EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Trabajos invitados de la XVI CIAEM

Patrick Scott, Yuri Morales
y Angel Ruiz
Editores

CIAEM
IACME
desde - since 1961

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2023
Trabajos invitados de la XVI CIAEM
[Volumen 1, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-785-4
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Minicursos

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática*** **(XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: "un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas" (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con "sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo". Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional.*

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

El presente volumen es parte de la colección digital *Educación Matemática en las Américas 2023*, que corresponde a las *Memorias* de la *XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (celebrada en Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023).

Los diez volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Estos volúmenes se pueden revisar o descargar gratuitamente en la página ***Memorias XVI CIAEM*** del sitio principal del CIAEM.

Conferencias plenarias

Teaching for Robust Understanding: Powerful instruction for all Students

Alan H. **Schoenfeld**
School of Education
University of California, Berkeley
alans@berkeley.edu

Abstract

We want students to emerge from our classrooms being mathematically knowledgeable and resourceful thinkers and problem solvers, with a sense of personal agency and positive dispositions about themselves as mathematics learners. The question is, how do we get there? That is, what kinds of learning environments help all students become powerful mathematical thinkers? The Teaching for Robust Understanding (TRU) framework says what counts. If the content is rich; if students are engaged in sensemaking and productive struggle; if there are ways to engage every student with core mathematical content and practices; if norms support engagement that supports a sense of agency, ownership over the content, and a sense of mathematical self; and if there are robust feedback mechanisms (formative assessment), then good stuff happens.

Key words: Leaning; Powerful instruction; Rich mathematics; Cognitive Demand; Equitable access; Mathematical identity; Formative assessment

Introduction

We all want to create classrooms from which students emerge as powerful and agentive mathematical thinkers. The students should know a lot of mathematics – not just content, but also practices such as reasoning, problem solving, and mathematizing. They should have positive mathematical dispositions and identities, seeing themselves as capable and actively using their mathematical understandings, both inside the classroom and in the "real world." This is a two-fold challenge. The first challenge is the complexity of teaching itself. There are so many things to attend to when we teach. Which ones make a difference, which ones should we attend to? The second is, how can we get better at those things?

The Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework addresses these challenges. The TRU framework identifies five key dimensions of mathematics classrooms. Research indicates that the degree to which students emerge from instruction being powerful thinkers is directly related to the degree that instruction does well along the five dimensions of TRU. The challenge, then, is to improve instruction along the five TRU dimensions.

The TRU research group (see https://truframework.org/) has developed numerous tools to help professional learning communities work together, in sustained ways, to reflect on and improve their teaching practices. We have just published two books aimed at helping teachers understand and implement the ideas in TRU. *Helping Students Become Powerful Mathematics Thinkers: Case Studies and Methods on Teaching for Robust Understanding* (Schoenfeld, Fink, Zuñiga-Ruiz, Huang, Wei, & Chirinda, 2023) presents a series of case studies of classroom teaching. It engages readers in conversations about what teachers might do, and how different choices might affect what students learn. *Mathematics Teaching on Target: A guide to Teaching for Robust Understanding at all Grade Levels* (Schoenfeld, Fink, Sayavedra, Weltman, & Zuñiga-Ruiz, 2023) shows how to enrich tasks and activities so that students can interact more deeply with rich mathematics.

This paper introduces the TRU Framework and then illustrates our tools for professional development. It works quickly through one case study from the first book and showing how the ideas in the second book can be used to enrich classroom activities.

The Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework

There is a great deal of research on things that matter in instruction. The problem is, there is too much. (If you do a google search for "improving teaching," google will report "about 2,830,000,000 results!") Long lists of suggestions are of little value: Teachers don't have the time to try dozens of suggestions. Given that there are so many, how would they know which to try, and what to focus on?

Our intention was to distill the literature – which literally had hundreds and hundreds of ideas for improving teaching – into a collection of categories with the following properties:

- Every category represents an important dimension of instruction
- Each dimension can be the meaningful focus of professional development
- Together, the dimensions focus on everything that is important
- There is a small number of dimensions, so it is possible to keep them all in mind during planning, teaching, and reflecting on lessons.

After numerous attempts, we found a clustering that was *coherent* – but, did the categories in it actually represent aspects of teaching we could see in practice; were they meaningful; but, would it be *useful*? This was an empirical question. Could we identify each dimension in practice? Could we say how effective the teaching was in that dimension? And, how could we test the hypothesis that doing well in various dimensions would result in students learning more?

The way to test these ideas is to develop a scoring rubric. Videotapes of teachers who were known to be excellent provided examples of the kinds of teaching we wanted to see. After a number of attempts we were able to develop a scoring rubric that responded to variation – lessons that felt richer scored higher – and in which higher scores corresponded to classroom activities valued in the literature on teaching. Later, using a database that included videos of classrooms and records of student scores on tests of thinking and problem solving, we were able to show that, the better a classroom did on the five dimensions of TRU, the more students learned. (Schoenfeld, Floden, and the algebra teaching study and mathematics assessment projects, 2018) Other studies, e.g., Prediger & Neugebauer 2021, replicated and extended these findings. At a theoretical level, we can be confident in saying that the framework reliably identifies the important dimensions of classroom activity.

Figure 1 presents a schematic description of the TRU Framework. The better a classroom does in every dimension, the more students will learn.

The Five Dimensions of Powerful Mathematics Classrooms

The Mathematics	Cognitive Demand	Equitable Access to Mathematics	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful mathematical thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn mathematical ideas, techniques, and perspectives, make connections, and develop productive mathematical habits of mind.	*The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important mathematical ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematical content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.*	*The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about mathematical ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.*	*The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.*

Figure 1. The five dimensions of powerful mathematics classrooms

The first dimension concerns the quality of the mathematical content and practices that the students encounter. Mathematics should be coherent and connected. Students should see connections between underling ideas and procedures they use. They should have opportunities for mathematical sense-making, reasoning, and problem solving. If these opportunities are present in the classroom, then there is the potential for significant learning. If they are not, then it is unlikely that students will learn them. The quality of the mathematics students experience establishes an upper bound on what they will learn.

But, the fact that high-quality mathematics is being discussed is no guarantee that students will learn it! I have attended many lectures where the mathematics appeared to be beautiful, but I didn't understand it at all. Mathematics learning is a form of sense-making. To learn, you need to be able to connect what you know to the things you are studying. This is dimension 2 of TRU, Cognitive Demand. If what you are working on is too easy, there is nothing to learn. But if what you are working on is so far from what you know that you cannot make process, then meaningful learning will not take place. The idea is to engage in "productive struggle." The central question for Dimension 2 is, how much opportunity is there for sense-making and productive struggle?

Dimension 3 concerns Equitable Access to mathematics. In an equitable classroom, *every* student has the opportunity to engage meaningfully with the important mathematical ideas in the lesson. The question for Dimension 3 is, how many students have such opportunities?

Dimension 4 concerns students' mathematical identities. Some students think they are bad at mathematics. They don't enjoy it, avoiding mathematics when they can. Others enjoy mathematics. They jump into opportunities for problem solving and for thinking things through. They have a sense of initiative, or mathematical agency. When they have made sense of an idea, they have a sense of ownership of that idea. They have positive mathematics identities. The question is, to what degree does the classroom provide every student with opportunities to engage with mathematics so that they can develop positive mathematics identities?

Finally, Dimension 5 concerns formative assessment. When instruction works well, student thinking is made public and instruction responds. If students are not challenged, they are given more challenging tasks. If students are simply using formulas, they are asked why the formulas work. If students are lost, they are given some hints – not so much that challenge is removed, but enough to enable them to engage in productive struggle. The questions for Dimension 5 are, how responsive is instruction to student thinking? Can responsiveness be improved?

Most frameworks for discussing teaching focus primarily on the teacher. TRU is different. Since our interest is in how instruction supports student learning, the fundamental question in TRU is: How does the student experience instruction? That is, TRU involves a fundamental shift in perspective, from teacher-centered to student-centered. The key question is *not:* "Do I like what the teacher is doing?" It is: "What does instruction feel like, from the point of view of the student?" Figure 2 summarizes this emphasis. Our research and development are devoted to helping teachers make students' answers to the questions in Figure 2 as rich as possible.

There is a great deal of evidence for the validity of the TRU Framework, that teachers can learn to teach in ways that are increasingly aligned with Figures 1 and 2, that when instruction aligns with TRU, students learn a great deal. See Prediger & Neugebauer 2021; Schoenfeld 2013, 2014, 2015, 2016, 2018; Schoenfeld et al., 2019a,b).

Observe the Lesson Through a Student's Eyes

The Content	• What's the big idea in this lesson? • How does it connect to what I already know?
Cognitive Demand	• How long am I given to think, and to make sense of things? • What happens when I get stuck? • Am I invited to explain things, or just give answers?
Equitable Access to Content	• Do I get to participate in meaningful math learning? • Can I hide or be ignored? In what ways am I kept engaged?
Agency, Ownership, and Identity	• What opportunities do I have to explain my ideas? In what ways are they built on? • How am I recognized as being capable and able to contribute?
Formative Assessment	• How is my thinking included in classroom discussions? • Does instruction respond to my ideas and help me think more deeply?

Figure 2. Observe the lesson through a student's eyes.

Once my research group was confident that TRU could be helpful, we collaborated with school districts and professional developers to create TRU-related tools that teacher learning communities could use. Two new books will be published in June 2023. The rest of this paper describes what the books offer, both for learning about rich mathematics classrooms and for improving classroom materials and activities. There is only space here to outline the most important ideas. In my conference presentation I will give examples.

Helping students become powerful mathematics thinkers: Case Studies and Methods of Teaching for Robust Understanding

We do not underestimate the challenges of what we call "ambitious and equitable" teaching – teaching that provides *all* students opportunities to engage with, and learn, rich mathematics. It takes years to develop the understandings and skills that are needed. And, of course, the process never stops. Our growth as teachers comes from continuous reflection on our teaching. Although this kind of reflection can be done by individuals, results tend to be more powerful when reflection is done collectively in a professional learning community, in which teachers and others work together to plan instruction, teach, reflect on what happened, and revise accordingly.

Our first new book, *Helping students become powerful mathematics thinkers: Case Studies and Methods of Teaching for Robust Understanding* (Schoenfeld, Fink, Zuñiga-Ruiz, Huang, Wei, & Chirinda, 2023), provides a comprehensive overview of the TRU framework and a number of tools to help teachers do this. The book starts with a deep description of the TRU framework, explaining what the five TRU dimensions mean in practice, and why they are important. The main part of the book consists of three case studies of instruction. Each case looks closely at about 20 minutes of instruction. Our intention is not to critique the instruction, but to "problematize" it – to examine the options the teacher faces, what possibilities there are for teacher and students, and to think about what the outcomes of different pedagogical decisions might be – not just for mathematics learning, but for all five dimensions of TRU. The experience is like saying, "suppose we could analyze the lesson in 'slow motion.' Let's think about (a) the implications of what the teacher and students did do, and (b) what other actions the teacher might have taken, and the implications of those actions."

Imagine stopping the video of a lesson at a particularly interesting point, or reading a transcript of the lesson up to that point. We see what has taken place; let us explore the implications. We explore all five dimensions.

Consider Dimension 1, The Mathematics: Can we imagine the kinds of mathematics that the students will engage in from this point on? Is it likely to be be richer and more connected? Or, did the interactions seem to narrow the space, so that the mathematics is not likely to be as rich as we would hope? Are there other things the teacher or students might have done or said, that would open things up mathematically, or spark richer explanations, or…?

For Dimension 2, Cognitive Demand: Do the students seem to be working in the "zone of proximal development" (Vygotsky 1978)? Are they engaged in productive struggle? What did the teacher do to address this issue, and how do we think the teacher's choice might play out? If the tasks seem too easy, what options might there be to make the students' work richer and more challenging? If the students seem "lost," are there ways to help them grapple with the problem without telling them what to do or giving hints that remove the challenge completely?

Here is a brief example of the kind of dialogue we have with readers. In one of our case studies, a group of students is clearly confused when the teacher comes to their table. After discussing what they have done, the teacher leaves the students to struggle, without giving them any hints about which direction to pursue. This raises many questions to think about. Will they get frustrated? If they don't make progress, will this be bad for their mathematical identities? Or, if they are successful, will that be good for their identities, since they know they made sense of something challenging? We don't have definitive answers – our goal is to illustrate the ongoing dilemmas of teaching, and the possible consequences of particular decisions. In the case study, we get to follow the students after the teacher leaves them, to see how the teacher's decision actually played out.

For Dimension 3, Equitable Access: Do we see all students engaged with the core mathematics in the lesson? If not, how might that be addressed? What did the teacher do; what might we do in a situation like that? Next time, might we re-design the task so that there are more ways to approach it, or more connections to be made? If two students find different solutions, asking the students to compare and contrast their solutions can enrich the mathematics. This is a much more interesting situation than having a problem for which there is only one way to obtain a solution.

For Dimension 4, Agency, Ownership, and Identity: What opportunities are there for students to venture ideas, to discuss them with others? How do students respond to each other? Are the conversations collaborative? Do students question and build on each other's ideas? What do we think the consequences of the interactions might be? Are there alternative ways to frame student interactions, or ways to modify the activities, so more students can engage productively?

For Dimension 5, Formative Assessment: Is student thinking made public? In what ways? Are there questions one can ask, or instruction the teacher can give, that will make more student ideas available for instruction? In the lesson, are modifications made when it appears that students are bored (the tasks are too easy), or lost (the tasks are too difficult)? Are there ways to design for such circumstances in advance?

We begin each case study with an extended exploration of the mathematics involved. What opportunities does the task or problem provide for deep mathematical thinking? How many different ways are there to solve the problem? How can we connect the solutions, and what can we learn from those connections? After exploring the mathematics, we then describe the classroom in some detail – the students and the teacher, what the students are likely to know, and whatever background that readers might find useful when they think about the lesson. Then we examine the lesson. We stop every few minutes, to explore the possibilities as discussed above. (Of course, those questions are generic. In the case studies, we explore particulars.) At the end of each case, we review the lesson as a whole.

Each case is written as though we were in a room with the teachers, discussing the lesson. "How would you summarize what has happened so far? Does anything in particular strike you?" "We see the following dilemma. What do you think the options are, what are the possible consequences?" Then we say what we think – not because it's necessarily the "right answer," but because it could serve as material for further conversation with the group. That's how we've done "in-person" professional development, and we've done our best to capture the character of those conversations. We think of the book as a conversation between us and a community of teachers. In fact, we hope that groups of teachers will read the book together, working through the cases.

Why? We hope that, once the community has learned to problematize teaching as suggested by the cases, it will continue to do so with their own teaching. In the successful learning communities we know, teachers bring issues to the group. The say "I'd like to work on this issue (or problem)," and tape their attempts. Then the group analyzes what happened, making suggestions for next time. Our goal in the book is to build the capacity of teachers to do this kind of inquiry, in an ongoing way. Ongoing reflection is the key to professional growth.

Of course, coming up with the "right" questions to stimulate rich discussions is not easy. For that reason, the book also contains two tools, the *TRU Conversation Guide* and the *TRU Observation Guide*. For each dimension, both guides offer questions that can be used to plan lessons, to keep in mind during the lessons, and to reflect on them. A wide range of groups have found these questions to be useful stimuli to professional growth.

Mathematics Teaching On Target: A guide to Teaching for Robust Understanding at all Grade Levels

The vast majority of curricular materials lack imagination or relevance to student lives, making it difficult for students to have rich and meaningful conversations in class. The question is: can we enrich the tasks or activities, to provide more opportunities for ambitious and equitable instruction?

The TRU Framework provides a structure for thinking about this question. We can ask about how to: (1) enrich the mathematics in the task or activity; (2) modify the task, so that more students have the opportunity to engage in productive struggle; (3) open up the task, perhaps to different approaches, so that more students can engage meaningfully; (4) provide more opportunities for students to discuss and explain their work to each other, and (5) make student thinking visible, so that instruction can be modified for greater impact on student learning.

The metaphor we use is a target. When you shoot an arrow at a target, you hope that it will land near the center. Now consider an *educational* target. If a task "lands" near the center of the target, then it will provide rich opportunities for learning. If a task is not near the center, then the question is, what can we do to move it toward the center?

Our new book *Mathematics Teaching On Target: A guide to Teaching for Robust Understanding at all Grade Levels* (Schoenfeld, Fink, Sayavedra, Weltman, & Zuñiga-Ruiz, 2023) offers fifteen targets – three targets for each of the five dimensions. Here we describe the mathematics targets and give one example of their use.

For the mathematics dimension, our over-arching question is,

> ***In what ways do classroom activities provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful mathematical thinkers?***

This big question is decomposed into three main sub-questions:

> <u>Sub-Question 1</u>: What is the main mathematical idea? How does it develop? How is it connected to what students know? How is it connected to the grade level standards for mathematics content and practices?
>
> <u>Sub-Question 2</u>: In what ways does student participation in classroom activities support their learning of mathematical content? What connections are built between procedures, underlying concepts, and meaningful contexts of application?
>
> <u>Sub-Question 3</u>: In what ways does student participation in classroom activities support the development of important mathematical practices and other productive mathematical habits of mind?

Each sub-question serves as the main topic for one target. As an illustration, Figure 3 shows the first mathematics target, which corresponds to sub-question 1 above. You will find many properties of tasks on the target. The properties on the outer ring provide little opportunity for students to have deep mathematical conversations. There are more opportunities in the middle ring; and tasks that have the properties on the inner circle can stimulate rich and meaningful mathematical discussions. The idea is to look at a task and see if you can make modifications that "move" it more to the center of the target. Many modifications are possible for each target – and remember, we have 15 targets!

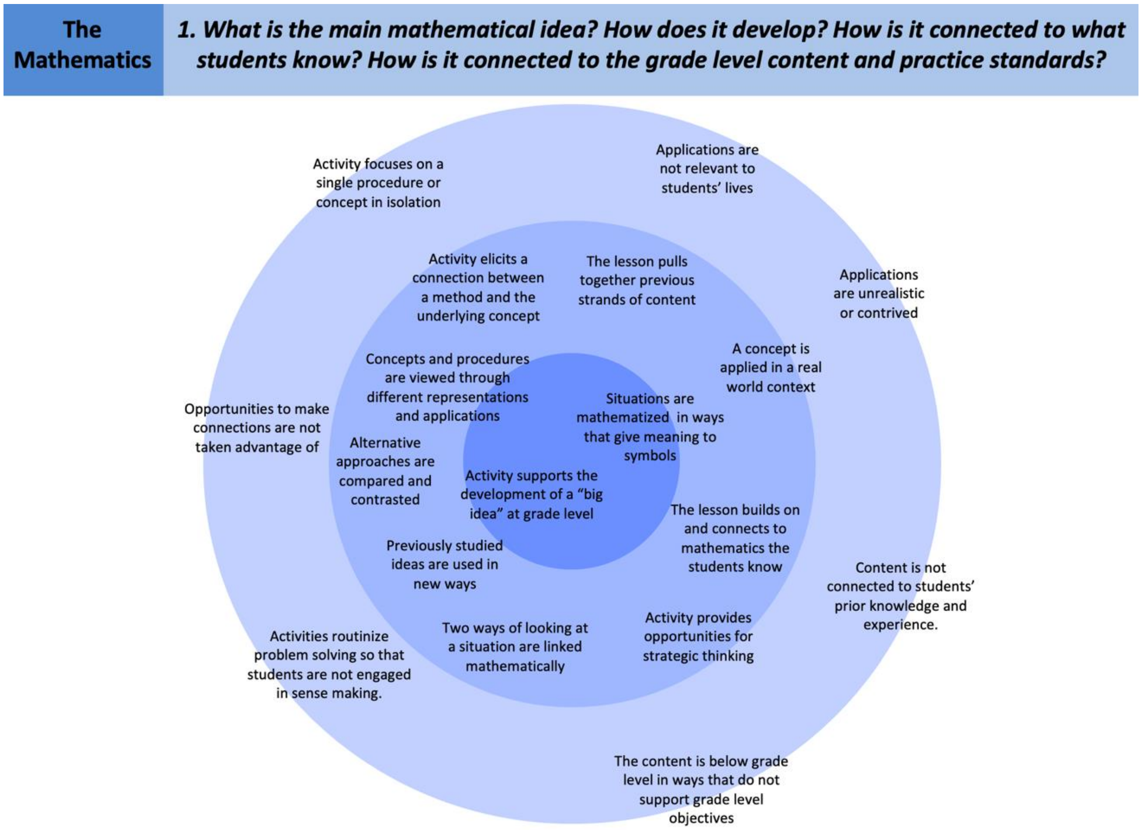


Figure 3. The first mathematics target.

In *On Target,* we work through many examples of how tasks can be improved. There are three examples for each dimension – one each at the elementary, middle school, and secondary school levels. Here is just one example from the book.

The topic we consider is exponential decay. If you google "exponential decay problems worksheet," you will find more than half a million results. Most of them contain problems like this:

> Over the past few years, the number of students enrolled in after-school programs has been decreasing. Each year there is a 11% decrease in student enrollment. Currently, 13,145 students are enrolled. If this trend continues, how many students will be enrolled in 6 years?

This task is neither realistic nor interesting. As we note in *On Target*, "The solution offered is a purely mechanical plug-in to the formula, $FV = PV(1-d)^n$, where FV = future value, PV = present value, d = rate of decay, and n = number of periods. There are many exercises of this type. What can we do to enrich them?"

To do so we look at the three mathematics targets. We identify the following mathematics challenges (properties of the task that were on the outer rings):

- Application is not relevant to students' lives
- Application is unrealistic or contrived
- Content is not connected to students' prior knowledge and experience
- Applications such as word problems are formulaic and not tied to making sense of the contexts
- Formulaic problem solutions provide little opportunity for sense making
- Students work on tasks just like the ones they've seen solved

But, when we look at the inner rings, we see possible directions for improvement:

- The lesson pulls together previous strands of content
- A concept is applied in a real world context
- Situations are mathematized in ways that give meaning to symbols
- Students compare and contrast different approaches to a problem
- Students work problems that extend what they know
- Students observe/derive properties of mathematical objects
- Students discuss and evaluate each other's approaches and ideas
- Students build and evaluate models of real world situations
- Students look for patterns, making and testing conjectures

There are many ways we could try to enrich the original problem using these ideas. In fact, this example is real: one of the authors of *Mathematics Teaching on Target* created the following task for her students:

Anay buys a car for $5,000. The car loses 15% of its value every year.

a. How much is the car worth after 1 year?

b. Write an equation to model the value of the car over time.

Before you go on, find a way to check/justify that your equation is realistic and show your work.

c. How long before the car is worth half of its original value?

d. After owning the car for 10 years, it breaks down. Anay finds out that she will need to replace the clutch to be able to drive the car again. Is it worth it?

This task is *much* richer than the enrollment problem above. The classroom discussion of this problem is one of the case studies in Schoenfeld, Fink, Ruiz, Huang, Wei, & Chirinda (2023). In that case study you'll see the impact of the suggested modifications.

Discussion

In this brief paper I have tried to summarize nearly 20 years of research and development, including the content of two new books. There was very little space to provide detail. In my presentation at CIAEM I will provide more examples. Detail substantiating the claims made here can be found in the papers on the TRU Framework website, https://truframework.org/. Very substantial detail can be found in the two new books, *Helping students become powerful mathematics thinkers: Case Studies and Methods of Teaching for Robust Understanding* (Schoenfeld, Fink, Zuñiga-Ruiz, Huang, Wei, & Chirinda, 2023) and *Mathematics Teaching On Target: A guide to Teaching for Robust Understanding at all Grade Levels* (Schoenfeld, Fink, Sayavedra, Weltman, & Zuñiga-Ruiz, 2023). I hope you will find them worth investigating.

Bibliography and References

Prediger, S., & Neugebauer P. (2021). Capturing teaching practices in language-responsive mathematics classrooms – Extending the TRU framework "teaching for robust understanding" to L-TRU. ZDM (2021) 53:289–304, https://doi.org/10.1007/s11858-020-01187-1.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM, the International Journal of Mathematics Education, 45: 607-621.* DOI 10.1007/s11858-012-0483-1.

Schoenfeld, A. H. (2014, November). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher, 43(8),* 404-412. DOI: 10.3102/0013189X1455

Schoenfeld, A. H. (2016). Making sense of teaching. *ZDM, the International Journal of Mathematics Education*, 48(1&2), 239-246. DOI 10.1007/s11858-016-0762-3

Schoenfeld, A. H. (2018). Video analyses for research and professional development: the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. In C. Y. Charalambous & A.-K. Praetorius (Eds.), *Studying Instructional Quality in Mathematics through Different Lenses: In Search of Common Ground*. An issue of *ZDM: Mathematics Education.* Manuscript available at https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y.

Schoenfeld, A.H. (2015). Thoughts on scale. *ZDM, the international journal of mathematics education*, *47*, 161-169. DOI: 10.1007/s11858-014-0662-3.

Schoenfeld, A. (2022). Why are Learning and Teaching Mathematics so Difficult? In M. Danesi, (ed). *Handbook of Cognitive Mathematics*. New York: Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_10-1

Schoenfeld, A. H., Baldinger, E., Disston, J., Donovan, S., Dosalmas, A., Driskill, M., Fink, H., Foster, D., Haumersen, R., Lewis, C., Louie, N., Mertens, A., Murray, E., Narasimhan, L., Ortega, C., Reed, M., Ruiz, S., Sayavedra, A., Sola, T., Tran, K., Weltman, A., Wilson, D., & Zarkh, A. (2019b). Learning with and from TRU: Teacher educators and the teaching for robust understanding framework. In K. Beswick (Ed.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 4, The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 271-304). Rotterdam, the Netherlands: Sense publishers.

Schoenfeld, A., Dosalmas, A., Fink, H., Sayavedra, A., Weltman, A., Zarkh, A, Tran, K., & Zuniga-Ruiz, S. (2019a). Teaching for Robust Understanding with Lesson Study. In Huang, R., Takahashi, A., & Ponte, J.P. (Eds.), *Theory and Practices of Lesson Study in Mathematics: An international perspective* (pp. 136-162). New York: Springer. ISBN 978-3-030-04031-4

Schoenfeld, A.H., Fink, H., & Ruiz, S., with S. Huang, X. Wei, and B. Chirinda (2023). *Helping Students Become Powerful Mathematics Thinkers: Case Studies of Teaching for Robust Understanding*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A.H., Fink, H., Sayavedra, A., Weltman, A., and Zuñiga-Ruiz, S. (2023). *Mathematics Teaching OnTarget: A TRU guide for Enriching Mathematics Teaching at all Grade Levels. New York: Routledge.*

Schoenfeld, A. H., Floden, R. B., and the algebra teaching study and mathematics assessment projects. (2018). On classroom observations. *Journal of STEM Education Research* https://doi.org/10.1007/s41979-018-0001-7

Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework web site, https://truframework.org.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Mental Processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Matemáticas y realidad en la formación de docentes

Uldarico **Malaspina** Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen

La estrecha relación entre realidad y matemáticas está en la base del avance de las matemáticas, la ciencia y la tecnología y, en esa línea, muchos educadores matemáticos opinan que la modelización matemática – que es una actividad que implica una transición de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas – debería introducirse desde la educación primaria; sin embargo, en la formación de los docentes no se provee las bases adecuadas para esta actividad. Ante este reto para investigadores y educadores, algunas experiencias tenidas en talleres presenciales y virtuales, muestran que una manera pertinente de iniciar a los docentes y futuros docentes en los procesos de creación de modelos matemáticos a partir de situaciones reales, es mediante la creación de problemas por elaboración, como una actividad que estimule la intuición y ponga énfasis en la indagación, las conjeturas y los supuestos, en estrecha relación con la resolución de problemas.

Palabras clave: Modelización Matemática; Formación de profesores; Creación de problemas; Resolución de problemas; Indagación.

Introducción

Es muy grande la responsabilidad de los docentes de todos los niveles educativos en la formación de los futuros profesionales, técnicos y ciudadanos en general. La realidad actual es muy compleja y tremendamente desafiante, tanto por la predominancia de la incertidumbre – evidenciada con la pandemia – como por la existencia simultánea de grandes avances tecnológicos y de grandes problemas para la humanidad, que se arrastran por siglos. La sociedad del conocimiento y la información, con el impacto de la inteligencia artificial, puede estar muy alejada de comunidades en zonas rurales de la costa, la sierra o la selva, con lenguas nativas, a las que no llega la señal de internet. Más aún, el avance de la tecnología y sus aportes al desarrollo industrial traen también nuevos problemas como el calentamiento global y, por otra parte, el uso de los teléfonos celulares y las redes sociales impactan el comportamiento individual y colectivo de niños y adultos y, en consecuencia, se generan nuevas formas de aprender, que exigen nuevas formas de enseñar.

Quienes estamos en el mundo de la educación matemática – en la investigación o en la docencia – tenemos el reto permanente de usar los elementos que nos brinda la realidad concreta de nuestros estudiantes para buscar formas eficaces de involucrarlos en un aprendizaje acorde con sus motivaciones y que sea estimulante de sus capacidades de autoaprendizaje, de indagar, de intuir, de conjeturar, de cuestionar, de demostrar, y de identificar, crear y resolver problemas. Desarrollar estas capacidades en los estudiantes cobra mayor importancia en tiempos en los que los investigadores informáticos se esfuerzan por producir computadoras que simulen lo más posible el pensamiento de los humanos y, paradójicamente, los humanos tienden a usar más las diversas formas de computadoras para resolver sus problemas. Esto es parte del desafío de la realidad actual y de afrontarla buscando formas creativas de ser aliados de la tecnología en la gran tarea educativa. Actualmente existen programas de matemática dinámica con gran potencialidad en la formación del pensamiento matemático si al usarlos en sesiones de aprendizaje se pone énfasis en las conjeturas y demostraciones, más allá de las ventajas que brindan de ahorrar esfuerzos, al efectuar fácil y rápidamente gráficos y cálculos. Evidentemente, todo esto requiere una adecuada formación de los docentes, tanto en las universidades y otros centros de educación superior, como en los cursos y talleres de formación continua para profesores en servicio.

La modelización matemática, entendida como un proceso de creación de un modelo matemático, a partir de una situación real y como una actividad que implica una transición de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas (Borromeo, 2018), es el campo ideal para formar profesores que tengan la capacidad de inducir a sus estudiantes a observar y aprender disfrutando de la estrecha relación entre las matemáticas y la realidad. En este sentido, Bonotto (2010) afirma que una introducción temprana en las escuelas, de las ideas fundamentales sobre modelización, no solo es posible sino también deseable, incluso en la escuela primaria. También Lesh y Doerr (2003) nos dicen que actividades provocadoras de modelización deberían empezar en el jardín infantil. Sin embargo, en la formación de los docentes no se provee las bases adecuadas para la modelización matemática, no se pone el suficiente énfasis en ella, se simplifica o se restringe demasiado a modelos lineales, o suele tomarse de manera aislada en la formación general. Ante este gran reto para investigadores y educadores, algunas experiencias tenidas en talleres presenciales y virtuales, muestran que una manera pertinente de iniciar a los docentes y futuros docentes en los procesos de creación de modelos matemáticos, es mediante la creación de problemas a partir de situaciones dadas, reales o muy cercanas a la realidad, como una actividad motivadora y creativa, que estimule la intuición y ponga énfasis en la indagación, las conjeturas, los supuestos y la formalización, en estrecha relación con la resolución de problemas.

Creación de problemas y modelización matemática

Evidentemente, una fuente importantísima de problemas de matemáticas es la realidad. Muchas veces son problemas específicos de la vida cotidiana, como estimar el tiempo que tomará ir de determinado lugar a otro y muchas otras son consecuencia de la búsqueda de explicaciones a determinados hechos, de la necesidad de predecir eventos o de buscar formas óptimas de atender necesidades. La historia nos muestra que la observación reflexiva de la realidad, el descubrimiento de relaciones y patrones, la selección de información, el hacer representaciones y otras elucubraciones de la mente, lleva a explicitar y resolver algunos problemas particulares, que luego se van refinando y generalizando y así surgen modelos matemáticos que se ajustan progresivamente con la interrelación entre la matemática y la verificación de lo obtenido en una nueva mirada a la realidad.

Esta mirada histórica y amplia, que nos lleva al campo de la modelización matemática – de importancia innegable en la formación de los estudiantes – es un marco adecuado para valorar el énfasis que se debe poner, desde los primeros grados de la educación escolar, en la creación de problemas de matemáticas a partir de situaciones específicas, como un proceso que estimula el pensamiento reflexivo y creativo, la indagación y el aprendizaje de las matemáticas en relación estrecha con la realidad. En este sentido, English (2003) sostiene que a pesar de que la creación de problemas ocurre de manera natural en la vida cotidiana, no recibe la debida atención en las aulas. Añade que "los niños desarrollan procesos de creación de problemas cuando ellos participan activamente en situaciones problemáticas que los involucran en la exploración, el cuestionamiento, la construcción y el refinamiento de ideas y relaciones matemáticas".
El camino para brindar estas experiencias a los niños será más fácil, si los docentes se inician en la modelización matemática teniendo sus propias experiencias en la creación de problemas y verificando por ellos mismos la importancia de estos procesos, en lo matemático y en lo didáctico,

Estrategias y fases en la creación de problemas

Según el enfoque de Malaspina (2015) y Malaspina, Torres y Rubio (2019), se consideran dos estrategias básicas para la creación de problemas: 1) por *variación*, cuando se obtiene un nuevo problema a partir de un problema dado, modificando uno o más de sus cuatro elementos – información, requerimiento, contexto y entorno matemático – y 2) por *elaboración*, cuando se obtiene un problema sin partir de un problema dado. Generalmente se parte de una situación real o una configurada, con características de real, aunque bien puede ser también una situación en un contexto intra-matemático.

Las experiencias didácticas tenidas en diversos talleres con docentes han llevado a identificar cuatro fases en la creación de problemas, cíclicamente interrelacionadas entre sí (Malaspina 2022): la *indagación* (de una situación o de un problema dado); la *propuesta* de un problema tentativo relacionado con la situación o el problema dado; la *resolución* (o intento de resolución) del problema propuesto; y el *refinamiento* o el cambio del problema propuesto. En las interrelaciones entre estas fases, las preguntas juegan un papel muy importante, como se ilustra en la Figura 1.

Los casos de creación de problemas por elaboración, partiendo de una situación en un contexto extra-matemático, son los que más contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático ligado a la realidad y los que más favorecen – a docentes y estudiantes – a iniciarse en procesos de modelización matemática, como se ha observado en diversas experiencias didácticas y como se puede percibir examinando la representación gráfica (Figura 2) del ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007), comparativamente con las fases de creación de un problema (Figura 1). Las fases 1 y 2 de modelización matemática están vinculadas con la indagación; las fases 3 y 4 con la propuesta y resolución de un problema y las fases 5, 6 y 7 con el refinamiento del problema propuesto.

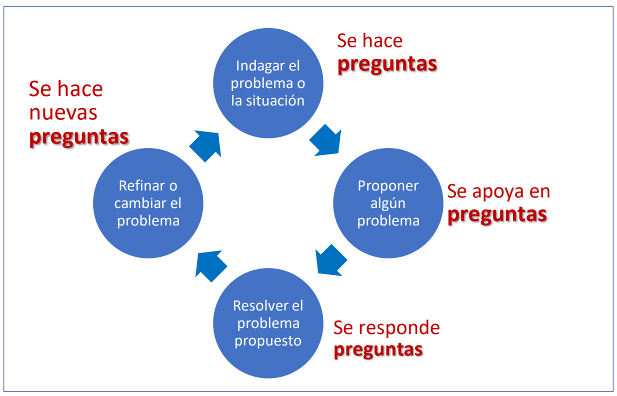


Figura 1. Fases en un proceso de creación de problemas. Elaboración propia.

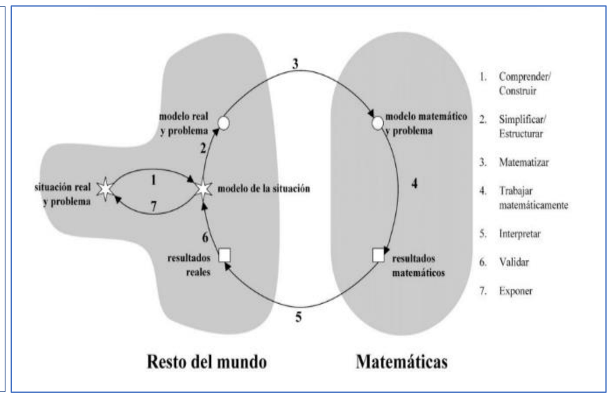


Figura 2. Ciclo de modelización de Blum y Leiß Adaptado por Ledezma, Sol, Sala-Sebastià y Font (2022)

En las sesiones de creación de problemas con docentes, sea por variación o por elaboración, se suele llegar a interesantes niveles de reflexión didáctica y matemática, sobre todo en la fase de refinamiento; inclusive se llega a formular preguntas cuyas respuestas requieren un entorno matemático que va más allá de lo inicialmente considerado (Malaspina, 2015). En ese sentido, es muy importante la selección del problema inicial o de la situación inicial para una sesión de creación de problemas, de modo que no solo haya un enriquecimiento matemático sino también la oportunidad de reflexionar la realidad, más allá de lo estrictamente matemático, formulando supuestos pertinentes y verosímiles, así como previendo diversos casos. Los problemas o situaciones abiertas ayudan mucho a ello y, por cierto, siempre hay que tener cuidado que los problemas o situaciones tengan autenticidad, en el sentido que estimulen una pregunta significativa asociada con un evento plausible, contribuyendo a que los estudiantes se sientan más motivados y pongan atención a la situación mientras desarrollan soluciones matemáticas (Palm, 2008); más aún, es importante evitar que las situaciones o problemas sean forzadamente "realistas" como cuando se afirma que "Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie de un estanque siguiendo una función $y = -x^2 + 6x + 12$ donde y es la distancia al fondo del estanque (medida en metros) y x el tiempo empleado (medido en segundos)". Al trabajar con niños, el mundo de los juegos ofrece situaciones de autenticidad, que son parte muy cercana a su realidad y a sus motivaciones, que estimulan emociones positivas para el aprendizaje y favorecen experiencias de creación de problemas y de juegos a partir de situaciones lúdicas, inclusive desde temprana edad y en el marco del pensamiento probabilístico, como se muestra en Malaspina (2021) así como en Malaspina y Malaspina (2020). Al trabajar en el nivel universitario, hay experiencias en las que, partiendo de situaciones de compra-venta de abarrotes – mediante estímulos para la creación de problemas – se llega a la formulación de funciones discontinuas de una y dos variables (Malaspina y Torres, 2019).

Una experiencia didáctica

Se muestra una de las experiencias didácticas desarrolladas con docentes peruanos de secundaria, en talleres de trabajo colaborativo de creación de problemas por elaboración, como formas de relacionar la matemática con la realidad, a partir de situaciones abiertas. Esta experiencia está tratada con amplitud y detalle en Malaspina (2022)

Situación:

A los docentes se les mostró la siguiente figura, tomada de Internet.

Figura 3: Un grifo averiado que ocasiona goteo de agua.

Y se les preguntó: *¿Podemos crear algún o algunos problemas a partir de esta situación?*

Proceso de creación de problemas

Los docentes formularon propuestas y preguntas, como las siguientes,

- Calcular la cantidad de agua que se desperdicia.
- Obtener el costo extra que genera el desperdicio por ese goteo.
- Relacionar el tiempo con el goteo.
- ¿En qué tiempo se llenaría una taza? (Lo cual requeriría una observación empírica.)
- ¿Qué cantidad de agua se desperdicia en un día?

Con estas consideraciones y preguntas, algunos integrantes del grupo propusieron el siguiente enunciado de un primer problema tentativo:

> *Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño*[1].

Ante el intento de solución, se advirtió la falta de información, por lo cual, luego de intercambiar ideas matemáticas y didácticas en el grupo de profesores, de hacer supuestos

[1] En el Perú, al referirse al goteo de agua por un grifo averiado, suele decirse: "goteo de agua por un caño malogrado". Esta expresión aparece en las intervenciones de los profesores.

verosímiles, de plantear nuevas interrogantes, de proponer nuevos problemas tentativos, de intentar resolverlos y de hacer refinamientos a los problemas tentativos, se llegó al siguiente problema:

> *Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.*

La solución fue la representación gráfica (solo en el primer cuadrante) de una función lineal relacionando tiempo en horas con cantidad de agua en mililitros. Se marcó explícitamente los puntos de coordenadas (3; 240) y (6, 480). (Figura 4)

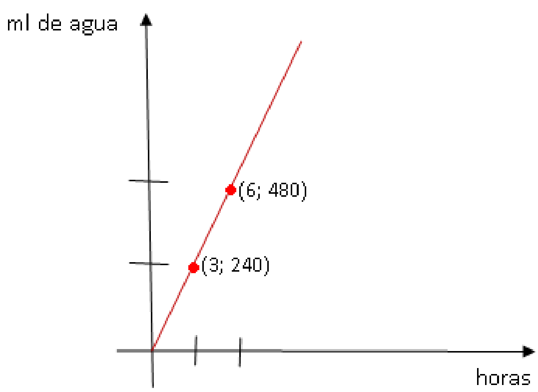


Figura 4. Una representación gráfica de una función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia, en la situación dada.

Algunos docentes llegaron a explicitar la expresión algebraica de la función:

$$f(t) = 80\,t, \quad \text{para } t \geq 0. \qquad (1)$$

Podemos percibir las interrelaciones entre las cuatro fases ya mencionadas en la creación de un problema. La indagación y la propuesta llevó a un primer problema tentativo; el intento de solución y más indagaciones llevaron a un primer refinamiento de tal problema y a un segundo problema tentativo; y así, con nuevas indagaciones, propuestas, intentos de solución y refinamientos – que son formas de transitar de ida y vuelta entre matemáticas y realidad – se llegó al problema enunciado.

Indagaciones y transiciones adicionales de ida y vuelta entre realidad y matemática, a partir del problema propuesto, conducen a cuestionarse si la función obtenida y mostrada en (1) refleja bien la realidad del goteo de agua por el grifo. Así, lo obtenido y representado gráficamente es una función continua; sin embargo, el goteo de agua no es un hecho que se dé continuamente, pues entre una gota y la siguiente transcurre un tiempo en el que la cantidad de agua desperdiciada se mantiene constante. Esto lleva a tener en cuenta que cada cierto tiempo cae una gota de agua. Suponiendo que cada 2 segundos cae una gota de agua – que es un supuesto simplificador, pero verosímil y en el marco de la proporcionalidad – se representa gráficamente una parte de la función de desperdicio de agua, considerando tiempo en segundos y agua en mililitros (Figura 5) y asumiendo que en la caída de cada gota se desperdician $\frac{2}{45}$ ml de agua. Se consideran los 6 primeros segundos de observación.

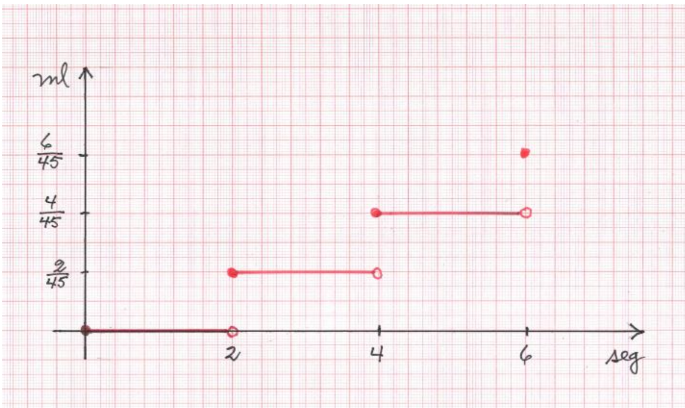


Figura 5. Una representación gráfica de la función desperdicio de agua, atendiendo la discontinuidad en el goteo, en 6 segundos.

En la Figura 5 se tiene una representación gráfica de una función "máximo entero" o "mayor entero", que es discontinua por saltos y cuya expresión formal es

$$d(t) = \frac{2}{45}\left[\!\left[\frac{t}{2}\right]\!\right], \text{ para } t \geq 0. \qquad (2)$$

Vemos que, mediante la creación de problemas por elaboración, una primera aproximación a la situación real mostrada, lleva a una función lineal expresada en (1), pero una mayor indagación y transiciones de ida y vuelta entre la matemática y la realidad, llevan a una función no lineal y discontinua, representada gráficamente en la Figura 5 y formalmente en (2). Este es un tema que no es usual tratarlo en la secundaria, pero debe estar muy presente en la formación y experiencias didácticas de los profesores, de modo que contribuya a trabajar con sus estudiantes situaciones reales que lleven – con el apoyo de la intuición – a representaciones en este entorno matemático, como la mostrada en la Figura 5.

Consideraciones finales

Las reflexiones presentadas y la experiencia didáctica expuesta nos hacen tomar conciencia de la importancia de una adecuada formación de los docentes – tanto inicial como continua – y como parte de ella considerar la creación de problemas, sobre todo por elaboración, como una forma de evidenciar la estrecha relación entre realidad y matemáticas, de sentar bases para su formación en modelización matemática y de potenciar sus competencias didácticas y matemáticas. (Malaspina, Torres & Rubio, 2019).

La realidad social, cultural, económica, política, ambiental y tecnológica, y la vida cotidiana como parte de ella, es una rica fuente de problemas matemáticos que requieren ser identificados, no solo para explotarlos tanto didáctica como matemáticamente, sino para aportar a sus soluciones. Es un gran reto para docentes e investigadores seleccionar problemas o situaciones que generen emociones positivas para el aprendizaje y contribuyan a que los estudiantes, con un pensamiento matemático apoyado en la intuición, tengan una mirada crítica y reflexiva de la sociedad en que viven. Es necesario apoyarse en situaciones ricas en contenido matemático, tanto del legado cultural de nuestros antepasados, que los encontramos en sus obras de arte y construcciones, como en los avances tecnológicos, cada vez más desafiantes con la inteligencia artificial, para contribuir a una formación integral de nuestros estudiantes.

Para avanzar en la línea de enseñar matemáticas, más y mejor vinculadas con la realidad, se hacen necesarias algunas medidas concretas en los planes de estudio y de actualización de los futuros docentes y de los docentes en servicio de la educación básica, tales como: 1) Considerar con énfasis, la creación de problemas – estrechamente relacionada con la resolución de problemas – en todas las sesiones de aprendizaje de matemáticas, de modo que no sea una actividad aislada; 2) Brindar cursos-taller de modelación matemática, teniendo como base las experiencias en creación de problemas, sobre todo por elaboración; y 3) Enriquecer la formación matemática y la intuición científica tratando temas y analizando situaciones que contribuyan a tener mayores elementos para identificar y resolver problemas de la realidad, vinculados con las ciencias físicas, biológicas, humanas, sociales, económicas, etc. En ese sentido, es fundamental estimular el pensamiento probabilístico y estadístico, así como el pensamiento optimizador de los docentes de todos los niveles de la educación básica. Para los docentes de secundaria sería muy enriquecedor que se les brinde ocasiones de examinar situaciones problemáticas de la realidad, en las que se use conceptos básicos de algunos temas usualmente no tratados en los planes de estudio, como teoría de juegos, teoría de grafos, aritmética modular, funciones de dos variables y curvas de nivel,

Referencias y bibliografía

Bonotto, C. (2010). Realistic mathematical modeling and problem posing. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 399-408). Springer, Boston, MA.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Dussel, I. y Trujillo Reyes, BF. (2018). ¿Nuevas formas de enseñar y aprender? Las posibilidades en conflicto de las tecnologías digitales en la escuela. *Perfiles Educativos,*40 (SPE), 142-178.

English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. K. Jr. Lester (Ed) *Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekindergarten-grade 6* (pp. 187-198). NCTM.

Ledezma, C.; Sol, T.; Sala-Sebastià, G.; Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics* 10, 33-39. https://doi.org/10.3390/ math10183339

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: *A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia en la XIV CIAEM, México. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1485/607

Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* 10(1), 1-17.

Malaspina, U. (2022). Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18(64). https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/661

Malaspina, U. & Torres, C. (2019). Teaching of discontinuous functions of one or two variables: A didactic experience using problem posing and levels of cognitive demand. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2578 - 2585). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME

Malaspina, M., & Malaspina, U. (2020). Game Invention as Means to Stimulate Probabilistic Thinking. *Statistics Education Research Journal,* 19(1), 57-72.

Malaspina, U., Torres, C. & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, & L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151). Springer.

Palm, T. (2008). Impact of Authenticity on Sense Making in Word Problem Solving. *Educational Studies in Mathematic,s* 67(1), 37–58.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

¿Qué nos puede ofrecer *Lesson Study* en línea?: experiencias chilenas en formación docente y con formadores de futuros profesores

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

El conocimiento de Lesson Study (Estudio de Clases) adquirido por más de una década por un grupo de académicos, profesores y estudiantes en Chile junto a colaboradores japoneses y de Brasil, ha venido consolidando un diseño del proceso de Estudio de Clase, que hemos aplicado tanto en modalidad presencial como sincrónica. Diversos estudios nos han permitido determinar las características de diseño de estos procesos de aprendizaje colaborativo en grupos de docentes que posibilitan el aprendizaje profesional y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la Estadística. El diseño tiene una duración de ocho sesiones, caracterizado por aspectos de anticipación, acción y reflexión. El propósito de la conferencia es comunicar el diseño desarrollado, mediante experiencias sincrónicas en formación inicial y continua de profesores, y con formadores de profesores de universidades chilenas, que concibe al Estudio de Clases como un espacio de desarrollo profesional docente para nuestro tiempo.

Palabras clave: desarrollo profesional docente; estudio de clases; colaboración; efectividad del proceso.

Introducción

La evidencia disponible indica que el aprendizaje de los docentes se beneficia significativamente cuando las actividades de desarrollo profesional docente son realizadas de manera colaborativa (Ronfeldt et al., 2015) y es llevada a cabo en los mismos establecimientos educativos (Darling-Hammond et al., 2017; Isoda y Olfos, 2009). Los investigadores que fomentan este tipo de desarrollo profesional consideran que los docentes aprenden más efectivamente a través de conversaciones y reflexiones profesionales con sus colegas, especialmente en relación con: el conocimiento del contenido necesario para enseñar; la manera de implementar nuevas prácticas en el aula; la forma de mejorar las propias prácticas para una enseñanza eficaz; y la anticipación a las dificultades con un contenido específico que pueden tener sus estudiantes (Benedict et al., 2023).

El Estudio de Clases (EC) también conocido como Lesson Study —una metodología de desarrollo profesional docente—, tiene entre sus principales características, el diseño de la enseñanza orientada por el trabajo en equipo, y la responsabilidad compartida de los docentes ante los resultados de la implementación de la lección diseñada. Los investigadores sugieren que, durante el proceso de análisis los docentes reflexionan sobre los aprendizajes de los estudiantes, la propia enseñanza, y del currículo que busca desarrollar objetivos de aprendizaje según los niveles escolares (Dudley et al., 2019; Estrella, Mena y Olfos, 2018; Hiebert et al., 2007; Isoda y Olfos, 2009; Lewis et al., 2016; Olfos et al., 2015).

