni si quiera con la utilización de un instrumento. Es decir, que para acceder a estos tipos de objetos que presentan una relación referencial, es necesario utilizar *sistemas de signos*. Iori (2017) apoyándose en Duval (2009), dice que normalmente en la educación matemática se tienden a confundir cuatro realidades de objetos: "el objeto como cosa, el objeto intencional, el objeto fenomenológico y el objeto de conocimiento" en cada uno de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este caso el objeto matemático se hace referencia al objeto de conocimiento. Aunque objeto matemático para Duval "es precisamente la invariante (operacional o lógico discursiva) de una multiplicidad de representaciones semióticas" y que "el objeto de conocimiento surge, pues, del reconocimiento de que dos o más representaciones representan el mismo objeto, independientemente de sus contenidos" (Iori, 2017, p.278).

En ese sentido, Pecharromán (2013) considera que los objetos matemáticos representan una funcionalidad a partir del contexto. Y que esta funcionalidad a su vez está determinando la representación y el significado del objeto. La representación permite la expresión y uso del objeto. El significado atiende a la interpretación del objeto" (Pecharromán, 2014, p. 112). En el aspecto de la representación se hace necesario porque el *objeto matemático necesita ser expresado*. A través de los tres tipos de signos: *iconos* (registros semióticos: analógicas (gráficas, y geométricas), las digitales (verbales, numéricas y algebraicas)), *los símbolos* (+, =, 2, etc.) y *los índices* (son las letras). El aspecto de la interpretación se hace necesario, porque el *objeto matemático necesita ser interpretado*. Porque, las diferentes interpretaciones que pueda presentar un objeto conforman su significado. Y este, se "desarrolla desde la caracterización y discriminación de la funcionalidad que representa a través de la expresión discriminatoria del objeto, de su uso funcional y de las relaciones del objeto" (Pecharromán, 2014, p. 114).

Del mismo modo, Pecharromán (2014) enfatiza que un objeto matemático es aprendido de manera adecuada si *atiende al aspecto representacional (iconos, símbolos, índices) que lo configura,* es decir, a su expresión y propiedades como también al *desarrollo de un significado personal sobre este* desde su experiencia, que le permite llegar a su interpretación y caracterización. Además, esta significación se da a través de los aspectos de la expresión discriminatoria, el uso funcional del objeto y las relaciones del objeto con otros.

A través del tiempo, el proceso de enseñanza y los procesos de aprendizaje del concepto de números racionales en el ámbito escolar ha sido complejo, tanto para el docente que lo enseña como para el estudiante que lo intenta aprender, debido a las diferentes formas de representación en las que se relaciona y se visualiza el concepto, así como lo expresan Brousseau, Brousseau, & Warfield (2014), (Nicolaou & Pitta-pantazi, 2016). Estos autores afirman que los orígenes de las dificultades en el aprendizaje se relacionan con las distintas variedades de formas que se utilizan en su representación (medición, proporción y operación); habitualmente, se enseñan como si todos los significados fueran equivalentes. Con el tiempo, "el resultado es que el estudiante debe aceptar muchas cosas simplemente en la base que el docente lo dice, y en el largo plazo no tiene una base coherente para los conceptos" (Brousseau, et al., 2014).

Los estudios referenciados sobre las representaciones de los números racionales resaltan la importancia de utilizar diferentes registros de representaciones apropiados para una comprensión conceptual completa de los números racionales (Qiu & Wang, 2021), como se muestra en la figura 1. Ya que esta multiplicidad de representaciones permite conectar conceptos abstractos, símbolos, algoritmos, lenguajes verbales y gráficas visuales. Además, porque entre estas se dan la transición de una representación a otra. Las representaciones graficas externas continuas de áreas como el circulo y el rectángulo se debe promover no solo desde la partición de las áreas iguales, sino también desde las áreas que no sean iguales en tamaño. Del mismo modo, en estas áreas no solo proponer realizar las acciones de dividir la unidad, sino también de reconstruir la unidad.

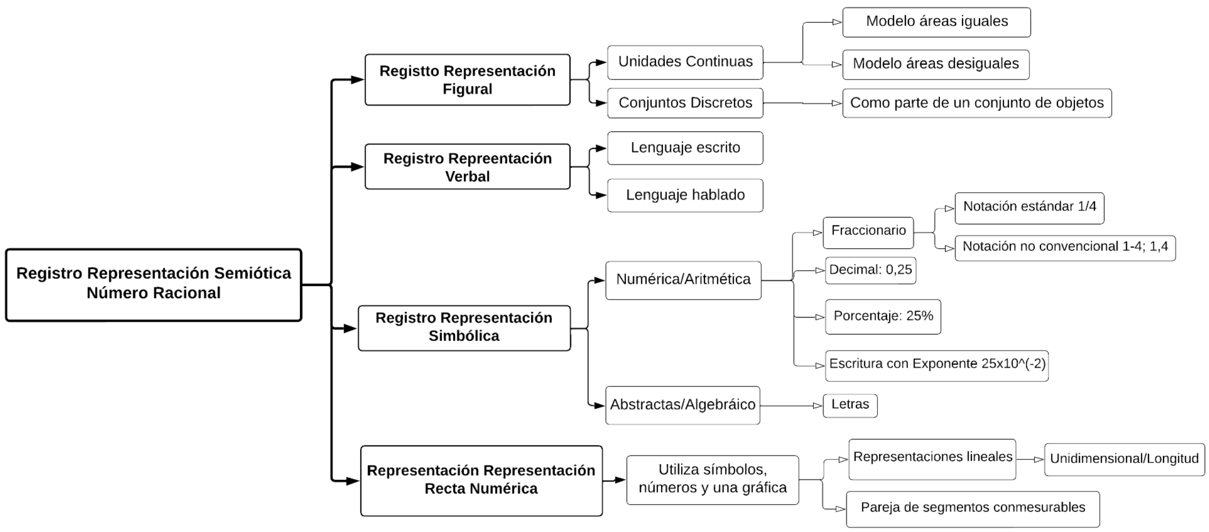


Figura 1. Los diferentes registros representación semiótica del número racional (elaboración propia). Se muestra los cuatros registros y subregistros en los que se puede representar el numero racional.

La habilidad para cambiar los registros de representación

Las dificultades de comprensión en los estudiantes, de los conceptos introducidos en el aula. Llevó a la didáctica de las matemáticas a realizar muchas investigaciones en relación con la adquisición del conocimiento matemático y las secuencias de actividades, con el fin de favorecer el progreso en el pensamiento matemático. Pero, los estudios aún no tienen una respuesta clara de cómo introducir a la mayoría de los estudiantes en el aprendizaje de los modos del pensamiento matemático. Un ejemplo claro de esos modos explica Duval (2006), es la habilidad para cambiar el registro de representación.

El pensamiento matemático es independiente de toda actividad semiótica. Ya que ésta es secundaria y externa. Duval (2006) presenta dos observaciones a los objetos de conocimiento matemático en los “contextos de representación”:

> ❖ La actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”. Por ejemplo, los números naturales se pueden representar con material como cerillas (IIIII IIIII), con puntos, con una representación poligonal, y también con el sistema de notación decimal, que tiene un signo algo extraño, el cero.
> ❖ Pero los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos. (p.144-145)

Es importante no caer en la interpretación superficial de que los contextos de representación están distantes de una comprensión matemática, sólo por ser representaciones externas. “Los contestos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran” (Duval, 2006, p.145). Así mismo, Duval (2006) afirma que los dos requisitos cognitivos que se deben considerar de manera conjunta y que se involucran para analizar la actividad matemática en relación con la comprensión de los problemas de aprendizaje están relacionados en un primer momento por la propiedad de **transformación** entre las representaciones semióticas. Porque en matemáticas, “el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas y los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo” (Duval, 2006, p.145). Y en un segundo momento por la **coordinación interna** entre diversos sistemas de representación que se eligieron. Porque “sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos contextos de representación diferentes del mismo objeto” (Duval, 2006, p.145).

Los aprendizajes vinculados a un proceso de enseñanza se forman a través de las representaciones semióticas. Y en estas, se presentan tres actividades cognitivas en el cual se fundamentan. La formación, el tratamiento y la conversión son las tres actividades cognitivas inseparables de las representaciones semióticas. Las últimas dos actividades conforman la transformabilidad de las representaciones semióticas. Porque permiten que de una representación se puedan elaborar otra u otras representaciones semióticas. En pocas palabras, “la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas en la perspectiva de elaborar nuevas representaciones. Todo el progreso de conocimientos en matemática pasa por este trabajo de transformación” (Duval, 2004a, p.44).

Las reglas de conformidad que rigen en la formación de las representaciones semióticas permiten aceptar las representaciones producidas, mejorando la comunicación y el empleo de los procedimientos de tratamientos que permiten o son posibles dentro del sistema semiótico. Estas cumplen también una función de identificación del sentido para quien se encuentra frente a una representación, que no es el mismo que la produjo” (Duval, 2017a, p.78). Es importante tener presente que, en las representaciones semióticas, la indagación y su comprensión no se limita a la competencia de la práctica de las reglas de conformidad. Ya que,

> la formación de las representaciones semióticas es, en efecto, más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad. La formación implica la selección de un cierto número de caracteres de un contenido percibido, imaginado o ya representado en función de las posibilidades de representación propias al registro escogido. (Duval, 2017a, p.78)

Aspectos metodológicos

Este estudio, utiliza la ingeniería didáctica, como metodología potente de investigación en educación matemática, con el propósito de desarrollar en los estudiantes de educación básica, la comprensión conceptual de los números racionales, mediante los registros de representación semiótica. El paradigma investigativo que se utilizará permitirá entender el fenómeno desde una perspectiva contextualizada y no generalizada; es decir, desde el punto de vista de los actores estudiados. Además, se aprende desde lo relativo al mundo social, las experiencias y puntos de vista de los individuos, la riqueza interpretativa, la profundidad de las ideas y los significados que arrojen de los datos. Hasta el momento el estudio en desarrollo se ha logrado aplicar un instrumento cuestionario abierto como prueba diagnóstica y la recolección de la información se tiene con base en este instrumento. La prueba permitió observar el estado de comprensión que presentan los estudiantes de los números racionales. Los estudiantes que participaron en el estudio fueron 21 del grado 7° de Educación Básica Secundaria de la sede Central, anexa a la Institución Educativa El Queremal, que pertenece al sector oficial, del municipio del Dagua-Valle del Cauca. Ellos son estudiantes de ambos sexos, que tienen un rango de edad que oscila entre los 12 y los 15 años. Los niveles socioeconómicos están entre el estrato 1 hasta el estrato 3.

El instrumento cuestionario abierto constaba de 9 ítems, descrito como lo muestra la tabla 1: en el primero se presentó registros figurales con áreas continuas iguales y desiguales, con el propósito que se hiciera la conversión a un registro simbólico en notación estándar. En el segundo, se esperaba que dibujaran o colorearan según el registro fraccionario escrito, teniendo en cuenta los registros figurales completos o incompletos. En el tercero, el propósito era realizar la conversión a un registro en notación decimal según el registro fraccionario dado. En el cuarto, se presentó dos registros en la recta numérica, se esperaba que escribieran un registro fraccionario para cada recta numérica. En el quinto, se les presentó dos registros, uno en lengua materna y el otro como representación numérica fraccionaria, con propósito de que dibujaran la recta numérica y ubicaran las fracciones descritas en ellas. En el sexto, se les presenta un registro figural con un conjunto discreto de corazones, varios pintados de algunos colores (rojos, azules y amarillos) y se les pidió hallar la fracción que indica cada color dentro del conjunto discreto. En el séptimo, se pretendía que escribieran el porcentaje y la fracción que se indica en el registro verbal escrito. En el octavo se les presentó dos problemas de distribución equitativa en un registro verbal escrito y se esperaba la respuesta en un registro fraccionario y figural. En el último se les presenta un registro figural con áreas contiguas desiguales y se esperaba la conversión en un registro fraccionario.

Resultados

El instrumento cuestionario abierto como prueba diagnóstica que se aplicó para la recolección de la información consta de nueve ítems, como lo muestra la siguiente tabla. En el cual los estudiantes tuvieron un tiempo de dos horas para resolverlo.

Tabla 1
Estructura del instrumento cuestionario

Ítems	Representación inicial	Representación final (conversión)
1.	Registro figural con áreas continuas iguales (a, b y c) y áreas desiguales (d y e)	Se les sugería pasar a un registro simbólico faccionario en notación estándar
2.	Registro simbólico faccionario en notación estándar	Debian dibujar y colorear el registro figural con áreas continuas iguales y áreas desiguales
3.	Registro simbólico faccionario en notación estándar	Debian convertir el registro simbólico faccionario en notación estándar a un registro simbólico en notación decimal
4.	Registro recta numérica unidimensional	Se les sugería ubicar el registro simbólico faccionario en notación estándar en la recta numérica
5.	Registro simbólico faccionario en notación estándar (a) y registro verbal escrito (b).	Se les sugería dibujar el registro recta numérica unidimensional y ubicar los registros simbólicos
6.	Registro verbal escrito y Registro figural de conjuntos discretos	Se les sugería pasar a un registro simbólico faccionario en notación estándar
7.	Registro verbal escrito	Se les sugería pasar a un registro simbólico faccionario en notación estándar y porcentaje
8.	Registro verbal escrito	Se les sugería pasar a un registro simbólico faccionario en notación estándar y dibujar un registro figural
9.	Registro figural con áreas contínuas desiguales	Se les sugería pasar a un registro simbólico faccionario en notación estándar

Nota. Se muestra los diferentes ítems de representaciones iniciales que se les presentó a los estudiantes para que realizaran las conversiones apropiadas.

En los resultados de la aplicación del instrumento cuestionario abierto se puede evidenciar que los estudiantes presentan mayores desempeños y habilidades al escribir la fracción estándar de un registro figural con áreas continuas con un 76% y cuando deben dibujar o colorear un registro figural según la fracción indicada con un 62% y 86%. Pero, sus desempeños y habilidades no son los esperados cuando las áreas son desiguales con un 10% o deben escribir el decimal que resulta de una fracción con un 0%. También cuando tienen que dibujar una recta numérica 0% o escribir su fracción con un 5%. Además, hallar el porcentaje o la fracción de un conjunto discreto con un 14% y por último resolver problemas que impliquen repartos equitativos con un 5% y 10%.

Conclusiones

El aprendizaje del concepto de número racional presenta muchas dificultades (Lortie-forgues, Tian & Siegler, 2015). Pero, se puede llegar a comprender si se tienen en cuenta el desarrollo de las diferentes subconstrucciones y su interrelación entre sí, como: parte-todo, relación, operador, cociente y medida, que presenta las fracciones (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). A través, de las diferentes representaciones del objeto, las situaciones reales, los símbolos hablados y escritos, las imágenes y los modelos concretos. El aprendizaje se maximiza significativamente cuando se interactúa con diversas situaciones reales o modelos concretos que median entre el mundo real y el mundo matemático. Asimismo, se debe permitir interactuar con las diferentes formas de representación y que estas se puedan pasar de una representación a otra. En ese sentido, la conceptualización del número racional debe permitir superar la separación entre número y la magnitud; al mismo tiempo, reconocer y distinguir con qué variable de unidad (simples y compuestas) y de magnitud (continuas y discretas) se está trabajando en los procesos de enseñanza y de aprendizajes.

En el cambio de registro de representación del número racional se evidencian que el concepto de fracción no se desarrolla sino se han construido el componente semántico de los significados que se atribuyen y el componente sintáctico de las notaciones de esos significados (Valdemoros, 2004). Dentro de la actividad matemática, un estudiante demuestra que ha comprendido conceptualmente el número racional cuando es capaz de: realizar múltiples representaciones en diferentes registros. Sin perder de vista, que así, estas representaciones estén en diferentes registros, representan el mismo número racional Nicolaou & Pitta-pantazi (2016). De este primer atributo se desprende el segundo, que es el de “reconocimiento”. Es decir, reconocer el mismo concepto cuando se presenta en múltiples representaciones. Luego, efectuar transformaciones de tratamiento y conversión en los registros semióticos de representación como los de lengua natural, el numérico y figural (figuras de una y dos dimensiones). Por último, presentar los argumentos de los procesos que ejecutaron en cada transformación. En ese sentido, se hace necesario impulsar más el uso de la presentación grafica externa de la recta numérica. Porque, es una herramienta significativa y convencional que genera mayores dificultades y esfuerzo cognitivo al momento de aprenderla y los desempeños de los estudiantes en esta representación son inferiores con respecto de las otras representaciones. Consecuentemente Duval (2006) considera que la conversión fundada en la coordinación de los registros es el umbral de la compresión y un salto cognitivo en aras de desarrollar una comprensión integrativa.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2004). Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellecguels. PeterLang S.A. *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semioticos y aprendizajes intelectuales.* (Segunda ed.). (1. Myriam Vega Restrepo, Trad.). Universidad de Valle, I. E. P., Grupo de Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia: Merlin I.D.

Duval, R. (2017a). Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellecguels. *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semioticos y aprendizajes intelectuales.* Segunda edición. Traducción Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali, Colombia. Programa Editorial Universidad de Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking The Registers of Semiotic Representations*. Tânia M. M; Proem Editora, Ed. Springer International Publishing.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (Traducción Myriam Vega Restrepo.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME. 9(1)*. 143-168.

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 275–291. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática*, *26*(2), 111–133.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*, *31*(1), 121–134.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations:A Fundamental Experiment*. doi: 10.1007/978-94-007-2715-1

Nicolaou, A. A., & Pitta-pantazi, D. (2016). Hierarchical Levels of Abilities that Constitute Fraction Understanding at Elementary School. 757–776. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9603-4

Charalambous, Y. C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. Educational Studies in Mathematics, 64, 293–316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Qiu, K., & Wang, Y. (2021). Conceptual distinctions and preferential alignment across rational number representations. European Journal of Psychology of Education, 36(3), 865–881. https://doi.org/10.1007/s10212-020-00502-4

Lortie-forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? Developmental Review, 38, 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Valdemoros, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 7(003), 235–256. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100004

O ensino de Matemática por meio da análise do currículo das escolas municipais especiais de Porto Alegre (Brasil)

Marina Andrades Felipe
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
marina.andrades@gmail.com
Marlise Geller
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma investigação sobre os documentos que orientam a metodologia de trabalho das escolas especiais de um grande município do Brasil, como parte integrante de uma pesquisa que busca conhecer o emprego do ensino de matemática nessas escolas especiais. Esse recorte analisa o currículo das escolas especiais, e da resolução do Conselho Municipal de Educação que orienta o trabalho. Os documentos são analisados sob o olhar da pesquisa social interpretativa. Dentre os resultados, destaca-se que os professores elaboraram um referencial curricular para as quatro escolas especiais, sendo que esse currículo constitui-se em uma base de apoio, pois cada aluno possui uma necessidade de desenvolvimento diferente do outro.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Inclusiva; Secretaria Municipal de Educação - SMED - Porto Alegre; Educação Pública; Educação Básica.

Introdução

Esse artigo, decorrente de uma tese de doutorado em andamento em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, analisa a documentação que orienta as 4 (quatro) escolas municipais especiais de Porto Alegre, uma capital da região sul do Brasil. A pesquisa norteadora dessa escrita, propõe-se a investigar a percepção dos educadores de uma rede municipal de ensino sobre o processo de ensino de Matemática na perspectiva da Educação

Especial, por meio de questionários e entrevistas abertas, analisados pela pesquisa social interpretativa abordando a percepção dos professores que atuam nessas escolas.

Para este recorte, apresentam-se dois documentos que regulam a estrutura e currículo das escolas, com ênfase na disciplina de Matemática. São eles, a Resolução 013 de 2013, do Conselho Municipal de Educação de Porto Alegre, e o documento construído pelas escolas, intitulado “Organização das Escolas Especiais”.

Inclusão

Desde a redemocratização e abertura política, em 1985, as modificações do Ensino no Brasil se fizeram presentes constantemente, perpassam as tecnologias digitais, as estruturas educacionais, entre elas os ciclos de formação, além de tantas outras. Uma das modificações mais significativas é a inclusão escolar, que trouxe nova estrutura para o sistema educacional, agregando ao sistema de ensino regular estudantes que outrora foram excluídos, em escolas especiais separadas dos demais.

Na rede pública municipal da cidade de Porto Alegre (cidade capital do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil) as Escolas Especiais ainda se fazem presentes, sob um olhar de acolhimento e transição entre o Ensino Especial e o dito “regular” ou “inclusivo”.

Nessa perspectiva, é necessário explanar sobre as definições e diferenças entre “escola especial” e “escola inclusiva” no Brasil. Segundo Colling (2018), “na escola inclusiva não é o aluno que se adapta à escola, mas é ela que, consciente de sua função, coloca-se à disposição do aluno, tornando-se um espaço inclusivo”, entendendo a Escola Inclusiva como uma Escola que atende todos os estudantes. Ainda, segundo Brasil (2001), nesse contexto, a Educação Especial é concebida para possibilitar que o estudante com necessidades educacionais específicas atinja os objetivos da educação geral, mas no caso das Escolas Especiais, em espaços destinados exclusivamente aos estudantes com alguma síndrome ou transtorno.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN, Brasil (1996), em seu Capítulo V, que trata da Educação Especial, traz no Artigo 59 que os sistemas de ensino assegurarão aos educandos com “necessidades especiais” (atualmente utilizamos Pessoa com Deficiência) currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específica para atender às suas necessidades, o que em caráter organizacional, manteve a estrutura das Escolas Especiais.

A inserção dos estudantes com deficiência nas mais variadas esferas educacionais, traz ao debate o Ensino de Matemática dos alunos, e ainda novas discussões, mas permeando significados já abordados por autores desta área. D’Ambrósio (2005, p. 105) coloca que “só se justifica insistirmos em educação para todos se for possível conseguir, através dela, melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo. A dignidade de cada indivíduo se manifesta no encontro de cada indivíduo com outros”.

Perante os novos movimentos da educação, com o advento da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, a percepção sobre o ensino da matemática continua se direcionando para a aprendizagem relacionada ao cotidiano e ao mundo que o estudante pertence. Nas competências específicas da Matemática, uma delas compreende que o estudante deve:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 267).

A inclusão dos estudantes ocorre por todo o percurso educacional e social, em que o mesmo se percebe como parte integrante do meio. Nos estudos relacionados à inclusão escolar, pela ótica dos educadores, Mitler (2003, p. 184) coloca que "criar oportunidades para a capacitação não significa, necessariamente, influenciar o todo como os professores sentem-se em relação à inclusão".

Pois o educador necessita de oportunidades para refletir sobre as propostas de mudança "que mexem com seus valores e com suas convicções, assim como aquelas que afetam sua prática profissional cotidiana" (Mitler, 2003, p. 184).

A estruturação da inclusão pelas diferentes perspectivas, com todos os aspectos que envolvem essas mudanças do que antes era exclusão, para o caminho da inclusão, prevê um desarranjo das atuais estruturas de formação do educador.

Percurso Metodológico

Para a realização da pesquisa, optou-se por uma abordagem qualitativa, com dados históricos do Ensino Especial no município de Porto Alegre, em consonância com questionários e entrevistas com os professores educadores nas escolas especiais e inclusivas, pois em consonância com os procedimentos indicados, busca-se Lüdke e Menga (2014) ao enfatizar que entrevistas e questionários ocupam lugar privilegiado nas abordagens qualitativas, principalmente nas abordagens de pesquisa educacional, pois possibilitam um contato pessoal do pesquisador com o fenômeno pesquisado.

A pesquisa será realizada junto aos professores que atuam nas escolas de educação especial da Rede Municipal de Porto Alegre. A amostra será de até 156 educadores, buscando utilizar questionários estruturados para a totalidade de educadores, e entrevistas com parte dos educadores. Como critério de exclusão será o não retorno do questionário e/ou da entrevista semiestruturada.

A análise dos dados de todas as etapas da pesquisa, incluindo esse recorte que aborda os documentos, dar-se-á pela pesquisa social interpretativa (Rosenthal, 2014), sob o olhar da pesquisadora como agente do cotidiano, permeando a análise com os conhecimentos prévios da mesma, como parte integrante na construção e análise dos dados.

Com essa etapa concluída, de análise dos documentos, a pesquisa se debruça sobre os dados originados pelos questionários e entrevistas com os educadores das escolas especiais, com conhecimento acerca da legislação e documentos que regem esse trabalho.

As Escolas Especiais no município de Porto Alegre

A Resolução nº 013 de 2013/CME dispõe sobre as diretrizes para Educação Especial no Sistema Municipal de Ensino de Porto Alegre, e prevê o funcionamento das escolas especiais de ensino fundamental pela necessidade de garantir "estrutura de serviços administrativos e pedagógicos de qualidade para os casos de deficiência intelectual, múltipla ou transtorno global do desenvolvimento e outras deficiências cuja complexidade exija ambientes específicos para o desenvolvimento integral e integrado das crianças e adolescentes" (Art.25).

Para isso, o sistema municipal de Ensino mantém em funcionamento 4 escolas, que atendem "estudantes dos seis (6) anos aos vinte e um (21) anos de idade - completados durante o ano letivo - e a enturmação deve ser organizada de acordo com a idade, considerando aspectos socioafetivos de desenvolvimento e construção da singularidade", definido no Art. 26 da Resolução citada.

A organização das escolas é por meio de Ciclos de Formação, que possibilitam a articulação das diferentes áreas do conhecimento e do próprio fluxo de transição dos alunos entre um nível e outro, compondo as turmas de 1º, 2º e 3º Ciclos e Turma Unificada de Transição. Repensando o currículo anual, a proposta dos Ciclos permite uma maior flexibilidade na avaliação contínua do estudante, como coloca Huff (2022):

> A proposta de se repensar o ensino seriado, no qual os alunos seguem um currículo anual, para uma nova organização em ciclos plurianuais, onde os estudantes terão mais tempo para atingir os objetivos propostos pela escola sem que haja reprovação ao final de cada ano letivo, rompe com o padrão organizacional da escola tradicional. Essa quebra de paradigma tende a encontrar obstáculos na sociedade e resistência entre os membros da comunidade escolar, por isso deve estar bem alicerçada. (Huff, 2022, p. 35-36)

Quando refletimos sobre a estrutura de uma escola especial e inclusiva, o obstáculo de uma avaliação anual perpassa a resistência da comunidade, mas sim o entendimento de um "cuidado" com seu filho, de um olhar mais atento e carinhoso com seu trajeto escolar. Visto que a transição ocorre por faixa etária, e não por conhecimento garantido e compreendido.

Nas Escolas Especiais, a distribuição ocorre pelas seguintes faixas etárias: 1º ciclo (6 anos a 9 anos e 11 meses), 2º ciclo (10 anos a 15 anos e 11 meses) e 3º ciclo (16 anos a 21 anos). E, também, com um número reduzido de estudantes, com no máximo 6 estudantes (1º ciclo), 8 estudantes (2º ciclo) e até 12 estudantes no 3º ciclo.

A Turma Unificada de Transição (TUT) apresenta-se como uma turma diferenciada, que abrange os três ciclos de formação, possibilitando o atendimento individual ou em duplas, com flexibilidade de frequência e duração de atendimento. A TUT atende estudantes com características singulares, que demandam intervenções pedagógicas individualizadas e que ainda não apresentam condições de frequentar um grupo e contempla a faixa etária de todos os ciclos.

As escolas especiais ainda contam com turmas compostas por estudantes com frequência adaptada com denominações diferenciadas, prevendo o atendimento de alunos em pequenos grupos ou mesmo individualmente, em horários distintos, respeitando o grau de suportabilidade dos mesmos, em qualquer ciclo.

O currículo das Escolas Especiais e o Ensino de Matemática

Sobre a organização do currículo, as escolas utilizam em seus componentes curriculares, os campos de experiência e as habilidades e competências descritos na BNCC. Os campos de experiência estruturados a partir dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento, que possibilitam a organização curricular de forma interdisciplinar e articulada.

Para os educadores das escolas, trabalhar com os campos de experiência da BNCC, significa centralizar a rotina pedagógica a partir da experiência do estudante e da forma como ele constrói sentido sobre os objetos do conhecimento, os outros e si mesmo. Essa lógica implica mudanças na percepção do currículo, que na prática deixa de ser uma estrutura organizada por conteúdos prévios, divididos por componentes curriculares e passa a atentar para os direitos de aprendizagens distribuídos nos campos de experiência e que servem como referência para a organização do trabalho pedagógico das escolas especiais.

O Campo de experiência “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações” tem como objetivo explorar a curiosidade, noções matemáticas, noções de perto e longe, junto a atividades lúdicas e jogos. Na proposta de olhar para os currículos das 4 escolas e perceber a Matemática que se ensina, pretende-se aprofundar sobre os conceitos discutidos e as experiências propostas para estes estudantes de escolas especiais.

Nesse processo de construção do currículo das escolas, os professores se reuniram para alinhar os pensamentos e teorias das 4 escolas, e produziram um documento orientador, que teve como uma das definições a construção do currículo organizado pelos Campos de experiência, entendendo por

> valorizar as experiências dos estudantes, além de contemplar uma organização flexível e autônoma, na qual cada escola de educação especial pode valorizar as suas experiências e culturas locais, para construir um projeto pedagógico próprio, criativo, que estimula o estudante a significar, reorganizar e representar a própria experiência (adaptado de Finco, Barbosa e Faria, 2015).

Com esse olhar amplo sobre os componentes curriculares, e não mais as colocando em espaços limitantes, o Ensino da Matemática fica exposto como assunto transversal nas demais temáticas, mas baseado no já citado campo de experiência correspondente.

Considerações Finais

Conhecer a estrutura das escolas especiais municipais torna-se imprescindível para um professor ou uma professora que deseja trabalhar com os alunos com deficiência e, para isso, o primeiro passo é estudar e entender os aspectos legais vigentes e sua origem. Todas as discussões e contextos que levaram a criação de resoluções e leis que vigoram sobre a educação especial de sua rede de ensino.

No Brasil, especialmente em Porto Alegre, a Educação Especial foi construída praticamente em conjunto com a democracia, pois só passou a fazer parte da rotina escolar a partir da abertura política em 1985 e com isso, perpassou por diversas circunstâncias e, até mesmo, resistências de professores e sociedade que entendiam que a educação era algo rígido.

A capital do Rio Grande do Sul, por sua vez, apresentou um projeto de escola acolhedora, em que os estudantes e comunidades escolares foram construindo em conjunto com o corpo docente a escola que lhe representava, o projeto Escola Cidadã, constituído por Ciclos de Formação, um contexto que valoriza os tempos e os espaços de cada estudante, individualmente.

No âmbito da educação especial, os professores que trabalham com este público criaram um referencial curricular para as quatro escolas especiais, mas esse currículo é uma base, pois cada aluno possui uma necessidade de desenvolvimento diferente do outro. Entende-se ser ainda mais premente, tratando-se de um público em que cada indivíduo possui características extremamente particulares, tendo nas turmas características muito heterogêneas. Se esta é uma realidade comum nas escolas regulares, é amplificada nas escolas especiais.

Referências

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: MEC.

Brasil. (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica - Resolução nº. 02/2001.* Brasília: MEC.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular de Diretrizes*. Brasília: MEC.

Colling, A. P. S. (2018). *Olhares da inclusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com síndrome de Jacobsen*. Canoas: ULBRA - PPGECIM.

D'Ambrósio, U. (2005). *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino*. São Paulo: Educação e Pesquisa.

Finco, D.; Barbosa, M. C. S. (Org.) (2015). *Campos de experiência na escola da infância: contribuições italianas para inventar um currículo de educação infantil brasileiro.* Campinas: Edições Leitura Crítica.

Huff, A. H. (2022). *O Ensino de Matemática nas Escolas Públicas Municipais de Porto Alegre a partir da implantação dos Ciclos de Formação: aspectos históricos (1995 - 2019).* Canoas: ULBRA - PPGECIM.

Lüdke, M. E. D. A.; Menga, A. (2014). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Mitler, P. (2003). *Educação inclusiva: contextos sociais*. Porto Alegre: Artmed.

Porto Alegre (2013). *Diretrizes para a Educação Especial no Sistema Municipal de Ensino, na perspectiva da Educação.* Resolução nº. 013/2013. Porto Alegre: CME.

Rosenthal, G. (2014). *Pesquisa social interpretativa: uma introdução.* 5 ed. Porto Alegre: EDIPUCRS.

O uso de um *studygram* para contribuir com o ensino da Estatística na Educação Superior

Leonardo **Dalla Porta**
Universidade Franciscana
Brasil
leodp@ufn.edu.br
Elisangela Corrêa **Dutra**
Universidade Franciscana
Brasil
ecorreiadutra@gmail.com

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de investigar as contribuições do uso de uma rede social, mais especificamente o Instagram, para o ensino da Estatística na Educação Superior. Para a coleta dos dados foi aplicado um questionário que contou com as respostas de 68 estudantes matriculados em disciplinas de Estatística de diversos cursos de graduação de uma Universidade Comunitária da cidade de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. Os resultados mostram evidências de que o uso da rede social, como ferramenta de apoio em sala de aula, possui um potencial para contribuir com o ensino da Estatística.

Palavras-chave: Educação Estatística; Ensino Superior; Rede Social; Instagram; Brasil.

Introdução

Atualmente, muitas informações que discorrem sobre os mais variados assuntos, como economia, esporte, clima e política, são divulgadas por meio de representações gráficas e tabulares. Diante disso, percebe-se que conhecimentos estatísticos estão sendo cada vez mais requisitados para que o cidadão possa compreender o mundo contemporâneo.

Tal realidade é afirmada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, informando que para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar e tratar informações estatisticamente (Brasil, 1998).

Ao ingressar no ensino superior, conhecimentos estatísticos tornam-se ainda mais imprescindíveis, tendo em vista que boa parte das produções científicas, nas mais variadas áreas, são desenvolvidas e embasadas por meio de procedimentos estatísticos.

Na educação superior, a Estatística é apresentada como disciplina obrigatória em diversos cursos de graduação, onde, segundo Wada (1996) e Dalla Porta (2019), é tratada como uma disciplina de serviço, pois objetiva instrumentalizar os profissionais (usuários) para que façam o uso adequado desses conhecimentos em sua área de atuação.

No entanto, diversas pesquisas como as de Vendramini (2000), Silva et al (2002) e Dalla Porta (2019), evidenciam sobre as dificuldades que os estudantes encontram na compreensão dos conceitos estatísticos. Dalla Porta (2019) relata que muitos estudantes demostram pouca motivação pela Estatística, cuja alegação, segundo os estudantes, além de considerarem o conteúdo difícil, é o pouco uso de procedimentos estatísticos nas disciplinas subsequentes do curso.

Diante disso, o presente trabalho objetiva analisar as contribuições de uma rede social, mais especificamente o Instagram, para o ensino da Estatística na Educação Superior.

Mídias sociais na Educação

De acordo com Costa et al (2022), o intenso uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC oportunizam novas formas de acesso a informações e de construir conhecimentos.

Concordamos com Silva e Serafim (2016) no sentido da importância do uso potencial educativo das tecnologias da informação e comunicação, considerando que a sua não utilização poderá comprometer a sala de aula contemporânea.

Perante as diversas possibilidades de uso das TDIC, desponta uma tendência sobre as redes sociais da Internet como ferramenta de propagar informações das mais variadas áreas do conhecimento.

A utilização de redes sociais da Internet já é algo inerente da vida moderna. Diante disso, as instituições de ensino e profissionais da educação não podem deixar de lado esse novo paradigma que emerge de forma tão natural na vida dos estudantes contemporâneos.

Segundo Choti e Behrens (2015), as redes sociais da Internet possuem ferramentas síncronas e assíncronas de comunicação, sendo possível transformá-las em uma nova possibilidade de espaço de aprendizagem. As autoras salientam, ainda, que os estudantes contemporâneos aguardam apenas a iniciativa dos professores de utilizarem as redes sociais da Internet como ferramentas de ensino e de aprendizagem, pois entre suas características intrínsecas, está a socialização de informações, o que as transformam em um recurso adequado para ensinar e aprender.

Entendemos que o uso de uma rede social na Educação, servirá como material de apoio extraclasse, onde as publicações realizadas possuem o objetivo de relembrar e fortalecer o que foi visto em sala de aula. Dessa forma, surge uma nova fonte de pesquisa, reunindo informações sobre determinado assunto de interesse.

Nesse sentido que desperta o uso do Instagram, uma plataforma criada para fins não educativos, mas, segundo Biadeni (2021), vem sendo explorada como um recurso didático entre professores e estudantes de todos os níveis de ensino. Derivados da junção das palavras *study* (estudo) e Instagram, os studygrams são perfis criados por indivíduos que objetivam contribuir com o ensino das mais variadas áreas.

É nesse sentindo que construímos um studygram intitulado de Pepitas Estatísticas, com a finalidade de contribuir com o ensino em disciplinas de Estatística de uma Universidade Comunitária da cidade de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil.

Investigando o uso do *studygram* Pepitas Estatísticas

Criado no final do ano de 2020, o *studygram* Pepitas Estatísticas é composto com diversas publicações envolvendo temas da Estatística Descritiva e da Estatística Inferencial, servindo de apoio para pesquisas e consultas dos estudantes que estão trabalhando com os conteúdos estatísticos em suas aulas. Todas as publicações produzidas abordam temas estatísticos por meio de exemplos práticos e teóricos, procurando trazer uma linguagem que favoreça a aprendizagem dos estudantes.

As publicações são realizadas de acordo com os conteúdos que estão sendo vistos em sala de aula, considerando, também, as dúvidas geradas entre os estudantes. Dessa forma, as postagens são produzidas e publicadas periodicamente. Algumas publicações ficam permanentes na página, enquanto outras, vão sendo descartadas, ou por estarem em um nível mais avançado, ou para dar lugar a uma postagem mais atualizada sobre o assunto que está sendo estudado. O endereço do Instagram – @pepitasestatisticas é disponibilizado pelo professor onde o estudante tem acesso direto pelo celular.

Para investigarmos sobre a utilização de redes sociais no ensino, durante os dois anos de uso do studygram Pepitas Estatísticas, foi aplicado um questionário para 68 estudantes de diversos cursos de graduação matriculados em disciplinas de Estatística. Dos respondentes, 100% possuem uma conta no Instagram e costumam acessar com periodicidade diária sua rede social.

Quando perguntados sobre o uso de alguma rede social como fonte de estudo, 75% dos estudantes afirmaram já terem acessado algum studygram ou outras mídias sociais com a finalidade de substanciar algum conhecimento visto em sala de aula.

Verificamos, também, que 84% dos estudantes julgam fundamental a explicação do professor em sala de aula. No entanto, 73,5% consideram que o uso das redes sociais pode contribuir com o ensino, tendo em vista o fácil acesso e a utilização de imagens e linguagens diversificadas nas postagens sobre o assunto de interesse. Ainda, 80,9% dos estudantes afirmaram que se sentem motivados a estudar quando o professor indica algumas fontes de pesquisa em redes sociais.

Quanto ao studygram Pepitas Estatísticas, 86,7% dos estudantes consideraram uma boa fonte de consulta, tornando a disciplina de Estatística mais prazerosa de cursar. Em relação a aprendizagem da Estatística, 70,6% informaram que, explorando o studygram criado, conseguiram sanar algumas dúvidas existentes durante as aulas.

Além disso, 69,1% acreditam que o ensino da Estatística ficou mais interessante e, possivelmente, irão relembrar dos conteúdos vistos em situações que necessitarão utilizá-los.

Todos os dados apresentados, convergem com as pesquisas de Choti e Behrens (2015), Biadeni (2021) e Costa et al (2022), que refletem o grande potencial do uso das redes sociais no ensino.

Considerações finais

As redes sociais nunca estiveram tanto em evidência como na atualidade, sendo assim, têm a capacidade de contribuir para aproximar as instituições de ensino e as informações científicas à realidade dos estudantes.

Os resultados mostraram boas evidências com o ensino da Estatística, dessa forma, acreditamos que propostas que utilizem as redes sociais como espaço de interação, trazem grande potencialidades aos processos de ensino e aprendizagem, sendo uma ferramenta eficaz no que diz respeito a aquisição e o compartilhamento de informações, impactando na aprendizagem dos estudantes.

Bibliografia e referências

Biadeni, B. N. S. M. (2021). Studygram: o estudante conectado e os modos “instagramáveis” de estudar. Dissertação (mestrado), Escola Superior de Propaganda e Markentig, Programa de Pós-Graduação em Comunicação e Práticas de Consuno, São Paulo.

Brasil, Ministério da Educação (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.

Choti, D. M. M., Behrens, M. A. (2015). A utilização das redes e mídias sociais na formação continuada de professores aponta para um paradigma inovador? In: Torres, P.L. Redes e mídias sociais. Curitiba: Appris.

Costa, J. M. M., Coelho, Y. C. M., Almeida, A. C. P. C. (2022). Da sala de aula para o Instagram: os studygrammers e o ensino-aprendizagem em ciências e biologia. https://doi.org/10.26571/reamec.v10i2.13357

Dalla Porta, L. (2019). Formação do raciocínio estatístico na conceptualização da estimação estatística: um estudo exploratório de um dispositivo pedagógico no ensino superior. Tese de doutorado, Universidade Franciscana, Santa Maria, RS, Brasil.

Silva, C. B. da, Brito, M. R. F. de, Cazorla, I. M., Vendramini, C. M. M. (2002). Atitudes e relação à estatística e à matemática. https://doi.org/10.1590/S1413-82712002000200011

Silva, F. S., Serafim, M. L. (2016). Redes sociais no processo de ensino e aprendizagem: com a palavra o adolescente. In: Sousa, R. P. et al. (Org.). Teorias e práticas em tecnologias educacionais. Campina Grande: EDUEPB. (pp. 67-98).