El proceso colaborativo en un grupo de EC comprende el planteamiento de un objetivo consensuado, la exploración de estrategias concretas que podrían contribuir al logro de este, selección de materiales, diseño de un plan de clase, anticipación de las estrategias, dificultades y errores de los estudiantes ante las tareas propuestas, la implementación de la lección por uno de los docentes participantes, la observación evaluativa del resto de los profesores que participaron en su elaboración, y una discusión reflexiva posterior a la lección, con apoyo de expertos para revisar y analizar la lección implementada, lo que permite ir mejorando el plan de clase coproducido para una futura implementación y su difusión (Elliott, 2019; Estrella y Olfos, 2013; Fernández, 2002; Isoda y Olfos, 2009; Lewis y Hurd, 2011; Lewis y Perry, 2017).

Son escasas las investigaciones que han abordado el Estudio de clases en línea (e.g., Isoda et al., 2021), uno de ellos explora la transición del EC presencial a un modo en línea, con el propósito de derivar recomendaciones para realizar EC en línea que sean fieles a los elementos definitorios de un EC (Goei et al., 2021). La Tabla 1 resume cinco ideas centrales desde la literatura de EC.

En concordancia con los autores, nuestro modelo de EC (Estrella et al., 2022) aplicado en línea (Google docs en Drive compartido) considera un: espacio digital de almacenamiento compartido, visible y editable para todos los participantes, donde es posible acceder a la lección que se investiga, a un acta que informa sobre cada reunión (con las preguntas de investigación, las ideas punteadas y acordadas; los materiales y recursos, la literatura, el programa de estudio); reuniones en plataforma de videoconferencia, con discusión abierta, en que los participantes tienen las mismas oportunidades para contribuir al diálogo enmarcado por un facilitador de EC; el acceso a las implementaciones reales en el aula, ya sea completamente en línea en una aula virtual con transmisiones en vivo, o la observación en línea en cualquier otro momento, a través de una videograbación o alojada en Youtube.

Tabla 1
Cinco ideas centrales del Estudio de Clases según Goei et al. (2021)

Profesores como investigadores	**Integración de teoría y práctica**	**Foco en el aprendizaje de los estudiantes**	**Creación conjunta de conocimiento**	**Ciclos de estudio y mejora de la lección diseñada**
EC establece que los profesores realicen investigaciones sobre sus lecciones de forma colaborativa con sus colegas. El núcleo del EC se centra en la investigación para examinar las experiencias de aprendizaje de los estudiantes y las formas de lograrlo.	EC implica combinar conocimiento práctico y conocimiento experto. Esto implica el estudio de material relevante, literatura y aportes de expertos. Los miembros del grupo de EC aportan su conocimiento práctico y estudian cómo se retroalimentan teoría y práctica.	EC trata sobre el aprendizaje de los estudiantes. El objetivo es mejorar el aprendizaje y las experiencias de los estudiantes para obtener mejores resultados. Resulta esencial indagar cómo la enseñanza afecta el proceso de aprendizaje, y en enfocarse cómo se lleva a cabo el aprendizaje de los estudiantes.	EC es un esfuerzo colaborativo de los docentes, que participan en un diálogo profesional intensivo, y discuten tanto su teoría práctica, como los resultados del estudio de los materiales y el currículo, el diseño de situaciones para el aprendizaje. La naturaleza colaborativa del EC sostiene la creación conjunta de conocimiento y su difusión.	EC requiere ciclos de estudio de las lecciones. El objetivo de EC no es obtener una lección "perfecta", sino más bien indagar en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el contexto de una situación de lección real. Este proceso de indagación sigue el diseño cíclico de las lecciones para identificar la interacción entre la enseñanza y el aprendizaje.

Modelo de Lesson Study en Chile

El Estudio de Clase se ha posicionado en Chile como uno de los mecanismos de desarrollo profesional docente (DPD) recomendados por el Ministerio de Educación de Chile, tanto en la formación docente inicial como continua. El Grupo de Estudio de Clase de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) -GEC PUCV- aportó en este posicionamiento, promoviendo diferentes modalidades de EC en la formación inicial y continua de profesores desde PK al grado 12, tanto en estadística como en matemática (Estrella et al., 2020; Estrella, Morales y Vidal, 2022b; Isoda et al., 2021; Olfos et al., 2020); y recientemente, con grupos de formadores de profesores de matemática (Reyes-Bravo y Estrella, 2023).

En Olfos, Isoda y Estrella (2020) se describen los aportes del GEC PUCV en su trayectoria de más de una década, y en Estrella et al. (2022a) se destaca la optimización del proceso a través de un modelo de EC con una modalidad de ocho sesiones (dos meses de trabajo conjunto con profesores en servicio o formadores de profesores), que contempla un proceso de dos ciclos que finalizan con un plan de clase mejorado en dos ocasiones tras dos implementaciones (ver Figura 1). El GEC PUCV ha consolidado dicho modelo de EC empírico, que integra aspectos transversales de anticipación, acción y reflexión que involucran a los docentes en un proceso de investigación colaborativo, situado en el contexto de la escuela o universidad, y enfocado en el pensamiento del estudiante y su desarrollo. En particular, este modelo de EC promueve, desde un enfoque abierto, la construcción colectiva y personal de conocimiento matemático o estadístico para la enseñanza y aprendizaje en el aula real. Otro aporte distintivo, que resulta de la aplicación del modelo de EC, es la difusión permanente de los resultados de estas experiencias de DPD, mediante la organización de jornadas de clases públicas (open lesson) abiertas al público interesado (e.g., Sumo Primero en Terreno, 2021), publicaciones de artículos y capítulos de libros (Estrella et al., 2022a; Olfos, Isoda & Estrella, 2020).

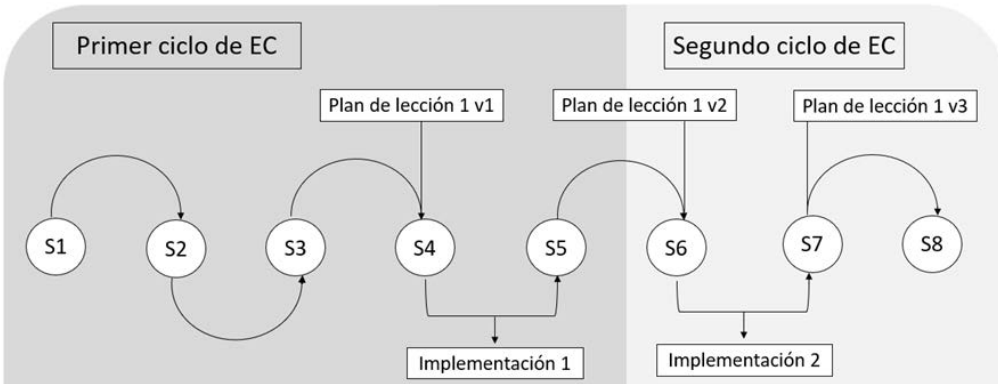


Figura 1: Modelo de EC de ocho sesiones y dos ciclos de GEC PUCV según Estrella et al. (2022)

El modelo propuesto sitúa el enfoque de resolución de problemas como el estilo de la lección a desarrollar e implementar en el EC. Este enfoque de enseñanza involucra a los estudiantes en la resolución de problemas (matemáticos o estadísticos) con sentido para ellos, atendiendo de manera simultánea a propósitos tanto cognitivos como afectivos (Isoda y Olfos, 2009; Morales, 2021). Una lección, bajo este enfoque, se compone de los siguientes momentos (Isoda, Arcavi y Mena, 2007; Stigler y Hiebert, 1999): activar conocimientos previos, presentar el problema, resolución del problema por parte de los estudiantes, compartir métodos de resolución en el pleno, y resumir aprendizaje de la lección. Estos momentos permiten que los estudiantes reflexionen, compartan sus ideas, discutan y disfruten del proceso de construcción de nuevos conocimientos sobre la base de los ya adquiridos.

Así, el modelo GEC PUCV conecta la investigación con la práctica, y está caracterizado por su duración, por ciclos que enfatizan la anticipación, acción y reflexión docente, y por la difusión que amplía la comunidad de aprendizaje docente en que surge.

Dos experiencias de Grupos de Estudio de Clases reunidos en línea

En la última década, como grupo de investigación, GEC PUCV ha apoyado a más de medio centenar de procesos de Estudio de Clases que diseñan secuencias de aprendizaje (varias lecciones) o situaciones de aprendizaje (una lección), en escuelas, liceos y universidades. En este periodo se ha aplicado el modelo EC PUCV (Figura 1) tanto de forma presencial como híbrida, que se adhiere a las ideas centrales del EC (Tabla 1), permaneciendo invariante en su estructura base.

En Tabla 2 se describen dos experiencias de EC, ambas se caracterizan por la modalidad en línea del modelo de EC de GEC PUCV, con grupos de EC que se reunían semanalmente de manera híbrida, mientras uno implementó en línea la lección estudiada, y el otro, implementó en presencialidad.

Tabla 2
Características relevantes de los Estudios de Clases en línea que se informan

Tema de Lección	Participantes del Grupo de EC	Contexto
Grupo 1: lección implementada en línea para estudiantes de primaria sobre estadística que desarrolla el razonamiento inferencial informal	- Una educadora de párvulos - Tres profesores de primaria - Cinco facilitadores con experiencia en EC y en Didáctica de la Estadística	Los cuatro docentes (3 mujeres y 1 hombre) se desempeñan en una Escuela Municipal urbana de la región de Valparaíso en Chile, y enseñan en los grados K a 3.
Grupo 2: lección presencial para futuros profesores de primaria en formación universitaria sobre división entre números naturales que desarrolla el sentido numérico	-Cinco formadoras de profesores de primaria -Dos facilitadoras expertas en Didáctica de la Matemática y con experiencia en EC	Las cinco mujeres formadoras de profesores de primaria se desempeñan en distintas universidades ubicadas en diferentes regiones de Chile.

Todos los participantes de ambos grupos de EC respondieron una encuesta de 32 ítems, traducida al español (ver en Estrella et al., 2022a), que mide el incremento en el conocimiento, la autoeficacia, las expectativas y la efectividad del proceso de investigación en el contexto de EC (Akiba et al., 2019). Además, todas las sesiones fueron videograbadas mediante la plataforma Zoom, y en la última sesión se guió una conversación reflexiva sobre la experiencia con el modelo de EC. Todas las respuestas interactivas fueron registradas por escrito en Padlet (plataforma web que permite escribir en línea, a través de post it virtuales), en donde se presentan las dimensiones de hechos, emociones, descubrimientos y futuro, propiciados por la técnica de revisión activa 4F (Facts, Feelings, Findings y Future, de Greenaway, 2015) que contempló un análisis más acabado y prospectivo de acuerdo con la experiencia vivida. En particular, este análisis de las reflexiones de los docentes entrega una comprensión más matizada de cómo los participantes del grupo de EC profundizan su conocimiento y enfrentan sus creencias profesionales.

Para analizar los grupos 1 y 2 —que ilustran la operacionalización del modelo de EC— se identifican evidencias de aspectos de anticipación, acción y reflexión, en el marco de las ideas centrales de EC descritas, que complementan y fortalecen entre sí las respuestas de los profesores respecto a la efectividad del proceso de Estudio de Clases.

Grupo 1 de Estudio de Clases de profesores de primaria

Tras la participación en el EC de su escuela, incluidas las implementaciones en línea realizadas, los profesores presentan aspectos del ciclo de anticipación-acción-reflexión sustentado por el modelo de EC. En particular, un grupo muestra con dominancia, al menos dos aspectos del modelo, lo que indicaría una mayor integración del aprendizaje profesional docente en la experiencia de EC: algunos expresan con dominancia aspectos de anticipación, puesto que se enfocan en el pensamiento de los estudiantes, incluyendo posibles dificultades y la búsqueda de preguntas adecuadas para ellos; y otros, manifiestan con dominancia aspectos de acción, en el marco del conocimiento nuevo, centrado en la tarea que se gestionó en la planificación de la lección investigada colaborativamente. Algunos profesores expresan con dominancia aspectos de reflexión, con análisis crítico y discusión de las implementaciones. Las reflexiones de este grupo de EC de primaria muestran la valoración de los docentes sobre su experiencia en la comunidad de aprendizaje de EC, en tanto les permitió investigar su práctica profesional.

Percepciones en el grupo de profesores de primaria según la efectividad del proceso

El Grupo 1 respondió la encuesta al inicio y al final del proceso de EC, existiendo una notoria diferencia entre la apreciación inicial con la final, respecto a los cambios en la efectividad del proceso de EC. La Figura 2, muestra las percepciones positivas al final del proceso, evaluadas en los niveles más altos de la escala.

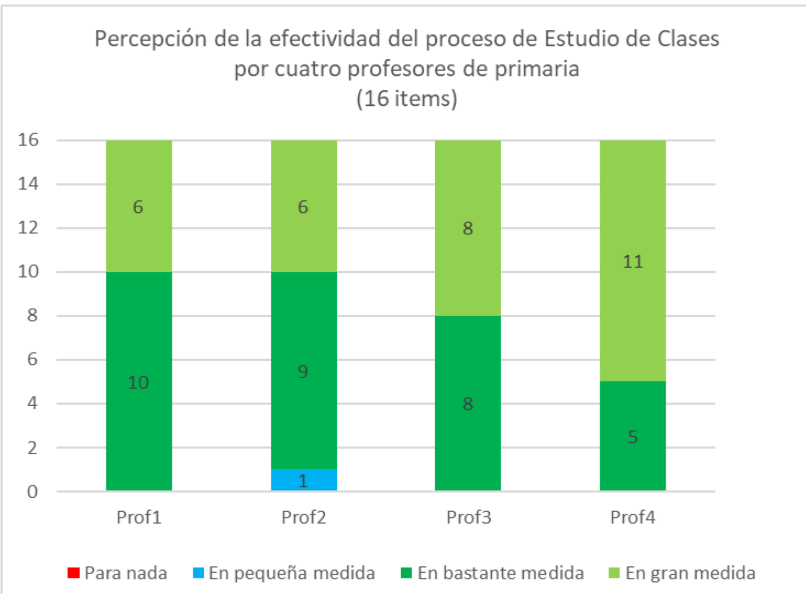


Figura 2: Percepción de los profesores de primaria sobre la efectividad del proceso de EC.
Elaboración Propia

La profesora Prof4 muestra una mayor apreciación positiva en las afirmaciones presentadas en la encuesta. Algunos de estos ítems de la encuesta declaraban, “Como profesor en formación continua pudo escribir su reflexión sobre cómo fue la lección y lo que aprendió del Estudio de Clases (bitácora u otra instancia)”; “La discusión se centró en el aprendizaje de los estudiantes y en cómo promover partes específicas del Plan de Clases”; “Se pudo discutir sobre cómo mejorar la lección para una futura enseñanza”; “Las discusiones permitieron enfocar la efectividad de la lección para lograr el objetivo de aprendizaje del estudiante y mejorar el Plan de Clases”.

Algunas reflexiones del grupo de profesores son concordantes con la efectividad del proceso de EC que vivieron, así la profesora Prof1 señala “*Plantear situaciones en las que los niños y niñas puedan intervenir de manera más espontánea, también fue un aprendizaje [para ella]. Trabajar en equipo es una estrategia que cada vez me gusta más*”; Prof4 manifiesta “*Me gusta mucho el poder participar de situaciones de aprendizaje y reflexiones entre docentes, [...] Siento que fue* *un proceso enriquecedor en cuanto conocimientos y prácticas pedagógicas*". La profesora Prof3 destaca que "*El plan diseñado a través del juego contribuyó en la participación y comprensión*"; Prof2 declara "*Las clases [planificadas] aportaron de manera concreta y muy lúdica, presentando actividades atractivas y simples para cada nivel*". El profesor Prof2 concluye acerca del aprendizaje profesional obtenido en el proceso "*El principal aprendizaje fue, el poder explotar en mayor medida el análisis y trabajo que nos entregan los datos [conocimiento del contenido estadístico], explorar con preguntas en profundidad [conocimiento didáctico del contenido], sin duda, es una estrategia que no había utilizado [...], creo que viendo este nivel de profundidad y extensión del análisis, enriquece el trabajo [la enseñanza]...También, la importancia y lo enriquecedor que resulta el trabajo colaborativo entre docentes*".

Grupo 2 de Estudio de Clases de formadoras de profesores de primaria

Otra investigación sobre EC en la universidad, explora las percepciones de cinco formadoras de profesores de matemáticas (MTE, es su acrónimo en inglés) de primaria sobre el proceso de Estudio de Clases relacionado al sentido numérico, tanto en la efectividad del proceso como en el conocimiento docente, autoeficacia y expectativas sobre los futuros profesores (Reyes-Bravo y Estrella, 2023).

Percepciones en el grupo de formadoras según la efectividad del proceso

Todas las MTE, muestran percepciones en los niveles más altos de la escala, considerando tanto "En gran medida" como "En bastante medida", en al menos 14 de los 16 ítems (ver Figura 3). Destaca la concordancia de la apreciación positiva a los ítems "Desarrollamos una secuencia de preguntas y devoluciones que ayudarían a los estudiantes a lograr el estándar de la profesión docente" y "Compartimos nuestras experiencias de enseñanza de la asignatura referentes a Matemáticas".

Cuatro de las MTE consideran en el nivel más bajo el ítem referido a "Como formadora o formador de profesores de educación básica que enseñarán matemática pudo escribir su reflexión sobre cómo fue la lección y lo que aprendió del Estudio de Clases (bitácora u otra instancia)", ver Figura 3. Sin embargo, la Formadora2 evaluó en el nivel más alto, lo cual podría deberse a un compromiso personal y profesional en registrar la propia experiencia.

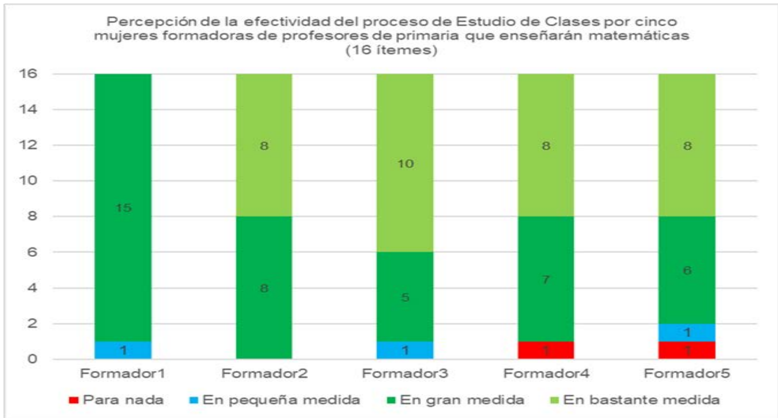


Figura 3: Percepción de las MTE sobre la efectividad del proceso de EC.
Elaboración Propia

Se identificaron las cinco ideas centrales (Tabla 1) en las reflexiones de las MTE relacionadas a la efectividad del proceso de EC y a los aspectos de anticipación, acción y reflexión. Primeramente, ellas destacaron la importancia del conocimiento previo que tienen las MTE sobre sus estudiantes, lo que las llevó a discutir acerca de las comprensiones que tienen los futuros profesores sobre la división entre números naturales. *Integrando su conocimiento práctico con el conocimiento experto* de las MTE y de los facilitadores, resultó una tarea motivadora y significativa que les permitió a los futuros profesores analizar diversas respuestas anticipadas, promoviendo así diferentes componentes del sentido numérico. Según señala la Formadora1, fue una tarea "*desde una perspectiva distinta, es como ir rompiendo paradigmas que estaban ahí [uso exclusivo del algoritmo estandarizado para la división]. Así es que, no se entregó de una sola forma [estrategia], sino que se fue desarrollando a través de un problema, de situaciones que se planteaban y me parece que eso fue bastante enriquecedor tanto para nosotras como para los estudiantes [futuros profesores]*".

La segunda idea relevante en el diseño del plan de clase, fue el foco en el aprendizaje de los estudiantes, esto implicó considerar el conocimiento sobre los errores comunes que los estudiantes pueden cometer al enfrentarse a la división entre números naturales, la secuencia de preguntas y devoluciones que les permitirán alcanzar los objetivos de la lección y las posibles soluciones que los futuros profesores pueden ofrecer frente a las preguntas planteadas en la situación de aprendizaje. La Formadora3 manifestaba "*Creo que el EC [...] te dice que las clases se preparan [...] O sea, hay un estudio, la clase se analiza, uno se anticipa, el problema que voy a buscar lo voy a orientar para que aparezcan estos aprendizajes [en los futuros profesores], que en este caso era el sentido numérico*".

Otra idea declarada por las MTE, se refiere al mejoramiento cíclico de la lección estudiada, ya que les permitió discutir y mejorar la primera lección diseñada. La Formadora4 expresa "*como [el plan de clase] lo había implementado el Formador5, todo lo que le pudo haber faltado [...] lo tomamos nosotras para hacer mejoras con respecto a eso. Y yo creo que eso sirvió bastante, haber probado, aunque fue un día o dos días de anticipación que ella lo hizo, igual nos sirvió bastante a nosotras para mejorar e implementar acá con nuestros estudiantes [futuros profesores]*".

Asimismo, destacan aspectos de las ideas centrales de EC, esto es, los profesores como investigadores que crean conjuntamente conocimiento del EC, como lo señala la Formadora5 "*Uno de los elementos que me llamó la atención del EC, es el trabajo colaborativo entre formadoras, y formadoras de distintas universidades, con tantas diferencias geográficas [norte, centro y sur de Chile]. Entonces, muchas veces eso también genera una diversidad interesante. [...] lo que rescato es esta riqueza de un diseño [de la lección] pensado desde las realidades tan diversas en las cuales nos desenvolvemos, [...]; al principio nos costó los consensos, por lo mismo, por esta diversidad, por donde nos formamos, nuestras historias, nuestras trayectorias profesionales, los contextos socioculturales en lo que nos desenvolvemos*".

Conclusiones

Este escrito considera fundamental comprender cómo el desarrollo profesional docente afecta el conocimiento y la práctica de los docentes, ya que esto establece una base crucial de investigación que informa a quienes toman decisiones en el ámbito de la mejora de la enseñanza de la matemática.

Especialmente, durante la emergencia sanitaria mundial, surgieron medidas de distanciamiento social y la necesidad de enseñar a distancia. Debido a ello, los docentes de todos los niveles educativos se vieron forzados a adaptarse rápidamente a nuevas formas de enseñanza y aprendizaje en línea. En muchos casos, esto ha llevado a una mayor adopción y uso de tecnologías educativas, como plataformas de aprendizaje en línea, herramientas de videoconferencia y software de colaboración en tiempo real, para proporcionar una enseñanza nueva que da apoyo a los estudiantes de manera virtual.

Principalmente, lo que nos ofrece el EC en línea, es la posibilidad de reunirse virtualmente derribando fronteras y distancias al permitir el ahorro de tiempo y costos de desplazamiento; mayor flexibilidad en cuanto a horarios y disponibilidad de los participantes; y la participación colaborativa en una comunidad en tiempo real, que facilita la discusión productiva y la toma de decisiones colectivas. En este espacio, propio de nuestro tiempo, el modelo de Estudio de Clases presentado se ha mantenido fiel a los elementos definitorios de un EC, apoyando efectivamente el aprendizaje de los docentes, e integrando el currículo escolar (de matemática) con un mejor conocimiento del contenido y de la práctica docente.

En las respuestas y reflexiones de estos dos Grupos de Estudio de Clases, de primaria y universidad, y de otros más no reportados aquí, existe una percepción muy positiva de la efectividad del proceso de EC en línea, y una actitud profesional que revalora la planificación de las lecciones creadas colaborativamente, planes en que se anticipan y priorizan las posibles soluciones de los estudiantes, y en que las discusiones plenarias se convierten en una oportunidad de aprendizaje y de desarrollo del pensamiento crítico. Llevar tales prácticas de enseñanza a otras culturas y contextos sigue siendo un desafío para la investigación en educación matemática en nuestros países.

Referencias y bibliografía

Akiba, M., Murata, A., Howard, C. y Wilkinson, B. (2019). Lesson study design features for supporting collaborative teacher learning. *Teaching and Teacher Education, 77*, 352-365.

Benedict, A. E., Williams, J., Brownell, M. T., Chapman, L., Sweers, A. y Sohn, H. (2023). Using lesson study to change teacher knowledge and practice: The role of knowledge sources in teacher change. *Teaching and Teacher Education, 122*, 103951.

Darling-Hammond, L., Hyler, M. y Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Learning Policy Institute. Accesado https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED606743.pdf.

Dudley, P., Xu, H., Vermunt, J. y Lang, J. (2019). Empirical evidence of the impact of lesson study on students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution. *European Journal of education, 54*(2), 202-217.

Elliott, J. (2019). What is lesson study? *European journal of education, 54*(2), 175-188.

Estrella, S., Mena, A. y Olfos, R. (2018). Lesson Study in Chile: a very promising but still uncertain path. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, and A. Takahashi (Eds.). *Mathematics* *lesson study around the world: Theoretical and methodological issues*, (pp. 105-122). Cham: SPRINGER. DOI: 10.1007/978-3-319-75696-7

Estrella, S., Morales, S., Olfos, R. y Salinas, R. (2022a). Estudio de e-Clases en Chile: cambios percibidos por profesores que diseñan, mejoran e implementan una tarea que desarrolla el razonamiento inferencial informal desde PK-3. En A. Richit, J. da Ponte y E. Soto (Eds.). São Paulo: Livraria da Física.

Estrella, S. y Olfos, R. (2013). Estudio de Clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. En A., Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina* (pp. 167-192). Academia.

Estrella, S., Vidal-Szabó, P. y Morales, S. (2022b). Enseñanza de la estadística en Chile con Lesson Study: innovaciones y buenas prácticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 137-163). CIEME, Universidad Católica del Maule.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*(3), 293-310.

Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development in the case of lesson study. *Journal of Teacher Education, 53*(5), 393-405.

Goei, S. L., van Joolingen, W. R., Goettsch, F., Khaled, A., Coenen, T., GJG, S., ... y Schipper, T. M. (2021). En línea lesson study: virtual teaming in a new normal. *International Journal for Lesson & Learning Studies, 10*(2), 217-229.

Greenaway, R. (2015). *Reviewing Skills Training*. Routledge International Handbook of Outdoor Studies.

Isoda, M. (2011). *El Estudio de Clases: enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas en la experiencia japonesa*. En J. Campos, C. Montecinos y A. González (Eds.), Mejoramiento escolar en acción (pp. 65-80). http://repositorio.uChile.cl/handle/2250/178956

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases japonés en matemáticas*. Ediciones Universitarias Valparaíso.

Isoda, M., Estrella, S., Zakaryan, D. Baldin, Y., Olfos, R. y Araya, R. (2021). Digital competence of a teacher involved in the implementation of a cross-border lesson for classrooms in Brazil and Chile. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 10*(4), 362-377. https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2021-0045

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso. https://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/ProblemSolvingIsodaOlfos.pdf

Isoda, M. y Olfos, R. (2021). *Teaching multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American Theories for Mathematics Education*. Switzerland: Springer. ISBN: 978-3-030-28560-9. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6

Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM, 48*(4), 571-580.

Lewis, C. y Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Lewis, C. y Perry, R. (2017). Lesson Study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3) (2017), 261-299.

Olfos, R., Isoda, M. y Estrella, S. (2020). Más de una década de Estudio de Clases en Chile: hallazgos y avances. *Revista Paradigma, 41*, 190-221.

Olfos, R., Morales, S. y Estrella, S. (2015). Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. *Revista Electrónica Educare, 19*(3), 1-17.

Reyes-Bravo, M. y Estrella, S. (2023). Formadoras de profesores de matemáticas: explorando sus experiencias en un Estudio de Clases sobre sentido numérico. (En evaluación)

Ronfeldt, M., Farmer, S. O., McQueen, K. y Grissom, J. A. (2015). Teacher collaboration in instructional teams and student achievement. *American educational research journal, 52*(3), 475-514.

Sumo Primero en Terreno. (2021, 18 mayo). Clase Pública online: ¿Quién tiene la razón? Análisis de datos para la toma de decisiones [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=anTadMQqKA0

La práctica cartesiana de uso de diagramas y la introducción de las curvas algebraicas en la edición latina de la *Geometría* de Van Schooten

Luis Carlos **Arboleda**
Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com
Jhon Helver **Bello** Chávez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhonhelver@gmail.com

Resumen

En este trabajo se analiza la práctica matemática con diagramas en la segunda edición en latín de la Geometría de Van Schooten (1659 - 1661). Esta edición en dos tomos incluye numerosos Comentarios con aclaraciones y elaboraciones de Van Schooten y alumnos suyos sobre asuntos cruciales de la geometría algebraica que Descartes no desarrolló en el texto original. Argumentamos que Van Schooten ubicó en la obra de Descartes una temática central para la divulgación de la Geometría, la representación algebraica de curvas. Mostramos que los diagramas como modo semiótico de representación y de comunicación fueron esenciales para este propósito porque, además de asegurar la solución algebraica más general de los problemas geométricos, permitieron el paso a la tematización de las curvas algebraicas. Señalaremos el interés pedagógico de algunos episodios históricos en los cuales se expresa esta doble característica de la práctica diagramática en la geometría cartesiana.

Palabras clave: historia y educación matemática, diagramas y práctica cartesiana, edición de textos históricos, Descartes, Van Schooten.

Introducción

La primera edición de la *Geometría* en francés se publicó como parte del *Discurso del Método*. (Descartes, 1637). Su difusión fue menor, entre otras razones porque los documentos científicos de la época se escribían entonces en latín. Pocos años después Frank Van Schooten hijo, quien había sido ilustrador de la obra, se interesó por su contenido matemático y concibió la idea de realizar una segunda edición en latín. Adicionalmente a la traducción, Van Schooten incluyó unos *Comentarios* con sus propias reflexiones y las conclusiones de algunas de las disputas que el trabajo de Descartes había suscitado en los matemáticos de la época, entre ellos, Huygens, Roverbal y el propio Van Schooten. Un estudio de estas controversias se encuentra en Dopper (2014). También incluyó algunas de las primeras producciones en geometría cartesiana elaboradas por sus estudiantes más destacados: Florimondi de Beaune, Johannis Hudden, Henrici Van Heuraet y Johannis de Witt. Van Schooten recogió y editó estos materiales con el firme propósito de promover el estudio y el desarrollo teórico de la geometría cartesiana.

En el presente trabajo se aplica la primera dimensión del esquema que Schubring (1987, 2023) propone para el estudio de textos matemáticos, el análisis de las ediciones. Concretamente los diagramas que usó Van Schooten en los comentarios de la obra. Argumentamos que el entramado de signos del diagrama moviliza toda una forma de pensar que permite pasar de la generalización geométrica a la tematización de las curvas algebraicas, tal como se advierte en los *Comentarios* de Van Schooten. En la práctica matemática de Descartes se utilizan los diagramas desde el inicio de la *Geometría*, tanto para definir operaciones representadas en segmentos, como para solucionar problemas por medio del método analítico, estudiar instrumentos mecánicos y solucionar ecuaciones. Los diagramas son esenciales para comprender la práctica cartesiana. En las explicaciones de Van Schooten, por su parte, los diagramas aparecen con otras funciones. También son un medio para justificar propiedades de las curvas e identificar un objeto de una clase designada por una expresión simbólica. Estos nuevos usos de los diagramas involucran nuevas formas de razonar y proceder en la práctica matemática que Van Schooten reconoció en la obra de Descartes.

La práctica con diagramas en Descartes

De acuerdo con Schubring (1987, 2023) uno de los retos de la historia de las matemáticas en cuanto al estudio de su producción y reproducción a través de textos, es reconocer la interacción de la enseñanza e invención de teorías en su respectivo contexto sociocultural. (Schubring, 2001). El periodo de producción y reproducción del nuevo campo de la geometría cartesiana comienza en 1637 y se estabiliza con la introducción del cálculo por Newton y Leibniz. La *Geometría* inició una época de profundas transformaciones en la práctica matemática. Se establecieron nuevas relaciones entre aritmética, álgebra y geometría basadas en principios de representación, justificación y rigor lógico que tomaron distancia de los establecidos en la antigüedad. Los nuevos planteamientos para la geometría incluyen el uso de curvas para resolver problemas, la clasificación de curvas geométricas a partir de su representación simbólica, el estudio de la representación y el carácter geométrico de las curvas por medio de la construcción de instrumentos diferentes a la regla y el compás, una forma de representación de curvas por medio de ejes cartesianos y la constitución de una teoría de curvas para el estudio de sus propiedades fundamentales. Estudios respecto a estas temáticas se pueden encontrar en Bos (2001), Clarke (2005), Dopper (2014), Liu (2017), Macbeth (2014), Maronne (2007), Rabouin (2016, 2017).

En el análisis de los diagramas de la *Geometría* se observa que las construcciones geométricas se basan en un nuevo modelo de representación de la magnitud. En efecto, Descartes define al comienzo de su obra las operaciones algebraicas entre magnitudes abstractas, las cuales son interpretadas como construcciones geométricas de segmentos cuya relación se soporta en la teoría eudoxo-euclidiana de razones y proporciones. Con las operaciones así definidas Descartes construye métodos para solucionar las ecuaciones antes obtenidas, diseña instrumentos mecánicos para el trazado de curvas e introduce la herramienta de los ejes cartesianos para representar curvas. La primera frase del libro I es bien significativa a este respecto: "Todo problema en geometría puede fácilmente reducirse a términos tales que un conocimiento de las longitudes de segmentos de recta sea suficiente para su construcción". (Descartes, 1954, p. 2; trad. LCA y JHB).

Un recurso fundamental de la práctica cartesiana es el empleo del método analítico de resolución de problemas y de situaciones geométricas, el cual consiste en seis etapas: enunciar aquello que es dado; enunciar con la misma práctica lo que se busca; a partir del mismo tratamiento operatorio a lo dado y buscado se deduce una ecuación que funciona como un principio de lo dado, el análisis; la resolución de las ecuaciones y la construcción de la solución (Hintikka y Remes, 1974, citado por Arboleda, 2012, p.2).

Con la introducción de una práctica de algebrización de la geometría con las anteriores características, Descartes inicia un cambio en la naturaleza semiótica de los problemas de la ciencia. El cambio que permiten los diagramas del modo geométrico de representación al simbólico mediante los cálculos algebraicos proporciona diferentes formas de expresar una curva. Sin embargo, la descripción de la generalidad de la curva se expresa en una ecuación que representa todas las curvas que cumplen las relaciones proporcionales. El diagrama cumple un papel sintético en la presentación de las propiedades de la curva, el principio de identidad de la geometría algebraica de Descartes le permite al diagrama iniciar una relación de doble vía entre la estructura geométrica y la algebraica, lo que conlleva cierta invarianza entre los razonamientos producto de la elaboración del diagrama y los argumentos que sustentan las ecuaciones.

En este sentido, estamos de acuerdo con Rabouin (2017) que no es tanto el lenguaje simbólico del álgebra lo que marca el surgimiento de la matemática moderna. Lo que permite una nueva forma de razonar en matemáticas es la reorientación de las relaciones entre segmentos de líneas en lenguaje natural, a su representación simbólica como cantidades arbitrarias y el tratamiento algebraico de tales relaciones.

En el desarrollo del método analítico de resolución de problemas Descartes recurre al diagrama por lo menos en tres momentos: al suponer una solución del problema, en la solución de ecuaciones por medios geométricos y en la identificación del lugar geométrico que representa una expresión algebraica. En el primer caso, el diagrama dirige, organiza y sistematiza el razonamiento (Rabouin, 2016), permite que la imaginación del resolutor ponga en juego las conexiones y operaciones necesarias para mostrar puntos, segmentos y relaciones que resuelven la situación. En este sentido, el principio rector de la matematización que realiza Descartes es principalmente la práctica y sistematización de la imaginación (Sepper, 2016). Detengámonos en comentar esta idea.

Descartes afirma que en el entendimiento de aquellas cuestiones que no tratan de lo corporal no se requiere apelar al recurso de los sentidos, la memoria y la imaginación. Es lo que ocurre con los objetos de la geometría cuyo estudio moviliza la imaginación a través de sus propiedades de extensión, figura y movimiento. Es verdad que el entendimiento puro puede asignar un sentido abstracto a extensión, la figura, el número, la superficie, la línea o la unidad. Pero, en la geometría cartesiana no funciona este sentido abstracto, ya que siempre hay que apelar a la imaginación para reflexionar sobre sus objetos:

> Las líneas de la geometría cartesiana no pueden separarse de los objetos materiales. Ello no implica de ninguna manera que al reflexionar sobre tales líneas se abarque el conjunto de las determinaciones de los cuerpos; se puede -o incluso se debe- centrar la atención sobre un modo particular de la cosa, sobre una (o dos) dimensiones, haciendo abstracción. (Jullien, 1996, p. 13; trad. LCA y JHB)

Por ejemplo, en el planteamiento de la solución del problema de Pappus para cuatro rectas se plantea el siguiente diagrama:

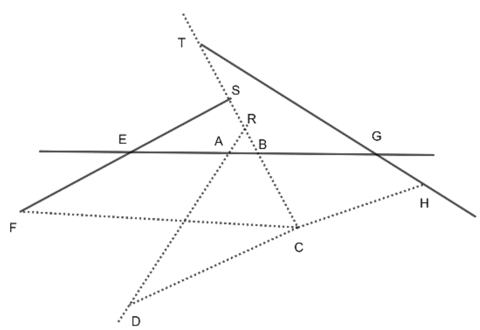


Figura 1. Diagrama solución del problema de Pappus (Descartes, 1954, p. 26)

En donde AB, AD, EF y GH son cuatro rectas dadas en una posición, C es un punto que pertenece al lugar geométrico que se busca y los segmentos CB, CD, CF y CH son los segmentos que cumplen la condición de proporcionalidad $CB \times CF = CD \times CH$. La construcción de la ecuación depende de las consideraciones realizadas en el diagrama.

En el caso del problema de Pappus, como lo muestra detalladamente Maronne (2007), la situación del punto C en determinada región del plano, la posición de los segmentos auxiliares CB, CD, CF, CH y la elección de una recta conocida $AB = x$ y otra desconocida $CB = y$ para representar los puntos que hacen parte del lugar geométrico, condicionan las relaciones geométricas a partir de las cuales se construyen las distintas formas de las ecuaciones solución del problema mediando la operatividad algebraica. Esta problemática queda planteada en el tratamiento que hace Descartes de los signos de la representación simbólica. Esto es, cada recta queda representada simbólicamente dependiendo de su posición, por ejemplo: si R está entre C y B, el segmento $CR = y - \frac{bx}{z}$, y cuando C está entre B y R entonces $CR = -y + \frac{bx}{z}$. (Descartes, 1954, p. 29).

El segundo caso de recurso al diagrama ocurre cuando Descartes analiza la curva producto de una colección de puntos generados por la intercepción de dos curvas de menor orden. En estos casos el diagrama configura una red de conceptos que permite estudiar el objeto y sus propiedades. La figura 1 muestra la curva trazada por un hiperbológrafo a partir de la intercepción de dos rectas, de acuerdo con el procedimiento originalmente expuesto en (Descartes, 1954, p. 51). En esta innovación de los artefactos dispuestos para la geometría, los diagramas sintetizan las propiedades de las curvas, todas las representaciones se ocultan en las relaciones que hacen posible la imagen, desde allí, se estructura la representación simbológica de cada elemento que la compone. En el diagrama se representa la curva y se esquematiza la relación que permite pasar del registro figurativo al registro algebraico, se describen dos objetos que se encuentran en ontologías diferentes la curva como objeto geométrico y como ecuación algebraica. Cada punto de la curva se describe como la raíz de una ecuación cuando se fija una de las dos variables, lo que permite exhibir los puntos de la curva sin tener que hacer la construcción geométrica para cada punto (Maronne, 2007).

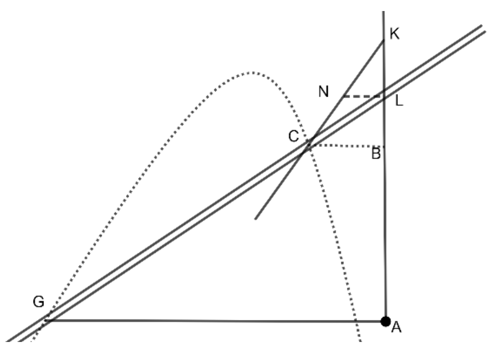


Figura 2. Hiperbológrafo. (Descartes, 1954, p. 51)

En el tercer caso de la práctica diagramática, después de obtener el principio analítico representado en la ecuación, Descartes se enfoca en mostrar el tipo de curvas que son solución. En el caso del problema de Pappus para cuatro rectas, realiza una construcción para determinar la relación entre los puntos que conforman la solución y las rectas tomadas como ejes.

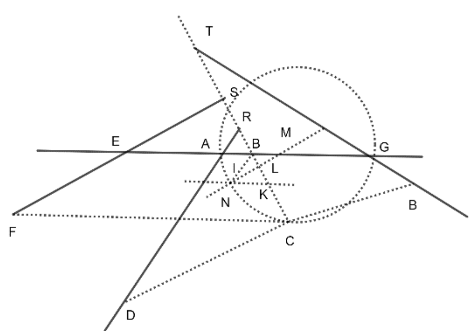


Figura 3. Construcción de una cónica en la solución del problema de Pappus. (Descartes, 1954, p.69)

Obsérvese que todas las líneas punteadas, incluyendo los puntos de la cónica, hacen parte de una estrategia para mostrar la relación que debe tener cada punto de la circunferencia con los ejes de referencia, pero no permite validar que todos los puntos sean construibles. La posición de la recta IK depende de la cónica que se quiera analizar y su representación simbólica de la posición respecto a la recta $CB = y$, nuevamente Descartes advierte la relación entre la posición de los segmentos de recta en el diagrama y el signo de la representación algebraica: “Tomo el punto K entre L y C, ya que la ecuación contiene $-\frac{n}{k}x$; si este fuera $+\frac{n}{k}x$, debería tomar L entre K y C; mientras que si $\frac{n}{z}x$ fuera igual a cero, no debería trazar IL". (Descartes, 1954, p. 310)

Descartes realiza este mismo análisis de signos para el término $\frac{p}{m}x^2$ del término en LC de la ecuación, siendo $LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$, con lo cual se da solución al problema de Pappus para cuatro rectas, como lo estudia convenientemente Dopper (2014, p.p. 93-94). Sin embargo, el proceso que muestra el diagrama para cada caso Descartes no lo realiza, la explicación de las curvas solución queda sumergida en el análisis del signo de la expresión algebraica.

Después de adelantar el proceso de generalización que partiendo del diagrama lleva a la construcción de la ecuación que representa la curva solución, Descartes pasa a deducir las curvas determinadas por la expresión algebraica. En esta última parte, el diagrama no es esencial como sí lo fue para para obtener la expresión algebraica. Este segundo análisis es pues, puramente algebraico. Por otra parte, Descartes deja planteado el procedimiento para determinar y construir la cónica solución a partir de la ecuación del lugar geométrico en el problema de Pappus, pues solo hace explicito este procedimiento para el caso de una cónica, dejando en manos del lector el trabajo de completar el análisis. Como veremos en el siguiente aparte del artículo, será Van Schooten quien realizará la tarea de analizar los distintos casos de cónicas solución (Maronne, 2007).

Las explicaciones de van Schooten en los Comentarios

En el prefacio de la segunda edición en latín, Van Schooten afirma que los *Cometarios* y los escritos que acompañan la traducción, tienen como propósito que el lector comprenda el contenido de la *Geometría* y la importancia del método de análisis de Descartes. Es decir, que esta edición comentada y ampliada con otros documentos pueden considerarse como parte de una estrategia comunicativa de Van Schooten en la divulgación y enseñanza de las ideas cartesianas. En especial, en cuanto a ayudar a un lector acucioso a comprender y completar las tareas que Descartes deja planteadas en su obra. En ese sentido, la edición de Van Schooten incorpora una función claramente pedagógica para la real comprensión de la nueva geometría algebraica de Descartes. Ello contribuyó sin duda a la amplia difusión y recepción de esta edición y a su rápida apropiación en otros dominios de la práctica matemática.

Este es un ejemplo histórico de cómo un texto explicativo de una obra paradigmática puede aportar a la consolidación y reproducción de una práctica matemática nueva y a su extensión en otras direcciones. Este asunto es considerado por Schubring (2019) cuando crítica la noción de transposición didáctica de un texto porque considera que no tiene en cuenta la importancia eventual de la preparación de materiales para la enseñanza en la práctica de producción matemática. Indica Schubring (2001, 2019, 2023) que, por su parte, los estudios históricos de la matemática deben develar la importancia de la enseñanza no solo en la reproducción de la cultura matemática, sino también en la práctica de producción matemática.

En este apartado revisamos algunos momentos de los *Comentarios* de Van Schooten en los cuales consideramos que se transforman o se realzan aspectos significativos de la práctica cartesiana con diagramas. Uno de esos momentos es el uso que hace Descartes de los diagramas en la solución del problema de Pappus para cuatro rectas. Específicamente en la identificación de las cónicas que representa la ecuación general de segundo grado. La problemática que enfrenta Van Schooten es hacer claridad sobre el método seguido por Descartes para analizar la ecuación y deducir la relación entre la cónica, su expresión simbólica y la construcción geométrica del diagrama.

En el intervalo de tiempo entre la aparición de la edición de 1637 y la elaboración de los *Comentarios* de la segunda edición en latín, los matemáticos de la época, principalmente Roverbal y Huygens, estudian y cuestionan la posición de cada una de las cónicas y el hecho que Descartes presente solo una parte de la hipérbola. La controversia a que ello dio lugar queda conciliada con la introducción de los comentarios B y BB de la versión en latín. La historia de estas controversias ha sido estudiada en detalle en (Dooper, 2014).

El comentario BB de Van Schooten se refiere a la relación que Descartes establece entre la posición del punto C en el diagrama del problema de Pappus para cuatro líneas (Fig. 1) y los ángulos en los que se encuentran las rectas dadas. Es decir, en términos modernos, comprende la pérdida de generalidad en la determinación de la ecuación del lugar geométrico solución del problema, al restringir la posición de C en cierta región del plano. Esta restricción del espacio geométrico en el que se produce la solución fue uno de los motivos de controversias de la época. Descartes argumentaba que implícitamente él había indicado cómo extender su procedimiento a otras situaciones, de manera que cualquier lector reflexivo pudiera hacerlo por su cuenta. En su carta a Mersenne del 31 de marzo de 1638 afirma al respecto: “Hago la construcción como los arquitectos construyen estructuras, dando las especificaciones y dejando el trabajo manual real a carpinteros y albañiles” (Descartes, 1954, p. 63).

Si se examina en detalle, el procedimiento de Descartes consiste en interpretar y estudiar la posición de la figura en términos de la ecuación algebraica, con lo cual la emergencia del análisis de la ecuación se separa de su interpretación geométrica, dejando al lector la necesidad de construir para cada caso la curva solución.

Van Schooten entiende la importancia de esta intención de Descartes y en su comentario BB trata de aclarar el procedimiento. Para ello apela al problema que plantea Huygens en su carta a Descartes del 6 de diciembre de 1656, en donde el problema de la situación geométrica se explica en términos del análisis de signos de la ecuación.

El problema se refiere a la construcción de un espacio d a partir de la posición de C con respecto a los puntos A y B de una recta. Van Schooten hace explicita la analogía de la solución con el razonamiento del problema de Pappus en cada uno de los casos de identificación de los signos de la ecuación.

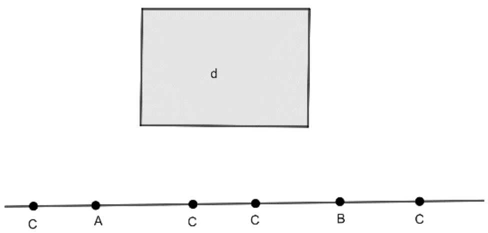


Figura 4. Diagrama asociado al ejemplo del comentario BB. (Schooten, 1659, p. 180)

La construcción de d a partir de la posición de C respecto a A y B, modela la condición de los signos de la expresión algebraica en el problema de Pappus respecto al punto solución. Si C está a la izquierda de AB y $CA = x$, entonces $xx + ax = d$. Si C está entre A y B, la ecuación es $ax - xx = d$; y finalmente, si C está a la derecha de B, entonces, la ecuación es $xx - ax = d$.Van Schooten utiliza un problema de menor complejidad en este comentario para explicar el problema de los signos en la representación simbólica de la ecuación.

Este problema y su solución apuntan a reconocer dos momentos significativos del procedimiento cartesiano. Comprender la prefiguración del uso de magnitudes orientadas que conservan un valor específico independiente del cambio de orientación, y la adopción de la convención simbólica de alternancia de signos para tener en cuenta todos los casos posibles en que se relacionan las magnitudes. Al mismo tiempo, este comentario BB de Van Schooten subraya la importancia del tratamiento algebraico en el esclarecimiento de una problemática de carácter geométrico.

El comentario CC del libro II retoma en parte las discusiones entre Van Schooten y Huygens sobre el análisis algebraico de la ecuación y la deducción a partir de ella de las curvas solución del problema de Pappus. En total se estudian 4 casos para la parábola, 5 casos para el círculo, 5 casos para la elipse y 10 casos para la hipérbola. En la edición de 1637 Descartes explica el procedimiento de la construcción y presenta las conclusiones con respecto a la relación entre la cónica solución y los cambios respectivos en la forma de la ecuación dada por $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$. Sin embargo, no aclara la relación entre los puntos de cada curva y la ecuación general. Este es el propósito del comentario CC.

Van Schooten parte de la conclusión a la que había llegado Descartes sobre el tipo de cónica solución que se deduce de la ecuación al considerar el término $LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$:

> En particular, si el término $\frac{p}{m}x^2$ es cero, la sección cónica es una parábola; si está precedido de un signo más, es una hipérbola, y, por último, si va antecedido de un signo menos, es una elipse. Se da una excepción cuando a^2m es igual a pz^2 y el ángulo ILC es recto, en cuyo caso obtenemos una circunferencia en lugar de una elipse. Si la sección cónica es una parábola, su *latus rectum* es igual a $\frac{oz}{a}$ y su eje siempre está a lo largo de la recta IL. Para hallar su vértice, N, hacemos IN igual a $\frac{am^2}{oz}$, de modo que el punto I esté entre L y N si m^2es positivo y ox es positivo; y L está entre I y N si m^2es positivo ox negativo. Es imposible que m^2 sea negative cuando los términos están dispuestos como se ha indicado antes. Finalmente, si m^2es igual a cero, los puntos N e I deben coincidir. (Descartes, 1954, p. 68)

Van Schooten construye para cada caso la posición para las rectas IL, IN y LK, e identifica la posición de cada curva, luego, el *latus rectum*, el vértice, y el diámetro de cada curva según lo descrito por Descartes y exhibe su correspondiente ecuación. En estos diagramas se aclara la problemática de cambio de signo que había dejada planteada Descartes y la nulidad de algunos de los términos de la ecuación general. La figura 4 muestra el diagrama del primer caso para las parábolas utilizado en el comentario CC.

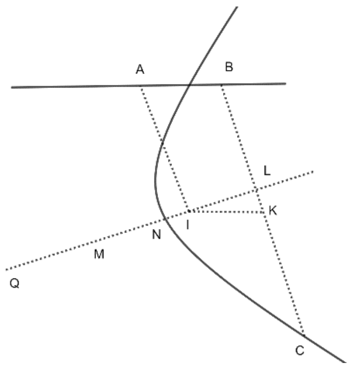


Figura 5. Primer caso de la cónica solución del problema de Pappus. (Van Schooten, 1659-1661, p. 182)

En el texto que acompaña este diagrama Van Schooten (1659) afirma: la sección es una parábola en la cual la línea LC existe; y las ordenadas aplicadas al diámetro siempre están en la línea IL. El vértice N en el otro lado del punto L debe tomarse con respecto al punto I, $LC = \sqrt{mm + ox}$, para encontrar, el *latus rectum*.