Vendramini, C. M. M. (2000). Implicações das atitudes e das habilidades matemáticas na aprendizagem dos conceitos de estatística. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Wada, R. S. (1996). Estatística e ensino: um estudo sobre representações de professores de 3º grau. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

O uso pedagógico dos recursos digitais no ensino de matemática: percepções de um grupo de professores

Patrícia Zanon **Peripolli**
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Brasil
patriciazperipolli@gmail.com
Eliane Quincozes **Porto**
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Brasil
portoeliane22@gmail.com
Luis Sebastião Barbosa **Bemme**
Universidade Franciscana
Brasil
luismtmufsm@gmail.com
Silvia Maria de Aguiar **Isaia**
Universidade Franciscana
Brasil
silviamariaisaia@gmail.com

Resumo

No contexto educacional, a utilização dos recursos digitais, têm representado um importante aliado de professores e estudantes para o ensino e a aprendizagem da matemática. O objetivo desta comunicação é investigar as percepções, de um grupo de professores de matemática, em relação a utilização de recursos digitais no ensino de matemática. Tal investigação é de caráter qualitativa do tipo descritiva e interpretativa. Como instrumento de coleta de dados utilizou-se um questionário estruturado, que foi respondido por 35 professores de matemática de diferentes regiões do Brasil. Verificou-se que os participantes da pesquisa reconhecem a importância da utilização dos recursos digitais nas aulas de matemática uma vez que esta inserção impacta na motivação dos estudantes para a aprendizagem.

Palavras-chave: Recursos digitais; Professores de matemática; Tecnologias; Ensino de matemática; Prática docente.

Introdução

O século XXI é marcado pelo fenômeno sociocultural do uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), que permitem o acesso instantâneo ao mundo por parte de todos os que dispõem do acesso à internet. A era digital potencializa e facilita o acesso às informações, transpondo os limites de escolas, bibliotecas, livros, atingindo redes mais amplas de computadores, *smartphones, notebooks* e *tablets*, entre tantos outros que estão conectados à *internet.* Dessa forma, os processos tornaram-se fluidos e velozes, uma vez que a *Web* proporciona a interação entre pessoas e organizações de diferentes locais do mundo, oportunizando o compartilhamento de informações e a propagação de culturas e saberes. No ensino de matemática, percebemos que os recursos digitais podem contribuir para o desenvolvimento de materiais de apoio, ferramentas de complementação, de modo a proporcionar melhor compreensão e visualização de determinados conceitos, conforme apontam Borba e Penteado (2016), como um potencializador da aprendizagem criativa.

No entanto Damasceno et al. (2016), reforça que a mera existência de políticas públicas de promoção ao uso das novas tecnologias digitais na educação não representa uma garantia de atividades pedagógicas efetivas. Algumas variáveis como o tamanho das turmas, , qualificações profissionais frágeis e a ausência de uma rede mais robusta de internet no espaço escolar, seguidos do pouco interesse dos estudantes, pode distanciar o objetivo inicial do uso de tecnologias na educação. Nesse sentido, percebemos a importância do professor estar atento ao desenvolvimento das tecnologias e da realidade dos seus alunos, visto que os recursos digitais fazem parte do dia a dia deles. Dessa maneira, é importante que os professores assumam a integração de diferentes estratégias em sua prática como possibilidades didáticas e que, progressivamente, vão usufruindo e inserindo diferentes recursos e metodologias em sua prática docente. Nessa mesma perspectiva Bottentuit Junior (2019) ressalta que cabe aos professores repensar práticas pedagógicas e metodológicas, de modo a contribuir para a construção do conhecimento, distanciando-se de modelos tradicionais, que já não são tão atraentes aos olhares dos alunos. Ou seja, o momento atual demanda uma formação que prepare os estudantes com habilidades mais críticas, reflexivas e dinâmicas.

Pensando nos recursos digitais e sua importância para o ensino de matemática, surge tal investigação que tem como objetivo investigar as percepções de um grupo de professores de matemática em relação a utilização de recursos digitais no ensino de matemática.

Metodologia

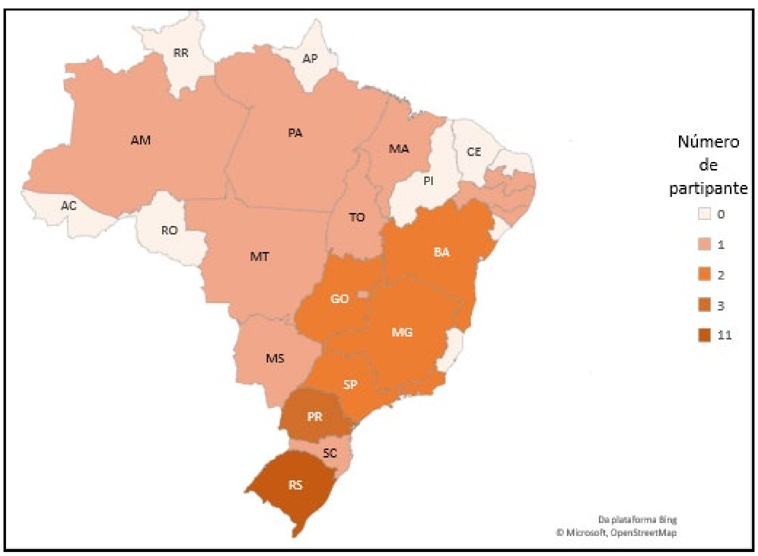
Com o intuito de investigar a percepção dos professores acerca da integração de recursos digitais no ensino de matemática, esta pesquisa é de caráter qualitativo do tipo descritiva e interpretativa. Utilizamos um questionário *online* como instrumento de coleta de dados que, conforme Gil (2006), tem por objetivo o conhecimento de opiniões, interesses, expectativas e situações vivenciadas. Esse questionário foi divulgado entre professores de matemática que manifestaram interesse em realizar um curso *online* com foco na integração de recursos digitais e metodologias ativas no ensino de educação financeira, que teve a participação de 35 professores de diferentes regiões do Brasil. O questionário foi elaborado no *Google forms,* continha 36 questões, com perguntas abertas e fechadas. Para este artigo analisamos 12 questões, sendo 04 questões referentes ao perfil dos participantes e 08 em relação aos conhecimentos dos participantes e interesses com os recursos digitais. Os dados foram analisados e sintetizados por meio de gráficos e nuvens de palavras.

As respostas dos 35 professores de matemática demonstraram interesse em conhecer e explorar os recursos digitais em suas aulas. Dos participantes, 57% são do sexo feminino e 43% do sexo masculino, sendo que o ano de conclusão do curso de formação inicial varia de 1994 até 2022, percebemos que a maior parte dos participantes concluíram sua formação inicial nas últimas décadas. Este período é marcado por inovações, ampliação do uso da internet e pelo desenvolvimento de novos recursos tecnológicos e digitais. Desse modo, percebemos um movimento de busca por formações voltadas à integração desses recursos na prática profissional docente.

Além disso, foi questionado acerca da rede de ensino que os professores trabalham neste momento, ressaltamos que 8 professores trabalham em duas redes de ensino, o que é comum acontecer na profissão docente, devido à situação econômica e social que circunda o professorado, o que desenha um sujeito multitarefas. A maioria dos participantes atuam em instituições públicas (municipal e estadual).

Pelo fato do questionário ter sido divulgado nas redes sociais dos pesquisadores, contamos com a participação de professores de diferentes estados do país, como podemos ver a seguir no gráfico 1.

Gráfico 1
Participantes da pesquisa



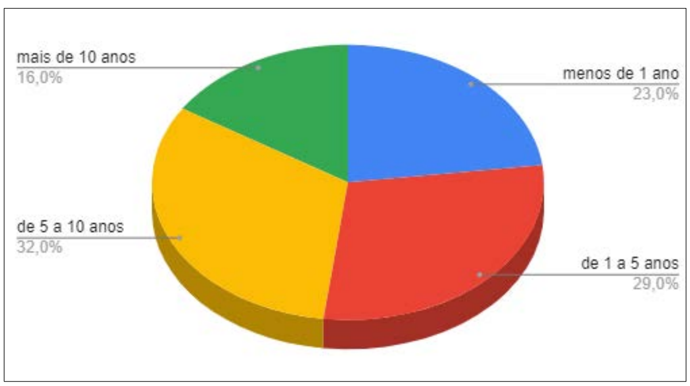
Fonte: Dados oriundos da pesquisa.

Os pesquisadores são do Rio Grande do Sul, bem como o maior número de participantes da pesquisa. Nesse sentido, é possível identificar o potencial das redes sociais na divulgação da investigação, fazendo com que todas as regiões do país tivessem acesso a ela. As redes sociais permitem rápida e fácil divulgação e disseminação de informações, Kenski (2007) têm apontado que as redes sociais na educação ampliam as ferramentas de compartilhamento de informações dentro e fora da escola. O acesso facilitado permite a interação entre as pessoas de diversos locais do mundo e dessa forma, são consideradas uma boa ferramenta de comunicação e divulgação para o contexto educacional (Souza & Schneider, 2014).

Resultados e discussões

Foi questionado se os participantes conheciam recursos digitais para o ensino, 32 responderam conhecer e 3 disseram não conhecer. Ao indagá-los se utilizam os recursos digitais com fins pedagógicos, a maioria (89%) responderam que sim e (11%) responderam que não utilizam. Para os participantes que responderam utilizar os recursos digitais com fins didáticos, encaminhamos algumas perguntas que serão analisadas a seguir. Foi questionado há quanto tempo eles vêm utilizando os recursos digitais em suas aulas, a síntese das respostas pode ser vista Gráfico 2.

Gráfico 2
Tempo que tem utilizado os recursos digitais



Fonte: Dados oriundos da pesquisa.

Como podemos observar no gráfico, dos participantes que dizem utilizar os recursos digitais em suas aulas, a maioria 32% já vem utilizando esses, dentro do período de 5 a 10 anos, em seguida 29% relatam utilizar no período de 1 a 5 anos, 23% apontam ter passado a usar os recursos recentemente, em menos de 1 ano e 16% relatam a já vir utilizando os recursos a mais de 10 anos. Ao utilizar as tecnologias fica evidente que esta tem potencial para o desenvolvimento de novos espaços de conhecimento e trazem alguns desafios para os professores. Requerem que esses busquem explorar, conheçam o recurso, bem como disponham de maior tempo para o planejamento de atividades que estejam relacionados com a realidade dos estudantes. Além da necessidade das escolas, de oferecer e adequar a estrutura física, incrementando laboratórios funcionais, redes de conexão de alta velocidade que contemplem todo o espaço escolar e também auxílio pedagógico para orientar o professor a desenvolver atividades mediadas por recursos digitais (Kenski et al., 2019).

Também, perguntamos o que influenciou os participantes a utilizarem recursos digitais. A síntese das respostas dos sujeitos é apresentada na Figura 1.

Figura 1. Influência em utilizar os recursos digitais.

Assim, podemos observar na nuvem de palavras, o que mais influencia os participantes é tornar suas aulas melhores, mais dinâmicas, interessantes, participativas, motivadoras. Pode-se observar que os professores conseguem perceber que ao integrar os recursos digitais em sua prática, associado com seus objetivos pedagógicos, proporcionam ao aluno novas experiências de aprendizagem, na qual os alunos podem assumir um papel ativo, contribuindo para o melhor entendimento dos alunos (Bergmann et al., 2021).

Referente aos critérios utilizados para a escolha do recurso digital a ser inserido nas aulas, a síntese das respostas dos professores está na Figura 2.

Figura 2. Critérios para selecionar um recurso digital.

A maioria dos professores destaca que o recurso a ser utilizado precisa ser de fácil acesso e que os alunos já tenham familiaridade. Além disso, é destacada a importância de ser recursos gratuitos, de fácil manuseio, verificar a viabilidade desse recurso no espaço escolar e do tempo para que ele possa ser aplicado. Inclusive, ressaltam a necessidade de apurar se o recurso é adequado aos objetivos, conteúdo a ser abordado na aula e ao utilizar ele auxiliará no processo de aprendizagem.

Dessa forma, os professores também foram questionados sobre como se preparam para utilizar os recursos digitais nas suas aulas. Na figura 3 apresentamos os apontamentos mais destacados.

Figura 3. Como preparam-se para utilizar os recursos digitais.

Os professores elencaram que antes de integrar os recursos digitais à sua prática, buscaram conhecê-lo, explorar suas ferramentas ao máximo, assistir vídeos com orientações, ver/ler tutoriais, conversar com colegas que já conhecem o recurso, fazer cursos e formações. Além de reforçar a necessidade de testar os recursos, traçar o planejamento com a escola e principalmente, alinhar o conteúdo a ser estudado com o recurso escolhido, de modo a alcançar os objetivos da aula. O professor ao desenvolver a capacidade de utilizar tecnicamente os recursos, expressar-se criativamente de forma a produzir e gerar informações, este apresenta indicadores de fluência que, segundo (National Research Council, 1999), traduz-se na busca para a construção de significados.

Em relação a frequência com que os professores têm utilizado os recursos digitais em suas aulas, a maioria (64%) aponta fazer uso de uma a duas vezes no decorrer do mês, 7% utilizam três vezes ao mês e 29% relatam inserir os recursos mais de três vezes ao mês em suas aulas. Os professores também foram questionados acerca das vantagens que observam ao utilizar os recursos digitais. As respostas foram sintetizadas e estão representadas na Figura 4.

Figura 4. Vantagens ao utilizar recursos digitais

Relataram ainda que, ao utilizar os recursos digitais nas aulas, os alunos despertam maior interesse e participação. As aulas tornam-se mais interativas, dinâmicas e atrativas, de forma a proporcionar maior engajamento dos estudantes no aprendizado dos conceitos e conteúdos estudados. O uso dos recursos digitais nas aulas torna-se atraente para o aluno, por ser algo próximo da sua realidade, ou seja, a proximidade com recursos que já utilizam ou uma novidade para eles, desperta sua atenção, proporcionando maior interesse e participação nas aulas. Além disso, os recursos digitais favorecem a compreensão de alguns conceitos por facilitar sua visualização, de modo aproximá-los do processo do conhecimento.

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi investigar as percepções, de um grupo de professores de matemática, em relação a utilização de recursos digitais no ensino de matemática. Após a análise dos dados identificamos que eles percebem o potencial do uso dos recursos digitais para tornar suas aulas mais dinâmicas, participativas, motivadoras e interessantes, pois é um dos aspectos mais apontados em relação ao que influencia utilizar esta estratégia em sua prática.

Outro ponto evidenciado, é que os professores que já utilizam as tecnologias nos últimos cinco anos, destacam a importância de explorar as ferramentas ao máximo, conhecer suas possibilidades, fazer um planejamento que contemplem os objetivos da aula e ainda, verificar as possibilidades de infraestrutura e tempo da escola e adequar seu planejamento à realidade do contexto escolar.

Ao considerarmos que, recentemente, vivemos um período desafiador pela pandemia Covid-19, reconhecemos o aumento das demandas relacionadas ao uso de tais recursos no cotidiano docente, seja para expandir a comunicação e a interação com estudantes, como também para os processos formativos docentes. Por este motivo, alguns participantes da pesquisa revelaram ser de grande relevância para um processo de ensino efetivo, a inserção de recursos digitais em suas aulas, pois fica evidente uma maior motivação dos estudantes para a aprendizagem.

Bibliografia e referências

Bergmann, J. C. F., Nunes, G. M., Policarpo, K. M. de S., & Fonseca, M. P. C. (2021). Desafios práticos na formação docente para o uso de aplicativos como recursos educacionais. *Perspectiva*, *39*(1), 1–19. https://doi.org/10.5007/2175-795X.2021.e66030

Borba, M. de C., & Penteado, M. G. (2016). *Informática e Educação Matemática*. Autêntica Editora.

Bottentuit Junior, J. B. (2019). Sala de Aula Invertida: Recomendações e Tecnologias Digitais para sua Implementação na Educação. *RENOTE*, *17*(2), 11–21. https://doi.org/10.22456/1679-1916.96583

Damasceno, A. C., Lopes, M., Andrade, R., Nobrega S., & Almeida. I. Descrevendo o uso dos computadores nas escolas públicas da Paraíba. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, 24, (3), 48-61.

Gil, A. C. (2006). *Métodos e técnicas de pesquisa social.* São Paulo: Atlas.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus.

Kenski, V. M., Medeiros, R. A., & Ordéas, J. (2019). Ensino superior em tempos mediados pelas tecnologias digitais. *Trabalho & Educação*, *28*(1), 141–152. https://doi.org/10.35699/2238-037X.2019.9872.

National Research Council. (1999). *Being Fluent with Information Technology*, Washigton, Dc:The National Academies Press.

Souza, A. A. N., & Schneider, H. N. (2014). Potencialidades do uso de sites de redes sociais no processo de ensino e aprendizagem. *International Journal of Knowledge Engineering and Management,* 3(6), 181-196, https://periodicos.ufsc.br/index.php/ijkem/article/view/81817/46485

Orientación espacial y género: una revisión sistemática de la literatura

Estefanía **Cano-Valencia**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
estefania.canov@udea.edu.co
Sara **Gil-Herrera**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
sara.gilh@udea.edu.co
María Denis **Vanegas** Vasco
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
maria.vanegas@udea.edu.co

Resumen

En este artículo, damos a conocer los primeros hallazgos de una revisión de literatura con una mirada sistemática, que responde al proceso de investigación del trabajo de grado, para ser profesores de matemáticas. El objetivo es indagar por la conceptualización y pertinencia de la orientación espacial al ser abordado desde la perspectiva de género. La revisión de la literatura se hizo alrededor de la orientación espacial, algunas experiencias escolares y el género en la educación matemática. Para ello utilizamos diferentes repositorios, páginas y revistas como Scielo, Dialnet, entre otros. Los referentes consultados indican que la orientación espacial permite el habitar la cotidianidad a partir de habilidades, como la ubicación y el movimiento, que se pueden potenciar desde edades tempranas en las clases de matemáticas; al ser una temática permeada por el contexto, podemos indagar sobre lo que implica ser niña al momento de relacionarse con el espacio.

Palabras clave: Orientación Espacial y movimiento; Género; Educación Matemática; revisión de literatura; Experiencias escolares.

Introducción

Nuestra preocupación por indagar acerca de cómo se manifiestan los estereotipos de género frente a la orientación espacial de las niñas, en especial con su entorno más cercano, dio lugar a este proceso de revisión de literatura, en el cual pretendemos responder a la pregunta ¿Cuáles son los aportes de la literatura a la orientación espacial con respecto a los estereotipos de género? Esto nos ayudó a identificar algunos referentes teóricos que sustentan este proceso de investigación, reconocer los vacíos teóricos que existen y así saber que nuestro tema tiene lugar en el campo académico de la educación matemática.

Conviene subrayar una perspectiva actual del término de orientación espacial en el área de geometría en las escuelas, a partir de algunas investigaciones que le dan un papel activo desde el movimiento. Estas rompen con los paradigmas que reducen la orientación espacial a la conceptualización y práctica desde una perspectiva bidimensional. Además, enlazamos este tema con la perspectiva de género, sabiendo que hay diferentes indagaciones sobre las desventajas que también experimentan las niñas y jóvenes en las instituciones educativas, específicamente en las clases de matemáticas.

De modo que, nos proponemos identificar cual es el vacío que existe en esta línea de investigación, que en la actualidad no presenta una conexión entre orientación espacial y género. Por último, pasamos al proceso que da sentido a esta revisión de literatura, la metodología para la recolección de los referentes bibliográficos y dichos referentes, nos permiten concluir con un análisis crítico.

Metodología

Teniendo en cuenta los autores Guirao (2015), los cuales definen la revisión de literatura como aquella que permite recopilar y sintetizar la información relativa a un tema, nos centramos en una revisión sistemática de la literatura definida como aquellos resúmenes claros y estructurados de una información encontrada, con el fin de dar respuesta a una pregunta especifica (Moreno et al, 2018) y, en este caso, nuestra pregunta específica es ¿Cuáles son los aportes de la literatura a la orientación espacial con respecto a los estereotipos de género?

Gracias a las definiciones anteriores, decidimos pensar la revisión a partir de 3 categorías con algunas subcategorías, para proceder en la búsqueda de documentos, estas son:

1. Orientación espacial
   1.1. Orientación espacial en edades tempranas.
   1.2. Orientación espacial a partir del movimiento.
2. Género y educación matemática.
3. Experiencias pedagógicas en la escuela.

La idea, fue revisar el panorama general de la orientación espacial y la influencia de éste en las niñas, con respecto a las dinámicas que se experimentan en un contexto social, el cual se ve afectado en el aula. Por otro lado, exploramos posibles soluciones y medidas que ayuden a consolidar el trabajo de investigación y, al mismo tiempo, puedan ser modificadas y adaptadas para la institución y el contexto que se necesita.

Con base en lo anterior, tomamos textos de repositorios, páginas y revistas como: páginas del MEN, repositorio Scielo, repositorio Dialnet, Corporación Universitaria Minuto de Dios, repositorio ResearchGate, repositorio Omep, entre otras con el fin de darle sentido a las categorías de investigación. El criterio para la elección de las bases tuvo en cuenta aquellas que por los convenios de la universidad a la que pertenecemos tenían un acceso abierto. Para la recopilación de textos utilizamos una tabla de Word, en donde relacionamos palabras clave, título del texto, resumen, enlace e importancia para el trabajo (ver imagen1).

Imagen 1

Recopilación de la información de la revisión de la literatura

PALABRA CLAVE	TEXTO	RESUMEN IMPORTANTE	ENLACE	IMPORTANCIA PARA EL TRABAJO
ORIENTACIÓN ESPACIAL DESDE EL MOVIMIENTO	Experiencias espaciales femeninas en los desplazamientos cotidianos	El objetivo de este texto es explorar las experiencias espaciales de habitar el espacio público denso, durante los desplazamientos cotidianos en transporte público, de mujeres jóvenes residentes en la periferia oriental de la Ciudad de México. El estudio del habitar el espacio público retoma el planteamiento de Henri Lefebvre acerca de la riqueza y la miseria de la vida cotidiana, para preguntarse si estas experiencias espaciales enriquecen la cotidianidad urbana de los sujetos analizados. Empíricamente se realizaron narrativas de vida espaciales a mujeres del citado perfil social, que luego fueron objeto de análisis cualitativo para reconstruir la experiencia espacial de manera multidimensional.	https://www.scielo.org.mx/pdf/rms/v82n1/2594-0651-rms-82-01-37.pdf	Tiene relevancia ya que nuestro tema está enfocado a la orientación de las niñas en el espacio y la capacidad de movimiento que éstas pueden tener con respecto al contexto en el que se ven inmersas. POSIBLE CITA: "El habitar permite comprender las formas de relación de las personas con sus espacios de vida practicados. Y en virtud de la memoria espacial, el habitar presente resulta de infinitas experiencias espaciales que han enlazado las cotidianidades del sujeto y los lugares"
	Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias	En la cotidianidad y en el ámbito educativo se presentan una variedad de situaciones problema relacionadas con ubicaciones, localizaciones y trayectorias que, muy seguramente, con la ayuda de la geometría se pueden resolver. Desde este punto de vista, tiene importancia la enseñanza y aprendizaje de esta área de las matemáticas, que abarca múltiples dimensiones. Una de ellas es la	http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n43/0121-3814-ted-43-119.pdf	Como futuras docentes y actuales practicantes, queremos evidenciar aquellas prácticas educativas que ponen en tela de juicio la orientación espacial y las diferentes posibilidades que se pueden tener en nuestras clases de geometría para trabajar algo tan cotidiano como la orientación espacial

Notas. Creación propia

Resultados

Orientación espacial

En esta categoría resaltamos, autores como Gonzato y Godino (2010), quienes definen la Orientación Espacial como aquella que permite hacer una ubicación en diferentes situaciones de la vida cotidiana sin importar contextos, y que, todo ello dentro del currículo permite plantear situaciones que cada estudiante deba analizar, describir y entender del entorno.

A partir de la definición anterior, hacemos una relación de la primera categoría con ***La Orientación Espacial desde Edades Tempranas***. En este sentido, el MEN (2014) define la educación inicial como una estructura intencionada, con el fin de fomentar una perspectiva de inclusión y equidad. Además, resaltan que la orientación espacial en dichas edades promueve el reconocimiento de la diversidad étnica, cultural y social de los contextos en los que viven las niñas, los niños y sus familias.

Del mismo modo, en esta subcategoría, encontramos autoras como Berciano et al. (2016), las cuales hacen referencia a la necesidad de la ubicación, puesto que permite orientarnos en el espacio y tiempo que habitamos. Sin embargo, las autoras resaltan que, es importante potenciar el desarrollo de las habilidades de ubicación desde las primeras edades, debido a que es un proceso paulatino y continuo.

Una segunda subcategoría está relacionada con la ***Orientación Espacial a partir del Movimiento***; aquí la autora Lindón (2019) hace énfasis en nuestro habitar, habitar un contexto donde se permite relacionarse con otras personas y sus vidas cotidianas, y, es aquí donde la experiencia espacial funciona como puente para enlazar las cotidianidades de las personas.

Todo lo anterior, permitió pensarnos como futuras docentes la importancia de la orientación y el movimiento a partir de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con el fin de que los individuos puedan ubicarse y moverse en el espacio para poder actuar en el entorno que los rodea (Zapateiro et al. 2017). Por lo tanto, queremos evidenciar la orientación espacial y la influencia que esta tiene en algunas prácticas educativas.

Género y Educación Matemática

En los documentos revisados, identificamos los diferentes actos en la clase de matemáticas que reproducen constantemente los estereotipos de género y cómo estos afectan a las estudiantes en la construcción y aprendizaje del conocimiento. En estos referentes, priman las posturas que ponen en debate lo que ahora entendemos por equidad de género en las clases de matemáticas y, a partir de narrativas, reflexiones, discusiones y socialización de las diferentes experiencias, tenemos nociones de cómo estos se materializan a través de los procesos de enseñanza y aprendizaje, a partir de perspectivas diferenciadas por sexo desde el punto de vista de Ursini y Ramirez (2017).

Con respecto al género vinculado a la espacialidad, encontramos un par de estudios que se pueden acercar a esta relación. Suárez y León (2016), a partir de una exposición amplia de antecedentes, demuestran cómo la discriminación por género tiene repercusiones en las habilidades de visualización espacial en niños y niñas. Por otra parte, Lindón (2019), mencionada anteriormente, hace énfasis en la orientación espacial de algunas mujeres habitantes de las periferias en la Ciudad de México.

Experiencias pedagógicas en la escuela

Aquí, la teoría de Pérez (2017) define las experiencias pedagógicas como un proceso de integración entre las motricidades del cuerpo y la conciencia de los niños y niñas, y así, con esos dos aspectos, poder ayudarles a desenvolverse en el entorno, sin importar los cambios presentados en el medio.

Del mismo modo, Ruiz et al. (2013) concuerdan en la idea de que los conocimientos espaciales son útiles para la vida, para la cotidianidad de cada estudiante y cada persona inmersa en el contexto. También, mencionan que las orientaciones espaciales y los conocimientos que giran en torno a dicho tema, son excluidos de manera sistemática en los colegios, y, por ende, de manera inmediata en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Conclusiones

Para finalizar, en el proceso de revisar la literatura, podemos resaltar que todos los documentos destacan la importancia del conocimiento y las habilidades espaciales para actuar frente a diferentes situaciones cotidianas. Además, se reconoce la orientación espacial como una temática que se debe potenciar en el currículo escolar, en especial, desde las edades tempranas, y así, poder trazar una construcción continua de estas habilidades desde la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, facilitando a los y las estudiantes herramientas suficientes que les permita desenvolverse en el entorno circundante.

Es necesario resaltar que, la orientación espacial ocupa un lugar muy importante en las investigaciones de la educación matemática. Sin embargo, en una perspectiva escolar, es uno de los temas más descartados dentro del currículo, esto se demuestra al contemplar el poco tiempo que se destina durante el año escolar a la enseñanza de la orientación espacial.

Por otro lado, pudimos evidenciar que hay investigaciones relacionadas con los temas de: la visualización espacial en las niñas, y las experiencias espaciales de mujeres adultas en un contexto urbano. No obstante, existe un vacío investigativo referente al tema de la orientación espacial desde una perspectiva de género. Es decir, no hay estudios que agrupen la orientación espacial y la perspectiva de género desde las experiencias escolares.

Resaltamos que las categorías presentadas aún se encuentran en construcción, para el momento de la presentación, se espera profundizar en ellas y consolidar la información alrededor del tema de investigación.

Referencias y bibliografía

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, M. (2016). Tratamiento de la orientación espacial en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/312039909_Tratamiento_de_la_Orientacion_en_el_Aula_de_Educacion_Infantil_desde_la_perspectiva_de_la_Educacion_Matematica

Gonzato, M., y Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *UNION. Revista iberoamericana de educacion matematica*, *23*, 45-58. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/15202/1/Gonzato2010Aspectos.pdf

Guirao Goris, S. J. A. (2015). Utilidad y tipos de revisión de literatura. *Ene*, *9*(2). Obtenido de https://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1988-348X2015000200002

Lindón, A. (2020). Experiencias espaciales femeninas en los desplazamientos cotidianos. *Revista mexicana de sociología*, *82*(1), 37-63. Obtenido de https://www.scielo.org.mx/pdf/rms/v82n1/2594-0651-rms-82-01-37.pdf

MEN. (2014). La exploración del medio en la educación inicial. *Serie de orientaciones pedagógicas para la educación inicial en el marco de la atención integral.* (24). Obtenido de http://www.omep.org.uy/wp-content/uploads/2015/09/explor-del-medio-en-ed-inicial.pdf

Moreno, Begoña, Muñoz, Maximiliano, Cuellar, Javier, Domancic, Stefan, y Villanueva, Julio. (2018). Revisiones Sistemáticas: definición y nociones básicas. Revista clínica de periodoncia, implantología y rehabilitación oral, 11(3), 184-186. Obtenido de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0719-01072018000300184&lng=es&nrm=iso

Pérez Constante, M. B. P. (2017). Habilidades del área motriz fina y las actividades de estimulación temprana. *Revista publicando*, *4*(11 (1)), 526-537. Obtenido de https://www.studocu.com/co/document/corporacion-universitaria-minuto-de-dios/modelos-pedagogicos/estimulacion-temprana/25153738

Ruiz Higueras, L., García García, F. J., y Lendínez Muñoz, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4836763

Suárez Moya, W. A., León Corredor, O. L. (2016). La visualización espacial en niños y en niñas. Revista Horizontes Pedagógicos Vol. 18(2) 110-119. Obtenido de https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/18209/908

Ursini, S., y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. Revista Colombiana de Educación, (73), 213-234. Obtenido de https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RCE/article/view/6364/5302

Zapateiro-Segura, J. C., Poloche-Arango, S. K., & Camargo-Uribe, L. (2018). Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (43), 119-136. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n43/0121-3814-ted-43-119.pdf

Pensamiento crítico y creatividad en resolución de problemas

Guillermo Jaime **Liu** Paredes
Institución Educativa Pública Teniente Coronel Alfredo Bonifaz Fonseca
Perú
gjliup@gmail.com
Dina Doris **Vela** Saravia
Institución Educativa Pública Teniente Coronel Alfredo Bonifaz Fonseca
Perú
divelasa@gmail.com

Resumen

Los resultados de las evaluaciones censales en matemática y la experiencia pedagógica en las instituciones públicas, dan cuenta del rechazo a la matemática que en general, la ven lejana, sin espacio para la creatividad, nada motivadora, aburrida y difícil. Generando ansiedad y desagrado en el estudiante frente al aprendizaje, además de limitaciones y frustraciones. Un enfoque CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto) en un ambiente recreativo generará, motivación, atención y emoción para un mejor aprendizaje. Uno de los materiales, como el uso de cubos multiencaje apuesta por un aprendizaje multisensorial. La aplicación de estos, organizado en laboratorios matemáticos a través de procesos enactivo- icónico- simbólico, facilitan las habilidades de pensamiento: Pensamiento Crítico y Creatividad. Ello es una posible solución para superar dificultades de rechazo, creando una actitud positiva hacia el aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: Pensamiento crítico; Creatividad; Comprensión lectora; Resolución de problemas; Codificaciones; Pensamiento divergente; Vistas de un modelo; Lima; Perú.

Introducción

Dos evidencias, primero la tesis de maestría "Una propuesta didáctica para obtener generalizaciones expresadas como funciones lineales, usando bloques de Cuisenaire en tercero de secundaria" (Liu, 2010), que ha aportado con descubrir regularidades en sucesiones contribuyendo a desarrollar la capacidad de generar procesos inductivos, para obtener la formalización de una regularidad y su generalización lineal. Por un lado, observando "saltos" en una tabla y por otro, encontrando una racionalidad en el proceso constructivo mismo utilizando el material concreto, para establecer la relación geométrico-algebraica.

Segundo, la implementación de un proyecto "Desarrollando la creatividad y el pensamiento matemático como jugando" en la Institución Educativa Pública Teniente Coronel Alfredo Bonifaz Fonseca, Rímac- Lima, aplicado en estudiantes de los niveles de primaria (5to y 6to), y secundaria (1ro y 2do) desde el 1 de setiembre al 4 de octubre de 2022; que promueve la manipulación de los cubos multiencaje a través de laboratorios matemáticos para resolver problemas de forma, movimiento y localización. Esta experiencia ha permitido aplicar situaciones atractivas de aprendizaje, allanando no solo el camino a nociones matemáticamente valiosas, sino a generar espacios para trabajar pensamiento crítico y creatividad.

Los resultados de la evaluación final del proyecto no solo han sido exitosos sino han generado espacios para un cambio de actitud en los estudiantes de todas las aulas. Estas evidencias nos demuestran que la teoría cognitiva y la neuro educación aplicadas en aula si funcionan.

Marco teórico y metodología

Comprensión lectora con material concreto

En el aprendizaje de la matemática siempre hay comunicación de ideas, y será favorable si hay competencia en la lectura. Según el informe PISA, una competencia sólida en lectura es fundamental para superar con éxito áreas como matemática (OECD, 2019). Bajo la premisa que usar material concreto, como los cubos multiencaje, es motivador para construir una estructura o modelo (varios cubos insertados) a partir de un conjunto de instrucciones, ya sea escritas, habladas o usando imágenes en una diapositiva u otro presentador. Es que, a través de esta comunicación los niños deben interpretar el significado de cada acción para la construcción del modelo. Dentro de ello deben considerar, la posición de los cubos de multiencaje en el plano o el espacio, los colores, el orden en que fueron colocados, las diversas uniones que se han generado, los niveles en que fueron ubicados etc. Son situaciones que se complementan incluido al cálculo mental.

Si dieron el primer paso en la construcción del modelo entonces entendieron el significado de cada instrucción, a partir de ellas es posible responder un conjunto de numerosas preguntas como por ejemplo:

- Preguntas de Verdadero o Falso, que deben ser justificadas
- Preguntas para responder de manera contraria a lo afirmado: verbalización
- Describir un cubo en una posición determinada: comunicación
- Contabilizar el número de cubos y uniones que se han generado, para hallar el volumen y área de un modelo.
- Usar la redefinición de conceptos que ayuden generar pensamiento crítico
- Escribir un conjunto de parejas ordenadas y a través de ello puedan construir otros modelos.

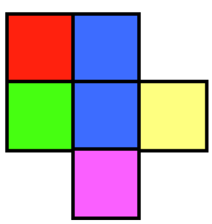
- Rediseñar un modelo usando hasta cinco formas, es decir volver a construir otro con los mismos cubos, generando espacios para la creatividad.

La propuesta final, es lograr aprendizajes significativos que fomenten el desarrollo del pensamiento crítico y la creatividad utilizando los cubos multiencaje a través de guías de laboratorio que no solo desarrollen una competencia, sino hasta las cuatro competencias del área de matemática.

Laboratorio I

Este laboratorio contiene alrededor de 100 preguntas distribuidas en varias secciones de las guías de laboratorio, parte de ello lo expondremos en este Taller. Su contenido abarca principalmente la competencia de Resuelve: problemas de forma, movimiento y localización, sin embargo hay actividades para desarrollar las otras tres competencias que solicita el Ministerio de Educación de Perú: Resuelve problemas de cantidad; Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; y Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Tabla 1
Codificación I: Orientaciones

	Modelo 1 Para este modelo se presenta las siguientes preguntas o consignas:
	1) Redactar el orden colocación desde el primer cubo hasta el último según indicaciones. 2) Responder V o F justificando cada afirmación 3) Redefinición de conceptos 4) Rediseña el modelo usando tres formas

Nota: Elaboración a partir de la información

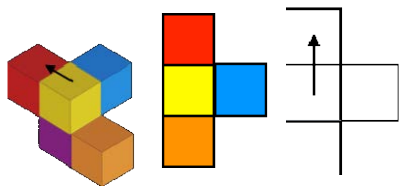
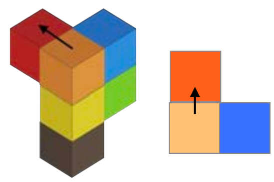
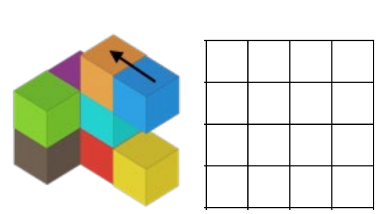
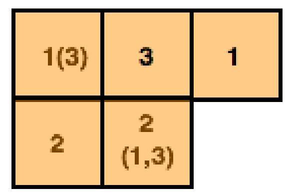
Codificaciones

Hacer un dibujo de un cubo no es tan complicado pero, ¿si el modelo tiene muchos cubos en dos y más niveles?, la situación se torna muy difícil. Es más, ¿cómo guardarlos en el papel o cuaderno? Así, surge la necesidad de hallar una respuesta: La codificación. Dicha solución está basada en dos momentos, primero dibujar un cuadrado para representar un cubo (Codificación I) y en segundo lugar recurrir a los símbolos numéricos: Codificación II llegando a una solución sencilla para todo modelo elaborado en el espacio y en varios niveles. Y como el uso de colores es fundamental, escalamos un peldaño más: Codificación III.

En forma inversa, dado un modelo codificado en papel, se puede construir el modelo en físico: y esto es decodificación. Finalmente codificación IV servirá cuando hagamos rotaciones de los modelos 90 grados en cuatro direcciones, sobre un punto fijo y sobre un eje de rotación. Así, confirmamos la expresión: "La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples" (Gudder, 2021), y es que como jugando logramos desarrollar el pensamiento matemático, fomentando el pensamiento crítico y la creatividad.

Tabla 2

Codificación II: Actividades diversas usando codificación

Usar codificación I	Dibuja diagrama pictórico
 	
Laboratorio 2 Construye el siguiente modelo con codificación II 1) Describe al cubo con una unión y no está en nivel 1 ni en el 3 2) Un cubo tiene dos uniones, una de ellas está a su derecha. 3) Un cubo con tres uniones y no está en el nivel 3. 4) Si agrego un cubo, éste debe quedar unido a otros dos, ¿cuántas posibilidades hay? Codifica cada caso.	Diagrama pictórico con codificación II 

Nota: Elaboración propia a partir de la información

Pensamiento crítico

Si la Filosofía es un saber que nos hace ser más críticos, más creativos, más cuidadosos de sí mismo y de los demás, reforzando valores que debemos adquirir durante nuestra formación, entonces ¿será posible enseñar Filosofía desde la primaria?. Desde los años 60 del siglo pasado, hay estudios sobre todo de Matew Lipman, quien apuesta por “una pedagogía del juicio” eminentemente filosófica pero a su vez incorporando críticamente aportes valiosos de otras disciplinas y saberes (2014); y en este siglo con mayor razón. El punto central es desarrollar habilidades de pensamiento fortaleciendo la idea de formar ciudadanos que puedan comunicarse y pensar razonadamente. Actualmente, el texto “El niño filósofo” de Jordi Nomen nos ilustra de “Cómo enseñar a los niños a pensar por sí mismos” constituye la inspiración para trabajar habilidades de pensamiento, es decir persiguiendo el gran objetivo de la filosofía.

La esencia de esto, es la redefinición de conceptos. Frente a una afirmación, se debe volver a expresar lo mismo, de manera distinta, es decir que otras cosas se “ven”. Mirar otras características nuevas y diferentes, observando, analizando, razonando y evaluando de manera adecuada que otra afirmación se puede dar frente a la formulada inicialmente. Para ello existirán muchas posibles respuestas creativas.

¿Cómo trabajamos pensamiento crítico?: Se tiene un modelo cualquiera, luego. Observa la posición del cubo en el modelo**.** Analiza cómo se encuentra en el modelo: color, nivel, uniones, etc. Finalmente, usa mentalidad abierta, significa que se puede dar una afirmación propia que el estudiante considere conveniente y totalmente distinta sin temor a equivocarse. Así el error se minimiza o desaparece. Nadie podrá quedar mal cuando esta afirmación se ha justificado. Difícil que haya respuesta equivocada. Esta propuesta metodológica mejorará la confianza y autoestima de los estudiantes. Además, durante el proceso de observar un modelo o estructura de cubos multiencaje que luego gira o cambia de posición, el estudiante establece semejanzas y diferencias entre modelos. Según ello, evalúa y toma una decisión. Para finalmente comunicar su conclusión.

Tabla 3

Codificación II: Construye un modelo según las indicaciones.

Laboratorio 3

1) Observa la información de la derecha. Construye el modelo.

2) Dibuja un diagrama con codificación II.

3) Halla el volumen y área total del modelo.

4) Enumera cubos con sus uniones

1)	3	Inicio	
2)	1(3)	A derecha de	3
3)	2 (1,3)	Delante de	3
4)	1(2)	Debajo de	1(3)
5)	2	A izquierda de	2(1,3)
6)	2	Detrás de	2(2,3)
7)	1(2)	Detrás de	3

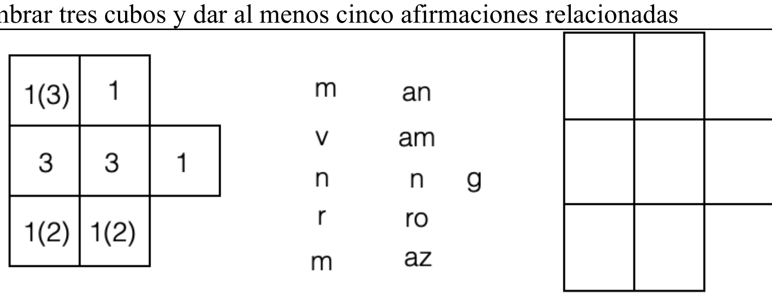
Nota: Elaboración a partir de la información

Tabla 4

Codificación III: Representa un modelo de tu creación

Laboratorio 4

1) Dibuja el diagrama pictórico con codificación III
2) Establece un orden de colocación usando colores de cubos.
3) Describe el modelo usando cubos con sus colores
4) Según el orden establecido. ¿Qué cubos han salido en 4to y 7mo lugar?.
5) Hallar el área total del modelo
6) Nombrar tres cubos y dar al menos cinco afirmaciones relacionadas



Nota: Elaboración a partir de la información

Pensamiento creativo

El neurocientífico David Bueno afirma que los niños desde pequeños reaccionan fundamentalmente a tres cosas: luz, sonido y movimiento. Agrega que “Una persona con buena predisposición hacia la creatividad pero que no se le deje experimentar en este aspecto acabará teniendo mucha menos creatividad que una persona que a lo mejor tiene menos predisposición genética, pero que estas primeras edades de 6 a 10 años de edad se les está estimulando, entonces se está dando la posibilidad de desarrollar todo este aspecto creativo” (Bueno, 2018). Los niños desde pequeños son muy creativos pues cualquier objeto que llegue a sus manos hará de él cualquier cosa que tenga un significado. Sin embargo, a lo largo de los años, ese potencial se va perdiendo con la edad y falta de oportunidades como espacios, no de carácter físico, sino brindarles juegos, enseñarles arte, dibujo, música, etc. es decir actividades que intrínsecamente son creativas y en matemática con este material aportamos una forma para desarrollar esta habilidad.

Ken Robinson define la creatividad como el proceso de tener ideas originales que tienen valor. Además, “La creatividad se aprende igual que se aprende a leer” (Robinson, 2018). El defiende a ultranza la creatividad como la habilidad más importante que la escuela debe fomentar en los niños: “La creatividad es la esencia de lo que significa ser humano”. Entonces, ¿Cómo recuperar en nuestros estudiantes la habilidad de la creatividad?. Ya que, esta habilidad también se puede aprender, nuestra estrategia es brindar un conjunto de cubos multiencaje, luego indicaciones para elaborar un modelo donde todos los cubos estén apoyados sobre la mesa en una primera instancia, para luego trabajarlos en el espacio. Con ello surgen hasta cinco formas para que los estudiantes tengan la oportunidad de rediseñar sus propios modelos. Así, manipulando material concreto creamos espacios para otorgar libertad a nuestros estudiantes para que puedan diseñar y construir muchos modelos de su creación, por lo tanto reforzamos y mejoramos su confianza, su autoestima, así como habilidades y valores fundamentales en la formación de toda persona.

En general, se presenta un conjunto de instrucciones que permitan construir un modelo considerando una orientación y un sistema de referencia. Rediseñar el modelo original, es volver a construir otros diferentes. Aqui se consideran cinco formas. Dado un modelo, los rediseños se hacen a partir de las siguientes instrucciones:

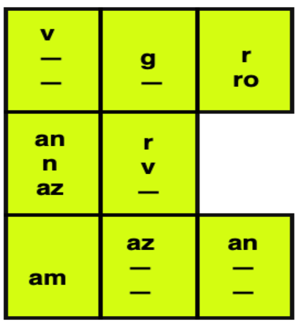
- Observar las instrucciones agregando el segundo y siguientes al último agregado.
- A partir del segundo cubo, los siguientes se colocan en cualquier parte.
- Libertad total, con el conjunto de cubos deben armar cualquier modelo.
- Usando conjunto de uniones, en todo modelo se presentan cubos que tienen una unión, dos uniones, tres uniones, etc. Así, a partir de esta información se obtienen un conjunto de uniones. Sobre esta base se pueden construir otros modelos.
- Finalmente, sobre el modelo original se escribe un conjunto de “parejas ordenadas”. Luego, se brinda apertura a la construcción de otros modelos que el estudiante estime conveniente. Y si trabajó codificación II, habrá amplitud de creaciones.

Razonamiento espacial y pensamiento divergente

Por otro lado, tenemos preguntas que tienen que ver con otra forma de visualización una habilidad para documentar y comunicar una información visual. Allí trabajamos tres vistas como se mira un plano de una vivienda: vistas de arriba (planta), de frente (Fachada) y lateral derecha o izquierda (semejante a los cortes) que son también muy analíticas e invitan a resolver problemas matemáticos y no matemáticos donde se encontrarán muchas respuestas, es decir, son problemas abiertos que ayudará a cultivar el pensamiento divergente y por ende la creatividad. Así por ejemplo, dando dos vistas de las tres mencionadas, podemos generar muchísimas respuestas.

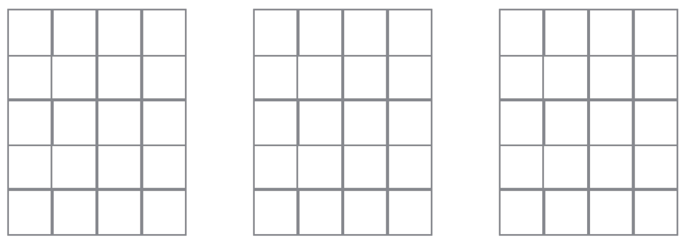
Tabla 5

Laboratorio 5 – Problema 1



Dibujar las tres vistas de este diagrama con codificación III

Arriba. Frente Lateral D.

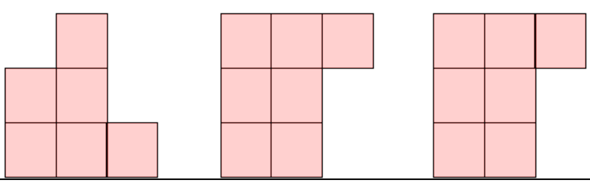


Nota: Elaboración propia a partir de la información

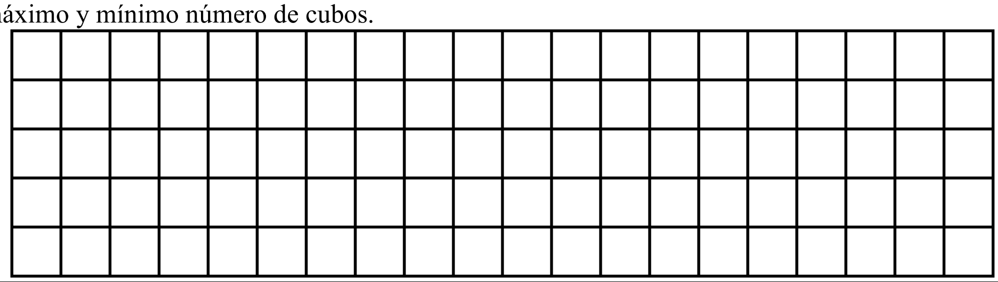
Tabla 6

Laboratorio 5 – Problema 2

Actividad: Se dan tres vistas de un modelo: Arriba, Frente y Lateral Derecha



Dibujar al menos cinco diagramas pictóricos con codificación II usando estas vistas mostrando dos casos: el máximo y mínimo número de cubos.



Nota: Elaboración a partir de la información

Referencias y bibliografía

Bueno, G. (24 de julio del 2021*). Neurociencia y educación ¿Una nueva visión de los procesos educativos?* (Video).YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=M_tKHBc0kGI&t=556s

Bueno, D. (2018). El cerebro recuerda lo que le ha emocionado. *Educación 3.0, Volumen*(33), 5– 9. https://www.educaciontrespuntocero.com/entrevistas/david-bueno-cerebro/

Gómez, I. (2000). *Matemática Emocional*. Narcea S.A. Madrid

Robinson, K. y Aronica, L. (2016). *Escuelas Creativas Grupo Editorial S.A.U. Barcelona.*

Lipman, M. (2014). *Pensamiento complejo y educación*. Madrid, España: Ediciones La Torre, segunda edición. Disponible en https://books.google.com.co/boks?hl=es&lr=&id=GI1yBAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT3&dq=pensamiento+cr%C3%ADtico+y+Lipman+&ots=FAef4XQf1X&sig=AGneZ_2a6n48T0mYGEJ5vzGJklA - v=onepage&q=pensamiento%20cr%C3%ADtico%20y%20Lipman&f=false

Lipman, M. et al. (S.f.). *Philosophy in the Classroom*. Document Resume. United States of America: By Universal Diversified Services. Disponible en https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED137214.pdf

Lipman, M. (S.f.). El lugar del pensamiento en la educación. Textos de Matthew Lipman. Edición y traducción de Manuela Gómez Pérez. Barcelona, España: Octaedro editorial. Recuperado de http://otrasvoceseneducacion.org/wp-content/uploads/2019/01/El-lugar-del-pensamiento-en-la-educaci%C3%B3n-Textos-de-Matthew-Lipman-ManuelaG%C3%B3mez-P%C3%A9rez.pdf

Liu, G. y Malaspina, U. (2005) *Trapecios y polígonos convexos.* Coloquio sobre Matemática Educativa. Primera Parte, serie C 17, 41-45.

Liu, G., (2005) *El uso de materiales educativos en la formación del pensamiento matemático.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 460-465.

Liu, G., (2010) *"Una propuesta didáctica para obtener generalizaciones expresadas como funciones lineales, usando bloques de Cuisenaire en tercero de secundaria"* Tesis de Maestría. PUCP Lima-Perú

Nomen, J. (16 de mayo del 2018) *¿Por qué los niños deberían aprender Filosofía?* (Video).YouTube.https://www.youtube.com/watch?v=QIWn3RJydPo

Nomen, J. (16 de mayo del 2018) ***La Filosofía nos hace críticos, creativos y cuidadosos.*** (Video).YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=e3BumAX-eME

Malaspina, U., (8 de octubre 2006) *El rincón de los problemas.* Revista Unión (7) 89-93. http://.www.fisem.org/descargas(7)Unión_007_011.pdf

Mora, F. (2016), *Neuroeducación*. Alianza editorial S.A. Madrid.

OECD 2019, Resultados de PISA 2018(Volumen I): ¿Qué saben y pueden hacer los estudiantes? https://www.oecd-ilibrary.org/sites/a89c90e1-es/index.html?itemId=/content/component/a89c90e1-es

Tébar, L. *Filosofía para niños de Mathew Lipman.* Un análisis crítico y aportaciones metodológicas, a partir del Programa de Enriquecimiento Instrumental del profesor Reuven Feuerstein Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, núm. 6, 2005, pp. 103- 116. La Salle Centro Universitario Madrid, España.

Pensamiento funcional en básica primaria: Uso de sistemas de representación

Marcela **Angarita** Celis
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
Marcelangarita13@hotmail.com
Solange **Roa-Fuentes**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

El presente trabajo hace parte de una investigación en curso que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-11 años) en Colombia. Nos centramos en el enfoque funcional del *early algebra* basado en el estudio de las relaciones entre dos variables que instaura a las funciones como contenido matemático central. Pretendemos describir el pensamiento funcional de los estudiantes a través de la identificación y descripción de los sistemas de representación que emplean cuando abordan tareas sobre funciones. Tomamos como referencia los sistemas de representación que se reportan diferentes investigaciones y esperamos identificar el uso de estos a través de la implementación de cuestionarios y entrevistas semiestructuradas con estudiantes de primer, tercer y quinto grado de educación básica primaria.

Palabras clave: Educación primaria; Early algebra; Álgebra temprana; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional; Sistemas de representación.

Introducción

Desde el aspecto curricular es evidente el propósito de desarrollar en los estudiantes la capacidad de razonar algebraicamente, dejando de lado la idea de que sólo es posible en los últimos niveles escolares. Las investigaciones que se han ocupado de estudiar el problema de la incorporación del álgebra desde los primeros años escolares lo han denominado la propuesta de cambio curricular "*Early algebra*", que propone introducir el álgebra desde la primaria integrándola con los contenidos usuales en clase de matemáticas. No se estaría iniciando otra asignatura, se estudia el álgebra como una forma de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Vergel, 2014). Con este enfoque se busca que los estudiantes además de comprender puedan encontrar un significado a las matemáticas que están tratando. En el mismo sentido, Callejo, García y Fernández (2016) mencionan que con esta perspectiva "se propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos" (p. 6).

Según Kaput (1998) podemos pensar en el álgebra a partir de tres ramas centrales: el álgebra como aritmética generalizada; el álgebra como la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelado; y el álgebra como estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas, que involucra la generalización hacia la idea de función. Esta última es la aproximación del álgebra escolar que asumimos en este trabajo. En este sentido, se considera que el álgebra temprana puede ocurrir en varias formas interrelacionadas en el aula, siendo el pensamiento funcional un hilo por el cual los profesores pueden construir la generalidad y una hebra clave del pensamiento algebraico (Cañadas y Fuentes, 2015). En la actualidad, Torres (2022) establece que "una de las aproximaciones al pensamiento algebraico recomendada para los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria, e incluso infantil, es el pensamiento funcional" (p. 216). Diversos ejemplos de investigaciones evidencian que los niños de la escuela primaria pueden desarrollar y usar una variedad de herramientas de representación para razonar sobre funciones, pueden describir en palabras y símbolos relaciones recursivas, covariables y de correspondencia entre variables; además, pueden usar lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas. Se ha demostrado que los estudiantes no solo son capaces de realizar un análisis funcional más profundo de lo que se pensaba anteriormente, sino que la génesis de estas ideas aparece en los estudiantes antes de lo esperado (Blanton y Kaput, 2011).

En este trabajo de investigación nos centramos en el enfoque funcional del *early algebra,* que se fundamenta en "el estudio de las relaciones entre variables y focaliza su atención en las funciones como contenido matemático" (Fuentes, 2014, p. 4). Específicamente hablamos del pensamiento funcional, como un tipo de pensamiento algebraico. Nuestro problema de investigación surge a partir de la necesidad de estudiar el pensamiento funcional en estudiantes de edades tempranas a través de la descripción de los sistemas de representación que usan al momento de resolver tareas funcionales; dichos sistemas serán descritos en el apartado de marco conceptual. Consideramos pertinente indagar en este tipo de pensamiento algebraico en estudiantes de educación básica primaria, teniendo en cuenta de que aunque ciertos elementos se relacionan con el pensamiento algebraico en el currículo de Matemáticas en Colombia (establecido por el Ministerio de Educación Matemática, MEN a partir de ahora), no hay mención específica de lo que es el pensamiento funcional en este nivel escolar, dado que la identificación de cantidades que se relacionan y la explicación de cómo cambian o se mantienen constantes generalmente se han asociado con el pensamiento variacional (MEN, 1998).

A partir del análisis de las investigaciones y posturas expuestas, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué sistemas de representación usan estudiantes de básica primaria cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían? Con base en esta pregunta se establece el objetivo de la investigación: Describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria a través de los sistemas de representación que usan cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían.

Marco conceptual

Pensamiento funcional

Bajo la revisión de diversas investigaciones que involucran el pensamiento funcional, se evidencian similitudes en sus consideraciones que nos llevan a pensar en la generalización de relaciones entre cantidades que varían como su eje principal. Algunos investigadores han precisado el pensamiento funcional en los términos que describimos a continuación. Por ejemplo, se conceptualiza ampliamente el pensamiento funcional "para incorporar la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y de representación y tratando relaciones o funciones generalizadas que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio" (Blanton y Kaput, 2011, p. 7). En acuerdo con Cañadas y Molina (2016), consideramos que el pensamiento funcional hace parte del pensamiento algebraico, como un proceso cognitivo clave que se basa en "la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 211). De este modo, el pensamiento funcional se considera una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas y trata de la acción de "pensar en términos de y acerca de relaciones" (Rico, 2006, p. 56), además, puede ser expresado por medio de distintos sistemas de representación. Existen elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros grados, al respecto Bastías y Moreno (2016) mencionan que "el pensamiento funcional incluye la relación entre cantidades que pueden expresar su relación en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función" (p. 565).

Si nos cuestionamos sobre cuándo los estudiantes al enfrentarse a una situación problema hacen uso de su pensamiento funcional, podemos decir que cuando logran "explicitar la relación entre las variables o entre los conjuntos, con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables" (Fuentes, 2014, p. 9). Cabe aclarar que al igual que en el enfoque del álgebra temprana que mencionamos anteriormente, nuestra forma de abordar el pensamiento funcional con estudiantes de básica primaria no tiene como objetivo el estudio formal sobre aspectos relativos a la función. Tal como lo mencionan Cañadas y Molina (2016), el objetivo de la incorporación del pensamiento funcional desde los primeros niveles educativos, no se enfoca en la introducción de las funciones tal y como se estudian durante la secundaria, en este caso, se busca sacar provecho del potencial de este contenido matemático tan amplio, como lo son las funciones, y así promover en los estudiantes capacidades que les sean útiles para potenciar su razonamiento matemático tanto en primaria como a futuro en los siguientes grados.

Sistemas de representación

En la literatura encontramos diferentes investigaciones que abordan el concepto de representación (Merino et al. 2013; Fuentes 2014, Cañadas y Fuentes, 2015; Cañadas y Molina, 2016; Ureña, 2021; Torres, 2022) y coinciden en la importancia del uso de los sistemas de representación en el desarrollo del pensamiento algebraico y en particular, en el pensamiento funcional. Resaltando que, desde edades tempranas los estudiantes expresan sus ideas matemáticas a partir de distintos sistemas de representación, desde el más básico y puede ir refinándose con el paso del tiempo.

El aprendizaje de diversos sistemas de representación posibilita herramientas a los estudiantes para una comprensión más amplia de las funciones, así mismo, deben estar en la capacidad de comprender la relación entre los distintos tipos de representación (tablas, gráficas y símbolos) para representar relaciones y considerar las ventajas y desventajas de cada una de ellas (NCTM, 2000). Respecto a los sistemas de representación, Pinto (2016) expresa que permiten la organización de simbología matemática y usar diferentes sistemas de representación, atribuye diversos significados a un mismo concepto, lo cual es necesario en matemáticas y permite el complemento entre los distintos tipos.

Concretamente, las representaciones son fundamentales para el pensamiento funcional ya que sirven para la representación de ideas matemáticas, permiten conocer cómo piensan los estudiantes sobre las funciones y sirve como una manera de expresión de relaciones entre variables (Pinto et al., 2021). En este trabajo nos referiremos a representaciones como lo hace Torres (2022): “cada vez que mencionemos representación o representaciones, nos referiremos a las representaciones externas, realizadas con lápiz, papel o habladas, las cuales son intencionales en la medida en que su propósito es registrar y transmitir un significado” (p. 45).

Los sistemas de representación: gestual, verbal, pictórico, simbólico, tabular y múltiple; son los que consideramos relevantes a partir de la revisión de la literatura y consideramos en esta investigación. Respecto al sistema de representación gestual Torres (2022) menciona que “los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización”, sin embargo, consideramos que este funciona como apoyo al momento del estudiante expresar y justificar verbalmente sus ideas, pero no es necesariamente evidencia de que se esté llevando a cabo algún tipo de generalización al momento de trabajar una tarea funcional. La representación verbal es aquella que se lleva a cabo mediante el lenguaje natural, ya sea de manera oral o escrita, para hacer referencia a conceptos y procedimientos matemáticos que se pretenden representar (Merino et al., 2013; Cañadas y Figueiras, 2011). En el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos la utilización del sistema de representación verbal resulta ser clave (Cañadas y Fuentes, 2015). Las representaciones pictóricas son aquellas que hacen uso de dibujos sin alguna notación de carácter simbólico. Este tipo de representación utiliza únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico (Rico, 2009), es decir, están formadas por letras y números simultáneamente. Distinguimos este tipo de representación de dos formas: las numéricas basadas en el uso de números y operaciones aritméticas mediante lenguaje matemático, haciendo uno de los símbolos aritméticos ($+$, $-$, $\times$ o $\div$); y algebraicas que se caracterizan por el uso de letras y símbolos algebraicos propios de la aritmética y el álgebra, utilizados para generalizar alguna operación numérica. El sistema de representación tabular comprende el uso y elaboración de tablas para relacionar y organizar información de una relación entre dos cantidades. Además de considerar cada sistema de representación por separado, tenemos en cuenta que en el contexto del pensamiento funcional la idea es que los estudiantes utilicen más de un tipo de representación simultáneamente adquiere relevancia (Pinto, 2019). Por tanto, llamamos sistema de representación múltiple a lo que resulta de la combinación o unión de dos o más sistemas de representación de los que contemplamos en esta investigación; pensamos en este tipo de representación, por la importancia que tiene que un estudiante tenga la capacidad de transitar entre diferentes representaciones de un concepto matemático para tener acceso a él (Duval, 2017).

Método

Esta propuesta de investigación se sitúa en un estudio cualitativo. Los participantes de esta investigación son un aproximado de 90 estudiantes de básica primaria con edades comprendidas entre los 6 y 11 años; específicamente de los grados: primero, tercero y quinto que hacen parte de una institución educativa pública ubicada en la ciudad de Bucaramanga (Colombia).El método de esta investigación se basa en el desarrollo de cuatro fases, a continuación se describe cada una, con base en los conceptos metodológicos que la sustentan.

i. Observación y caracterización: El objetivo de esta etapa es conocer el grupo de estudiantes que participan en la investigación. Realizaremos en cada grado una inmersión inicial adentrándonos con profundidad en el aula, manteniendo una reflexión permanente y generando ambientes de confianza para evitar que nuestra presencia se torne intrusa. Respecto al tiempo de observación, en la investigación cualitativa se considera que este es un periodo abierto (Sampieri, 2018), por tanto, consideramos que a medida que avancemos en esta etapa podremos establecer la cantidad de sesiones a realizar. El producto de esta etapa es la caracterización de los grupos centrada principalmente en los estudiantes, en el contexto del aula de clases y en la actividad matemática que se promueve. Las técnicas de recolección que intervienen son bitácoras con registro escrito y material audiovisual de lo observado en cada sesión. En este caso contemplamos un nivel de participación moderada, en la cual según Sampieri (2018) el investigador participa en algunas actividades, pero no lo hace en todas.

ii. Diseño de tareas para la clase: En esta etapa se destacan dos aspectos fundamentales que se describen brevemente a continuación:

a. Definición de una ruta de acceso al pensamiento funcional en básica primaria. Siguiendo las ideas de Butto y Rojano (2010) que proponen dos rutas de acceso al pensamiento algebraico basadas en la proporcionalidad y el proceso de generalización, consideramos indispensable para nuestra investigación, identificar caminos en donde los estudiantes puedan desarrollar ideas fundamentales del pensamiento funcional y el uso de distintos sistemas de representación desde la básica primaria. Para esto haremos una Revisión de documentos curriculares y un estudio de libros de texto.

A partir de los establecido por el MEN (1998, 2006, 2016) buscamos posibilitar el desarrollo del pensamiento funcional a través de los temas que se estudian en matemáticas de manera habitual sacando provecho a estos. De modo que, podamos llevar a los estudiantes a construir algunas ideas alrededor de la noción de función. Adicional a los documentos curriculares que plantea el MEN, consideramos fundamental realizar una revisión de libros de textos de matemáticas en 1°, 3° y 5°, de modo que podamos identificar cuáles de los temas que allí se proponen pueden apuntar a ideas inmersas en el pensamiento funcional y tengamos elementos que permitan definir su posible ruta de acceso, y bajo que contexto y temáticas diseñaremos los cuestionarios con las tareas funcionales. De este modo, planteamos la iniciación temprana del pensamiento funcional a través de la exploración de los contenidos curriculares usuales en clase de matemáticas sin la necesidad de agregar más.

b. Categorías de análisis. En el diseño de los cuestionarios es indispensable considerar aspectos teóricos sobre los sistemas de representación, de modo que cada tarea funcional que se diseñe permita que el estudiante tenga diversas formas de abordarla. En este caso interesa generar la posibilidad de utilizar uno o varios de los que sistemas de representación descritos en esta investigación. A partir de un análisis a priori podremos refinar cada una de las tareas que se planteen y verificar si están acordes a los objetivos de la investigación.

c. Diseño. Los cuestionarios con las tareas funcionales son el instrumento principal en la recolección de datos, adicionalmente material audiovisual. De acuerdo con Radford (2015), los docentes jugamos un papel importante al momento de seleccionar las actividades de nuestros estudiantes. Radford (2015) presenta una lista de trabajo como apoyo para los docentes en el diseño de actividades, ésta la sintetizamos de manera breve a continuación: tener en cuenta los conocimientos previos; las situaciones deben ser interesantes para los estudiantes y significativas de acuerdo con el concepto matemático que se pretende abordar; además, las situaciones deben plantearse con una organización estructurada que permita que los estudiantes trabajen cada vez problemas de mayor complejidad. De este modo, a partir de los aspectos mencionados se diseñarán tres tareas funcionales. En los tres grados (primero, tercero y quinto) se presentará la misma situación, de modo que, la esencia de la tarea funcional sea la misma, pero, el cuestionario de preguntas en cada grado irá acorde a los contenidos curriculares del respectivo curso.

iii. Implementación de las tareas: Se tiene previsto realizar tres sesiones de trabajo con cada grupo, en cada una se presenta una tarea con diferentes preguntas en torno a ella. Tomaremos como referente para la implementación la actividad de aula como sistema emergente (Radford, 2015), de este modo, el desarrollo de cada sesión se seguirá de la siguiente manera: (a) presentación de la actividad por el profesor; (b) formación de pequeños grupos de trabajo; (c) discusión entre el docente y los estudiantes; (d) una discusión general del grupo completo. Es decir, no se validará si se realiza bien o no cada tarea, esta socialización se hace para obtener argumentos de las respuestas de los estudiantes.

iv. Interpretación y análisis de datos. Para esta etapa final, haremos un análisis a posteriori de los datos recolectados en los cuestionarios de las tareas funcionales. Por otro lado, es fundamental la interpretación de estos haciendo uso de los aspectos teóricos de la investigación que se enfocan en los sistemas de representación y así, poder dar respuesta a nuestro objetivo. A la luz del diseño y análisis de la actividad matemática de los estudiantes, se definen momentos clases en donde emerge diferentes sistemas de representación en el desarrollo de las tareas funcionales, de este modo, podremos determinar cuáles de estos son los más usados, o evidentemente cuales no, de acuerdo con el grado en el que se encuentra cada estudiante.

Comentarios finales

Esta investigación se considera un aporte a la línea de investigación del pensamiento algebraico temprano, y en particular, a una de sus formas de estudio como lo es el pensamiento funcional. En general, los resultados de este estudio nos permitirán dar razón de cómo piensan los estudiantes de básica primaria en Colombia, siguiendo el MEN (Lineamientos curriculares en Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas), a partir del trabajo con tareas funcionales lineales. Por otro lado, al realizar estos cuestionarios y entrevistas con estudiantes de diferentes grados (primero, tercero y quinto) podremos dar cuenta de su evolución sobre las formas de pensamiento funcional emergente. De este modo, se podrá analizar si a medida que un estudiante avanza en en los grados de formación básica, sus sistemas de representación son más sofisticados o no. Finalmente, esta investigación busca establecer una relación entre la propuesta curricular "*Early algebra*" y el estudio de funciones en la educación básica primaria.

Referencias y bibliografía

Bastías, K. y Moreno, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XX (p. 565). Málaga: SEIEM.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011), *Early algebraization: Advances in Mathematics Education* (pp. 43-70). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22(3),* 55-86.

Callejo, M.J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 5 – 25.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34(4),* 409-425.

Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211-220). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* (Tesis de Maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1),* 24-40.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Reston, VA: NCTM.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria.* (Tesis de maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to Early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-20.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1(2),* 47-66.

Radford, L. (2015). Aspectos metodológicos de la teoría de la objetivación. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8(18),* 547-567.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4(1),* 1-14.

Sampieri, R. H. (2018). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw Hill México.

Torres, M. (2022). Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Perfiles de estudiantes de primaria y secundaria en un problema de comparación de razones

Salvador **Castillo**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
salvador.castillo@ua.es
Ceneida **Fernández**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
ceneida.fernandez@ua.es
Juan Manuel **González-Forte**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
juanma.gonzalez@ua.es

Resumen

El objetivo del estudio es identificar perfiles (comportamientos) de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven un problema de comparación de razones. Los participantes fueron 954 estudiantes desde 6.º curso de Educación Primaria hasta 4.º curso de Educación Secundaria. El análisis se realizó en dos fases. La primera consistió en un análisis inductivo de generación de categorías. La segunda consistió en identificar perfiles de estudiantes mediante un análisis clúster bietápico. Se presentan las características de los seis perfiles identificados.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Implementación curricular; Investigación cualitativa; Pensamiento numérico

Introducción y marco teórico

Se define cantidad como atributo de un objeto, expresado mediante un número y una unidad de magnitud, por ejemplo, 3 segundos. Se distinguen dos tipos de cantidades: las cantidades extensivas, que representan atributos medibles directamente, como la longitud o el tiempo, y las cantidades intensivas, que no pueden medirse directamente, como la velocidad (Schwartz, 1988; Thompson, 1994).

Se entiende el concepto de razón o razón internalizada como el resultado de comparar dos cantidades multiplicativamente en una situación particular (Thompson, 1994). Por ejemplo, en el problema de comparación de razones "*Un corredor tarda 5 segundos en recorrer 20 metros. ¿Puede recorrer 60 metros en 12 segundos?*", la razón internalizada es cada iteración ("20 metros en 5 segundos", "40 metros en 10 segundos", "60 metros en 15 segundos"), es decir, cada razón particular. Si se concibe la razón más allá de esta situación, se obtiene una razón constante para cualquier situación, llamada tasa o razón interiorizada. En el ejemplo, supondría identificar que las tasas 4m/1s y 5m/1s (nueva cantidad que se genera, que es intensiva, en este caso *velocidad*) son constantes para cualquier situación. Entender el concepto de tasa implica, por tanto, comprender que las cantidades extensivas pueden variar, pero mantienen constante la relación multiplicativa.

Como se observa en el ejemplo anterior, en los problemas de comparación de razones pueden establecerse tanto razones como tasas, siendo este tipo de problemas los empleados en nuestro estudio. Estos problemas expresan situaciones en las que se comparan dos razones cuya información numérica está dada de forma completa. En estos problemas, los estudiantes deben identificar la relación multiplicativa entre cantidades extensivas, que se establece mediante el uso de técnicas de normalización (como el producto cruzado o el cociente), identificar el referente en la comparación (cantidad de referencia respecto la que se compara la otra cantidad) e identificar si las razones son iguales o desiguales (Castillo y Fernández, 2021; Monje y Gómez, 2019).

Este trabajo es parte de un estudio más amplio centrado en cómo los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria comprenden los conceptos de razón y tasa cuando resuelven problemas de comparación de razones. Para ello, usamos una caracterización del Mecanismo de Reflexión en la Relación Actividad-Efecto (Simon et al., 2004; Tzur y Simon, 2004), basado en la idea de Abstracción Reflexiva (Piaget, 2001), que es el proceso por el que se construyen nuevos conceptos más avanzados a partir de otros disponibles, mediante la reorganización de lo que uno sabe tras sufrir una perturbación (Piaget, 2001; Simon et al., 2004). En este marco, se identifican dos fases en el desarrollo de un concepto: la de Participación y la de Anticipación. La primera comienza tras sufrir una perturbación. En ella, se abstrae un nuevo concepto, pero es provisional al estar sujeto a la situación en la que se ha construido. En la fase de Anticipación, los estudiantes pueden aplicar el concepto construido en otras situaciones, de modo que el concepto deja de ser provisional para ser invariable (Simon et al., 2004; Tzur y Simon, 2004). Con relación a estas fases, Tzur (1999) identificó tres tipos de tareas: a) Iniciales, que pueden resolverse con los conceptos disponibles; b) de Reflexión, que buscan causar perturbaciones para comenzar la construcción de un nuevo concepto; y c) de Anticipación, que pueden resolverse usando el concepto construido y, así, comprobar que éste sea invariable.

En esta comunicación, el objetivo específico es identificar perfiles (comportamientos) de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven un problema de comparación de razones, diseñado teniendo en cuenta los tipos de tareas según Tzur y las definiciones de razón y tasa de Thompson.

Método

Los participantes fueron 954 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria de diferentes centros públicos de la provincia de Alicante (España). De ellos, 19 dejaron el cuestionario en blanco, por lo que el número total fue de 935 estudiantes de 6º Primaria (n = 159), 1º ESO (n = 187), 2º ESO (n = 232), 3º ESO (n = 226) y 4º ESO (n = 131). El número de chicos y chicas fue aproximadamente el mismo en cada curso, y los estudiantes provenían de contextos socioeconómicos mixtos. Los participantes resolvieron el siguiente problema de comparación de razones:

La entrenadora de atletismo de Melania le dice que, por cada 20 metros que recorra, debe tardar 5 segundos para clasificarse en el campeonato nacional.

a) Si Melania ha recorrido 250 metros en 60 segundos, ¿se ha clasificado?
b) Melania compite con Cristina que ha recorrido 300 metros en 70 segundos. ¿Cuál es la velocidad de cada una? ¿Quién es más rápida?
c) Si Melania corre el doble de metros en el doble de segundos, ¿su velocidad cambiaría o sería la misma? ¿Por qué? Si cambia la velocidad ¿cuál sería esta velocidad?
d) Propón tres casos (los metros recorridos y los segundos usados) en los que la velocidad sea la misma que la de Cristina cuando recorre 300 metros en 70 segundos.

El problema se diseñó en base al Mecanismo de Reflexión en la Relación Actividad-Efecto y los tres tipos de tareas. Aunque Tzur (1999) señalaba que los tipos de tarea se definen por la actuación del estudiante, nosotros las utilizamos como guía para el diseño. De esta manera, el apartado a) se considera como una tarea inicial para comprobar si los estudiantes tenían disponible el concepto de razón; las cuestiones b) y c) como tareas de reflexión para provocar la construcción del concepto de tasa a partir del concepto de razón; así en el apartado b) se introduce la pregunta ¿cuál es la velocidad de cada una? (perturbación para promover la identificación de la nueva cantidad intensiva que se construye – velocidad) y en el apartado c) se introduce la pregunta ¿su velocidad cambiaría o sería la misma? ¿Por qué? (perturbación para promover la identificación de que la nueva cantidad intensiva – razón – que se construye es constante); y la cuestión d) como una tarea de anticipación para comprobar si el concepto de tasa está disponible en otras situaciones (en nuestro caso, la identificación de la razón constante).

El análisis del problema consta de dos fases. En la primera fase, se realizó un análisis inductivo de generación de categorías (Strauss y Corbin, 1994) por cada apartado del problema. Tres investigadores analizaron, independientemente, las respuestas dadas por los estudiantes. Los desacuerdos fueron discutidos hasta llegar a un consenso. Las categorías identificadas en este análisis son las siguientes (Castillo et al., 2022):

En los apartados a) y b) se obtuvieron las mismas cinco categorías:
A1 y B1: los estudiantes no identifican las cantidades extensivas o la relación multiplicativa entre ellas.
A2 y B2: los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas, pero tienen dificultades al utilizar una técnica de normalización para establecer las razones a comparar.
A3 y B3: los estudiantes establecen las razones correctamente utilizando una técnica de normalización, pero tienen dificultades con el referente al compararlas.

A4 y B4: los estudiantes establecen y comparan las razones correctamente, identificando la desigualdad de razones.
A5 y B5: los estudiantes establecen y comparan las razones correctamente, identificando la desigualdad de razones y la velocidad como la razón m/s.

En el apartado c), se obtuvieron 2 categorías:
C1: los estudiantes no identifican la constancia de la razón.
C2: los estudiantes identifican la constancia de la razón.

Finalmente, en el apartado d), se obtuvieron 4 categorías:
D1: los estudiantes no identifican la constancia de la razón en varias situaciones.
D2: los estudiantes identifican la constancia de la razón sólo al multiplicar las cantidades extensivas por el doble.
D3: los estudiantes identifican la constancia de la razón en varias situaciones multiplicando las cantidades extensivas por el mismo factor (doble, triple, etc.).
D4: los estudiantes identifican la constancia de la razón en varias situaciones usando la razón velocidad del apartado b).

En la segunda fase, se lleva a cabo un análisis clúster bietápico usando las categorías obtenidas en la fase 1 del análisis que nos permite identificar el comportamiento de los estudiantes a lo largo del problema. Para ello, se usó el software estadístico SPSS versión 25. Para este análisis, no se incluyeron aquellos estudiantes que no identificaron las cantidades extensivas ni la constancia, es decir, aquellos que fueron codificados con las categorías {A1, B1, C1 y D1} en la primera fase del análisis. Por tanto, el número final de participantes de este estudio es de 656.

Resultados y conclusiones

El análisis clúster proporcionó seis perfiles de estudiantes teniendo en cuenta un valor bajo de BIC (Criterio de Información Bayesiano) y desde un punto de vista interpretativo. Los perfiles obtenidos fueron los siguientes:

Perfil 1 (*n* = 165): los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado a), pudiendo resolver el problema con éxito (41.3% de los estudiantes) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización (58.7%), pero no las identifican en el apartado b), ni identifican la constancia (c y d).
Perfil 2 (*n* = 74): los estudiantes no identifican las cantidades extensivas en los apartados a) y b), e identifican la constancia en un único caso – el doble (apartado c).
Perfil 3 (*n* = 89): la mayoría de los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado a) pudiendo resolver el problema con éxito (37.1%) o teniendo dificultades con la normalización o el referente (21.4%), aunque algunos estudiantes no identifican las cantidades extensivas en a) (41.5%). Además, estos estudiantes no identifican las cantidades extensivas en b), e identifican la constancia en varios casos (c y d) (alrededor del 70%).
Perfil 4 (*n* = 71): los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado b), pudiendo resolver el problema con éxito (28.2% de los estudiantes) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización

(71.8%), pero tienen dificultades en el apartado a), ya que algunos estudiantes no identificaron las cantidades extensivas (29.6%) o tuvieron dificultades con la normalización o el referente (39.4%), y no identifican la constancia ni en c) ni en d).
Perfil 5 (*n* = 143): los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en los apartados a) y b), pudiendo resolver el problema con éxito (46.2% de los estudiantes en la situación a) y 37.1% en la situación b)) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización (42.0% en la situación a) y 62.9% en la situación b)), e identifican la constancia en la situación del doble (c) y un 60% de los estudiantes en otros casos (d).
Perfil 6 (*n* = 114): los estudiantes establecen y comparan razones correctamente en a) y b), e identifican la constancia en la situación del doble (c) y un 79% en otros casos (d).

Los estudiantes del perfil 2 identifican que la razón es constante para la situación “doble de metros, doble de segundos”, sin embargo, no son capaces de identificar la constancia en otras situaciones, ni identificar las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en los apartados a) y b), por lo que podríamos decir que este grupo de estudiantes no evidencia un uso de los conceptos de razón o tasa.

Los estudiantes del perfil 1 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en el apartado a) llegando a resolver el problema con éxito o teniendo dificultades con el referente o la normalización. Sin embargo, no identifican las cantidades extensivas a ser comparadas en la situación b) cuando se les pregunta por la nueva cantidad intensiva generada (velocidad). Tampoco son capaces de identificar la constancia. Los estudiantes del perfil 3 comparten características del perfil 1 en cuanto a disponer un gran grupo de ellos del concepto de razón internalizada para la situación a), y no identificar las cantidades extensivas en el apartado b). Sin embargo, este grupo de estudiantes identifica la constancia de la razón velocidad en c) y son capaces de extenderla a otros casos. Una interpretación de este comportamiento es que, aunque estos estudiantes tienen algunas dificultades al comparar las razones en la situación a) por la técnica de normalización utilizada o por no identificar correctamente el referente, podrían disponer del concepto de razón internalizada y la situación c) promovió la identificación de que la nueva cantidad intensiva que se construye (velocidad) es constante.

Los estudiantes del perfil 4 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en el apartado b) llegando a resolver el problema con éxito o teniendo dificultades con el referente o la normalización, sin embargo, tienen más dificultades en el apartado a) y no identifican la constancia. Podríamos decir que quizás a estos estudiantes la perturbación utilizada en la situación b) para promover la identificación de la nueva cantidad intensiva (velocidad) les ayudó a usar el concepto de razón internalizada, aunque con dificultades con las técnicas de normalización y la identificación el referente en la comparación.

Los estudiantes del perfil 5 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en ambas situaciones, aunque presentan dificultades con las técnicas de normalización y la identificación del referente en la comparación. Por otra parte, este grupo de estudiantes parece estar usando el concepto de tasa, ya que fueron capaces de identificar la constancia en la situación del doble y un 60% de ellos de extenderla a otras situaciones.

Los estudiantes del perfil 6 disponen del concepto de razón internalizada y parece que están usando el concepto de tasa ya que son capaces de identificar la constancia en la situación del doble y un 79% son capaces de extender la razón constante a otros casos.

Estos perfiles nos dan información sobre cómo los estudiantes de educación primaria y secundaria usan los conceptos de razón y tasa cuando resuelven un problema de comparación de razones. Se observa que los estudiantes parecían disponer del concepto de razón, pero tenían algunas dificultades en la comparación de razones, bien por tener errores en la técnica de normalización o por no identificar correctamente el referente en la comparación (Castillo y Fernández, 2021; Monje y Gómez, 2019). Por otro lado, se observa las dificultades que tenían con el concepto tasa.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto EDU2017-87411-R financiado por el MINECO, España y de la beca predoctoral de este mismo proyecto (PRE2018-083765).