Van Schooten realiza un cambio definitivo con respecto al tratamiento de Descartes, en cuanto su comentario apunta a aclarar la idea de curva y la relación con su representación simbólica. En este momento de la práctica cartesiana se pasa de construir la curva a establecer la relación entre sus propiedades conocidas a través de un tratamiento algebraico. Como lo indica Maronne (2007) este análisis es netamente algebraico. El diagrama es una referencia para la situación, pero no es determinante en la obtención de su expresión simbólica.

Para todos los casos, Van Schooten muestra las posiciones relativas de los puntos N, L, I, C y de los segmentos de recta IK, IN, LC, LM, LN, explicando las afirmaciones que Descartes hizo en la *Geometría* sobre la relación entre la ecuación que representa el problema y los segmentos que se construyen en el diagrama de la figura 5.

En la explicación de Van Schooten sobre las cónicas solución del problema de Pappus para cuatro rectas, el diagrama es usado como una red conceptual que permite pasar del análisis puntual de la curva a una expresión algebraica que representa todos los puntos de la curva, y que permite analizar su posición relativa a partir del uso de las rectas que se toman como ejes. Los 24 diagramas que aparecen en este comentario son ilustrativos de las características conocidas de la curva, al tomarla como dada.

Estas explicaciones sobre la cónica solución del problema de Pappus continúan en el comentario CCC, el cual está relacionado con la siguiente frase de la *Geometría*: *Es pues fácil determinar esta parábola, de acuerdo con el primer problema del primer libro de Apolonio* (Descartes, 1954, p. 68). Van Schooten comprendió el enfoque metodológico propuesto por Descartes: encontrar el principio analítico de las curvas que representan la solución al problema y, luego, mostrar que cada cónica se deduce de la ecuación que expresa este principio. La noción usual de cónica en la época era aquella introducida por Apolonio, como corte de un cono. En este comentario Van Schooten muestra que la representación simbólica de la clase de curvas de Apolonio es equivalente a la que se deduce de la ecuación solución del problema de Pappus, y, por lo tanto, se identifican con el lugar geométrico de los puntos solución de tal problema.

En la introducción a este comentario Van Schooten indica que su intención es que los lectores de la *Geometría* comprendan la solución y las propiedades de las cónicas, incluso si no tienen acceso al libro de Apolonio. Van Schooten tomó la proposición 11 del libro I de *Cónicas* e interpretó la definición para cada curva en los términos conceptuales de la geometría cartesiana. Sobre el mismo diagrama que utiliza Apolonio, designa las cantidades de magnitud con una letra minúscula y opera con ellas algebraicamente. El diagrama euclidiano interpretado en la doble escritura cartesiana es el soporte de referencia para mostrar la equivalencia entre la representación figural de la curva y su representación algebraica (Bello, 2021).

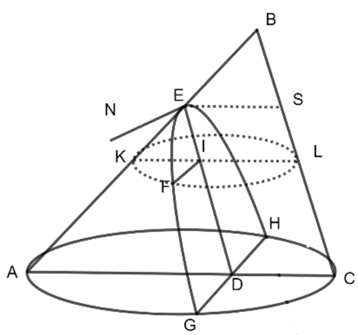


Figura 6. Diagrama usado por van Schooten de la proposición 11 del libro I de Apolonio. (Schooten, 1659, p. 207)

Para el caso de la parábola Van Schooten observa que si $AB = BC$ la base del cono es una circunferencia de diámetro AC, y la sección KFL es también una circunferencia paralela a la base. Nombra $AB = a, BC = b, AC = c, EB = d, EI = x, FI = y$, luego como el triángulo ABC es semejante con KEI y con el triángulo EBS, deduce que $KIL = FI$ y, por lo tanto, la relación que identifica la cónica se puede representar por $\frac{ccd}{ab}x = yy$ que es una curva de segundo grado.

El tratamiento algebraico que hace Van Schooten de la construcción geométrica se fundamenta en el procedimiento cartesiano de extender las magnitudes euclidianas al campo operatorio de magnitudes abstractas y en utilizar la teoría euclidiana de las razones y proporciones para determinar la expresión simbólica de cada cónica. Esto comporta toda una comprensión de la naturaleza de la generalización de la noción de curva algebraica producto del análisis cartesiano. La identificación de Van Schooten del fondo de la tematización que Descartes introdujo en la geometría euclidiana, se traduce en compromiso en su difusión y explicación pública a través de la edición comentada. Otra prueba de ello es la inclusión que él hace en la segunda edición (1659 - 1661) de dos escritos consagrados a discutir los principios fundamentales de la matemática cartesiana, y el método cartesiano de solución de problemas con base en el tratamiento algebraico de su interpretación mediante construcciones geométricas, *Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum* (Schooten, 1661a) y *Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico* (Schooten,1661b).

Conclusiones

En el presente trabajo hemos tratado de mostrar el interés que reviste un análisis de textos históricos, en este caso las primeras ediciones de la *Geometría*, para comprender los procesos complejos de comunicación y formación de cultura matemática alrededor una obra paradigmática, la teoría de curvas algebraicas. Hemos visto que el estudio de esta función comunicativa y de educación matemática, aparece estrechamente relacionada en los inicios de la práctica cartesiana con la función principal de producción de conocimientos. La estrategia comunicativa de Van Schooten en cuanto a la divulgación y enseñanza de las ideas cartesianas se dirigía a satisfacer las necesidades de un lector proactivo de conocer la nueva geometría, pero también a realizar las tareas de perfeccionamiento del método que Descartes había dejado planteado en su obra. La interrelación entre la función pedagógica y la función epistemológica en la edición de Van Schooten contribuyó sin duda a la amplia difusión y recepción de esta edición y a su rápida apropiación en otros dominios de la práctica matemática.

También hemos mostrado que el estudio de los diagramas en estas ediciones a aporta elementos significativos para comprender la práctica matemática en un contexto histórico concreto. Con respecto al papel de los diagramas en el establecimiento de la geometría cartesiana, el análisis de los *Comentarios* pone de presente el importante papel que Van Schooten desempeñó al aclarar en su tiempo la función del diagrama en el proceso constitutivo de la curva algebraica a partir de la configuración geométrica del problema de Pappus. En palabras modernas diríamos que en los *Comentarios* se explica con nuevos elementos el uso del diagrama en la *Geometría*, y se realza su función como red conceptual que permite pasar del análisis puntual de la curva a una expresión algebraica que representa todos los puntos de la curva, mediante la caracterización de su posición relativa a partir del uso de las rectas que se toman como ejes.

Van Schooten como editor y comentarista comprendió el fondo de la novedad del método de Descartes y la importancia de orientar en esa dirección a los lectores de la edición latina. Esto lo corroboramos en su cuidadosa presentación de la extensión de las magnitudes euclidianas al campo operatorio de magnitudes abstractas, como condición necesaria para utilizar la teoría euclidiana de las razones y proporciones en términos de una representación simbólica conveniente, y constituir la curva algebraica como un objeto matemático radicalmente nuevo. Hemos utilizado en varias ocasiones el término de *tematización* para referirnos a este procedimiento.

Esta noción fue introducida por Jean Cavaillès para distinguir la edificación lógica de las teorías de una simple generalización. Como se aclara en (Arboleda, 2011): “la tematización es el proceso por el cual una operación que previamente se ha realizado sobre un campo de objetos, es objeto de una segunda operación, la cual se vuelve a su vez objeto de una tercera operación, y así sucesivamente". Parafraseando el artículo antes referido podemos que decir que el arte específico de la geometría cartesiana es la tematización. Aquello que hemos querido exponer a través de este estudio de las ediciones de la Geometría es que Descartes no llegó al objeto curva algebraica por abstracciones de objetos reales mediante la descripción de sus características principales, sino a través de una práctica compleja de encadenamiento de operaciones lógicas sobre dominios matemáticos preconstituidos.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En Recalde, L. C. y G. I. Arbeláez (2011). *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica.* Cali: Editorial Universidad del Valle; pp. 19-38.

Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 764 - 777. Medellín: Universidad de Medellin. Recuperado de: http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf

Bello, J. (2021). *Diagramas y práctica matemática en la Geometría Cartesiana (1637-1750). Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores.* Cali: Universidad del Valle. Récupéré sur https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/browse?type=author&value=Bello%20Chavez,%20Jhon%20Helver

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

Clarke, D. (2005). Descartes' philosophy of science and the scientific revolution. Dans *The Cambridge Companion to Descartes* (éd. Décima, 258 - 285). Cambridge : Cambridge University Press.

Descartes , R. (1637). La geometrie . Dans R. Descartes, *Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences; plus La dioptrique Les meteores et La geometrie qui sont des essais de cete methode* (pp. 297-413). Leiden.

Descartes, R. (1954). *The Geometry.* (D. Smith, & M. Latham, Trads.) New York: Dover Publication.

Dopper, J. (2014). *A life of learning in Leyden. The Mathematician Frans Van Schooten (1615-1660).* Tesis doctoral, Universidad de Utrecht, Veedam.

Jullien, V. (1996). *Descartes. La "Géométrie" de 1637*. Paris: Presses Universitaires de France.

Liu, C. (2017). Re-examining Descartes' Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy, 58*(1), 29 - 57. https://doi.org/10.1111/phib.12093

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25*(2), 87 - 117. https://doi.org/10.5840/gfpj200425212

Maronne , S. (2007). La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661. Université Paris - Diderot , Paris VII. Paris : *Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]*. Obtenido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00204125v2

Rabouin, D. (2016). Mathesis universalis et algèbre générale dans les Regulae ad directionem ingenii de Descartes*. Revue d'histoire des sciences, 69, 259-309.* https://doi.org/10.3917/rhs.692.0259

Rabouin, D. (2017). Logic of imagination. Echoes of Cartesian epistemology in contemporary philosophy of mathematics and beyond. Synthese, 195:4751-4783. Doi:10.1007/s11229-017-1562-1

Schooten, F. van (1659). Commentarii. En F. Schooten (Ed.), Geometria à Renato Des Cartes (Vol. 1, págs. 143-400). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios. Vol. 1 (1659), vol. 2 (1661). Obtenido de: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8601510z/f11.item

Schooten, F. van (1661a). Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum. En F. Schooten (Ed.), *Geometria à Renato Des Cartes* (Vol. 2, pp. 1-48). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schooten, F. van (1661b). Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico. En F. Schooten (Ed.), *Geometria à Renato Des Cartes*. (Vol. 2, pp. 341-420). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schubring , G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbook: Lacroix as Textbook Autor. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, (3), 41 – 51. https://www.jstor.org/stable/40247906

Schubring, G. (2001). Production mathématique, enseignement et communication. Remarques sur la note de Bruno Belhoste, "Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques" parue dans la RHM 4 (1998), p. 289–304." *Revue d'histoire des mathématiques* 7.2 (2001): 297-308. http://eudml.org/doc/252108.

Schubring, G. (2019). The Impact of Teaching Mathematics Upon the Development of Mathematical Practices. Dans G. Schubring (Éd.), *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01617-3_5

Schubring, G. (2023). *Analysing Historical Mathematics Textbooks.* Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17670-8

Sepper, D. (2016). Descartes. Dans A. Kind (Éd.), *The Routledge handbook of philosophy of imagination* (pp. 27-39). New York: Routledge

Mesa redonda plenaria

Nuevas perspectivas del uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática

Luz Manuel **Santos** Trigo
Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzado
México
msantos@cinvestav.mx
Marcelo **Bairral**
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Brasil
mbairral@ufrrj.br
Michèle **Artigue**
Universidad París Cité
Francia
michele.artigue@gmail.com
Ricardo **Poveda** Vásquez (coordinador)
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
ricardo.poveda.vasquez@una.ac.cr

Resumen

En esta mesa redonda plenaria se discutirá sobre el papel de las tecnologías digitales en la actualidad, considerando las nuevas perspectivas ocasionadas por la situación de la pandemia de COVID 19. Se abordarán algunos temas, como el de la tecnología en los nuevos retos educativos y el diseño de nuevos entornos de aprendizajes y de recursos para una educación presencial, híbrida o virtual. Además, la formación inicial y continua de los docentes, así como la evaluación de los aprendizajes son áreas en que la tecnología siempre está presenta, por esta razón se incluyen en esta discusión. Por último, desde hace algunos años se han desarrollado diversos enfoques teóricos para trabajar cuestiones tecnológicas en la educación matemática, sin embargo, es necesario profundizar en esto, por lo que también es uno de los temas que se tratará en la mesa redonda.

Palabras claves: Educación matemática, Educación, Enseñanza, Aprendizaje, TICs.

Introducción

Desde la aparición de las tecnologías digitales, los profesores e investigadores en educación matemática han tratado de ponerlas al servicio de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como demuestra la síntesis aportada por el primer estudio del ICMI organizado sobre este tema en 1985. Desde entonces, los usos y la investigación se han multiplicado en todo el mundo, y los conocimientos se han acumulado, pero la cuestión del uso educativo de las tecnologías digitales se renueva constantemente, por la propia evolución tecnológica, por la evolución de los conocimientos científicos y por la de los usos sociales de estas tecnologías, así como por los retos a los que se enfrenta la humanidad, como ha demostrado claramente la pandemia de COVID 19. Se abren nuevas perspectivas, pero muchas cuestiones siguen sin resolverse y surgen otras nuevas.

La tecnología en los nuevos retos educativos

Tecnología al servicio del desarrollo de una ciudadanía crítica

No es fácil comprender la complejidad del mundo actual y los grandes retos a los que se enfrenta la humanidad, como el desafío climático, y evitar dejarse seducir por discursos que niegan esta complejidad afirmando que existen soluciones sencillas y desarrollar una verdadera ciudadanía crítica. La educación debe ayudarle, especialmente las matemáticas. Frente a este reto, las tecnologías digitales son ambivalentes. La reciente pandemia ha demostrado claramente que son esenciales para hacer frente a crisis de tal magnitud, pero también que facilitan la propagación de noticias falsas, discursos erróneos o incluso conspirativos.

Es importante extraer enseñanzas de este acontecimiento, pero también de todos los proyectos interdisciplinarios que se están desarrollando en la enseñanza para sensibilizar a los alumnos hacia estos retos, ayudarles a comprenderlos, a pensar en medios de acción y a poner a prueba algunos de ellos.

La pandemia ha puesto así de manifiesto el valor que tuvo para la enseñanza el acceso a una gran cantidad de datos sobre la misma y su evolución en los distintos países o regiones, casi en tiempo real. Las tecnologías digitales también han sido muy útiles para ayudar a los estudiantes a comprender, mediante el uso de modelos, por supuesto simplificados y adaptados a su nivel, los procesos de crecimiento en juego y el posible efecto de las decisiones de confinamiento o de las políticas de vacunación. Han contribuido así a contrarrestar visiones erróneas de la modelización matemática, de sus potencialidades y limitaciones, alimentando discursos anticientíficos peligrosos para el bien común.

También han ayudado a compartir ampliamente el impresionante número de recursos producidos por las comunidades científica y educativa, y a intercambiar sobre nuestras respectivas experiencias, dificultades y éxitos. Los numerosos artículos publicados en números especiales de revistas científicas desde 2021, como (Chan, Sabena y Wagner, 2021), (Engelbrecht, Borba y Kaiser, 2023) y muchos otros son útiles para analizar con mayor precisión el papel que desempeñaron las tecnologías digitales para ayudar al desarrollo de una ciudadanía crítica en este contexto.

Por último, respecto a los proyectos mencionados al principio e insistiendo en la necesidad de que la educación matemática no aborde estas cuestiones de forma aislada, la comprensión de los retos del mundo actual requiere un enfoque multidisciplinar y esto concierne también a la comprensión del posible papel de las tecnologías digitales porque, según las disciplinas, nuestra relación con las tecnologías digitales, los recursos y los usos que privilegiamos son diferentes. Y, más allá de las interacciones que deben establecerse entre las disciplinas escolares, si queremos implicar a la ciudadanía crítica en la acción, también es importante pensar en una escuela abierta a las comunidades y a sus usos de las tecnologías. Es lo que intenta hacer, por ejemplo, el proyecto europeo MOST (https://icse.eu/international-projects/most/) que, a pesar del difícil contexto de los dos últimos años, ha permitido realizar XX SCP (School Community Project) con alumnos de diferentes niveles escolares y una diversidad de interlocutores sobre temas medioambientales. Sería interesante estudiar el papel exacto desempeñado por las tecnologías digitales en este proyecto y las realizaciones asociadas. Pero cuando se trata de una escuela abierta, América Latina tiene una tradición mucho más sólida y rica.

Tecnología ante la desigualdad educativa

Todos los recursos (materiales convencionales o informáticos) son importantes y contribuyen diferentemente en el aprendizaje. La mayoría de los recursos digitales necesita algún tipo de conexión a la red o la compra de equipos, lo que dificulta, sobre todo porque la adquisición es costosa para muchos docentes.

Con el desarrollo de los dispositivos móviles y sus aplicaciones disponibles, la conexión a la red ya no se hace indispensable. Los dispositivos ya poseen posibilidades de compartir vía Bluetooth o se puede descargar alguna aplicación de compartir, el 4shared por ejemplo. Además de esta facilidad de compartir y de trabajar sin conexión, ya no es necesario que las escuelas dispongan de laboratorio de informática, aunque este espacio todavía sea importante para otras actividades, sobre todo, las que exigen pantallas mayores, ordenadores etc. El laboratorio también exige personal técnico y arreglos constantes de los ordenadores, horas disponibles de uso, hechos que igualmente dificultan desplazar los alumnos hacia este tipo de ambiente.

La posibilidad de recursos gratuitos y que se pueden llevar directamente a la clase con los smartphones de los estudiantes facilita su uso directamente en tareas matemáticas previamente planteadas por el profesor. Minimizados los problemas de conexión (con aplicaciones de compartir) y de equipamientos (con los que pueden traer los alumnos), el otro desafío es el compromiso de los docentes hacia la disminución de las desigualdades educativas con acciones que no discriminen o clasifiquen a los estudiantes (Warschauer, 2005), sino que favorezcan en todos ellos el desarrollo de tareas de alto dominio cognitivo (Stein & Smith, 1998).

Escenarios de aprendizaje post-confinamiento

Durante el prolongado confinamiento social debido a la pandemia varias formas y comportamientos de los individuos para realizar tareas y actividades cotidianas, sociales, y profesionales privilegiaron la interacción remota y modificaron los caminos de resolver problemas. En el ámbito escolar, el uso de tecnologías y desarrollos digitales resultó importante para transformar las actividades presenciales a un modelo remoto o en línea de enseñanza.

En la implementación de las actividades en línea, los estudiantes desarrollaron diversas estrategias para procesar las explicaciones que recibían de sus profesores y para resolver dudas por medio de interacciones sincrónicas o asincrónicas con el propio profesor o con sus pares. Además, los estudiantes tenían la libertad de consultar plataformas o desarrollos en línea como "Wikipedia" o "KhanAcademy" para revisar o extender la comprensión de conceptos o analizar ejemplos de problemas con la intención de resolver las tareas o problemas del curso. Así, en términos generales, los estudiantes durante el confinamiento tuvieron la oportunidad de ampliar sus formas de trabajar las tareas escolares comparadas con aquellas que realizaban antes de la pandemia en el modelo presencial. En el regreso al modelo presencial resulta importante analizar qué ajustes se deben contemplar tanto en el currículum matemático como en los escenarios post-confinamiento. Esto se expone en el siguiente apartado.

La tecnología en el diseño de nuevos entornos de aprendizajes y de recursos presencial-híbrido

Entre los cambios relevantes en el diseño e implementación de actividades de aprendizaje se destaca, el reconocimiento de que los estudiantes son el centro en el desarrollo de las actividades de aprendizaje y la importancia de fomentar y guiar las tareas que realizan en línea y su relación con el trabajo que se desarrolla en las actividades presenciales.

En las sesiones presenciales, más que escuchar explicaciones acabadas y a veces extensas por parte del profesor, se analizarán videos cortos (seleccionados que pueden ser propios del profesor o de otros expertos) sobre la explicación de conceptos o resolución de problemas. La idea es que, en las sesiones presenciales, los estudiantes centren su atención en discusión y análisis de los conceptos o problemas destacando las diferencias y semejanzas entre los conceptos y temas tratados en los videos. Además, los estudiantes tendrán oportunidad de presentar y compartir el trabajo o tareas realizadas en línea.

La idea y meta es que el estudiante desarrolle un plan estratégico y táctico que le permita activar caminos sobre cómo desarrollar una comprensión robusta de conceptos matemáticos y competencias de resolución de problemas. ¿Qué tipo de preguntas formular? ¿Con quién dialogar o a quién preguntar? ¿Qué recursos consultar? etc. Aquí, se contempla la selección de las tecnologías y desarrollos digitales que les permita compartir y discutir ideas con sus compañeros e interactuar con sus maestros y otros expertos. Además, el uso sistemático de herramientas (GeoGebra) que le permitan representar y explorar conceptos y problemas matemáticos. Por ejemplo, la construcción de modelos dinámicos de los problemas ofrece a los estudiantes la oportunidad de conectar gráficos, visuales y métodos analíticos en la resolución de problemas.

Un entorno de aprendizaje es un sistema interactivo entre humanos y entre humanos y dispositivos informáticos. Debe ser diseñado con tareas con diferentes objetivos, con múltiples formas de lenguajes y de representación, y que su resolución sea potenciada por interacciones sincrónicas y asincrónicas. Cada forma de interacción tiene sus contribuciones y limitaciones. Las tareas pueden ser planteadas para individuos y pequeños grupos. Es importante tener cuidado con el uso indiscriminado de Internet. Esta generalización, asociada al desconocimiento de su verdadero potencial o limitación pedagógica, se hizo evidente en tiempos de pandemia. Es decir, no es lo mismo realizar una comunicación a través de WhatsApp que disponer de una conexión para descargar o ver vídeos, para realizar videoconferencias o chatear, etc. Tener una conexión de teléfono inteligente no es lo mismo. ¡Imaginar qué teléfono inteligente (smartphone) se encargará de los detalles educativos es un peligro!

La respuesta no es solo una buena conectividad o un paquete de datos, sino una adecuada planificación y equipamiento, una formación profesional de calidad, la implicación de equipos multidisciplinares y la comprensión pedagógica de las distintas formas de apropiación del conocimiento. En los países sudamericanos, la falta de equipamiento adecuado y conexión robusta es uno de los problemas para la constitución de ambientes de aprendizaje adecuados a las nuevas demandas de aprendizaje.

Un entorno virtual de aprendizaje no es un espacio de gestión académica ni de obtención de información burocrática, ni es un repositorio de material didáctico y actividades para realizar y enviar sin interacciones. La presencia y acompañamiento mediador del docente es fundamental. Esta actuación no es sólo en la mediación, sino en el diseño didáctico en su conjunto, ya que el colectivo profesional docente asume y sigue desempeñando un papel primordial en la educación matemática sea presencial, híbrida o totalmente online.

La tecnología en la formación del profesorado

En la formación inicial

Inicialmente cabe subrayar que el conocimiento profesional docente en la formación inicial es distinto del conocimiento del profesorado en la formación continua, sobre todo por el hecho de que los profesores en formación continua poseen experiencia que influye en su conocimiento práctico.

Las investigaciones han destacado que el conocimiento profesional docente es inseparable de los contextos y actividades en los cuales se desarrolla. Por lo tanto, la situación en la cual un futuro profesor o docente en formación continua se desarrolla es parte fundamental de cómo él construye - de modo constante y no lineal, un conjunto particular de conocimientos y habilidades profesionales.

La utilización de las tecnologías digitales para propiciar el trabajo colaborativo tanto para los estudiantes como para los profesores debe favorecer un proceso constante de reflexión respecto a sus concepciones sobre lo que significa enseñar y aprender matemáticas y sobre el diseño de entornos de aprendizaje que promuevan, entre otras cosas, deconstruir algunas concepciones.

Para ello, los entornos formativos y los recursos tecnológicos disponibles pueden construir dinámicas con dos perspectivas, no aisladas, una más informativa y otra más metacognitiva. En la primera habrá un movimiento de busca de recursos diversos disponibles en línea con explicitación de ideas y posibilidades de usarlos en clases. En la segunda, habrá contrastes entre los distintos materiales y planteamientos, autocríticas, discusión y profundización en el colectivo. La primera perspectiva sería más personal e informativa, en cambio la segunda sería más colectiva y con reflexión metacognitiva y compartida. En las dos perspectivas las distintas interacciones (síncronas o asíncronas) asumen un rol importante en el desarrollo del conocimiento profesional para la enseñanza de las matemáticas.

En la formación continua

La importancia de desarrollar el trabajo colaborativo de los profesores para apoyar su desarrollo profesional y producir cambios sostenibles en la educación matemática está ahora bien reconocida y es fuente de mucha innovación e investigación. Prueba de ello es, por ejemplo, el estudio ICMI 25 y las actas de la conferencia asociada (Borko y Potari, 2020) disponibles en línea. Y, también en este ámbito, las tecnologías digitales pueden desempeñar y desempeñan un papel importante, reforzando las herramientas existentes y complementándolas, como demuestran numerosos trabajos. Sin pretender enumerar todas estas potencialidades, se pueden destacar tres aspectos.

- Las tecnologías digitales permiten ampliar el trabajo en colaboración más allá del que puede organizarse entre profesores de un mismo establecimiento. Un ejemplo muy estudiado en Francia, sobre todo en el marco del enfoque documental de lo didáctico (Trouche et al., 2020), es el de la asociación Sésamath (https://www.sesamath.net/), creada por un grupo de profesores de secundaria y que es una fuente de recursos digitales muy utilizados por los profesores de matemáticas en Francia.
- Estas tecnologías también permiten combinar el trabajo colaborativo presencial y a distancia gracias al uso de plataformas institucionales y diversos medios de comunicación, y compartir sus resultados. Pude experimentarlo, por ejemplo, en la adaptación de los Lesson Studies, que se está desarrollando en Francia por iniciativa de profesores y formadores del IREM de Rouen desde hace varios años (Masselin, 2020).
- Las tecnologías digitales favorecen la producción y explotación de recursos que pueden utilizarse para equipar a los profesores para el trabajo colaborativo, por ejemplo, los vídeos de clase, que se utilizan cada vez más en la formación.

Sin embargo, sea cual sea el potencial que ofrecen estas tecnologías, hay que reconocer que el desarrollo del trabajo colaborativo de los profesores, mucho más que el de los alumnos, se ve obstaculizado por limitaciones culturales y condiciones de trabajo extremadamente desfavorables en muchos países.

Es necesario aprovechar las nuevas oportunidades que ofrecen el crecimiento exponencial de los recursos, por lo que gestionar este crecimiento es una cuestión esencial si tenemos en cuenta la diversidad de su naturaleza, origen y forma. Esto es lo que motivó el desarrollo del enfoque documental de lo didáctico (EDD). En efecto, es importante comprender mejor el trabajo documental de los profesores, que se realiza en gran parte fuera del aula e incluso fuera de la escuela, y que los avances tecnológicos han modificado profundamente. No se puede entrar en los detalles de los resultados, pero parece que las conceptualizaciones propuestas por el EDD y los trabajos realizados en el marco de este enfoque nos permiten hoy comprender mejor este trabajo, su complejidad y su dimensión transformadora y, por tanto, apreciar mejor cómo se le puede apoyar eficazmente.

La tecnología en la evaluación de los aprendizajes

Inicialmente cabe subrayar que la evaluación debe ser considerada como un proceso más que como resultado (producto) o solamente como una cifra. Además, la evaluación es un proceso continuo y relacionado a la motivación y a la interacción.

Monitorear el aprendizaje de forma remota es distinto de hacerlo en modo presencial porque las herramientas son distintas y, por lo tanto, los modos de interactuar igualmente lo serán. Es necesario considerar las herramientas, los criterios establecidos y particularidades de cada una, y los modos de compartir aprendizajes en cada una de ellas. Todo eso debe ser planeado en el entorno de aprendizaje: las tareas (individuales y colectivas), los modos de interacción (síncrona y asíncrona), las fechas etc.

El desarrollo de materiales donde se muestren diversos caminos asociados con la comprensión de conceptos y lo que significa resolver un problema es indispensable. Es decir, no solo importa que el estudiante busque una solución o respuesta a un problema, sino que siempre busque diversos caminos para resolver problemas. Aquí, los estudiantes tienen la oportunidad de contrastar los conceptos y estrategias que resultan importantes en la comprensión de los conceptos y en los acercamientos de resolución de los problemas. En estos materiales, se contempla que los estudiantes resuelvan diversos cuestionarios que den cuenta de la comprensión que desarrollan de los conceptos y de las competencias de resolución de problemas.

Por otro lado, se reconoce la importancia de que los estudiantes formulen preguntas como medio para comprender conceptos y resolver problemas. Así, las preguntas que planteen y la búsqueda de diferentes maneras de responderlas ofrece información sobre los niveles de comprensión y sobre las dificultades que enfrentan en la resolución de los problemas. El registro de las preguntas y respuestas por parte de los estudiantes es un camino para evaluar el aprendizaje y las competencias de los estudiantes al resolver problemas.

Con respecto a las herramientas para la evaluación, existe una rama de posibilidades de herramientas: tareas con objetivos distintos (resolver, probar, construir, conjeturar, comparar, proponer problemas, completar pruebas/demostraciones matemáticas, análisis de protocolos de construcción en un entorno dinámico de aprendizaje etc.), autoevaluación, proyectos temáticos, producción de diarios personales, construcción y análisis de esquemas conceptuales, construcción y acompañamiento de portafolios, producción de historias HQ etc.). Para cada uno de ellos debe ser construido un guion de criterios que serán observados a lo largo del trabajo.

En las tareas, además de los distintos modos de desarrollar el razonamiento matemático, es igualmente importante tener en su diseño modos de lenguaje y de representación (gráfica, algebraica, numérica, geométrica, tabular, pictórica, construcción en pantalla etc.), distintos. Aunque el aprendizaje sea individual nos cabe considerar que la interacción y la colaboración, promovidas por el trabajo colectivo, igualmente influyen en el aprendizaje o en su mejoramiento.

Por lo tanto, aunque se considere la especificidad de cada instrumento utilizado, el análisis del aprendizaje debe ir más allá de los criterios establecidos en los instrumentos. Es importante un análisis más global, o sea, una mirada de lo específico (criterios en cada herramienta) a lo global (contraste entre los distintos medios utilizados) se hace necesaria. En los entornos informáticos la utilización de las tecnologías favorece que todo (escritos, ficheros, logs de accesos, interacciones síncronas y asíncronas etc.) queda guardado y el profesor puede acceder, analizar y evaluar el aprendizaje con más detalles a lo largo de un espacio de tiempo.

En cambio, en dinámica presencial el docente necesita construir otras maneras para guardar y analizar los productos generados por sus alumnos. Hemos visto que en clase presencial los alumnos, sobre todo los adolescentes, no interactúan a menudo. Quizás podemos plantear dinámicas de interacción que favorezcan más el intercambio de ideas. Las tecnologías digitales pueden ayudar en planteamientos en esta dirección.

La tecnología en los enfoques teóricos

Se han utilizado o desarrollado diversos enfoques teóricos específicamente para trabajar las cuestiones tecnológicas en la educación matemática. El segundo estudio ICMI dedicado a este tema ya lo señaló hace más de diez años (Drijvers et al., 2010). Desde entonces, el panorama teórico se ha enriquecido aún más. Por tanto, es legítimo cuestionar la necesidad de nuevas construcciones teóricas como escribimos en (Haspekian et al., en proceso de publicación). Este capítulo del *International Handbook of digital (curriculum) resources in mathematics education*, tras un esbozo del paisaje general, se centra en las combinaciones teóricas a las que dio lugar el desarrollo del enfoque instrumental incluyendo su extensión al EDD, se muestra la disposición de conceptualizaciones sólidas que han demostrado su eficacia para hacer progresar la investigación y apoyar la acción didáctica. Sin embargo, se añade que la evolución tecnológica y científica y la de los usos sociales de las tecnologías digitales crean nuevas necesidades de investigación que pueden motivar nuevas construcciones teóricas. Ejemplos en los que ya se vislumbran estas evoluciones son el desarrollo de interfaces táctiles, sistemas apticos y sistemas de realidad aumentada que cuestionan la conceptualización de la acción instrumentada. De ahí, por ejemplo, la propuesta de Shvarts et al. (2021) de reelaborar el enfoque instrumental combinándolo estrechamente con una perspectiva radical de cognición encarnada.

La creciente importancia de las tecnologías de inteligencia artificial en nuestras sociedades nos lleva por su parte a cuestionar el concepto de “agency” y su atribución únicamente a los seres humanos, como ya había hecho el filósofo Bruno Latour desde una perspectiva ecológica. Es lo que propone, por ejemplo, Borba (2021).

Hace unos años, se hablaba de tecnologías informáticas y la visión del potencial de estas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas otorgaba un lugar esencial a la programación. Los avances tecnológicos, las interfaces gráficas, los comandos que permitían prescindir de la programación, condujeron a un enfoque de las tecnologías digitales basado exclusivamente en las herramientas. En el siglo XXI, la situación está cambiando y tiende a establecerse nuevos equilibrios que apuntan a un mejor contrapeso entre las dimensiones de herramienta y objeto en el sentido de Douady (1986) de la informática y las tecnologías asociadas en la enseñanza de las matemáticas. Esto puede observarse en los recientes desarrollos curriculares en muchos países, como muestra el estudio ICMI 24 (Shimizu & Vithal, 2023; véase también, Stephens & Kadijevich, 2020).

Por ejemplo, en Francia, la enseñanza de los algoritmos y la programación se introdujo en las matemáticas en el liceo (estudiantes de 15 a 18 años) por la reforma del liceo de 2010, y el desarrollo del pensamiento algorítmico comienza en la escuela primaria, desde la reforma de la escolaridad obligatoria en 2015. Las matemáticas no son la única disciplina que contribuye a ello (por ejemplo, en el primer ciclo de secundaria, este campo se reparte entre las matemáticas y la tecnología), pero desempeñan un papel esencial en el desarrollo de esta forma de pensamiento, y la progresión de este desarrollo a lo largo de la escolaridad y de los lenguajes de programación asociados se organiza en los programas de matemáticas. Esta evolución es especialmente importante hoy en día, dada la importancia de los algoritmos en el funcionamiento de nuestras sociedades. Esto nos remite a la primera cuestión, la de los vínculos entre las tecnologías digitales y el desarrollo de una ciudadanía crítica. Esta aproximación implica también el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas que permitan a estudiantes y profesores cuestionar el papel que desempeñan las matemáticas en nuestras sociedades, y por esta razón no podemos subestimar la necesidad de comprender qué es la modelización matemática y qué es un algoritmo.

Por lo que es de suma importancia construir marcos conceptuales que expliquen las formas de desarrollar conocimiento matemático que contemple el trabajo remoto y las interacciones presenciales. Aquí, se reconoce que las prestaciones (affordances) que ofrece el uso de distintas tecnologías digitales permiten a los estudiantes ampliar sus formas de razonamiento en la resolución de problemas. En esta dirección, la caracterización y formas de integrar el uso de las herramientas en el estudio de los conceptos y en la resolución de problemas debe explicitarse en el diseño e implementación de las actividades de aprendizaje.

En conclusión, las actividades y experiencias que los estudiantes y profesores llevaron a cabo durante el confinamiento ofrecen bases para restructurar un escenario o modelo de enseñanza que fomente, valore y complemente las actividades que el estudiante desarrolle en línea y el trabajo presencial.

Referencias y Bibliografía

Borba, M. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: Humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics, 108*, 385–400.

Borko, H., & Potari, D. (Eds.) (2020). Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups. *Proceedings of the The Twenty-Fifth ICMI Study Conference*. University of Athens.

Chan E., Sabena, C., & Wagner, D. (Eds.) (2021). Mathematics education in a time of crisis—a viral pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 108*(1-2).

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical per DESspectives. In C. Hoyles and J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the Terrain* (89–132). Springer.

Engelbrecht, J., Borba, M., & Kaiser, G (Eds.) (2023). COVID 19 pandemic – its mathematical background and its social and educational consequences. *ZDM Mathematics Education, 55*(1).

Haspekian, M., Artigue, M., & Rocha, K. (En proceso de publicación). Role of networking of theories in studying the development and use of digital resources in mathematics education. In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Eds.), *The International Handbook of digital (curriculum) resources in mathematics education.* Springer.

Masselin, B. (2020). *Ingénierie de formation en Mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Presses Universitaires de Rouen et du Havre.

Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2021). Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 447–469.

Shimizu, Y., & Vithal, R. (Eds.) (2023). Mathematics curriculum reforms around the world. *The 24th ICMI Study*. Springer Open.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stephens, M., & Kadijevich, D.M. (2020). Computational/Algorithmic thinking. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 117-122). Springer.

Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (Eds.) (2020). Documentational approch to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 237-247). Springer.

Warschauer, M. (2005). Technology and social inclusion: Rethinking the digital divide. Cambridge, MA: MIT Press.

Conferencias paralelas

Formación para el desarrollo sostenible: Matemática para la vida

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

El mundo actual afronta una crisis estructural que atenta contra el futuro de la humanidad y del planeta. Enfrentar esta crisis, como lo señala la UNESCO, supone la adopción de un paradigma educativo en pro del desarrollo sostenible que atienda las cuestiones claves para una vida armónica en términos sociales, económicos y medioambientales. La Educación Matemática, desde una perspectiva transversal e interdisciplinaria, debe contribuir a la preparación de los educandos para comprender los fenómenos del mundo real, identificar problemas presentes y futuros y generar acciones colaborativas para evitarlos y/o confrontarlos. En este contexto, analizaremos el currículo matemático venezolano para la Educación Media y el texto “Matemática para la vida” de la Colección Bicentenario en busca de criterios de sostenibilidad que conduzcan al logro de conocimientos, habilidades y actitudes para pensar críticamente y aplicar esos saberes para una vida sostenible.

Palabras clave: Educación Matemática; Currículum educación media; Educación para el desarrollo sostenible; Matemática y sostenibilidad; Matemática para la vida; Colección Bicentenario; Venezuela.

Introducción

Desde finales de 2019 el mundo ha vivido una situación dramática provocada por la pandemia del COVID-19. Para muchos esta es la peor tragedia que ha ocurrido a la humanidad en mucho tiempo debido a sus terribles consecuencias en los ámbitos personal, social y económico. Por un largo período la atención general se centró en este tema; sin embargo, aun sin haberse superado la pandemia el foco de interés se desvió hacia otra situación altamente preocupante como lo ha sido el conflicto bélico entre Rusia y Ucrania, que ha despertado las alarmas de una posible expansión con alcance mundial.

En nuestra realidad actual observamos amenazas de guerra y conflictos internos en diversos países; manifestaciones de discriminación e intolerancia que proliferan por motivos raciales, religiosos, de género, políticos y culturales; incremento de la pobreza que compromete la satisfacción de las necesidades y aspiraciones de una extensa porción de la población mundial y depredación del ambiente como consecuencia del modelo de desarrollo imperante, entre otras manifestaciones del comportamiento humano que entorpecen el bienestar colectivo presente y futuro y la preservación del planeta para las próximas generaciones.

Para enfrentar esta realidad, se aboga por un modelo de Desarrollo Sostenible (DS), entendido éste como aquel que permite que los sistemas naturales se preserven a la vez que se garantiza el desarrollo y el bienestar humano. Es decir, el desarrollo que garantiza la satisfacción de las necesidades y aspiraciones actuales sin menoscabar la capacidad de las futuras generaciones de satisfacer sus propias necesidades (ONU, 1987). El DS contempla las dimensiones social, económica y ambiental (ONU, 2002), dentro de las cuales se han establecido los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) como centro de la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible aprobada el 25 de septiembre de 2015 por la Asamblea General de las Naciones Unidas (ONU, 2015) (Ver Figura 1).

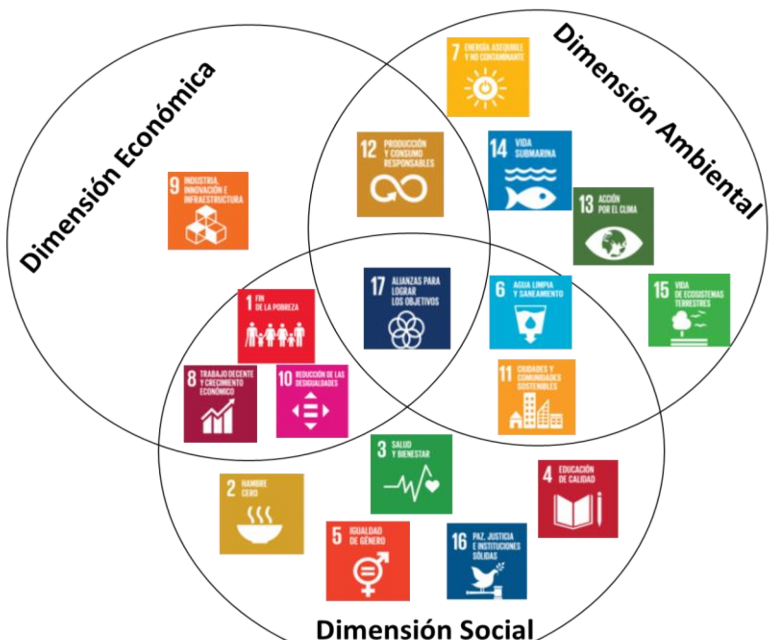


Figura 1: Dimensiones y Objetivos de Desarrollo Sostenible
Fuente: Adaptado de (ONU, 2015)

Estos objetivos y sus metas globales están considerados como un “llamado universal a la acción para eliminar la pobreza, proteger el ambiente y asegurar que para el 2030 todos disfrutemos de paz y prosperidad” (UNDP, s/f), por lo que se espera que todos, individuos, comunidades y gobiernos se enfoquen en el logro de los mismos por los diversos medios disponibles, entre ellos la educación.

Educación para el Desarrollo Sostenible

En el contexto global, la educación es a su vez uno de los ODS (Objetivo 4) y la herramienta fundamental para el logro integral de todos los demás (UNESCO, 2015), en el entendido que estos implican un cambio de conciencia, actitud y comportamiento que no se da espontáneamente, sino a través de la educación como continuo humano en todos los contextos donde ésta se desarrolla (Núñez, 2019).

En particular a través de la meta 4.7 se pretende

> Para 2030, garantizar que todos los alumnos adquieran los conocimientos teóricos y prácticos necesarios para promover el desarrollo sostenible, entre otras cosas mediante la **educación para el desarrollo sostenible** y la adopción de estilos de vida sostenibles, los derechos humanos, la igualdad entre los géneros, la promoción de una cultura de paz y no violencia, la ciudadanía mundial y la valoración de la diversidad cultural y de la contribución de la cultura al desarrollo sostenible, entre otros medios. (ONU, 2015).

Para la década actual, 2020-2030, el Marco Educación para el Desarrollo Sostenible hacia la consecución de los ODS es el instrumento de la UNESCO para implementar la EDS en el contexto de la Agenda 2030 para el DS. Este marco da continuidad al Programa de Acción Mundial de Educación para el Desarrollo Sostenible (2015-2019), que a su vez siguió la ruta del Decenio de las Naciones Unidas de Educación para el Desarrollo Sostenible (2005-2014) (UNESCO, 2020). No obstante, la noción de una educación para la sostenibilidad se viene precisando desde finales del siglo pasado cuando en la Declaración de la Educación para Todos – Jomtien, 1990, https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000127583_spa – se reconoce que la educación "puede contribuir a lograr un mundo más seguro, más sano, más próspero y ambientalmente más puro y que al mismo tiempo favorece el progreso social, económico y cultural, la tolerancia y la cooperación internacional".

La educación para el desarrollo sostenible (EDS) abarca todos los aspectos de la educación dirigidos a incentivar la comprensión de los temas del Desarrollo Sostenible y a generar conocimientos, habilidades, actitudes y valores que faculten a las personas para asumir la responsabilidad de garantizar un futuro sostenible, por lo tanto no se trata de la inclusión incidental en los programas de tópicos específicos vinculados al DS, sino de adoptar una concepción transformadora donde el tema se contemple transversalmente a lo largo y ancho del currículo, independientemente de la modalidad educativa, con el fin de desarrollar una conciencia crítica para afrontar con normalidad la complejidad de la realidad actual. Concebida así, la EDS emerge desde una visión interdisciplinaria, contextualizada y global que abarca las dimensiones cognitivas, sociales, emocionales y conductuales del aprendizaje, buscando preparar ciudadanos aptos para responder a los grandes desafíos presentes y futuros de la humanidad. (UNESCO, 2020). Así cada disciplina, y en particular la Matemática, se deberá enfocar en los principios y propósitos de la EDS.

Educación Matemática y Sostenibilidad

Algunos investigadores argumentan que la Educación Matemática y la Educación para la Sostenibilidad permanecen desconectadas en las aulas de clase y que no hay claridad en lo que sería una Educación Matemática por la sostenibilidad (Hui-Chuan y Tsung-Lung, 2021). A pesar de eso, cada vez se acepta más que la Educación Matemática debe ser vista como un fuerte apoyo a la EDS (Widiati y Juandi, 2019) dado que las matemáticas son esenciales en la comprensión y en la evolución del mundo en que vivimos. En efecto, las matemáticas pueden y de hecho son utilizadas para detectar y enfrentar cuestiones esenciales para la humanidad y el ambiente; para Manuel de León ningún fenómeno que ocurra en el planeta es ajeno a la Matemática y más aún el confrontamiento de los grandes desafíos de la humanidad para garantizar su supervivencia ameritan la intervención de esta disciplina para garantizar el éxito; por lo que este matemático concluye que "En definitiva, la sostenibilidad del planeta Tierra descansa en la ciencia matemática" (de León, 2021).

Es claro que la Matemática por sí sola no puede afrontar la complejidad de las situaciones que emergen en los diferentes ámbitos, sino que se requiere un abordaje interdisciplinar del tejido relacional que se genera de la multiplicidad de elementos que convergen en cada fenómeno en estudio. Bajo esta consideración se han hecho avances en posicionar en su justa dimensión el papel de las matemáticas como herramienta para evaluar y enfrentar las amenazas que pesan sobre el planeta Tierra. El programa Matemática para el Planeta Tierra (MPT), auspiciado por la UNESCO (http://mpe2013.org), es una muestra de ese interés. Los contenidos de este programa se organizan en cuatro categorías:

- **Un planeta para descubrir**, dedicado a los océanos, la meteorología y el clima, los procesos del manto terrestre, los recursos naturales, los sistemas solares.
- **Un planeta que sustenta la vida,** que engloba temas como la ecología, la biodiversidad y la evolución.
- **Un planeta organizado por humanos**, en el que se consideran los sistemas políticos, económicos, sociales y financieros; la organización del transporte y comunicación; la gestión de recursos; la energía.
- **Un planeta en riesgo**, que incluye el cambio climático, el desarrollo sostenible; las epidemias; las especies invasivas; los desastres naturales. (Manuel de León, Herrero Miguel.

En el marco de este programa se han hecho propuestas didácticas que abordan contenidos matemáticos con un enfoque de sostenibilidad, aplicables a diferentes fenómenos que nos preocupan y nos ocupan en concordancia con estas cuatro categorías. Dentro de ellas destacamos la *Unidad didáctica Matemáticas del planeta Tierra* editada por la Sociedad Española de Ciencia y Tecnología (de León y García-Longoria, 2013), donde son de particular interés el Bloque 2: La vida en la Tierra, que aborda los temas: modelos matemáticos de las epidemias, las matemáticas de la evolución y la biodiversidad, las matemáticas nos ayudan a crecer, matemáticas para el estudio y tratamiento de las enfermedades y el genoma humano; y el Bloque 3: Sostenibilidad, que abarca los tópicos: meteorología y clima, matemáticas y economía, catástrofes inducidas por el hombre, matemáticas y redes, las matemáticas que hacen segura la red y energía. Igualmente vale la pena referir los aportes de Herrero (2013), quien describe algunos ejemplos de problemáticas, con títulos sugestivos, dentro de estas cuatro categorías, que pueden abordarse a través de la modelación matemática: ¿Hay agua para todos?, Modelos y oráculos. Margaritas y cisnes negros, ¿Cómo detectar la tormenta que se avecina? ¿Qué hay que hacer cuando llegue?, Sociedades humanas: entre la cooperación y la confrontación, y Convivir con el enemigo.

Entonces la Educación Matemática y en particular los educadores matemáticos tienen la gran responsabilidad de involucrar a sus estudiantes hacia el uso consciente y contextualizado de sus conocimientos y habilidades en Matemática para afrontar los desafíos comprimidos en los ODS. La resolución de problemas mediante proyectos y la modelación matemática son aliados de los docentes en esta tarea.

Educación para la sostenibilidad en el currículo de Educación Media venezolano

En la transformación del nivel de Educación Media que se adelanta en Venezuela desde 2014 se parte del principio de que todo lo que se hace en educación debe ser formativo y transformador de la cultura escolar, para hacerla cada vez más en, por y para la vida y para la emancipación (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2016). Desde esa perspectiva, un análisis de dicho currículum permite evidenciar algunos elementos que apuntan hacia una EDS; entre ellos: los referentes éticos, los temas indispensables, los temas generadores y el tejido temático.

Los *referentes éticos* están concebidos como espacios para la reflexión sobre la práctica pedagógica hacia el logro de las finalidades educativa, comulgan con los principios de la EDS, en especial los referidos a educar en, por y para el respeto y la afirmación de la condición humana; la interculturalidad y la valoración de la diversidad; el trabajo productivo y la transformación social; la preservación de la vida en el planeta; la libertad y una visión crítica del mundo.

Los *temas indispensables* son tópicos transversales que se deben trabajar desde las diversas instancias educativas y en toda actividad escolar, con el fin de propiciar en los estudiantes conocimientos, actitudes, valores y formas de comportamiento. Por su particular vinculación con la EDS destacamos los siguientes: Democracia participativa y protagónica, en un Estado de derecho y de justicia; Igualdad, no discriminación y justicia social; Derechos humanos, Equidad de género; La sociedad multiétnica y pluricultural, diversidad e interculturalidad; Independencia; Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien; Petróleo y energía; Ciencia, tecnología e innovación; Seguridad y soberanía alimentaria; Proceso social del trabajo; Gestión de riesgos y desastres socio-naturales.

Los *temas generadores* y el *tejido temático*, junto con los *referentes teórico-prácticos*, son los organizadores de las unidades curriculares. En cada área de formación se proponen temas generadores que, como su nombre lo dice, generan aprendizaje con sentido y pertinencia con respecto a los temas indispensables. Cada tema generador se conecta con un tejido temático que proporciona el contexto para un abordaje interdisciplinar de los referentes teóricos-prácticos de cada área de conocimiento. Todo esto crea un escenario propicio para la planificación y ejecución de experiencias formativas conectadas con los propósitos de la EDS. Veamos como ejemplo la Unidad de Aprendizaje N° 4 del programa de Matemática de segundo año de Educación Media (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012). Ver Tabla 1.

En este caso, los referentes teóricos-prácticos son los Números Enteros y sus operaciones, ecuaciones y funciones polinómicas. Este contenido se desarrollará partiendo del tema generador "Los precios justos en bienes y servicios", que permitirá la contextualización a través del tejido temático referido a costos de producción y los modelos matemáticos asociados; el sustento familiar y satisfacción de necesidades; y el bien común, solidaridad y convivencia.