Referencias y bibliografía

Castillo, S., & Fernández, C. (2021). Ratio comparison problems: Critical components and students' approaches. En M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 129-136). Khon Kaen, Thailand: PME.

Castillo, S., Fernández, C., & Canavarro, A.P. (2022). The use of the ratio and rate concepts by students in primary and secondary school. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 107-114). Alicante, Spain: PME.

Monje, J., & Gómez, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 151-172. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2606

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex, England: Psychology Press (Trabajo original publicado en 1977).

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41–52). Reston, VA, USA: NCTM.

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: *Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 305–329. https://doi.org/10.2307/30034818

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. En N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Ed*.), Handbook of Qualitative Research* (pp. 217–285). Sage.

Thompson, P. (1994). The Development of the Concept of Speed and its Relationship to Concepts of Rate. En G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179–234). Albany, NY, USA: SUNY Press.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390–416. Reston, VA. https://doi.org/10.2307/749707

Tzur, R., & Simon, M. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
Universidad de Lima
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Razonamiento covariacional por universitarios al usar SimCalc Mathworlds

Verónica **Vargas-Alejo**
Departamento de Matemáticas, Matemáticas, Universidad de Guadalajara
México
veronica.vargas@academicos.udg.mx
Carlos Enrique **Flores-Gasca**
Departamento de Ingeniería, Matemáticas, Universidad Aeronáutica en Querétaro
México
carlos.flores@unaq.mx

Resumen

En el presente reporte de investigación se exponen los resultados de una investigación relacionada con los niveles de razonamiento covariacional que exhiben estudiantes universitarios al describir una situación donde subyace la función escalonada con apoyo de SimCalc MathWorlds. La actividad se implementó en un ambiente online, mediante el uso de la plataforma Zoom. El marco teórico que se utilizó para analizar los resultados fue la teoría de razonamiento covariacional de Carlson. Los participantes en este estudio fueron 10 estudiantes de primer trimestre de nivel universitario. Como resultado se observó que dos equipos de estudiantes lograron exhibir el Nivel 3 de razonamiento covariacional y un equipo se quedó en el nivel 1.

Palabras clave: Educación Matemática; Razonamiento Covariacional; SimCalc MathWorlds; Educación universitaria; Cálculo Diferencial; Enseñanza virtual; México.

Introducción

Varios investigadores (Vargas, Reyes y Cristóbal, 2016; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; De Villiers, 1988; Kaput y Roschelle, 2013) han identificado que los estudiantes, de distintos niveles educativos, exhiben dificultades para interpretar funciones, algunas de ellas de carácter discreto o constante, asociadas a problemas cercanos a la vida real. Algunas de estas dificultades pueden deberse a que están acostumbrados a resolver problemas asociados a funciones monótonas y continuas (Ärleback, 2017); así como, a la falta de propiciar el desarrollo de su pensamiento funcional, donde la covariación juega un papel importante (Kaput, 2008; Kaput y Roschelle, 2013). Entre los distintos tipos de funciones en su haber, podemos encontrar la función escalonada.

Investigadores como Vargas, Reyes y Cristóbal (2016), Vernaza y Tapia (2013) y De Villiers (1988) han realizado estudios sobre la enseñanza-aprendizaje del concepto función escalonada y sus conceptos asociados. Por ejemplo, De Villiers (1988) implementó una actividad de modelación de tarifas postales, una de sus conclusiones fue que los estudiantes, generalmente presentan dificultades para identificar, y representar algebraicamente, las variables que subyacen en situaciones problema que implican el uso de esta función. Vernaza y Tapia (2013), por su parte, realizaron un estudio sobre planes tarifarios de taxis; señalaron que los estudiantes suelen no darles significado a los puntos extremos de los intervalos de una función escalón, en sus distintas representaciones, lo que es fundamental para describir funciones de este tipo.

Estos investigadores sugieren que se diseñen más actividades y se investigue más sobre la temática con el objetivo de apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la función a trozos. En este sentido, en la presente investigación se propone una actividad basada en SimCalc MathWorlds para identificar y promover el razonamiento covariacional de estudiantes universitarios. Se busca responder la pregunta de investigación: ¿cuáles son los niveles de razonamiento covariacional que exhibe un grupo de estudiantes de primer trimestre universitario al involucrarlos en la resolución de una actividad, relacionada con la función escalonada, con apoyo de SimCalc MathWorlds?

Desarrollo

Marco teórico

Para que los estudiantes puedan desarrollar su conocimiento con respecto al concepto de función, deben desarrollar su razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002). El razonamiento covariacional son aquellas “actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varian mientras que se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2002, p.124). Carlson et al. (2002) desarrolló un marco que describe cinco acciones mentales de los estudiantes (Tabla 1). Estas acciones están asociadas a cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional (Tabla 2). De acuerdo con los investigadores, un estudiante ha obtenido un nivel, si sustenta las acciones mentales del nivel considerado y las asociadas a los niveles inferiores.

Tabla 1
Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción Mental (AM)	**Descripción de la acción mental**	**Comportamientos**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., *y* cambia con cambios en *x*).

AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Nota. Tabla extraída de Carlson et al. (2002, p. 357).

Tabla 2
Marco conceptual para los niveles de la covariación

Niveles de razonamiento covariacional
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). *Coordinación*
En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). *Dirección*
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). *Coordinación cuantitativa*
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). *Razón Promedio*
En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). *Razón Instantánea*
En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

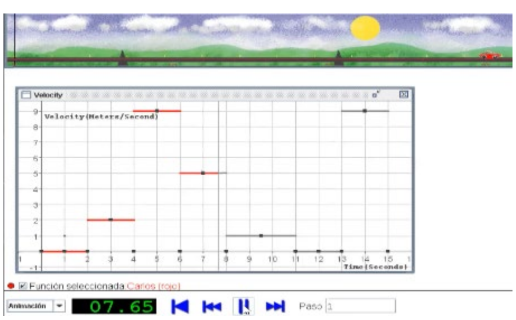
Nota. Tabla extraída de Carlson et al. (2002, p. 358).

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa. Se utilizó análisis temático (Braun y Clarke, 2006) porque el interés era reportar los significados que emergieron relacionados con el razonamiento covariacional de los estudiantes: “el análisis temático puede ser un método esencialista o realista, que reporta experiencias, significados y la realidad de los participantes” (p. 81). Se utilizaron las seis fases descritas por Braun y Clarke (2006). Los temas que permitieron la descripción final de los resultados fueron las acciones mentales y los Niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson et al. (2002). El profesor-investigador y un investigador analizaron por separado los datos y discutieron los hallazgos con base en estos temas.

La investigación realizó en el ambiente virtual Zoom, a raíz de la pandemia del COVID-19. Los participantes fueron 10 estudiantes, de 18 a 20 años de edad, del primer trimestre de nivel universitario. Fueron organizados en tres equipos (A, B y C). Cada equipo se integró con tres estudiantes, excepto el equipo C que fue conformado por cuatro estudiantes. El acomodo en equipo fue por afinidad para promover la interacción entre los estudiantes; esto porque el profesor a cargo del grupo señaló que se caracterizaban por una escasa participación en clases. Se conocían poco entre ellos debido a que pertenecían a una generación de nuevo ingreso en pandemia COVID-19.

La actividad se apoyó en simulaciones realizadas con el programa Carsz de SimCalc MathWorlds (Figura 1a), porque de manera dinámica los estudiantes podían observar cómo se movía un automóvil a partir de una función dada (escalonada); revisando así la covariación entre la velocidad y el tiempo. La primera tarea fue describir de manera verbal, en sesión grupal síncrona, el movimiento del automóvil a través de simulaciones. La segunda tarea se realizó en equipos y consistió en describir en forma escrita otra simulación dada en video. Para ello se entregó una hoja de trabajo que contenía preguntas explícitas (Figura 1b).



1. ¿Cuáles son las variables que te permiten describir el movimiento del automóvil en la gráfica?
2. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
3. Describe el comportamiento del automóvil. Haz uso de la gráfica que se observa en el video. Es decir, ***describe*** ¿Cómo varía la velocidad del automóvil con respecto al tiempo?
4. ¿Cómo varía la velocidad del automóvil durante el primer segundo?
5. ¿Cómo varía la velocidad del automóvil entre el segundo 2 al segundo 5?
6. ¿Cuánto cambia la velocidad entre el segundo 5 y el segundo 8?
7. ¿Cómo describiría en forma algebraica la velocidad del vehículo durante todo el recorrido que se observa en la simulación?

(a) (b)

Figura 1. Simulación del Programa Carsz de SimCalc MathWorlds y Hoja de Trabajo.

Las fases fueron:

a) Discusión grupal síncrona de dos simulaciones generadas por el profesor-investigador, quien fungió como guía de la reflexión grupal mediante preguntas.
b) Trabajo en equipo para resolver la hoja de trabajo (Figura 1b) compuesta por preguntas que se respondían al analizar una video grabación de una simulación realizada con el programa Carsz de SimCalc MathWorlds. Cada estudiante tuvo acceso a esta videograbación a través de un archivo de Drive que pudo abrir en su propio equipo en casa.
c) Cierre de la sesión.

La implementación de la actividad se llevó a cabo durante un periodo de 90 minutos. Se recopilaron datos de videos, reportes de los estudiantes y notas del profesor-investigador.

Resultados

Los resultados se describen en dos etapas. En la primera se observa cómo los estudiantes exhibieron acciones mentales 1, 2 y 3. Los estudiantes describieron el movimiento del automóvil en términos de velocidad en función del tiempo. En la segunda etapa todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de participar en sus equipos y proponer sus descripciones con base en el video. Se observó que el equipo 1 exhibió nivel 1 de razonamiento covariacional. En cambio, los equipos 2 y 3 exhibieron un nivel 3. En seguida, se describen en detalle los resultados.

Etapa 1: Simulación de carzs de simcalc mathworlds

Durante la sesión grupal, el profesor-investigador solicitó a los estudiantes describir la simulación (Figura 1) y la gráfica, con el objetivo de identificar sus acciones mentales. Los estudiantes que participaron describieron cualitativamente el gráfico de la velocidad promedio contra el tiempo mediante el uso de conceptos distintos. Por ejemplo, un estudiante comentó:

> A_1: Es la velocidad con la que se mueve el automóvil conforme pasan los segundos (AM1).
> El estudiante A_1 coordinó el valor de la variable velocidad con los cambios en la velocidad contra el tiempo, lo cual corresponde a AM1. Mientras que, B_2 dijo:
> B_2: En los primeros dos segundos, su velocidad es cero y no hay movimiento (AM1 y AM3).

El estudiante B_2 no solo coordinó el valor de la variable velocidad con los cambios con respecto al tiempo (AM1), coordinó la dirección del cambio de la variable velocidad con los cambios en la variable tiempo (AM2) y coordinó la cantidad de cambio entre ambas variables (AM3) al señalar la velocidad del automóvil y su falta de movimiento durante un periodo.

Etapa 2: Resolución de la hoja de trabajo por equipos

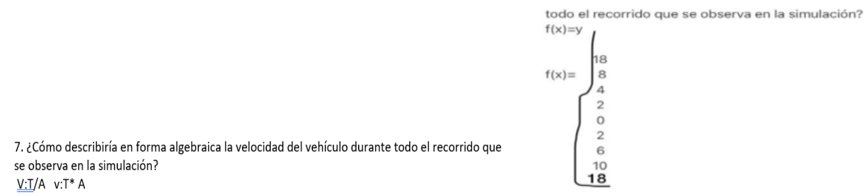
Posterior a la descripción de la simulación, se solicitó a los estudiantes que respondieran las preguntas de la hoja de trabajo (Figura 1b) mediante la simulación dada en video.

Nivel de razonamiento del equipo A. El equipo tuvo dificultades para contestar las tres primeras preguntas de la hoja de trabajo. Pero, en sus descripciones, para responder la pregunta tres (Figura 2), se denota la identificación y el uso de las variables velocidad y tiempo para describir el comportamiento del automóvil, no sin dificultades para hacerlo (AM1).

R: la velocidad por conforme al tiempo va disminuyendo poco a poco hasta llegar a un punto neutro donde ya no avanza por conforme va avanzando el tiempo aumenta aún más la velocidad con como aumenta el tiempo

Figura 2. Respuesta a la tercera pregunta de la hoja de trabajo por el equipo A.

El equipo afirmó que tenía que hacer uso de alguna fórmula para responder la pregunta siete y en su hoja de trabajo escribió $V{:}\,T/A \;\; v = T * A$. Sin embargo, como puede observarse en la Figura 3, no utilizó esta expresión algebraica al escribir la función escalonada. En su lugar, se observa la relación $f(x) = y$. Quizás usaron "y" para representar que la velocidad era constante en algunos intervalos, ya que enseguida señalaron que $f(x)$ tomaba varios valores constantes. Podemos decir que el equipo A exhibió N1.

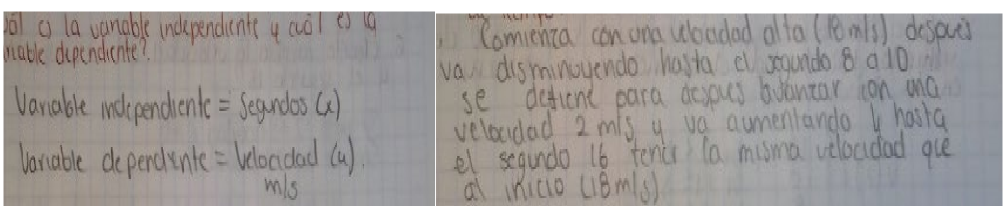

7. ¿Cómo describiría en forma algebraica la velocidad del vehículo durante todo el recorrido que se observa en la simulación?
V:T/A v:T* A

todo el recorrido que se observa en la simulación?
f(x)=y

$$f(x)=\begin{cases}18\\8\\4\\2\\0\\2\\6\\10\\18\end{cases}$$

Figura 3. Respuesta a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo A.

Nivel de razonamiento del equipo B. Este equipo, al responder las preguntas de su hoja de trabajo, identificó y escribió las variables involucradas (Figura 4) en la situación (AM1). Describió de forma cualitativa el movimiento del vehículo, aunque en lugar de señalar las velocidades constantes por intervalos de tiempo, señaló que la velocidad del automóvil iba disminuyendo y aumentando.


ál es la variable independiente y cuál es la
iable dependiente?
Variable independiente = Segundos (x)
Variable dependiente = Velocidad (v) m/s

Comienza con una velocidad alta (18 m/s) después va disminuyendo hasta el segundo 8 a 10 se detiene para después avanzar con una velocidad 2 m/s y va aumentando hasta el segundo 16 tener la misma velocidad que al inicio (18 m/s)

Figura 4. Respuesta a la segunda y tercera pregunta de la hoja de trabajo por el equipo B.

El equipo B construyó una función escalonada para describir el comportamiento del vehículo (AM2 y AM3). Podemos decir que el equipo B exhibió N3, no obstante, tuvo dificultades para escribir la función y usar la notación convencional, pues en lugar de escribir los valores que la velocidad (v) tomaba respecto al tiempo (x) ordenó de manera descendente los valores que tomaba $v(x)$ independientemente del valor de x (Figura 5).

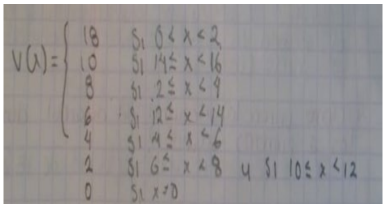
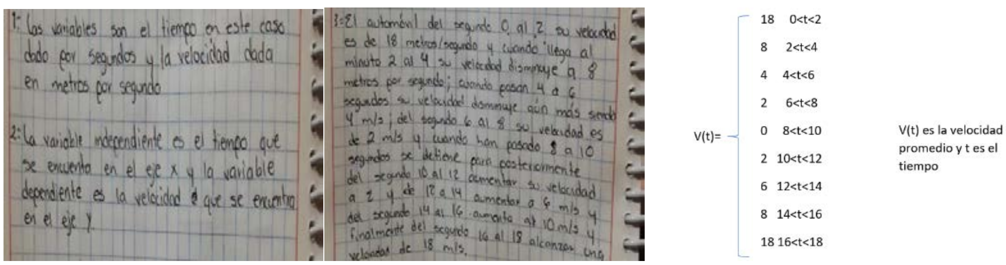


Figura 5. Respuesta a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo B.

Nivel de razonamiento del equipo C. El equipo identificó las variables inmersas en la simulación (Figura 6a), velocidad y tiempo; así como las unidades de medida de cada una: metros por segundo y segundos (AM1). Describió de manera adecuada y en forma cualitativa el comportamiento de la función escalonada asociada al movimiento del vehículo (AM2 y AM3). El equipo C logró escribir la función escalonada algebraicamente (Figura 6b). Podemos decir que el equipo C exhibió N3.



(a) (b)

Figura 6. Respuestas a las tres primeras preguntas y a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo C.

En resumen, los resultados son los siguientes (Tabla 3).

Tabla 3

Acciones Mentales y Niveles de Razonamiento Covariacional de los Equipos A, B y C

Equipos	AM 1	AM 2	AM 3	Niveles de Razonamiento Covariacional
A	✓			N1
B, C	✓	✓	✓	N3

Cierre de la sesión

Los equipos presentaron al final de la sesión sus respuestas. El profesor-investigador retomó las participaciones y promovió reflexión sobre ellas, mediante una discusión grupal. El énfasis se puso en la función escalonada y algunos de los conceptos matemáticos relacionados.

En esta discusión, se observó que aun cuando los equipos tuvieron dificultades para escribir la función escalonada en su forma algebraica, gracias a la simulación los estudiantes pudieron describir de manera general y verbal el comportamiento del automóvil a partir de la simulación. Los equipos comentaron al profesor-investigador que describir el comportamiento del vehículo no fue sencillo porque no estaban acostumbrados a resolver problemas en contexto que implicaran el uso de funciones escalonadas, pero que les gustó. Esto último coincide con lo encontrado por Kaput y Roschelle (2013) respecto a que algunas dificultades de los estudiantes pueden deberse a que en la escuela no se promueve la resolución de tareas o problemas relacionados con funciones definidas a trozos y, además, posiblemente cuando se hace, se utilizan ambientes estáticos de lápiz y papel.

Conclusiones

Respecto a la pregunta de investigación planteada en este reporte, podemos concluir lo siguiente. Las respuestas denotaron que el equipo A tuvo dificultades para identificar las variables involucradas y describir el movimiento del vehículo, lo cual nos condujo a clasificarlos como de Nivel 1 de razonamiento covariacional (AM1). Por otra parte, se observó que los estudiantes de los equipos B y C exhibieron Nivel 3, pues identificaron las variables requeridas para describir el movimiento del vehículo (AM1) y las relacionaron de manera cualitativa y cuantitativa para explicar el comportamiento, mediante una función escalonada (AM1 y AM2). Concluimos al igual que investigadores señalados en este documento, que aún en el nivel universitario los estudiantes exhiben bajos niveles de razonamiento covariacional. Quizás se deba a la escasez de experiencias en el aula donde se razone sobre el comportamiento de eventos dinámicos.

Referencias y bibliografía

Ärlebäck, J., B. (2017). *Using a Models and Modeling Perspective (MMP) to frame and combine research, practice- and teachers' professional development* [Sesión de Conferencia]. Décimo Congreso de la Sociedad Europea para Investigación en Educación Matemática (CERMA10). Universidad de Dublín, Irlanda. http://liu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1244966&dswid=-6299

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-10. http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Carlson, Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: Un Marco Conceptual y un Estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

De Villiers, M. D. (1988). Modelling with Step-Functions. *Mathematics in School, 17*(5), 8-10.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Routhledge.

Kaput, J. J., y Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En S. J. Hegedus, y J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13–26). Dordrecht: Springer.

Vargas, V., Reyes A. V. & Cristóbal, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática, 28*(2), 59-84.

Vernaza, A. J., y Tapia, A. K. (2013). *Una Propuesta de Enseñanza de la Función por Tramos Usando el Periódico y GeoGebra* [Tesis de Maestría no publicada]. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Razonamiento Geométrico 3D: Una revisión sistemática de la literatura en relación a aspectos semióticos, instrumentales y discursivos abordados desde la investigación

Fabiola **Arévalo-Meneses**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
Fabiola.arevalo@pucv.cl
Elizabeth **Montoya-Delgadillo**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
Elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

El estudio de geometría 3D ha adquirido mayor protagonismo en los recientes programas ministeriales de educación matemática en Chile, en donde se declara la importancia de utilización de softwares de geometría dinámica. Ahora bien, el tránsito desde la geometría 2D a la 3D, no es trivial. Para poder abordar esta temática se realiza una revisión bibliográfica sistemática de literatura en la base bibliográfica Scopus de acuerdo a elementos epistemológicos, cuyos resultados destacan la presencia y relevancia que se ha dado desde la investigación a abordar aspectos semióticos e instrumentales, mientras que son pocos los artículos que hacen referencia a aspectos discursivos en torno al razonamiento geométrico 3D.

Palabras clave: Educación Matemática; Geometría 3D; Razonamiento geométrico 3D; Visualización de objetos 3D; Software de Geometría Dinámica; Habilidades espaciales.

Introducción

El estudio de la geometría 3D es uno de los ejes temáticos de estudio en matemática que no había sido considerado con mayor énfasis en las propuestas ministeriales de educación hasta la reciente incorporación de uno de los programas de formación diferenciada para 3° y 4° año de enseñanza media, Geometría 3D (MINEDUC, 2020). Orientado a la resolución de problemas y a la modelación de situaciones en que intervienen la forma, el tamaño y la posición, el programa se presenta como una contribución al pensamiento espacial, en donde se relacionan situaciones y problemas en el espacio 3D que permiten utilizar conocimientos de la geometría 2D para la resolución de problemas en el espacio tridimensional (p. 21). No obstante, el estudio de la geometría 3D nos sitúa en un contexto en que se debe avanzar desde la geométrica euclidiana bidimensional, generalmente estudiada en los años de la educación escolar, a una geometría euclidiana tridimensional, en donde no es fácil dibujar figuras 3D ni imaginar objetos en el espacio (Ferrarello et al., 2018).

De esta manera, la observación y visualización de objetos y de cambios en el espacio se vuelve fundamental si consideramos que la percepción antecede a la comprensión del objeto matemático (Dana-Picard, 2006). Se recomienda así, el uso de softwares de geometría dinámica dado que facilitan los procesos de visualización (de Sousa et al., 2021), siendo una herramienta útil para comprobar y refutar conjeturas.

Dados estos antecedentes surge la necesidad de realizar una revisión sistemática de la literatura desde una perspectiva epistemológica, con el fin de dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los aspectos epistemológicos abordados desde la investigación en relación al estudio de geometría 3D?

Marco Teórico

De acuerdo al objetivo de esta revisión sistemática, se consideró el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que considera una dimensión epistemológica que se ve articulada con una dimensión cognitiva en el trabajo matemático de un individuo (Kuzniak et al., 2016, 2022; Kuzniak y Richard, 2014). En esta articulación es posible identificar la presencia de aspectos semióticos, aspectos instrumentales y aspectos discursivos.

Aspectos Semióticos

Se pone énfasis en los signos, objetos que pueden, o no, ser concretos y tangibles *(Representamen)*, los que se organizan en registros de representación semiótica (Duval, 1993). Estos signos son decodificados e interpretados por un individuo, proceso mediante el cual les otorga un significado.

Aspectos Instrumentales

Para poder comprender lo que entendemos como *aspectos instrumentales* debemos conocer la idea de *artefacto.* La noción de *artefacto* es considerada por Rabardel (1995) como todo lo que ha sufrido una transformación de origen humano, dentro de los que se distinguen; *artefactos simbólicos*, tales como los algoritmos, *artefactos materiales* como ábaco, tablas logarítmicas, regla y compás y, por último, *artefactos digitales* como software geométricos y calculadoras. Estos artefactos que se encuentran en una dimensión epistemológico se hacen operativos al ser utilizados para llevar a cabo una actividad matemática, es así como se transforman en *instrumentos*. Rabardel (1995) considera que un *instrumento* posee dos componentes; un artefacto material o simbólico y esquemas de uso determinados. En esta misma mirada, los artefactos se transforman en herramientas para un sujeto cuando este tiene asociados esquemas para su utilización (Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak et al., 2016).

Aspectos Discursivos

Se presenta un sistema de referencia teórico en que encontramos definiciones, propiedades y teoremas (*Referencial teórico*), que va más allá de una mera colección de propiedades matemáticas, pues es la base del discurso matemático propio de un matemático que prueba o demuestra. Estas propiedades, teoremas y definiciones que se organizan en el referencial teórico son empleadas en el proceso discursivo para la validación y el razonamiento matemático (Kuzniak et al., 2016, 2022; Kuzniak y Richard, 2014).

Metodología

Se realizó una búsqueda sistemática narrativa (Rocco y Plakhotnik, 2009) de la literatura desde la base de datos Scopus, de acuerdo a lo propuesto por Gaona (2022). La búsqueda se realizó en el mes de abril del año 2022, en la cual se consideraron artículos de revistas en idioma español, portugués, inglés, francés e italiano. La búsqueda se estructuró de acuerdo a: *Criterios de búsqueda*, *Criterios de selección* y *Criterios de análisis*.

Criterios de búsqueda

En un primer momento se definieron como criterios de búsqueda las palabras y conceptos claves en relación a nuestro tema de interés:

Para el término “geometría” se utilizó la palabra “geometry” y “figure” separadas por “or”;

Para el término “3D” las palabras separadas por “or”: “three-dimensional”, “spatial”, “3D” y “3-D”.

Para considerar solo artículos de revistas que están indexadas en educación, mediante el conectivo “and” se agregó el código de área educación “3304”.

La búsqueda arrojó como resultado 411 artículos, de los cuales luego se descartó a aquellas áreas que pese a reunir todos los términos considerados, se encuentran en otras áreas de conocimiento como, medicina, arqueología, química, biotecnología, y que no hacían referencia a educación matemática. Tras este filtro los resultados de la búsqueda se redujo a 270 artículos. Estos artículos fueron considerados para la etapa de selección.

Criterios de selección

De los 270 artículos se seleccionaron aquellos que poseen mayor cantidad de citas (30 o más citas) junto con los más nuevos (publicados dentro de los últimos 5 años). De este modo, se obtienen 65 artículos, de los cuales, se descartaron aquellos que no son pertinentes dado el tema de interés, quedando finalmente 43 artículos, 41 en idioma inglés y 2 en idioma español.

Criterios de análisis

Los 43 artículos seleccionados fueron analizados de acuerdo a los *aspectos semióticos, instrumentales y discursivos* que consideran (de acuerdo a las definiciones antes mencionadas). Si alguno de los artículos presenta aspectos que están fuera de la dimensión epistemológica, se agregará una categoría adicional que se denominará *aspectos emergentes*.

Resultados

Dada la revisión de los artículos se observó que las tareas que proponen a los sujetos de investigación la mayoría presentan *aspectos semióticos* (41 de 43 artículos), los dos artículos que no los consideran corresponden a la categoría *aspectos emergentes.*

Por otra parte, de estos 41 artículos que presentan *aspectos semióticos* la mayoría contienen a la vez *aspectos instrumentales.* Pero además, se observa que es muy difícil identificar en estos cuál de los dos *aspectos* es más preponderante, de esta manera podemos decir que los artículos presentan *aspectos semióticos e instrumentales* (34 de 41 artículos). Además es importante destacar que no se encontraron artículos que solo consideren *aspectos instrumentales*, de alguna manera podemos decir que los artículos que consideran *aspectos instrumentales* se manifiestan de forma inherente a *aspectos semióticos*. Esto puede estar dado por la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados, que se diferencian por ejemplo de objetos del algebra en donde se presentan generalmente una preponderancia a la utilización de instrumentos. En los 34 artículos encontramos principalmente artefactos digitales, en particular softwares de geometría dinámica como GeoGebra y realidad aumentada (AR), y en menor cantidad se encuentra la utilización de artefactos materiales para realizar construcciones geométrica, como lo es la utilización de bolígrafos de impresión 3D.

Los Siete artículos restantes contienen solo *aspectos semióticos*, dichos artículos utilizan test que pueden ser respondidos a través de procesos de visualización, los que se caracterizan por presentar imágenes 2D de objetos 3D. Tal es el caso de una investigación que describe y analiza la estructura del pensamiento geométrico 3D, concluyendo que las habilidades espaciales de los estudiantes son un fuerte predictor de los tipos de razonamiento geométrico 3D.

No se encontraron artículos en que solo se muestren *aspectos discursivos*, aquellos que lo hacen (6 de 41 artículos), presentan además *aspectos semióticos e instrumentales*, a partir de los cuales se propicia la validación y el razonamiento matemático de acuerdo a los objetos matemáticos involucrados. Uno de estos estudios, manifiesta que los estudiantes que utilizaron GeoGebra 3D poseen habilidades de comunicación matemática más elevadas que aquellos estudiantes que no utilizaron ningún software de geometría dinámica.

De los dos artículos correspondientes a la categoría *aspectos emergentes*, uno de ellos considera un sistema interactivo multimodal para la exploración no visual (auditivo-háptica) de mapas virtuales, indicando que la retroalimentación auditivo 3D mejora el rendimiento con respecto a la retroalimentación 2D. El otro artículo hace referencia a la valoración y aceptación del uso de AR para mejorar las habilidades de pensamiento geométrico de los estudiantes.

Nota: Las citas referentes a los artículos encontrados en la revisión no están presentes en el escrito por falta de espacio.

Conclusión

Se ha realizado un revisión sistemática de la literatura con foco en una dimensión epistemológica en relación al estudio de geometría 3D, la que arroja resultados interesantes. Se destaca la importante consideración de *aspectos semióticos e instrumentales* en investigación. Los procesos de visualización de signos así como los esquemas de usos asociados a distintas herramientas se presentan como relevantes en el estudio de geometría 3D y, de forma particular, en el tránsito desde la geometría 2D a la geometría 3D.

Ahora bien, se observa un vacío en cuanto a *aspectos discursivos* en los artículos analizados, sin embargo, los *aspectos discursivos* son fundamentales en el aprendizaje, pues es mediante el discurso que los estudiantes validan sus razonamientos al establecer conexión entre la actividad realizada y el referencial teórico. De esta manera, se presenta la posibilidad de abordar *aspectos discursivos* desde la investigación con el fin de poder aportar con conocimientos importantes a la comunidad científica, los que pueden ser orientadores para programas de formación inicial y continua de profesores, con el fin de fortalecer las habilidades espaciales y el razonamiento geométrico 3D.

Referencias y bibliografía

Dana-Picard, T. (2006). Plane transformations in a complex setting I: Homotheties-translations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 726–734. https://doi.org/10.1080/00207390500064247

de Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & de Azevedo, I. F. (2021). Categories of intuitive reasoning and GeoGebra 3D: An experience with Brazilian students. *LUMAT*, *9*(1), 622–642. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1618

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (Vol. 5, pp. 37–65). https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Ferrarello, D., Mammana, M. F., & Pennisi, M. (2018). Magic of centroids. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(4), 628–641. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418917

Gaona, J. (2022). Búsqueda bibliográfica sistemática en educación (matemática). SocArXiv Documentos. https://doi.org/10.31235/osf.io/jszbh

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático The Teacher's role from the perspective of Mathematical Working Spaces. *Bolema, Rio Claro*, *30*(54), 1–22. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context* (A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard, Eds.; Vol. 18). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4(I)), 17–27. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

MINEDUC. (2020). *Programa de estudio Geometría en 3D 3º y 4º medio*. Ministerio de educación.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. In *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rocco, S. T. y Plakhotnik, S. M. (2009). Literature reviews, conceptual frameworks, and theoretical frameworks: Terms, functions, and distinctions. Human Resource Development Review, 8(1):120–130.

Razonamiento inferencial informal: Un estudio sobre los aspectos estructurales

Maritza **Méndez-Reina**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
maritzamendez@pensadoresmatematicos.com
Soledad **Estrella**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

El estudio integra aspectos estructurales del razonamiento inferencial informal y los conceptos clave propios de la inferencia estadística, con el propósito de examinar la estructura argumental de las inferencias estadísticas informales producidas por dos estudiantes de grado 3. Mediante los modelos de Peirce y de Toulmin se analizan aspectos estructurales de estos razonamientos provocados por un experimento aleatorio en un escenario lúdico, caracterizándose elementos discursivos de la estructura de las inferencias estadísticas informales generadas por los estudiantes de primaria. Se proyecta avanzar en aspectos procesuales ligados a las predicciones, conjeturas, hipótesis y generalizaciones derivadas de este razonamiento.

Palabras clave: Razonamiento inferencial informal, Inferencia estadística informal; Aspecto estructural del razonamiento inferencial estadístico; Modelo de Toulmin; Modelo de Peirce; Inducción; Abducción.

Introducción

A nivel investigativo el enfoque de la inferencia estadística informal ha caracterizado al razonamiento inferencial como un proceso cognitivo conducente a establecer generalizaciones probabilísticas (no deterministas) al interpretar los patrones revelados por los datos disponibles (e.g. Abu-Ghalyoun, 2021; Aridor y Ben-Zvi, 2018; Ben-Zvi et al., 2007). Con el interés de estudiar el razonamiento inferencial informal desde una perspectiva commognitiva se realiza un análisis de los aspectos estructurales (Jeanotte y Kieran, 2017) de dicho razonamiento, utilizando las ideas de Peirce y Toulmin para caracterizar elementos discursivos de la estructura de las inferencias estadísticas informales generadas por estudiantes de primaria.

El razonamiento inferencial informal

La incertidumbre se convierte en una presencia habitual en los procesos de toma de decisiones (Fischbein, 1987) en este sentido, Shaughnessy (2019) señalaba que la educación estadística tendría como objetivo primordial, el permitir a estudiantes y ciudadanos entender que la toma de decisiones bajo incertidumbre se basa en muestras de datos. Cuando sólo se disponen de datos parciales, la inferencia estadística se constituye en el medio que permite formular conclusiones bajo incertidumbre (Makar y Rubin, 2018). Según de Vetten et al. (2018) una forma de razonamiento inferencial es la inferencia estadística, considerada en sentido amplio como el resultado y el proceso de crear o probar generalizaciones probabilísticas a partir de datos (Makar y Rubin, 2009). A nivel escolar, los estudiantes desde edades tempranas pueden generar inferencias estadísticas informales a partir de muestras de datos sin recurrir al uso de técnicas de inferencia formal, centrando su razonamiento sobre el comportamiento de las distribuciones muestrales y su contraste (Pfannkuch, 2006). El razonamiento inferencial informal (RII) en entornos de enseñanza ha sido caracterizado a partir de los componentes clave tales como: la generación de afirmaciones más allá de los datos (e.g., Zieffler et al, 2008), el uso de expresiones probabilísticas (e.g., Ben-Zvi et al., 2012), el reconocimiento de los datos como evidencia (e.g., Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch et al., 2012), la consideración del agregado (e.g., Konold et al, 2015), y la integración del contexto (e.g., Langrall et al., 2011).

El razonamiento puede ser discutido desde diferentes perspectivas académicas (Kollosche, 2021), y algunas podrían centrarse en los aspectos estructurales. Es el caso de Jeannotte y Kieran (2017) quienes realizan un proyecto de investigación desde una perspectiva teórica, que sintetiza diferentes perspectivas sobre el análisis de la estructura del razonamiento utilizadas en la didáctica de la matemática, dentro de sus resultados indican que los modelos de Toulmin y Peirce son asumidos por varios autores, sin embargo, aunque es prolífica la investigación en el campo sobre el razonamiento inferencial informal, pocos estudios han caracterizado los elementos discursivos estructurales que son constitutivos en el RII a través de dichos modelos. Dado el interés por profundizar en los aspectos estructurales del razonamiento inferencial informal y los conceptos clave propios de la inferencia estadística, el propósito de este trabajo es examinar la estructura argumental de las inferencias estadísticas informales producidas por estudiantes de primaria empleando los modelos Toulmin y Peirce.

Los modelos de Peirce y Toulmin en la investigación sobre el RII

Los modelos Peirce y Toulmin presentan diferentes aspectos estructurales del razonamiento. Como se ha venido sosteniendo, la contribución de ambos modelos ha orientado diversas investigaciones (e.g. Jeannotte y Kieran, 2017; Pedemonte y Reid, 2011). A continuación, se describirá cómo las ideas de dichos modelos han sido utilizadas en algunos estudios relacionados con el razonamiento inferencial informal.

El modelo de Peirce. Peirce describe el razonamiento inferencial a partir de muestras como inducción: "la inducción es el razonamiento de una muestra tomada al azar a todo el lote muestreado" (CP 1.93). En su obra, considera que hay diversos pasos en el razonamiento: deducción, inducción y abducción; y señalaba a su vez que estas tres formas son los únicos modos elementales de razonamiento existentes. Las distinciones entre estos pasos son ilustrados a través del ejemplo de la bolsa de frijoles, como sigue (basado en CP 2.623):

> Supongamos que entro en una habitación y hay un número de bolsas, que contienen diferentes tipos de frijoles. Sobre la mesa hay un puñado de frijoles blancos; y, después de algunas búsquedas, encuentro una de las bolsas contiene sólo frijoles blancos. Yo en seguida infiero como una probabilidad, o como una conjetura justa, que este puñado fue sacado de esa bolsa. Este tipo de inferencia se llama *hacer una hipótesis*. Es la inferencia de un *caso* de una *regla* y un *resultado*. [cursiva en el original]

Tabla 1
Ejemplos de los pasos de inferencia elemental de Peirce

Deducción	**Regla** Todos los frijoles de esta bolsa son blancos. **Caso** Estos frijoles son de esta bolsa. ⁂**Resultado** Estos frijoles son blancos.
Inducción	**Caso** Estos frijoles son [seleccionados aleatoriamente] de esta bolsa. **Resultado** Estos frijoles son blancos. ⁂**Regla** Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.
Hipótesis [Abducción]	**Regla** Todos los frijoles de esta bolsa son blancos. **Resultado** Estos frijoles [extrañamente] son blancos. ⁂**Caso** Estos frijoles son de esta bolsa.

Fuente: Peirce. 1878.

Rossman (2008) plantea que el RII es un razonamiento inductivo y consiste en ir más allá de los datos de una muestra para extraer conclusiones sobre un universo que no ha sido explorado en su totalidad, lo cual conduce a que las conclusiones que se obtienen presenten márgenes de incertidumbre. Makar et al. (2011) indican que la forma en que se caracteriza a la inferencia estadística actualmente –como una afirmación basada en datos expresada con cierta incertidumbre–, se corresponde particularmente con la descripción de las inferencias inductivas y probables abordadas en la obra de Peirce, en tanto la generalización de una muestra a una población no es más que una forma de inferencia (CP 5.145). Por su parte, Gil y Ben-Zvi (2011) consideran que la inferencia estadística es por naturaleza una forma inductiva de razonamiento.

Respecto a las hipótesis o abducción Makar, et al. (2011) indican que en la obra de Peirce la inferencia abductiva se caracteriza por los procesos de hipotéticos, sugerencia de ideas y explicación creativa de fenómenos. A su vez Gil y Ben-Zvi (2011) indican que las explicaciones de la inferencia estadística a menudo pueden tomar la forma de abducciones (p. 91), reportando que los estudiantes tienden a proporcionar explicaciones abductivas debido a la complejidad del razonamiento inferencial informal.

El modelo de Toulmin. De acuerdo con Jeannotte y Kieran (2017) la estructura de los pasos de razonamiento puede ilustrarse con este modelo, en tanto permite secuenciar los diferentes pasos de razonamiento según diferentes estructuras globales (varios pasos elementales).

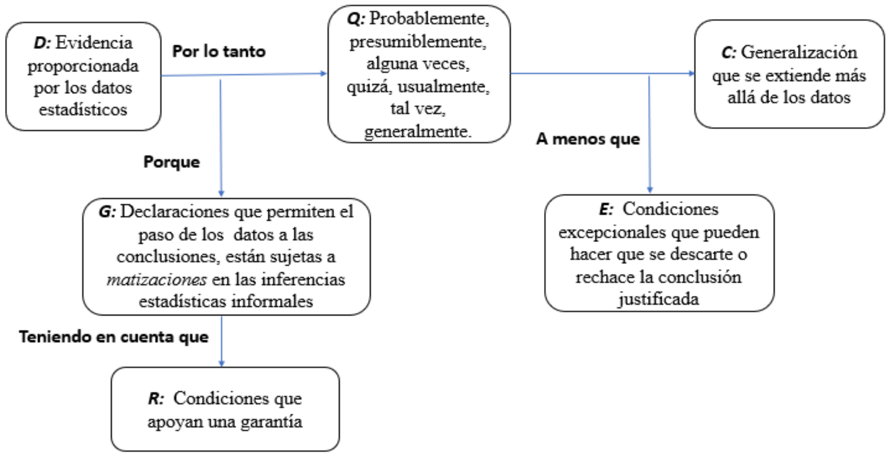


Figura 1. Modelo de Toulmin adaptado para el RII. Elaboración propia

Basándose en el modelo de argumentación de Toulmin, Gómez-Blancarte y Tobías-Lara (2018) presentan una propuesta para analizar la validez del razonamiento inferencial de los estudiantes evaluando la presencia y conexión de los tres componentes del razonamiento inferencial: 1) la inferencia ***C***; 2) debe basarse en un análisis estadístico de los datos ***D***; y 3) debe incluir un lenguaje de incertidumbre ***Q***. Adicional a su propuesta se considera que algunas inferencias pueden dar cuenta de posibles condiciones en las que la inferencia puede no ser apropiada ***E***.

La unión de los modelos Peirce y Toulmin. Usando el modelo Toulmin, se ilustra la estructura de las inferencias según el ejemplo de los frijoles Peirce (Figura 2), pero esta vez con la unión de los dos modelos. Dado que el vocabulario de Toulmin y Peirce es diferente, eligen los términos "datos" para atender al "caso", "la garantía" para atender a la "regla" y "conclusión" para referirse al "resultado. En este caso, se privilegian los pasos de inducción y abducción que han sido caracterizados por la investigación en razonamiento inferencial informal.

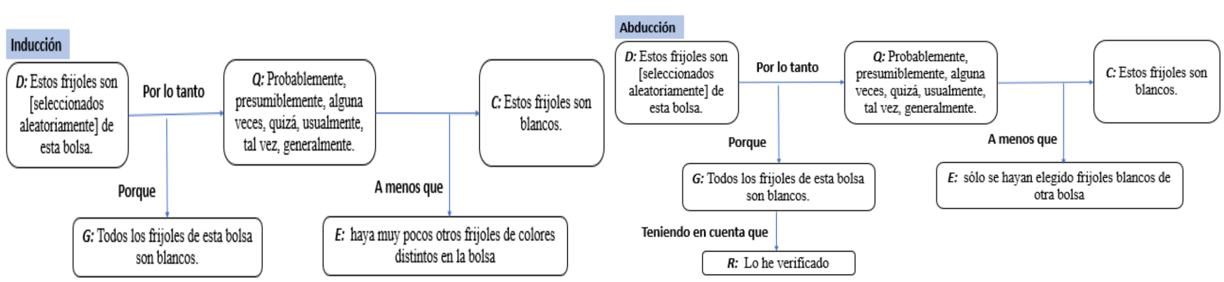


Figura 2. Ejemplos de inferencias utilizando el modelo unificado (Jeannotte, 2015)

Método

Las producciones analizadas provienen de la implementación de un plan de clase previsto transversalmente para estudiantes de kínder a cuarto básico durante los años 2020 y 2021 en tres instituciones escolares de Chile. Tanto la trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el RII, como el resumen de las actividades puede encontrarse en Estrella et al. (2022b). Los estudiantes participantes experimentaron una actividad previa en la cual emplearon lenguaje probabilístico en la realización de juegos aleatorios sin enseñanza previa. La situación denominada “El juego de la carrera de ranitas” se basa en el experimento aleatorio "lanzar dos monedas”, y privilegia la experimentación al manipular material concreto y requiere el registro de los resultados de los lanzamientos en una tabla de datos. Antes de iniciar el juego, cada jugador elige una rana que presupone que podría llegar a la meta antes que las otras dos. El juego termina cuando en el tablero una de las ranas haya conseguido llegar a la meta. Para esta experiencia se tomaron cuatro juegos por estudiante. Culminadas varias carreras y teniendo en cuenta los datos registrados, la pregunta orientadora fue “Si jugaras más veces ¿Cuál ranita escogerías? ¿Por qué?”. Esta pregunta tenía como propósito que los estudiantes generaran una inferencia estadística informal argumentando con evidencia basada en los datos de las muestras obtenidas (la tarea central puede consultarse en Estrella et al., 2022a).

Basado en el consenso entre los autores se adopta un enfoque cualitativo, descriptivo-interpretativo, analizando los diálogos transcritos de grabaciones de video. En particular, se ejemplifica a partir de dos casos la estructura argumental de las inferencias estadísticas informales producidas por dos estudiantes de grado 3, empleando los modelos Toulmin y Peirce unificados.

Resultados y Discusión

Dado que el interés se centra en comparar algunas de las estructuras de argumentación que surgieron en la experiencia, los episodios son extraídos de Estrella et al. (2022b) y se ilustrará a partir de los esquemas (Figura 3 y Figura 4) los aspectos estructurales manifestados en el RII de los estudiantes.

Caso de Ana. El siguiente episodio muestra que la estudiante detecta el suceso que tiene frecuencia máxima. A medida que aumenta el número de muestras ella persiste en su predicción [elegir siempre azul], (Dato en esquema Figura 3), que da cuenta de su nivel confianza en la regularidad determinando su posibilidad de ocurrencia; ella ha explicitado “es más probable que cayera cara y sello”, y constata la variación muestral al expresar “pero me equivoqué”.

Profesora: ¿Siempre elegiste la azul? ¿Por qué?
Ana: Si, porque pensé que era más probable que cayera cara y sello, distintos, en vez de que cayeran otros. Pero me equivoqué … [contrasta con sus predicciones anteriores]
Profesora: ¿dónde te equivocaste?
Ana: en el segundo juego.
Profesora: ¿qué pasó en el segundo juego?
Ana: Yo había elegido la azul y ganó la ranita rosa [contrasta la predicción y percibe la variación muestral e impredecibilidad]
Profesora: Entonces, ¿cuál sería la ranita que tuvo menos posibilidades de ganar en tus juegos?
Ana: La ranita naranja [menos posibilidades]

Caso de Oscar. El siguiente episodio refleja como el estudiante ha reconocido una regularidad “es más probable que salga cara y sello más seguido” y expresa la confianza sobre la ocurrencia futura del suceso usando lenguaje con incertidumbre “porque es más probable”. De esta forma generaliza (argumentando su decisión más allá de los datos de los que dispone) basándose en las muestras obtenidas en cada uno de los juegos.

Profesora: ¿Me puedes decir cuál fue la ranita que tú elegiste en el juego 1?
Oscar: la azul

Profesora: Ya y ¿por qué tú elegiste esa ranita?
Oscar: porque algunas veces sale sello y cara
Profesora: Vamos a revisar el otro juego que tu realizaste que fue el juego 4 ¿Qué ranita elegiste posible ganadora?
O: La rosada
Profesora: ¿y cuál fue la que ganó?
O: La azul
Profesora: y ¿qué paso cuando cambiaste de color?
O: Perdí (no acierta en la predicción, contrasta)
Profesora: y ¿quién ganó?
O: La azul
Profesora: Si jugaras más veces ¿Cuál ranita escogerías? ¿Por qué?
Oscar: Escogería la azul. Porque hay más posibilidades que salga cara y sello más seguido.

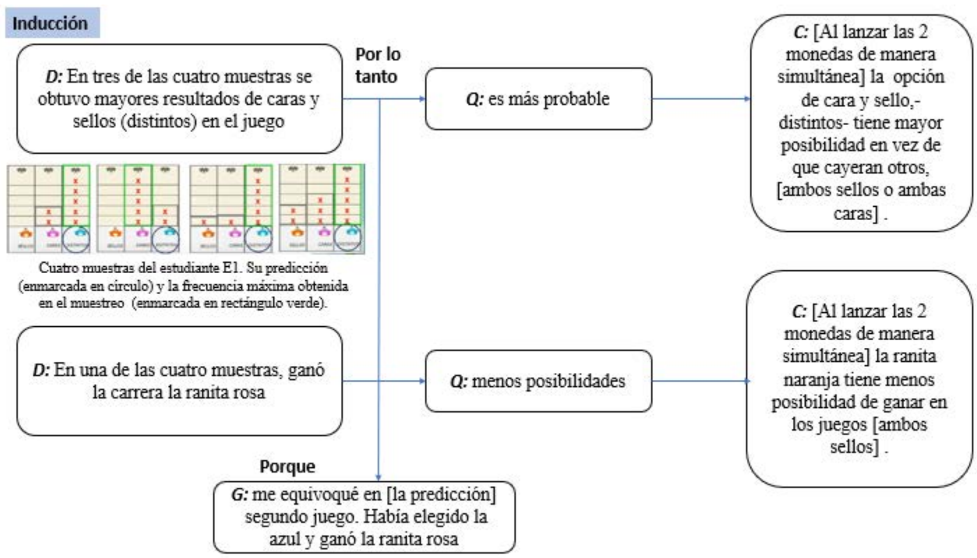


Figura 3. Aspectos estructurales manifestados en el razonamiento inferencial informal de Ana

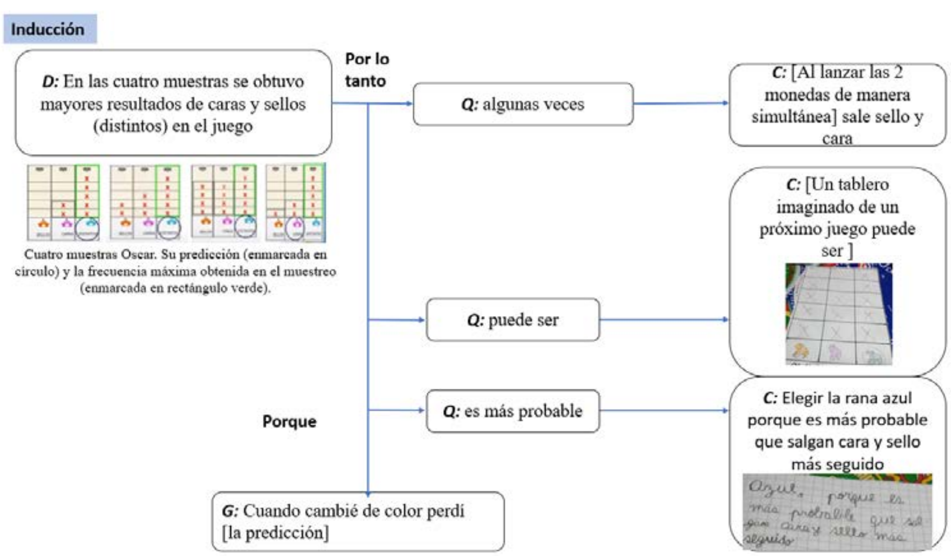


Figura 4. Aspectos estructurales manifestados en el razonamiento inferencial informal de Oscar

El aspecto estructural ha permitido analizar cada uno de los pasos elementales del razonamiento inferencial informal de los estudiantes, estos hallazgos se corresponden por los reportados en Jeannotte y Kieran (2017), y permite distinguir diversos pasos elementales del razonamiento. Desde un punto de vista commognitivo, destacan las reglas de construcción del discurso cuando se generan inferencias estadísticas informales; y acentúa en la naturaleza de la conclusión, el valor epistémico que se le atribuye a las conclusiones en situaciones de incertidumbre que requieren el uso de expresiones probabilísticas con modalizadores discursivos "***Q***" como los señalados en la figura 2.

Si bien es necesario analizar el aspecto estructural de las inferencias informales generadas por los estudiantes, este reporte sólo constituye un avance parcial en el análisis del razonamiento inferencial informal como actividad discursiva, se proyecta entonces profundizar en algunos aspectos procesuales ligados a las predicciones, conjeturas, hipótesis y generalizaciones derivadas del RII en ambientes de incertidumbre y toma de decisiones.

Referencias y bibliografía

Abu-Ghalyoun, O. (2021). Pre-service teachers' difficulties in reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(3), 553–577. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10067-8

Aridor, K., & Ben-Zvi, D. (2017). The co-emergence of aggregate and modelling reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *16*(2), 38–63. https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.184

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM*, *44*(7), 913–925. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3

Ben-Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe. In *Proceedings ofthe Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5).* University of Warwick, UK.

de Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R., & van Oers, B. (2018). The development of informal statistical inference content knowledge of pre-service primary school teachers during a teacher college intervention. *Educational Studies in Mathematics, 99*(2), 217–234. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9823-6

Estrella, S., Mendez-Reina, M. & Vidal-Szabó, P. (2022b). *Online experiences with early statistics: third-graders' informal inferential arguments* [Manuscript submitted for publication]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Estrella, S., Mendez-Reina, M., Olfos, R., & Aguilera, J. (2022a). Early statistics in kindergarten: analysis of an educator's pedagogical content knowledge in lessons promoting informal inferential reasoning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *11*(1), 1–13.

Fischbein, E. (1987/2002). Intuition in science and mathematics. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6

Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and Context in the Emergence of Students' Informal Inferential Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1–2), 87–108. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538295

Gómez-Blancarte, A., & Tobías-Lara, M. G. (2018). Using the Toulmin model of argumentation to validate students' inferential reasoning. In M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Looking Back, Looking Forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-10),* Kyoto, Japan. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Jeannotte, D. (2015). *Mathematical reasoning: a conceptual model for learning and teaching at the primary and secondary levels of schooling.* (Unpublished doctoral dissertation). Université du Québec à Montréal.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–12. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kollosche, D. (2021). Styles of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(3), 471–486. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10046-z

Konold, C., Higgins, T., Russell, S.J., & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 305–325. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8

Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E., & Jansem, S. (2011). The role of context expertise when comparing groups. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1–2), 47–67. https://doi.org//10.1080/10986065.2011.538620

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82–105.

Makar, K., & Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1), 152–173. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301

Pedemonte, B., &t Reid, D. A. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 281–303.

Peirce, C. S. (n.d.). The collected papers of Charles Sanders Peirce (Electronic ed.). Charlottesville: InteLex Past Master. Retrieved from http://library.nlx.com/xtf/view?docId=peirce/peirce.00.xml;chunk.id=div.peirce.pmpreface.1;toc.depth=1;toc.id=div.peirce.pmpreface.1;brand=default&fragment_id=.

Pfannkuch, M. (2006, July 2–7). Informal inferential reasoning. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching of Statistics* (CD-ROM), Salvador, Bahia, Brazil.

Pfannkuch, M., Wild, C., & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM*, *44*(7), 899–911. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0446-6

Rossman, A. (2008). Reasoning about Informal Statistical Inference: One Statistician's View. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2). 5–19.

Shaughnessy, J. M. (2019). Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective from Curriculum and Research. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *18*, 44–58.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40–58.

Razonamiento matemático de un profesor de secundaria en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos

Karina **Nuñez-Gutierrez**
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
kgutierrez@uagro.mx
Guadalupe **Cabañas-Sánchez**
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas@uagro.mx

Resumen

El objetivo de la investigación es caracterizar el razonamiento matemático basado en los argumentos emergentes de un profesor de matemáticas de secundaria en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos figurales y numéricos. Nos sustentamos en una propuesta teórica-metodológica que articula el modelo argumentativo de Toulmin, para delimitar el razonamiento a partir de los argumentos del profesor. Los resultados evidencian que el razonamiento matemático del profesor en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos se fundamenta en acciones como la descomposición figural y numérica, conteos estratégicos, reconocimiento del comportamiento del patrón figural, formulación, verificación y validación de conjeturas.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza; Algebra; México.

Introducción

El razonamiento es uno de los procesos cognitivos importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el currículo escolar, es considerado como una habilidad o competencia que debe ser desarrollada en todos los niveles escolares y se vincula con actividades matemáticas como la exploración, conjeturación, argumentación y generalización (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000). Desde esta postura, el profesor de matemáticas es quien asume la responsabilidad sobre el desarrollo del razonamiento en sus estudiantes desde la argumentación (Rapanta, 2018). No obstante, los estudios enfocados en el profesor han reportado dificultades sobre el razonamiento matemático y cómo desarrollarlo en sus estudiantes (Clarke et al., 2012).

Uno de los ámbitos en los que se ha estudiado el razonamiento matemático consisten en el abductivo, inductivo y deductivo (Arce y Conejo, 2019; Conner et al., 2014; Soler-Álvarez y Manrique, 2014), que, en su mayoría, han evidenciado procesos cognitivos evidenciados por estudiantes de diferentes grados escolares y profesores de matemáticas en formación en el contexto de la aritmética o geometría. Sin embargo, no ha ocurrido lo mismo con el estudio de estas formas de razonamiento sobre el profesor de matemáticas en servicio.

Además, uno de los contextos que favorece el estudio del razonamiento es el de generalización porque promueve la formulación y justificación de de conjeturas a través del estudio de patrones matemáticos (Rivera, 2013; Mata-Pereira y Ponte, 2017). Si se espera que los estudiantes generalicen y justifiquen en distintos contextos matemáticos, entonces es importante comprender el razonamiento de los profesores quienes promueven el desarrollo de estas habilidades (Kirwan, 2015). En este sentido, el objetivo de la investigación consiste en caracterizar el razonamiento matemático a partir de los argumentos de un profesor de matemáticas de secundaria (PMS) en servicio al resolver tareas de generalización de patrones cuadráticos en el contexto figural y numérico.

Marco conceptual

Razonamiento Matemático

En esta investigación, se entiende como cualquier acción o procedimiento que permite obtener una nueva información (Saorin et al., 2019; Torregrosa et al., 2010). Se relaciona con otros procesos, como la inferencia, justificación y generalización (McCluskey et al., 2016).

Argumentación y argumento

La argumentación es un proceso secuencial que permite inferir conclusiones desde unas premisas, por medio de la comunicación interactiva entre personas (Toulmin, 1958/2003). El razonamiento matemático, agrupa un conjunto de argumentos basado en una serie de proposiciones que implica una conclusión inferida de los datos (Toulmin, Rieke y Janik, 1984). El argumento es una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que inicia con los datos (D) hasta establecer una conclusión (C). El movimiento de la evidencia a la conclusión es la certeza de que la línea argumentativa se ha realizado exitosamente, movimiento o conexión que es permitido por la garantía (G), que a su vez tiene un respaldo o soporte (S), un cualificador modal (Q) que indica el grado de fuerza o probabilidad de la aserción y ocasionalmente, pueden presentarse objeciones o refutaciones (R). Para el análisis del contenido de las argumentaciones se considera el Modelo de Toulmin (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007) (ver Figura 1).

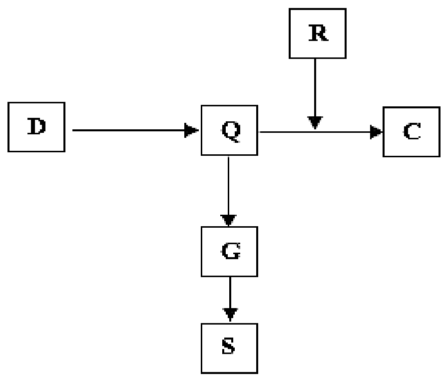


Figura 1. Modelo argumentativo de Toulim (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007).

El estudio de los argumentos se fundamenta en el modelo básico de Toulmin (ver Figura 2) que refiere al núcleo del argumento. Esta estructura permite identificar la tipología de razonamiento matemático.

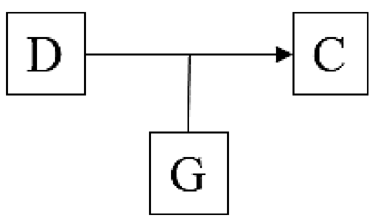
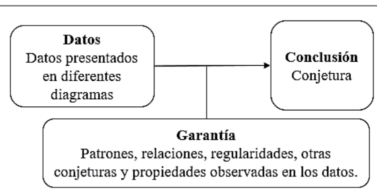
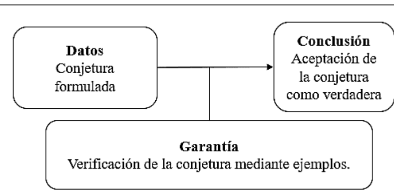
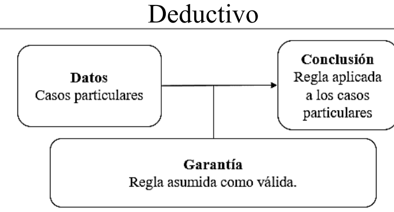


Figura 2. Modelo argumentativo básico de Toulmin.

Tipos de Razonamiento

Se clasifica en tres tipos: abductivo, inductivo y deductivo. La *abducción* y la *inducción* representan un razonamiento plausible y experimental, apoyados en la formulación y verificación de conjeturas mientras que la *deducción*, consiste en la validación de la conjetura para garantizar su veracidad (Polya, 1966). Para la identificación y caracterización de los tipos de razonamiento matemático se adopta la propuesta teórica-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014) (ver Tabla 1).

Tabla 1
Esquemas generales de los tipos de Razonamiento Matemáticos (Soler-Álvarez y Manríque, 2014)

Abductivo	Inductivo	Deductivo
		

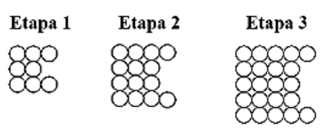
Generalización

Consiste en el proceso de identificación de un comportamiento regular en algunos casos particulares de una sucesión, con el fin de extender esa regularidad reconocida y construir una expresión o regla general, que represente y relacione todos los términos de la sucesión (Radford, 2008).

Metodología

Es un estudio de caso cualitativo (Merriam y Tisdell, 2015). Se desarrolló a través de un curso-taller (CT) en modalidad virtual. Participaron dieciséis profesores de matemáticas de secundaria (PMS) de tres países de Latinoamérica. Uno de los profesores fue seleccionado para el análisis de la unidad del estudio de caso. Su selección atendió los criterios siguientes: a) participación voluntaria en la investigación, b) resolver las tareas de generalización de patrones cuadrático y c) participar en una entrevista semiestructurada. Para objetivos de este artículo, el análisis lo centramos en dos de las tareas (ver Tabla 2).

Tabla 2
Tarea de generalización de patrones cuadráticas

Tarea Figural (T1)	Tarea Numérica (T2)
En la construcción de un patio, se colocan piedras circulares de igual tamaño. Para observar el avance que sigue la construcción, se toma una foto al patio por etapa.  a. ¿Cuántas piedras circulares se han colocado para la sexta etapa si en la construcción del patio se avanza de la misma manera? Justifica tu respuesta. b. ¿Cuántas para la etapa 50? Justifica tu respuesta. c. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de piedras circulares para cualquier número de etapa? Argumenta tu respuesta.	Se tiene la sucesión de números: 2 6 __ __ 30 42 __ 72 90 __ ... a. Determine los términos que hacen falta de la sucesión. b. Encuentre el número que estará en la posición 145 de esta sucesión.

Resultados

Se identificaron tres formas del razonamiento matemático en el profesor al resolver las tareas de generalización de patrones cuadráticos. Los argumentos del PMS evidenciaron el *razonamiento abductivo* en el contexto figural y numérico, caracterizado por el estudio inicial de los casos particulares dados en las tareas hasta la formulación de una conjetura de forma numérica y/o algebraica, como regla plausible, que le permitió representar el comportamiento del patrón cuadrático (ver Tabla 3). Dentro del proceso abductivo, se destacaron acciones en las que el PMS transitó en la construcción de la conjetura como la visualización, el conteo, descomposición figural y numérica de los patrones. En el *razonamiento inductivo,* los argumentos del PMS se caracterizaron por la verificación de la conjetura en los casos conocidos en ambos contextos y el *razonamiento deductivo*, por la validación de la conjetura verificada en casos particulares conocidos y nuevos.

Tabla 3
Conjeturas formuladas por el profesor

Tarea	Conjeturas
Figural	$a_n = 2(n+2) + n(n+1),$
Numérica	$a_n = n(n+1),$

Por ejemplo, en el contexto numérico, el profesor explicó que enumeró las posiciones de los términos k-ésimo de la sucesión e inmediatamente con los términos k-ésimo conocidos, realizó *descomposiciones aritméticas* relacionando el término k-ésimo con el número de su posición (ver Figura 3).

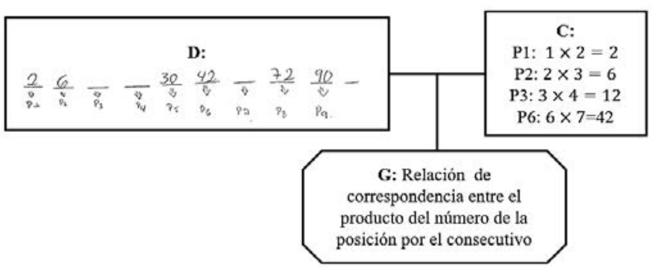


Figura 3. Argumento abductivo del profesor en la tarea numérica.

Esto le permitió establecer que “cada término de la sucesión representa el producto de esa posición con la siguiente” y realizar una conversión de la conjetura del sistema numérico al sistema algebraico. La conjetura formulada es de la forma $a_n = n(n+1)$, donde *n* es la posición del término k-ésimo de la sucesión numérica.

En el razonamiento inductivo, el profesor argumenta que la conjetura que formuló abductivamente era verdadera, a partir de la sustitución de la conjetura en etapas conocidas. Al reconocer la validez de su conjetura, concluye que la expresión matemática de la forma $a_n = n(n+1)$, representa el comportamiento de la sucesión numérica (ver Figura 4).

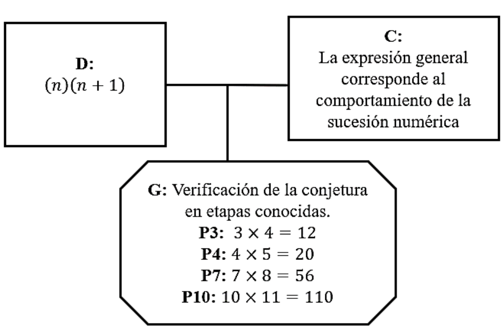


Figura 4. Argumento inductivo del profesor en la tarea numérica.

En el contexto figural, el razonamiento deductivo se caracterizó de la aplicación de la regla general (conjetura asumida como verdadera) en casos particulares conocidos y nuevos. El profesor usó deductivamente la regla general para etapas cercanas y lejanas para responder las cuestiones sobre la etapa 6 y 50. Se reconoce que el razonamiento deductivo de P1, se evidencia a través del uso de la regla general, por medio de sustituciones en la regla general $a_n = 2(n + 2) + (n(n + 1))$.

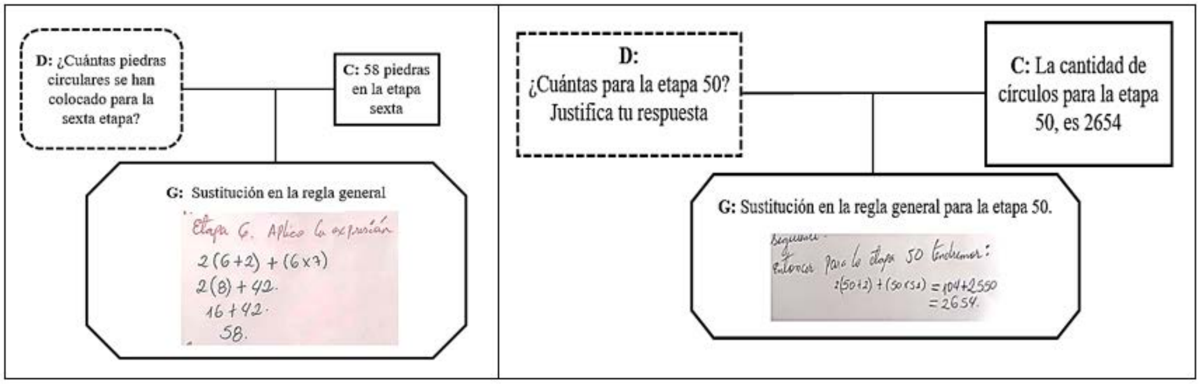


Figura 5. Argumentos deductivo del profesor en la tarea figural.

Reflexiones

El razonamiento matemático que evidencia el PMS permite caracterizar el proceso del pensamiento regulado por acciones mentales y relacionarse con una tipología del razonamiento (abducción, inducción y deducción). El contexto de la generalización de patrones facilitó que el profesor evidenciará distintas acciones para resolver las tareas en el contexto figural y numérico, vinculados con las tres formas del razonamiento matemático. Metodológicamente, la tarea en el contexto figural y numérico facilitó la visualización en la percepción de las características del patrón y las relaciones entre los objetos matemáticos que lo conformaban. Además, favoreció diferentes formas de contar y estructurar los objetos del patrón, como manera útil para formular la conjetura (Rivera, 2013). Se reconoce que los patrones figurales al cumplir con las características de orden, equilibrio y armonía facilitan la construcción de una regla plausible y útil.

En general, se reconoce que la experiencia docente y el conocimiento profesional sobre las matemáticas, apoyados en los hechos, imágenes conceptuales y creencias (Lithner, 2006) del profesor, influyen en la elección de sus estrategias para formular, verificar y validar las conjeturas. Además, se evidenció que el profesor de matemáticas no hace su elección aleatoria de sus acciones, sino que se sustenta de sus conocimientos sobre el tema y los utiliza para responder a las demandas de la tarea, que, para su criterio, es el método más preciso y rápido.

Referencias y bibliografía

Arce, M., & Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). Valladolid: SEIEM.

Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom, 17*(3), 28–32.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Kirwan, J. (2015). Preservice Secondary Mathematics Teachers Knowledge of Generalization and Justification on Geometric-Numerical Patterning Tasks. Springfield, Illinois: Theses and Dissertations. Paper 392.

McCluskey, C., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2016). The Role of Reasoning in the Australian Curriculum: Mathematics. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Technos-Madrid.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 83–96.

Rapanta, C. (2018). Teaching as Abductive Reasoning: The Role of Argumentation. *Informal Logic*, 38(2), 184-311.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical*, *73*(3), 297–328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Pattern in School Mathematics*. Springer.

Saorín, A., Torregrosa, G., & Quesada, H. (2019). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 213-244.

Soler-Álvarez, M., & Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias*, *2*(32), 191-219.

Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.

Toulmin, S. E. (1958). *The philosophy of science* (Vol. 14). Genesis Publishing Pvt Ltd.

Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument. In *Cambridge University Press*.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York London: Macmillan; Collier Macmillan Publishers

Recorrido histórico de la evolución del estudio de los intervalos de confianza en el currículo de Chile

Exequiel **Llanos** Lagos
Facultad de Educación, Universidad San Sebastián
Chile
exequiel.llanos@gmail.com
Jesús Guadalupe **Lugo-Armenta**
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos
Chile
jesus.lugo@ulagos.cl
Luis R. **Pino-Fan**
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

La siguiente comunicación tiene como propósito presentar los resultados de un estudio sobre el tratamiento del intervalo de confianza desde su incorporación al currículo de matemáticas de Chile. Para llevar a cabo esta investigación se han utilizado herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), como las nociones de práctica matemática y configuración ontosemiótica, para analizar cómo son presentados los intervalos de confianza y el tratamiento que se les ha dado en el currículo. Los resultados muestran que se carece de congruencia en el tratamiento de los intervalos de confianza desde su incorporación en el currículo hasta la actualidad, por ejemplo, en cómo ha sido definido; además, en el texto vigente se observa que se favorecen aspectos procedimentales, en lugar de una comprensión holística del intervalo de confianza y las nociones relacionadas con él.

Palabras claves: Educación matemática; Análisis de textos; Enfoque Ontosemiótico; Inferencia estadística; Intervalo de confianza; Significados.

Introducción

En las últimas décadas, la incorporación de la estadística en la educación ha sido fundamental dada la relevancia que esta disciplina ha cobrado en la vida laboral y cotidiana de un número cada vez mayor de personas. A principios del siglo XX, la estadística, se utilizaba en aplicaciones vinculadas a las ciencias y, posteriormente, se fue incorporando gradualmente en la enseñanza de los distintos niveles educativos. Perry (1900), citado en International Handbook of Research in Statistics Education, propuso un plan de estudio para que las escuelas británicas consideraran en el currículo la interpolación y errores probables. Los Estándares de currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) delimitaron los contenidos y objetivos en los planes y programas de Estados Unidos. Del mismo modo, este fenómeno se observa en Chile, debido a que en el año 1992 se comienza a incorporar contenidos de estadística descriptiva y probabilidad en los niveles de 8º básico y 4º medio. Es así como el sistema educacional chileno se ha ido adecuando y ajustando a las necesidades de la sociedad, y esto se puede observar con la creciente incorporación de contenidos y habilidades que busca desarrollar en el eje temático de estadística y probabilidad.

Las nuevas tendencias y habilidades del siglo XXI buscan formar ciudadanos críticos, que puedan tomar decisiones y realizar predicciones. La inferencia estadística es uno de los tópicos que contribuyen al desarrollo de habilidades para tomar de decisiones y realizar predicciones fundamentadas. Quintana (1989), menciona que este tópico resuelve dos tipos de problemas, el primero, refiere a la estimación de una o varias características de la población, destacando que la estimación se separa en la del tipo puntual y otra por intervalos de confianza (IC); y el segundo, permite corroborar hipótesis acerca de características de la población. Asimismo, Wild, Utts y Horton (2018), indican que la naturaleza de la inferencia estadística es la extrapolación de datos para llegar a conclusiones sobre un todo, refiriéndose a una realidad más amplia. En la actualidad, se ha incorporado la estadística inferencial en los programas de estudios de educación media de diversos países (e.g., Chile, España y Australia).

En Chile, en el año 2009 se incorporó en los programas de estudios contenidos referidos a la inferencia estadística, como los intervalos de confianza (IC), siendo una noción clave para predecir características de la población mediante una muestra. La necesidad de incluir los IC en el currículo chileno se debe a su importancia y los usos que tienen en áreas donde se requieren estimaciones cuantitativas que permiten realizar inferencias con un mayor grado de certeza. A pesar de la gran utilidad de los IC, su estudio no ha estado exento de errores y dificultades tal como lo han reportado diversas investigaciones (e.g., Behar, 2001; Olivo, Ortiz y Batanero, 2008).

En lo que respecta al aprendizaje sobre los IC, las investigaciones han reportado que tanto estudiantes como profesores presentan dificultades para comprenderlos. Específicamente, Olivo, Ortiz y Batanero (2007), señalan que una de las complejidades del significado del IC es identificar si se está considerando como un concepto o como un procedimiento, así como dificultades respecto a las propiedades que están asociadas a la noción de estudio (variación del ancho del intervalo y el tamaño muestral) y a los procedimientos; por ejemplo, al escoger el tipo de distribución que debe asociarse a la construcción del intervalo.

Otros estudios han identificado que el principal error que cometen los estudiantes es confundir el estadístico con el parámetro (e.g., Behar, 2001; delMas, Garfield, Ooms y Chance, 2007; Olivo, Ortiz y Batanero, 2007), errores asociados a la interpretación del IC y, dificultades con el error asociado y la amplitud del intervalo (Flider y Cumming, 2005; Yáñez y Behar, 2009; Harradine et al., 2011; López-Martín, Batanero y Gea, 2019). López-Martín, Batanero y Gea (2009), detectaron que los futuros profesores conocen los errores que podrían cometer sus estudiantes en inferencia estadística, sin embargo, los profesores describen los posibles errores con poca precisión; esto puede deberse a que su conocimiento es todavía escaso respecto al tema.

En vista de lo mencionado anteriormente, se observa que al ser un eje que se ha incorporado en las últimas décadas en los currículos escolares, existen dificultades tanto para los estudiantes como para los profesores en formación en el estudio de los IC. Un instrumento que comparten tanto profesores como estudiantes que, a su vez, es el reflejo del conocimiento pretendido por los programas de estudios, son los libros de textos escolares. Es por ello, que nos preguntamos ¿cómo ha sido el tratamiento de los IC desde que se abordan por primera vez en el currículo chileno –programas de estudio y textos escolares– hasta los documentos que se encuentra vigentes actualmente?

Marco teórico

Para el desarrollo de esta investigación utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, debido a que nos permiten analizar los elementos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas de los IC presentes en los programas de estudio y libros de textos escolares. Entendemos por práctica matemática "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). El análisis pormenorizado de la práctica matemática lo realizamos mediante la configuración ontosemiótica, la cual nos permite identificar los objetos matemáticos primarios –situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, elementos lingüísticos, procedimientos y argumentos– que intervienen en dichas prácticas matemáticas.

Del mismo modo, el EOS proporciona herramientas para evidenciar los tipos de significados, los que provienen de prácticas que son de índole operativas y discursivas, de estas se distinguen las de carácter personal e institucional (e.g., Lugo-Armenta et al., 2021a; 2021b). Respecto a este último, Godino y Batanero (1994) definen como sistema de prácticas institucionales aquellas que emergen en un momento dado desde un campo de problemas, y Godino y Font (2007) declaran cuatro tipos, siendo éstos el implementado (es un proceso de estudio específico), evaluado (es un subsistema que se medirá), pretendido (referido al que se planifica) y el referencial (es utilizado como referente para elaborar uno pretendido).

Metodología

Esta investigación se realizará bajo un enfoque cualitativo; de acuerdo con Corbetta (2009), la "investigación cualitativa [esta] inspirada en el paradigma interpretativo, la relación que existe entre la teoría e investigación es abierta, interactiva" (p. 41).

Para llevar a cabo el estudio, fueron seleccionados los períodos en que se han realizado ajustes curriculares en los programas de estudios en Chile, principalmente los correspondientes a los años 1998-2009, 2009-2019 y del 2019 a la actualidad. Por lo tanto, se analizaron los libros de textos escolares que incorporan el tópico de Intervalos de Confianza, siendo un total de 5 textos que se han utilizado desde el año 2005 al 2022, en particular, se identifican y caracterizan los objetos matemáticos primarios que intervienen en el tratamiento de los IC.

Análisis epistémico

A continuación, por cuestiones de espacio, se presentan algunos de los resultados del análisis del tratamiento de los IC de los textos escolares desde el 2005 a la fecha. En la *Figura 1* se resumen las nociones que se encuentran relacionadas con el IC, a las cuales se hace alusión en la definición del IC presente en los textos escolares.

	Definición del I.C	Estimador	Parámetro	Nivel de confianza	Error asociado	Coeficiente asociado al nivel de confianza	Amplitud del intervalo	Probabilidad asociada
Texto escolar, 4to medio, 2005 – 2006.	✓	✓	✓		✓			
Texto escolar, 4to medio, 2007 – 2010.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4to medio, 2011 – 2012.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4to medio, 2013 – 2019.	✓	✓		✓			✓	✓
Texto escolar, 3ro – 4to medio, 2020 a la actualidad.	✓			✓	✓		✓	✓

Figura 1. Nociones relacionadas con el IC que se encuentran presentes en su definición en los textos escolares desde el 2005 al 2022.

Es importante destacar que no existe congruencia en las nociones que debe presentar la definición, lo que más se resalta es el nivel de confianza y la probabilidad asociada. Sin embargo, en el texto actual (texto escolar de tercero y cuarto medio) no se define el estimador y el parámetro, siendo estos dos conceptos claves para interpretar e inferir información desde una muestra hacia una población de estudio.

Otro aspecto por destacar es que, desde el año 2005 al 2012, se utilizaba la noción de parámetro para referirse al nivel de confianza, en efecto, a partir de una probabilidad dada se relacionaba con un valor numérico fijo (constante k), lo que carece de que éste sea relacionado con una distribución de probabilidad.

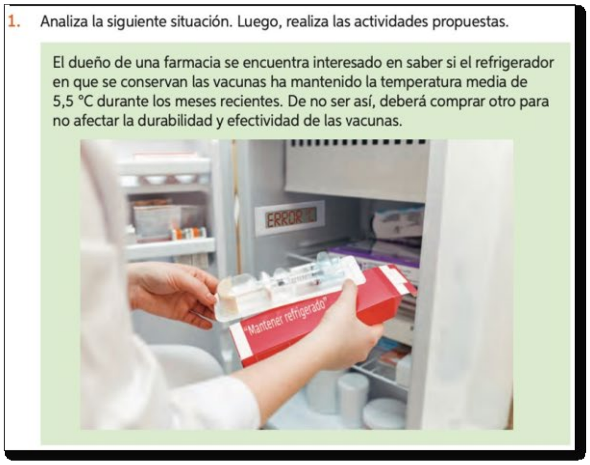
En lo que respecta a la propiedad/proposición del IC, se aprecia que en diversos períodos de los textos escolares tenemos objetos matemáticos asociados, tales como, parámetro, rango, intervalo, nivel de confianza y probabilidad. En los períodos 2005 – 2006 y 2013 –2019, se valoriza el grado de certidumbre asociado a una probabilidad de que se encuentre el valor del parámetro en el intervalo. Sin embargo, en los otros períodos no se integra el nivel de confianza y significancia. Otro aspecto observado es como es presentada la propiedad/proposición utilizada en los textos escolares (*Figura 2*).

Año del texto escolar	Escrituras utilizadas para representar un intervalo de confianza
2005 – 2006	$\bar{X} - z\frac{\sigma_M}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + z\frac{\sigma_M}{\sqrt{N}}$ $\left[\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}}\ ;\ \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}}\right]$
2007 – 2010	$\bar{x} \pm k\frac{s}{\sqrt{n}}$ $[\bar{x} - \mathrm{E}, \bar{x} + \mathrm{E}]$ siendo $\mathrm{E} = k\frac{s}{\sqrt{n}}$ (error).
2011 – 2012	$\left[\bar{x} - k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
2013 – 2019	$\left[\bar{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
2020 – a la actualidad	$\left(\bar{x} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Figura 2. Tratamiento en la propiedad/proposición del IC para estimar la media presente en los textos escolares.

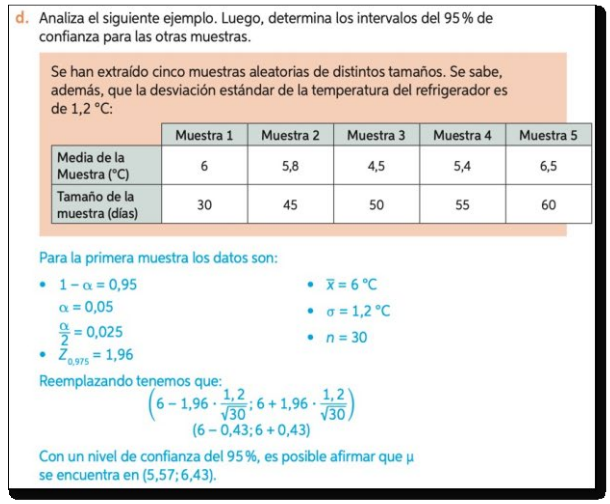
En la Figura 2 podemos apreciar que existen distintos conceptos asociados en las propiedades/proposiciones del IC; por ejemplo, del año 2005 al 2019 se observa que para el coeficiente de confianza se utilizan las nomenclaturas de z, k, $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, y actualmente se evidencia como $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$. Las dos primeras son utilizadas por medio de valores dados que provienen de una tabla, y los últimos dos son asociados a la distribución normal y su tabla de probabilidades, en este último caso el estudiante tendría que asociar nociones como nivel de confianza, significancia, distribuciones de probabilidad y estadístico. Por otro lado, la desviación estándar difiere bastante y llevan a diversos significados que pueden emergen, confundiendo el representante con el representado; en particular se utilizan las nomenclaturas σ_M, s y σ, en orden correlativo se tienden a confundir con distribuciones muestrales, distribución muestral y distribución poblacional. Cada una de estas acepciones de la desviación estándar se pueden utilizar en los intervalos de confianza para la media, sin embargo, cuál de ellas se utiliza depende de que se cumpla con ciertas condiciones en el problema resolver.