Tabla 1
Unidad 4 del programa de Matemática de segundo año de Educación Media en Venezuela

UA	TEMA GENERADOR-TEJIDO TEMÁTICO	REFERENTES TEORICO-PRÁCTICOS
4	**Los precios justos en bienes y servicios** -Costos de producción, valor y precios de bienes y servicios. -Modelos matemáticos en la determinación de costos. Cálculo de porcentajes de ganancias. -El sustento económico, la administración familiar para la satisfacción de las necesidades de todos y todas. -El bien común, la solidaridad y la convivencia.	Números enteros. Operaciones con números enteros. Ecuaciones. Ecuaciones con números enteros. Ecuaciones en Z. Función polinómica.

En este esquema no están mencionados los referentes éticos ni los temas indispensables que el docente podrá tener en cuenta implícitamente en su planificación. Como posibilidad destacamos entre los referentes éticos: el trabajo productivo y la transformación social y la preservación de la vida en el planeta; y entre los temas indispensables: preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien; ciencia, tecnología e innovación; seguridad y soberanía alimentaria y proceso social del trabajo.

Además, esta Unidad de Aprendizaje podría servir para apuntalar varios de los ODS como: (02) Hambre cero; (03) Salud y Bienestar; (08) Trabajo decente y crecimiento económico y (12) Producción y consumo responsables, entre otros.

La EDS en los textos de Matemática de la Colección Bicentenario

La Colección Bicentenario (CB) es un conjunto de textos oficiales de libre acceso que abarca todas las áreas de conocimiento contempladas en el currículum de Educación Básica de Venezuela. En este trabajo nos interesan los libros de Matemática.

Estos textos están acordes con la fundamentación del área de Matemática en el currículum de Educación Media, donde se especifica que "La Educación Matemática debe contribuir a la construcción de la ciudadanía de toda la sociedad venezolana, la profundización de la democracia, la visibilización de los pueblos, la comprensión de la diversidad cultural, el respeto y el cuidado del ambiente y de los recursos naturales no renovables (Ministerio del Poder

Popular para la Educación, 2017, p. 152). Los libros de la Colección Bicentenario siguen un enfoque pedagógico propicio para la EDS, que se centra en el alumno para el logro de un aprendizaje crítico y transformador orientado a la acción, para lo que se sugiere actividades de un nivel cognitivo complejo que permitan desarrollar esa capacidad de pensar, de razonar y de enfrentar y resolver problemas (Smith y Stein, 1998).

Así, estos textos siguen la filosofía de la Educación Matemática Critica (EMC) en cuanto a la contribución de la Educación Matemática a la formación de la competencia democrática y a la reflexión crítica sobre los aspectos socio-políticos, éticos y económicos, hacia la formación de ciudadanía (Skovsmose, 1999 y Mora, 2005).

Igualmente, se basan en los principios de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1971) en relación a la pertinencia de conectar la Matemática, como actividad humana, a la realidad, manteniéndola cercana a las vivencias de los estudiantes (Spiropoulou. Roussos y Voutirakis, 2005) y a lo socialmente relevante, con el propósito de formar ciudadanos que sean capaces de darle sentido y cuestionar lo que se les enseña, de relacionar hechos y situaciones reales, de buscar nuevas ideas a partir de lo aprendido y de aplicar la Matemática a la solución de problemas que importan (León y Vincent, 2015)

Es así como en los libros de esta área se busca la contextualización de la Matemática en diferentes entornos y su aplicabilidad a situaciones de interés para el estudiante, así como el fomento de una sociedad con valores (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012). Según sus autores, la Educación Matemática plasmada en estos libros constituye una poderosa herramienta para la descripción del mundo, sus fenómenos, relaciones y problemas, y debe constituirse en un medio para impulsar el desarrollo humano, social, cultural, político y económico de los pueblos.

Estas consideraciones muestran un escenario propicio para aprovechar las virtudes de estos textos de Matemática de la CB en pro de la Educación para el Desarrollo Sostenible, a partir de lecciones concebidas para promover el logro de conocimientos y habilidades matemáticas con base en la resolución de problemas, la ejecución de proyectos y la modelación matemática de situaciones generadas en los contextos social, económico y ambiental, que puedan apoyar el pensamiento y las acciones sostenibles de los estudiantes.

A continuación, nos detendremos en el texto de 1° año de Educación Media titulado *Matemática para la Vida* (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2012) en busca de elementos que impulsen una EDS desde la disciplina, en concordancia con los elementos curriculares anteriormente señalados. Este texto sigue la estructura de todos los libros de esta colección. A partir de una situación de interés y mediante ejemplos relacionados con las dimensiones ambiental, social, económica y política se desarrollan los temas matemáticos que requiere cada lección, a la vez que se promueve la reflexión crítica sobre el tema generador siguiendo un enfoque interdisciplinar y una metodología participativa.

Figura 2. Texto “Matemática para la vida” de la Colección Bicentenario

Solo para mostrar las potencialidades de este texto para integrar la EDS en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, presentaremos a continuación una de sus lecciones.

Lección 14: Hacia una cultura de reciclaje
Tema matemático: Fracción Generatriz
Lectura motivacional o tema generador: La basura: un problema a solventar
Temas de sostenibilidad: Preservación del ambiente; producción y consumo responsable; salud y bienestar.

Actividades vinculadas a la EDS:

La lectura inicial busca crear una actitud crítica en los estudiantes hacia los problemas inherentes al manejo de los desechos sólidos incrementados constante y exageradamente por los patrones de consumo, y su vinculación con el trabajo socio-productivo, con la salubridad, la preservación de las especiales animales y vegetales.

Como actividades específicas sobre esta temática se incluye: una lectura titulada “Las tres erres R3: reducir, reutilizar, reciclar” y un proyecto de reciclaje que debe ser precedido de una investigación sobre el tipo de materiales factibles de reciclar en la institución; una planificación para la clasificación y recolección de desechos sólidos de instancias institucionales como, por ejemplo, comedor escolar. Como tema matemático se trabaja con la fracción generatriz de datos recopilados.

En el marco de esta unidad quiero proponer una profundización en la cuestión de la sostenibilidad en el contexto de la industria de la moda. Lo que acontece alrededor de esta industria es digno de reflexión por parte de todos los ciudadanos del mundo y muy especialmente de los escolares que están en la edad de la adolescencia, cuando el “estar a la moda” y su apariencia personal pueden llegar a ser puntos clave para facilitar su inserción social, lograr sentido de pertenencia o bien delinear su propia expresión personal, reforzar su autoestima y manifestar su creatividad (Pinnock, 2022).

Lo que ocurre tras bastidores, más allá del glamour de las pasarelas, de las vidrieras, de las revistas, de los anuncios comerciales y de la divulgación por redes sociales, es bastante tenebroso en términos del desarrollo sostenible y por lo tanto del futuro del planeta y de la humanidad. La industria de la moda es la segunda más contaminante, solo después de la petrolera, y sus efectos perniciosos abarcan los ámbitos social, económico y ambiental que comprenden los ODS. En el sitio web Sustain your Style (https://es.sustainyourstyle.org/) se encuentra abundante información sobre los principales problemas de esta industria en los ámbitos medioambiental y humano y se proponen soluciones sostenibles al respecto. A continuación, resumimos algunas de estas cuestiones de interés.

El fenómeno de la *Fast Fashion* ha sido un acelerador de los niveles de consumo de ropa en los últimos tiempos. La ropa se desecha cada vez más rápido debido a la mala calidad de las prendas, a su bajo precio y al cambio constante de las tendencias que incitan al consumismo solo para "estar a la moda" o ser "fashionista". Para satisfacer esta demanda, la producción se acelera con los consecuentes costos en términos ambientales y socio-productivos.

En cuanto al impacto medioambiental de la moda, en este sitio web se presentan datos sobre los siguientes factores: contaminación del agua, consumo de agua, contaminación de los océanos con microfibras, uso de productos químicos, cambio climático por la emisión de gases de efecto invernadero, degradación de los suelos y desertificación y destrucción de la selva tropical.

Las soluciones que aportan en esta plataforma parten de crear conciencia en la población sobre este grave problema para la sostenibilidad del planeta y generar una actitud hacia el cambio, lo cual se puede propiciar a través de la EDS. Entre estas soluciones están: elegir fibras respetuosas del suelo, orgánicas y naturales, que requieran bajo consumo de agua y no precisen productos químicos para su producción; lavar siempre la ropa antes de usarla y luego lavarla solo cuando sea necesario, a baja temperatura, y evitar el uso de la secadora eléctrica; comprar ropa elaborada en países que respeten las normas medioambientales, entre ellas el uso de energías renovables; aplicar las tres R: Reducir la compra de ropa optando por prendas de mejor calidad que puedan usarse por más tiempo, , Reutilizar: modificar la ropa para llevarla a modelos más actualizados pero sin hacerse eco de los constantes cambios de temporada que incita al consumismo; Reciclar el excedente de ropa, destinarla a otros fines, donarla.

El aspecto socio-productivo muestra la contra-cara del mundo de la moda, de lo que se ve en las pasarelas, vidrieras, revistas y otros mecanismos promocionales del consumo. Para ver los entretelones de ese mundo "fashionista" que tanto cautiva, sugerimos ver el documental *El costo real (The true cost).* Allí podemos constatar que la industria de la moda es una de las más degradantes de las condiciones laborales de los trabajadores, pisoteando su dignidad humana. Es de conocimiento público que un elevadísimo porcentaje de la vestimenta fast fashion es producida en países que garantizan a la vez bajos costos y producción masiva, por eso es fácil encontrar las etiquetas "made in China", "made in Indonesia", "made in Bangladés", "made in India", por solo mencionar algunas. Según datos del sitio web que venimos referenciando, estos son países donde no hay una normativa laboral que garantice condiciones de trabajo dignas en cuanto a: salario mínimo, horario de trabajo, goce de tiempo libre, condiciones de salud y seguridad, trabajo infantil, trabajo forzado catalogado como una esclavitud disfrazada. Y, en caso de que en alguno de estos países se dicten normas en contra de esta explotación, no se garantice la producción masiva o las ganancias excesivas de las grandes marcas y tiendas del mundo occidental principalmente, simplemente se traslada la producción a otro país que si lo haga, prevaleciendo los intereses del capitalismo salvaje.

Así, la industria de la moda se ha convertido en un monstruo que no deja de crecer y cuyos tentáculos nos aprisionan a todos, por lo que es urgente actuar en la concientización de las personas a través de la EDS, desde la más temprana edad, hacia un consumo responsable de la moda, pues la clave pareciera ser consumir menos ropa, de mejor calidad y mayor sostenibilidad.

Este resumen apretado sobre moda y sostenibilidad pretende servir de motivación para la propuesta de un proyecto educativo centrado en esta temática. Este debe ser un proyecto interdisciplinario, dada la multiplicidad de factores que no pueden ser abordados desde una sola disciplina. Los propósitos de este proyecto serían crear conciencia crítica en los estudiantes sobre la *fast fashion* y sus perniciosos efectos en lo ambiental y lo social y humano; brindar elementos formativos para aplicar las tres R al caso particular de la vestimenta; y emplear los conocimientos matemáticos en el reaprovechamiento de la ropa.

El primer propósito se podrá lograr a través de la asignación de una investigación documental sobre este tema, con Internet como principal recurso para la búsqueda de información, y la posterior discusión crítica. El segundo objetivo también se abordará en discusión grupal a partir de ciertas interrogantes motivadores sobre la cantidad de ropa que tienen los estudiantes, cómo la obtienen, cuál es su procedencia, con qué tipo de materiales están fabricadas, tiempo de uso, lo que hacen con ella al dejar de usarla, uso de ropa de segunda mano. Se espera que de aquí salgan como posibilidades las tres R: *reducir* la cantidad de ropa que se tiene en el armario, adquirir lo necesario dándole prioridad a la calidad en términos de sustentabilidad por encima de la cantidad y darle un mayor uso; *reutilizar* el vestuario, ya sea usando ropa de segunda mano y/o modificando (customizando) la que ya haya pasado de moda; y *reciclar* los materiales con los que están fabricadas prendas que ya no se van a utilizar.

Para el último propósito se propone trabajar con la *reutilización* a través de la "customización" de prendas (figura 3 a) y el *reciclaje* con el empleo de la técnica de "patchwork" para confeccionar otro tipo de artículo con el uso de retazos (Figura 3 b). En ambos casos se emplearán conocimientos matemáticos en la aplicación de las técnicas de corte y confección, entre ellos medidas, proporciones, operaciones con números reales y sobre todo geometría. Se espera que la implementación de este proyecto contribuya a la formación de actitudes, valores y un accionar pro sostenibilidad.

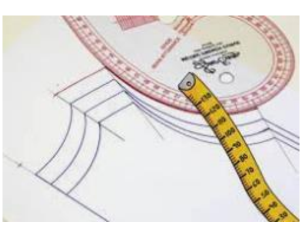
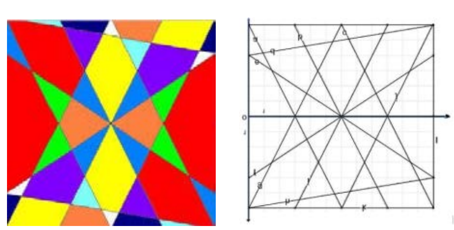

(a)

(b)

Figura 3. a) Patronaje para customización. b) Patchwork de las rectas

Como reflexión final

Desde la Educación Matemática, orientados por la interdisciplinariedad, la transversalidad y la educación como continuo humano, es mucho lo que se puede hacer para formar ciudadanos conscientes de la posición que ocupan en el accionar en pro de garantizar la sostenibilidad del planeta. Sin embargo, esto pasa por una serie de compromisos desde diversas instancias educativas: gerenciales, curriculares, escolares, comunitarias, docentes, entre otras. Los docentes son el último eslabón de la cadena, pues son ellos quienes, en última instancia, interactúan con los estudiantes de manera directa en su proceso formativo; de allí que se debe prestar atención tanto a las aptitudes como a las creencias, motivaciones y actitudes de los profesores de Matemática que favorezcan una pedagogía de la sostenibilidad.

Referencias y bibliografía

De León, M y García-Longoria, A (2013) Coordinadores. Unidad Didáctica Matemáticas del planeta Tierra. Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología. http://www.fecyt.es

De León (2021). Matemáticas para un mundo sostenible. Documento en línea. https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/matematicas-para-un-mundo-sostenible/

Herrero, M. (2013). Matemáticas para el planeta Tierra, ciencia para el bienestar humano. *La Gaceta de la RSME*, (16(4), 685–698.

Hui-Chuan Li & Tsung-Lung Tsai (2021) Education for sustainable development in mathematics education: what could it look like? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, DOI: 10.1080/0020739X.2021.1941361

León, N. y Vicent, R. (2015). Valoración de los textos de matemática de educación media de la colección bicentenario desde la perspectiva de docentes y estudiantes de la especialidad. Informe de Investigación presentado a la Subdirección e Investigación y Postgrado de la UPEL-IPM. Maturín: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2009). Gaceta oficial del Programa Todas las Manos a la Siembra, viernes 21 de agosto de 2009. http://manosalasiembra.blogspot.com/2009/08/gaceta-oficial-del-programa-todas-las.html

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012). Matemática: Primer año. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (s.f). Orientaciones educativas en el marco de los textos escolares de la colección bicentenario. Caracas: Autor. https://centrodeformacion.net/web/proyectos/construccion-curricular/coleccion-bicentenario/#

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2016). Orientaciones pedagógicas año escolar 2016-2017. Documento en línea. Caracas: Autor. https://observatorioeducativo.files.wordpress.com › ...PDF

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2017). Áreas de formación en Educación Media General. Caracas: Autor. https://www.icsspe.org/system/files/Venezuela%20PE%20Curriculum%20Reform%20-%20%C3%81REAS%20DE%20FORMACI%C3%93N%20EN%20EDUCACI%C3%93N%20MEDIA%20GENERAL.pdf

Mora, D. (2005). Didáctica crítica y educación crítica de la matemática. En David Mora (Coord.) Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación en la educación matemática en América Latina. Bolivia: Editorial Campo Iris.

Núñez, I. (2019). Educación para el desarrollo sostenible: hacia una visión sociopedagógica. Controversias y Concurrencias Latinoamericanas, 11(19), 291-314. https://www.redalyc.org/journal/5886/588661549016/html/#:~:text=La%20Educaci%C3%B3n%20para%20el%20Desarrollo%20Sostenible%20(EDS)%2C%20no%20constituye,en%20definici%C3%B3n%2C%20tanto%20de%20su

ONU (1987). Report of the World Commission on Environment and Development. Our common future: Brundtland Report. https://www.are.admin.ch/are/en/home/media/publications/sustainable-development/brundtland-report.html

ONU (2002). Report of the World Summit on Sustainable Development, Johannesburg, South Africa, 26 August-4 September 2002. Naciones Unidas, Biblioteca Digital. https://digitallibrary.un.org/record/478154

ONU (2015). Objetivos de Desarrollo Sostenible. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/

Pinnock, O. (2022). La moda ética: ¿tendencia superficial o cambio profundo? Correo de la UNESCO. Un solo mundo, voces múltiples. 2022-I. https://es.unesco.org/courier/2022-1/moda-etica-tendencia-superficial-o-cambio-profundo

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: Una Empresa Docente.
.
Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 344-350. http://mathedseminar.pbworks.com/w/file/fetch/92864991/Smith%20and%20Stein%20-%201998%20%20Selecting%20and%20Creating%20Mathematical%20Tasks%20From%20Re.pdf

UNDP (s/f) The SDGS in action. https://www.undp.org/sustainable-development-goals?

Asamblea General de las Naciones Unidas (21 de octubre de 2015). Resolución aprobada por la Asamblea General el 25 de septiembre de 2015. 70/1. Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. https://documents-dds-ny.un.org/doc/UNDOC/GEN/N15/291/93/PDF/N1529193.pdf?OpenElement

UNESCO (2020). Educación para el Desarrollo Sostenible: Hoja de ruta. Paris: Autor. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000374896/PDF/374896spa.pdf.multi

UNESCO (2015). Programa de acción mundial para el desarrollo sostenible (2015-2019). https://es.unesco.org/gap

UNESCO (2022). Qué debe saber acerca de la Educación para el Desarrollo Sostenible. https://www.unesco.org/es/education/sustainable-development/need-know

Spiropoulou, D.; Roussos, G. y Voutirakis, J. (2005). The role of environmental education in compulsory education: The case of mathematics textbooks in Greece. International Education Journal, 2005, 6(3), 400-406. http://iej.cjb.net

Widiati, I. y Juandi, D. (2019). Philosophy of mathematics education for sustainable development. Journal of Physics: Conference Series. 1157 022128. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1157/2/022128/pdf

Formación de profesores de Matemáticas "basada" en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas

Salvador **Llinares**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

En los últimos tiempos se han desarrollado aproximaciones a la formación de profesores de Matemáticas que colocan el foco en el aprendizaje de *prácticas específicas profesionales* vinculadas a la enseñanza de las Matemáticas. Algunas de estas prácticas son interpretar las situaciones de enseñanza, planificar la enseñanza considerando el pensamiento matemático de los estudiantes y reflexionar sobre lo realizado. Algunas propuestas de formación de profesores de matemáticas han empezado a identificar algunas de estas prácticas para construir ambientes de aprendizaje docente en los programas de formación. Estos ambientes de aprendizaje se configuran considerando las relaciones entre los registros de la práctica, conocimiento específico y el foco sobre determinadas prácticas profesiones específicas. El objetivo es que los estudiantes para profesores de matemáticas aprendan a interpretar la enseñanza de las matemáticas para tomar las mejores decisiones posibles en cada momento, definiendo líneas de acción. En esta conferencia mostraremos ejemplos de estos ambientes y sus características.

Palabras clave: Formación de profesores de matemáticas; Prácticas específicas profesionales; Formación de profesores de matemáticas basada en la práctica; Mirada profesional; Aprendizaje del profesor

Formación de profesores de Matemáticas "basada" en la práctica: del conocimiento a las prácticas relevantes

La formación de profesores de matemáticas está experimentando en los últimos años un giro desde un foco en el conocimiento necesario para enseñar Matemáticas hacia la especificación de *prácticas relevantes* en la enseñanza de las matemáticas (*prácticas especificas* *profesionales*) que suponen conocer y hacer (Grossman, 2018). Este giro supone no solo tener que repensar el contenido de los programas de formación, sino también la forma en la que los formadores de profesores de matemáticas desarrollamos nuestra labor (*nuevas pedagogías en la formación de profesores)* (Forzani, 2014; McDonald, Kazemi, y Kavanagh, 2013).

Las prácticas específicas profesionales en la enseñanza de las matemáticas se apoyan en la relación dialéctica entre el conocimiento de matemáticas para la enseñanza, el discurso generado en su justificación y la acción derivada. La hipótesis que subyace a este planteamiento es que la implicación de los estudiantes para profesor en las diferentes prácticas profesionales durante la formación inicial, puede ayudarles a desarrollar formas de pensar (razonamiento pedagógico) que pueden apoyar su aprendizaje como docentes (McDonald et al, 2013). Esta situación ha generado la necesidad de identificar algunas prácticas relevantes en la enseñanza de las matemáticas vinculadas a estas prácticas específicas profesionales, y organizar la formación inicial de profesores a través de ellas de manera que ayuden a los estudiantes para profesor a desarrollar la competencia docente como una forma de conectar la teoría y la práctica. Por ejemplo, la modificación de tareas matemáticas como parte de la práctica específica profesional de planificar la enseñanza (interactuar con materiales curriculares).

Algunas características de las prácticas relevantes que ayudan a identificarlas son (Grossman, 2018): prácticas que ocurren con frecuencia en la enseñanza, que se dan en diferentes materias disciplinares, que pueden ser aprendidas por los estudiantes para profesor, que permiten a los estudiantes para profesor aprender sobre los estudiantes y la enseñanza, que son partes integrantes de la práctica de enseñar y que están basadas en la investigación. Estas características intentan evitar una aproximación reduccionista en que se pueda llegar a pensar en las prácticas relevantes como una simple selección de conductas del profesor (McDonald, Kazemi, y Kavanagh, 2013) permitiendo una mejor identificación de un conjunto de tales prácticas que apoyan la competencia docente. Algunos ejemplos de prácticas relevantes que están siendo identificadas con potencial para mejorar la formación de profesores en diferentes ámbitos disciplinares (Grossman et al 2009; Cuenca, 2021; Windschitl et al, 2012; Jacobs y 2017) son

- atender y dar respuesta a las ideas de los estudiantes para adaptar la enseñanza,
- gestionar discusiones colectivas en la clase dirigidas por un objetivo de aprendizaje de tópicos disciplinares ayudando a los estudiantes a construir argumentos válidos en la disciplina, o
- interactuar con materiales curriculares para decidir líneas de acción

La perspectiva de concebir la formación de profesores basada en la práctica sitúa en primer plano una agenda de investigación sobre el desarrollo de las competencias docentes que tiene implicaciones inmediatas en la práctica de formar profesores (Llinares, 2014). Es decir, se subraya la dualidad entre la práctica de formar profesores y las agendas de investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor que vincula los roles del formador y del investigador como una dualidad. Esta dualidad se apoya en el diseño de tareas en los programas de formación que integran proyectos de investigación (Ivars, Llinares y Buforn, 2017). Esta aproximación a la formación de profesores de matemáticas identifica prácticas relevantes en la enseñanza de las matemáticas y desarrolla e implementa formas de hacer en los programas de formación dirigidas a que los estudiantes para profesor aprendan estas prácticas y las formas de razonar que les dan soporte.

Practicas relevantes en la enseñanza de las matemáticas y pedagogías en la formación de profesores

Ser competente en la enseñanza de las matemáticas implica diversas prácticas relevantes identificadas y caracterizadas por la investigación (Jacobs y Spangler, 2017). Ejemplos de estas prácticas son

- interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández et al, 2018; Llinares, 2013b),
- analizar materiales curriculares, lecciones y actividades y planificar la enseñanza (Ayalon et al, 2021; Dietiker, Males, Amador, Earnest, 2018; Llinares, 2013 a), y
- gestionar el pensamiento matemático de los estudiantes durante las discusiones matemáticas en el aula (Smith y Stein, 2011).

El desafío para los formadores de profesores está en diseñar, implementar y analizar propuestas formativas centradas en algunas de estas prácticas relevantes en la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de ayudar a los estudiantes para profesores a aprender a razonar y actuar en relación a ellas (Groenwald y Llinares, 2022; Ivars et al, 2019).

Las características de las formas de actuar de los formadores en estas iniciativas mantienen ciertas similitudes (Llinares y Fernández, 2021). Por ejemplo, en el uso *de representaciones de la práctica*, de *instrumentos conceptuales* (conocimiento teórico) que permiten apoyar los procesos de razonamiento de los estudiantes para profesor, *preguntas guías* que ayudan a centrar la atención de los estudiantes para maestro para identificar lo que puede ser relevante para el aprendizaje de las matemáticas en la situación descrita por el registro de la práctica, y *espacios para intercambiar y potenciar los procesos de razonamiento* como una forma de ayudar a ampliar la comprensión de la práctica.

Las *representaciones de la práctica* pueden tener el formato de videos, casos-narrativas, materiales curriculares como planes de lecciones o propuestas curriculares de libros de textos, comics describiendo situaciones de aula y así (Buchbinder y Kuntze, 2016). Estos registros de la práctica pueden describir respuestas de estudiantes a problemas con diferente demanda cognitiva, interacciones entre un maestro y un grupo de estudiantes en una sesión de discusión matemática con la clase entera, o secuencias de problemas en una lección desde un libro de texto o planificación de un profesor.

Los instrumentos conceptuales es la información teórica procedente de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que debe ayudar a los estudiantes para profesor a identificar los aspectos relevantes en la situación, interpretar dichos aspectos y ayudar a justificar posibles líneas de acción. La interpretación permite ver un aspecto particular del registro de la práctica como una característica de un principio teórico más general. Un ejemplo de instrumento conceptual son trayectorias hipotéticas de aprendizaje de tópicos matemáticos específicos que pueden describir modelos de progresión (niveles y características) del aprendizaje matemático del tópico, o información sobre tipos de problemas que permiten determinar diferentes niveles de demanda cognitiva.

Las *preguntas guías* ayudan a focalizar la atención de los estudiantes para profesor y les ayuda a ser selectivos en lo que se puede observar. Las preguntas guías permiten a los estudiantes para profesor razonar sobre la representación de la práctica de manera que puede ser relevante para la enseñanza. Es decir, ayudando a justificar las posibles decisiones de enseñanza apoyados en la interpretación generada (decidir para actuar).

Finalmente, los espacios para intercambiar y potenciar los procesos de razonamiento pueden permitir a los estudiantes para profesor comparar con otros y cuestionar sus interpretaciones como una forma de estructurar sus argumentos.

En la sección siguiente ejemplificaremos estas características con la práctica relevante de analizar los problemas que aparecen en libros de texto para aprender a decidir cómo usar estos recursos curriculares en la enseñanza (planificación).

Interaccionando con materiales curriculares: Analizar libros de texto para decidir líneas de acción

Analizar las propuestas de enseñanza que proporcionan diferentes libros de texto es una práctica profesional específica en la enseñanza de las matemáticas para decidir una línea de acción determinada (seguir la propuesta, modificar algunas actividades o complementar la secuencia propuesta). La manera en la que los profesores interaccionan con los materiales curriculares y recursos de enseñanza ha puesto de manifiesto la relevancia de esta práctica como un aspecto importante de la competencia docente del profesor (Dietiker et al, 2018; Trouche, Gueudet, y Pepin, 2019; Gueudet y Pepin, 2020). En formación inicial de profesores, aprender a interaccionar con los recursos se inicia cuando los estudiantes para profesor tienen que aprender a interpretar los diferentes materiales para decidir si deben modificar o completar las propuestas para usarlos en la enseñanza. El diseño de este tipo de actividades en los programas de formación integra representaciones de la práctica (extractos de libros de texto), información teórica como instrumentos conceptuales, y preguntas guías.

Por ejemplo, la figura 1 muestra un extracto de los materiales usados en un entorno de aprendizaje en un programa de formación de maestros de educación primaria centrada en el análisis y comparación de libros de texto relativos al razonamiento proporcional para alumnos de 11 -12 años.

El registro de la práctica está formado por la propuesta de dos libros de texto de las lecciones sobre magnitudes directamente proporcionales, el uso de diferentes formas de representar la relación entre cantidades de magnitudes proporcionales (tablas de proporcionalidad, gráficas), y procedimientos para resolver situaciones proporcionales (reducción a la unidad, y el uso de la aritmética de las proporciones), y las diferentes maneras de representar los porcentajes y su relación con las fracciones.

Las cuestiones guía se agrupan en tres bloques: Identificar, Interpretar y Decidir para actuar. Los focos de atención específicos son los tipos de problemas y la comparación entre la secuencia usada en los dos libros de texto (en la figura 1 solo se muestra un problema de cada propuesta curricular). El objetivo es que los estudiantes para profesor puedan identificar diferencias y semejanzas en las dos propuestas curriculares considerando los tipos de problemas que usan y los modos de representación introducidos. El segundo foco de las preguntas guías corresponde a Interpretar centrando la atención en tener que anticipar posibles respuestas de los estudiantes a problemas específicos (como una forma de subrayar la demanda cognitiva de los problemas) y considerando cómo diferentes estudiantes pueden usar aproximaciones alternativas que reflejen su comprensión de las relaciones de proporcionalidad y cómo las diferentes maneras de representar la relación entre las cantidades pueden aportar evidencias de diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. Finalmente, el tercer bloque de cuestiones guías están centradas en decidir una línea de acción a partir del análisis anterior (identificar e interpretar) y que pueda ayudar a completar la lección.

Los *instrumentos conceptuales* proporcionados, es decir, la información teórica para apoyar los procesos de identificar, interpretar y justificar las decisiones, en este caso tienen tres focos. En primer lugar, información sobre cómo el currículo contempla los conceptos de magnitudes directamente proporcionales, razón, proporción y porcentajes en educación primaria. El segundo foco es sobre

- los significados matemáticos de los conceptos de razón, proporción y lo que significa razonar proporcionalmente (que va más allá de resolver problemas de proporcionalidad usando algoritmos rutinarios)
- diferentes tipos de problemas (valor perdido, comparación numérica y predicción cualitativa),
- estrategias que pueden usar los estudiantes considerando el uso de diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) y de relaciones entre las cantidades (escalares o funcionales), y
- las características de los diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional.

Finalmente, el tercer foco es la particularización en el concepto de porcentaje como una razón estandarizada a una base de 100, los diferentes tipos de tareas y problemas, y las equivalencias entre diferentes maneras de representar el porcentaje usando también expresión decimal y la fracción. Se completa con las características de los diferentes tipos de problemas con el porcentaje cuando se describen diferentes tipos de relaciones entre las cantidades. Por ejemplo, la relación parte-todo “el 82% de los estudiantes han aprobado matemáticas”. El porcentaje describe el conjunto de estudiantes que aprobaron matemáticas en relación al conjunto total de estudiantes que se examinaron; y la relación todo-todo “El precio de un producto era 120€ y ha aumentado a 150€. La razón del nuevo precio respecto el original es 150/120, es decir, el nuevo precio es un 125% respecto el precio original”. Considerando estas dos relaciones los problemas pueden presentar situaciones de cambio y descripción de una situación estática.

Didáctica de la Matemática- Universidad de Alicante 17534-EA de las Matemáticas en la EP

T04-PR3- Libros de texto: Porcentajes en 6º de EP

RECURSO:

Paginas de libros de texto de 6º del tema magnitudes directamente proporcionales

* Editorial Anaya. Proyecto Pieza a Pieza. Autores: L. Ferrero, P. Martin, y J.M. Gómez. (2018) Matemáticas 6. 2º Trimestre. pág. 126-129

- Editorial SM. Matemática 6. 2º Trimestre. pág.102-105 y 116-117

CUESTIONES (solo sobre los problemas)

1. **IDENTIFICAR.**
   a. Identifica cómo el libro de texto introduce el concepto porcentaje.
   b. Identifica los tipos de **problemas que aparecen:** *situaciones de cambio* (aumentar/disminuir) y *descripción de una situación estática*. Indica su **característica** (tipo de relación y la incógnita)
   c. Compara la propuesta entre las dos editoriales indicando las diferencias/semejanzas en relación con **problemas que aparecen** y sus características

2. **INTERPRETAR**
   a. Anticipa diferentes formas de resolver los siguientes problemas (SUGERENCIA cuando sea posible: usando tabla de proporcionalidad y considerando la equivalencia entre diferentes maneras de representar la relación entre cantidades, o usando representaciones gráficas)
      * **problema 6, segundo apartado** (SM 6º curso, pág. 105)
      * **problema "Calculemos el precio rebajado"** (Anaya 6º curso, pág. 129)

3. **PROSPECCIÓN (Decidir para actuar).**

   Considerando que eres el maestro/a usando este libro de texto, propón un problema de estructura diferente a los planteados en el libro y que te ayuden a completar la lección.

Un museo recibe 100 visitantes la primera semana del mes. La segunda semana recibe un 20 % más de visitantes. En la tercera semana, asiste un 20 % menos de personas que la semana anterior.

¿Vuelve a tener 100 visitantes la tercera semana? Explica tu respuesta sin realizar operaciones. Después, comprueba tu respuesta.

Figura 1. Práctica específica profesional: Interacción con los materiales curriculares. Ejemplo desde la actividad instruccional de Analizar libros de texto.

La estructura del entorno de aprendizaje generado desde los registros de la práctica proporcionados, los instrumentos conceptuales usados y las cuestiones guías están diseñados para crear oportunidades en el programa de formación apoyando el desarrollo de la práctica de analizar libros de texto y proponer líneas de actuación como práctica relevante de una práctica especifica profesional como es la planificación de la enseñanza.

Conclusiones

La formación de profesores de matemáticas "basada en la práctica" intenta integrar el aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar matemáticas y el desarrollo de la competencia docente articulada a través de diferentes prácticas específicas profesionales. Organizar los programas de formación alrededor de un conjunto de prácticas relevantes vinculadas a prácticas específicas profesionales, tales como analizar libros de texto para decidir líneas de acción y atender a e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para decidir cómo apoyarles puede ayudar a los estudiantes para profesor a aprender la práctica de enseñar matemáticas. Aprender estas prácticas en cualquier lección de matemáticas va emparejado al desarrollo de formas de razonar que se evidencia en el discurso de los estudiantes para profesor. Es decir, en la manera en la que los estudiantes para profesor describen lo que observan, lo interpretan y justifican sus líneas de acción. De esta manera, los formadores de profesores de matemáticas están conceptualizando el aprendizaje de los estudiantes para profesor considerando cambios en el discurso vinculado a la realización de estas prácticas (Ivars et al, 2018), así como el aprendizaje de profesores en ejercicio en contextos de desarrollo profesional (Wilson et al, 2017). Esta forma de conceptualizar el aprendizaje de los estudiantes para profesor subraya la necesidad de considerar el papel que desempeñan los entornos de aprendizaje en los programas de formación y el papel de los formadores de profesores para poder caracterizar sus "formas de hacer" (pedagogías) (McDonald et al, 2013).

Resumiendo, en esta propuesta se vincula la identificación de prácticas especificas en la enseñanza de las matemáticas a la organización de la formación de profesores de matemáticas "basadas en estas prácticas" generando determinadas formas de hacer de los formadores de profesores. Esta aproximación a la formación de profesores conlleva considerar aspectos como registros de la práctica, instrumentos conceptuales y cuestiones guías como andamios en el diseño de entornos de aprendizaje.

Reconocimiento. Este trabajo forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias y bibliografía

Ayalon, M., Naftalief, E., Levenson, E., Levy, S. (2021). Prospective and In-service Mathematics Teachers Attention to a Rich Mathematics Task while planning its implementation in the classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19,* 1695-1716. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10134-1

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (Eds.). (2016). *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice. A Dynamically Evolving Field. ICME 13 Monographs*. Springer Nature.

Cuenca, A. (2021). Proposing Core Practices for Social Studies Teacher Education: A Qualitative Content Analysis of Inquiry-Based Lessons. *Journal of Teacher Education, 72*(3), 298-313.

Dietiker,L., Males, L.M., Amador, J., Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A Framework to Describe Teachers' Interactions with curricular materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521-532.

Fernández, C., Sánchez-matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Forzani, F. (2014). Understanding "Core Practices" and "Practice-Based" Teacher Education: Learning from the Past. *Journal of Teacher Education, 65*(4)357-368.

Groenwald, C.L. y Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *REVIEM. Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), 1-26-e202202

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., y Williamson, P. (2009). Teaching practice; A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2065-2100.

Grossman, P. (2018). *Teaching Core Practices in Teacher Education*. Harvard Education Press.

Gueudet, G. y Pepin, B. (2020). Digital Curriculum Resources in /for Mathematics Teacher Learning: A Documentational Approach Perspective. En S. Llinares y O. Chapman (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (Second Edition)* (p.139-162) Brill/Sense: Leiden /Boston

Ivars, P., Llinares, S., y Buforn, A. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (Comp.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XX*I (p. 65-88). Centro de Investigaciones Educativas. Universidad Central de Venezuela.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., y Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: using a Hypothetical learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science, and Technology Education, 14*(11)3m1959

Jacobs, V. y Spangler, D. (2017). Research on Core Practices in K-12 Mathematics Teaching. En J. Cai (ed.), *COMPEDIUM for Research in Mathematics Education*, (p.766-792). NCTM: Reston VA.

Llinares, S. (2013a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. *Educar em revista.Curritiba, Brasil. 50*, 117-133

Llinares, S. (2013b). Professional noticing: a component of the mathematics teachers' professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica de formar profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 25 años, marzo 2014*, 31-51.

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, 24*(1), 185-205.

McDonald, M., Kazemi, E., Kavanagh, S. (2013). Core Practices and Pedagogies of Teacher Education: A Call for a Common language and Collective Activity. *Journal of Teacher Education, 64*(5), 378-386.

Smith, M.S. y Stein, M.K. (2011*). Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. NCTM: Reston, VA.

Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B. (2019*). The 'Resource' approach to Mathematics Education*. Springer nature.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J., y Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal, 54*(3), 568-604.

Windschitl, M., Thompson, J., Braaten, M., Stroupe, D. (2012). Proposing a Core Set of Instructional Practices and Tools for Teachers of Science. *Science Education,* DOI 10.1002/sce.21027.

Conocimiento didáctico matemático de profesores de Matemáticas para el desarrollo del razonamiento algebraico

Cecilia **Gaita** Iparraguirre
IREM-Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú.
cgaita@pucp.edu.pe

Resumen

Más de treinta años de fundamentación teórica y de evidencia empírica ponen de manifiesto que para que los profesores de matemáticas logren contribuir con el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes es fundamental que previamente superen la postura epistemológica en donde el álgebra se entiende como una aritmética generalizada. A partir de ello, se han desarrollado propuestas que permiten identificar distintos niveles de desarrollo en dicho tipo de pensamiento desde la educación básica. Sin embargo, los profesores de matemáticas requieren contar con instrumentos específicos, asociados a distintos objetos matemáticos, que les permitan promover la evolución en el uso de distintos lenguajes, así como en procesos de generalización, los cuales son rasgos fundamentales de evolución en el desarrollo del razonamiento algebraico. En esta ponencia se darán algunos ejemplos relacionados con los aspectos señalados a partir de la revisión del currículo nacional peruano.

Palabras clave: Razonamiento algebraico; criterios; niveles RAE; conocimiento didáctico-matemático.

Introducción

El Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) fue propuesto originalmente con la finalidad de aportar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental, a través de la identificación de rasgos que pudieran dar cuenta de la adquisición de dicho razonamiento (Godino et al 2012). Como resultado de ese trabajo, se reconoce que tanto los procesos de generalización como el simbolismo algebraico permiten describir prácticas consideradas como algebraicas y que estas deben evolucionar a lo largo de la formación escolar.

También se determinan como objetos de naturaleza algebraica las relaciones de equivalencia y sus propiedades, las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, propiedades de las estructuras que se generan en dichos conjuntos, funciones y sus tipos, operaciones con funciones y sus propiedades, entre otros.

De otro lado, en el Currículo Nacional de la Educación Básica (PERÚ, 2016), se declara que una de las competencias matemáticas que se debe desarrollar en la formación básica regular (hasta los 16 años) es “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. Dicha competencia se define en términos de que “el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto a otra, a través de reglas generales” (PERÚ, 2016, p. 73). Por ello, es natural encontrar contextos favorables para el desarrollo del RAE en situaciones asociadas a esta competencia.

Por otra parte, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) propone un modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que permite caracterizar de manera sistemática los conocimientos del profesor de matemáticas en sus diferentes facetas y componentes (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino et al, 2016). Sin embargo, en particular en lo que se refiere al álgebra hacen falta programas de formación para la ejecución de itinerarios de pensamiento algebraico desde los 6 hasta los 17 años (Carraher y Schliemann, 2019). La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización adecuadamente y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. En particular, será crucial la identificación de situaciones idóneas para el desarrollo del RAE por parte del docente.

En el Perú, los manuales oficiales son considerados un recurso fundamental por los profesores de matemáticas y el gobierno peruano garantiza el reparto gratuito de cuadernos de trabajo de matemáticas para los cinco grados de secundaria en todo el territorio peruano. Sin embargo, en un trabajo previo (Gaita et al, 2022a), se analizaron algunas situaciones presentadas en dichos textos para el desarrollo de la competencia matemática “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, y se concluyó que las tareas se caracterizaban por una simplificación excesiva de la realidad, por el uso de contextos inadecuados para el estudio del cambio y, en otros casos, aunque los contextos seleccionados eran potencialmente adecuados, no eran aprovechados para desarrollar el razonamiento algebraico.

Criterios para identificar situaciones que contribuyen al desarrollo del RAE

Teniendo en cuenta lo descrito, se proponen criterios que permiten reconocer si una situación referida a contenidos matemáticos tradicionalmente asociados al álgebra (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones, entre otros) contribuye al desarrollo del RAE o si tiene potencial para hacerlo y, en ese caso, cómo podría modificarse para que lo desarrolle efectivamente.

Tabla 1
Criterios para identificar situaciones que contribuyen al desarrollo del RAE.

Criterio	Descripción	Para el progreso en el RAE
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación sobre patrones o de búsqueda de regularidades, o que requiere manipular expresiones alfanuméricas y usar propiedades de las estructuras (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, etc.), o que estudia el cambio y la covariación.	La situación requiere la modelización de los datos a través de alguno de los objetos considerados como algebraicos. Para que el RAE evolucione, se debe demandar una modelización de complejidad creciente.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La solución del problema debe requerir del uso de distintos lenguajes: gestual natural, numérico, tabular, gráfico, alfanumérico, incluyendo el uso de parámetros, y las transformaciones entre ellos. El paso del lenguaje natural, numérico al alfanumérico requiere que la situación exija atribuir significado a los cálculos.	Para que el RAE evolucione, se debe propiciar el uso gradual de los distintos lenguajes. El uso del lenguaje alfa-numérico se hace necesario en la medida que la situación requiera justificar la solución.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Las cuestiones que se desprendan de la situación deben demandar generalizaciones progresivas de los resultados; desde tareas en donde primero los datos adoptan valores particulares, pasando por aquellas en donde se obtiene una regla general que define a la clase (objeto intensivo), hasta tareas en donde se estudia el comportamiento de familias de problemas (lo que requiere el uso de parámetros).	La situación exige realizar generalizaciones sucesivas. En este proceso, resulta esencial que el estudiante valide las soluciones obtenidas utilizando diversos medios de control, incluyendo la verificación que lo general se cumpla también para lo particular.

Fuente: Gaita, Ugarte y Gonzales (2022b, p.168)

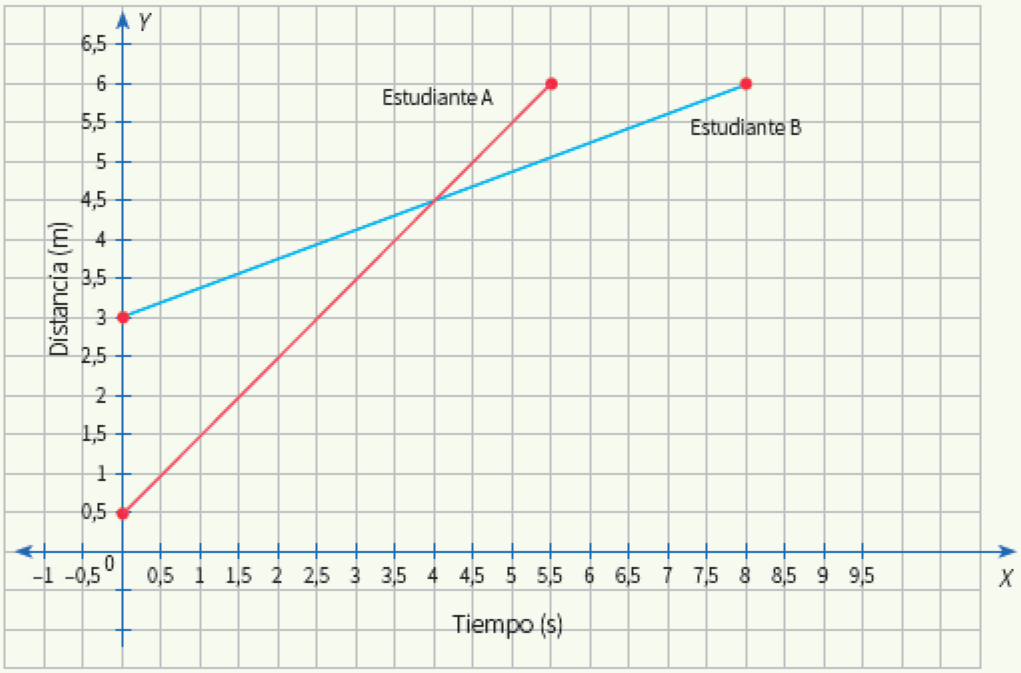
Luego del análisis de la tarea, se brindan pautas para modificarlas, incorporando actividades sucesivas, de modo que las preguntas demanden cada vez un mayor grado de generalidad y de expresión de dicha generalidad (Gaita et al, 2022b)

Análisis de una tarea empleando los criterios propuestos

A continuación, se presenta una tarea tomada de un texto de matemáticas distribuido por el gobierno peruano a los estudiantes de cuarto año de secundaria de todas las escuelas públicas. La actividad fue analizada en términos del desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio (Gaita et al, 2022a). La figura 1 reproduce el enunciado original de forma literal.

¿Dónde se encontrarán?

En una investigación, dos estudiantes caminan simultáneamente a lo largo de un trayecto de 6 m. El estudiante A empieza en un punto a 0,5 m del inicio del trayecto y camina hacia el punto final a razón de 1 m/s. El estudiante B comienza en el punto ubicado a 2 metros del inicio y camina hacia el final del trayecto a razón de 0,5 m/s. Aquí se muestra una gráfica de los datos obtenidos.



1. Representa mediante una expresión matemática la información presentada en la gráfica.
2. Determina a partir de qué tiempo y distancia el estudiante A pasa al estudiante B.

Figura 1. Tarea propuesta en un texto
Fuente: PERÚ (2019, p.181)

En la figura 2 se presenta el propósito de esa tarea, tal como la describe el cuaderno de trabajo.

> **Propósito:** Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos y transformamos esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas que incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Así también, combinamos y empleamos estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas y solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Figura 2. Propósito de la tarea
Fuente: PERÚ (2019, p. 181)

La resolución esperada en la institución escolar propone las siguientes etapas: completar una tabla de valores que relacionan el tiempo (X) y la distancia (Y) para el caminante A cada segundo, y otra tabla para el caminante B; escribir las funciones que representan el tiempo y la distancia para los caminantes A y B; a través de la resolución de un sistema de ecuaciones, determinar qué valores toman X y Y cuando se intersecan las dos gráficas y, finalmente, determinar a partir de qué tiempo y qué distancia el estudiante A pasa al estudiante B.

Ahora analizamos la tarea, sin vernos influenciados por las etapas sugeridas en el libro. En el enunciado del problema se presenta la misma información empleando dos representaciones: la verbal y la gráfica (aunque hay un error en el enunciado al señalar que el estudiante B inicia su recorrido a 2 m cuando debió decir 3 m). Es decir, no se propicia un cambio de representación; más aún, la obtención de las expresiones algebraicas sólo se hace necesaria porque el problema lo pide de manera explícita. Además, en el enunciado ya se establecen los valores de los coeficientes lineales (rapidez de los estudiantes) y de los términos independientes de ambas funciones lineales (en la gráfica aparecen las intersecciones con el eje Y).

Para responder la segunda pregunta bastaría interpretar la gráfica del enunciado y responder que el recorrido del estudiante A es mayor que el recorrido del estudiante B a partir de los 4 segundos. Esto se desprende de reconocer en el gráfico las coordenadas del punto de intersección e interpretar lo que este representa en el contexto del problema. Un análisis de la tarea considerando los criterios dados en la tabla 1, se presenta en la tabla 2.

Tabla 2
Análisis de la tarea según criterios establecidos.

Criterio	**Descripción**	**Comentario**
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación que se relaciona con el estudio del cambio (tiempo-distancia), pero tal como está planteada, no requiere de requiere del estudio de funciones ni de uso de sistemas de ecuaciones porque las respuestas se pueden obtener a partir de los gráficos.	El contexto de la situación es pertinente para desarrollar el RAE, pero la información presentada y las preguntas consideradas no generan una actividad algebraica.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La situación presenta información en lenguaje natural y gráfico; La solución esperada por la institución incluye la obtención de reglas de correspondencia expresadas en lenguaje alfanumérico.	Pese a que se emplean dos lenguajes en el enunciado, las informaciones brindadas son redundantes. Se puede modificar la consigna de modo que las informaciones brindadas sean complementarias y que el empleo del lenguaje alfanumérico se haga necesario en el proceso de solución, atribuyéndole significado a los coeficientes de las expresiones lineales.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Tal como está planteada la tarea, se espera obtener la expresión algebraica para cada función que relaciona la distancia y el tiempo. Sin embargo, como esa regla no se genera a partir de los elementos que la constituyen, no se puede afirmar que sea una entidad unitaria que emergerá del sistema de prácticas.	Es pertinente considerar otras preguntas que permitan reconocer un patrón de formación a partir de un conjunto finito de valores, para luego extraer la regla que generaliza la relación y actividades posteriores, en donde se obtengan nuevos intensivos que representen familias de funciones en las que los movimientos descritos en el enunciado sean sólo casos particulares. Así, se pueden considerar preguntas en donde la rapidez cambie y se cuestione por los cambios que esto genera en los tiempos de encuentro, etc.

Fuente: Creación propia

Tarea modificada en base a los criterios establecidos

Se modifica al enunciado, considerando inicialmente información en lengua natural, tal como se presenta en la figura 3.

Trayectos

Autor: (IREM) Instituto de Investigación de Enseñanza de las Matemáticas

En una competencia escolar, dos estudiantes caminan simultáneamente y en el mismo sentido a lo largo de un trayecto rectilíneo con las piernas unidas en la parte inferior por una cinta para hacer más difícil el desplazamiento.
La estudiante A empieza a caminar a 50 m de un punto de referencia y camina hacia el punto final del trayecto, el cual se encuentra a 900 m del punto de referencia, y camina hacia el punto final a razón de $\frac{5}{3}$ (m/s). La estudiante B comienza en el punto ubicado a 300 m del punto de referencia y camina hacia el punto final del trayecto a razón de $\frac{10}{9}$ (m/s). Durante todo el recorrido los estudiantes mantienen un ritmo constante de movimiento.

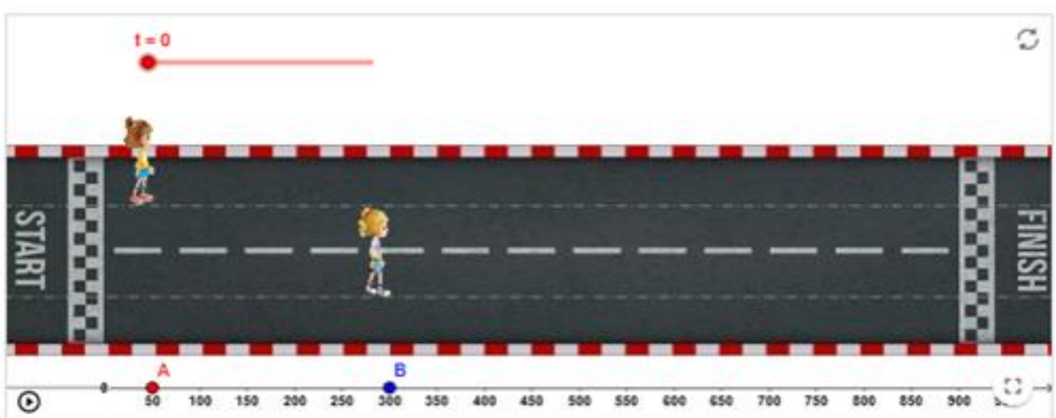
Figura 3: Enunciado de la tarea modificada
Fuente: Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio (Gaita et al, 2022a, p. 82).

En la parte a) se prescinde de la información brindada en el plano cartesiano y se reemplaza por una actividad exploratoria en un sistema unidimensional empleando Geogebra; esto permite reconocer que las posiciones cambian en el tiempo, pero por los valores que toma el deslizador, no será inmediato determinar el cambio por segundo en las distancias recorridas por cada niña. De la manipulación del deslizador, se puede responder la pregunta a) pues se observará que la niña que salió con ventaja, llegará después a la meta. Esto se detalla en la figura 4.

Trayectos- parte a

¿La estudiante que empezó con más ventaja llega primero a la meta? Analice qué ocurre cuando el tiempo transcurre al deslizar el punto t. (t representa el tiempo en segundos)

El punto t se desliza de manera automática al hacer clic en ▶ y se detiene al hacer clic en ⏸.



¿Cuántos metros recorre la estudiante más rápida por cada segundo?

Figura 4: Enunciado de la pregunta a)
Fuente: Gaita et al. (2022a, p. 82).

Adicionalmente, de comparar los datos relacionados con la rapidez, $\frac{5}{3} = \frac{15}{9} > \frac{10}{9}$ (m/s), se concluirá que la estudiante A es la más rápida y que recorre 5 metros cada 3 segundos, o, equivalentemente, $\frac{5}{3}$ metros cada segundo.

En la parte b), se pide determinar cuántos metros avanza cada niña en los 3 minutos. Eso requiere un proceso de generalización cercana, considerando que lo recorrido en un mismo tiempo es constante para cada niña. Así, como la estudiante A recorre $\frac{5}{3}$ metros por segundo, en 180 segundos recorrerá $\frac{5}{3}(180) = 300$ m; la estudiante B recorre $\frac{10}{9}$ metros por segundo, en 180 segundos recorrerá $\frac{10}{9}(180) = 200$ m. Y como la posición inicial de A era 50 m, luego de 3 minutos se ubica en la posición 350 m. Dado que la posición inicial de B era 300 m, luego de 3 minutos se ubica en la posición 500 m. Así, la distancia que las separa, luego de 3 minutos es 150 m. Estos resultados no se obtienen de la manipulación, pero se validan con esta.

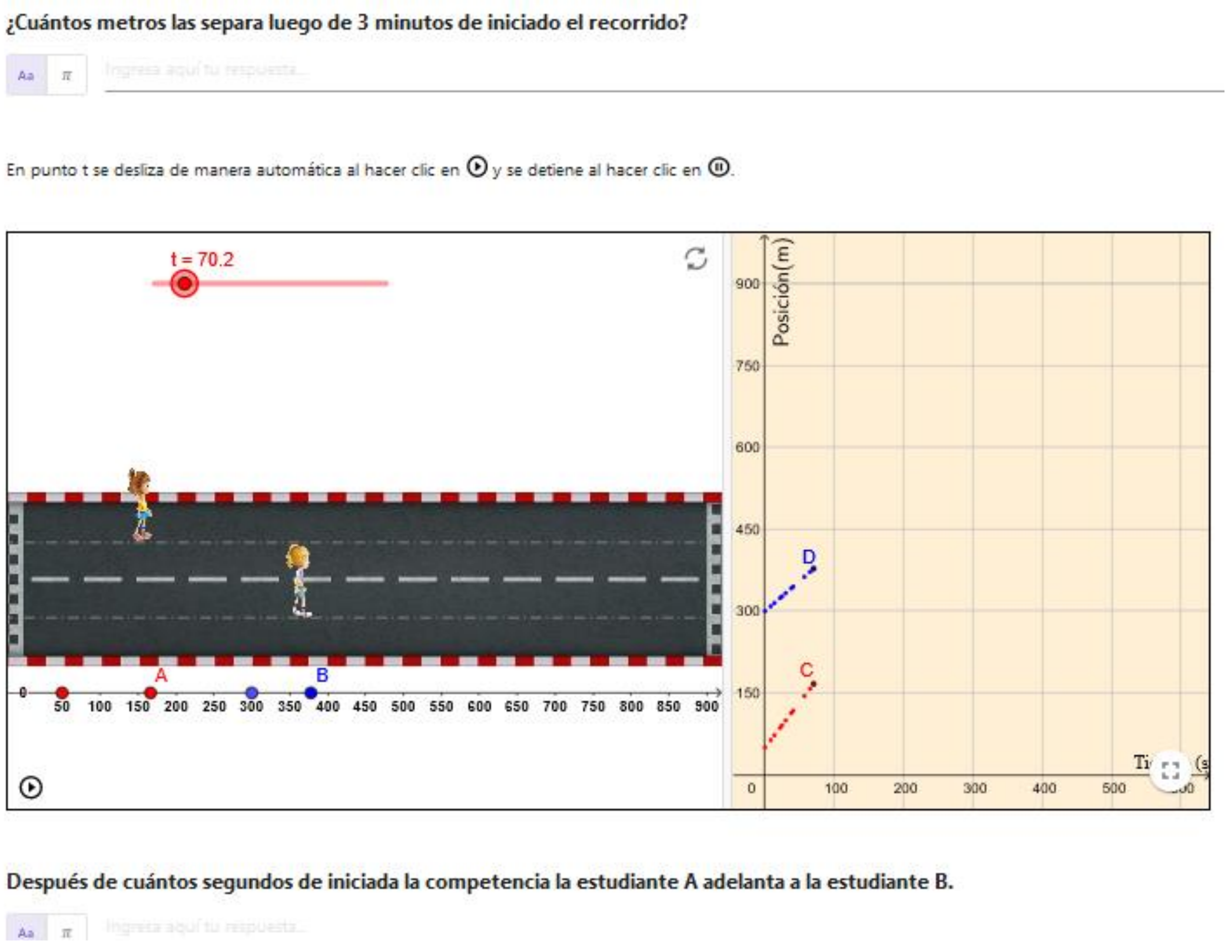


Figura 5: Enunciado de la pregunta b)
Fuente: Gaita et al. (2022a, p. 82).

.

Además, en la parte b) también se pregunta por el tiempo que debe transcurrir desde que se inició la competencia para que la estudiante A adelante a la estudiante B. Esa información no se obtiene del gráfico; se hace necesario obtener las expresiones algebraicas para las posiciones y resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: $y = \frac{5}{3}t + 50$; $\quad y = \frac{10}{9}t + 300$. La solución del sistema de ecuaciones es $t = 450$ e $y = 800$, que gráficamente corresponde al punto de coordenadas (450; 800), punto de intersección de las rectas que representan la distancia recorrida por las estudiantes en función al tiempo transcurrido. Por lo tanto, las posiciones de las estudiantes A y B coinciden a los 7minutos y 30 segundos. Como se ha puesto en evidencia, esta actividad demanda el empleo de diversos lenguajes y obliga a trabajar en el lenguaje alfa numérico.

Finalmente, en la parte c) de la tarea, se debe hallar el valor de un parámetro (la rapidez de la estudiante A que ahora no es dato) para que se cumpla una determinada condición: la competencia termine un empate.

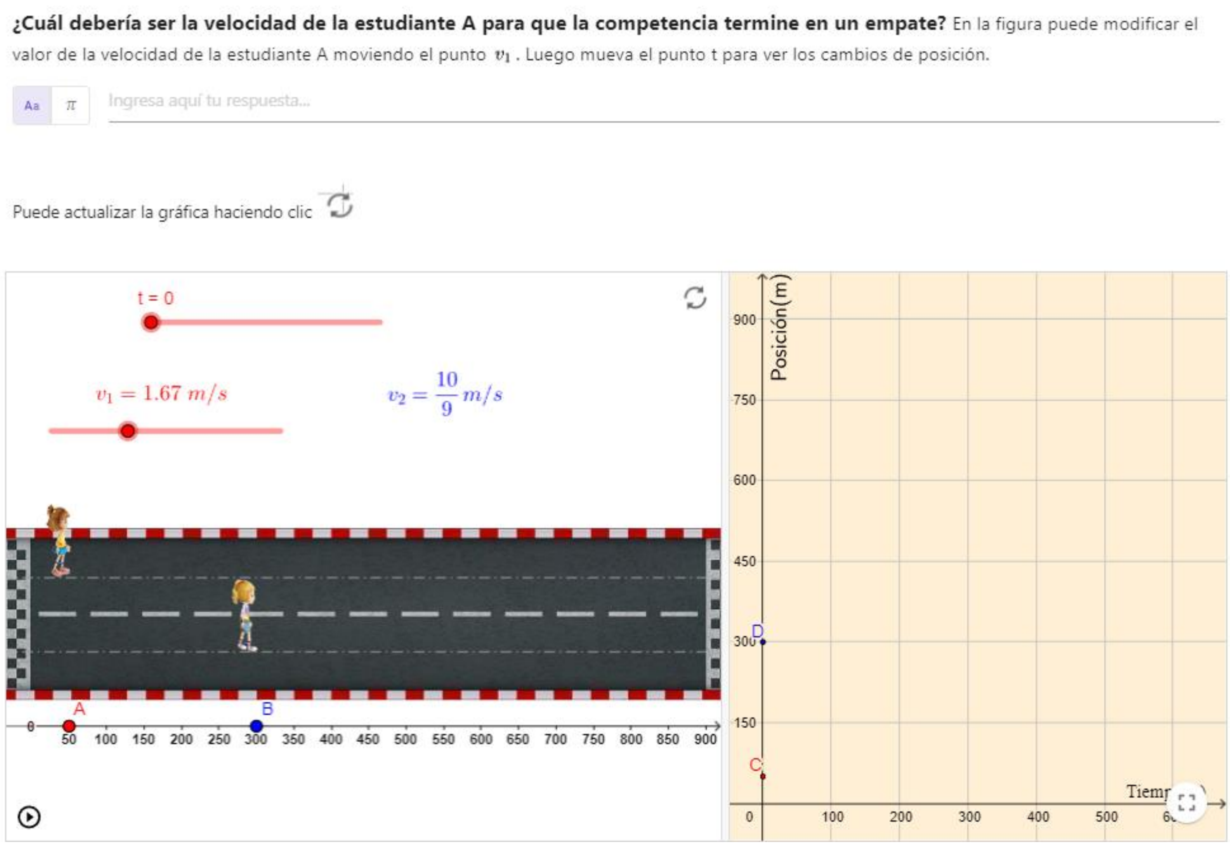


Figura 6: Enunciado de la pregunta c)
Fuente: Gaita et al. (2022a, p. 83).

Esto requiere de un proceso de generalización que se manifiesta porque se debe estudiar una familia de funciones representadas por expresiones como las siguientes:
Estudiante A: $f(t) = mt + b_1$; Estudiante B: $g(t) = nt + b_2$. Como la gráfica de f pasa por los puntos (0; 50) y considerando que el valor de m debe hallarse, se obtiene: $f(t) = mt + 50$, mientras que la función $g(t) = \frac{10}{9}t + 300$.

Como se quiere que las posiciones finales coincidan, eso significa que debe existir un valor de t^* común tal que $f(t^*) = g(t^*) = 900$. De la función $g(t^*) = \frac{10}{9}t^* + 300 = 900$, se tiene que esto ocurre para el tiempo $t^* = 540s$. Reemplazando en la función $f(t) = mt + 50$, el valor $t^* = 540s$ y $f(t^*) = 900$, se obtiene que la velocidad m, en metros por segundo, debe ser:

$900 = m(540) + 50$, luego $m = 1{,}57$.

Las actividades en Geogebra se pueden encontrar en los siguientes enlaces.
Parte a) https://www.geogebra.org/m/wufbjz9w
Parte b) https://www.geogebra.org/m/nbdj7hda
Parte c) https://www.geogebra.org/m/qvnghayg

Consideraciones finales

El profesor de matemáticas debe ser capaz de analizar si los problemas que usualmente emplea en sus clases generan prácticas matemáticas de diferentes niveles de complejidad; de no ser así, debe contar con herramientas teóricas que le permitan promover el desarrollo del razonamiento algebraico de sus estudiantes.

Los problemas modificados priorizan el trabajo exploratorio, acompañado con preguntas que contribuyan a identificar patrones o regularidades; esto es fundamental para avanzar en procesos de generalización. En esa medida, se hará necesario emplear el lenguaje alfanumérico, luego de haber empleado otros lenguajes y de haber establecido relaciones entre ellos.

A partir de un estudio inicial con valores particulares, se pueden estudiar regularidades, las que pueden ser más evidentes si se contempla el uso de recursos como hojas de cálculo o GeoGebra. Si se formulan preguntas que exijan establecer relación entre las representaciones gráficas y otros lenguajes, se obtendrá información adicional que contribuirá a una mejor comprensión del problema.

Referencias y bibliografía

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2019): Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12años) en Estados Unidos. Infancia y Aprendizaje. *Journal for the Study of Educational Development*. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Gaita, C., Gonzales, C., Ugarte, F. y Wilhelmi, M. R. (2022a). *Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Desarrollo didáctico de la competencia*. LIMA: FONDO EDITORIAL PUCP.

Gaita, C., Ugarte, F. y Gonzales, C. (2022b). Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, 17 (42), pp. 162-179. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p162-179.id455

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-3.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In: Fernández, C. et al. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga: Ed. SEIEM, 2016. p. 288-297.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. 224p. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú (2019). Resolvamos problemas 4. Cuaderno de trabajo de Matemática. Lima: Autor. Disponible en https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552

Tarefas de aprendizagens profissional na formação de professores: discutindo o ensino de números e álgebra na escola básica

Alessando Jacques **Ribeiro**
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC), Universidade Federal do ABC (UFABC)
Brasil
alessando.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Nesse minicurso, por meio do uso de tarefas formativas, iremos explorar a matemática e seus processos de ensino e aprendizagem com foco nos números e na álgebra. Tomando-se como ponto de partida tarefas matemáticas direcionadas a alunos da escola básica, discutiremos as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional de professores, nomeadamente no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem de números e álgebra. As tarefas de aprendizagem profissional (TAP) contemplam, além de tarefas matemáticas voltadas aos estudantes, registros de prática como resoluções de alunos, episódios de aulas de matemática, reflexões de professores, entre outros. A partir do trabalho com todos esses materiais, espera-se oportunizar momentos de aprendizagem profissional a professores que ensinam matemática na escola básica, contribuindo assim com e para um repensar de suas práticas letivas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Aprendizagem Profissional; Tarefas Formativas; Números e Álgebra.

Introdução

Atualmente contamos com diversas resultados de pesquisas na formação de professores que ensinam matemática (Fiorentini, Passos & Lima, 2016; Ponte, 2014; Ribeiro & Ponte, 2019; Ribeiro & Ponte, 2020; Trevisan, Ribeiro & Ponte, 2020; Aguiar, Ribeiro & Ponte, 2021; Stahnke, Schueler & Roesken-Winter, 2016), sem que, com isso, possamos afirmar que tudo está resolvido. Pelo contrário, há ainda lacunas a serem investigadas por meio de estudos que priorizem a prática do professor como elemento fundante de sua aprendizagem profissional

(Lampert, 2010), assim como, outras que busquem problematizar essa prática como ponto de partida para se compreender o que os professores conhecem, como eles conhecem e para que eles conhecem (Fiorentini, 2013; Ponte & Chapman, 2008).

Fundamentado neste cenário, a proposta de minicurso que será ministrado é a de *explorar e vivenciar potencialidades do uso de tarefas formativas para a aprendizagem profissional do professor para o ensino de números e álgebra na escola básica*. Para tal, o design e a abordagem de ensino que serão utilizadas no minicurso estão subsidiadas no modelo PLOT[1] (Ribeiro & Ponte, 2020) que estamos a desenvolver – e que será apresentado na sequência.

Enquadramento teórico

A aprendizagem profissional do professor tem sido estudada, discutida e investigada há um longo tempo (Opfer & Pedder, 2011), sendo um de seus mais importantes resultados a perspectiva de que aprendizagem profissional de professores deve estar fortemente ancorada na prática da sala de aula (Ball & Cohen, 1999; Lampert, 2010; Smith, 2001) e, ainda, ser facilitadora de uma "aprendizagem profissional autêntica" (Webster-Wright, 2009).

Webster-Wright (2009) nos lembra que a formação inicial na universidade é apenas a primeira fase do processo de aprendizagem da vida profissional de muitos trabalhadores e aponta que a eficácia dessa aprendizagem ocorre ao longo de muitos anos e no contexto da prática profissional. Essa visão holística sobre a aprendizagem profissional do professor é também sustentada por Opfer e Pedder (2011), autores que defendem a análise da aprendizagem profissional docente como um sistema complexo, e não como episódico. Os autores ressaltam que o desenvolvimento profissional do professor (DP) não vem se beneficiando como poderia, por uma falta de eficácia entre este, o DP, e as atividades de aprendizagem profissional do professor.

Opfer e Pedder (2011) destacam que uma possível falha esteja em não se considerar que a aprendizagem profissional docente deve levar em conta, de forma simultânea e articulada, o professor, a escola (o contexto) e as atividades e/ou tarefas de aprendizagem. Uma formação que considere essa aprendizagem de forma ativa e contínua, segundo os autores, deve estar pautada nessa tríade.

Tomando-se tal perspectiva, chamamos a atenção para a importância de se elaborar e desenvolver oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) aos professores que tomem o ambiente da sala de aula como base para construir tais OAP. Com isso, segundo nos apontam Bruce et al. (2010), podemos fazer com os professores se envolvam com o "uso de ciclos interativos de planejamento, desenvolvimento e reflexão [de aulas]" e que isso possibilite "conhecer como essas oportunidades de aprendizagem impactam para a eficiência dos professores e desempenho dos alunos" (p. 1599).

A noção de "oportunidades de aprendizagem" já vem sendo investigada há algum tempo no que refere aos estudantes do ensino básico (Heyd-Metzuyanim, Tabach, & Nachlieli, 2016).

[1] Optamos por manter o acrônimo PLOT da designação em inglês (*Professional Learning Opportunities for Teachers*) por entendemos que a sonoridade da pronúncia, mesmo em português, nos parece agradável.

No entanto, na formação de professores, a busca por se compreender como se constituem oportunidades para o professor aprender é bastante recente e tem tido como foco, prioritariamente, a formação inicial (Tatto & Senk, 2011).

Tão importante quanto compreender o que são e como se constituem as oportunidades para o professor aprender, é entender como os professores aprendem. Neste projeto, entende-se que a aprendizagem do professor se situa em sua prática diária, incluindo-se aí os momentos de sala de aula, mas também de planejamento, avaliação e colaboração com colegas e outros (Davis & Krajcik, 2005). Há também que se considerar que a aprendizagem do professor está distribuída entre indivíduos, bem como em artefatos, como o caso de tarefas preparadas para sua formação (Putnam & Borko, 2000).

Para se estudar a aprendizagem do professor, por exemplo em processos formativos, alguns autores apontam que é necessário organizar o design deste processo com tal finalidade (Davis & Krajcik, 2005; Fuentes & Ma, 2018). Tomando-se tal premissa, temos desenvolvido um modelo, que denominamos "*Oportunidades de Aprendizagem do Professor*" (Ribeiro & Ponte, 2020), o qual se constitui como um modelo teórico-metodológico voltado a (i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) gerar oportunidades para os professores aprenderem durante esses processos formativos. O modelo PLOT é constituído por três domínios: (a) Papel e Ações do Formador (PAF), (b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), e (c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP). As características dos diferentes componentes de cada domínio serão apresentadas e discutidas a seguir.

Ainda que a literatura acerca das pesquisas em formação de professores de maneira geral, e na área da Educação Matemática de maneira específica, demonstrem que a comunidade de pesquisadores já vem estudando os três domínios que compõem o modelo PLOT, percebemos que isso não ocorria de forma articulada. Ou seja, não se busca compreender como o formador, as tarefas e as discussões coletivas poderiam, em conjunto, gerar oportunidades de aprendizagem aos professores. Entendemos que, com o modelo PLOT buscamos romper com uma lógica linear e compartimentalizada de se conceber os processos de formação que objetivam propiciar aprendizagem ao professor (Goldsmith, Doerr, & Lewis, 2014), adotando-se então, uma perspectiva interativa e interconectada (Clarke & Hollingsworth, 2002) que considera os três domínios em conjunto, contribuindo assim, para se gerar oportunidades de aprendizagem ao professor (OAP).

Com isso, ao considerar, de maneira interativa e interconectada em um único sistema os três diferentes domínios que compõem o modelo PLOT (Figura 1), busca-se articular estes três domínios na perspectiva de se conceber uma ferramenta teórico-metodológica que permita organizar e concretizar processos formativos que fomentem oportunidades para a aprendizagem de professores que ensinam matemática.

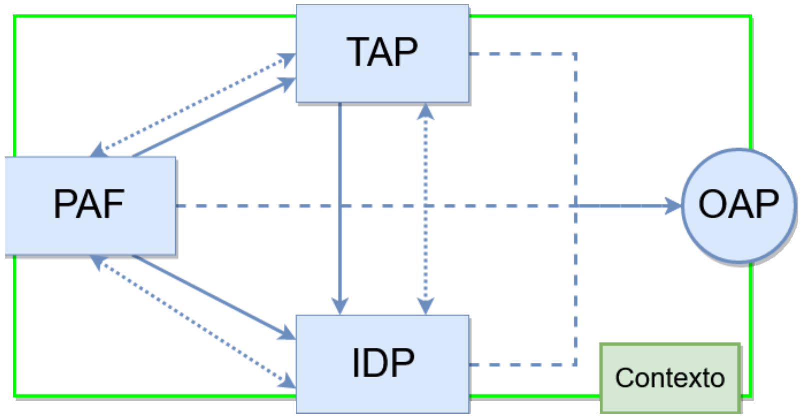


Figura 1: Modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020, p. 4)

No modelo que propomos, os três domínios são ligados por setas (contínuas, pontilhadas e tracejadas) as quais correspondem aos momentos de elaboração, desenvolvimento e concretização das OAP, respectivamente. O Contexto, por sua vez, está intimamente relacionado à perspectiva de aprendizagem que adotamos em nossos estudos. Os três domínios que constituem o modelo PLOT contemplam, cada um, quatro diferentes componentes que explicamos a seguir:

a. O domínio "*Papel e das Ações do Formador – PAF)*": aproximação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar (Elias, Ribeiro & Savioli, 2020; Kilpatrick, 2019; Wasserman, 2018); articulação entre a matemática e a didática no e para o ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008); gestão do espaço de formação, com base em um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório (Jaworski & Huang, 2014; Ponte & Quaresma, 2016); orquestração de discussões didáticas e matemáticas ao se pensar a aprendizagem do professor (Stein et al., 2008; Borko, Jacobs, Seago & Mangram, 2014).

b) O domínio *"Tarefas de Aprendizagem Profissional – TAP*": conhecimento profissional do professor no que refere às tarefas matemáticas que são propostas aos estudantes (Silver et al., 2007); ensino exploratório como um ambiente de ensino-aprendizagem que favoreça a exploração e a investigação matemática (Ponte & Quaresma, 2016; Jaworski & Huang, 2014); tarefas matemáticas de alto nível cognitivo para os estudantes (Boston & Smith, 2009) como ferramenta para que os professores explorarem a matemática envolvida nestas tarefas; registros de prática (Ball, Ben-Peretz & Cohen, 2014) como ferramentas para que os professores explorarem a didática envolvida no uso das tarefas matemáticas. Como registros de prática podemos, por exemplo, utilizar vídeos de aulas, resoluções de alunos, entre outros (Beilstein, Perry & Bates, 2017).

c) O domínio "*Interações Discursivas entre os Participantes – IDP*": discussões matemáticas e didáticas promovidas como um meio para favorecer aprendizagem profissional aos professores (Heyd-Metzuyanim, Tabach & Nachlieli, 2016; Ponte & Quaresma 2016); argumentação e justificação (Jeannotte & Kieran, 2017; Mata-Pereira & Ponte, 2017) sendo exploradas ao discutir tarefas matemáticas a serem utilizadas com os estudantes; linguagem mobilizada, seja linguagem matemática ou didática, mas que sejam utilizadas de forma correta e adequada ao nível de ensino dos estudantes (Adler & Ronda, 2014; Radford & Barwell, 2016); comunicação dialógica como uma importante maneira pela qual os professores se comuniquem seus estudantes, assim como os estudantes se comuniquem entre eles (Nemirovsky, Dimattia, Ribeiro & Lara-Meloy, 2005; Craig & Morgan, 2015).

Desenvolvimento do minicurso

Considerando a proposta do presente minicurso, a saber – *explorar e vivenciar as potencialidades do uso de tarefas formativas para a aprendizagem profissional do professor para o ensino de números e álgebra na escola básica* – serão propiciadas aos participantes a vivência de Oportunidades de Aprendizagem Profissional (Ribeiro & Ponte, 2019) fundamentadas em tarefas formativas abordando conceitos de números e álgebra com vistas ao ensino desses conceitos na escola básica. Por meio da exploração e realização de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (Ball & Cohen, 1999), desenvolvida em um ambiente de ensino exploratório (Ponte & Quaresma, 2016), pretende-se mobilizar, de forma articulada, as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional do professor (Ball, Thames & Phelps, 2008). Vale destacar que, levando-se em conta a abordagem de ensino exploratório, a TAP será desenvolvida em quatro momentos: (1º) abertura/apresentação da TAP pelo formador; (2º) trabalho autônomo dos participantes, a ser realizado em pequenos grupos; (3º) discussão coletiva da TAP pelos participantes; (4º) sistematização das OAP pelo formador.

Considerações finais

Ao se utilizar uma TAP tematizando conceitos de números e álgebra, assim como ao se adotar um ambiente de ensino exploratório para a realização desse minicurso, pretende-se que, ao final, os participantes tenham vivenciado uma proposta/abordagem de ensino que os leve a repensar a sua prática letiva nas aulas de matemática da escola básica, especialmente no que refere ao ensino de números e álgebra.

Supõe-se que tal resultado isso possa ser alcançado, ao menos, em três direções: (i) como o uso de tarefas matemáticas potencialmente desafiadores podem ser utilizadas nas aulas de matemática da escola básica para explorar e aprofundar conhecimentos dos alunos no que refere aos números e álgebra (p.e. relações entre os números e suas propriedades e o pensamento algébrico); (ii) a importância de se considerar as respostas dos estudantes da escola básica como uma possibilidade de reflexão sobre suas aulas e o desenvolvimento profissional dos professores; (iii) o quanto o ambiente exploratório, em especial o momento das discussões coletivas, são significativos para a aprendizagem profissional do professor, assim como, para a aprendizagem de seus alunos acerca da matemática.

Referências e bibliografia

Adler, J., & Ronda, E. (2014). An analytical framework for describing teachers' mathematics discourse in instruction. Proceedings of PME 38 and PME-NA 36(2), 9–16.

Aguiar, M., Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2021). Conhecimento Matemático e Didático de Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática. *Boletim de Educação Matemática. BOLEMA,* 35, 794- 814.

Ball, D. L., Ben-Peretz, M. & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, 62(3), 317-335.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), Teaching as the learning profession: *Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Beilstein, O. B., Perry, M. & Bates, M. S. (2017). Prompting meaningful analysis from pre-service teachers using elementary mathematics video vignettes. *Teaching and Teacher Education*, 63, 285-295, http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2017.01.005

Borko, H., Jacobs, J., Seago, N. & Mangram, C. (2014). Facilitating video-based professional development: Planning and orchestrating productive discussions. In Li et al. (Eds.). Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices (pp. 259-281). DOI 10.1007/978-3-319-04993-9_.

Boston, M. & Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: Increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 119–156.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L. & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education*, 26, 1598-1608.

Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 8, 947–967.

Craig, T. & Morgan, C. (2015). Language and communication in mathematics education. In S. J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, 529-533. DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_53

Davis, E. A. & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3–14.

Elias, H. R., Ribeiro, A. J. & Savioli, A. M. P. (2020). Epistemological Matrix of Rational Number: a Look at the Different Meanings of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09965-4

Fiorentini, D. (2013). Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. *Sisyphus: Journal of Education,* 1 (3). 152-181.

Fiorentini, D.; Passos, C. L. B.; Lima, R. C. R. (2016) Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: Período 2001 a 2012. Campinas: FE-Unicamp, v. 1, 488p.

Fuentes, S. Q. & Ma, J. (2018). Promoting teacher learning: A framework for evaluating the educative features of mathematics curriculum materials. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(4), 351-382. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9366-2

Goldsmith, L. T., Doerr, H. M. & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 5–36.

Heyd-Metzuyanim, E.; Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: Between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 547-574.

Jaworski, B. & Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: Key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 46(2), 173-188. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0574-2

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kilpatrick, J. (2019). A double discontinuity and a triple approach: Felix Klein's perspective on mathematics teacher education. In H.-G. Weigand et al. (Eds.), The legacy of Felix Klein, ICME-13 Monographs (pp. 215-225). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_15

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, 61(1-2) 21–34.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.

Nemirovsky, R.; Dimattia, C.; Ribeiro, B. & Lara-Meloy, T. (2005). Talking about teacher episodes. Journal of *Mathematics Teacher Education*, 8, 363-392.

Opfer, V. D. & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research. Sage*, 81, 376-407.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. D. English. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Second Edition. Routledge. (pp. 225-263).

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: Ponte, J. P. (org.). Práticas profissionais dos professores de matemática. Lisboa: IE/UL, p. 343-358.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51-66.

Putnam, R. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4–15.

Radford, L. & Barwell R. (2016). Language in Mathematics Education Research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds) The second handbook of research on the psychology of mathematics education. Rotterdam: Sense.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education program about the concept of function. *Acta Scientiae*, 21, 49-74. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetike*, 28, e020027. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Silver, E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, Y. C. & Sealy, J. T. (2007) Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 261-277. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9039-7

Smith, M. S. (2001). Practice-based professional development for teachers of mathematics. Reston, VA: NCTM.

Stahnke, R.; Schueler, S.; Roesk-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, Heidelberg, 48(1), n. 1, 1-27.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Tatto, M. T. & Senk, S. (2011). The mathematics education of future primary and secondary teachers: Methods and findings from the teacher education and development study in mathematics. Journal of Teacher Education, 62(2) 121–137. https://doi.org/10.1177/0022487110391807

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. D. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. International Electronic *Journal of Mathematics Education,* 15(2), em0563. https://doi.org/10.29333/iejme/6256

Wasserman, N. (2018). Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers. Cham: Springer

.

Webster-Wright, A. (2009) Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research*, 79, 702-739. https://doi.org/10.3102/0034654308330970

Increasing Opportunities for Students in Mathematics

Kevin **Dykema**
President, National Council of Teachers of Mathematics
Mathematics Teacher, Mattawan Middle School
USA
kdykema@nctm.org

Abstract

In the US, we are examining policies, processes and practices to increase student opportunities during and after their compulsory education is completed? What can we do to help our students see themselves as capable of learning mathematics? Let's examine the critical conversations that need to occur in order to provide an equitable mathematics experience for all our students. These conversations must help all stakeholders identify the purposes of learning math, consider the existing structures, and decide what should be changed; examine how to equitably teach mathematics; and develop strategies to help develop a deep understanding of mathematics. While recognizing that different settings have their own unique characteristics, we must all examine what we can do to help students better learn mathematics and increase their opportunities in the world around them.

Keywords: Mathematics education: Detracking: Instructional Practices: Sense-making: Systemic Change

Change must occur in mathematics education in order to continually increase opportunities for all students. Too many times and for too long, we have seen that not every student experiences success in math. These learning experiences change how students see themselves, their mathematical and scholarly abilities, and their opportunities. We must make the necessary changes to improve mathematics education.

Too often, our instruction focuses on covering content and filters students into courses that group historically marginalized students together rather than on practices that nurture students' positive mathematical identities and promote deep understanding of concepts. As a result, students who enter school with an interest in mathematics often leave with no desire to continue learning mathematics. Often, an overwhelming majority of students leave high school feeling incapable of learning mathematics.

In order to truly effect change and increase opportunities for students, the goal of learning mathematics must be analyzed and agreed upon because varying goals will lead to drastically different experiences for students. New structures and pedagogical practices are needed, for example, if our common focus is to change from merely getting correct answers to making sense of the concept and being able to explain one's reasoning.

The goal of learning mathematics depends on what one sees as the purpose of learning mathematics. Often people view learning mathematics as a step to getting a well-paying job. While this is a good reason, it should not be the only one. Career preparation seems so far in the future to many early adolescents and certainly to many elementary students. At different times through the history of the United States, as well as in other countries, learning more mathematics and science is advocated for to keep one's nation safe and secure, both physically as well as economically (Tate, 2013). Again, these are not bad reasons to learn mathematics, but there should be more.

We should also want a society that is math literate and can understand and critique the world. Mathematics is incorporated in so many areas of daily life, including transportation systems, medicine, finance, and the ever-growing use of "big data" (NRC, 2011). Individuals should be able to look at data and determine the validity of conclusions that are reached. They should be able to look at graphical representations of data and identify any misleading features that often lead to incorrect conclusions.

There has been increased attention on data science in the United States, especially at the high school level. While there is much work to be done, conversations are occurring throughout the nation on defining what data science should look like, who should teach it, and what mathematics needs to be in the course in order for it to replace a high school mathematics course. There are several free open-source curricula that are available for high schools to utilize when offering a data science course. As states continue to examine high school graduation requirements, data science is playing an ever-increasing role.

One of the challenges facing data science is the perception among some that this is a course for those unable to do well in calculus. Attention must continue to be paid to elevate data science as a pathway equivalent to calculus in rigor and comparable in positioning for future STEM opportunities. In fact, for many students, a course in data science might be far more applicable to their lives and future careers than a calculus course. A second challenge facing schools is who should teach it. Because data science is an integration of several content areas, including mathematics and computer programming, it can be difficult to find someone who is certified and has the necessary background to teach such a course. The need for teacher professional development is evident in order to successfully incorporate data science into K-12 schools.

Having students appreciate the joy, wonder, and beauty of mathematics is another reason to study it. When they begin to see mathematics in this way and realize it is truly in the world around them, it can often motivate students to continue learning, which results in increased opportunities after high school. For example, examining symmetry through looking at butterflies, recognizing the Fibonacci sequence in the shells of snails, or finding patterns in the properties of exponents rather than merely memorizing them often leads to increased motivation.

Students need the opportunity to play with the mathematics around them. Su (2017) suggests that play is a desire that can lead people to flourish. Su asserts that –

> Mathematical play builds virtues that enable us to flourish in every area of our lives. For instance, math play builds hopefulness—when you sit with a puzzle long enough, you are exercising hope that you will eventually solve it. Math play builds community—when you share in the delight of working on a problem with another human being. And math play builds perseverance … math investigations make us more fit for the next problem, whatever that is, even if we don't solve the current problem. (pp. 485–486)

Students may begin their formal education with a sense of looking for the joy in mathematics. But far too often, that joy is squashed through the use of ability groups in the elementary grades and then by tracking in the middle and high school years. Teachers and schools begin the process of sorting students by perceived ability and readiness to learn into homogeneous groups. Unfortunately, these different groups receive drastically different mathematics education experiences. Those who are perceived to be struggling are frequently taught mathematics by memorization and are presented with "tricks" to help them remember how to successfully perform a procedure that results in a correct answer, which can limit their opportunities later on. But those who are perceived to be advanced are presented with rich problem-solving activities and are encouraged to make sense of the mathematics rather than merely memorizing what to do. This inequity in teaching leads to drastically different outcomes with those placed in less rigorous curriculum having lower achievement in mathematics (Stein, et al. 2011).

The pandemic has exacerbated these issues in the US. During the pandemic, different students had vastly different opportunities to learn. Some were from homes where a caregiver could devote much time to ensuring their student was actively participating in the educational services being provided. But in other situations in the same school or same district, a student may have had limited internet connectivity or didn't have a caregiver able to devote the time to closely monitor the educational progress. As students return to in-person schooling, they were often sorted based on their opportunities to learn, not on their actual abilities.

This same issue of sorting is true in middle and high school as well. But now, students become even more locked in as they are tracked into different classes rather than sorted into different groups within the same room. With this tracking, not only do students receive drastically different methods of instruction, but they are also presented with often drastically different material. Students in higher tracks have exposure to many topics that those in lower tracks will never have, which leads to significantly different opportunities for students in post-secondary settings.

Even in settings that utilize limited ability groups or don't sort students into different tracks, there is work to be done. Too often we mentally label students as "low" or "high" based on an observation or an assessment; and, as with ability grouping, these labels can lead to drastically different methods of instructional support for students. Additionally, this labeling is based on our perceptions, which are often inaccurate. When based on the results of a single assessment, we don't gain the full perspective of that student's performance as there could be a wide range of reasons why that score doesn't accurately reflect their ability. For example, a student could be in the middle of a family crisis which affected their performance on that assessment on that given day.

It's not just students who are sorted and tracked, but their teachers as well. For far too long and far too frequently, in the US high school teachers who are deemed to be effective are given the upper-level mathematics classes to teach while those who are new to the profession and don't have a wide range of experience are given the lower-level courses. Recent data indicates that 70 percent of teachers were tracked by course level, course track, or both (Nirode and Boyd, 2023). Oftentimes the students with the greatest instructional needs are given the teachers with the least experience or those who need the most additional support to be effective. More balanced teaching assignments could lead to reduced burnout by earlier career teachers, a deeper understanding of curriculum, and increased collaboration among teachers.

Along with considering how students are grouped, it is vital to examine the instructional practices used within the mathematics classroom. In too many classrooms, the teacher stands in front and delivers step-by-step directions that students are expected to memorize and then do a set of practice problems. This memorization of steps without meaning does not have longevity and is an unproductive success at best and a destructive practice at worst.

Much more attention must be paid to focus on student aspirations and interests to help them believe they are capable as doers and users of mathematics in order to increase opportunities in life.

In Principles to Actions, the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) provides eight research-informed Mathematics Teaching Practices (NCTM, 2014). No matter the set of standards being taught, these instructional practices provide the essential elements to help all students learn to become mathematical thinkers and be better prepared for any academic career or professional path they may choose. Key to these practices is having students develop a deep understanding of the mathematical content through dialogue. Students must be communicating with each other, and hearing the reasoning and explanations of others as they develop a conceptual understanding of the material. This conceptual understanding then leads to the development of procedural fluency (Smith, Steele, Raith, 2017).

During the pandemic, in many locations, mathematics education changed dramatically. Progress toward classrooms where understanding was emphasized was unfortunately halted. Many teachers, for very legitimate reasons, were forced to change their practices from student-centered classrooms to classrooms that reverted back to providing algorithms for students to mimic on a set of practice problems. As a result of these changes, the scores on the US National Assessment of Educational Progress (NAEP) in 2022 dropped dramatically. While most were not surprised by this drop, schools must carefully examine how they react.

This drop in scores, coupled with perceived and often real gaps in student understanding, has resulted in more students needing extra support to be successful than before the pandemic. Schools and teachers must resist the urge to stop teaching current content and spend days doing large portions of material from earlier grades, or students will never be provided the opportunities to fully catch up. Instead, educators and educational systems must provide support by building on the strengths of students, and filling in some of the perceived missing pieces within the context students are learning.

Educators must also pay attention to the development of their students' mathematical identities. Aguirre, Mayfield-Ingram, and Martin (2014) define mathematical identity as "the dispositions and deeply held beliefs that students develop about their ability to participate and perform effectively in mathematical contexts and to use mathematics in powerful ways across the contexts of their lives" (p. 14). Now, more than ever, educators must focus on student reasoning and sense making of the mathematics. Doing so aids in students developing a positive identity as being capable of learning mathematics and better allows them opportunities to be successful in whatever academic career or professional path they may choose. Our society depends on people who are able to think deeply, justify reasoning by explaining their thinking, and address issues using mathematics.

The time is now to examine the policies and structures in place in order to increase the opportunities for success for our students. We must continually work towards a more just, equitable, and inclusive mathematics education system for all students. This includes challenging our own beliefs about what each student can learn and do, about what mathematics is important for students to learn, and about how mathematics should be taught. We must engage in the collegial and challenging conversations and in sustained efforts on multiple levels to engage all stakeholders in the mathematics education in the work of improving learning experiences and outcomes for each and every student.

References and Bibliography

Aguirre, Julia, Karen Mayfield-Ingram, and Danny Martin. (2013). *The Impact of Identity in K–8 Mathematics: Rethinking Equity-based Practices*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: NCTM.

National Research Council (NRC). (2011). *Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century.* Washington, D.C.: National Academies Press.

Nirode, Wayne, Brian Boyd. (2023). The Prevalence of Teacher Tracking in High School Mathematics Departments. *Journal of Research in Mathematics Education.* 54 (1), 7-23.

Smith, Margaret S., Michael D. Steele, and Mary Lynn Raith. (2017). *Taking Action: Implementing Effective Mathematics Teaching Practices*. Reston, VA: NCTM.

Stein, Mary Kay, Julia Heath Kaufman, Milan Sherman, and Amy F. Hillen. (2011). A Challenge at the Crossroads of Policy and Practice. *Review of Educational Research*, 81(4), 453–492.

Su, Francis E. (2017). Mathematics for Human Flourishing. *The American Mathematical Monthly*, 124 (6), 483–93.

Tate, William F. (2013). Race, Retrenchment, and the Reform of School Mathematics. In *Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers*, 2nd ed., edited by Eric Gutstein and Bob Peterson, pp. 42–51. Milwaukee, Wisc.: Rethinking Schools.

¿Evalúas lo que enseñas? ¿Enseñas lo que evalúas? Algunas reflexiones y pautas para la evaluación en matemáticas

José María **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

Resumen

Un aspecto fundamental para el aprendizaje matemático es la evaluación. Entendemos la evaluación como un elemento del proceso de enseñanza y aprendizaje. Para conseguirlo, debe realizarse en diversos momentos del proceso formativo y de diversas formas. El portafolios de aprendizaje puede ayudar, con rúbricas de valoración adecuadas para favorecer el aprendizaje del estudiante. La evaluación es algo que hacemos constantemente en nuestra vida cotidiana, en diversos momentos y con diferentes objetivos. Esa evaluación en situaciones reales permite reflexionar sobre la evaluación en matemáticas, su objetivo dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, momentos, posibilidades y forma de hacerlo, y la necesidad de rúbricas para valorarla. Ejemplos reales de experiencias de aprendizaje en matemáticas que incluyen la evaluación pueden permitir concretizar esas reflexiones. Finalmente, se darán pautas para realizar una adecuada evaluación en matemáticas.

Palabras clave: Educación Matemática; Evaluación en Matemáticas; Objetivos de aprendizaje; Criterios de evaluación; Proceso de enseñanza y aprendizaje; Rúbricas.

Mi café

Me gusta el café. Me gusta tomar un buen café. Un buen café para mí es un café fuerte, muy caliente, con poco azúcar y con unas gotas de leche.

Lo tomaría a todas horas, pero no puedo tomar más de 1 o 2 cafés al día. Por eso, busco tomarlo en el momento y lugar más adecuado para que cumpla mis cuatro condiciones y poder disfrutarlo. Solo cuando lo consigo, me dispongo a tomar mi café. A veces tengo que hacer ajustes para que realmente sea un buen café, quizás calentarlo más, quizás añadir un poco más de azúcar o quizás echar algunas gotas más de leche. Ya, después, disfruto mi café y podré valorar si realmente es un buen café. Y si, además, lo hago en un lugar agradable, en compañía de amigos y con una buena conversación, no solo será un buen café, sino que será un auténtico buen café.

Me doy cuenta de que un buen café para mí puede que no sea un buen café para otros. A algunas personas les gusta, por ejemplo, café con leche, café americano, capuchino o café solo; que esté templado, frío o con hielo; que tenga mucha azúcar o que no tenga azúcar; con leche fría o sin leche. U otras muchas posibilidades. Cada persona tiene una concepción diferente de qué es un buen café. Y, en cada caso, los criterios o expectativas iniciales, el desarrollo y la valoración final pueden ser diferentes. Pero, el proceso, parece similar.

Ese proceso es también similar en muchos aspectos de cada día. Por ejemplo, al preparar una comida, planificar la compra de una casa, contratar un seguro de vida, organizar una salida al cine, analizar la propuesta de un nuevo proyecto o valorar a un nuevo compañero de trabajo. Incluye, inicialmente, considerar el contexto y planificar las expectativas personales que se ajusten a ese contexto; posteriormente, ajustar esa planificación en su desarrollo para que se puedan conseguir los objetivos previstos y, finalmente, valorar si se consiguieron los objetivos previstos. Esos objetivos previstos pueden ser, por ejemplo, disfrutar, aprender, mejorar, compartir, aventurar, explorar, decidir u otras muchas posibilidades. Se trata de un proceso individualizado en cada contexto. Esto, no siempre se hace de forma explícita ni detallada, pero, en cualquier caso, pasa por esos tres pasos: antes, durante y después. Como mi buen café.

Me doy cuenta de que ese proceso también es similar al que realizo en mis clases de Matemáticas. Inicialmente, considero el contexto y planifico los objetivos de aprendizaje en ese contexto, los criterios de evaluación que permitirán conocer si se consiguen esos objetivos y la forma de llevarlo al aula para poder conseguirlos. Posteriormente, al llevar esa planificación al aula, hay que valorar si el desarrollo es adecuado o hay que hacer ajustes. Finalmente, los criterios de evaluación permitirán conocer si se consiguieron los objetivos previstos. Antes, durante y después.

Reflexión 1:

1. Observa 3 situaciones de tu vida normal en las que hoy hayas evaluado.

2. Elige una de ellas y detalla:
   - Contexto, expectativas personales y objetivos previstos enmarcados en ese contexto, y planificación para su desarrollo.
   - Desarrollo de esa planificación, con ajustes para que se puedan conseguir las expectativas personales y objetivos previstos.
   - Valoración de si se consiguieron las expectativas personales y objetivos previstos.

Caracteriza tu percepción de evaluación

Reflexión 2:

1. ¿Qué entiendes por evaluación en Matemáticas? Escríbelo con tus palabras.

2. Reflexiona sobre ello:
   - ¿Consideras la evaluación antes, durante y después del proceso de enseñanza y aprendizaje? Da ejemplos.
   - ¿Consideras la evaluación como un elemento para favorecer el aprendizaje o, principalmente, para calificar? Da ejemplos.
   - Piensa en algún caso en que hayas utilizado la evaluación como castigo (por ejemplo, "si no os comportáis, os doy una hoja para hacer un examen") o como premio ("el que consiga hacerlo, se añade un punto a la calificación final").

Antes del proceso. La evaluación entendida como un elemento del proceso de enseñanza y aprendizaje

La evaluación es una parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje que no se puede considerar de forma aislada (más detalle, Chamoso, Cáceres y Cárdenas, 2022). Para ello, inicialmente, se deben definir los objetivos de aprendizaje, de forma clara y precisa, y los criterios de evaluación, que se deben corresponder con los objetivos de aprendizaje, para valorar cuándo esos objetivos se consiguen. A la vez, en función de esos objetivos, se diseña la metodología, es decir, la forma de trabajarlo en el aula para conseguirlos y que incluye las tareas de aprendizaje.

Realizar la evaluación conjuntamente con el aprendizaje permite conocer los avances y deficiencias, descubrir posibilidades para mejorar, y aprender más y mejor. En definitiva, disfrutar del aprendizaje. Se trata de una evaluación formativa, reguladora, donde el alumno entienda que es algo que debe hacer para aprender. Debe ser compartida por el profesor y el alumno, pero también por el centro y otros profesores. No hay que olvidar que un proceso de evaluación formativa suele conllevar un proceso final de evaluación sumativa de certificación, que también puede estar al servicio del aprendizaje si proporciona información útil para el futuro. La evaluación formativa puede coincidir con una evaluación continua si se hace con fines regulatorios para aprender y mejorar; en otro caso, esa evaluación continua sería únicamente sumativa y de certificación (Morales y Fernández, 2022).

Esa evaluación formativa puede considerar diversos aspectos como, por ejemplo, el trabajo diario, la participación, las presentaciones orales, el razonamiento, la creatividad, la actitud o el esfuerzo, pero nunca hay que olvidar que el objetivo es el aprendizaje, un aprendizaje que no solo debe incluir aspectos de conocimiento del contenido. Para ello, una propuesta es utilizar el portafolios de aprendizaje ya que se centra más en el proceso que en el resultado final (más detalle, ver Chamoso, Cáceres y Cárdenas, 2022). No se trata de utilizar el portafolios para tener datos y relacionarlos matemáticamente para obtener una calificación final, que sirva para defenderla ante el alumno, sino que esa calificación final se corresponda con la valoración del aprendizaje de cada estudiante (Morales y Fernández, 2022).

La evaluación debería estar al servicio del aprendizaje para mejorar más que para certificar. Para ello se debe tener en cuenta el contexto en que se realice que incluye, por ejemplo, la legislación educativa y los conocimientos previos de los alumnos. En ese contexto, se debe lograr un clima de aula que lo posibilite, en el que se entienda el error como una parte del aprendizaje. Para conseguirlo, hay que favorecer la confianza en el alumnado, su autonomía, su autorregulación y su toma de decisiones personales. Eso solo puede hacerlo un docente reflexivo y crítico.

Los criterios de evaluación deben ser públicos y compartidos al inicio del proceso formativo, lo que puede hacerse por medio de rúbricas u otros instrumentos de valoración. Las rúbricas sirven para clarificar los objetivos de aprendizaje, valorar el nivel de aprendizaje de cada estudiante durante el proceso incluyendo progresos y en qué se puede mejorar y, finalmente, valorar si se consiguen los objetivos previstos. No es sencillo construir una rúbrica adecuada, ni es fácil entenderlas ni aplicarlas. Tampoco tienen el mismo significado para el alumno que para el docente. La forma de utilizarlas puede estar dirigida al proceso, con fines formativos para permitir posibilidades de mejora al servicio de aprendizaje, o al resultado, con fines sumativos para calificar. No es objetivo de este trabajo profundizar en las rúbricas (para hacerlo, por ejemplo, ver Cáceres y Chamoso, 2015).