Respecto al tratamiento que se le da al IC en el texto escolar vigente observamos que es de carácter procedimental, dejando de lado las interpretaciones que podrían realizarse a partir del intervalo de confianza formado, lo cual contrasta con el objetivo curricular que es inferir información (ver Figura 3).



1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades propuestas.

El dueño de una farmacia se encuentra interesado en saber si el refrigerador en que se conservan las vacunas ha mantenido la temperatura media de 5,5 °C durante los meses recientes. De no ser así, deberá comprar otro para no afectar la durabilidad y efectividad de las vacunas.



d. Analiza el siguiente ejemplo. Luego, determina los intervalos del 95% de confianza para las otras muestras.

Se han extraído cinco muestras aleatorias de distintos tamaños. Se sabe, además, que la desviación estándar de la temperatura del refrigerador es de 1,2 °C:

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5
Media de la Muestra (°C)	6	5,8	4,5	5,4	6,5
Tamaño de la muestra (días)	30	45	50	55	60

Para la primera muestra los datos son:

- $1-\alpha = 0{,}95$
  $\alpha = 0{,}05$
  $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$
- $Z_{0{,}975} = 1{,}96$
- $\bar{x} = 6$ °C
- $\sigma = 1{,}2$ °C
- $n = 30$

Reemplazando tenemos que:

$$\left(6 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{30}}; 6 + 1{,}96 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{30}}\right)$$
$$(6 - 0{,}43; 6 + 0{,}43)$$

Con un nivel de confianza del 95%, es posible afirmar que μ se encuentra en (5,57; 6,43).

Figura 3. Ejemplo del libro de texto escolar de 3-4 medio, 2019.

La situación/problema presentado para introducir al IC en el texto vigente está enfocada al área de la salud y busca determinar si un refrigerador está apto para mantener una temperatura media para no afectar la durabilidad y efectividad de las vacunas. El procedimiento utilizado para encontrar el IC y posterior respuesta, dan cuenta que se utiliza más bien como una aplicación de una serie de pasos a seguir, debido a que en la respuesta no se propicia una inferencia contextualizada y articulada con un argumento estadístico.
Como podemos ver en la Figura 3, para verificar si se cumple la condición que desea observar el dueño de la farmacia se entregan 5 muestras y para cada una de ellas se solicita determinar un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95%. En la respuesta experta presentada en el libro del texto escolar se afirma que el valor de μ se encuentra en el intervalo encontrado, el cual, corresponde a $(5{,}57; 6{,}43)$ y, prosigue indicando que con un nivel de confianza del 95% el valor de μ se encuentra entre dichos valores, sin embargo, lo anterior no es congruente con el parámetro μ que es 5,5 ºC, debido a que no pertenece al intervalo determinado.

A continuación, en la Figura 4, presentamos de manera sucinta la configuración ontosemiótica observada en la práctica matemática que presenta el libro de texto para dar respuesta a la situación/problema previamente descrito:

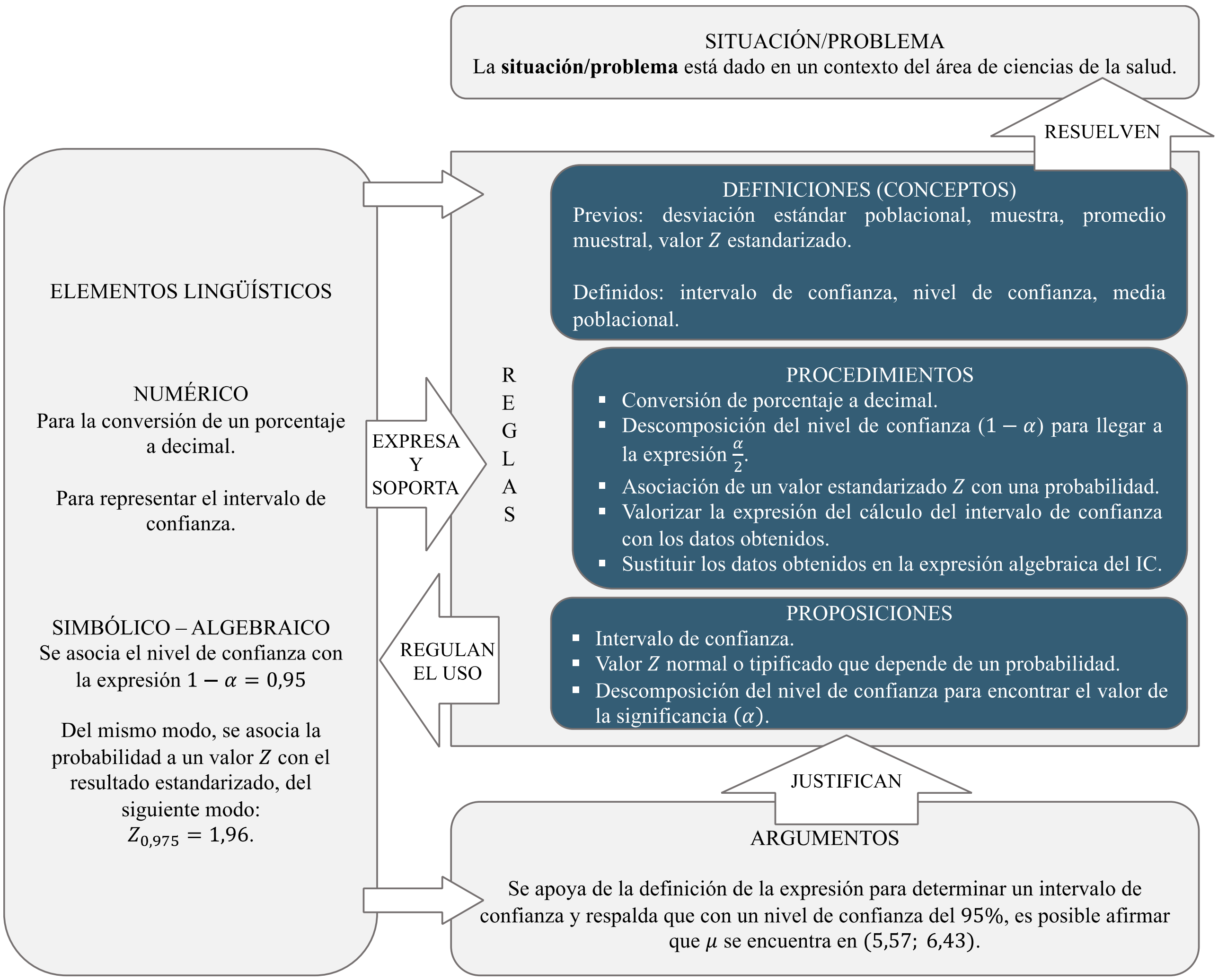


Figura 4. Configuración epistémica del ejemplo del libro de texto escolar de 3-4 medio, 2019.

En función a lo observado en la práctica matemática presentada en el libro de texto vigente, se generan las siguientes interrogantes: ¿qué sucede cuándo el valor a priori pretendido no se encuentra en el intervalo encontrado?, ¿cómo se debería interpretar?, y en un aspecto más general, ¿cuál es el grado de certidumbre e incertidumbre que genera un intervalo de confianza?

Conclusiones

En síntesis, se aprecia que desde la incorporación de los intervalos de confianza en los programas de estudios y textos escolares de Chile, los diferentes objetos matemáticos primarios involucrados en la configuración ontosemiótica han variado, por ejemplo, los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones y propiedades/proposiciones utilizadas en el tratamiento de los intervalos de confianza. Aún se debe seguir ahondando en por qué las diferencias y su representatividad respecto de los significados de referencia de los IC.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt Regular Nº1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias y bibliografía

Behar, R. (2001), *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.

Corbetta, P. (2009). *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill.

delMas, R.C., J.B. Garfield, A. Ooms y B.L. Chance (2007), "Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics", *Statistics Education Research Journal*, vol. 6, núm. 2, pp. 28-58, www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

López-Martín, M. D. M., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). ¿ Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33, 672-693.

Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. (2021a). Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student. *BOLEMA*, 35(71), 1776-1802. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25

Lugo-Armenta, J.G., & Pino-Fan, L. (2021b). Inferential reasoning of secondary school mathematics teachers on the Chi-square statistic. Mathematics, 9(19), 2416. https://doi.org/10.3390/math9192416

MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares Matemática III y IV de Educación Media*. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago, Chile.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Olivo, E., Batanero, C., & Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación matemática*, 20(3), 5-32.

Olivo, E., Ortiz, J. J., & Batanero, C. (2007). Notas históricas sobre los intervalos de confianza e implicaciones didácticas. En X Simposio de la SEIEM (p. 105).

Perry, J. (1900). The teaching of mathematics. *Nature*, 2, 317–320.

Quintana Ruiz, C. (1989). *Elementos de inferencia estadística* (No. 519.54 Q7e). EUCR.

Wild, C. J., Utts, J. M., & Horton, N. J. (2018). What is statistics?. In *International handbook of research in statistics education* (pp. 5-36). Springer, Cham.

Representación de Relaciones Funcionales por niños de cinco años. Una aproximación a las Tablas Funcionales.

M. Lourdes **Anglada**
Centro Universitario María Inmaculada de Antequera
España
lourdesanglada@eummia.es
Sandra **Fuentes**
Universidad de Granada
España
sandrafuentesm@gmail.com
María C. **Cañadas**
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es
Bárbara M. **Brizuela**
Universidad de Tufts
Estados Unidos
barbara.brizuela@tufts.edu

Resumen

El objetivo de esta investigación es observar cómo los niños organizan y representan la relación entre dos cantidades que covarían y si usan, de forma espontánea, algo similar a una tabla. Diseñamos e implementamos una tarea en un entorno de resolución de problemas contextualizados que involucraba las funciones $f(n) = n$, $f(n) = n + 2$, $f(n) = n - 1$ y $f(n) = 2n$. Realizamos entrevistas individuales a ocho niños de cinco años. Los resultados indican que cinco niños utilizaron una representación pictórica en la que hacían referencia a uno o más casos particulares y tres realizaron representaciones que se aproximaban a las tablas funcionales.

Palabras clave: Early Algebra; Educación Infantil; Pensamiento Funcional; Representación; Tablas Funcionales.

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro del *early algebra* y forma parte de una investigación sobre el pensamiento funcional en niños de cinco años. El pensamiento funcional es un modo de pensamiento algebraico cuyo foco se sitúa en las funciones, entendiendo las funciones como una relación de dependencia entre cantidades covariantes. En particular, nos centramos en la representación, una de las prácticas del *early algebra* (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008), más concretamente en las tablas funcionales.

Las tablas presentan información sobre la relación entre dos o más variables. Esto las hace adecuadas para realizar representaciones en un contexto funcional. La construcción de una tabla funcional implica identificar las variables y la relación que se establece entre ellas (Martí, 2009). Comprender la forma en que los niños utilizan las tablas puede ayudarnos a aprovechar sus habilidades al máximo (Brizuela et al., 2021).

En investigaciones previas con niños de educación infantil (Blanton y Kaput, 2004; Brizuela et al., 2021; Mulligan y Mitchelmore, 2008) estos usan y comprenden tablas funcionales en tareas que involucran funciones lineales. Se evidencia que las tablas son representaciones importantes para los niños desde los primeros grados de escolaridad.

El objetivo de nuestra investigación es analizar cómo los niños de 5 años organizan y representan la relación entre dos cantidades que covarían, y observar si en estas representaciones aparecen algunas características de las tablas convencionales.

Marco teórico y antecedentes

El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Esto implica establecer relaciones entre cantidades que covarían, realizar generalizaciones de estas relaciones y expresarlas mediante diferentes representaciones.

Una tabla es un formato de organización gráfica donde la información se organiza de acuerdo con un doble eje, horizontal y vertical, que ordena y sistematiza datos de información relacionados entre sí (Campbell-Kelly et al., 2003). En el contexto funcional, llamamos tablas funcionales a las que permiten representar la relación entre dos cantidades que covarían.

Los estudios sobre uso de tablas funcionales en educación infantil son escasos. Blanton y Kaput (2004) abordaron cómo niños de 5 años establecían una relación entre el número de perros y el número de colas, y entre el número de perros y el número de ojos. Con ayuda del maestro, todos los niños utilizaron una tabla para organizar los datos y establecieron relaciones entre las variables en esas tablas. Mulligan y Mitchelmore (2008) observaron que niños de 5 años utilizaron una tabla para representar la relación entre dos variables de forma espontánea. Brizuela et al. (2021), en un estudio de caso con un niño de 5 años centrado en cómo este usa y comprende las tablas cuando resuelve un problema que involucra una función lineal, concluye que usó y comprendió tablas. En nuestro trabajo, indagamos y describimos una aproximación al uso de las tablas funcionales por niños de cinco años españoles, quienes no tienen conocimientos previos sobre estas.

Metodología

Esta es una investigación de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010). Los participantes fueron ocho niños de último año de educación infantil (5-6 años) de un colegio concertado del sur de España. Ellos nunca habían utilizado tablas en clase.

Diseñamos e implementamos una primera sesión en la que participaron los 25 niños de la clase. A continuación, organizamos a los niños en pequeños grupos de cuatro o cinco miembros y realizamos una segunda sesión con cada grupo. Para finalizar, a ocho de los niños anteriores. En este trabajo analizamos la información de estas entrevistas. Simbolizamos a los niños con An, n=1...8. Cada entrevista duró aproximadamente 40 minutos y trabajamos de la misma forma que en las sesiones anteriores.

Trabajamos en un entorno de resolución de problemas contextualizados. En las entrevistas, el contexto fue un juego en el que dramatizamos con dos marionetas y un material manipulativo. Este material nos permitió asignar roles distintos a diferentes marionetas. Una era “Lina” y le correspondía la función $f(n) = n$. Otra era “Sara” y le correspondían las funciones $f(n) = n + 2$, $f(n) = n - 1$ y $f(n) = 2n$. Además, utilizamos un tablero con una hilera de casillas que se podían tapar y destapar y un tesoro que se podía esconder en ellas (ver Figura1).

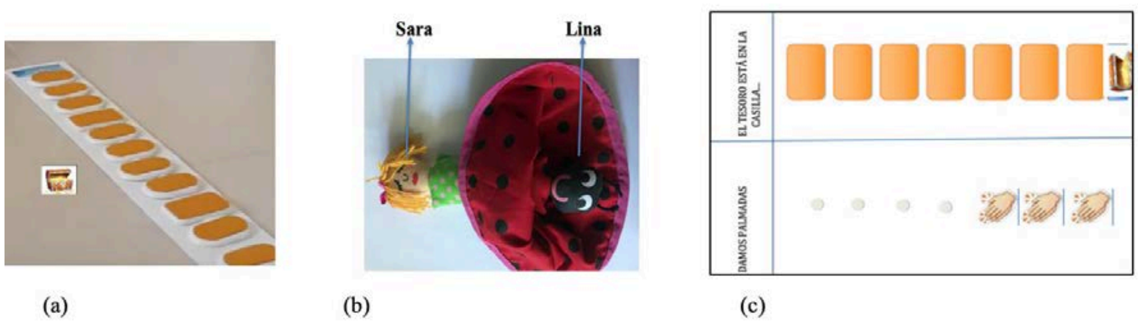


Figura 1. Materiales: Tablero, marionetas, y ficha individual

La investigadora se dirigía a los niños diciéndoles: “Lina ha escondido un tesoro. Estad atentos porque dice que nos va a dar una pista para que podáis encontrarlo. ¿Qué me dices Lina? (acercando la marioneta a su oído). Dice que la pista va a ser un número de palmadas, ella me las va a decir a mi y yo las voy a dar”. En este escenario, para cada una de las funciones consideramos las variables: (a) independiente, número de palmadas, (b) dependiente, número de casilla en la que se esconde el tesoro.

Comenzamos trabajando con la función identidad. Las primeras veces les dejamos a los niños levantar las casillas que necesitaban, pero después de dos o tres ejemplos solo podían levantar una casilla. Lo hicimos igual para el resto de las funciones, pero utilizamos la otra marioneta, Sara. La investigadora les decía a los niños que Sara daba las pistas de otra forma.

Para el trabajo con cada una de las funciones distinguimos cuatro fases. En la primera, los alumnos trabajaban con el material: la investigadora planteaba el problema y les hacía preguntas relativas a casos particulares y a la validez de sus respuestas. En la segunda parte, la investigadora establecía un diálogo con los alumnos a través de preguntas sobre casos particulares y preguntas que inducían a la generalización. La tercera parte consistía en un trabajo individual donde cada alumno tenía una ficha en la que podían pegar con velcro, palmadas y un tesoro, según lo que la investigadora les pedía (ver figura 1c). Por último, les dimos lápiz y papel y les pedimos que explicaran qué había que hacer para encontrar el tesoro a los niños de otras clases, que no habían jugado con la marioneta. Esta tarea era totalmente abierta, pretendíamos observar cómo los niños organizaban y representaban la relación entre las cantidades de palmadas y casilla en que se encontraba el tesoro. De cada niño tenemos tres producciones, de estas seleccionamos aquellas que nos proporcionaban alguna información.

Transcribimos las grabaciones en video de las entrevistas y realizamos un análisis preliminar de los datos (transcripciones de las grabaciones, producciones escritas de los niños y fotografías) para definir las categorías de análisis con base en el objetivo de investigación, el marco conceptual y los antecedentes.

Resultados y discusión

A raíz del análisis de las producciones de los niños, establecimos una primera categoría de análisis distinguiendo tres instancias mutuamente excluyentes: (a) no hay evidencias de relación entre las variables, (b) en al menos una producción, representa un caso particular, (c) en al menos una producción, representa más de un caso particular.

Tabla 1
Representaciones de la relación entre las variables

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
No hay evidencias	X						X	X
Representa un caso particular				X				
Representa más de un caso particular		X	X		X	X		

Nota. Elaboración propia a partir de los datos

En la Tabla 1 observamos que la mitad de los niños utilizaron más de un caso particular en su representación. A4 pone un único ejemplo para cada función. En las producciones de A1, A7 y A8 no hubo evidencias de representación de la relación entre las variables.

Para ver si identificábamos características de las tablas convencionales, analizamos y describimos las producciones de los niños que habían representado más de un caso particular: A2, A3, A5 y A6. En la figura 2 mostramos los dibujos de A2, donde representó parejas de casos particulares de forma que el número de la izquierda siempre corresponde a la variable independiente y el de la derecha a la dependiente. Dibujó un tesoro siempre junto al número de la derecha para indicar que se refiere a la casilla en la que se encuentra el tesoro, es decir, la variable dependiente. En la figura 2a vemos como separó unas parejas de otras por una doble barra y en la figura 2b por la situación en el espacio.

En la figura 3 se ve cómo A3 representó parejas de casos particulares. Escribió parejas correctas y luego no hay evidencias de la relación que estableció, puesto que no encontramos ninguna regularidad.

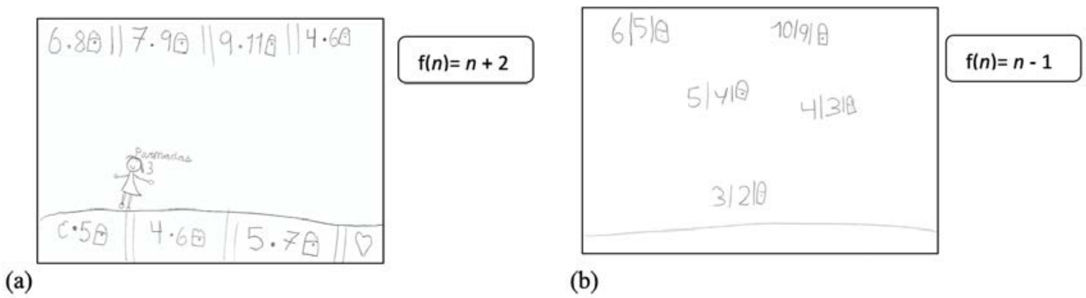


Figura 2. Producción de A2

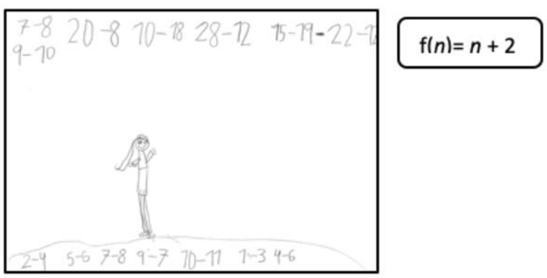


Figura 3. Producción de A3

En la figura 4 podemos ver como A5 representó en los dos casos varios ejemplos de relaciones para casos particulares, todas correctas. En la figura 4a podemos apreciar que no siguió una norma para situar los valores de las dos variables. En la figura 4b siempre situó la variable independiente y debajo la dependiente. Además, separó los valores en el espacio.

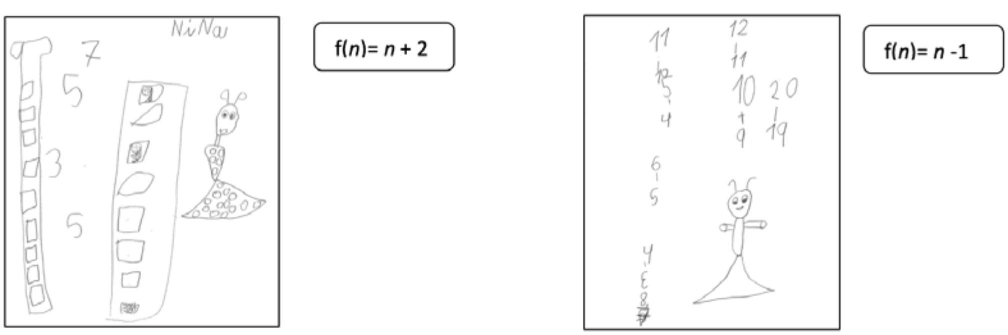
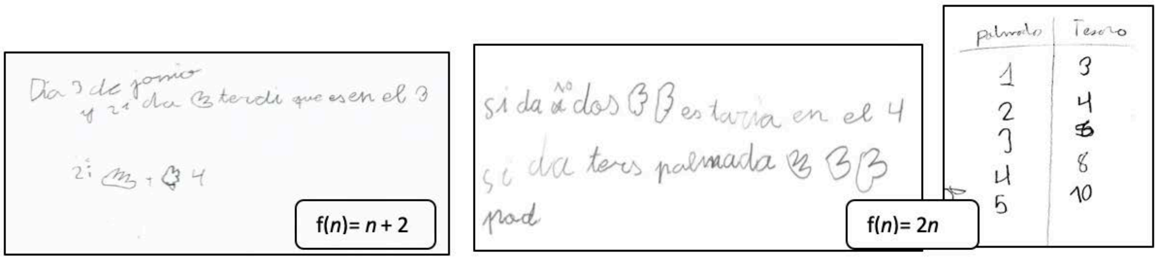


Figura 4. Producción de A5

En la figura 5 podemos ver las producciones de A6. En las figuras 5a y 5b observamos que dio más de una pareja de casos particulares. En la figura 5c vemos una tabla convencional que, a partir de la figura 5b, A6 construyó con la mediación de la investigadora.



(a) (b) (c)

Figura5. Producción de A6

Conclusiones

El formato abierto para la construcción de tablas dio luz sobre cómo los niños iban incorporando la representación tabular en su trabajo, a pesar de no haber utilizado otras antes.

Los dibujos de estos dos niños evidencian que buscaron naturalmente formas de organizar los datos. Los niños representaron parejas de valores de forma espontánea. Les fue útil mantener un orden y separar de algún modo los valores de las variables y unas parejas de otras. A2 necesitó indicar a qué variable se refería cada valor, dibujando un tesoro sobre la variable dependiente. Estos resultados conectan con los del trabajo de Martí (2009) con niños de educación primaria en el construyeron de forma espontánea tablas para organizar información. Los resultados obtenidos han sido similares a pesar de la diferencia de edad de los estudiantes.

En este trabajo las tablas se han utilizado para organizar la información y comunicarla. Sería interesante para futuras investigaciones plantear la construcción de tablas como herramienta para descubrir la relación entre las variables y para generalizar.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011*). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Brizuela B. M., Blanton M. y Kim Y. (2021) A Kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003). *The history of mathematical tables*. *From sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. V. Teubal (Eds.), *Representationals systems and practices as learning tools* (133-148). Sense Publishing.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J. y Highfield, K. (2008). Encouraging mathematical thinking through pattern and structure: An intervention in the first year of schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(3), 10-15.

Representaciones estadísticas en libros de texto: revisión de literatura

Nicolas **Montealegre** Cruz
Universidad de los Llanos
Colombia
nicolas.monealegre@unillanos.edu.co
María Teresa **Castellanos** Sánchez
Universidad de los Llanos
Colombia
mcastellanos@unillanos.edu.co

Resumen

Se comunica aportes y resultados de una revisión de literatura relacionada con representaciones estadísticas en libros de texto escolares. Se emplea análisis de contenido de tipo descriptivo estudiando 32 documentos producto la consulta en las bases de datos y repositorios. La revisión se realizó de manera sistemática en seis etapas: planeación, búsqueda, selección, evaluación de la calidad, extracción de la información y síntesis. Los resultados establecen similitudes entre los estudios y develan su aumento en los últimos diez años, los cuales buscan comprender cómo aporta la comprensión de gráficos estadísticos a la cultura estadística y al razonamiento estadístico. Las principales categorías examinadas son el tipo de gráfico usado, los niveles de lectura, la complejidad semiótica, las tareas solicitadas. Se concluye que los estudios otorgan relevancia a la representación de información basada en datos, debido a su potencialidad como recurso para acercar al escolar a la comprensión de situaciones cotidianas.

Palabras claves: Educación Matemática; Educación Primaria; Enseñanza presencial; Investigación descriptiva; Enseñanza de la estadística; Gráficos estadísticos.

Introducción

Las investigaciones sobre representaciones estadísticas en libros de texto son el resultado de varios estudios que se han centrado en conocer cómo se produce la transferencia de conocimiento estadístico en la escuela y la relevancia al libro de libro de texto escolar; tanto para desarrollo del contenido como para la organización de la enseñanza. En este sentido el libro de texto se considera parte fundamental del desarrollo de la práctica docente y el quehacer didáctico del maestro (Soaje de Elias, 2018); en las investigaciones analizar los libros de texto es objeto de investigación de la didáctica de la estadística para evidenciar el aporte de estos recursos al desarrollo de la cultura y al razonamiento estadístico en escolares de primaria y secundaria.

El análisis de las investigaciones busca responder diferentes preguntas planteadas frente al estudio de las representaciones estadísticas en libros de texto: ¿cuál es orígenes de las investigaciones? ¿qué tipo de muestra se han utilizado?, ¿qué metodología se utiliza para el análisis de los documentos?, ¿qué categorías de análisis se han definido en los estudios? y ¿qué recomendaciones y líneas abiertas se plantean? Estas respuestas permiten establecer las relaciones y diferencias entre los estudios de cara a futuras investigaciones.

Las representaciones estadísticas se entienden como un objeto visual que permite la organización de datos, son auto-explicativas, transmitiendo todo lo que entrañan (Castellanos, 2013), existe una gran variedad de ellas, bien sea en formato tabular o gráfico. Durante el aprendizaje de la estadística la visualización de los datos debe ser necesaria y suficiente para que el aprendiz logre leer la información implícita desde diferentes niveles; de este modo, los gráficos y tablas se consideran de utilidad para sintetizar el comportamiento y las relaciones de datos de forma ágil; su la lectura e interpretación permite al aprendiz obtener información con claridad; no obstante, su comprensión puede resultar difícil y generar error (Castellanos, 2013).

La comprensión gráfica se considera uno de los componentes fundamentales de la cultura estadística (Patahuddin y Lowrie, 2018), y dada la gran cantidad y forma (sesgada o incorrecta) de representaciones estadísticas en los medios de comunicación, los hacen oportunos para la discusión en el aula. Otra dimensión asociada a la cultura estadística descrita por Gal (2002) obedece a las emociones y sentimientos que expresan los escolares (positiva o negativamente) durante el aprendizaje de la estadística y en su mayoría vinculados a elementos externos a la materia tales como el profesor, la actividad, el libro, el método de enseñanza etc.

En los procesos de lectura e interpretación de los gráficos y tablas estadísticas, demandan al lector para su comprensión destrezas estadísticas, que exigen atender al tipo y componentes estructurales del gráfico, niveles de lectura, niveles semióticos, tarea solicitada, pertinencia y posibles errores en su elaboración, (Curcio, 1989; Kosslyn,1985; Arteaga et. al, 2011; Castellanos, 2013) En tal sentido, el estudio de las representaciones estadísticas y en particular, en libros de texto tomar relevancia, dadas las características a considerar al momento de seleccionar, construir o interpretar una representación estadística.

Metodología

Este estudio se enmarca en el tipo de investigación bibliográfica con un enfoque contrastactivo-analítico de tipo exploratorio-descriptivo. En el se recopilaron documentos que analizan las representaciones estadísticas (gráfico y tablas) en libros de texto de Educación secundaria y primaria. El proceso de revisión de literatura sigue el enfoque de investigación basada en evidencias (Tranfield et. al, 2003; Kitchenham et. al, 2009), seleccionado por su rigurosidad y eficacia, y que reduce la subjetividad a partir de las siguientes etapas:

E1. Planificación: se desarrolla una secuencia para la revisión sistemática de los antecedentes. En ella se especifica: alcance, actividades, preguntas de interés, estrategia de búsqueda, criterios de selección de los documentos, elementos para la extracción y síntesis de los datos.

E2. Búsqueda: Se acude a diferentes fuentes entre ellas bases de datos Scopus, SciELO, Mendeley, Google Académico y repositorios de universidades, seleccionando tesis de maestría o doctorado, mediante las ecuaciónes de búsqueda “Gráficos estadísticos and libros de texto”, “Tablas estadísticas and libros de texto”, “Statistic graphs and textbook” y “Statistic tables and textbook”. Adicionalmente se utilizó la técnica de investigación denominada “efecto bola de nieve” (Creswell, 2009), ubicando en los documentos seleccionados pistas para la búsqueda de otro estudios en sus referencias.

E3. Selección: se eligen de forma preliminar los documentos que, en el título y en el resumen contengan las categorías de la ecuación de búsqueda, con el propósito de coleccionar los documentos que más se ajustan a la intención de la revisión de literatura.

E4. Evaluación: se examina la calidad de la información presentada en cada uno del documento, verificando la coherencia del objetivo con las conclusiones presentadas, el desarrollo de las categorías en relación con lo expuesto en los análisis de resultados, así como la relevancia y la claridad al presentar los datos para responder a las preguntas de interés.

E5. Extracción y síntesis: rescatando resultados más importantes al dar respuestas a las preguntas de interés y orientan las tendencias emergentes (eje. métodos de selección, análisis y categorías).

Análisis de los resultados

La Tabla 1 presenta naturaleza del documento y el tipo de representación estadística examinada en ellos. Los documentos en su mayoría son artículos publicados en revistas científicas y que tratan el análisis de libros de texto. En educación primaria un 72% de los documentos revisados tratan textos de este nivel escolar; también se encontraron investigaciones centradas en comparaciones de textos escolares dirigidos a primaria y secundaria.

Tabla 1
Naturaleza de los documentos consultados y tipo de representación analizada en ellos

Tipo de documento	Gráficos (G)	Tablas (T)	Tablas y gráficos (TG)	Total	N. Escolar	
					E. P	E.S
Tesis (T)	2			2	2	
Artículo de revista (A)	13	7		20	12	8
Memorias de Eventos (ME)	3	3	4	10	9	1
Total	18	10	4	32		

Fuente: elaboración propia. Nota: E.P (Educación Primaria); E.S (Educación Secundaria)

La Tabla 2 se presenta las publicaciones que componen la revisión por el país de origen de los textos. Dentro de este proceso se logró observar que algunas investigaciones realizan comparaciones de textos escolares de dos países, siendo esta la razón por la cual el número del total de la procedencia de los textos no concuerda con la cantidad de documentos revisados. También muestra que 67,6% de los estudios en libros de texto provienen de América del Sur, lo cual refleja la importancia del libro de texto en esta región en cuanto a la planeación y desarrollo del proceso de enseñanza de la estadística, ratificando lo plateados por Soaje de Elias, (2018).

Tabla 2

Cantidad de documentos examinados y origen de los libros de texto en los estudios

País de origen de los textos	Número de publicaciones	Regiones del mundo
España	5	Europa
Chile	13	América del sur
Colombia	1	
Brasil	6	
Perú	2	
Argentina	2	
Venezuela	1	
México	2	América del norte
Costa Rica	4	
Guatemala	1	
Total	37	

Fuente: elaboración propia

A continuación, se exhiben elementos relevantes frente al estudio de gráficos y tablas estadísticas en libros de texto. Se describen los tipos de acercamientos al objeto de investigación a través de las variables y la metodología usada en los estudios.

Metodología de investigación usadas en las diferentes publicaciones

Dentro de las publicaciones revisadas se destaca el tipo de investigación cualitativa orientada a analizar casos concretos en su particularidad temporal y local. Todo ello a partir de las actividades propuestas en libros de texto escolares. Usando un enfoque descriptivo, se examinan las características que componen las actividades o situaciones con tablas y gráficos estadísticos utilizados en los libros de texto en la educación infantil, primaria y secundaria. Basados en el análisis de contenido en la mayoría de los estudios se formulan inferencias objetivas producto de las características presentes en las actividades con tablas y gráficas estadísticas.

Categorías de análisis se han usado en los estudios

Las publicaciones que han trabajado tablas y gráficos estadísticos en general trabajan las siguientes variables como unidad principal de análisis en los libros de texto. Han analizado el tipo de gráfico, el nivel de lectura, la complejidad semiótica, la acción solicitada entre otras. Para esta revisión se han agrupado las unidades de análisis de acuerdo con la relación que subyace entre ellas. Las unidades relacionadas con la estructura de las representaciones, (tipo de representación -gráfico o tabular- y nivel de complejidad semiótica). Así como las demandas cognitivas solicitadas en la solución de las actividades (nivel de lectura y tarea solicitada).

La Tabla 3 presenta el consolidado de las categorías que conforman cada unidad de análisis encontradas. Se muestran que los diferentes estudios sobre representaciones estadísticas en libros de texto centran las categorías como las definen los diversos autores desde la perspectiva de interpretación y lectura de gráficos y tablas Curcio, (1989). También desde la mirada del desarrollo de la cultura estadística propuesta por Gal, (2002) y la necesidad de formar estudiantes estadísticamente cultos.

Tabla 3
Categorías examinadas en las investigaciones revisadas

Unidades de análisis	**Categorías de análisis**
Tipo de gráficos	Diagrama de barras, Sectores, Histograma, Líneas, Polígono de Frecuencias, Barras Múltiples, Diagrama de Puntos, Líneas Múltiples, Pictogramas
Tipo de tabla	Datos, Frecuencias, Doble entrada, Contingencia.
Complejidad semiótica	S1. Representación de datos individuales, S2**.** Representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución, S3. Representación de una distribución de datos, S4. Representación de varias distribuciones en una misma tabla. Arteaga, et al (2011)
Niveles de lectura	N1: leer los datos, N2: leer dentro de los datos, N3: leer más allá de los datos, N4: leer detrás de los datos. Curcio, (1989)
Tarea solicitada	Leer el gráfico, Calcular, Completar o construir un gráfico, Ejemplificar, Traducir a otra representación, Inventar problema o extraer conclusiones, Describir una variable, Comparar dos representaciones. Recoger datos. Castellanos, (2013) y Díaz-Levicoy, (2014)

Fuente: elaboración propia

Para la primera relación denominada *estructura de la representación* se observan coincidencias en las investigaciones revisadas, en tanto que, predominan los gráficos de barras, seguido de los diagramas circulares; los resultados muestran que a medida que aumenta en nivel de escolaridad se dan paso a gráficos más complejos como diagrama de barras adosadas y líneas múltiples (Díaz-Levicoy et. al, 2018; Jiménez, 2017; Arteaga et. al, 2021; Vásquez et. al, 2022); en las representaciones de tipo tabular se destaca el predominio de la tabla de distribución de frecuencias (Pallauta et. al, 2021); en esta misma categoría los estudios comparativos de García-García et. al (2019) y Bustamante et. al (2021) coinciden en que la tabla de conteo es la más usada en texto escolares de primaria en México, y Chile. Por otra parte, se encuentran coincidencias en las publicaciones que abordan como categoría el nivel de complejidad semiótica, donde el nivel S3 (Representación de una distribución de datos) es el de mayor frecuencia tanto para tablas como para gráficos (Jiménez, 2017; Díaz-Levicoy et. al, 2020; Pallauta, 2022; Jiménez et. al, 2022; Arteaga et. al, 2021).

Para la segunda relación referida a las demandas que se les solicita en la solución de las tareas (nivel de lectura y actividad solicitada) en la revisión encontró que el nivel de lectura más solicitado en libros de texto el N2 (leer dentro de los datos) para textos de primaria y de secundaria (Díaz-Levicoy et. al, 2018; Jiménez, 2017; Jiménez et. al, 2020; García-García et. al, 2019; Arteaga et. al, 2021; Vásquez et. al, 2022). Según las investigaciones la acción o tarea solicitada en los libros de textos con mayor frecuencia es "leer datos" seguida de la actividad "calcular", lo cual exige leer información presente en las tablas y gráficas para luego realizar operaciones sencillas como sumar, restar o hallar las medidas de tendencia central (Díaz-Levicoy et. al, 2018; Jiménez, 2017; Jiménez et. al, 2020; García-García et. al, 2019; Arteaga et. al, 2021; Vásquez, et al 2022), se establece concordancia entre el nivel de lectura y la acción solicitada.

Conclusiones

Se considera que la revisión puede contribuir al trabajo en el aula expresando acercamiento a estudios de gráficos estadísticos en libros de texto a través de las dos relaciones establecidas entre las variables y dando cuenta de la metodología usada; además, ofrece ventajas y limitaciones que un investigador interesado deberá atender dados los objetivos y particularidades de cada investigación.

Las categorías que predominan el estudio de las representaciones estadísticas son coherentes con los elementos consolidados desde la perspectiva anglosajona en relación con los niveles de lectura de gráficos estadísticos, la complejidad semiótica, los tipos de representación y tarea solicitada. Mostrando una evolución en las categorías que se plantearon en sus inicios desde autores como Guimarães (2006) de lo cual solo persiste el tipo de representación y una adaptación de lo que hoy se conoce como tarea o acción solicitadas. Se concluye la presencia de una nueva línea de investigación en libros de texto enfoca a estudiar el aporte de las representaciones estadísticas al desarrollo de la cultura estadística (Gal, 2002).

Se concluye que a medida que se avanza en los niveles educativos las tareas que involucran representaciones estadísticas en textos escolares se hacen más complejas llevando al estudiante a desarrollar habilidades de interpretación de datos y a la comprensión de información. De forma general se evidencia que las actividades promueven en los estudiantes el aprecio y la importancia de analizar críticamente información presentadas en tablas y gráficos estadísticos. De este modo esta revisión

Referencias y bibliografia

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números, 76, 55-67. http://sinewton.es/revista_numeros/076/

Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. & Batanero, C. (2021). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. Avances de investigación en educación matemática, (20), 125-140. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8189996

Bustamante, M., Díaz-Levicoy, D. & Pardo, J. (2021). Actividades con tablas estadísticas en los libros de texto de matemática para la enseñanza rural multigrado chilena. Revista Fuentes. https://hdl.handle.net/11162/215951

Castellanos, M. (2013) Tablas y gráficos estadísticos en pruebas SABER - Colombia. Trabajo fin de Máster,ento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. http://funes.uniandes.edu.co/4750/1/tfm_Castellanos_M_T_final.pdf

Curcio, F. R. (1989). Developing Graph Comprehension. Elementary and Middle School Activities. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.

Díaz-Levicoy, D. (2014). Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española. Maestría tesis, Universidad de Granada. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/6385/

Díaz-Levicoy, D., Ruz, F., & Molina-Portillo, E. (2017). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de tercer año de Educación Primaria. Espaço Plural, 18(36), 196-218. https://www.redalyc.org/pdf/4459/445955647010.pdf

Díaz-Levicoy, D., Vásquez, C., & Molina-Portillo, E. (2018). Estudio exploratorio sobre tablas estadísticas en libros de texto de tercer año de educación primaria. TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 1(2), 18–38. https://doi.org/10.30612/tangram.v1i2.7574

Diaz-Levicoy, D. & Alencar, E. (2020). Gráficos estadísticos en libros de texto: un estudio comparativo en el primer curso de educación primaria en Brasil y Chile. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 13(2), 112-119. http://funes.uniandes.edu.co/30621/

García-García, J., Díaz-Levicoy, D., Vidal-Henry, S. y Arredondo, E. (2019). Las tablas estadísticas en libros de texto de educación primaria en México. Revista Paradigma, 40(2), pp. 153-175. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/issue/view/69

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. International Statistical Review, 70(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M., & Marques, M. (2006). Atividades que exploram gráficos e tabelas em livros didáticos de matemática nas séries iniciais. Seminário Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática–SIPEM, 3.

Jiménez-Castro, M. (2017). Los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/documentos/TFMMaynor.pdf

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P., & Batanero, C. (2020). Los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34, 132-156. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a07

Jiménez-Castro, M., Garzón-Guerrero, J., & Batanero, C. (2022). El contexto PISA de los gráficos estadísticos en los libros de texto de matemáticas de Educación Básica en Costa Rica: The PISA context of statistical graphics in basic education mathematics textbooks in Costa Rica. Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 22(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v22i2.6127

Kitchenham, B., Brereton, O. P., Budgen, D., Turner, M., Bailey, J., & Linkman, S. (2009). Systematic literature reviews in software engineering–a systematic literature review. Information and software technology, 51(1), 7-15. https://doi.org/10.1016/j.infsof.2008.09.009

Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing: A review of five books. Journal of the American Statistical Association, 80, 499-512. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1985.10478147

Pallauta, J. D., Batanero, C., Gea, M. M., & Arteaga, P. (2021). Niveles de lectura y contextos en las actividades sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos y españoles. Revista Chilena de Educación Matemática, 13(4), 119-133. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.74

Pallauta, J., Gea, M., Batanero, C., & Arteaga, P. (2022). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35, 1803-1824. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26

Patahuddin, S. M. y Lowrie, T. (2018). Examining Teachers' Knowledge of Line Graph Task: a Case of Travel Task. International Journal of Science and Mathematics Education, 17(4), 781–800. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9893-z

Soaje de Elias, R. (2018). Textos escolares: consideraciones didácticas. Educación y Educadores, 21(1), 73-92. https://doi.org/10.5294/edu.2018.21.1.4

Tranfield, D., Denyer, D., & Smart, P. (2003). Towards a methodology for developing evidence-informed management knowledge by means of systematic review. British journal of management, 14(3), 207-222. https://doi.org/10.1111/1467-8551.00375

Vásquez, C., Arredondo, E. H., & García-García, J. I. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36, 116-145. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a06

Trabajo Matemático en estudiantes universitarios respecto a nociones de la derivada en contexto económico

Flor Isabel **Carrillo** Lara
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
flor.carrillo.l@mail.pucv.cl

Resumen

Esta comunicación es parte de una investigación en proceso que tiene como objetivo caracterizar el trabajo matemático personal de estudiantes frente a situaciones didácticas en contexto económicos, esto debido a las dificultades, errores, falta de comprensión e interpretación en la resolución de problemas sobre la derivada por parte de los estudiantes de la carrera de Economía. Además, se espera que los estudiantes logren una interpretación de los diversos significados de la derivada en contextos económicos, como es el caso del costo marginal. Consideramos investigaciones respecto a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, así como investigaciones relacionadas al estudio de las nociones de la derivada en contextos económicos. Así mismo, se presenta la pregunta, el objetivo de investigación y el análisis de tres tareas realizadas por estudiantes universitarios, basado en el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático. Finalmente, se presentan algunas reflexiones.

Palabras clave: Derivada, tasa de variación, costo marginal, contexto económico, Espacio de Trabajo Matemático.

Introducción

Artigue (1995) señala que los estudiantes tienen dificultades respecto al significado de la derivada, en su expresión analítica como límite del cociente incremental o en su interpretación geometría como pendiente de la recta tangente, lo cual genera la falta de comprensión satisfactoria del concepto. Así mismo, Bakri et al. (2021) encuentran resultados similares, ya que, al realizar una investigación con estudiantes de un curso de cálculo diferencial en la universidad, identifican que los estudiantes enfrentan grandes dificultades pues no relacionan los resultados obtenidos del análisis de las derivadas de funciones con su representación gráfica. Otra dificultad recurrente en los estudiantes universitarios está relacionada con las distintas representaciones e interpretaciones respecto a la noción de la derivada (Díaz, 2020; Pinto, 2019). En el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), mediante el diseño de herramientas en GeoGebra, se logra obtener maneras alternativas de aproximación a conceptos matemáticos. De manera particular, una herramienta que permita a los estudiantes establecer y demostrar conjeturas respecto a la noción de variación, como una manera de aproximar una interpretación del concepto de derivada.

Feudel (2018) evidencia que estudiantes de economía realizan cálculos respecto a la derivada de manera correcta pero cuando se debe dar una interpretación económica, como el análisis marginal, no logran interpretar su significado.

De acuerdo con lo anterior, las dificultades en estudiantes universitarios en la comprensión e interpretación de situaciones sobre la derivada se presentan al momento de: relacionar el análisis de la derivada de funciones con su representación gráfica, realizar conexiones entre sus significados y representaciones, comprender su definición mediante un límite y su diversidad de representaciones. Así mismo, se considera importante el manejo de los diferentes significados de la derivada para una apropiada interpretación y análisis en la resolución de situaciones en contexto respecto a la derivada.

En economía se utiliza de manera constante los conceptos de derivada, integral, ecuación diferencial, entre otros, que son utilizados para modelar diversos fenómenos que se estudian en economía. En particular, la derivada es un tema importante en el estudio del análisis marginal, área de la economía que estudia los procesos de toma de decisiones de los agentes económicos (Sydsaeter et al., 2012; Ariza y Llinares, 2009). Por ello, consideramos la necesidad de investigar respecto a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, con estudiantes de la carrera de economía. En el siguiente apartado se presenta algunas investigaciones donde se evidencia las dificultades, errores y falta de comprensión de estudiantes universitarios sobre la derivada.

Investigaciones sobre la derivada en contextos económicos

Los reportes sobre la derivada y sus contextos económicos se centran en el análisis de las distintas interpretaciones o representaciones que realizan los estudiantes, y como estos causan dificultades en los estudiantes universitarios. Amador (2020) menciona que un acercamiento a la derivada es omitir la definición por límites y emplear otras representaciones diferentes a la algebraica, ya que esta es la más empleada en las sesiones de clase como en los libros de texto, siendo esta una posible razón que los estudiantes de ingeniería se mecanizan a resolver problemas mediante algoritmos y tienen poco éxito ante los problemas en contexto u otras representaciones.

Feudel y Biehler (2021) señalan que el uso de la derivada en economía es muy heterogéneo, a veces inconsistente y contradice el conocimiento previo de los estudiantes. Esto se aplica en la interpretación económica común de la derivada, por ejemplo, el costo marginal se define mediante una tasa de variación y esta se iguala a la derivada de la función siendo este un concepto erróneo. Asimismo, para comprender la forma en que se utiliza la derivada en contextos económicos, los estudiantes deben ser capaces de interpretar la derivada. Entre sus resultados, los autores, indican que probablemente los estudiantes tienen conceptos erróneos sobre la derivada y que no habrían adquirido una comprensión acerca de la interpretación económica. Además, manifiestan que muchos estudiantes no percibieron la conexión entre la derivada como concepto matemático y su interpretación económica a través de la aproximación lineal local a nivel conceptual.

Por lo presentado, existen diferentes significados de la derivada lo cual trae consigo complejidades, dificultades y errores cuando los estudiantes resuelven problemas relacionados a la derivada; así mismo, cuando los estudiantes deben realizar interpretaciones de la derivada en contextos económicos. Como lo menciona Amador (2020) la enseñanza de nuevos conceptos debe ser introducida mediante su uso en situaciones cercanas a los estudiantes.

En ese sentido, para la investigación se propone diseñar e implementar una situación didáctica para la enseñanza de la derivada en contexto económico. Además, se espera promover vínculos como en los ejes de formación académica para los estudiantes de economía. Para ello nos posicionaremos desde la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2022) la cual propone un trabajo matemático completo para la comprensión de un objeto matemático. Esto se detallará en la siguiente sección.

Espacio de Trabajo Matemático

Se pretende analizar desde la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) según Kuzniak et al., (2022) el trabajo personal de estudiantes de economía cuando se enfrentan a situaciones didácticas que involucran a la derivada en contexto económico. Esto se realiza al considerar dos componentes a los que llamamos plano cognitivo y plano epistemológico.

Desde el ETM se definen el ETM de referencia, está compuesto por las matemáticas que pertenecen a la institución y que provienen de la matemática formal. El ETM idóneo, es un espacio de trabajo diseñado y construido por un experto, de tal manera que sea apto para su uso. El ETM personal se refiere al producto del trabajo matemático realizado por un individuo, fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica de acuerdo a sus capacidades cognitivas. Desde el ETM, una “tarea matemática” se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formuladas, que puede ser resuelto por un individuo en un espacio de trabajo definido (Nechache, 2017 citado en Kuzniak et al., 2022). Las tareas no forman parte de un ETM, pero participan en su activación cuando un sujeto se enfrenta a ellas y debe realizarlas.

En ese sentido el objetivo de la investigación es: caracterizar el trabajo matemático personal en estudiantes de economía cuando se enfrentan a situaciones didácticas sobre la derivada en contextos de economía. Por ello, en esta comunicación se tiene por objetivo resolver tareas que involucran tasa de variación y relacionarlos con la derivada.

Para llegar a dicho objetivo es preciso identificar las conexiones entre conceptos matemáticos y económicos en problemas en contexto sobre la derivada, de manera particular en los libros de textos, empleados en la carrera de economía.

El contexto y aspectos metodológicos

En la revisión del texto Arya y Lardner (2009) se observa el contenido matemático de la derivada en los problemas de análisis marginal se encuentran relacionados. Una de las relaciones es cuando la función derivada permite estudiar cómo calcular la función que describe el cambio de otra función de variables continuas. El texto se considera como técnica indirecta para la recolección de datos respecto a cómo habita la derivada en la economía, en este caso nos centramos en el costo marginal.

Para esta comunicación, se selecciona un problema del libro Arya y Lardner (2009, p. 474). El problema se adapta en tres tareas, las cuales de manera sucesiva llevan a definir el costo marginal y estás tareas son analizadas desde el ETM. El objetivo de las tareas, que constan de una misma finalidad, es que los estudiantes universitarios establezcan alguna relación entre el costo promedio por artículo de las unidades extras y la derivada desde una concepción como del cociente de variación de y sobre variación de x.

Esto mediante el análisis de tres tareas de un libro considerado en la investigación, donde se identifican elementos que conectan a la tasa de variación como aproximación a una noción de la derivada, que en economía se denomina marginalidad.

La investigación es de carácter cualitativa con un enfoque descriptivo (Hernández et al. 2010). La experimentación se realizó con trece estudiantes universitarios de ciencias del semestre 2022-A, que se encuentran matriculados en el curso de cálculo diferencial. El objetivo de las tareas es que los estudiantes relacionen la tasa de variación con el concepto de derivada. A los trece estudiantes participantes en la experiencia se les denominan E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 y E13. Los datos fueron tomados de estudiantes de una Universidad Pública del Perú. A continuación, se presentan las tareas con su respuesta esperada.

Tarea 1: Suponga que un fabricante de cierto artículo descubre que, a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C(x) = 200 + 0.03x^2$, ¿cuál es costo promedio?

Respuesta esperada: Cuando el costo total está expresado en relación en la cantidad de artículos, x, se obtiene un costo promedio dado por $C(x)/x = \frac{200}{x} + 0.03x,\ \ x \geq 0, x \in N.$
Se espera por parte de los estudiantes definir un cociente entre la función costo dada y la cantidad total de artículos, para luego redactar una respuesta según la interpretación de la tarea.

Tarea 2: Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal, ¿cuál es el costo extra?

Sugerencia (dada por el profesor del curso): Primero hallar el costo total y luego despejar el costo extra.

Respuesta esperada: Ahora el costo total es
$C(x + \Delta x) = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$
Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$\Delta C = C(x+\Delta x) - C = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 = 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$

Tarea 3: Respecto a la tarea 2, halle el costo promedio por artículo de las unidades extras.

Respuesta esperada:
$\Delta C/\Delta x = 6 + 0.03\Delta x$

Análisis de tareas

Se debe tener en cuenta que la intervención del profesor del curso de cálculo diferencial se dio de manera previa a la aplicación de las tareas. En el desarrollo del tema derivadas, el profesor presenta a sus estudiantes diferentes aplicaciones de la derivada, los cuales es posible que estos fueron considerados en la resolución de los estudiantes.

A los trece estudiantes participantes en la experiencia se les denominan E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 y E13.

Respecto a la tarea 1, los estudiantes E1, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12 y E13 realizaron una solución de la manera esperada; es decir, consideraron la función costo total y realizaron la división entre la cantidad x. Los estudiantes E2, E3 y E9 realizaron una solución para casos particulares; es decir, dieron valores específicos para x, por ejemplo, $x = 10$.

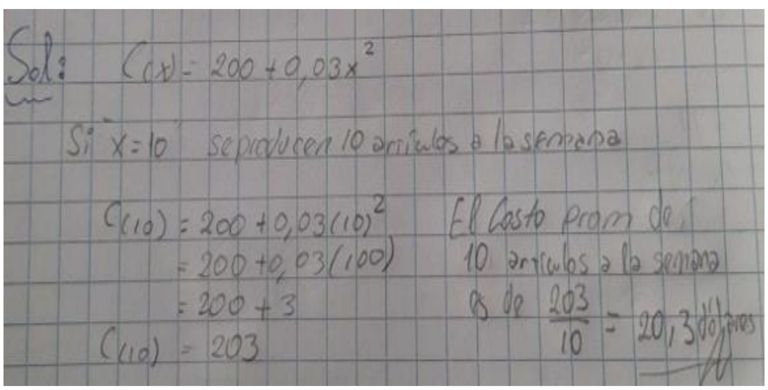


Figura 1. Solución de E9-tarea 1.

El estudiante E11 plantea la solución esperada, de realizar el cociente de $C(x)$ entre x, pero en el proceso de resolución tiene un error y cuando resuelve con un caso particular asume un arrastre de error. Entonces podemos decir que nueve de trece estudiantes realizan la tarea 1 de manera satisfactoria. Con ello, se evidencia el empleo de sus conocimientos previos sobre como hallar el promedio e identificar que tienen como dato del problema la cantidad de artículos, que en este caso es x. En la solución de la tarea 1, los estudiantes relacionan los signos que definen un cociente al cual denomina costo promedio, a partir de una representación algebraica. Es decir, desde el ETM se activa la Génesis semiótica. Así mismo, emplean propiedades del álgebra quien es el artefacto simbólico el cual les permite hallar el costo promedio, así se evidencia la activación de la Génesis instrumental. Por ello, podemos evidenciar las interacciones de las génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

Respecto a la tarea 2, los estudiantes E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y E12 resolvieron de manera esperada, es decir, hallaron el nuevo costo total donde el argumento de la función costo es $x + \Delta x$. Comentar que el estudiante E5 denota Δx a la variación de los costos. Los estudiantes E6 y E13 resuelven de manera parcial, solo hallan $C(x + \Delta x)$ y no el costo extra (la diferencia entre $C(x + \Delta x)$ y $C(x)$). Además, mencionar que el estudiante E11 no resuelve la tarea. Entonces podemos decir que diez de trece estudiantes realizan de manera satisfactoria la tarea 2. En esta tarea, los estudiantes emplean signos del álgebra para denotar las funciones y variaciones de estas, predomina la representación algebraica. Es decir, desde el ETM se activa la Génesis semiótica. También emplean propiedades del álgebra quien es el artefacto simbólico el cual les permite hallar el costo extra, así se evidencia la activación de la Génesis instrumental. Por ello, podemos evidenciar las interacciones de las génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

En el desarrollo de la tarea 3, los estudiantes E1, E2, E5 y E11 no resuelven lo pedido. En el caso de los estudiantes E3, E4, E8, E9, E10 y E12 presentan de manera correcta la solución de la tarea; respecto al estudiante E4 no realiza ninguna simplificación ni resuelve las expresiones algebraicas como el binomio al cuadrado. Los estudiantes E6, E7 y E11 consideran el cociente entre $\boldsymbol{x}$ en vez de $\Delta \boldsymbol{x}$, por ello se identifica un error en su resolución. Entonces solo seis de trece estudiantes logran la respuesta esperada, es decir, relacionar el concepto previo de hallar un promedio, pero en este caso se debe tener en cuenta que es una tarea en contexto económico, ya que se establece relación entre el promedio de la función costo por artículo de las unidades extras. De manera similar, a la tarea 1 se identifica las interacciones de las génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

Algunas reflexiones

En la solución de las tres tareas, los estudiantes lograron de manera parcial las respuestas esperadas. Además, se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes resolvieron los procedimientos algebraicos respecto a las funciones económicas de manera correcta, pero en la tarea 3 cuando se tenía una pregunta de interpretación en economía, respecto al costo promedio por artículo de las unidades extras, solo seis de trece estudiantes presentan el cociente correcto.

Respecto al ETM personal de los estudiantes, podemos decir que lograron la activación de las Génesis Semiótica e Instrumental, pero no se logró dar una respuesta según el contexto de cada tarea. Entonces nos proponemos reformular las preguntas para obtener como parte de la solución una respuesta en el contexto de economía y también considerar alguna tarea que genere la activación de la Génesis discursiva y así orientarnos a un trabajo matemático completo por parte de los estudiantes universitarios cuando se enfrentan a tareas en contexto de economía.

Referencias y bibliografía

Amador, O. (2020). *Introducción de la derivada en el contexto de problemas de máximos y mínimos utilizando desarrollos de Taylor algebraicos y el acercamiento infinitesimal que provee GeoGebra.* [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3886

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121–136. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v27-n1-ariza-llinares

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P, Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/40560/Ingenieria-didactica.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Arya, C. y Lardner, W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y economía*. Editorial Prentice Hall.

Bakri, A., Liew, C., Chen C., Tuh, M. & Ling, S. (2021). Bridging the Gap Between the Derivatives And Graph Sketching in Calculus: An Innovative Game-Based Learning Approach. *Asian Journal of University Education*, *16*(4), 121-136. https://doi.org/10.24191/ajue.v16i4.11962

Díaz, V. (2020). Difficulties and Performance in Mathematics Competences: Solving Problems with Derivatives. *International Journal of Engineering Pedagogy, 10* (4), 35–52. https://doi.org/10.3991/ijep.v10i4.12473

Feudel, F. (2018). C' (x) = C(x+1)-C(x)? - Students' connections between the derivative and its economic interpretation in the context of marginal cost. *INDRUM 2018, INDRUM Network, University of Agder, Apr 2018, Kristiansand, Norway.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849946

Feudel, F., y Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *42*(1), 273–305. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Editorial Mc Graw Hill.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (Ed.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context - The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces.* https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-90850-8

Pinto, I. (2019). *Un modelo para la comprensión de la derivada en su perspectiva local: un estudio de casos en el contexto universitario.* [Tesis de Doctorado, no publicada]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Sydsaeter, K., Hammond, P., y Carbajal, A. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. PRENTICE HALL.

Villa-Ochoa, J., y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*, 514–528. http://funes.uniandes.edu.co/1545/

Trabajo matemático en una tarea sobre pirámide cuadrangular

Cinthia Yeraldine **Pulache** Panta
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
a20210354@pucp.edu.pe
Daysi **García-Cuéllar**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
garcía.daysi@pucp.pe

Diversos estudios reportan que estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del objeto pirámide (dificultades que tienen que ver con aspectos de representación, instrumentales y discursivos). Esta investigación tiene por objetivo analizar el trabajo matemático de un estudiantes de segundo grado de secundaria cuando resuelve una tarea sobre la pirámide cuadrangular utilizando GeoGebra. Se utilizó una metodología cualitativa y como marco teórico a la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático propuesta por Kuzniak (2022), la cual constituye una herramienta valiosa para analizar el trabajo matemático tomando en cuenta procesos cognitivos y elementos epistemológicos.

La figura 1, muestra la tarea que los estudiantes participantes de la investigación respondieron.

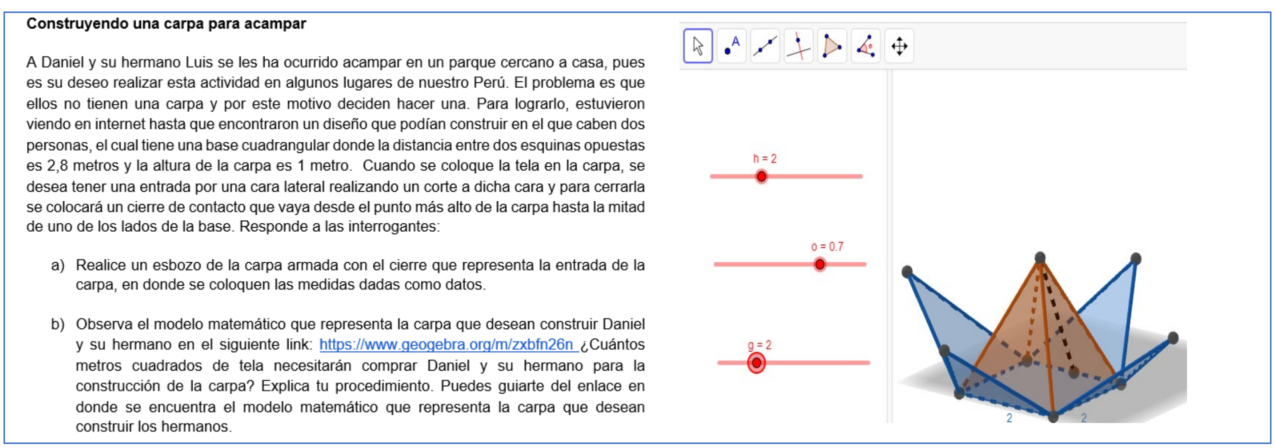
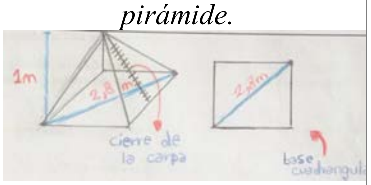
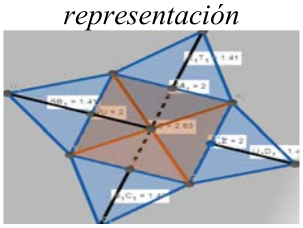
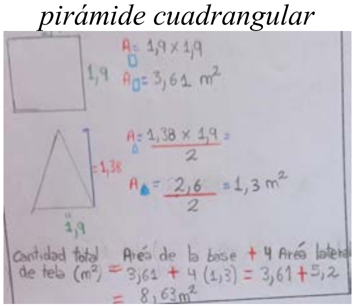


Figura 1. Tarea propuesta al estudiante: se observa el enunciado y la vista de GeoGebra

Para analizar el trabajo matemático de los estudiantes, se toma en cuenta la técnica basada en el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que plantean Kuzniak (2022), donde se proponen dos etapas: etapa adentro y afuera. La primera donde se analizan los principales episodios (E) del trabajo y la otra, para describirlo globalmente usando el diagrama del ETM.

Tabla 1

Análisis del trabajo matemáticos del estudiante.

Episodios identificados (E)	Análisis
E1: Construcción de la representación de la pirámide.  	En el E1 el estudiante identifica las medidas y características del enunciado en el diseño que construye. Luego activa la génesis semiótica (articulación de las representaciones con la visualización). Esto con ayuda de los artefactos (lápiz, papel, reglas, datos y condiciones establecidas en el enunciado del problema) lo que también indica que se activó también la génesis instrumental. Lo que involucra el plano [Sem-Ins].
E2: Exploración de la representación 	En el E2 el estudiante después de observar las características del objeto e interpretar por visualización los signos de la representación en el software, con el uso de los deslizadores y la definición de altura como artefacto simbólico, traza cada una de las alturas de las caras triangulares en su desarrollo plano. Esto indica que se activó la génesis semiótica e instrumental.
E3: Cálculo del área de la pirámide cuadrangular  	En el E3 para calcular el área de la pirámide la representa en el papel, donde toma como representamen un cuadrilátero como base, y un triángulo para representar las caras laterales, y realiza un proceso de visualización para reproducir las figuras (activación de la génesis semiótica). Usa el artefacto regla y contruye el cuadrado que sería la base, (activación de la génesis instrumental). Luego, toma como referencial el área del cuadrado y justifica que sus lados tienen igual longitud lo que indica que activó las génesis semiótica y discursiva. Finalmente, toma como artefacto las operaciones aritméticas y realiza un proceso de construcción para obtener el área del cuadrado y del triángulo, lo que activa la génesis instrumental para el cálculo del área.

Las génesis que se activan con frecuencia son la semiótica e instrumental, las cuales se favorecen por la riqueza de signos (representaciones) que brinda el uso de GeoGebra y el uso de las herramientas (artefactos). Por ende, el plano que se prioriza es el plano [Sem-Ins] (dado que se utilizaron los artefactos en la exploración de las representaciones y en el proceso de construcción.

Figura 2. Trabajo matemático global del estudiante usando el diagrama del ETM

Referencias y bibliografía

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces- Theoretical Characteristics. En A. Kuzniak, P. Richard y E. Montoya (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 03-29).

Una aproximación al docente para el tratamiento de curso electivo: Límites, Derivadas e Integrales

Erich **Barrueto** Gonzalez
Universidad Metropolitana de ciencias de la educación
Chile
erich.barrueto2019@umce.cl
David **Álvarez** Serrano
Universidad Metropolitana de ciencias de la educación
Chile
david.alvarez2019@umce.cl

Resumen

Esta propuesta tiene como objetivo analizar reflexiones sobre prácticas de los profesores al enseñar el curso electivo de cálculo, propuesto por el Ministerio de Educación en el año 2020, de Límites, Derivadas e Integrales para estudiantes de últimos años de secundaria (16 y 17 años). Se utiliza una metodología cualitativa a través del estudio de caso por medio del Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) para observar el conocimiento docente. Dentro de los resultados se observa que los profesores observan que los estudiantes tienen débiles los conocimientos previos para implementar el curso y se destaca la necesidad de formación continua para el cumplimiento de los estándares de formación docente.

Palabras clave: cálculo, prácticas pedagógicas, conocimiento docente, estándares de formación docente.

Introducción

En Chile, a partir del año 2020 se ha introducido en el currículum de enseñanza secundaria cuatro electivos de matemática para los últimos años de Educación Secundaria (16 y 17 años), uno de ellos es el Electivo de Límites, Derivadas e Integrales, el cual es el objeto de estudio de esta comunicación, que presenta el estudio de una investigación pretende analizar las reflexiones que realizan docentes de matemática al implementar el electivo y su percepción de logro comparado con los estándares entregados por el Ministerio de Educación (2021).

Considerado lo anterior, se responde a la pregunta de investigación ¿Cómo evalúan los profesores de matemática sus implementaciones del curso electivo de límites, derivadas, integrales? Un profesor en ejercicio, que el presente año ha dictado el curso, responde una entrevista estructurada que lo invita a reflexionar sobre su quehacer docente en el curso.

Planteamiento del problema

Es común que cuando se decide estudiar alguna carrera universitaria o técnico profesional relacionada con alguna de las áreas de la matemática, los y las estudiantes dentro de su malla curricular se verán enfrentados al ramo de cálculo. Un curso que poco a poco ha sido un tema de debate, al ser catalogado como uno de los más complicados y que, además, presenta altas tasas de reprobación.

Esta asignatura se imparte en diversas carreras y de diferentes formas, por lo que, durante la formación docente de los investigadores, se ha consultado a diferentes personas que estudian carreras vinculadas con matemática (por ejemplo, contabilidad, comercio exterior, pedagogía en matemáticas, entre otras) sobre qué es lo que entienden por límites, derivadas e integrales. La gran mayoría solo conoce el cálculo mecánico, sin entender la interpretación de los resultados obtenidos, generando que, en cursos más avanzados, enfrenten mayores dificultades para aprobar.

Bustos y Ramos (2021) mencionan que “en Chile, a partir del año 2020 se ha introducido en el currículo de enseñanza secundaria, algunos conceptos del cálculo, entre ellos el de límite de sucesiones, que antes eran exclusivos para la enseñanza superior. En este contexto, los profesores en formación y en servicio chilenos se han enfrentado a considerar este tema dentro de los que debe enseñar" (p.2). Además, se apoyan de la idea de Hitt (2003), en relación a que el contenido resulta ser complejo, pues, muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes son reforzadas por la manera en que el profesor de matemática introduce dichos temas.

Considerado lo anterior, resulta un desafío para los y las docentes la asimilación del contenido de cálculo dentro del aula, pues si ya es un problema notorio por parte de los estudiantes universitarios que en su mayoría eligieron una carrera con afinidad matemática, puede tener una mayor complicación para estudiantes secundarios, debido a su diversidad de gustos, intereses y afinidades con las distintas asignaturas escolares.

Desde la formación docente, uno de los problemas que se visualiza es la falta de escolarización de los contenidos de cálculo. Para Chevallard (1997) el saber sabio debe de interiorizarse por parte de los docentes con el propósito de generar la transposición didáctica hacia el saber enseñar, pero, la interiorización puede resultar difícil de alcanzar para aquellos profesores y profesoras con más años de experiencia, ya que probablemente en los años que estudiaron cálculo no le consideraron gran importancia por no ser contenidos de secundaria.

Referentes Teóricos

En las escuelas se evidencia que “a pesar del esfuerzo realizado para reducir los contenidos y hacer posible la exposición de éstos en un periodo de tiempo tan corto, la forma clásica de impartir la docencia se ha hecho ya inviable. El alumno, sigue dedicando la mayor parte del tiempo en el aula a tomar notas de los resultados que expone el profesor. Esto le hace restar tiempo a la atención a las explicaciones y el alumno sale de la clase con unas notas de las que no entiende el significado y que, en muchos casos, contienen erratas que le conducirán a no poder comprender en ningún momento los resultados" (Martín et. al, 2005, p.6).

En este sentido, las relaciones entre el estudiante, profesor y contenido pueden influir directa o indirectamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo y de cualquier otra asignatura. Las creencias juegan un papel importante en la enseñanza, el "National Council of Teachers of Mathematics" (2015) menciona que la cultura dominante concernientes a la enseñanza y el aprendizaje continúan siendo un obstáculo para la sólida implementación en el salón de clases de la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas, padres y docentes creen que a los estudiantes debería enseñarles como a ellos les enseñaron, mediante la memorización de hechos, fórmulas y procedimientos para luego practicar habilidades, o sea, enfatizando un paradigma bajo la enseñanza del método tradicional.

Tal como menciona Montoya (2018) "La formación de profesores en Chile está dada por todo tipo de establecimiento de educación superior tales como Universidades públicas y privadas e Institutos profesionales. Generalmente en el proceso de formación, el aspecto didáctico está dado por una Facultad de Educación y en lo que respecta a la especialización, esta es de responsabilidad de una facultad competente en el área del conocimiento disciplinar. Este último aspecto conlleva a que la formación del futuro profesor no esté ceñida al currículum nacional, sino más bien a la ciencia en sí misma" (p.29).

Entonces, a modo de síntesis, un profesor que se forma en Chile adquiere conocimientos tanto didácticos como propios de su disciplina dentro de una universidad o instituto profesional que, además, en lo disciplinar profundizan más contenidos de los que aparecen descritos en el currículum nacional. En opinión de los investigadores, consideran que lo último ayuda a los y las profesoras en formación en que puedan estar más familiarizadas con lo que indica el currículum nacional, pues, puede ocurrir que los contenidos a enseñar vayan recibiendo modificaciones por lo que se debe estar preparado para esa ocasión.

Según Thompson (1992) citado por Velásquez (2019) "la mayoría de profesores poseen una concepción acerca de la matemática como un cuerpo inerte de conocimientos, normas y procedimientos que son utilizados para enunciar una respuesta adecuada" (p. 10). En relación a esto, Freitas et al (2004), recalcan que los profesores que tienen experiencia a diferencia de los que no la tienen, suelen ser más innovadores en lo que hacen en el aula que lo que dicen en sus concepciones, por lo que, se evidencian distintos aspectos que influyen en la implementación del conocimiento matemático.

Por lo expuesto anteriormente es necesario encontrar un referente que hable sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Según Montes *et al* (2013) el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) tiene seis subdominios que permitirán comprender aspectos que involucran el conocimiento práctico y didáctico del profesor. En nuestro caso, será el modelo en el electivo de límites, calculo e integrales.

Tabla 1

Conocimientos del profesor de matemática según MTSK

Subdominio	Descripción	Conocimiento esperado que movilice el docente
KoT	Referirse al conocimiento matemático según lo que se encuentra en textos o manuales matemáticos.	Dominio de los fenómenos de estudio y de su rigurosidad matemática, en este caso el dominio de Límite infinitesimal, Derivada e Integral.
KSM	Unión de los conceptos con conexiones entre ellas para dar un sentido lógico al conocimiento matemático.	El orden lógico emplea el tránsito desde funciones, sucesiones, límites, derivadas e integrales.
KPM	Conocimiento basado en la práctica docente para representar de forma asertiva el concepto matemático	El docente debe adecuar los contenidos que tienen su predominancia en la educación universitaria
KMT	Estrategias de enseñanza que fomenten el desarrollo de capacidades procedimentales o conceptuales	El docente arma estrategias de planificación con el fin de desarrollar los objetivos de aprendizaje, actitudes y habilidades necesarias para el electivo de Límites, derivadas e integrales.
KFLM	Conocimiento del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto.	El docente conoce las debilidades y fortalezas de sus estudiantes y apoya su implementación usando de forma efectiva este conocimiento.
KMLS	Conocimiento del profesor sobre los estándares del currículo institucional para saber que se prescribe en cada etapa	El profesor conoce los Objetivos de aprendizaje, los indicadores de evaluación y tiene conocimiento de los programas de estudio entregados por el ministerio de educación.

Nota. Esta tabla entrega la descripción de los subdominios del MTSK y su adecuación para el curso electivo de Límites, Derivadas e Integrales.

Estándares del MINEDUC para la implementación actual

Para la implementación del electivo los objetivos de aprendizaje son como la siguiente tabla:

Tabla 2

Objetivos de aprendizaje durante el año del electivo Límites, Derivadas e Integrales

Unidad 1: Funciones	Unidad 2: Limites	Unidad 3: Derivadas	Unidad 4: Integrales
OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.	OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.	OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.	OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

Nota. MINEDUC (2021, p. 31)

Según MINEDUC (2021) el propósito formativo se enfoca en la aproximación intuitiva, el uso abundante de ejemplos y situaciones concretas buscan formalizar las nociones matemáticas del electivo las cuales buscan ser de utilidad a los estudiantes para sus estudios superiores, técnicos o universitarios, especialmente para el Cálculo de la enseñanza superior. Asi mismo las orientaciones de actividades principales buscan a través de actividades explicar los conceptos necesarios para el estudio de Límites, Derivadas e Integrales. Entre las actividades principales observadas en el programa de estudios del electivo encontramos: Representar las sucesiones como patrones infinitos, Describir la derivada como función de rectas tangentes, Aplicando la derivada para detectar máximos y mínimos, Describiendo la integral definida como área bajo la curva y Aplicación de la integral definida a la geometría.

Con esto se puede contrastar que la implementación que ofrece el Ministerio de Educación tiene un propósito de conceptualización y aplicación para facilitar la inserción en la educación superior donde sus orientaciones no se centraran en lo teórico, por ejemplo, al observar que no se detiene el programa de estudios a hablar sobre conceptos abstractos de Cálculo, de hecho se menciona que las orientaciones deben buscar en el estudiante que desarrollen el pensamiento matemático, en lugar de retener fórmulas u otro tipo de información que carece de utilidad presente y futura si no las entienden. Por ende, los logros de aprendizaje esperados estarán orientados en la utilidad de esta asignatura electiva para entender el objeto matemático estudiado.

Según Ayzum (2011) la autoevaluación docente se concibe como una instancia formativa, en donde se desvelan conductas o aspectos que pueden presentar una propuesta para mejorar la práctica pedagógica, su objetivo de evaluación es de carácter formativo. bajo ninguna circunstancia dan la instancia para poder remediar las deficiencias detectadas.

Metodología

Para la realización de esta investigación se utilizó una metodología de investigación cualitativa, a través de un estudio de caso para indagar y describir las prácticas de los docentes y sus percepciones de logro del electivo.

Para recolectar la información y a modo de experiencia piloto, se optó por una entrevista semi estructurada a un docente que había dictado el electivo en un colegio particular subvencionado, de la comuna de Quilicura, en Santiago de Chile. Se busca entender y orientar las respuestas del docente para describir sus conocimientos prácticos y didácticos (según la perspectiva del MSTK) para posteriormente efectuar un contraste con lo que se plantea en los estándares del Ministerio de Educación (2021), a fin de generar un análisis que entregue evidencias con respecto a la implementación de este electivo.

Las preguntas son elaboradas considerando los 6 subdominios del MTSK y la identidad docente. Para cada subdominio se elaboran dos preguntas exceptuando el dominio KPM que se elaboró cuatro preguntas, además, en el inicio y final de la entrevista se realizó dos preguntas relacionadas a la identidad docente y dos preguntas relacionadas al perfeccionamiento del electivo respectivamente.

Análisis de Resultados

Por un lado, desde una mirada específica de los aprendizajes logrados y no logrados, el docente considera que dentro de las debilidades presentadas por los y las estudiantes, se encuentra la falta de conocimientos previos, los que "modelan y activan su aprendizaje" (Formando Profesores, s.f, p.2). Lo cual, dificulta su implementación de manera íntegra dentro del electivo Límites, Derivadas e Integrales, y trae como respuesta inmediata tener que reforzar contenidos necesarios de álgebra como lo son raíces, logaritmos y funciones, que se han visto afectados por la disminución de horas pedagógicas dedicadas a este eje temático dentro del currículo escolar. Por esta razón, el entrevistado afirma que es de vital importancia comprender conceptos matemáticos fundamentales del álgebra antes de comenzar el trabajo con el objeto matemático en cuestión.

Por otro lado, el docente se siente seguro con su manejo en el área del cálculo universitario al afirmar que "llevo haciendo cálculo hace años de forma independiente", donde se aprecia un buen dominio del KoT, siendo su prioridad enseñar el electivo en base a la rigurosidad matemática, es decir, a una correcta escritura de símbolos en demostraciones y cálculos.

Sin embargo, el propósito del electivo descrito por el MINEDUC (2021), consiste en dar respuesta al entendimiento del objeto matemático por medio de la práctica, lo que puede estar difiriendo con los estándares propuestos, pero que le ayudan al docente a mantener un orden respecto a la enseñanza del saber matemático, tanto para planificar como para hacer las adecuaciones que él estime conveniente al pasar el contenido, pero en este caso, siempre desde lo que el docente entiende o conoce y, no desde lo que el o la estudiante sabe.

A la hora de analizar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje, el docente es consciente de que algunos de los alumnos(as) presentan dificultades en la adquisición de conceptos, como, por ejemplo: la sumatoria telescópica, la resolución de problemas reales y los límites con raíces en el denominador, sin embargo, también destaca en el resto de los y las estudiantes su dominio al derivar e integrar. En suma, a la perspectiva que tiene el docente sobre los objetivos de aprendizajes entregados por el MINEDUC (2021) menciona que son muy amplios para lo que necesitan los estudiantes en la realidad. Por lo que, es necesario que en la implementación de los programas de estudio del electivo Límites, Derivadas e Integrales, exista una capacitación para los y las docentes sobre cómo abordar los contenidos que se plantean desde una mirada didáctica, con el fin de no perder los estándares y objetivos que busca el MINEDUC con el electivo, dando ideas sobre las metodologías y recordando el propósito de su implementación. Dado que, la matemática es una ciencia exacta y universal, lo que cambia es la metodología de enseñanza, o sea, la didáctica. Lo anterior, concuerda con Peralta (2020) "Para el ejercicio de la profesión docente se requiere capacitación en servicio y desarrollo profesional. La primera está relacionada con la mejora en el ejercicio docente, con la práctica diaria en el salón de clases y la segunda con las oportunidades para que los educadores puedan seguir progresando en otras áreas de su desarrollo profesional" (p. 32).

Por consiguiente, al preguntar sobre los resultados obtenidos por los y las estudiantes en el electivo de cálculo, se menciona que, a pesar de las dificultades señaladas anteriormente, se siente satisfecho de sus implementaciones, destacando la importancia que tiene el electivo y la ventaja que les otorga cuando ingresan a la universidad. Sin embargo, el modelo que busca entender estándares curriculares antes de entender el objeto matemático puede alejarse del propósito formativo esperado por las bases curriculares.

Conclusiones

En este estudio hemos observado en la autoevaluación docente una separación entre el propósito formativo del docente en el electivo Límites, Derivadas e Integrales y el propósito formativo formulado por el Ministerio de educación (2021), de esta forma, el objetivo propuesto en el currículum para desarrollar las habilidades matemáticas que favorecen el entendimiento del objeto matemático es reemplazado por el desarrollo de habilidades que favorecen la rigurosidad matemática. En este caso el electivo implementado por el docente es muy propenso a funcionar desde un paradigma positivista, el que tal como menciona Del Valle (2013) pone su acento en lo observable y medible, en donde subyace la cuantificación (p. 115), es decir, está muy limitado en las habilidades, destrezas y actitudes que pueden ser desarrolladas por los estudiantes.

Para finalizar, tomando la idea del docente entrevistado sobre que los profesores han tenido que perfeccionarse en este nuevo electivo, los más adultos para pensamiento computacional y estadística y los más jóvenes para cálculo y geometría 3D. Se puede mencionar que, el hecho de haber obtenido el título profesional no es suficiente para impartir una clase del electivo, o sea, un profesor o profesora nunca debe dejar de aprender ni formarse, lo que concuerda con lo que menciona El Colegio de Profesores de Chile (2016) en que “el docente no solo es un profesional que construye situadamente, día a día, los procesos de enseñanza-aprendizaje, sino también en directo conocedor de las necesidades de las escuelas y de los estudiantes, y actor fundamental de cualquier proyecto de transformación del sistema educativo.” (p.26), buscando que los y las estudiantes analicen, experimenten y comprendan la naturaleza de conceptos matemáticos y las diferentes formas de poder aprender límites, derivadas e integrales. Constantemente los docentes se autoevalúan, comprendiendo que educar es un proceso de reconstrucción, donde los y las docentes no solo deben cumplir con lo que impone el sistema educativo, sino que piensen y sientan que tienen una trascendencia en sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

Ayzum, J. (2017). *La autoevaluación docente de aula: un camino para mejorar la práctica educativa.* Revista Electrónica Diálogos Educativos. REDE, 11(22), 183-196. Recuperado a partir de http://revistas.umce.cl/index.php/dialogoseducativos/article/view/1074

Bustos-Tiemann, C. y Ramos-Rodriguez, E. (2021). *Conocimiento de los temas (KOT) de futuros profesores sobre Límite de Sucesiones.* Congreso Iboamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado* (1ra Ed.). Ed. Aique.