En ese contexto hay que planificar también la metodología de enseñanza. Debe incluir elementos motivadores que faciliten la creación de ese clima de aula. Por ejemplo, se debe considerar la participación de cada estudiante en sentidos diversos, de forma oral y escrita, fomentando su razonamiento y sentido crítico. Siempre es importante relacionar los nuevos conocimientos con los que ya se tenían y también considerar los materiales y recursos que puedan favorecer el aprendizaje. Para ello hay que utilizar diversos tipos de tareas en diferentes sentidos, en diversos momentos del proceso de enseñanza y aprendizaje, y con diferentes objetivos, atendiendo a la diversidad del alumnado. Tareas ricas que promuevan la capacidad reflexiva y el razonamiento de cada estudiante (por ejemplo, Ahmed, 1987; https://nrich.maths.org/). Parece importante que las tareas se propongan en forma de reto, reto asumible al menos parcialmente y que al menos permita dar unos pasos. También que el estudiante las considere como algo que se hace para aprender, y no como una prueba que hay que superar y que provoque nerviosismo y desasosiego. Además de ello, por un lado, deberían enmarcarse en un contexto real, cercano al estudiante y considerando aspectos del desarrollo sostenible, por ejemplo, y, por otro, mostrando la utilidad y aplicación del conocimiento que se aprende, por ejemplo, con la modelización matemática.

Todo debe estar previamente planificado incluyendo la trayectoria hipotética de aprendizaje, que permite prever y anticiparse a las diversas situaciones que pudieran producirse durante el desarrollo (más detalle, por ejemplo, Gómez y Lupiáñez, 2007).

Ejemplo 1:

En un curso de formación de docentes de matemáticas se considera la reflexión del futuro docente como uno de los objetivos de aprendizaje del mismo. Por tanto, se convierte en uno de los proyectos que cada estudiante debe desarrollar. La rúbrica de valoración se presenta al inicio del curso.

Para completarlo, cada estudiante debe incluir su reflexión semanal sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado.

Como formación, se dedica una sesión de aula para ayudar a realizarlo y, en otras sesiones, se revisan los avances realizados (más detalle, Chamoso y Cáceres, 2009).

La reflexión durante el proceso

A pesar de que todo debe estar previamente planificado, durante el desarrollo nunca se sabe hacia dónde se dirigirá el aprendizaje. Siempre hay que realizar ajustes y atender a los imprevistos que surjan. Para ello, es importante la reflexión del docente, que permitirá realizar esos ajustes atendiendo a los objetivos previstos, y con criterios de aprendizaje claros y compartidos.

Pero también se debe tener en cuenta la reflexión del estudiante sobre su aprendizaje. El docente debe facilitar esa reflexión, que es algo diferente a dar recetas o señalar el camino que se debe seguir. Puede hacerse de muchas formas y en diferentes sentidos, pero, en cualquier caso, debe entenderse que se trata de mejorar y aprender, no de calificar, y que debe ser con una intervención adecuada, eficaz, puntual y realizada en el momento oportuno. Se debe conceder tiempo al alumno para pensar, rehacer o avanzar en un camino u otro, e incluso, quizás, permitir una nueva entrega del trabajo realizado. Es difícil realizar intervenciones adecuadas, pero, en muchos casos, la mejor forma de hacerlo es con una buena pregunta cuya respuesta interiorice o verbalice el estudiante, dirigida a un único aspecto de comprensión, de manera que ese intercambio aporte alguna luz para avanzar. En cualquier caso, dar información apropiada al alumno suele facilitar su reflexión.

Esa reflexión también puede ser facilitada por los compañeros. La ayuda entre iguales suele ser efectiva porque se traspasa la responsabilidad a los estudiantes, que están en un mismo nivel. También puede ayudar la autoevaluación, es decir, valorar los aspectos positivos y negativos de los propios avances que, además, permite enlazar el nuevo conocimiento con el que se tenía previamente. Puede hacerse de muchas formas, por ejemplo, referido a aspectos específicos de una tarea o, más general, en forma de reflexiones periódicas sobre el aprendizaje.

Lo importante es crear un clima de aula donde se acepte que el punto de vista de cada uno es importante y respetado, aunque discutible. No todo tiene que hacerse necesariamente bien desde el principio porque, lo importante, es el aprendizaje.

Algunas posibilidades:

- Cuando se resuelve un problema, se puede pedir que se lea de nuevo el enunciado y se anoten los datos y lo que piden resolver; o pedir que se diga en voz alta el enunciado del problema utilizando palabras propias.
- Mostrar varios trabajos similares de estudiantes de, por ejemplo, cursos previos (pueden ser correctos, con fallos e incluso incorrectos, cuidando que no se pueda seguir el ejemplo de uno de ellos).
- Verbalizar qué ha hecho un alumno o varios al realizar una exposición o una tarea, reflejando las fortalezas y deficiencias, y la forma de mejorarlo. Por ejemplo, decir dos aspectos positivos y dos que se pueden mejorar. Esto también puede hacerse con el propio trabajo, anotándolo en una hoja de papel para entregar al profesor.
- Realizar rúbricas con los alumnos, por ejemplo, para las presentaciones orales, tareas realizadas o la resolución de un problema para, entre todos, explicar aquellos aspectos positivos y negativos, y decidir los criterios para valorar cuando es más adecuado.
- Cuando un alumno ha terminado una tarea, pedirle que busque a alguien que no haya terminado y que le ayude a completarla.
- Escribir, cada alumno, en qué ha contribuido al trabajo en grupo, en qué lo ha hecho el compañero y cómo lo ha hecho el grupo.
- Ante un proyecto que los estudiantes tienen que entregar y presentar públicamente, hacer la presentación pública con anterioridad a la entrega puede permitir que, la información que proporcionan los compañeros, sugiera ideas que se puedan adaptar para mejorar el propio trabajo final.
- Comparar los cambios del trabajo mejorado de un alumno con el inicial y verbalizar las mejoras y lo que no ha mejorado tanto.

Es obvio que este proceso de reflexión y mejora continua es lento y puede implicar realizar menos tareas, aunque con mayor profundidad. Referido a ello, una tarea no es buena o mala en sí misma, sino que depende de la forma de utilizarla. Es decir, cualquier tarea puede tener una finalidad formativa si proporciona evidencias tanto de los progresos como de las deficiencias en el aprendizaje de cada estudiante de manera que permita tomar decisiones para mejorar los progresos y eliminar o minimizar las deficiencias. Una tarea de ese tipo puede desarrollarse en una sesión de aula, en varias sesiones seguidas o en diversas sesiones aisladas durante varias semanas. Por ejemplo, puede ser una tarea corta que se desarrolla en una sesión en la que se reflexiona sobre los avances para, posteriormente, mejorarla. O una tarea en forma de proyecto que incluya varias entregas parciales, que permita centrarse más en el proceso y en la mejora de los avances que en el resultado final, y donde lo importante no es entregar la tarea sino hacerlo de la mejor forma posible. En cualquier caso, se deberían clarificar los criterios con una rúbrica adecuada.

Ejemplo 2:

En un curso de formación de docentes de matemáticas de Primaria los estudiantes, en grupos, tienen que presentar, oralmente y por escrito, un Proyecto Estadístico (PE) al final del curso. La rúbrica de valoración se presenta al inicio del curso.

Hacia la mitad del curso cada grupo de estudiantes presenta, oralmente y por escrito, sus Avances del Proyecto Estadístico (APE).

En una sesión posterior, cada grupo de estudiantes aplica la rúbrica a su propio APE, Autoevaluación, y aplica la rúbrica a 5 APE desarrollados por sus compañeros, Coevaluación. Las valoraciones de cada APE de cada grupo referidas a Autoevaluación y Coevaluación, y la valoración del profesor, se ponen a disposición de los estudiantes.

Finalmente, esa formación recibida y la reflexión sobre cada APE permite, a cada grupo, mejorar su propio APE en una nueva entrega que es la que se considera para la valoración final (más detalle, ver Cáceres y Chamoso, 2019).

Después del proceso

Después del proceso, los criterios de evaluación deben valorar si se consiguieron los criterios de aprendizaje previstos. Y la influencia que el trabajo del profesor, de los alumnos y del contexto tuvo en ello. También si se podría haber hecho de otra forma. Compartir los resultados con los compañeros, el centro o con compañeros de otros centros, puede permitir recibir sugerencias interesantes porque, cualquier retroalimentación, puede ayudar a reflexionar.

La evaluación del aprendizaje no debe suponer un punto y final sino un punto y seguido porque el aprendizaje es un proceso continuo donde un aprendizaje se enlaza con otro.

Reflexión 3:

1. Explica 3 aspectos que te parecen interesantes de tu evaluación.
2. Explica 3 aspectos que podrían mejorar tu evaluación.
3. Añade 3 aspectos que te gustaría hacer para mejorar tu evaluación pero que no te atreves a llevarlos a cabo.

Comparte tu punto de vista. Siempre es interesante.

Algunas reflexiones finales

Desarrollar la evaluación no es fácil. Cualquier propuesta de mejora, hay que hacerla poco a poco. Cualquier avance, debe ser bienvenido.

Lo importante es utilizar la evaluación para aprender, para mejorar como un proceso compartido. Para ello es fundamental tanto la reflexión crítica sobre el aprendizaje como la confianza en los estudiantes.

Reflexión 4:

1. Un estudiante, en el contenido de sumar fracciones, muestra pocos avances en su aprendizaje en las diversas sesiones de aula pero, al final, demuestra conocimiento de sumar fracciones Si atendemos a la evaluación formativa sobre sus avances, quizás la calificación no sería muy alta pero, si atendemos a su aprendizaje, se ha conseguido el objetivo. ¿Cómo lo valorarías?

2. Comparte tu punto de vista. Siempre es interesante.

También es importante experimentar. Experimenta. Como un buen café. Siempre se aprende.

Experimenta:

Realiza una propuesta de evaluación. Considera el contexto de aprendizaje.

1. Caracteriza los objetivos de aprendizaje (qué se pretende aprender).

2. Caracteriza los criterios de evaluación. Cuida de que se ajusten a los objetivos de aprendizaje (cómo se va a medir el aprendizaje).

3. Diseña la metodología que permita conseguir que cada estudiante alcance los objetivos de aprendizaje. Intenta que en ella se incluya la evaluación para favorecer el aprendizaje y que permita la mejora (cómo se va a hacer).

4. Experiméntalo. No seas ambicioso. Comparte tu experiencia.

Experimenta (detalle):

Por ejemplo, si uno de los objetivos de aprendizaje se refiere a un conocimiento matemático:

1) Considera el contenido matemático que se trate. Identifica los objetivos de aprendizaje, los conceptos y procesos claves de ese contenido. Caracterízalos. No deberían ser más de 4-5, aunque depende del contenido.
2) Diseña los criterios de evaluación para valorar que esos objetivos de aprendizaje, los conceptos y procesos claves, se consiguen con una rúbrica suficientemente precisa que ayude al aprendizaje.
3) Diseña una metodología de aula para conseguir el aprendizaje de esos conceptos y procesos claves.

Referencias y bibliografía

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics*. London: HMSO.

Cáceres, M.J. y Chamoso, J.M. (2015). La Evaluación Sobre la Resolución de Problemas de Matemáticas. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas y A. Caballero, *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 225-241). Universidad de Extremadura. http://hdl.handle.net/10662/5241

Cáceres, M.J. y Chamoso, J.M. (2019). Influencia de un proceso de autoevaluación, coevaluación y evaluación en la formación de profesores de primaria. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 351-372). Ediciones Universidad Salamanca. https://eusal.es/eusal/catalog/view/978-84-1311-073-8/5054/4212-1

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009): Analysis of the reflections of student- teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25, 1,* 198-206. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.09.007

Chamoso, J.M.; Cáceres, M.J. y Cárdenas, J. (2022): La evaluación en matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp.80-103). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Editorial Universidad de Granada. https://editorial.ugr.es/libro/aportaciones-al-desarrollo-del-curriculo-desde-la-investigacion-en-educacion-matematica_139289/

Gómez, P. y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1*(2), 79-98. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6214

Morales, M. y Fernández, J. (2022). *La evaluación formativa: Estrategias eficaces para regular el aprendizaje*. Editorial SM, Biblioteca Innovación Educativa.

Equidad en Educación Matemática: Experiencias basadas en un enfoque sociocultural

Equity in Mathematics Education: Experiences based on a sociocultural approach

Marta **Civil**
University of Arizona
USA
civil@math.arizona.edu
M. Alejandra **Sorto**
Texas State University
USA
sorto@txstate.edu

Resumen

En esta presentación compartiremos algunas características de nuestro trabajo con profesores, estudiantes y padres y madres de familia en comunidades de origen mexicano en Estados Unidos. Nos centramos en el rol de aspectos culturales y lingüísticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Partiendo de un enfoque que reconoce la riqueza del conocimiento y experiencias de las comunidades con las que trabajamos, primero presentamos el marco teórico basado en el concepto de fondos de conocimiento y compartimos ejemplos de la aplicación de este concepto en el aula de matemáticas. De ahí abordamos las siguientes preguntas: ¿Cómo desarrollar oportunidades para que familias y escuelas compartan experiencias matemáticas? ¿Cuáles son algunas características de una enseñanza de calidad en matemáticas con estudiantes cuya primera lengua no es la lengua de enseñanza en la escuela? Concluimos con implicaciones para investigación, formación de profesorado, y práctica en el aula de matemáticas.

Palabras Clave: Equidad; Prácticas de enseñanza en matemáticas; Fondos de conocimiento; Aspectos culturales y lingüísticos; Participación de las familias.

Abstract

In this presentation we will share some features of our work with teachers, students, and parents from communities of Mexican origin in the United States. We focus on the role of cultural and linguistic aspects in the teaching and learning of mathematics. Grounded on an approach that acknowledges the richness of knowledge and experiences in the communities with which we work, first we present the theoretical framework based on the concept of funds of knowledge and then we show application of this concept in the mathematics classroom. From there we address the following questions: How to create opportunities for families and schools to share mathematical experiences? What are some of the characteristics of quality mathematics teaching for students whose first language is not the language of instruction in school? We conclude with implications for research, teacher education, and practice in the mathematics classroom.

Keywords: Equity; Mathematics teaching practices; Funds of knowledge; Cultural and linguistic aspects; Family engagement.

Introduction

In this paper we draw on our work in mathematics education with teachers, students, and families from communities primarily of Mexican origin in the United States. Grounded on a sociocultural approach to research, we focus on linguistic and cultural diversity as assets towards the teaching and learning of mathematics. We first present the theoretical framework that guides our work and illustrate how we have applied it to the mathematics classroom. From there we move to the main questions in this paper: 1) how to develop opportunities for an authentic dialogue between home and school centered on mathematical experiences; 2) What are some of the characteristics of quality teaching for students whose first language is not the language of instruction? Throughout the paper we draw on examples from different research projects over the last thirty years. In the conclusion we offer implications for research and practice.

Theoretical Framework

The central concept for our work is that of funds of knowledge (González et al., 2005). The term was originally coined by Vélez-Ibáñez and Greenberg (1992) to refer to the "strategic and cultural resources… that households contain" (p. 313). Moll and colleagues (e.g., Moll, 1992; 2019; Moll et al., 1992) built on this concept to apply it to educational settings in particular in the context of teaching and learning of biliteracy (English-Spanish). When the first author joined the Funds of Knowledge for Teaching Project (FKTP) (see González et al., for a comprehensive description of this project), her focus was on the application of this concept to the teaching and learning of mathematics (e.g., Civil, 2002a; 2007; Civil & Andrade, 2002). The FKTP had three main components: 1) teachers conducted ethnographic visits of some of their students' homes. The point of these visits was for teachers to learn from the experiences and knowledge in the household, so to uncover their funds of knowledge; 2) study group sessions where teachers and university researchers discuss theory and practice related to the community knowledge and debrief the home visits. In these study group sessions is where the development of learning modules takes place; 3) implementation of the learning modules in the classroom. This often involved the presence of parents or other family members as experts on the theme of the module. A fundamental concept that underlies the work in FKTP is the notion of *confianza* (mutual trust) that develops between teachers / researchers and families. As Vélez-Ibáñez and Greenberg write, "*Confianza* is a cultural construct indicating the willingness to engage in generalized reciprocity" (p. 332). The concept of *confianza* is key to the work we have been doing with parents and mathematics that we describe later in this paper.

The main premise behind a funds of knowledge orientation is a rejection of deficit views of minoritized communities. As Moll (2019) writes, "it represents, one could say, an opportunity for teachers, as part and parcel of their pedagogy, to identify and establish the *educational capital* of families often assumed to be lacking any such resources" (p. 132). While the funds of knowledge orientation was developed in the Southwest of the United States, the concept is now been widely used in many places across the world. For example, Moll provides an overview of the application of the funds of knowledge concept in four different countries (Australia, New Zealand, Spain, and Uganda). While there are clear differences among the four projects, as well as with the original FKTP, Moll writes that they all share the goal "to document empirically and represent pedagogically families and students as resourceful and help educators arrange environments that are academically sound and strongly oriented to building on such resources for learning" (p. 137).

This focus on "families and students as resourceful" extends to our orientation when working with students whose home language is different from the language on instruction (in our context English). At the basis of our research in multilingual contexts is a sociocultural perspective of language (Mosckhovich, 2002). This perspective draws attention to the multiple resources that students use to communicate in a mathematics setting, such as using their home language(s), gestures, drawings, tools. Furthermore, this perspective emphasizes the importance of students engaging in discourse practices; that is, students whose home language is different from the language of instruction need to be engage in rich mathematical tasks where they are encouraged to use multiple communicative resources (Moschkovich, 2013). In the next section we present two very brief examples from prior work to illustrate an application of funds of knowledge and of a sociocultural view of language in mathematics contexts.

Some Examples

Over the years, the first author has written about several applications of the funds of knowledge concept in the mathematics classroom. In particular, the garden project (Civil, 2007; Civil & Kahn, 2001) shows the trajectory of going from the teacher learning about the wealth of knowledge about gardening that several of her students' parents had to the development of a garden module largely inspired by the teacher's question, "can rigorous mathematics be developed from household visits?" We capitalize on this question as it reflects some of the tensions encountered in connecting everyday situations and school mathematics (Civil, 2002a; 2002b; 2007; 2016). In the garden module students had to address a real-life problem in which they had to maximize the area of their gardens enclosed with a limited amount of chicken wire. We used this situation to engage in an exploration of area and perimeter, which we further explored by using individual task-based interviews with a small group of students to see what they had taken away from the experience. This approach allowed us to better connect what students may be learning from a funds of knowledge based activity to the required school mathematics curriculum. The work showed the value of students' experiences with their gardens in developing an understanding of area and perimeter. It also allowed us to see possible issues with confusing linear and area units, and how the real-life experiences help but also may bring additional challenges (Civil & Kahn, 2001).

We have been conducting research in settings where many of the students do not have English (the language of instruction) as their home language. We refer to these students as bilingual learners to emphasize the fact that they have knowledge of (at least) two languages, English and Spanish, even though they may not still be considered proficient in English by the school system. Once again this is a non-deficit view of students: instead of labeling them as English learners, we emphasize the fact that they know two (or more) languages. In one of the projects with bilingual learners, the first author worked for a whole school year with a group of students (12-year-olds) and their mathematics teacher. Everybody in the setting (students, the teacher, and the researcher) had Spanish as their home language. But the study took place during a restrictive language policy period by which instruction had to be in English (though Spanish could be used occasionally for clarification and students used Spanish and English in their small groups). In Civil (2011a; 2011b; 2012), we illustrate the difference in richness of mathematical communication when students were allowed to switch from English to Spanish. Not only were the students presenting their work able to explain themselves through multiple resources, but also the other students in the class engaged in lively mathematical discussions challenging what their peers were presenting. Planas and Civil (2013) also draw on data from that same group of students to show how students' participation in the mathematical discussions was enhanced when using Spanish as a resource, "while at the same time experiencing the political dimension of language when, for instance, they switch to English to report their mathematical thinking" (p. 370). As we highlight in Civil and Hunter (2015), at the heart of the work with students from minoritized communities is the need for teacher and researchers to "to learn from and build on the students' cultural ways of being" (p. 308). In our work with this group of students, they had access to their home language, but they also felt free to use social chat and humor as part of their problem-solving discussions. Students often interacted in our problem sessions as they would in a family setting. Hence *confianza* was again key.

Through these two brief examples, we want to highlight that an important aspect of our work is the development of relationships with the communities with whom we work. We learn from them and they learn from us. We seek to establish a two-way dialogue (Civil, 2002a). As part of this process is the concept of parents as intellectual resources (Civil & Andrade, 2003), by which we capitalize on parents' richness of experiences and knowledge and its relevance to school teaching and learning. How can we create opportunities for parents and teachers to share mathematical experiences so that they can each learn together and from each other? We discuss this in the next section.

Parents and Teachers Learning From Each Other

For several years we have been working closely with parents through several mathematics projects, including courses on topics such as whole numbers and fractions, geometry and measurement, data, and algebra (https://mappsua.wordpress.com/). Other components of this work included parents and teachers as co-facilitators of mathematics workshops for other parents, parents and university researchers engaged in "tertulias matemáticas" where we not only explored mathematics, but we also engaged in critical dialogues about mathematics education, and parents and children doing mathematics together (Civil & Bernier, 2006; Quintos et al., 2019). While teachers were involved in some of this work, most of the focus was on parents and researchers. More recently we have been working more closely on how to develop a mathematics dialogue between parents and teachers to strengthen the connection home-school. In what follows we present snippets from two activities in this direction.

Quotes Activity

In this activity parents and teachers read a series of quotes from parents and teachers from prior projects and then they stand by the quote that speaks to them the most for whatever reason; it could be that they agree or disagree with it or that it brings up some kind of reaction. The point of this activity is to have a dialogue between parents and teachers on topics such as different ways to do mathematics, the value of these different ways, the role of memorization. Through this activity we uncover beliefs about teaching and learning mathematics that we all have. For example, one of the quotes reads:

We are teaching division and multiplication, and the children are doing it the way we ask. This Wednesday when we did it, Eliseo said, "my mama did it different." And he went to the board and did it that way, and I said, "yes, but that's in mama's home. Let's do it the way that we do it in the school.

Here is what one mother and one teacher said when they chose to stand by this quote:

> Magali (mother): I identify with this quote because this happened to me with my oldest son. I taught him the way I thought it was right but it seems that no, I feel like I confused him and so this part of "let's do it the way we do it in the school," I think that we need to get involved to see how they teach here so that we can follow up.
>
> Kassandra (teacher): I chose this quote because I guess in my classroom I do have some students who would say "mom and dad taught me this way" and for me, I do have to teach those certain ways but I do encourage them if mom and dad want to teach a different way, then my student has the strategy from school and the one from mom and dad and they can check and make sure that both answers match up.

In this exchange we can see that while the mother defers to the school way and sees it as the parents' responsibility to learn the school way, the teacher sees the values in the parents' way and sees it from a resource perspective, where the child will have more than one way to approach a problem.

In yet another implementation of this activity, Bárbara, a mother reacting to the same quote, said:

> I do not agree with how the teacher [in the quote] handled the situation. I feel like he discredited what the mom had taught. I understand they are ways, rules on how to do things, but it is not right to say "no, we have to do it like I say and not like your mom said." I am in complete disagreement with this.

This mother was visibly upset when commenting on the quote. Here we see issues related to valorization of knowledge and which knowledge (school? home?) gets privileged.

And in another implementation of this same activity, two teachers, reacting to the same quote said:

> Lucy: It is ridiculous. Why would you ever tell a child? Why would you ever discount a child's strategy? I don't care where they get it from. If the child understands it, that's what is important. If they can explain it, better still. And what I am constantly telling my students is: "Here is a way to do it, here is another way to do it, here is another way to do it… choose the one that works for you."
>
> Mercedes: I agree with Lucy. Parents often tell me that they cannot help their children because they didn't learn it this way. And I tell them "it doesn't matter to me; you should help them in any way you can; sometimes they understand it better when you teach them, other times when I teach them."… "So, parents [talking to the mothers in the group in the workshop], if you don't understand me or your child's teachers, help them anyway you can because that way they'll see different ways and they can choose "this works for me" or "this doesn't work for me."

After this exchange a mother shares who she had taught how to do division the way they do it in Mexico (which is different from how it is usually done in the United States), and later on her son came back saying that he had also learned the school way. The mother seemed pleased that her son had two different ways to do division.

This activity is quite powerful as it draws on real quotes from parents and teachers in similar contexts which allows for the participants to related to them and in sharing their thoughts it opens up a dialogue on what they value about the teaching and learning of mathematics.

Parents and Teachers Doing Mathematics Together

In prior work (Civil & Bernier, 2006), one issue of concern was the power differential when parents and teachers were co-facilitating a mathematics workshop. A challenge for us was when the teachers took the leading role with the mathematics content presentation, while the parents were relegated to handing out papers or taking care of the opening ice-breaker activity. How can we bring parents and teachers to explore mathematics together in ways that do not privilege the school knowledge that teachers are likely to bring with them? The choice of task becomes key. We have been working with open ended, modeling type tasks, often grounded in culturally relevant contexts that draw on parents' expertise with the activity. One such example is making paper flowers (Civil et al, 2021; 2022). In this activity the participants are shown a package of tissue paper (for example, one with 24 sheets and each sheet is 20" by 20") and they get to decide how many flowers of different sizes can be made. The task is open ended in that participants can decide if they want different sizes, how to cut and fold the paper, whether they want to have any left-over paper (in one group they thought they could make confetti out the left over to add to the decoration they had in mind). From the point of view of mathematics, usually this task leads to ideas of measurement and fractions (in the folding of the sheets).

What tasks like the paper flower bring up is an opportunity for the participants, parents and teachers, to draw on different kinds of expertise. From a research point of view, they also inform us of what the participants value about doing mathematics. In a sense the question of "what counts as mathematics?" emerges in the discussions and in our analysis. It is worth noting the fluidity of expertise, that is, in these tasks we cannot predict that the teachers "will do the math" while the parents "will do the flowers." In fact, in one of the groups, with two mothers (Isabel and Victoria) and one teacher (Sabina), after they were done with the computations, the following exchange happened:

> Isabel: Ok, we already wrote everything; now let's do the flowers. For that part, I'm not good anymore.
> Victoria shakes her head, agreeing.
> Sabina: it's just a matter of folding them to put the stem and just [gestures to indicate how to get the leaves]

Sabina had made flowers like these before, so for her this part was easier and something that she enjoyed doing. For Isabel, the mathematics part is what attracted her more. Similarly in another implementation of this task, one of the mothers was trying to come up with a general formula that would yield the number of flowers given the number of folds and the number of layers. As she said, "I am more interested in solving the mathematics problems than in making the flower." We do not know the reason for her wanting to come up with a formula, but it reminded us of prior work with a group of mother who wanted to learn algebra as they wanted to gain a better understanding of symbols and formulas often used in algebra (Civil & Andrade, 2003). What do participants view as mathematics? Some of them were very uncomfortable with the open-ended nature of tasks such as the paper flower and the fact that there were many possible answers depending on the assumptions made.

Our work is situated in primarily bilingual communities. When we work with parents only, often the main language used is Spanish; but in the work with parents and teachers, English and Spanish are fluidly used in the interactions. In the classrooms the language situation is largely dependent on the language policy in place as we have mentioned earlier. In the next section, we describe teaching practices used by teachers in bilingual classrooms with students at different levels of English proficiency that attend to language demands while learning mathematics.

Quality of Linguistically Diverse Classrooms

The quality of mathematics education for bilingual students goes beyond good teaching practices identified in monolingual settings (Celedón-Pattichis & Ramirez, 2012). Taking the non-deficit view discussed above, Sorto and Bower (2017) provide an example of a teacher implementing a set of teaching practices in a middle-grade classroom where about a third of the students are bilingual and becoming proficient in English. These practices include the teacher creating a safe intellectual environment where the native language is honored; even differences among the same language are acknowledged and accepted as valid modes of communication. There is recognition or noticing that the meaning of words is fundamental to approaching a mathematical task. Other strategies include the context of the task being based on a real-life situation (comparing prices while shopping), providing a visual representation of the objects, and the use of cognates. These sets of practices are part of a more extensive set outlined by Chval and Chávez (2011) and based on research in this area.

To test the relationship between the implementation of these practices and student learning gains, Sorto et al., (2018) developed an observational rubric that included these practices (see Table 1), analyzed 99 middle-grade lessons from 34 teachers in 11 middle schools from a southern state in the United States, and measured the impact of the use of these practices on students learning gains (difference in mathematical scores from standardized tests from two consecutive years).

Table 1
Observational rubric to measure the quality of linguistically diverse teaching

Segment Codes	Description
Connections of mathematics with students' life experiences and prior knowledge	This code captures instances by which the teacher activates students' prior mathematical knowledge by explicitly referencing skills learned in a previous lesson or grade. This code includes references by the teacher to mathematics found in daily life by students such as money and shopping.
Connections of mathematics with language	Teachers or students connect language (words) with mathematical representations such as pictures, tables, graphs, and mathematical symbols. This code captures the extent to which the teacher reinforces a mathematical representation with its meaning.
Meaning and multiple meanings of words	Teacher or students communicate meaning by using synonyms, gestures, drawings, cognates, or translations to students' first language that supports learning. This code includes reading strategies meant to increase comprehension. Meaning that occurs between students that is correct can adjust the score upward.
Use of visual aids or support	Concrete objects, videos, and illustrations are used by the teacher or students in classroom conversations. Concrete objects may include times tables, formula charts, protractors, 2D models, or dynamic foldables.

Record of written essential ideas and concepts on board	Teacher displays a written record of the lesson's essential ideas and concepts without erasing so students can refer to them throughout the lesson. The score may be adjusted downward if some important/essential information is never recorded.
Discussion of students' mathematical writing	Teacher use students' written work as an instructional tool and point of discussion.

Source: Sorto et al., 2018

Results from this study showed evidence that teachers that tend to use these particular teaching strategies and the general quality of mathematical practices (Hill, 2014) have bilingual students growing academically from the previous year. Furthermore, the impact of the practices is only significant for bilingual students, which indicates that their implementation of them could be one way to close the opportunity gap.

Although these results are promising, they cannot be generalized beyond the population of the teachers and students that participated. To test the validity of the impact of these practices in other contexts, we have extended the geographical scope, grade level, and languages. The new population involves 22 elementary classroom lessons in the southwestern and northeastern states of the United States. Preliminary results from this new study indicate that the rubric (see Table 1) also applies to this population and we hypothesize that these practices will also have an impact on multilingual learners' academic growth.

Conclusion

The central idea in the work presented in this paper is the importance of researchers, teachers, and teacher educators focusing on the richness of mathematical experiences and knowledge that all communities have and in particular, minoritized communities. By providing opportunities for parents and teachers to engage in joint mathematical explorations and conversations, both parents and teachers learn about each other's views about mathematics teaching and learning which can help break down the barriers that often exist between home and school. Furthermore, in exploring mathematics together, parents and teachers learn about different approaches to doing mathematics, thus opening to a broader view of what counts as mathematics. As illustrated in the funds of knowledge work, teachers can collaborate with parents and community members to develop learning activities that build on the students' and their community's knowledge. By having parents and teachers co-facilitate mathematics workshops, the power differential between home and school can be addressed, as parents and teachers bring in their different strengths to the preparation and facilitation of the workshop.

At the center of this work is the concept of *confianza* (mutual trust), which allows for all involved to feel safe to share their ideas. This is key to keep in mind at all levels, as researchers when we work with the community and with teachers; as teacher educators when we work with teachers; and as teachers when we work with students in the classroom. In working with culturally and linguistically diverse communities, this diversity becomes an asset. In the mathematics classroom, this means encouraging students to use their culturally and linguistically grounded ways of interacting and doing mathematics, whether it is their use of their home language(s) or the methods they may have learned at home. Teachers can utilize these assets as resources to be integrated into mathematical tasks and interactions while keeping the quality of instruction high for all students.

Acknowledgments: Grant support

This research was supported by the National Science Foundation grants (DRL-1055067, DRL-2010417, DRL-2010260, DRL-2010230) and by the Heising-Simons Foundation, Grant #2016-065. The views expressed here are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the funding agencies.

References and bibliography

Celedón-Pattichis, S. & Ramirez, N. G. (Eds.). (2012). *Beyond good teaching: Advancing mathematics education for ELLs*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Civil, M. (2002a). Culture and mathematics: A community approach. *Journal of Intercultural Studies*, *23*(2), 133-148. https://doi.org/10.1080/07256860220151050A

Civil, M. (2002b). Everyday mathematics, mathematicians' mathematics, and school mathematics: Can we bring them together? In M. Brenner & J. Moschkovich (Eds.), *Everyday and academic mathematics in the classroom. Journal for Research in Mathematics Education Monograph #11* (pp. 40-62). Reston, VA: NCTM.

Civil, M. (2007). Building on community knowledge: An avenue to equity in mathematics education. In N. Nasir & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 105-117). New York: Teachers College Press.

Civil, M. (2011a). Lessons learned from the Center for the Mathematics Education of Latinos/as: Implications for research with non-dominant, marginalized communities. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Mathematics: Traditions and [new] practices—Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group (MERGA) and of the 23rd biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT*) (pp. 11-24). Alice Springs, Australia.

Civil, M. (2011b). Mathematics education, language policy, and English language learners. In W. F. Tate, K. D. King, & C. Rousseau Anderson (Eds.), *Disrupting tradition: Research and practice pathways in mathematics education* (pp. 77-91). Reston, VA: NCTM.

Civil, M. (2012). Opportunities to Learn in Mathematics Education: Insights from Research with "Non-Dominant" Communities. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th conference of the International*

Civil, M. (2016). STEM learning research through a funds of knowledge lens. *Cultural Studies of Science Education*, *11*(1), 41-59. https://doi.org/10.1007/s11422-014-9648-2

Civil, M. & Andrade, R. (2002). Transitions between home and school mathematics: Rays of hope amidst the passing clouds. In G. de Abreu, A. J. Bishop, & N. C. Presmeg (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practices* (pp. 149-169). Kluwer.

Civil, M. & Andrade, R. (2003). Collaborative practice with parents: The role of the researcher as mediator. In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 153-168). Kluwer.

Civil, M., Been Bennett, A. & Salazar, F. (2021). Learning from mothers as they engage in mathematical modeling. In J. Suh, M. H. Wickstrom, & L. English (Eds), *Exploring mathematical modeling with young learners* (pp. 413- 436). Springer.

Civil, M. & Bernier, E. (2006). Exploring images of parental participation in mathematics education: Challenges and possibilities. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(3), 309-330. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0803_6

Civil, M. & Hunter, R., (2015). Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. *Intercultural Education*, *26*, 296-312. http://dx.doi.org/10.1080/14675986.2015.1071755.

Civil, M, & Kahn, L. (2001). Mathematics instruction developed from a garden theme. *Teaching Children Mathematics, 7*, 400-405.

Civil, M., Quintos, B., Salazar, F., Napp-Avelli, C. & Cardenas Guzman, M. (2022, April). *"Juntos" to support multilingual students' mathematics learning: Bringing families' funds of knowledge into the classroom*. Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), San Diego, CA.

Chval, K. B. & Chávez, O. (2011). Designing math lessons for English language learners. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17*(5), 261 – 265.

González, N., Moll, L. C. & Amanti, C. (Eds.) (2005). *Funds of knowledge: theorizing practice in households, communities, and classrooms*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hill, H. C. (2014). Mathematical quality of instruction (MQI) [Coding tool]. Cambridge, MA: Harvard Graduate School of Education.

Moll, L. C. (1992). Bilingual classroom studies and community analysis: some recent trends. *Educational Researcher*, *21*(2), 20-24. http://dx.doi.org/10.3102/0013189X021002020

Moll, L. C. (2019). Elaborating funds of knowledge: Community-oriented practies in international contexts. Literacty Research: Theory, Method, and Practice, *68*, 130-138. https://doi.org/10.1177/2381336919870805

Moll, L. C., Amanti, C., Neff, D. & González, N. (1992). Funds of knowledge for teaching: Using a qualitative approach to connect homes and classrooms. *Theory into Practice, 31*(2), 132–41. http://dx.doi.org/10.1080/00405849209543534

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(2&3), 189-212.

Moschkovich, J. (2013). Principles and guidelines for equitable mathematics teaching practices and materials for English language learners. *Journal of Urban Mathematics Education*, *6*(1), 45-57.

Planas, N. & Civil, M. (2013). Language-as-resource and language-as-political: Tensions in the bilingual mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal*, *25*, 361-378. DOI 10.1007/s13394-013-0075-

Quintos, B., Civil, M. & Bratton, J. (2019). Promoting change through a formative intervention: Contradictions in mathematics education parental engagement. *Mind, Culture, and Activity, 26*(2), 171-186. https://doi.org/10.1080/10749039.2019.1602656

Sorto, M. A., Wilson, A. & White, A. (2018). Teacher knowledge and teaching practices in linguistically diverse classrooms. In J. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues, & M. Schütte (Eds.) *Language and communication in mathematics education: International perspectives* (pp. 219-231). Dordrecht: Springer.

Sorto, M. A. & Bower, R. S. G. (2017). Quality of instruction in linguistically diverse classrooms: It matters! In A. Fernandes, S. Crespo, & M. Civil (Eds.), *Access and equity: Promoting high quality mathematics in grades 6-8* (pp. 27 – 40). Reston, VA: NCTM.

Vélez-Ibáñez, C. & Greenberg, J. (1992). Formation and transformation of funds of knowledge among U.S. Mexican households. *Anthropology and Education Quarterly, 23*(4), 313–335.

El Libro de Texto en la Enseñanza de la Estadística

María Magdalena **Gea** Serrano
Universidad de Granada
España
mmgea@ugr.es

Resumen

El libro de texto es un recurso útil en la planificación e intervención docente por organizar los contenidos curriculares adoptando su enfoque metodológico y de evaluación de manera operativa. En muchos casos, es el mediador del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula y sirve de apoyo al estudiante. Por tanto, su análisis ocupa gran atención en la agenda de investigación en educación estadística. El interés de esta conferencia es presentar una síntesis de la investigación sobre libros de texto en estadística en Educación Primaria y Secundaria, con el propósito de mostrar el tipo de actividad práctica que se propone al estudiante, entendida en términos del Enfoque Ontosemiótico. Se observa una tendencia totalmente contraria hacia el sentido estadístico que los estudiantes debieran desarrollar durante su formación escolar básica, por lo que se aportan unas breves reflexiones para orientar al docente en el uso responsable del libro de texto.

Palabras clave: Libro de texto; Enseñanza de la Estadística; Situación de aprendizaje; Sentido estadístico; Educación preuniversitaria.

Introducción

El libro de texto sigue siendo en la actualidad un recurso ampliamente utilizado en el aula (Montes et al., 2022), con la novedad de que las editoriales ofrecen también su contenido en formato digital. En la mayoría de los países se entregan de manera gratuita a los centros escolares, públicos y concertados, lo que facilita y generaliza más su uso entre el alumnado. En algunos casos, su entrega se complementa con otros materiales como el cuaderno de trabajo del estudiante (para potenciar la resolución de problemas) y la guía del profesor (que completa el libro de texto con aspectos metodológicos y de evaluación para orientar la labor docente).

No se pone en duda que el libro de texto contribuye a la planificación e intervención del docente en el aula, por la síntesis en la presentación de los contenidos de la materia junto a la cantidad de ejemplos y actividades (propuestas y resueltas) que aporta; pero, con frecuencia, determina el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula (Cordero y Flores, 2007). En este sentido, el docente debe ser prudente antes de escoger una editorial, porque hay diferencias en el modelo de estructura y diseño del contenido entre unas y otras (Serradó y Azcárate, 2003). Este aspecto puede ser inadvertido cuando únicamente se valora su operatividad, como puente entre la normativa curricular y la enseñanza y aprendizaje del tema (Valverde et al., 2002).

Bajo la premisa de que el análisis del libro de texto permite comprender la forma en que se planifica la actividad matemática de resolución de problemas en el aula (Zhu y Fan, 2006), el propósito de esta conferencia es mostrar una síntesis de investigaciones sobre libros de texto en estadística, desde Educación Primaria (6 a 11 años) hasta Educación Secundaria (12 a 15 años), centrando la atención en la actividad que se plantea al estudiante mediante las situaciones problema propuestas. Se comienza describiendo lo que se entiende por significado de un objeto matemático y la influencia de la actividad del estudiante para su adquisición, según el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento e instrucción matemática (Godino et al., 2007; 2019). Seguidamente, se describen las características y componentes del sentido estadístico, que serán un referente para reflexionar sobre el significado que se promueve desde los textos escolares en las investigaciones consultadas. Al centrar la atención en la educación básica, los resultados se organizan en torno a las gráficas y tablas estadísticas y las medidas de tendencia central y dispersión, por ser los contenidos que, fundamentalmente, se abordan en dichos niveles educativos. Se finaliza aportando algunas recomendaciones que orientan al docente para un uso responsable del libro de texto.

El significado de un objeto matemático

En el marco teórico EOS (Godino et al., 2007; 2019) se articulan diferentes teorías para explicar el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Las nociones y herramientas teóricas que aporta son de utilidad a docentes e investigadores para responder a la problemática de qué matemáticas enseñar y cómo enseñarlas, adoptando un enfoque pragmatista (Godino et al., 2021). Es decir, se considera que el significado de un objeto matemático emerge cuando se resuelven situaciones donde adquiere significado, diferenciando cuando dicha actividad se realiza por la institución que ostenta el saber sobre dicho objeto matemático (significado institucional) o se realiza de manera personal (significado personal). En la medida que estos significados se aproximen se considera que se ha adquirido aprendizaje en el objeto matemático, mientras que su divergencia informa de conflictos semióticos en su aprendizaje. Desde el punto de vista epistémico, identificar el significado de un objeto matemático comienza con el análisis histórico y fenomenológico del mismo, para concretar sus posibles significados parciales. Según el EOS, cuando el significado se sitúa en el nivel educativo en que se enseñe dicho objeto matemático permite identificar su significado institucional de referencia. Por tanto, determinar un diseño curricular de referencia implica seleccionar una muestra representativa de situaciones problema según sus significados parciales, junto con reconocer la diversidad de objetos que intervienen en cada uno. Es decir, cuando se resuelve una situación problema intervienen diferentes objetos y procesos matemáticos que influyen en su significado como son: el tipo de lenguaje que se emplea (simbólico, gráfico, tabular, diagramático o icónico y verbal o gestual), reglas que intervienen y emergen de la resolución (conceptos, proposiciones y propiedades que intervienen), diferentes procedimientos que se puedan aplicar en dicha resolución y los diferentes modos de argumentación. Para cada uno de estos objetos elementales, se corresponde un proceso matemático específico (representar; definir o enunciar; calcular, construir, etc. y argumentar), y entre ellos también se generan nuevos procesos que se contemplan desde diferentes facetas del conocimiento matemático y se describen con detalle en Godino et al. (2007; 2019). Todo esto es lo que constituye la configuración ontosemiótica de objetos y procesos del objeto matemático.

Sentido estadístico

La enseñanza de la estadística requiere una atención diferente a la de cualquier otra rama de la matemática, por la especificidad del razonamiento que implica (Bargagliotti et al., 2020):

> […] es un área relativamente nueva para muchos profesores, quienes no han tenido la oportunidad de desarrollar un conocimiento sólido de los principios y conceptos subyacentes a las prácticas de análisis de datos que ahora son llamados a enseñar. Estos profesores no comprenden claramente la diferencia entre estadística y matemática. […] Estos profesores pueden no ver el currículo de estadística como "un todo" que provee una secuencia evolutiva de experiencias de aprendizaje (Franklin et al., 2007, p. 5).

En respuesta a identificar "lo que es importante" para un adecuado desempeño en estadística, diversos autores coinciden en el término *statistical literacy* (alfabetización o sentido estadístico) para describir la comprensión, destreza y disposición que toda persona debe emplear cuando resuelve una situación basada en datos estadísticos (e.g. Batanero et al., 2013; Gal, 2002; Wallman, 1993; Watson, 2011). De acuerdo a Wild (2017), el término tiene un doble enfoque, en la perspectiva de quien "consume" información basada en datos y quien "produce" dicha información, pues, generalmente, se presta más atención a la primera acepción del término. En la agenda de investigación para responder a los retos de futuro en torno al sentido estadístico, Wild (2017) plantea poner en valor el conocimiento estadístico por encima de cualquier tendencia, como puede ser, por ejemplo, el avance que en la actualidad sucede con la tecnología en el análisis de grandes masas de datos. Porque la estadística empodera a la persona. En el modelo del sentido estadístico por Batanero et al. (2013), se determinan las siguientes ideas fundamentales para desarrollar desde las primeras edades, alcanzando un conocimiento formal de las mismas de manera progresiva conforme se avanza en el nivel educativo:

- *Los datos refieren a un contexto*. Trabajar con situaciones reales implica interpretar y razonar el contexto de los datos y la información que aportan.

- *La representación de los datos mediante tablas y gráficos estadísticos*, en sus respectivas tipologías. La organización y síntesis de la información que presenta una situación problema es la esencia del análisis exploratorio de los datos.

- *Variabilidad*. La diferencia entre la matemática y estadística se justifica, principalmente, por la variabilidad intrínseca a los datos en la situación problema que se resuelve. Su análisis permitirá tomar decisiones atendiendo a la bondad del modelo que ajuste los datos de la situación como a los datos en sí mismos.

- *Distribución*. Los datos aportan información en su conjunto y de su conexión se obtiene la distribución que los modeliza. El razonamiento distribucional requiere conectar los datos con la población de donde se tomaron y tratar conjuntamente conceptos en torno a la estadística (variable estadística) y la probabilidad (variable aleatoria), que son la esencia del muestreo y la inferencia.

- *Asociación y correlación*. En las situaciones de la vida diaria intervienen más de una variable y al tomar decisiones, explicar evidencias o predecir una en base a otras, en muchas personas prevalece el uso de teorías personales o creencias al uso de la estadística (Chapman y Chapman, 1967). "El pensamiento multivariable debe comenzar a una edad temprana, ya que es natural que los estudiantes cuestionen y razonen con más de dos variables a la vez, […] pueden observar múltiples evidencias en una misma unidad de observación" (Bargagliotti et al., 2020, p. 10)."

- *Probabilidad*. La probabilidad nos permite medir la incertidumbre y el riesgo para tomar decisiones, porque no toma decisiones por nosotros. El enfoque en su cálculo o estimación necesariamente implica vincular sus diferentes significados (Batanero, 2005) poniendo en juego otras nociones clave como azar y aleatoriedad, cuya comprensión no está exenta de dificultades (Serrado et al., 2005).

- *Muestreo e inferencia*. Establecer conclusiones o inferencias sobre un parámetro de la población en base a un estadístico en el conjunto (muestra) de los datos requiere un conocimiento profundo del modo en que fueron obtenidos dichos datos. Además, el grado de generalidad y formalización de nuestras conclusiones o inferencias conlleva manejar la distribución muestral de dicho estadístico y no solo pensar en una muestra.

Como proponen Batanero et al. (2013, p. 17), la metodología clave para un aprendizaje significativo de la estadística es proponer investigaciones y proyectos: "Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos, mientras que los proyectos incluyen también conocimientos estratégicos, a la vez que aumentan la motivación del estudiante" (Batanero et al., 2013, p. 17). Se trata de involucrar el razonamiento estadístico y una disposición crítica ante la información estadística que se analiza. Por tanto, se distinguen los siguientes modos de pensamiento:

- *Reconocer la necesidad de los datos*. La potencia de la estadística se resume en el análisis de un conjunto de datos para informar sobre su población de referencia. Por tanto, la calidad de los datos que se analicen determinará la validez de las decisiones y predicciones que se realicen en base a la información que aporten.

- *Transnumeración* es un término que refiere al razonamiento que se emplea al cambiar la representación de los datos de un estudio por otra representación y se interpreta la nueva información con relación a la que se disponía.

- *Percepción de la variación*. Toda predicción o inferencia conlleva tratar diferentes fuentes de variabilidad en los datos (medidas repetidas, variabilidad natural, inducida o muestral) y requiere tratar su omnipresencia en el estudio estadístico.

- *Razonar con modelos* es clave en la actividad matemática (gráficas, tablas, distribuciones, etc.), pero en estadística se añade, además, que al modelo se asocia una incertidumbre propia y no solo las relativas a la realidad que modeliza.

- *La estadística y el contexto* se integran durante todo el proceso de resolución de una situación problema, porque formulamos preguntas para responderlas a partir de los datos y del análisis de los mismos se obtiene información que responderá a las cuestiones planteadas o nuevas cuestiones por responder, en la medida en que dicha información se contextualice en la realidad que se estudia.

Investigaciones sobre libros de texto en estadística

El análisis de libros de texto de Educación Primaria y Secundaria en estadística ha interesado, sobre todo, a la Comunidad Iberoamericana; en particular, la tabla y la gráfica estadística más que cualquier otro tópico. En dichos estudios se analizan más variables, además de la actividad práctica que se plantea al estudiante, que es objeto de esta conferencia. La selección de las investigaciones se inicia con la consulta a repositorios de revistas y libros de calidad y amplia difusión en el campo de investigación de educación estadística, continuando por consultas derivadas de esa primera selección de investigaciones. A continuación, se sintetizan sus resultados, organizados en torno a los contenidos que abordan.

Gráficas y tablas estadísticas

Los estudios sobre gráficas y tablas estadísticas en libros de texto se desarrollan, sobre todo, en Educación Primaria y algunos analizan ambas representaciones (Tabla 1) al compartir variables de investigación. En las investigaciones consultadas se aportan resultados teóricos que categorizan las situaciones problema (SP) de donde emerge el significado de la gráfica (SPG) y tabla estadística (SPT), como se muestran en la Figura 1, donde se observan situaciones problema comunes (SPG1.3 y SPT3.1), lo que aporta coherencia a dicha clasificación. También, se observan algunos matices en la terminología empleada que conviene aclarar: la acción de *comparar* se interpreta, generalmente, como leer dentro de los datos o como *traducir*, en términos de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999); *explicar* cómo justificar (representativa de cualquier situación problema); *formular preguntas* en términos de diseñar o inventar un problema que requiera recogida de datos o construir una representación; y *buscar información* en términos de recoger y registrar datos, construir una tabla o gráfica.

En general, los estudios muestran que los libros de texto proponen demasiadas tareas procedimentales, independientemente del nivel educativo al que se dirigen, y poca variedad de situaciones problema, siendo prácticamente ausentes las de investigación (Morales-García et al., 2022). De acuerdo a Vásquez et al. (2019), aunque hay textos que plantean procedimientos con conexión (57,5%) o incluso se plantea construir significativamente las matemáticas (4,6%), sigue siendo acusada la proporción de tareas de memorización o en las que se prioriza calcular, construir o la lectura de datos sin dificultad en conocer qué procedimiento aplicar. La tendencia es más acusada en Educación Secundaria (Pomilio et al., 2016). También, Mateus (2014) advierte de la poca atención al razonamiento estadístico e incluso errores en el contenido en el tratamiento de los gráficos estadísticos, en una muestra de 5 textos que representan un amplio rango de años de publicación (de 1960 a 2010). A continuación, se describen los resultados al comparar estudios entre países, pues merece resaltar sus detalles.

Tabla 1.
Investigaciones según autor(es), país, objeto de análisis y muestra empleada.