Colegio de Profesores de Chile. (2016). *Saberes de la experiencia. Relatos pedagógicos de docentes de Chile.* Consuelo Hayden G.

Freitas, I. M., Jiménez, R. & Mellado, V. (2004). *Solving Physics Problems: The Conceptions and Practice of an Experienced Teacher and an Inexperienced Teacher.* Research in Science Education, 34(1), 113-133.

Hitt, F. (2003). *El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111). Fondo de Cultura Económica.

Martín, P., Álvarez, J., García, A., Getino, J., González, A. y López, D. (2005). *Cálculo.* Delta Publicaciones. https://elibro.net/es/ereader/umce/169241?page=1

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2021). *Programa de estudio Tercero o Cuarto medio. Formación Diferenciada Matemática, Límite, Derivadas e Integrales.* https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2019). *Bases Curriculares Tercero y Cuarto medio.* Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). *Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK.* Universidad del País Vasco.

Montoya, J. (2018). *Propuesta de trabajo para el estudio del concepto de derivada en educación media.* [Seminario]. Universidad de Concepción.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción. La adopción generalizada de los estándares para la educación para garantizar el éxito matemático para todos.* 3D.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas* (7ma ed.). Santa Fe, México: Cengage Learning Editores.

Velásquez, F. (2019). *Relación entre las concepciones de enseñanza y las prácticas docentes en el tema de las derivadas en la asignatura de Cálculo I.* [Tesis de Doctorado, Universidad San Martín de Porres]. Lima.

Usos del libro de texto gratuito de Matemáticas en la escuela primaria en México

Miguel **Díaz** Chávez
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 151
México
mdiaz3010@gmail.com

Resumen

Este reporte es parte de la investigación que sobre los libros de texto de matemáticas en educación primaria realizamos desde hace tiempo. En este reporte presentamos el análisis cuantitativo y cualitativo de su uso antes y durante la pandemia del COVID-19. El primero lo hicimos en una escuela pública mediante cuestionarios aplicados a los profesores y sus estudiantes, y una muestra de sus libros. El uso durante la pandemia lo analizamos mediante una muestra aleatoria de libros y análisis estadístico. El análisis nos descubre, además de la subutilización, el nivel de dificultad que presentan algunos conceptos matemáticos para el profesor, que podemos traducir en obstáculos epistemológicos; estos hallazgos son insumos fundamentales que nos permiten diseñar actividades de desarrollo profesional orientadas a la deconstrucción conceptual en el profesor y a la mejora del uso.

Palabras clave: Matemáticas, libro de texto; Educación primaria; México.

Introducción

En el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas el estudiante, el profesor, los contenidos de la disciplina, el libro de texto y las nuevas tecnologías, entre muchos otros, son elementos de todo un sistema didáctico, cuya coordinación determina en gran medida el funcionamiento del sistema educativo completo. En este conjunto destaca el libro de texto, el cual debemos subrayar como artefacto de apoyo su concepción es relativamente reciente, basta revisar la historia de la matemática para reconocer que antiguamente los libros, por cierto, escritos por científicos, no tenían orientación pedagógica, sino más bien de difusión del conocimiento; no es sino que mediante transposiciones didácticas ese conocimiento científico se fue transformando en el libro de texto, artefacto imprescindible en el proceso y que de acuerdo a

Fan su importancia como instrumentos de educación en la educación de los niños, ha sido tema de investigación internacional durante mucho tiempo (Fan, 2011).

En la educación primaria de México desde mediados del siglo pasado el libro de texto de matemáticas es gratuito y como producto de las diversas reformas educativas se ha modificado desde el libro de aritmética y geometría a una de las versiones más actuales: *Desafíos matemáticos*. En un ambiente de constantes reformas en este nivel educativo mexicano, donde la evaluación generalmente está ausente, creemos pertinente plantearnos la pregunta ¿Qué uso se le da al libro de texto de matemáticas en la escuela primaria en México?

La investigación sobre el libro de texto de matemáticas atrae la atención desde hace mucho tiempo, como ya lo mencionamos. Por ejemplo Krammer en Holanda explora el rol de los libros de texto como un contexto variable en la relación proceso-producto (Krammer, 1985), esto se muestra en muchos eventos que congregan a la comunidad de investigadores de la educación matemática como por ejemplo en el ICME 10 en el Discussion Group14 *Focus on the development and research of mathematics textbooks* se discutió su rol en el proceso de enseñanza aprendizaje, su desarrollo en distintos países, las relaciones que guarda con el curriculum, la evaluación de los mismos y perfilaron la investigación sobre la efectividad de los mismos en el aprendizaje, la observación etnográfica en el uso en el salón de clases (Mogens, 2004). En el ICME 11 en el Discussion Group17 "*The Changing nature and roles of mathematics textbooks"* se discutió su uso por los profesores, entre otros temas. En el ICME 13 en el TSG 38 *"Research on resources (textbooks, learning materials etc.)* se presentó la investigación sobre el uso de los libros de texto en la escuela secundaria en China desde la perspectiva del rol del profesor y otra que investiga las tendencias de desarrollo internacional de los libros de texto de primaria en el siglo XXI. Al revisar la literatura encontramos el reporte de Fan, L. & Miao, Z. donde destacan los estudios sobre el uso de los mismos (Fan, 2013) y las posibles direcciones que pueden orientar la investigación. En contraste la investigación en México sobre este objeto es bastante pobre *cfr.* ((Lever, 1988), (Avila, 1996), (Rodríguez, 1996)) destacan en esta línea el trabajo de García Herrera quien trata de los usos del libro de texto en la escuela primaria (García, 2001) y la que realizan Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini sobre el discurso en los libros de matemáticas (Cantoral, 2015). En este contexto exponemos nuestros descubrimientos sobre el uso real del libro de texto gratuito de matemáticas en la escuela primaria en México, los cuales además son valiosos insumos para diseñar propuestas de intervención sobre el uso y la deconstrucción conceptual en el profesor.

Metodología

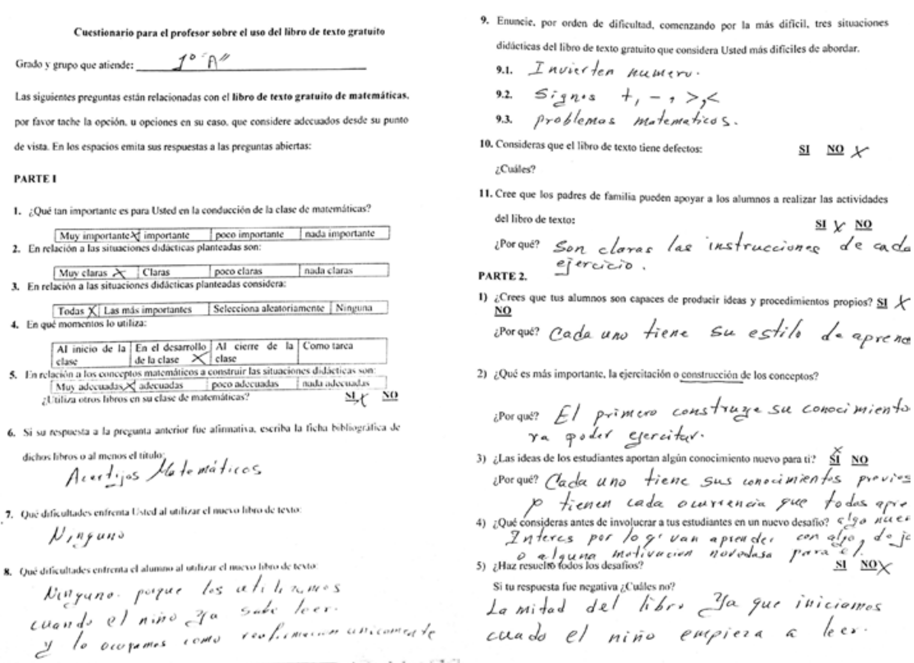
Nuestra investigación en la primera etapa es un estudio de caso, de corte cualitativo, exploratoria y descriptiva. En esta consideramos, entre otras variables en el libro de texto: la estructura, las situaciones didácticas, los aprendizajes esperados. En cuanto a los participantes fueron profesores de una Escuela Primaria perteneciente al municipio de Toluca en el Estado de México de quienes distinguimos su perfil personal (género y edad) y profesional (grado académico, especialidad y experiencia).

Tabla 1
Perfiles de los profesores.

Género(edad)	Grado académico	Especialidad	Experiencia	Grado atiende
Mujer(24)	Licenciatura	Pedagogía	2014-2016	4º
Mujer (43)	Maestría	Ciencias Sociales	1994-2016	2º
Mujer (55)	Normal	Básica	1982-2016	1º
Mujer (54)	Maestría	Educación Familiar	1981-2016	1º
Hombre (50)	Normal	Básica	1984-2016	3º
Mujer (33)	Maestría	Educación Primaria	2003-2016	5º
Mujer (38)	Maestría	Ciencias Educación	1999-2016	6º

La información empírica la recopilamos mediante la aplicación de estos cuestionarios a los profesores y sus estudiantes. El cuestionario para los alumnos consta de cinco secciones que indagan sobre su perfil, la posesión del libro, el conocimiento del mismo, su uso en y fuera del aula, y la secuencia de su utilización en el aula, todas ellas con preguntas abiertas como estas: ¿Cuándo entraste a la escuela este año te entregaron un libro de matemáticas? ¿Cuál es el título del libro? ¿Qué es lo más interesante de tu libro o de matemáticas? ¿En tus clases de matemáticas utilizas el libro de matemáticas? (nunca, a veces, siempre, toda la clase, al principio, al final) ¿Te dejan tarea del libro de matemáticas? ¿Te ayuda alguien en tu casa a resolver los problemas del libro de matemáticas? Cuando te presenta un desafío del libro ¿Qué haces primero?, ¿después? ¿Al final? ¿Comentas con los compañeros distintas estrategias para resolverlo? ¿Se ponen de acuerdo para resolverlo? ¿Comunicas lo que haces? ¿Comprendes siempre lo que los demás exponen?

En relación al cuestionario para los profesores consta de dos secciones, en la siguiente imagen mostramos un ejemplo del mismo:



Cuestionario para el profesor sobre el uso del libro de texto gratuito

Grado y grupo que atiende: 1° "A"

Las siguientes preguntas están relacionadas con el **libro de texto gratuito de matemáticas**, por favor tache la opción, u opciones en su caso, que considere adecuados desde su punto de vista. En los espacios emita sus respuestas a las preguntas abiertas:

PARTE I

1. ¿Qué tan importante es para Usted en la conducción de la clase de matemáticas?

Muy importante X	importante	poco importante	nada importante

2. En relación a las situaciones didácticas planteadas son:

Muy claras X	Claras	poco claras	nada claras

3. En relación a las situaciones didácticas planteadas considera:

Todas X	Las más importantes	Selecciona aleatoriamente	Ninguna

4. En qué momentos lo utiliza:

Al inicio de la clase	En el desarrollo de la clase X	Al cierre de la clase	Como tarea

5. En relación a los conceptos matemáticos a construir las situaciones didácticas son:

Muy adecuadas X	adecuadas	poco adecuadas	nada adecuadas

¿Utiliza otros libros en su clase de matemáticas? SI X NO

6. Si su respuesta a la pregunta anterior fue afirmativa, escriba la ficha bibliográfica de dichos libros o al menos el título: Acertijos Matemáticos

7. Qué dificultades enfrenta Usted al utilizar el nuevo libro de texto: Ninguno

8. Qué dificultades enfrenta el alumno al utilizar el nuevo libro de texto: Ninguno. porque los utilizamos cuando el niño ya sabe leer. y lo ocupamos como reafirmacion unicamente

9. Enuncie, por orden de dificultad, comenzando por la más difícil, tres situaciones didácticas del libro de texto gratuito que considera Usted más difíciles de abordar.

9.1. Invierten numero.

9.2. Signos +, -, >,<

9.3. problemas matematicos.

10. Consideras que el libro de texto tiene defectos: SI NO X

¿Cuáles?

11. Cree que los padres de familia pueden apoyar a los alumnos a realizar las actividades del libro de texto: SI X NO

¿Por qué? Son claras las instrucciones de cada ejercicio.

PARTE 2.

1) ¿Crees que tus alumnos son capaces de producir ideas y procedimientos propios? SI X NO

¿Por qué? Cada uno tiene su estilo de aprend

2) ¿Qué es más importante, la ejercitación o construcción de los conceptos?

¿Por qué? El primero construye su conocimiento ya poder ejercitar.

3) ¿Las ideas de los estudiantes aportan algún conocimiento nuevo para ti? SI X NO

¿Por qué? Cada uno tiene sus conocimientos previos y tienen cada ocurrencia que todos apre

4) ¿Qué consideras antes de involucrar a tus estudiantes en un nuevo desafío? algo nuev Interes por lo q' van aprender con algo, dejo o alguna motivacion novedosa para el.

5) ¿Haz resuelto todos los desafíos? SI NO X

Si tu respuesta fue negativa ¿Cuáles no?

La mitad del libro ya que iniciamos cuado el niño empieza a leer.

Figura 1. Evidencias de las respuestas.

La información vertida en los cuestionarios la concentramos en tablas y luego tratamos de establecer correlaciones entre las respuestas de los profesores y sus estudiantes.

En relación a los libros de texto que usaron estos niños, realizamos un análisis estadístico concentrando la información en tablas de frecuencias como éstas:

Tabla 2
Tabla de concentración de la información por libro.

Desafío	Resuelto						No resuelto
	Totalmente correcto			Parcialmente correcto			
	Todo	Parcial	Incorrecto	Todo	Parcial	Incorrecto	
¿Son iguales?							1
¿Mas o menos?			1				
¿Cuántos faltan?	1						
¡Vamos a contar!				1			
$f(x)$							
$\tilde{f}(x)$							

En la segunda etapa, periodo de pandemia, tomamos una muestra aleatoria de libros de texto de distintos grados y actualmente estamos realizando un análisis estadístico semejante.

Resultados

Del análisis de las respuestas de los profesores deducimos que todos lo consideran muy importante en la conducción de la clase de matemáticas, que es el único libro que utilizan; a excepción de los profesores de primero y sexto grados, quienes utilizan otros libros. En cuanto a los momentos en que lo usan, señalan que, en el desarrollo de la clase, pero además pueden manejarlo los padres de familia en actividades extraescolares auxiliando a los niños. Esto último puede verse en las respuestas dadas a la pregunta once. En el libro para el maestro mencionan que es muy importante asignarle al estudiante un papel protagónico en el uso del libro de texto, en lo cual los profesores están de acuerdo, enfatizando que son seres pensantes capaces, que pueden producir ideas y procedimientos propios para la construcción del conocimiento.

Las secuencias del uso del libro de texto son distintas. Esto se puede ver en los siguientes dos diagramas. El primero del profesor de primer grado, el segundo, del profesor de cuarto grado y el último del profesor de sexto grado; marcando con un color distinto los momentos en que mencionan los profesores hacen uso del libro.

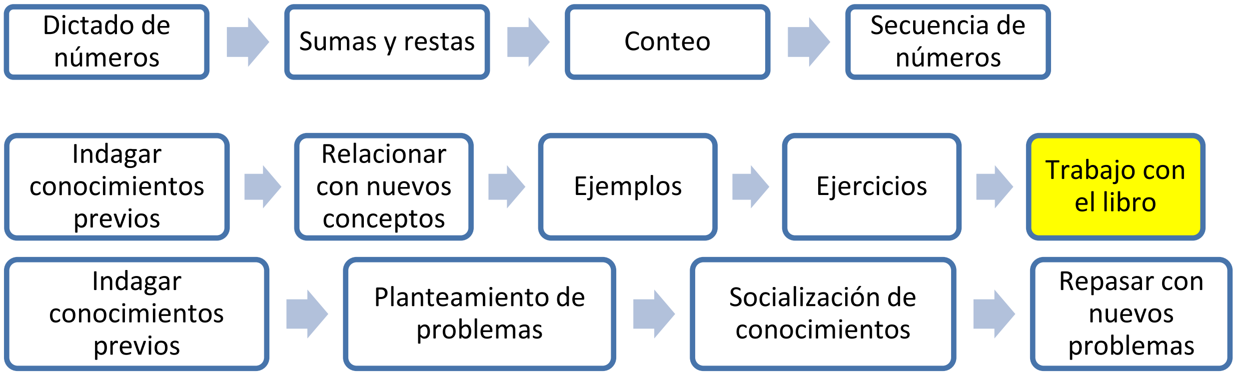


Figura 1. Secuencias de trabajo

Tenemos que tener en consideración que el libro de texto del que estamos hablando, era la primera vez que lo están utilizando en la escuela primaria, lo cual evidentemente nos lleva a pensar que los profesores encuentran algunas dificultades en el mismo y en su uso. En relación a ello los profesores señalan que son poco adecuadas para lo que pretenden construir y para el contexto de los niños enfatizando que en algunos casos deben hacer adaptaciones al menos en uno de los desafíos relacionados con aritmética o geometría y, evidentemente, la resolución de problemas. Mencionan además que la extensión larga de las situaciones didácticas y la falta de tiempo son obstáculos importantes. A eso se añaden las dificultades que tiene el estudiante en su comprensión lectora, así como la debilidad de sus conocimientos previos. Pero la falta de comprensión de los contenidos del libro de texto, señalan, no solo es del estudiante, también incluye a los profesores, específicamente en contenidos como los siguientes: notación desarrollada, unidades de medida, fracciones, ángulos, división, IVA, números decimales.

En relación a las respuestas de los estudiantes. la mayoría afirma que lo obtuvo desde el principio; esto no implica que de manera inmediata se haya utilizado, al respecto un profesor de primer grado menciona: *Se empieza a utilizar cuando el niño empieza a leer*. Los niños confirman que es el único que utilizan en la clase de matemáticas, que sí lo conoce y, en muchos de los casos menciona el título del mismo. la mayoría expresa su agrado y argumentan. En cuanto al uso la mayoría dice que es ocasional, esto contrasta con lo que mencionaron sus profesores. En relación a los momentos en que es utilizado predomina al principio, pocos son los casos que señalan alguna de las otras opciones y, ninguno las tres de manera simultánea. Los momentos de uso del libro se extienden, por sugerencia del profesor, como tarea, y son apoyados en la mayoría sus padres. Estos resultados se refieren a la primera etapa de la investigación, en relación a la segunda etapa, la pandemia del COVID-19 está en construcción.

Conclusiones

El estudio revela por un lado la gran diversidad de usos del libro de texto en las aulas, en cuanto al momento y al espacio, así como la metodología. Por otro lado, muestra las dificultades que enfrenta el profesor de la escuela primaria en el manejo de algunos conceptos matemáticos reflejado en las situaciones que no se realizan, además de la subutilización generalizada del mismo. Además, el análisis nos permite identificar las debilidades conceptuales del profesor, reflejadas en sus creencias y conocimientos, las cuales posiblemente se convierten en fuertes obstáculos epistemológicos que probablemente heredan a los estudiantes. Esto último nos descubre enormes áreas de oportunidad para diseñar situaciones orientadas a la deconstrucción conceptual en el profesor y que probablemente repercutirá en el mejor uso del libro.

Referencias

Avila, A. (1996). Los usos reconocidos de los textos en matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, I*(2), 314-342.

Cantoral, R. M.-G. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(8), 9-28.

Fan, L. (2011). Textbook Research as Scientific Research: Towards a Common Ground for Research on Mathematics Textbooks. *2011 International Conference on School Mathematics Textbooks*. *Shangai, China.*

Fan, L. &. (2013). Textbook research in mathematics education, developmente status and directions. *ZDM Mathematics Education , 45*(5), 633-646.

García, A. (2001). *Los usos del libro de texto en la práctica docente cotidiana de tercero y cuarto de primaria. Un estudio cualitativo.* Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Investigaciones educativas, México.

Krammer, H. (1985). The textbook as a classroom context variable. *Teaching & Teacher Education, 1*(273-278).

Lever, L. (1988). Los libros de texto gratuitos. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, XIX*(4), 155-161.

Mogens, N. (Ed.). (2004). Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education. Roskilde University, Denmark.

Rodríguez, P. E. (1996). La opinión de los maestros sobre los libros de texto gratuitos: tendencias y consensos. *Revista latinoamericana de Estudios Educativos, XXVI*(1), 13-57.

Valor recíproco de tamaño relativo. Normas sociomatemáticas para la enseñanza de la fracción como medida

Ivette Anel **Delgado** Valdez
Universidad Pedagógica Nacional
México
ivette.delgado8@hotmail.com
Luis Manuel **Aguayo** Rendón
Universidad Pedagógica Nacional
México
Luisaguayo726@gmail.com
Orlando Daniel **Jiménez** Longoria
Benemérita Escuela Normal Manuel Ávila Camacho
México
orlandojimenez@benma.edu.mx

Resumen

En esta ponencia se presentan los los resultados de la aplicación de una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que se enmarca de la Educación matemática Realista. En la TEDE las fracciones se consideran como una medida que explica la iteración de un tamaño de la subunidad y se reconoce el valor de la fracción unitaria independiente de la unidad de referencia. Específicamente se analizan las normas sociomatemáticas mediante las cuales el docente busca que los alumnos comprendan que, si $1/n$ se itera n veces se crea algo del mismo tamaño que un entero, también se reflexiona sobre la manera como los alumnos desarrollan simbolizaciones que les ayudarán a comprender la notación convencional de la fracción y su relación con el numerador/denominador. Los resultados muestran la factibilidad de la propuesta.

Palabras clave: educación matemática realista, tamaño relativo; iteración; fracción; medida.

Introducción

Durante más de 25 años en el currículum mexicano para la educación primaria se ha planteado la enseñanza de las fracciones muy ligada con la noción de número racional debido a la influencia del modelo de Kieren (1981), en este modelo los números fraccionarios se ven como un megaconcepto, es decir como un concepto que el alumno ha de construir mediante la articulación comprensiva y paulatina de los diferentes significados de la fracción (parte-todo, medida, razón, cociente y operador) y generalmente se privilegia el significado parte-todo para que los alumnos comiencen la construcción de la fracción. Iniciar con la construcción del significado parte-todo es conveniente porque se comprende sin gran dificultad, sin embargo posteriormente genera limitaciones para construir otras nociones porque obliga a los alumnos a percibir a la fracción como contenida en un entero, lo que dificulta en el futuro la comprensión de nociones como las fracciones impropias.

Por las razones anteriores entre otras, Freudenthal (1983) hace una crítica al modelo de Kieren y propone basar la enseñanza de las fracciones en la comparación que puede relacionarse con las ideas matemáticas de magnitud. Considerando la perspectiva de Freudenthal y siguiendo los principios de la Educación Matemática Realista, Cortina et al. (2008; 2013; 2014; 2021; 2017) diseñaron una propuesta de enseñanza para la enseñanza para las fracciones basada en la medida de longitud, dicha propuesta se se estructuró como Teoría de la Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) y se articuló metodológicamente con el Experimento de Diseño.

Desde la perspectiva teórica asumida, para desarrollar de manera efectiva la TEDE es necesario que el profesor establezca en el aula ciertas normas sociomatemáticas que buscan cumplir dos objetivos esenciales: que mediante la interacción los alumnos puedan reconocer las fracciones como números que permiten cuantificar y; que identifiquen que estos números (las fracciones) son independientes de la unidad de referencia, característica que permite que la fracción sea iterada para medir una longitud menor, igual o mayor la unidad de referencia. Con base en estas ideas la pregunta que guio el presente trabajo fue: ¿Cuáles son las normas sociomatemáticas que el profesor instaura en el aula para que los alumnos reconozcan a la fracción como producto de la iteración de una medida de longitud?

Educación Matemática Realista y normas sociomatemáticas

El desarrollo de investigaciones que buscaban un cambio de perspectiva comenzó con una idea desarrollada en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) en la Universidad estatal de Utrecht de Holanda (ahora Instituto Freudenthal) bajo la dirección de Hans Freudenthal. La idea principal de los primeros estudios giraba en torno a la necesidad de "reinventar las matemáticas" mediante la matematización del mundo real (Cobb et al., 2008) para que los alumnos se sintieran habituados a los problemas que se presentan en su vida diaria y les crean la necesidad de resolverlos. En palabras de Freudenthal "Los seres humanos no tienen que aprender matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1983, p.7).

En correspondencia con esta idea, la Educación Matemática Realista plantea que la enseñanza de la matemáticas no debe partir de una simbolización convencional, al “enseñar matemáticas puras y después mostrar cómo aplicarlas, me temo que no estamos en mejores condiciones. Creo que es justamente emplea el orden equivocado.” (Freudenthal, 1968, p. 5), al contrario de esto se trataría de comprender la manera cómo los conceptos fueron creados, esto es cómo nacen a partir de un fenómeno.

Enseñar desde la matemática realista no significa desarrollar un proceso que va de lo simple a lo complejo sino reconocer las discontinuidades que tiene esta disciplina necesarias para empatarla con lo real, con una actividad humana, es decir de lo que se trata es de “matematizar”, de modelizar matemáticamente determinadas porciones de la realidad. Desde esta perspectiva entonces, reconocer las matemáticas como una actividad humana es esencial para un nuevo y mejor método de enseñanza (Freudenthal, 1973). Entonces, desde la perspectiva de la EMR se considera que el aprendizaje matemático es una actividad necesaria para el alumno que deberá estar orientada por determinados principios como: principio de realidad; principio de niveles; principio de reinvención; principio de interactividad y; principio de interconexión.

Cada principio junto con la fenomenología didáctica permiten que el alumno haga matemática y se convierta en un matemático capaz de reinventar un concepto (reinventar porque dentro del juego de ser matemático él mismo crea un saber ya existente, es decir lo reinventa) (Cobb et al., 2008). La fenomenología didáctica es un concepto fundamental en la EMR puesto que permite analizar todos aquellos conceptos que organizan un fenómeno ya que la matemática nace de una realidad que ha sido organizada por un objeto matemático, cuando se reconoce dicho fenómeno podemos estructurar un experimento de enseñanza que permita a los alumnos realizar el mismo proceso que un matemático y esa realidad organizarla/reinventarla a través de la matematización.

Sin embargo, en el proceso de enseñar matemáticas se manifiestan las interacciones entre profesor-alumno que no son casuales sino que están regidas por “obligaciones” o normas no explícitas que cada uno debe cumplir. En las clases de matemáticas, las normas sociomatemáticas responden a una retórica matemática y regulan las argumentaciones influyendo en las oportunidades de aprendizaje, es decir, las normas sociales se convierten en normas sociomatemáticas porque hacen referencia a lo que es “matemáticamente aceptable” (Yackel y Cobb, 1996). Es decir, existe un proceso de negociación que establece nuestras obligaciones específicas (y recíprocas) dentro de un proceso didáctico que debieran originar un conocimiento, y un metaconocimiento, una norma sociomatemática busca que, cuando el alumno encuentre un fenómeno que organizar pueda ser consciente de las obligaciones que tiene para alcanzar un conocimiento y, a la par, reconozca las obligaciones que el docente tiene para lograr dicho objetivo.

Ahora bien, la puesta a prueba de un experimento de enseñanza que nace de una fenomenología, nos permite analizar la manera como los principios de la EMR y las normas sociomatemáticas matemáticas se combinan para crear cada una de las prácticas en la que los alumnos podrán “reinventar” las ideas que giran en torno al concepto de fracción unitaria. Las normas sociomatemáticas, que son normas exclusivas de la clase de matemáticas (Yackel y Cobb, 1996), dan la pauta que debe seguir el profesor para hacer de la clase un espacio de creación del objeto matemático a partir de preceptos como que el aprendizaje es meramente un objeto social (por eso las conversaciones colectivas) además de una actividad en sí misma que permite entender y argumentar aspectos que giran en torno a los mismos conceptos. Precisamente la presente investigación trata del análisis de las normas sociomatemáticas que permiten ver qué es lo que se hace el docente para lograr que los alumnos realicen la matematización y la reinvención de lo que se conoce como "fracción unitaria".

Metodología

La investigación se basa en la metodología del "Experimento de diseño" que contempla la necesidad de contar con una herramienta que en el ámbito educativo permita realizar investigación, sobre todo en educación matemática. Los experimentos de diseño son entonces una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre la teoría educativa, los artefactos diseñados y la misma práctica;

> los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos y que son necesarios para obtener evidencias y a la vez nutrir las investigaciones en Matemática Educativa. (Briceño y Buendía Ábalos, 2015)

El experimento de diseño parte de la puesta en prueba de una Teoría Hipotética de Aprendizaje (THA) para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis en torno a su y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje (TCA) que plantea lo qué debe hacer el docente para alcanzar sus objetivos, ambas teorías nos ayudan a planear los objetivos y los medios y también a analizar los resultados para dar cuenta si los objetivos se cumplieron, en este sentido cabe aclarar que lo replicable no son las actividades sino la agenda, el Experimento de Enseñanza y que a partir de nuevas conjeturas se puede llevar a cabo un nueva investigación. Por otra parte, la formulación de teorías de la enseñanza en un dominio *específico* (TEDE), tiene el propósito de apoyar a los docentes en sus tareas de enseñanza ya que en una TEDE se propone una progresión de objetivos de aprendizaje y los medios didácticos que servirán para lograrlos (Stephan et al., 2003).

Nuestra TEDE busca ser un recurso que apoye a los docentes a lograr que sus alumnos desarrollen comprensiones relativamente complejas de las fracciones como medidas que dan cuenta del tamaño de una longitud. Asimimos que esta forma de entender las fracciones es una base para que los alumnos comprendan las características y propiedades de los números racionales y las prácticas cuantitativas, típicas de las disciplinas empíricas, en las que se comparan mediciones en términos de tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003). La progresión de objetivos de aprendizaje en la TEDE se formularon tomando en consideración otros dos principios de la EMR: *el del nivel* (pasar por varios niveles de comprensión*)* y el de *reinvención guiada* (Heuvel-Panhuizen, 2009).

Nuestra TEDE plantea como realidad matematizable un contexto derivado de la leyenda de un antiguo pueblo (Los Acajay) famosos por su habilidad para fabricar cerámica, en este contexto surgen varias problemáticas ligadas con la medición que integramos en la TEDE que llamamos "La vara de Kía". Por otra parte, la progresión de objetivos de aprendizaje se define en términos de la emergencia secuencial de prácticas matemáticas (Stephan et al., 2003), por esta razón la TEDE se estructura con seis prácticas matemáticas: 1) medir longitudes utilizando una unidad estandarizada, y números enteros; 2) reconocer el tamaño relativo de una subunidad de medida, cuya longitud corresponde a una fracción unitaria de la longitud de la unidad de referencia; 3) interpretar una fracción como una medida de longitud realizada a través de iterar una subunidad; 4) interpretar una fracción como una medida de longitud que puede ser menor, mayor o igual a otra medida realizada; 5) interpretar las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces y; 6) interpreta a las fracciones como medidas de longitud que pueden ser menores, iguales o mayores a un medio.

Congruentes con el Experimento de Diseño se organizó un equipo de investigación formado por los diseñadores de la TEDE, el investigador que fungió como profesor en la experimentación de la propuesta y dos investigadores observadores que analizarían el desarrollo de la TEDE y al final de la experimentación harían un análisis retrospectivo que permitiera aprobar algunas prácticas y modificar otras. La TEDE se experimentó con un grupo de 31 alumnos de 5º grado de educación primaria (edades entre 11 y 12 años) en una escuela de la ciudad de México ubicada en una zona de clase trabajadora. La TEDE se trabajó durante 26 sesiones de hora y media cada una que fueron videograbadas, no obstante en esta investigación nos centramos en las primeras 15 clases que abarcan las primeras cuatro prácticas matemáticas y que tratan de la introducción de las fracciones como un tamaño relativo (propias e impropias).

Es importante aclarar que esta ponencia se construyó desde la perspectiva del investigador-observador que como se mencionó, forma parte del equipo en el experimento de diseño. Esta posición nos ha permitido analizar la actividad del profesor centrándonos en las normas sociomatemáticas necesarias para que el alumno reorganice sus esquemas fraccionarios.

La reinvención de las fracciones unitarias. Una norma sociomatemática

El experimento toma su principio de realidad (lo imaginable, no solo lo palpable por los sentidos) de la narración sobre un antiguo pueblo mesoamericano, los Acajay, famosos por su habilidad para la elaboración de cerámica. Los Acajay usaban la vara de Kía o Tikje (vara de aproximadamente 24 cm) para hacer sus mediciones, la idea es que siguiendo el principio de realidad los alumnos imaginen los problemas de medición que tenían los Acajay.

En la primera práctica matemática de la TEDE los alumnos trabajan sobre la norma sociomatemática “reconstrucción del significado de medición”, la cual busca en un principio que reconozcan la importancia de la medición como práctica social y la necesidad de contar con unidades y subunidades para poder dar cuenta de una medida exacta. Cuando los alumnos usan la vara de Kia como herramienta de medición estandarizada se enfrentan a nuevos retos, al medir su altura se dan cuenta que pueden medir más de cinco Tikjes pero menos de seis, a partir de ello buscan nuevas herramientas para resolver la problemática de medir el “cachito” que falta o que sobra. En esta búsqueda, la guía del docente resulta fundamental para que en la realidad que han sido sumergidos los alumnos puedan matematizar y buscar alternativas para la solución del problema de los “cachitos que faltan o sobran”.

Para generar la reflexión de los alumnos el profesor plantea una situación en la que se debe cubrir completamente una longitud pero que no queden queden "cachitos sin cubrir, las subunidades con las que se ha de cubrir esa longitud se llaman "pequeños en la narrativa de los Acajay y cumplen un requisito específico: un pequeño de a dos, por ejemplo, debe ser iterado dos veces para cubrir la longitud del Tikje, esta idea permitirá al alumno percibir la subunidad como algo que no está contenida dentro del entero sino que es independiente y de esta manera "esperamos que los alumnos interpreten las fracciones como medidas que explican la iteración del tamaño de una subunidad" (Cortina, 2014, p.7).

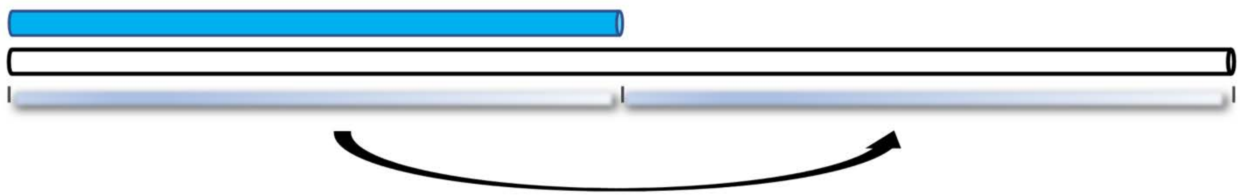


Figura 1. Subunidad. El pequeño de dos.

Lo interesante del experimento de enseñanza aparece cuando los alumnos comienzan a crear otros "pequeños" (el pequeño de tres que debe ser iterado tres veces para cubrir la unidad, el pequeño de a cuatro que debe ser iterado cuatro veces para cubrir la unidad…), pues como lo señala Gravemeijer et al., (2003) con esta herramienta (los "pequeños") los alumnos encuentran sentido a su actividad y la hallan útil dentro de la matematización que viven en la realidad de la narrativa. Steffe (2002) encuentra en la actividad de iteración un nuevo sentido al esquema fraccionario alejado de las partes de un todo que permite ir entendiendo la noción de tamaño relativo.

Al tener interacciones en la clase mediante las conversaciones colectivas, los alumnos identifican en un primer momento la relación recíproca de tamaño relativo de cada uno de los "pequeños" que han elaborado y dimensionan su longitud al considerar el número de veces que se requieren iterar para cubrir la unidad de referencia, de esta manera los alumnos pueden comprender no sólo la fracción unitaria sino también su relación con el entero, es decir son capaces de ir reinventando la idea de que "1/n como algo que cuantifica el tamaño de una sola cosa, la cual, si se itera (o copia) n veces, produce algo que es del tamaño del entero (Cortina et al., 2008, p. 43).

Conforme avanzan las sesiones de la segunda práctica observamos que los alumnos reconstruyen la idea de fracción, sobre ese respecto Steffe (2002) reconoce que el esquema fraccionario del alumno va cambiando cuando sus argumentos toman sentido en la iteración y no en la parte de un todo, cuando los alumnos son capaces de expresar estas ideas comparten los objetos mentales que han desarrollado que pueden ir concretando para dar pie a una matematización vertical (dentro del principio de niveles), pues van organizando sus ideas dentro de la realidad en la que están inmersos y esquematizan sus respuestas para dar origen a ideas matemáticas que posteriormente servirán para ser matematizadas y dar origen a nuevas ideas y conceptos matemáticos.

Con las actividades de matematización realizadas en este primer momento los alumnos han sido capaces de determinar el tamaño relativo de las fracciones unitarias y comparar cuál fracción ("pequeño") es mayor que otra al reconocerlas como elementos independientes de la unidad de referencia e identificar que su tamaño está determinado por la relación que Thompson y Saldanha (2003) expresan de la siguiente manera: Si A es seis veces B entonces B es 1/6 parte de A. Con esta comprensión como base posteriormente los alumnos podrán percibir la fracción en términos multiplicativos al saber que pueden ser iteradas de menor, igual o mayor que la unidad de referencia.

La simbolización del denominador

Cuando los alumnos avanzan en el trayecto signado por la TEDE reconocen que los "pequeños" o subunidades representan una herramienta que les ha de permitir cuantificar (Stephan, 2002) y que no está contenida dentro del entero, en este sentido con el experimento de diseño buscamos "orientar a los estudiantes a pensar en las fracciones unitarias como multiplicandos (…) que sean concebidas como números que cuantifican tamaños, por tratarse del tamaño de una sola cosa]" (Cortina et al., 2008, p. 43).

Gravemeijer et al., (2003) menciona que no sólo es importante que los alumnos se relacionen con nuevas herramientas sino que también vayan adentrándose al mundo de los símbolos, por ello en esta segunda práctica se busca, además de reconocer las fracciones unitarias, el uso de un símbolo que vaya acercando a los alumnos a ver las ideas desarrolladas en el mundo Acajay como una idea matematizadora de las fracciones.

La idea de acercar al alumno a esta simbolización es que puedan reconocer al pequeño del que se echa mano como el denominador (más allá de la idea de que denominador es el número en que se divide un entero), por ejemplo si se usa el pequeño de cinco podría saberse que estamos hablando de 1/5 que ha de ser iterado *n* veces. Los alumnos, a través de la guía del docente, van proponiendo algunas maneras de simbolizar el denominador hasta llegar a lo que se propone dentro de la agenda:

$\boxed{\mathbf{2}\quad\quad}$

Figura 2. Notación no convencional con la que se presenta el tamaño de la subunidad "pequeño" de a dos.

El número colocado dentro del recuadro les permite al alumno expresar y comprender de forma más sencilla de qué "pequeño" se está echando mano, sin embargo los conocimientos que giran alrededor de esta escritura va más allá; existe un conocimiento de cuál es tamaño relativo de cada uno de los pequeños y a su vez permite crear reflexiones de que su tamaño no depende del número (en relación a las nociones de números enteros que se han adquirido) sino que su tamaño gira en torno a la idea de valor recíproco de tamaño relativo.

A través de esta segunda práctica los alumnos han logrado identificar el tamaño de una fracción unitaria (en términos del tamaño del pequeño), dicho conocimiento se ha generado a partir de las ideas de medida y con la noción de inverso multiplicativo; los alumnos transitaron por la creación de los pequeños que los llevo a entenderlos como algo externo al todo (la vara) y que, en posteriores prácticas, les ha de permitir poderlo iterar de manera menor, igual y mayor que la unidad de referencia.

Referencias y bibliografía

Briceño, O. A. y Buendía Ábalos, G. (2015). *Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45, 65-83. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/ view/656/1189

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). *Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education*. Education et Didactique, 55-73.

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Claudia, Z. (2008). *Un punto de partida alternativo para la instrucción de fracciones*. Educación Matemática, 20(2), 35-61

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la eneñanza de las fracciones*. Educación Matemática, 25(2), 7-29.

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones* . Educación Matemática, 25(2), 7-29.

Cortina, J. L. (2014). *Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño*. Educación Matemática, 270-284.

Delgado, I. y Cortina, J.L. (2021). *La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México*. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y Profesión Docente entre Prescripciones Teorías y Prácticas Educativas*. (PP. 325-342). Taberna Librería Editores.

Freudenthal, H. (1968). *Why to teach mathematics as to be useful?* Educational Studies in Mathematics.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* . Dordrecht: Reidel Publis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Kluwer Academic Publisher.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrech, Países Bajos, Utrech CD-β Press.

Gravemeijer, K. (2004). *Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education*, en Mathematical Thinking and Learning, núm. 6, pp. 105-128.

Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. Certidumbres e incertidumbres, S/N.

Kieren, T. (1981). "*The rational number construct–Its elements and mechanisms"* . En T. E. Kieren, Recent research on number learning (págs. 125-149). Columbus: OH:ERIC/SMEAC.

Steffe, L. P. (2002). *Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional*. Departamento de Educación Matemática .

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2003). *Diario para Investigación en Matemáticas Educación*. Revista de investigación matemática, 1-123.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), *"Fractions and multiplicative reason- ing*", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Yackel, E., y Paul, C. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. Journal for Research in Mathematics Education, 458-477.

Índice alfabético de autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Investigación

Volumen 10, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

ISBN: 978-9945-18-794-6

https://ciaem-iacme.org