Autor o Autores	País	Objeto	Muestra (niveles educativos)
Amorim y Silva (2016)	Brasil	T	4 libros de Primaria (4º y 5º)
Arteaga et al. (2021)	Costa Rica	G	3 series de Secundaria (7º a 9º)
Bivar y Selva (2011)	Brasil	G y T	5 series de Primaria (1º a 5º)
Díaz-Levicoy et al. (2015)	Chile	T	4 libros de Primaria (1º y 2º)
Díaz-Levicoy et al. (2016)	España Chile	G	3 series por país, Primaria (1º a 6º)
Díaz-Levicoy et al. (2017a)	Chile	T	3 libros de Primaria de 3º
Díaz-Levicoy et al. (2017b)	Argentina	G	4 series de Primaria (4º a 6º)
Díaz-Levicoy et al. (2018)	Perú	G	3 series de Primaria (1º a 6º)
Evangelista y Guimarães (2019)	Brasil	T	8 series de Primaria (1º a 5º)
García-García, et al. (2019)	México	T	2 series de Primaria (1º a 6º)
Gea et al. (2022)	España	T	2 series de Primaria (1º a 6º)
Guimarães et al. (2007)	Brasil	G y T	17 series de Primaria (1º a 4º)
Jiménez-Castro et al. (2020)	Costa Rica	G	2 series de Primaria (1º a 6º)
Mateus (2014)	Colombia	G	5 libros de Básica y Media
Morales-García et al. (2022)	México	G	6 libros de Primaria (1º a 6º)
Pallauta et al. (2021a)	España	T	3 series de Secundaria (1º a 4º)
Pallauta et al. (2021b)	Chile	T	12 textos de Básica (5º a 8º)
Pomilio et al. (2016)	Argentina	G y T	6 textos de Secundaria (3º curso)
Salcedo (2016)	Guatemala Venezuela	G	1 serie por país, Primaria (1º a 6º)
Vásquez, et al. (2019)	Chile	G y T	6 libros de Primaria (1º a 6º)
Vásquez, et al. (2022)	Chile México	G y T	2 series por país, Infantil y Primaria (1º y 2º)

* G = Gráfica T = Tabla
Fuente: elaboración propia.

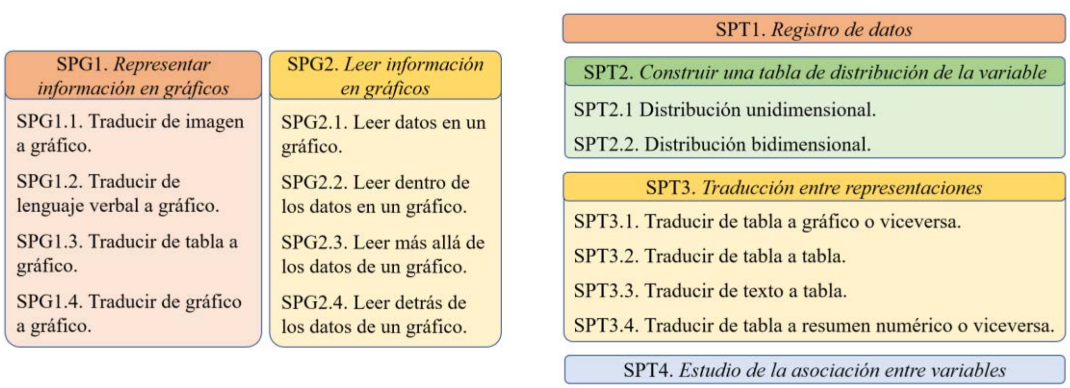


Figura 1. Situaciones en gráficas (izquierda) y tablas (derecha) (Morales-García et al., 2022; Pallauta et al. 2021a).

En un estudio comparado entre España y Chile sobre gráficos estadísticos en Primaria (Díaz-Levicoy et al., 2016), la tendencia es plantear tareas de lectura con baja complejidad, con mayor énfasis en España. Las tareas principalmente son procedimentales (España sobre lectura y construcción, mientras que en Chile de cálculo y construcción). Pero en Chile hay mayor presencia de tareas que cuestionan la fuente de los datos y su método de recogida o incluso inferir datos a partir de la información, desde 3º curso y de manera más continuada que en España. Esta situación mejora un poco en Argentina (Díaz-Levicoy et al., 2017b), porque se plantea más la lectura comparada (72,7%) que literal del gráfico (13,6%) aunque con gran diferencia entre editoriales. Además, se piden tareas poco habituales como valorar el proceso de recolección y la fuente de los datos (desde el 7,7% al 21,4%), justificar, explicar o asociar (del 9,1% al 53,9%), y recoger datos, aunque solo en una editorial (14,3%). La tendencia es similar en Perú (Díaz-Levicoy et al., 2018), con un porcentaje elevado de tareas que se centran en la lectura comparada de los datos (80,7%), pero, en todos los cursos destaca el índice de tareas en donde se pide buscar información (9,7%). Aunque sigue siendo elevado el porcentaje de tareas que se centran en competencias procedimentales y es menor el porcentaje de tareas de traducir la gráfica a otra representación (8,7%), destaca que en 6º curso se encuentra un porcentaje mayor que en cualquier otro curso donde se pide justificar (20,3%). Al respecto, Salcedo (2016) muestra diferencias entre los textos de Guatemala y Venezuela. Los primeros se enfocan en la lectura comparada de información (55,6%) y en realizar inferencias (15,6%), ninguna de completar y pocas de construir (15,6% y sobre todo en 6º curso); al contrario que en Venezuela, donde la mayoría son de construir (57,1%), seguido de la lectura comparada (28,6%).

En Costa Rica (Jiménez-Castro et al., 2020), la tendencia sigue siendo plantear tareas sobre lectura de gráficas estadísticas que impliquen poco razonamiento, pero es superior el porcentaje de tareas donde se pide inferir datos más allá de los representados (11,8%), así como valorar el proceso de recolección (7,3%), en tendencia progresiva en cuanto al nivel educativo. La construcción de la tabla no tiene tanta representatividad como en otros contextos educativos, y la tendencia decreciente en las actividades de completar se acompaña de un crecimiento en las de construir. Esta tendencia se mantiene en los textos de secundaria (Arteaga et al., 2021), porque se proponen pocas tareas de inventar problemas, explicar, comparar distribuciones o describir variables, aunque hay diferencias significativas entre editoriales.

Guimarães et al. (2007) analizan tablas y gráficas estadísticas en libros de texto brasileños donde apenas el 40% pide explorar su estructura y elementos para analizar la información de manera global. La tendencia no mejora con el nivel educativo, como sería deseable. Apenas se plantea realizar investigaciones y, por lo general, se pide completar o leer; aunque pocas piden construir, como en Bivar y Selva (2011), por lo que el énfasis está en la representación y no tanto en la interpretación o utilidad de dicha representación. Además, se observa excesiva atención en las variables nominales y no tanto en las variables cuantitativas (ordinales o continuas).

En el estudio comparado entre Chile y México, en los primeros niveles educativos, Vásquez et al. (2022) muestran la tendencia en plantear más tareas para calcular, completar o leer (generalmente, de manera literal), en dicho orden de preferencia, y pocas para que el estudiante desarrolle investigaciones. En cuanto a tablas, también destacan las tareas de traducir entre representaciones, mientras que en gráficos predominan las de calcular. Además, cabe destacar, que en los textos que ofrece el Ministerio en Chile a centros públicos y privados, el enfoque en las tareas es exclusivamente procedimental, mientras que los que se utilizan en centros privados y los textos mexicanos presentan mucha mayor variedad de tareas.

En investigaciones que analizan solo las tablas estadísticas, pocas tareas piden explorar sus elementos o estructura, centrándose en procedimientos de lectura (Amorim y Silva, 2016). En particular, García-García et al. (2019) advierten dicha tendencia (calcular y completar) en México, aunque con diferencias entre editoriales en cuanto a las tareas de construir o interpretar la fuente y método de recolección de los datos. En Evangelista y Guimarães (2019) se muestra el gran porcentaje de tareas que plantean la lectura de los datos de una tabla, en tendencia creciente según el curso escolar y poca presencia de tareas de construir, que se concentran en 4º curso. También, en Chile, Pallauta et al. (2021b) muestran que la actividad matemática se centra en el cálculo o lectura y no tanto en la construcción, traducción o propuesta de investigaciones. Aunque se encuentran más actividades de traducción de gráfico a tabla y de argumentaciones en 8º curso. En los primeros niveles de primaria, Díaz- Levicoy et al. (2015) muestran la tendencia en plantear tareas de lectura de las tablas de baja complejidad, cálculos, así como completar o traducir la tabla estadística, siendo un porcentaje menor las que piden justificar o recoger datos y plantear preguntas de investigación. Además, es elevado el porcentaje de tareas con variables cualitativas (de 66,7% al 100%, según curso) como se puso de manifiesto en el contexto brasileño (Guimarães et al., 2007). En un trabajo posterior, Díaz-Levicoy et al. (2017) analizan las tablas en textos escolares de 3º curso observando mayor porcentaje de tareas donde se pide construir tablas, así como justificar y recoger datos o inventar problemas.

En España, Gea et al. (2022) observan la escasa presencia en Primaria de situaciones donde se pida razonar o recoger datos. Las diferencias son significativas entre editoriales; en particular, las situaciones para investigar y recoger datos varían del 1,7% al 7,5%. La tendencia no mejora en Secundaria (Pallauta et al., 2021a); por ejemplo, una editorial plantea situaciones de asociación, puesto que en 4º curso se introduce el tema, mientras que en las otras se potencia la construcción de la distribución bidimensional mediante la tabla, sin su interpretación.

Las medidas de tendencia central y dispersión

El significado de las medidas de tendencia central es analizado por Cobo (2003) en 22 libros de texto de Educación Secundaria en España (3º y 4º curso) y Mayén (2009) en 3 textos escolares en México (dos libros de texto y un cuaderno de prácticas para 3º curso), según la tipología de situaciones problema (SP) que se muestra en la Figura 2, con el código M para la media, Me la mediana y Mo la moda. Ambos estudios evidencian diferente representatividad de las situaciones problema en torno a la mediana y la media, pero no en cuanto a la moda. El campo de problemas SPM1 no se propone en México y poco en España, siendo relativamente sencillo, pues dio origen al concepto. SPM4 no se propone en los textos analizados, quizá, por su complejidad al implicar el azar y la incertidumbre, pero es adecuado para desarrollar el sentido estadístico. En cuanto a la mediana, hay pocas situaciones en los textos españoles que impliquen la comparación de gráficas y potencien la transnumeración (SPMe3), pero ninguna en el caso de México. Por último, en México se hace más énfasis en situaciones que evidencian la utilidad de la mediana frente a la media (SPMe1), aunque se proponen pocas situaciones con datos ordinales. Cabe mencionar que SPM5 solo se identificó en Mayen (2009) y con baja incidencia.

Figura 2. Situaciones en medidas de tendencia central (Cobo, 2003; Mayén, 2009) y dispersión (del Pino, 2019).

Del Pino (2019) analiza la representatividad de situaciones problema sobre medidas de dispersión en 12 libros de texto de Educación Secundaria (3º y 4º curso) en España, según las situaciones identificadas en la Figura 2. Se observa, en general, un enfoque procedimental por el elevado porcentaje de tareas sobre cálculo de medidas de dispersión frente a otras situaciones como analizar la dispersión en gráficas (SP4), aunque se encuentran diferencias entre editoriales. En 3º curso, una editorial no plantea situaciones para comparar distribuciones de datos (SPD3) y en el resto el porcentaje es muy variable, siendo un contenido curricular destacado para este nivel educativo. Esta situación mejora en 4º curso, aunque son pocas las situaciones que plantean la transnumeración (SPD3.3). La situación SPD5 no es representativas en 4º curso, posiblemente, porque en su estudio se vincula la distribución normal, que se abordada en Bachillerato. En cualquier caso, se trata de situaciones que contextualizan el uso de la distribución normal en nuestra vida cotidiana y su análisis contribuye al desarrollo del sentido estadístico del estudiante.

Reflexiones finales

Como resultado de la síntesis de investigaciones que se presenta en esta conferencia, en donde se observa variedad de estudios que analizan la estadística en libros de texto en distintos países, se obtienen suficientes evidencias como para establecer indicaciones al docente (y a la comunidad educativa, en general) cuando se utilice el libro de texto para promover el sentido estadístico en los estudiantes. Como se ha descrito en este trabajo, el enfoque de enseñanza de la estadística debe fundamentarse en el razonamiento e iniciativa personal del estudiante, para encontrar sentido al contenido que se aplica y su aprendizaje sea significativo. Por tanto, la situación problema ha de implicar la toma de decisiones para trabajar conjuntamente las ideas fundamentales que describen el sentido estadístico (Batanero et al., 2013). Porque establecer una decisión supone: una comprensión profunda del contexto y los datos de la situación planteada; una disposición crítica ante dichos datos (procedencia y método de muestreo, datos atípicos, etc.); ser consecuente con la variación en los datos y los modelos empleados para analizar su distribución; así como analizar la posible dependencia entre las variables de la situación planteada. Pero los textos analizados en los estudios consultados, en general, no promueven el razonamiento. Un resultado clarificador, al respecto, es la escasa representatividad de situaciones que piden interpretar representaciones para valorar la dispersión (Del Pino, 2019) o relacionar medidas de dispersión y centralización para elegir el mejor representante de un conjunto de valores, frente al considerable porcentaje de tareas que piden calcular estadísticos, de dispersión o de tendencia central.

En resumen, plantear proyectos o investigaciones ayuda a tomar conciencia de la importancia de los datos en la estadística y poner en valor ideas fundamentales; en particular, el uso de gráficas y tablas para interpretarlos, porque estas representaciones son empleadas en otros contenidos de la matemática por su sus elementos y estructura particular para representar información y generar conocimiento (Amorim y Silva, 2016; Guimarães et al., 2007), pero su valor en la estadística radica en la transnumeración, para informar de la distribución de los datos. Por tanto, es necesario que el docente planifique el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística de manera responsable, de acuerdo a las directrices curriculares y literatura de investigación, porque las situaciones problema que los textos escolares suelen plantear al estudiante no cubren de manera representativa el significado de los contenidos estadísticos.

Agradecimiento. Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i *PID2019-105601GB-I00* financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias y bibliografía

Amorim, N. y Silva, R. (2016). Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. *Em Teia*, *7*(1), 1-21.

Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. y Batanero, C. (2021). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 125-140.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) report*. ASA.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Bivar, D. y Selva, A. (2011). Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. Anais do XIII CIAEM-IACME, *13*, 1-12.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology, 72*(3), 193-204.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1), 7-38.

Del Pino. (2019). *Las medidas de dispersión en la Educación Secundaria Obligatoria: Análisis de libros de texto y de la comprensión de los estudiantes*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. (2015). Tabla estadística en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *4*(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, *30*(55), 713-737. DOI: 10.1590/1980-4415v30n55a20

Díaz-Levicoy, D., Ruz, F., y Molina-Portillo, E. (2017a). Tabla estadística en libros de texto chilenos de tercer año de educación primaria. *Espaço Plural*, *18*(36), 196-218.

Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., y Arteaga, P. (2017b). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de educación primaria. *Profesorado*, *21*(3), 299-326.

Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos Estadísticos en Libros de Texto de Matemática de Educación Primaria en Perú. *Bolema*, *32*(61), 503-525. DOI: 10.1590/1980-4415v32n61a10

Evangelista, B.; Guimarães, G. (2019). Análise de atividades sobre tabelas em livros didáticos brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.). *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-9). Grupo FQM126.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*. *70*(1), 1-25.

García-García, J., Díaz-Levicoy, D., Vidal, H. y Arredondo, E. (2019). La tabla estadística en libros de texto de educación primaria en México. Revista Paradigma, 40(2), 153-175, 2019. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p153-175.id754

Gea, M.M., Pallauta, J.D., Batanero, C. y Valenzuela-Ruiz, S.M. (2022). Statistical Tables in Spanish Primary School Textbooks. *Mathematics*, *10*, 2809. DOI: 10.3390/math10152809

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37- 42.

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, *3*, 1-30.

Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M., Marques, M. (2007). Livros Didáticos de Matemática nas Séries Iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, *9*.

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P. y Batanero, C. (2020). Los Gráficos Estadísticos en los Libros de Texto de Educación Primaria en Costa Rica, *Bolema*, *34*(66), 132-156. DOI: 10.1590/1980-4415v34n66a07

Mateus, L. (2014). Estudio de gráficos estadísticos usados en una muestra de libros de matemáticas para la educación básica y media en Bogotá. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 274-280). Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Mayén, S. (2009). *Significados de las medidas de posición central para estudiantes mexicanos de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y

C. Jiménez (Eds.) *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 37-54). Editorial Universidad de Granada y SEIEM.

Morales-García, L., Vidal-Henry, S., García-García J. I. y Díaz-Levicoy, D. (2022). Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. *AIEM* - Avances de investigación en educación matemática, *22*, 111-135. DOI: 10.35763/aiem22.4410

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021a). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema*, *35*(71), 1803-1824. DOI: 10.1590/1980-4415v35n71a26

Pallauta, J. D, Gea, M. M. y Arteaga, P. (2021b). Caracterización de las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos de educación básica. *Paradigma*, *42*(1), 32-60. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p32-60.id1017.

Pomilio, Carlos J., Miño, M. Brignone, N. F., García Facal, G., Telesnicki, M. C., Fass, M., Filloy, J., Cueto, G., Fernández, M. S., y Pérez, A. (2016). Análisis de actividades sobre estadística descriptiva en libros de educación media: ¿Qué se pretende que los estudiantes aprendan? *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1345-1364.

Salcedo, A. (2016). Gráficos Estadísticos en Libros de Texto para Educación Primaria de Guatemala y Venezuela. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1141-1163, 2016.

Serradó, A y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, *15*(1), 67-98.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto, *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 59-81.

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., Houang, R. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer.

Vásquez, C., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. *Bolema*, *36*(72), 116-145. DOI: 10.1590/1980-4415v36n72a06

Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J. L., y Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema*, *33*(65), p. 1133-1154. DOI: 10.1590/1980-4415v33n65a08

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), l-8.

Watson, J. M. (2011). Foundations for improving statistical literacy. *Statistical Journal of the IAOS*, *27*, 197-204. DOI: 10.3233/SJI20110728

Wild, C. J. (2017). Statistical literacy as the earth moves. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 31-37.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry". *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Zhu, Y. y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626. DOI: 10.1007/s10763-006-9036-9.

¿Qué hay de maravilloso en el continuo aritmético de los números reales?

Carlos **Sánchez** Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
carlossanchezfernandez@gmail.com

Resumen

Desde la época dorada de la matemática helena el “continuo aritmético” ha sorprendido a los más ilustres pensadores cuando les revelaba sus singulares maravillas. Mucho se ha escrito sobre las propiedades de los números, pero todavía, cuándo procuramos hacer más seductor nuestro discurso, aparecen vacilaciones. Y cada nivel educacional enfrenta sus propios conflictos cognitivos con diferentes dominios numéricos. En esta charla nos interesa subrayar que los números no son simplemente para hacer cuentas, sino además para hacer cuentos sobre su “vida y prodigios”. A fin de cuentas, esta será una charla con el objetivo de compartir experiencias para que nuestra actividad docente no pierda su encanto y mostrar una forma de cómo se puede usar la historia de la matemática para hacer más atractivas nuestras clases sobre los principales dominios numéricos. Además, abrimos el diálogo sobre los aspectos más seductores de los números reales en cada nivel educacional.

Palabras claves: Historia de la matemática; cultura matemática; dominios numéricos; números hipotenúsicos; números perfectos; números metálicos; números plásticos; números trascendentes.

Introducción

Esta conferencia pretende ilustrar aquellas características que reflejan mejor lo más atractivo del “continuo aritmético”, es decir, de los diferentes tipos de dominios numéricos que conforman la arquitectura de la recta real. Se ha concebido para ser disfrutada; no para aburrir y mucho menos para estresar al interesado. Pensamos que, así como la gente gusta del arte por el simple placer de conocerlo y disfrutarlo, así deberíamos gustar de la matemática por sí misma y no como algo que existe la obligación de saber por su utilidad y aplicación (que, por supuesto tiene con creces y es meritorio comunicarlo).

Hemos tomado como marco teórico, ante todo, las enseñanzas de ese gran maestro americano Don Ubiratan D'Ambrosio sobre *Etnomatemática* (D'Ambrosio, 2002). Nos ha inspirado, también, el excelente libro sobre *Enculturación Matemática* de Alan Bishop (Bishop, 1999); ambos educadores han merecido la Medalla "Félix Klein" por su admirable obra en favor de la cultura matemática. Hay una idea capital en la obra de estos dos grandes maestros que nosotros compartimos: la convicción de que la Matemática es parte de la Cultura. Y como dijo alguien ingenioso: "*Cultura es lo que nos queda cuando olvidamos todo lo que nos obligaron a saber*". Y, en busca de precisión, el diccionario de la RAE nos orienta: Cultura es el "*conjunto de conocimientos que permite a alguien desarrollar su juicio crítico*". Luego, cuando decimos que pretendemos elevar nuestra *Cultura Matemática*, es porque queremos compartir los conocimientos matemáticos imprescindibles para ser más lúcidos y capaces de ejercer con eficacia y justicia nuestra función pedagógica. Para nosotros, el recurso principal a nuestra disposición y con estos fines, es la Historia de la Matemática.

Disfrutar del placer estético de la matemática exige sin duda un grado de participación activa mucho más intenso que al recrearse con la música, el cine o la pintura. El encanto de la matemática está en su íntima y armoniosa estructura donde se ligan objetos de naturaleza asombrosamente disímiles. Su atractivo está también en la generalización y la abstracción de sus teorías que engloban, en precisas y concisas formulaciones, toda una odisea de más de cuarenta siglos de una historia dinámica, tortuosa, llena de contradicciones y tensiones, colmada de retos al intelecto.

Nuestro interés es compartir experiencias en el uso de la historia de la matemática como herramienta didáctica para la elevación de la cultura matemática. Nutren estas experiencias la oportunidad aprovechada de coordinar -e impartir con sumo placer junto a la profesora Rita Roldán- un curso por la televisión educativa cubana en la serie de *Universidad para todos* con el título de *Números y Figuras en la Historia*. Curso que por su éxito se editó y en parte se publicó en un sencillo libro (Sánchez y Roldán, 2012). Muchas de las cuestiones señaladas en esta charla han sido originadas en la concepción de estas dos simples obras.

Hemos procurado sintetizar dialécticamente las facetas lógica, histórica y cognitiva del tema y, en definitiva, a continuación, compartimos nuestras ideas antes expuestas en otras publicaciones (p. e. en Sánchez, 2016 o en Sánchez y Valdés, 2017) ilustradas aquí con el tratamiento particular de algunas propiedades relacionadas con cinco grandes tipos de números reales: naturales, fraccionarios, racionales, irracionales algebraicos e irracionales trascendentes.

I. Números naturales

Desde muy remota época aparecen los números naturales, es decir, los enteros positivos (sin el cero). Pero son los pitagóricos con su filosofía numerológica quienes aportan más casos atractivos. Los números figurados: triangulares, cuadrados, cubos, pentagonales, etc. Los números primos y su distribución tan irregular, con subconjuntos todavía más erráticos como los primos gemelos o los primos trillizos, son algunos más o menos conocidos. Sin buscar extravagancias, el mismo teorema de Pitágoras nos introduce en el famoso problema de la descomposición en sumas de cuadrados, que va a ser tratado en diferentes momentos por destacados matemáticos como: *Diofanto* de Alejandría, Pierre de *Fermat*, Leonhard *Euler* y Jean-Louis *Lagrange*. A fines del siglo XVIII se probó que todo número natural se puede representar como suma de cuatro cuadrados, pero no todos se descomponen en la suma de dos cuadrados. A los números que se pueden representar como suma de dos cuadrados les llamamos *números hipotenúsicos* y tienen una fértil historia que merece ser conocida y divulgada (Sánchez y Roldán, 2012, pp. 40-49).

Otro tema atractivo, no tan fértil, aunque motivador a la reflexión, es el tema de los *números perfectos*. En *"Los Elementos"* de Euclides se define como *número perfecto* a aquel que es la suma de sus divisores propios. Es Euclides quien nos presenta la relación existente entre los números perfectos y los números primos, al demostrar que si el número $2^n - 1$ es primo, entonces el número $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto. Es muy fácil demostrar que a menos que n sea primo, $(2^n–1)$ es compuesto. Pero, no nos dejemos engañar por esta aparente sencillez, pues $2^{11} - 1 = 2947 = 23 \cdot 89$ es compuesto, aunque 11 es primo (esto se descubrió en 1536). Los números primos de la forma $(2^n–1)$ son conocidos como *números primos de Mersenne*, pues fue el monje francés Marín Mersenne (1548-1648), quien primero publicó una larga lista de ese tipo de números en el año 1644, exponiendo los que suponía eran los primeros 11 números primos de este tipo. Mersenne cometió sólo 5 errores, lo cual es un gran mérito, teniendo en cuenta que en su época no existían aún las calculadoras…. Material sobre los números perfectos, además de los mencionados de Euclides y Mersenne, se encuentra en la obra de Nicómaco de Gerasa, Leonhard Euler o en libros de referencia más modernos como (Sándor y Cristici, 2004, pp. 15–98). Es interesante señalar que permanece abierta la pregunta sobre si existen o no infinitos números primos de Mersenne. Sin embargo, la fórmula $2^p - 1$ para números primos p sigue siendo hoy una de las más (si no es la más) utilizada en la generación de números primos y en trabajos de Criptografía. En libros de historia de la teoría de números como el seductor (Burger, 2007) se encuentran, con paciencia, muchos asuntos que pueden motivar a los jóvenes.

II. Números fraccionarios

Las fracciones, como todos los descubrimientos matemáticos, surgieron motivados por las necesidades de los hombres, en este caso, la de expresar resultados a los cuales no se podían asociar números enteros. Los egipcios, mucho antes de la construcción de las pirámides, crearon "un sistema" que tenía como base la interpretación de las *fracciones alícuotas*, es decir, de la forma $\frac{1}{n}$, y algunas particulares como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, expresadas, lógicamente, mediante los jeroglíficos correspondientes a su sistema de numeración. A tales fracciones se les acostumbra llamar *fracciones egipcias*. Toda fracción de la forma $\frac{p}{q}$ (p y q enteros positivos, $q \neq 1$) debía expresarse mediante la suma de fracciones egipcias. Debemos advertir que la elección de los sumandos no es unívoca, por ejemplo, se tiene el caso de $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$.

Resultó necesario el uso de diferentes fórmulas para realizar las representaciones de las fracciones no alícuotas, una de estas fórmulas es $\frac{2}{3k}=\frac{1}{k}+\frac{1}{6k}$, otra fórmula, al parecer más compleja, utilizada para construir las tablas es $\frac{2}{pq}=\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}$, en la cual $r=\frac{1}{2}(p+q)$

El periodo comprendido entre los siglos V-XII de d. C., se considera el de mayor desarrollo y significación en la matemática en la India. Durante este tiempo se destacaron los trabajos con fracciones desarrollados por eminentes matemáticos como: Brahmagupta (s. VII), Mahavira (siglo IX) y Bhaskará (siglo XII). Revisando la obra de estos y otros matemáticos, se encuentran notables problemas de descomposición aditiva y representación de números complicados por fracciones más simples de diferentes tipos.

El famoso matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996) planteó varias conjeturas sobre números fraccionarios, pero la más popular es la formulada junto al germano Ernest Gabor Strauss (1922-1983) a fines de los años 40's y sugiere simplemente que todo número fraccionario de la forma $4/n$ puede descomponerse como la suma de tres fracciones egipcias. Esta conjetura permanece abierta, pero en la búsqueda de su solución se han encontrado notables resultados (ver p. e. Guy, 2004)

Tomando en consideración que las operaciones con números fraccionarios siempre han sido un obstáculo cognitivo en nuestras aulas de primaria, nos parece estimulante mezclar la descomposición en fracciones egipcias -que son más fáciles de manipular- con las operaciones adición y multiplicación de números fraccionarios (recomendamos los amenos libros de Crilly, 2011 y Stewart, 2008)

III. Números racionales

Cuando hablamos de números racionales, consideramos no solo los enteros y los fraccionarios positivos, sino también a los negativos y, además, al número más singular y espinoso para su manipulación: *el cero*. Tanto los números negativos, llamados *falsos* durante muchos siglos, como el cero, denominado *sifr* en el mundo árabe islámico que quiere decir "vacío", demoraron en ser aceptados dentro del universo de los números, simplemente porque el concepto número se asociaba íntimamente al concepto magnitud y las propiedades aritméticas con las magnitudes no dejaban oportunidad de desarrollo a estos números "plebeyos" que carecen de los privilegios manipulativos de los enteros o fraccionarios positivos. Por ejemplo, ¿quién argumenta fácilmente por qué el producto de dos números negativos es positivo? Además ¿cómo hallar el cociente de un número cualquiera entre cero?

En América, los mayas idearon un sistema posicional de base 20 con el 5 como base auxiliar. Aunque al principio este sistema puede parecer aditivo es, realmente, un sistema posicional que se escribe de arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor. Al tener cada cifra un valor relativo de acuerdo con el lugar que ocupa, se hace imprescindible la presencia de un signo para el cero, con el cual indicar la ausencia de unidades de algún orden, y los mayas lo usaron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula; lo usaron como hicieron antes los babilonios, simplemente, para indicar la ausencia de otro número.

Alrededor del siglo VII d. C. el cero se incorpora a la matemática india. Los documentos revisados señalan que el primer matemático indio célebre que hizo uso aritmético del signo 0 fue Brahma Gupta alrededor del año 620.

Aunque es cierto que el número racional más singular es el cero, la propiedad más delicada de los racionales está relacionada con el orden total que disfrutan y es su *densidad*: entre dos números racionales cualesquiera (tanto positivos como negativos) se encuentran infinitos números alojados entre estos dos (Bergé, 2010). Esta propiedad produce, más tarde, un conflicto cognitivo cuándo se dice que debemos llenar los "huecos" entre números racionales para completarlo y construir los números reales como base de todo el análisis matemático. El estudiante piensa: *Si ya me hicieron creer que estos racionales son densos y con estos puedo hacer todas las mediciones y cuentas posibles ¿para qué introducir más números no racionales y complicar mi vida?* Para poder responder a esta honesta inquietud usamos la historia y damos a conocer cómo aparecieron los primeros números "inconmensurables" o "inexpresables" y cómo se han hecho, poco a poco, imprescindibles, a la vez, que nuestro conocimiento del concepto *número* crecía hasta lograr independencia del concepto *magnitud* (Sánchez y González, 2013 o Sánchez y González, 2015). No deberíamos luchar contra estos conflictos cognitivos, sino aprovecharlos para desarrollarnos intelectualmente y ampliar nuestra cultura aritmética (ver p. e. Güveli, Bakri y Güveli, 2022).

IV. Números irracionales algebraicos

Los números irracionales pueden ser de dos tipos principales: *algebraicos* si existe algún polinomio que anulan (p. e. $\sqrt{2}$) y *trascendentes*, aquellos para los que no es posible encontrar una ecuación algebraica que los tenga como raíz (p. e. π). Los algebraicos aparecieron primero en los problemas de medición de magnitudes físicas o geométricas, posiblemente antes de que los pitagóricos se convirtieran en los sabios más duchos en las especulaciones esotéricas con los números. Los helenos los denominaron "inconmensurables" porque no se podían comparar con una unidad dada para medir, o "inexpresables" porque no podían expresarse como cociente de dos números enteros positivos.

El pitagórico Teodoro de Cirene (s. V a. C.), famoso geómetra, uno de los maestros de Platón, fue de los primeros en plantear una teoría de números irracionales algebraicos que será recogida en los "Elementos" de Euclides. En particular demostró que los lados de los cuadrados cuyas áreas miden un número primo son inconmensurables con el lado del cuadrado de área unidad. Teodoro, también, fue el autor de la conocida espiral que representa longitudes irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, .., \sqrt{17}$ como hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos 1 y 1, 1 y $\sqrt{2}$; 1 y $\sqrt{4} = 2$, y así hasta llegar a representar $\sqrt{17}$.

Posiblemente, después de las raíces cuadradas de 2 y 3, el número irracional algebraico más popular y utilizado sea el "número de oro" $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este es un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como *unidad de medida* sino como una relación o proporción entre magnitudes y ahora conocida como *razón áurea*. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracoles, flores, hojas y tallos de algunas plantas, el cuerpo humano, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la proporción áurea y algunos pueblos hasta le han otorgado una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido significado en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido refutados por escasa argumentación científica.

Desde el punto de vista puramente matemático es notable por estar entre los números que se expresan por proporciones entre magnitudes geométricas, a la vez son raíces de ecuaciones algebraicas y, no obstante, no es posible representarlos como cociente de dos números enteros.

Se conoce una sucesión de números enteros que posee asombrosas propiedades aritméticas y tiene lazos familiares con el número de oro. Se trata de la *sucesión de Fibonacci* F_n, introducida en el siglo XIII por el matemático Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonacci de ahí el sobrenombre de *figlio de Bonacci,* o más breve, *Fibonacci*).

Lo maravilloso es que si formamos el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, su valor numérico oscila siendo alternativamente menor y mayor que la razón áurea y cada vez más cerca de Φ. Más formalmente, el número de oro es el límite de la sucesión $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Este resultado fue descubierto empíricamente por el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler en el siglo XVII y pasaron más de 100 años hasta que pudiera demostrarse rigurosamente.

Una de las formas de desarrollar la matemática es con la investigación de la generalización de las relaciones cuantitativas y sus propiedades. En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales que por la forma como se definen constituyen generalizaciones del número de oro. Son los llamados *números metálicos*, determinados por la fórmula:

$\delta_N = \frac{N + \sqrt{N^2 + 4}}{2}$, dónde N es un número natural; si N=1 obtenemos el número de oro.

Cuando N=2, $\delta_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142135624$ y es costumbre llamarle *número de plata*.

Para N=3, $\delta_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 2{,}36602540378$ es conocido como *número de bronce*.

Se prueba que el número de oro es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Entonces, otra generalización del número de oro se realiza cambiando la ecuación cuadrática que lo define por la ecuación cúbica similar, es decir, $x^3 - x - 1 = 0$. La única raíz real (irracional) de esta ecuación es denominada *número plástico*. Se comprueba que el valor del número plástico *pl* es

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje holandés Hans van der Laan (1904-1991) en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Posteriormente fue estudiado más profundamente por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935). Como en el caso de la razón áurea, el número plástico aparece como el límite de la razón de los elementos contiguos de la *sucesión de Padovan* definida de forma similar a como se determina la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro:

$$P_{(n+1)} = P_{(n\text{-}1)} + P_{(n\text{-}2)},\ \ P_{(0)} = P_{(1)} = P_{(2)} = 1$$

sus elementos son llamados *números de Padovan:*

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 48, ...

Esta sucesión crece mucho más lentamente que la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro. Algunos números son comunes en ambas sucesiones, como *3, 5 y 21*, sin embargo, no se sabe si existen infinitas concurrencias o son solo una cantidad finita de coincidencias. Como en casos anteriores, existe una vasta bibliografía sobre estos números (ver p. e. Sánchez, 2019 o Sánchez y Roldán, 2012, pp. 58-64]

V. Números irracionales trascendentes

Los dos números irracionales más conocidos y que no son algebraicos son la constante de Arquímedes "π" y la base de los logaritmos neperianos "*e*". La constante de Arquímedes aparece ligada a uno de los célebres problemas de la antigüedad: el *problema de la cuadratura del círculo*, es decir, a la búsqueda de un cuadrado con la misma área de un círculo dado. La constante de Neper *e* aparece implícitamente vinculada a los logaritmos y al interés compuesto, como fuera tratada en la obra de Jacobo Bernoulli, se encuentra de forma más explícita y con toda su fortaleza en la obra de Euler. Por eso algunos, con razón, la llaman *número de Euler*, en lugar de número de Neper (o de Bernoulli).

La determinación del área de un círculo o la longitud de su circunferencia son problemas que aparecen en casi todas las grandes civilizaciones antiguas. Resulta natural que los matemáticos intentaran encontrar relaciones métricas en el círculo que, posteriormente, les facilitara la construcción con regla y compás de un cuadrado equivalente al círculo. En los *Elementos* de Euclides aparece demostrado que el área del círculo *C* es proporcional al cuadrado de su radio, así como la proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro:

$$\frac{\acute{A}rea(C)}{r^2} = k_1\, ,\ \frac{Per\acute{\imath}metro(C)}{d} = k_2\, ,\ \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son constantes.}$$

Fue el gran sabio de la antigüedad, Arquímedes de Siracusa, en un breve tratado titulado *Sobre la medida del círculo*, quien iluminó el camino que habría de seguirse. Lo primero que hizo fue probar una relación entre el área del círculo y la longitud de su circunferencia, para reducir un problema al otro. Luego, igualó las dos constantes de proporcionalidad k_1 y k_2 -asociadas al área y a la longitud, respectivamente- a una única constante universal, así surge la constante que desde el siglo XVIII se acostumbra denotar por la primera letra griega de la palabra *perímetro* π. El siracusano se esmeró en encontrar un valor aproximado de la constante π mejor que las aproximaciones usadas en las culturas prehelénicas. En este proceder original de Arquímedes se une, magistralmente, el razonamiento euclidiano con la aritmética práctica y la lógica con la logística. Es sorprendente este trabajo minucioso de Arquímedes. A pesar de los limitados recursos de cálculo de su época, Arquímedes se las ingenió para hallar el perímetro de los polígonos de hasta 96 lados inscritos y circunscritos a un círculo, y encontrar que la longitud de la circunferencia unidad, es decir, la constante π, satisface la relación: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ o, en notación decimal: $3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$. Si se toma la media aritmética de sus cotas superior e inferior, se obtiene $\pi \approx 3{,}1418535$, aproximación mucho mejor que las usadas por egipcios y babilonios, puesto que tiene tres cifras decimales exactas.

Arquímedes en esta obra *Sobre la medida del círculo*, en definitiva, llega al resultado genial que hoy podemos enunciar: "El área de todo círculo es igual al área de un triángulo rectángulo con un cateto igual al radio y el otro cateto igual al perímetro" (recomendamos la lectura del interesante libro González Urbaneja (2008) dónde se presentan estas y otras de las maravillas heurísticas de la obra de Arquímedes)

¿Pero cuándo se demostró que tanto π como *e* eran irracionales y trascendentes? La demostración de su irracionalidad fue dada en el siglo XVIII en la obra de Euler, perfeccionada por Johan Lambert. Ambos utilizaron una herramienta introducida en Europa a fines del s. XVI: *la representación por fracciones continuas*. Euler probó que si un número es racional su representación por fracciones continuas es finita, mientras que si el número es irracional entonces esa forma de representación es infinita. Seguidamente demostró que la representación de π así como la de *e*, eran fracciones continuas no finitas.

Tanto Euler como Lambert sospecharon que no existían polinomios $p_1(x)$ y $p_2(x)$ con coeficientes racionales tales que $p_1(\pi)=0$ y $p_2(e)=0$, pero no pudieron probar esa conjetura. Por primera vez se demostró en 1873 por el francés Charles Hermite que *e* era trascendente, generalizando las fracciones continuas numéricas a las funciones. Casi diez años más tarde, en 1882, el alemán Lindemann, perfeccionó la herramienta usada por Hermite y probó que e^γ es trascendente si γ es algebraico no nulo. A partir de este resultado, usó la famosa y bella identidad de Euler y probó que, como $e^{i\pi} = -1$, entonces $i\pi$ es trascendente. Pero *i* es algebraico (raíz del polinomio $p(x) = x^2 + 1$), luego π es trascendente: ¡maravilloso!

Poco tiempo después se conjeturó que, si la base es algebraica, diferente de 0 y de 1, y si el exponente es también algebraico, pero no racional, entonces el resultado es trascendente, por ejemplo, ¿será $2^{\sqrt{2}}$ trascendente? Ese enigma es el séptimo de los 23 problemas planteados por David Hilbert en 1900, como los problemas principales a resolver en el emergente siglo XX. Hubo que esperar a 1934 para que aparecieran dos artículos con las demostraciones independientes de esta conjetura: una del ruso Aleksandr Gelfond y otra del alemán Theodor Schneider. Con este resultado se comprobó que e^π es trascendente, ya que:

$$e^{\pi} = e^{(i\pi)^{-i}} = (-1)^{-i} \; (\approx 23,\, 140\ 692\ 632\ 779\ 269)$$

Pero hasta ahora (25 de marzo de 2023) no se sabe si

$$\pi^{e}\ (\approx 22,\, 459\ 157\ 718\ 361\ 045)$$

es algebraico o trascendente, aunque nadie crea que es algebraico**.** Existen muchos otros enigmas trascendentes y aunque este tema es más de estudios universitarios, con una correcta orientación, puede haber estudiantes de secundaria con interés y talento suficiente para encontrar algo interesante en la extensa bibliografía (p. e. el clásico Baker, 2022; o el moderno Natarajan y Thangadurai, 2020)

Para reflexionar y compartir

Hemos mostrado una cantidad infinitesimal de maravillas aritméticas que podemos encontrar con la ayuda de la Historia de la Matemática. Seguro que un maestro motivado y motivador encuentra muchos más. Se me ocurre que un tal maestro podría interesarse en los *números computables*, (ver p. e. Weihrauch, 2000) o sobre los números transfinitos (Sánchez y Valdés, 2010), que no fueron tratados aquí, porque ambos temas exceden nuestros objetivos. Pero, algo dentro de nuestros objetivos aún no tratado es ¿en qué momento del periodo de enseñanza podemos introducir unos u otros? Y ¿por qué? Los dominios numéricos constituyen en Cuba y me atrevo aseverar que en la totalidad de nuestros países americanos, una de las principales líneas directrices en la enseñanza de la Matemática en todos los niveles -primario, secundario, terciario-, se consideran como un eje transversal que permea todo con conocimientos, habilidades y formas de pensamiento matemático. Pero, ¿realmente los exponemos de una forma amena, seductora?, o simplemente, cumplimos un programa y nos ceñimos a repetir año tras año cómo operar con los números, cómo usarlos en mediciones. ¿Es que nos preocupamos por comprender las maravillas del universo aritmético?, ¿sufrimos la decepción de ver tanta apatía y hasta rechazo de muchos alumnos por la "vida y prodigios" de los diferentes dominios numéricos? Nos gustaría dialogar un poco, como colofón de esta charla, o quizás mejor, después de una reflexión, sentarnos sosegados, con un traguito de pisco o un cafecito, a compartir criterios sobre estos temas tan universales.

Referencias y bibliografía

Baker, A. (2022). *Transcendental number theory*, paperback edition. [Ed. Original, 1975] Cambridge Un. Press. Cambridge.

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *Int. Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Trad. Genís Sánchez Barberán. Ed. Paidós. España.

Burger, E. B. (2007). *Zero to infinity: a history of numbers*. The Teaching Company. Chantilly, Virginia.

Crilly, T. (2011). *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*. Ed. Ariel. Barcelona

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade*. 2da. Ed. Autêntica. Belo Horizonte

González, P. M. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Nivola. Libros y ediciones. Madrid. España.

Guy, R. K. (2004). *Unsolved problems in number theory.* Springer, New York.

Güveli, H., Bakri, A. y Güveli, E. (2022). The impact of the cognitive conflict approach on the elimination of the misconception in square root numbers. *Education Quarterly Reviews*, Vol.5 Special Issue 2: Current Education Research in Turkey, 39-52.

Natarajan, S. Y Thangaduri, R. (2020). *Pillars of trascendental number theory*. Springer. N. Y.

Sánchez, C. (2016). Temas fértiles para la cultura matemática *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 11, #15, 169-185.

Sánchez, C. (2019). La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 14 # 18

Sánchez, C. y González, L. G. (2013). La emancipación conceptual de número real de la idea de magnitud: una mirada germánica*. Ciencias Mat.* Vol. 27, nº1. 53-63.

Sánchez, C. y González, L. G. (2015). *Dedekind. El arquitecto de los números*. Nivola. Libros y ediciones. Madrid. España.

Sánchez, C. y Roldán, R. (2012). *Paseo por el universo de los números*. Editorial Academia. Ciudad de La Habana. Cuba.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2010). *El entrañable encanto de las matemáticas*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2017). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educ. Mat.* Vol.46, junio, 09-32.

Sándor, J. y Cristici, B. (2004). *Handbook of number theory II*. Kluwer Academic, Dordrecht.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10 000 años*. Crítica. ISBN 978-84-8432-369-3.

Weihrauch, K. (2000). *Computable analysis*, Texts in theoretical computer science, Springer. New York.

XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

El Estudio de Clases-Lesson Study como medio de investigación de las distintas formas de evaluación del aprendizaje de las Matemáticas con la Metodología de Resolución de Problemas

A Pesquisa de Aula-Lesson Study como meio de investigar as diferentes formas de avaliação da aprendizagem da Matemática com a Metodologia de Resolução de Problemas

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@ufscar.br

Resumen

La Metodología de Resolución de Problemas de Matemática es el eje principal del desarrollo profesional de los docentes para una enseñanza eficaz. Los pasos clave del Estudio de Clases para producir un plan de lecciones efectivo para el aprendizaje de un tema seleccionado brindan oportunidades de reflexión para los maestros mejoraran sus prácticas pedagógicas. A su vez, las etapas de Resolución de Problemas Matemáticos, investigadas a través de las visiones del papel de cada paso, desde la comprensión del problema, el modelado en lenguaje matemático, la movilización de conocimientos para diseñar estrategias/técnicas de resolución, y la retrospectiva de los resultados para validarlos dentro del problema, permiten una comprensión de los docentes sobre las diferentes formas de evaluación, como la diagnóstica, la formativa y la sumativa. El objetivo de esta conferencia es discutir el potencial del Estudio de Clases en los procesos de evaluación significativa del aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Formas de evaluación y aprendizaje en el aula; Resolución de problemas; Estudio de Clases-Lesson Study; Educación continua de los maestros; Análisis de errores en la resolución de problemas; Planificación de materiales y clases posevaluación.

Resumo

A Metodologia de Resolução de Problemas de Matemática é o principal eixo do desenvolvimento profissional dos professores para um ensino efetivo em sala de aula. Os principais passos da Pesquisa de Aula-Lesson Study para produzir um plano de aula eficaz para a aprendizagem de um tópico selecionado oferecem oportunidades de reflexão para os professores melhorarem suas práticas pedagógicas. Por sua vez, a Resolução de Problemas de Matemática, investigada através das perspectivas do papel de cada etapa, desde a compreensão do problema, a modelagem em linguagem matemática, a mobilização do conhecimento para desenhar estratégias/técnicas de resolução, e a retrospectiva dos resultados para validá-los dentro do problema, permitem uma compreensão dos professores sobre as diferentes formas de avaliação, como diagnóstica, formativa e somativa. O objetivo desta conferência é discutir o potencial da Pesquisa de Aula nos processos de avaliação significativa da aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Formas de avaliação e a aprendizagem na sala de aula; Resolução de problemas; Pesquisa de Aula-Lesson Study; Formação continuada de professores; Análise de erros na resolução de problemas; Planejamento de materiais e aulas pós-avaliação.

Introdução

Este texto apoia a apresentação da conferência "*El Estudio de Clases-Lesson Study como medio de investigación de las distintas formas de evaluación del aprendizaje de las Matemáticas con la Metodologia de Resolución de Problemas*" para a XVI CIAEM, de 31de julho a 04 de agosto de 2023.

O tema de *avaliação de aprendizagem de matemática* de estudantes da educação básica relacionado à metodologia de Lesson Study- Pesquisa de Aula (Estudio de Clases, em espanhol) e ao desenvolvimento de etapas da Resolução de Problemas é um tema recente de investigação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, modalidade Ensino de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos (PPGECE-UFSCar), sob supervisão da autora. Entretanto, a pesquisa da autora sobre o tema com este enfoque se iniciou antes, como na ocasião em que apresentou as reflexões sobre o papel da resolução de problemas nas *competências em avaliação dos professores de matemática*, durante o SEAMEO RECSAM- the University of Tsukuba Joint Symposium, dentro do congresso APEC-University of Tsukuba de 2015,e elaborou conexões dos princípios da Lesson Study-Pesquisa de Aula com os Parâmetros da Formação de Professores de Matemática, então em discussão no Sudeste Asiático (Baldin, 2015; 2016).

O objetivo desta conferência é trazer as considerações elaboradas em (Baldin, 2016) como extensão das reflexões de 2015, para enfatizar o potencial da metodologia de Lesson Study-Pesquisa de Aula no contexto atual brasileiro, tendo em vista os resultados produzidos recentemente numa dissertação de Mestrado de uma professora de ensino básico sobre o significado das modalidades de *avaliação diagnóstica e formativa* nos instrumentos de avaliação baseados em resolução de problemas, e consequências em suas práticas na sala de aula (Paravani, 2023).

Para situar o ponto inicial da linha de investigação dos trabalhos que mencionamos, delimitamos o foco das discussões sobre como o tema da avaliação se relaciona com a formação de professores que ensinam matemática, diante das concepções curriculares do século XXI.

Sobre o conceito de avaliação na formação de professores de matemática

O tema "avaliação" acompanha inevitavelmente as investigações sobre as atividades de "ensino", "aprendizagem", "coleta de indicadores", "gestão escolar", "formação de professores", entre diversas outras, em todos os níveis e esferas do sistema educacional. Portanto, o termo "*avaliação*" precisa estar delimitado enquanto conceito e objetivo nos estudos dentro da Educação Matemática, e estar claramente definido quando o utilizarmos para desenvolver os projetos de pesquisa propostos.

Um ponto de referência inicial para focarmos o nosso estudo do papel da avaliação na formação de um professor que ensina matemática se encontra na publicação de 1993, dentro da nova série de ICMI Studies Volume 2, de ICMI Study "*Investigations into Assessment in Mathematics Education"*, editado por Mogens Niss. (Niss, 1993).

Esta publicação apresenta várias contribuições com perspectivas diferentes que ilustram as discussões atualizadas no limiar do século XXI sobre o conceito em pauta de "avaliação", e analisou aspectos gerais e principais do conceito.

Ao destacar os desafios para aprimorar as práticas de avaliação na ótica de aprendizagem dos estudantes, Izard (1993, p. 185) afirma que a avaliação tem a função de trazer evidências da aprendizagem adquirida pelos estudantes de modo a facilitar o preparo para a aprendizagem subsequente, ou ainda assegurar ao estudante e ao professor que um nível desejado de aprendizagem foi alcançado. Izard continua que os professores poderão desenvolver e aperfeiçoar o processo de ensino/aprendizagem se conseguirem identificar as fortalezas de seus alunos e, também, as áreas de estudo que requeiram mais atenção. Apoiando-se numa citação de Clarke (1989, p.4), Izard aponta que a avaliação de aprendizagem precisa informar mais do que um nível de desempenho de um aluno, mas deve informar as ações de todos os participantes numa situação de aprendizagem, conectando a avaliação em si com a revisão das ações realizadas de ensino e a antecipação do ensino a seguir. Esta visão da avaliação traz uma base para a linha de pesquisa na formação do professor que aprende a ensinar, com os resultados que possam ser validados por uma avaliação focada na aprendizagem dos alunos e conectada à prática de ensino. Ainda, Izard argumenta a importância dos procedimentos de avaliação pela influência que estes provocam no ensino em geral, enquanto aponta que os resultados de testes formalizados aplicados numa classe representam apenas uma parte das atividades de avaliação da classe. Estas, por sua vez, devem incluir os questionamentos do professor, comentários das ações realizadas na classe durante as tarefas propostas, e outras formas de verificação de aprendizagem efetiva e da eficácia das tarefas executadas.

Percebemos então que podemos ampliar o conceito de avaliação de aprendizagem em uma classe, ao incluir aspectos de avaliação das ações planejadas para uma aula, a realização dessas ações numa classe, e seus resultados analisados após a aula realizada, o que nos motiva a conectar esse conceito ampliado aos princípios da Lesson Study-Pesquisa de Aula como adaptado no PPGECE-UFSCar, que contêm fortemente componentes de avaliação nas suas etapas: a) refletir e estudar os conteúdos específicos do tema de aula e os objetivos curriculares; b) planejar uma aula (ou sequência de aulas) com minúcias que incluem antecipação de ações dos alunos e conduta do docente; c) realizar a aula planejada, com colaboradores que possam acompanhar a aprendizagem dos alunos e o andamento da aula; d) investigar os resultados da aula realizada com o plano elaborado, mediante reflexões e comentários críticos do docente, dos observadores e de especialistas convidados, quando possivel. (Baldin; Felix, 2011; Baldin, 2016).

Ainda dentro dos desafios do papel da avaliação nas formas de instrução escolar, o capítulo de Izard (1993, p. 186) aponta para o poder da prática de testes de avaliação em escala que influencia o currículo, o ensino e a aprendizagem, advertindo ao perigo de direcionar as atividades de ensino e aprendizagem em função dos resultados dos testes. Após várias décadas, essas considerações ainda trazem reflexões e reconhecimento da predominância delas entre professores e escolas no nosso entorno que planejam suas atividades didáticas em função das avaliações quantitativas, resultantes de testes padronizados e das tabelas comparativas entre os sistemas educacionais, impactando a política educacional. Isto traz uma fragilidade na concepção dos professores sobre o seu papel no processo de ensino, delimitando o efeito das suas práticas sob uma dependência de resultados de testes padronizados ou tarefas de treinamento de procedimentos.

Ainda neste ICMI Study o artigo de Webb (1993, p.254) sistematiza a construção de uma teoria para a avaliação de conhecimentos de matemática para dar suporte a pesquisas de educação matemática, pela importância estratégica que essa avaliação, com destaque aos conhecimentos de matemática, tem para o desenvolvimento de um país. O autor aponta para a especificidade do conhecimento de matemática que se distingue das habilidades cognitivas gerais. Neste sentido, Webb aponta que a natureza do conhecimento do *conteúdo específico de matemática* e as *abordagens pedagógicas para o ensino da matemática* exigem consideração para técnicas específicas de *avaliação* nesta área de conhecimento, com especial atenção a diferentes formas de representação de pensamento matemático que os estudantes desenvolvem ao longo dos anos escolares. Esta visão corrobora as teorias como de Conhecimento Pedagógico de Matemática para o Ensino – MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*) (Ball; Bass, 2003), que sustentam, desde a virada do século XXI as pesquisas de Educação Matemática na Formação de Professores que ensinam matemática. Esta visão constitui também uma fundamentação para a linha de pesquisa, apresentada nesta conferência, de investigar a competência do professor, que ensina matemática na escola básica, em dominar os conceitos de avaliação própria da aprendizagem da matemática, para aprimorar sua prática profissional.

Para aperfeiçoar o balanceamento entre o desenho dos instrumentos de avaliação e os objetivos da avaliação que identifiquem melhor as habilidades de pensamento matemático, Swan (1993, p. 195) aponta as tendências dos estudos sobre as avaliações de aprendizagem da matemática que viriam a ser aprofundadas e adotadas largamente nos documentos das reformas curriculares nos anos seguintes e atualmente. Swan destaca nesses estudos a necessidade de compreender as distintas formas de avaliação que captem as dimensões da avaliação de acordo com os objetivos estabelecidos. Assim, três tipos de avaliação, classificados segundo objetivos distintos, são apresentados (Swan, 1993, p. 195): -*Avaliação Formativa* que visa identificar os conhecimentos aprendidos pelo estudante de modo que uma retomada adequada de conteúdo a seguir possa ser desenhada e proposta. Nesta avaliação fica incluída a *avaliação diagnóstica*, em que as dificuldades de aprendizagem e equívocos conceituais são identificados. Esta avaliação precede e orienta o processo de ensino, e é desenhada para o benefício dos estudantes; - A*valiação Somativa* que mede e registra o desempenho geral/final de maneira sistemática. Esta avaliação ocorre geralmente no término de um curso, ou período escolar, e é desenhada prioritariamente para informar os professores ou administradores, e por vezes, ajudar em processos de seleção; - *Atividade Avaliativa* que envolve a avaliação e o relatório sobre o trabalho de um professor, escola, livro ou material didático, ou qualquer outro instrumento dentro de um serviço educativo. Esta atividade é principalmente desenhada para informar os pais e os administradores de educação. (Swan, 1993, p. 196).

Notamos que essencialmente as avaliações diagnóstica e formativa, de caráter mais qualitativo, e a somativa, de caráter quantitativo, são as mais encontradas nos documentos curriculares no Brasil, como a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2018).

Metodologia de resolução de problemas e Lesson Study-Pesquisa de Aula

Na conferência mostramos as motivações para o tema de avaliação na discussão da competência do professor em trabalhar um currículo de matemática do século XXI, em que o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, através dos eixos de conhecimento distribuídos nas áreas de conteúdo, constitui o objetivo essencial da educação escolar básica. Para isso, torna-se essencial a transformação da concepção geral dos professores de que as tarefas do ensino nas salas de aula são desenhadas em função das avaliações padronizadas, para obter resultados quantitativamente satisfatórias do desempenho dos alunos. Com essa concepção limitada, os professores se colocam como corretores das avaliações a que os estudantes são submetidos, e o planejamento de aulas, após a correção, é baseado em "corrigir" os erros verificados nas respostas e apresentar procedimentos para a resolução.

Na linha de pesquisa de Lesson Study-Pesquisa de Aula como estratégia de formação de professores utilizamos as etapas da resolução de problemas para a elaboração de planos de aula, onde o protagonismo dos alunos é estimulado pelo diálogo e questionamentos: na compreensão das situações problema; nas atividades de modelagem de sentenças matemáticas para problematização da situação; na elaboração de estratégias diversas para a resolução; seguidas de socialização das respostas e estratégias, com justificativas para validar a resposta e todo processo de resolução.

Na perspectiva do professor que conduz as fases da resolução de problemas como uma metodologia ativa de participação do aluno na sua aprendizagem, os princípios da Pesquisa de Aula são percebidos, aprendidos e potencializados. Em outras palavras, as etapas de resolução de problemas se conectam com o ciclo das fases da Lesson Study- Pesquisa de Aula, como momentos de investigação da prática do professor.

Quando o professor reconhece a mudança do seu papel no processo de aprendizagem dos alunos que desenvolvem o pensamento matemático por meio da resolução de problemas, o professor começa a desenvolver sua *competência em avaliar* os estágios de aprendizagem dos alunos nas distintas fases da resolução de problemas. Logo, a competência do professor para analisar os problemas em um instrumento de avaliação diagnóstica significa saber avaliar os níveis de conhecimento de conteúdo de cada aluno por suas respostas, o nível de domínio de técnicas utilizadas por cada aluno na resolução, e a capacidade de comunicação de ideias matemáticas por meio de representações e linguagens adequadas. Esta competência se torna um tema de pesquisa relevante na formação continuada de professores que ensinam matemática. (Baldin, 2016)

Considerações finais.

O tema da conferência explora a implicação da competência em avaliação diagnóstica e formativa dos professores de matemática no aprofundamento da compreensão do currículo escolar e dos planos de ensino que realizem as recomendações curriculares, de forma que os capacitem a planejar aulas voltadas para as necessidades reais de aprendizagem dos alunos da sua classe. Além disso, a competência em avaliação do professor ajuda a compreender o papel da análise dos erros das respostas dos alunos, não para julgar o desempenho, mas para orientar uma aprendizagem eficaz. O estudo de caso de Paravani (2023) apresentou uma interessante análise das respostas a uma avaliação diagnóstica de alunos de uma classe do 7º ano do ensino fundamental que retornaram em 2021 à rotina escolar, após o período de isolamento imposto pela pandemia nos anos 2019 e 2020. O estudo constituiu uma valiosa fonte de evidências para sustentar a linha de pesquisa que busca esclarecer a resolução de problemas como um instrumento de avaliação de aprendizagem (formativa e somativa) contribuindo para o desenvolvimento de competência profissional do professor. (Paravani, 2023; Baldin, 2016; Baldin 2023)

Referências

Baldin, Y.Y. y Felix, T.F. (2011) A pesquisa de aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. Em *Anais eletrônicos do XIII CIAEM 50 anos. Texto em pdf disponível em* https://xiii.ciaem-redumate.org

Baldin, Y.Y. (2015). Competency in Assessment for Teacher Standards: brief reflection, Presentation in SEAMEO RECSAM- the University of Tsukuba Joint Symposium, access to15021607 file from https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2015/

Baldin, Y.Y. (2016). Reflections about the Role of Problem-Solving Lessons in the Competency in Assessment for Teacher Standards, full-text paper upon the presentation (Baldin, 2015).

Baldin, Y.Y. (2023). La resolución de problemas mediante el cuestionamiento como instrumento de evaluación de clases de educación básica. Presentación como cursillo para XIII Simposio MEM- Universidad Antonio Nariño, 2023.

Ball, D. L., Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (eds), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM

Brasil (2018) Ministério de Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.

Clarke, J.R.P. (1989). Introduction. *Measurement and Control*, Volume 2, issue 4. https://doi.org/10.1177/002029408902200401.

Izard, J. (1993). Challenges to the improvement of assessment practice. In Mogens Niss (Ed) *ICMI Study Investigations into Assessment in Mathematics Education*, pp 185-194. Kluwer Academic Pub.

Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: an introduction. In Mogens Niss (Ed) *ICMI Study Investigations into Assessment in Mathematics Education*, pp 1-30. Kluwer Academic Pub.

Paravani, A. (2023*). A Metodologia de Resolução de Problemas em atividades de avaliação diagnóstica e formativa de acordo com o currículo do estado de São Paulo*. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar. 94 páginas.

Swan, M. (1993). Improving the design and balance of mathematical assessment. In Mogens Niss (Ed) *ICMI Study Investigations into Assessment in Mathematics Education*, pp 185-194. Kluwer Academic Pub.

Webb, N. (1993). Visualizing a theory of the assessment of students' knowledge of mathematics. In Mogens Niss (Ed) *ICMI Study Investigations into Assessment in Mathematics Education*, pp 185-194. Kluwer Academic Pub.

Desafíos en la formación del profesorado de Matemática durante la pandemia

Claudia **Vargas** Díaz
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile
Chile
Claudia.vargas.d@usach.cl

Resumen

Los últimos tres años nos han llevado a replantear nuestros programas de estudios, priorizar contenido e incorporar tecnologías que no son nuevas ya. En el ámbito de la didáctica de la matemática hemos debido analizar el potencial de la investigación en la aplicabilidad de lo enseñado acercándonos lo más seriamente posible a las necesidades de los educandos. No sólo desde la perspectiva de comprender si la pandemia tiene un crecimiento exponencial. Si no, más bien, sobre cuáles son los problemas reales a los que se ven enfrentadas las comunidades escolares y los ciudadanos. En este minicurso, veremos casos que fueron estudiados en clases acerca del uso de la geometría, estadística, álgebra y cálculo, en temas contingentes entre los años académicos 2020 y 2022. Todos fueron tópicos posibles de tratar por parte del estudiantado universitario y por supuesto con miras a su desenvolviendo futuro como profesorado en el sistema chileno.

Palabras clave: Educación Matemática; Formación de Profesores; Enseñanza virtual;

Introducción

En el minicurso se darán a conocer los proyectos realizados en la asignatura de Didáctica de la Geometría y la Estadística con estudiantes en formación del profesorado de matemática durante la pandemia del COVID-19 y se hará un mini taller similar a lo realizado en clases con el estudiantado.

Dadas las condiciones de clases a distancia, lo que fueron clases presenciales debieron ser transformadas en enseñanza a distancia a través de la plataforma de reuniones Zoom ©. Dentro de las adaptaciones que esta necesidad dio origen, se consideró la metodología de aprendizaje basado en proyectos ya que esta metodología conlleva que las actividades que realicen los estudiantes deben ser significativas en cuanto a que, en este caso, dejen huella en la formación didáctica en geometría y estadística de futuros profesores y futuras profesoras en tiempos de pandemia. En particular, los temas que se deben tratar deben considerar los intereses y motivaciones del estudiantado para que se comprometan con su aprendizaje (Martí et al, 2012).

Se destacan proyectos como el plebiscito por una nueva constitución en Chile, Videos de Origami, y Plagio en la Academia, proyectos seleccionados con base en la colaboración y la resiliencia, con énfasis en que el estudiantado se apropie del contenido de geometría y estadística.

El escenario de la pandemia por COVID y las adaptaciones realizadas fueron descritas en Vargas (2021), destacándose que las actividades de formación ya no podrían ser las mismas que en una situación de normalidad previo a la pandemia y, por otro lado, debían ser actividades desafiantes y relacionadas con la vida cotidiana y las situaciones país que estábamos experimentando. En este sentido, la toma de datos en línea a través de formularios o la creación de videos parecieron ser lo suficientemente interesantes para una formación en la que el estudiantado viviera la matemática y se pudiera conectar con el futuro profesor en que se convertirá.

Plebiscito por una nueva constitución en Chile

En octubre de 2019 se vivió el denominado estallido social en Chile, lo que desembocó en el plebiscito para la elaboración de una nueva constitución o carta magna del país. Esta situación produjo alto interés en predecir los resultados de la votación entre el estudiantado. De modo que se configuró el proyecto recogiendo las inquietudes del estudiantado con el objetivo de estudiar las percepciones de los futuros profesores de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática y tomar los datos ellos mismos siguiendo a Jacobsen (1989). La muestra estuvo conformada por los estudiantes del programa de distintos años de ingreso. La información se recogió mediante una encuesta de Google Forms cuyas preguntas fueron diseñadas y elaboradas por los estudiantes de la asignatura.

Para la caracterización de las personas participantes se consideró:

1. El año de ingreso al programa de estudios.
2. Las diez denominaciones de género.
3. El lugar de residencia (comuna, ciudad, región)

Las preguntas fueron:

a. ¿Ha votado en alguna elección popular de cargos (Municipal, Parlamentaria, Primarias o Presidencial) antes de este Plebiscito?
b. ¿Conoce la fecha en que se realizará el Plebiscito?
c. ¿Tiene usted intención de votar en el Plebiscito?
d. Si concurriera a votar, ¿lo hará en la misma comuna en que usted vive?

e. ¿Cree usted que la situación de pandemia por COVID-19 afectará la participación en el proceso del Plebiscito?
f. En una escala de 1 al 5, ¿cuál cree usted que es el Nivel de Riesgo de contagio por COVID-19 durante el Plebiscito?
g. ¿Ha leído alguna vez la actual Constitución Política de Chile, ratificada en el año 1980?
h. ¿Conoce las opciones de voto en el Plebiscito?
i. ¿Conoce la diferencia entre la Convención Constitucional y la Convención Mixta Constitucional?
j. Respecto de la primera pregunta del Plebiscito: "¿Quiere usted una Nueva Constitución?", selecciona la opción QUE USTED CREES que resultará ganadora
k. Respecto de la segunda pregunta del Plebiscito: "¿Qué tipo de órgano debiera redactar la Nueva Constitución?", selecciona la opción QUE USTED CREES que resultará ganadora.

El grupo de estudiantes realizó un análisis descriptivo de las distintas variables según su tipo utilizando las herramientas que provee Google Forms. Así mismo, algunos equipos construyeron test de hipótesis para determinar si se podía concluir, por sobre el azar, los resultados que se obtuvieron y en algunos casos hicieron un análisis correlacional entre variables.

Con base en las tareas realizadas, se puede concluir que el estudiantado que se forma para profesor de educación matemática es capaz de formular preguntas adecuadas al tema que se quiere abordar, identifica el tipo de variable de estudio (cualitativa, dicotómica, etc.) y escasamente puede establecer relaciones entre las variables, llegando a realizar test de hipótesis muy simples acerca de las variables dicotómicas.

Origami

Dentro de los años de las precauciones sanitarias tomadas en pandemia se dio la oportunidad de hacer dos festivales de videos. El primero de ellos fue relatado en (Vargas, 2021). El segundo se trató sobre origami y sus aplicaciones en la vida cotidiana. El estudiantado preparó un festival (Fig. 1) con diversos videos sobre el origami y su relación con la geometría. Este festival se inspiró en las ideas sobre festival de videos digitales reflejadas en Domingues y Borba (2018).

Figura 1. Afiche festival de videos.

Respecto de las habilidades desarrolladas por el estudiantado, fueron capaces de crear sus propios modelos de origami y descubrir la geometría presente en ellos. Se trató de videos que explican:

a) El origami está presente en la naturaleza (Lee, 2021).
b) El origami puede ayudar en medicina (Roldán, 2021).
c) El origami snapology (Soto, 2021).
d) La funcionalidad del plegado en el mundo (Gálvez, 2021).

Con base en lo realizado, se puede concluir que el estudiantado se motivó por realizar creaciones originales relativas al origami comprendiendo su utilización y presencia en distintos aspectos de la vida cotidiana. Fueron capaces de identificar la geometría que subyace en los modelos creados en papel doblado y desarrollaron habilidades plásticas y creacionales, que harán probablemente su docencia. También fueron protagonistas de su propio aprendizaje mediante este proyecto realizado.

En el minicurso se hará una actividad tipo taller en el cual se desarrollará un modelo de origami.

Plagio en la academia

Otro de los trabajos realizados durante la pandemia en el año 2021 fue el relativo al plagio en la academia (Cebrián-Robles et al, 2018). Mayoritariamente se centró en por qué ocurre y se quiso hacer un análisis estadístico con relación a la percepción sobre el plagio académico en estudiantes universitarios garantizando su anonimato. La encuesta fue respondida por estudiantes de distintas universidades y centros de estudio chilenos llegando a obtener 130 respuestas.

Para la caracterización de las personas participantes se consideró:

1. El año de ingreso al programa de estudios.
2. Las diez denominaciones de género.

Las preguntas tenían como opciones de respuesta: *(a) La conducta es honesta, (b) La conducta es deshonesta, (c) Depende de la situación específica. Por favor comente a continuación,* y fueron adaptadas del instrumento de (Cebrián-Robles et al, 2018).

Las preguntas fueron las siguientes:

1. Entregar un trabajo realizado por otro/a alumno/a que ya había sido entregado en cursos anteriores (para la misma asignatura o para otra).
2. Copiar de páginas web fragmentos de textos y —sin citar—pegarlos directamente en un documento —en el cual hay una parte de texto escrita por uno mismo— y entregarlo como trabajo de una asignatura.
3. Bajar un trabajo completo de Internet y entregarlo, sin modificar, como trabajo propio de una asignatura.

4. Copiar fragmentos de fuentes impresas (libros, enciclopedias, periódicos, artículos de revista, etc.) y añadirlos —sin citar— como partes de un trabajo propio de una asignatura.
5. Hacer íntegramente un trabajo a partir de fragmentos copiados literalmente de páginas web (sin que ninguna parte del trabajo haya sido realmente escrita por el alumno/a).
6. Copiar partes de mis trabajos entregados durante cursos anteriores y usarlos como apartados de un trabajo nuevo.
7. Copiar imágenes, vídeos y sonidos de Google sin indicar la autoría y dónde se obtuvo.
8. Debido a que el plagio consiste en tomar palabras de otra persona y no sus bienes materiales, el plagio no es gran cosa.

La captura de respuestas y los análisis de los datos se realizaron de manera análoga al proyecto del Plebiscito.

Con este trabajo, el estudiantado logró en primera instancia conocer los tipos de plagio que se puede cometer y por otro lado pudieron con base en lo obtenido sacar conclusiones interesantes sobre las razones por las que se comete plagio. No obstante, no se puede garantizar que este nuevo conocimiento impacte en una forma positiva en las conductas posteriores de los propios encuestadores, ya que el plagio es una práctica cada vez más común y que requiere de una política sobre el tema en cada centro de estudio.

Referencias y bibliografía

Cebrián-Robles, V.; Raposo-Rivas, M.; Cebrián-de-la-Serna, M. y Sarmiento-Campos, J.A. (2018). Percepción sobre el plagio académico de estudiantes universitarios españoles. *Educación XX1*, 21(2), 105-129, doi: 10.5944/educXX1.20062

Domingues, N., Borba, M. (2018). Compreendendo o i festival de vídeos digitais e educação mate-mática. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 15, n. 18, p. 47-68, jan. /abr. 2018. Umapublicação da Regional São Paulo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Lee, G. (2021.) El plegado de la naturaleza. https://youtu.be/g5FPdmTQBjY

Gálvez, L. (2021). La funcionalidad del plegado en el mundo. https://youtu.be/4QsQGQMBl2Y

Jacobsen, E. (1989). ¿Por qué debe enseñarse estadística en el mundo actual?. En Estudios en educación matemática. La enseñanza de la estadística. Ed. Robert Morris. Unesco.

Martí, J., Heydrich, M., Rojas, M. y Hernández, A. (2012). Aprendizaje basado en proyectos: una experiencia de innovación docente. *Revista Universidad EAFIT*, 46(158) 11-21.

Roldán, N. (2021). El origami en el cuerpo humano. https://www.youtube.com/watch?v=gsNXJHer60U

Soto, D. (2021). Plegado de papel snapology. https://www.youtube.com/watch?v=KRyBIxPjMH4

Vargas, C. (2021). Adaptaciones en la formación del profesorado durante la pandemia: proyecto de producción de vídeos digitales acerca de contenidos de geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación enEeducación Matemática.* Núm. 20 (2021). Parte II.

Ellos no saben, yo debo saber: ¿Qué es lo que no saben?, ¿Qué es lo que yo debo saber? Algunos pocos aprenden matemática: ¿tiene que ser necesariamente así?

Fidel **Oteiza** Morra
Chile
fidel.oteiza@gmail.com

Resumen

En esta oportunidad me propongo desenfocar el tema de la enseñanza de la matemática, en el sentido de entornar los ojos, de mirar alrededor, de apartarnos de la mirada habitual. Me propongo compartir con ustedes una larga búsqueda: comprender, tanto en lo que hacemos como lo que no hacemos, lo que debemos cambiar para lograr que muchos, la mayoría, ¡deseablemente todos los que confiando en nosotros asisten a una clase de matemática! aprendan … matemática. ¡Gracias!

Palabras clave: Educación Matemática; Formación docente; Enseñanza de la matemática; Evaluación; Chile.

¿Qué es lo que nuestros alumnos no saben y que nosotros podemos ayudarles a aprender?
¿Lo sabemos nosotros? Y, si lo sabemos, ¿sabemos cómo ayudarlos en su camino?

Si usted acepta que sólo una pequeña parte de los alumnos aprenden matemática o está contento o contenta con su manera de enseñar matemática, este escrito no es para usted, de algún modo ya ha aceptado o resuelto lo que aquí nos proponemos buscar.

Agradezco que estemos aquí, que podamos mirar juntos un tema difícil, aparentemente sin solución y al que vale la pena atender.

Sólo unos pocos aprenden matemática, aprenden a gustarle y a perseverar en su aprendizaje. Muchos se apartan, la temen o la ignoran.

Esta situación se opone, abiertamente, con la convicción - expresada por todos los currículos del mundo – de que todos deben aprender matemática

El tema de fondo: la convicción de que hay algo que no estamos viendo, algo que la profesión, como conjunto, hace y otras cosas que no hace y que perpetúan la noción de que la matemática es para unos pocos y que para muchos, es opaca, difícil y ajena.

El dilema es claro. Los padres desean que sus hijos sepan matemática, los estados lo ponen como un objetivo preferente de sus escuelas, probablemente usted, como nosotros, piensa que la matemática es una poderosa manera de comprender el mundo.

La mayoría, personas e instituciones, es evaluada en sus capacidades cognitivas, a través de la matemática; las pruebas nacionales evalúan a los establecimientos educacionales, fundamentalmente, por su capacidad para enseñar matemática, las pruebas internacionales clasifican a los países Y…, los que deciden los currículos nacionales, los directivos en sus diferentes niveles y la misma profesión de profesor de matemática actúa como si se tratase sólo de seleccionar a los mejores y trabajar con ellos.

Se propone explorar la hipótesis de trabajo siguiente:

Al contar acerca de la matemática, dando definiciones, enunciando y demostrando teoremas, explicando procedimientos y luego pidiéndoles a nuestros alumnos que apliquen esas ideas a problemas especialmente elegidos, se oculta parte importante del proceso de hacer matemática, de pensar, de dudar, de buscar soluciones y el resultado es una versión aguada de la experiencia matemática. Sólo personas que ya tienen la motivación propia para aprender aprenden.

Y, enseñando matemática no lo logramos, no logramos que la mayoría aprenda.
A la didáctica también le cuesta entrar a la sala.
Sólo un puñado de jóvenes se interesa, le pone energía y aprende.
La mayoría queda fuera, siente la matemática extraña, difícil, fuera de su alcance o fuera de sus intereses.

¿Qué es lo que no vemos o no sabemos y por lo tanto no los apoyamos en su camino?

Otra forma de expresar la idea sería: el aprendizaje es el resultado de un proceso personal, único e intransferible. Nuestro papel, entonces, es detonar en otros un proceso que sólo ellos pueden realizar.

Es posible que "contar el cuento de la matemática" sea una acción que adormece (Bateson, 1972), lo que está lejos de detonar interés.

¿Qué es lo que nuestros alumnos no saben y que nosotros no se lo estamos proponiendo?

En el centro de la actuación del profesor está el hecho de que algunos saben o creen saber, lo que otros no saben y, por lo tanto, que el docente lo debe saber.

El currículo no es otra cosa que la materialización de ese pensamiento hecha por quién tiene la autoridad para hacerlo.

¿Qué les comunicamos a los jóvenes con nuestra actuación? ¿Qué es lo que no saben y que deben saber?

Si somos profesores de matemática los que respondemos esas preguntas lo más probable es que pensemos en temas de la matemática o en la didáctica, la forma en que se enseñan esos temas.

Si leemos los planes y programas, es precisamente matemática y orientaciones didácticas lo que contienen.

¿Qué es lo que nuestros alumnos no saben y que nosotros NO estamos viendo?

Piense en un "currículo" diferente al obvio.

Puede que nuestros alumnos no sepan: *¡Que pueden aprender! Que aprender puede ser entretenido. También, lo que es central para explicar los magros resultados de la enseñanza de la matemática, no saber ¡que son capaces de hacer matemática!*

Puede que no tengan conciencia de que son *"máquinas" procesadoras de información de "última generación"*, con un potencial mayor que el más avanzado de los computadores. Con *capacidades innatas para conjeturar, verificar si sus conjeturas son ciertas o falsas y actuar de acuerdo con los resultados de su verificación.*

Puede que no sepan que, como seres humanos, "hacemos matemática" a la velocidad del rayo, al menos nuestro cuerpo, nuestra mente, lo hace

Al caminar, al manejar una bicicleta, al manejar un automóvil, calculamos velocidades instantáneas, es decir derivamos; calculamos distancias a partir de esas velocidades y posiciones iniciales, es decir integramos y… con esa capacidad instalada, puede que le tengamos miedo a una suma de fracciones.

Son capaces de conjeturar y verificar la conjetura y, no lo saben.

Una situación particularmente interesante es la que nos muestra cómo el "sistema – cuerpo" observa, hace conjeturas y las verifica. Esto es lo que más adelante conducirá a conjeturas, teoremas y demostraciones. ¿Un sonido?, instantáneamente, surge la imagen de él o la que estamos esperando, le ponemos un significado. También el "sistema" verifica si es o no así. Cada percepción desencadena el proceso automático que le da sentido, la agrega contenidos.

Y, en clase, frente a un teorema esa capacidad no se activa. La demostración, ¡Oh!, ¡Horror! ¿Entra para la prueba? ¿hay que aprenderla?

Puede que no sepa poner a prueba la información que reciben. Puede que necesite desarrollar su capacidad crítica. ¿Dispone de criterios y formas de poner a prueba la veracidad o pertinencia de un documento o un producto digital? ¿Se siente en posición de poner en duda algo que se le presente en formato escrito? O, ¿lo mismo al considerar una App u otro producto digital provisto de inteligencia artificial? Para tener capacidad crítica se requiere de confianza en sí mismo, en sí misma. Para comparar, hacernos preguntas o cuestionar, es necesario estar parado o parada en alguna parte.

Roberto Araya (2021)[1] se pregunta si el ciudadano de hoy y del futuro próximo podrá tener confianza en los "asesores inteligentes" que usará para orientar sus decisiones. Estamos preparados, argumenta, para confiar en unos pocos agentes, ahora estamos en contacto con incontables seres que opinan, proponen, actúan de modo independiente a nuestras intenciones. ¿Cuál es la educación que se hace cargo de esto?

Tal vez no logran armonizar su mundo interno con el mundo externo. ¿Cómo se relacionan sueños, imaginación, metas personales, sentimientos, anhelos, deseos, sensualidad, auto percepciones con lo tangible, con los demás, las obligaciones, las reglas del mundo exterior? En esta relación se construye el concepto de sí, la necesaria estabilidad emocional y parte importante de la historia personal. Un llamado al "observador interno" o al desarrollo espiritual si se acepta la noción.

¿Qué es lo que yo debo saber?

Una manera de pensar es que nos hemos preparado para "enseñar matemática" y lo que nos enseñaron como efectivo para enseñar es "contar el cuento de la matemática".

De poco valen los "relatos de poder" (Carlos Castaneda), lo que necesitamos es la experiencia del poder, experimentar el poder hacer, experimentar el placer de ser causa (Jean Piaget).

¿Cómo les pasamos el bastón?, ¿cómo les entregamos las herramientas? Nadie le enseña nada a nadie (Paulo Freire), todos aprendemos en interacción con el mundo. ¿Cómo aumentar la cantidad de los que aprenden y cómo elevar la calidad de lo que aprenden?

[1] Roberto Araya (2021), en un trabajo citado más adelante se pregunta si el ciudadano de hoy y del futuro próximo podrá tener confianza en los "asesores inteligentes" que usará para orientar sus decisiones. Estamos preparados, argumenta, para confiar en unos pocos agentes, ahora estamos en contacto con miles, incontables seres que opinan proponen, actúan de modo independiente a nuestras intenciones.

Ellos no saben, yo debo saber: ¿Qué es lo que no saben?, ¿Qué es lo que yo debo saber? Algunos pocos aprenden matemática: ¿tiene que ser necesariamente así?

Algo de lo que oculta el contar el cuento y la pregunta para nosotros: ¿lo sabemos?

¿Para qué, cómo, cuándo se descubrió? ¿Cuándo, quién, en qué circunstancias?

¿Qué lugar ocupa en el edificio de la matemática? ¿En qué contexto se usan los modelos matemáticos? La física, la química, las ciencias y el contexto.

¿Por qué aprender matemática? ¿Cuándo me salvará la vida? (Jorge Soto)

¿Cuál es el modelo básico? Todo concepto, todo procedimiento, toda relación matemática tiene un núcleo, una expresión básica, una metáfora que conocida potencia su comprensión.

¿Cómo lo hice?, ¿Cómo lo pensé? ¿Tenemos competencias metacognitivas? ¿Somos capaces de pensar acerca de nuestro pensar? ¿Lo hacemos? ¿Tenemos las competencias para compartir ese conocimiento? Bateson (1972) dice que todos tenemos una epistemología, lo que sucede es que no lo sabemos. Otra tarea para nosotros, los educadores, reconocer cuál es nuestro concepto acerca del conocer.

Y, hay mucho más …

El error es una joya. *Si, a condición de que en la sala esté presente quién reconozca una gema.*

Las notas son un obstáculo que hay que aprender a sortear. *Una conjetura.* ***Una conjetura: estudiar para la prueba prepara el olvido.***

Aprender para la nota genera un mecanismo cognitivo que induce el olvido. *Pensémoslo así, si aprendo para la nota, una vez dada la prueba, una vez alcanzado el objetivo del aprendizaje, ese conocimiento ya no es útil, cumplió su propósito, se puede prescindir de él.*

La creatividad es para todos. *"Si no lo he creado, no lo comprendo"* (Richard Feynmann).

El ser humano aprende más y mejor cuando emite que cuando recibe. *"Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y, aprendo"* (Anónimo chino).

El cuerpo, las emociones y sistema de creencias.

Y, … ¿alguna conclusión?

Nos propusimos "desenfocar la mirada" con el objeto de buscar "lo que no estamos enseñando", poner en tela de juicio, tanto lo que hacemos para enseñar como lo que proponemos como currículo, como camino para aprender.

Las "pistas" en las páginas precedentes, son repuestas que puse en acción y, por lo tanto, a prueba, en la docencia y en los proyectos de investigación y desarrollo realizados.

Llegado a este punto entreveo algo que subyace a esas experiencias, y en esta oportunidad quisiera enunciarlo y someterlo a prueba.

Este escrito es parte de una trilogía más uno, como en los cuatro mosqueteros.

- ¿Qué no estamos viendo o no haciendo? *La comentada en esta presentación*.
- ¿Por qué la didáctica, la epistemología, la tecnología digital o la vida no puede entrar a la clase de matemática? (Oteiza, 2019).
- ¿Qué formación inicial indica este análisis? Está en formato borrador y recoge, de este escrito, los desafíos para la formación inicial.
- Y, ¿cómo las tecnologías digitales pueden ayudarnos en el intento? Varias publicaciones y ahora preparando otra versión, (Villarreal y Oteiza, 2011). Pregunta, que a la luz de lo que estamos observando con el consultor inteligente ChatGPT, se hace más urgente y demandante.

Para terminar, un cuento sufi: el encuentro con un exalumno y su corolario

El cuento

Se trata de un mendigo, un pordiosero que pedía limosna a la entrada del pueblo.
Un derviche -que muchas veces lo apoyó-, le preguntó un día qué había en la caja en que se sentaba para mendigar. Sorprendido el mendigo se dio cuenta que nunca la había abierto.

Esa noche, al llegar a su lugar de reposo la abrió. ¡Oh sorpresa! La caja contenía un tesoro que lo hizo rico, ¡Se habían acabado sus necesidades materiales!

La caja que no había abierto

Salía de comprar pan amasado, me encontré con Pedro, exalumno del secundario, habían trascurrido 40 años. Lo acompañaba su hijo de unos 15, *"ven, dijo Pedro al hijo, te presentaré la persona que me mostró que yo no era tonto, más bien, me mostró que era inteligente"*.

¡Hermoso! … un feedback cuarenta años después. Se trata de un artista nacional exitoso y con una magnífica presencia. ¡Me impresionó! No dimos un abrazo que no olvido.

¡Claro! Escribiendo estas páginas, al cerrar y mirar el conjunto, recordé ese encuentro y sí, hay algo que subyace a lo dicho, que atraviesa lo propuesto, esa es la caja que no había abierto. *¡Lo mejor que podemos hacer por nuestros alumnos es confiar en ellos hasta lograr que ellos confíen en sí mismos!, Lograr que tengan confianza en su manera de razonar, de hacer matemática.*

El colegio en que Pedro fue mi alumno en matemática y en física fue el Notre Dame, un pequeño establecimiento parroquial donde me inicié en la profesión. El principio en que descansaba su filosofía era el "sistema de confianza" y la condición para lograrlo, "educar para la libertad, en libertad". "El niño, el joven, confía en su colegio porque el colegio confía en él" (Roberto Polain).

Ellos no saben, yo debo saber: ¿Qué es lo que no saben?, ¿Qué es lo que yo debo saber? Algunos pocos aprenden matemática: ¿tiene que ser necesariamente así?

Esta es una invitación para observar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en un contexto más amplio, buscando condiciones de borde y condicionantes profundas que nos permitan realizar mejor nuestra tarea de acompañar niños, niñas y jóvenes en la aventura de aprender y hacer matemática. *Gracias, ¡conversemos!*

Referencias y bibliografía

Araya, R. (2021). What Mathematical Thinking Skills will our Citizens Need in 20 More Years to Function Effectively in a Super Smart Society? In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena, N. (Eds). (2021). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1) Khon Kaen, Thailand: PME. ISBN 978-616-93830-0-0.

Bateson, G. (1972). *Steps to Ecology of Mind: Collected Essays in Anthropology, Psychiatry, Evolution, and Epistemology.* Chicago, USA: University of Chicago Press. 0-226-03905-6.

Davis, R.B. (1964). *Discovery in Mathematics, A text for the Teacher*. EE.UU.: Addison Wesley.

Oteiza, F. (2019). ¿Por qué a la didáctica, la epistemología, la informática y a las habilidades matemáticas, les cuesta tanto ingresar a una clase de Matemática? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* [Trabajos invitados seleccionados de la XV CIAEM]. Núm. 18. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/39902

Varela, F. y Maturana H. (1985). *El árbol del conocimiento: las bases biológicas del entendimiento humano.* Santiago, Chile. Editorial Universitaria.

Villarreal, G. y Oteiza, F. (2011). El modelo interactivo, una innovación curricular en matemáticas: resultados de su implementación en el contexto educacional chileno. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (9), 21-76.

Construir comunidad en Educación Matemática

Pedro **Gómez**
Universidad de los Andes
Colombia
argeifontes@uniandes.edu.co
Paola **Castro**
Universidad de los Andes
Colombia
dp.castro116@uniandes.edu.co

Resumen

La sociedad en general espera que cada vez más profesores puedan ofrecer mejores oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes en matemáticas. Para ello, las universidades ofrecen esquemas de formación inicial, permanente y de posgrado. Estos esquemas tienen dos características: tienen un alcance reducido y ofrecen soluciones a los problemas que los formadores consideran que los profesores tienen. Pero, ¿cómo llegar a más profesores para apoyarlos en los problemas que ellos identifican en su práctica docente? El desarrollo y consolidación de comunidades de profesores que enseñan matemáticas es un camino para contribuir a ese propósito. Aquí describimos los esfuerzos que el centro de investigación y formación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, ha hecho en torno a la consolidación de una comunidad en Educación Matemática: la comunidad AYEM. Presentamos los recursos y espacios de interacción que ofrecemos, identificamos su alcance y reflexionamos sobre oportunidades para el futuro.

Palabras clave: Comunidad; Espacios de interacción; Profesores de matemáticas; Recursos; Todos los niveles educativos.

Introducción

Para contribuir a la mejora del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo, las universidades ofrecen programas de formación inicial, permanente y de posgrado de profesores de matemáticas. ¿Qué alcance y qué impacto tienen estos programas? En el caso de Colombia, por ejemplo, los programas de posgrado se ofrecen en las ciudades capitales, especialmente en la región Andina, y los profesores que acceden a esta oferta laboran en zonas aledañas a estas ciudades (Figueroa et al., 2018). Los profesores en ejercicio de zonas rurales o ciudades pequeñas no pueden recibir esta formación. Muchos de estos programas tienen un carácter académico en el que aparece, en muchas ocasiones, una brecha entre la teoría y la práctica del profesor (Østergaard, 2013). Estos programas proponen teorías que se espera que los profesores interpreten y lleven al aula. Se da entonces una traslación cros-cultural entre investigadores, formadores y profesores (Shonkoff, 2000). Esto significa que, en muchas ocasiones, los programas de formación no abordan los problemas que los profesores perciben que tienen que enfrentar en su práctica diaria. Aunque muchos programas hacen esfuerzos para combinar la teoría y la investigación con la práctica, para que cada una se informe y enriquezca mutuamente (Rust, 2009), esto no es necesariamente suficiente. Entonces, ¿cómo se puede complementar la formación académica que las universidades ofrecen para llegar a más profesores y apoyarlos en los desafíos que enfrentan en su práctica docente? Un camino por seguir es el desarrollo y consolidación de comunidades de profesores de matemáticas. En este documento, abordamos los diversos esfuerzos que hemos realizado en los últimos años en torno a la comunidad AYEM —Aprender y enseñar matemáticas—.

En este documento, abordamos la noción de comunidad de práctica como base para la caracterización de la evolución de la comunidad AYEM. Después, describimos, en el tiempo, los recursos y espacios de interacción que, en el marco de esta comunidad, hemos ofrecido a los profesores que enseñan matemáticas. En seguida, presentamos con datos cuantitativos el alcance y la evolución diacrónica de esos recursos y espacios de interacción. Finalmente, proporcionamos algunas conclusiones y reflexionamos sobre lo que podemos hacer en el futuro.

Comunidades de práctica

Comunidad de práctica, comunidad de aprendizaje, comunidad de indagación y redes de maestros son términos que se han usado en la literatura para referirse a cuestiones similares con algunas diferencias. Por ejemplo, una *comunidad de indagación* involucra a profesores, incluidos aquellos en formación, en la investigación de procesos educativos para mejorar el aprendizaje matemático de sus estudiantes. Además, busca fomentar la participación de los estudiantes en la investigación en matemáticas (Jaworski, 2020, p. 102).

En este documento, asumimos el término *comunidad de práctica* para caracterizar la comunidad AYEM. En lo que sigue, presentamos las ideas clave de esta noción. Las comunidades de práctica son grupos de personas que comparten intereses, objetivos y experiencia en un tema en particular. Según Wenger (1998), tres elementos clave definen a estas comunidades: el compromiso mutuo entre los miembros, la empresa conjunta y la negociación de significados para construir un repertorio compartido de recursos. El aprendizaje se expresa en la evolución de la identidad personal y las formas de participación.

Los miembros de una comunidad de práctica se reúnen con intereses similares y objetivos comunes, con el propósito de compartir recursos, desarrollar estrategias, resolver problemas y mejorar el rendimiento en el área de interés (Tseng y Kuo, 2014). Las comunidades de práctica de profesores son grupos en los que los integrantes desean compartir y aprender juntos sobre estrategias pedagógicas efectivas (Brodie, 2014). Estas comunidades tienen como meta mejorar el desempeño profesional de sus participantes. Para ello, deben proporcionar soporte emocional, para reducir la sensación de aislamiento que a menudo experimentan los profesores en su trabajo diario, lo que a su vez aumenta la confianza y el entusiasmo para desarrollar su labor. Además, deben fomentar reflexión y una perspectiva crítica respecto al quehacer docente. Sin embargo, estas comunidades pueden enfrentar dificultades, como el acceso y la participación, la comunicación y la reacción rápida, la privacidad y el apoyo a los tutores (Herrington et al., 2006).

En el campo de la formación de profesores de matemáticas, la investigación sobre comunidades de práctica se ha centrado en dos preguntas clave: ¿cómo se forma y se mantiene una comunidad de práctica?, y ¿cuál es la eficacia de las comunidades de práctica para promover el aprendizaje de los profesores? (Goos, 2020, p. 108). En este sentido, se ha abordado la cuestión de cómo la colaboración puede influir en el desarrollo profesional del profesor (Llinares y Krainer, 2006, p. 444). Se han realizado diversas investigaciones sobre comunidades de práctica en línea como una forma de construir redes de profesores para compartir recursos y experiencias (Goos y Geiger, 2012, p. 707). Por ejemplo, Goos y Bennison (2008) analizaron los textos de los foros de interacción que futuros profesores de secundaria produjeron en el marco de un programa de formación. Encontraron que la emergencia de la comunidad en línea estuvo asociada con el papel de los formadores en facilitar el diálogo profesional, la naturaleza voluntaria y no estructurada de la participación, la interacción inicial cara a cara que creó familiaridad y confianza, y la conveniencia de utilizar el correo electrónico en lugar de ingresar a un sitio web.

Las comunidades de práctica implican un conjunto de relaciones entre personas, actividades y su entorno. Las comunidades de práctica exitosas se enfocan no solo en el aprendizaje individual, sino también en el crecimiento y éxito de los demás miembros del grupo. Estas comunidades tienen en cuenta que el aislamiento puede obstaculizar el aprendizaje y lo abordan promoviendo la colaboración, la interdependencia y la responsabilidad colectiva. Para lograr una indagación rigurosa, sistemática, intelectual y retadora, las comunidades de práctica valoran la apertura al cambio y la actitud crítica. Se promueve la promoción de una cultura de indagación, respeto mutuo, confianza y cuidado, para contribuir, de esta manera, a la creación de un ambiente colaborativo que estimule el aprendizaje. Para garantizar su continuidad y el éxito en el tiempo, es fundamental contar con líderes que desempeñen roles claves. Las comunidades de práctica en línea ofrecen una oportunidad para mejorar los niveles de competencia, reforzar la práctica profesional y satisfacer la necesidad de desarrollo profesional (Tseng y Kuo, 2014).

Para el desarrollo de comunidades de práctica, es necesario considerar diferentes aspectos clave. Uno de ellos es la importancia de compartir conocimiento entre los miembros, lo que contribuye al aprendizaje constante y a la mejora continua del desempeño profesional. Además, la cohesión de los integrantes influye en la construcción de confianza, apoyo y reciprocidad, lo que favorece una comunidad más unida y colaborativa. Las expectativas de rendimiento y el desarrollo de la autoeficacia son importantes para la toma de decisiones de los miembros y la percepción de su habilidad para realizar tareas en el grupo (Tseng y Kuo, 2014). Por otro lado, las comunidades de práctica exitosas generan un sentido compartido de propósito, motivan un esfuerzo coordinado para mejorar el aprendizaje y promueven el aprendizaje profesional colaborativo (Nickerson y Sowder, 2002).

Los profesores participan en comunidades de práctica por diversas motivaciones. Entre las razones altruistas, se encuentra la preocupación por el bienestar de los demás. Por otro lado, hay razones de interés personal, como el reconocimiento y la reputación, que aumentan a medida que se desarrollan habilidades y se comparten conocimientos. Las razones profesionales también pueden ser una motivación para participar, ya que los profesores buscan mejorar su práctica y se preocupan por el aprendizaje de los estudiantes (Tseng y Kuo, 2014).

En una comunidad de práctica, existen distintos tipos de participantes. El *aliado* es quien apoya financieramente el proyecto y se involucra en el desarrollo y promoción de las causas y objetivos del grupo, al expresar su compromiso e identificarse con la comunidad. Por otro lado, el participante *productor* cumple el papel de difundir el conocimiento por medio de diversas herramientas, como conferencias, autoría de documentos de investigación e innovación, y grabación y publicación de videos. Los productores pueden participar en las interacciones porque son invitados especialmente, porque participan en convocatorias o porque intervienen en espacios abiertos como foros o grupos de discusión. Los *receptores* son participantes que solo reciben información al participar en los espacios de interacción o consumir los recursos que se ofrecen. Finalmente, los *colaboradores* participan en proyectos de investigación, y contribuyen como autores y sujetos de estudio en la mejora de la comunidad.

De cara a caracterizar y comparar los espacios de interacción y los recursos que se ofrecen en una comunidad de práctica, consideramos los siguientes criterios. La interacción que se genera puede ser *presencial*, o virtual *sincrónica* o *asincrónica*. La difusión del conocimiento se puede realizar de diferentes maneras. En algunas ocasiones, la difusión del conocimiento tiene lugar sincrónicamente (p. ej., reuniones virtuales) o asincrónicamente en el contexto de la interacción (p. ej., foros y grupos de WhatsApp). Por otro lado, el conocimiento también se puede difundir asincrónicamente con la publicación de documentos y videos.

Caracterización de la comunidad AYEM

La comunidad AYEM está formada por profesores que enseñan matemáticas, que se encuentran en espacios y actividades con colegas que tienen objetivos comunes para desarrollar relaciones que implican un compromiso mutuo por compartir conocimiento que aporte a la mejora de las prácticas pedagógicas y del aprendizaje de los estudiantes. Estos espacios y actividades proporcionan oportunidades para que los participantes compartan su conocimiento al (a) acceder a recursos relevantes, (b) interactuar con expertos y (c) interactuar entre ellos. En este apartado, presentamos la historia de la comunidad AYEM y describimos los recursos y espacios de interacción que ofrece a los profesores que enseñan matemáticas.

La comunidad AYEM nació en 2009 con el lanzamiento de Funes, el repositorio digital de documentos en Educación Matemática. Funes es una plataforma en línea de acceso libre y gratuito que permite a educadores matemáticos acceder a documentos que no están sujetos a derechos de autor y que pueden apoyar su labor. La búsqueda y exploración de documentos puede realizarse según diferentes criterios, como términos clave, autor, valoración, enfoque, nivel educativo, revista, editorial o año de publicación, o mediante búsquedas simples o avanzadas. La interacción de los participantes en la plataforma es asincrónica y se basa en la descarga y lectura de los documentos.

Los espacios de interacción de la comunidad AYEM se crearon en 2012 con el lanzamiento de nuestro ciclo de conferencias virtuales en Educación Matemática. Invitamos a expertos iberoamericanos para que compartieran su trabajo con los profesores que enseñan matemáticas en una plataforma virtual de libre acceso. En 2017, creamos el ciclo de comunicaciones de innovación curricular. En este espacio, los conferencistas son profesores en ejercicio que comparten su trabajo de aula con sus colegas luego de postular sus propuestas. Durante la pandemia, el espacio de conferencias de expertos dio lugar a un ciclo de conferencias desde casa y el espacio de comunicaciones de innovación de profesores en ejercicio se transformó en el ciclo de experiencias de práctica a distancia. La presentación de los expertos dura aproximadamente 40 minutos y la de los profesores en ejercicio 20 minutos. Después, los participantes interactúan sincrónicamente con el conferencista y entre ellos por medio del chat de la plataforma en la que la sesión se lleva a cabo. Los documentos y el video de la reunión quedan alojados en nuestro sitio web de libre acceso.

En 2014, ampliamos los espacios de interacción con el lanzamiento del Foro EMAD. En sus primeras dos versiones (2014 y 2016), los ponentes en el foro fueron expertos invitados que hablaron sobre sus investigaciones y profesores en ejercicio que compartieron sus experiencias de innovación curricular. En las siguientes dos versiones (2017 y 2019), invitamos a los profesores en ejercicio para que se postularan como ponentes, con mucho éxito. Estos foros fueron presenciales y se realizaron en la Universidad de los Andes. A partir de 2020, el Foro EMAD se realiza anualmente en un esquema virtual al que invitamos a grupos de tres expertos que, en esquema de paneles, intervienen sobre un tema particular. Por ejemplo, los temas del Foro EMAD 2022 fueron las necesidades especiales y la evaluación en Educación Matemática, y se abordaron en dos paneles. El Foro EMAD es un espacio de interacción gratuito y de libre acceso en el que los participantes tienen la oportunidad de interactuar con los ponentes sincrónicamente. Los documentos y videos de las conferencias se publican en nuestro sitio web.

Aunque tuvimos alojados en YouTube videos sobre Educación Matemática desde 2012, creamos nuestro canal en 2017. Actualmente, el canal se encuentra organizado en listas de reproducción y permite una interacción asincrónica con los visitantes y suscriptores. El contenido del canal corresponde, principalmente, a videos de las presentaciones que hacen estudiantes de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes y a los videos de las conferencias, las comunicaciones y los foros EMAD.

En 2018, comenzamos a incursionar sistemáticamente en las redes sociales. Creamos el grupo Conversemos sobre Educación Matemática en Facebook. Este es un espacio de interacción abierto tipo foro virtual. Motivamos la participación de los miembros por medio de preguntas o cuestiones de interés que lanzamos periódicamente.

El 2020 fue un año de gran actividad con motivo del confinamiento, producto de la pandemia. En marzo de ese año, lanzamos el proyecto *Aprender y enseñar matemáticas desde casa* con el que potenciamos las actividades que veníamos realizando —p. ej., conferencias de expertos y comunicaciones de innovación— y creamos algunas nuevas para apoyar a los profesores de matemáticas en las nuevas circunstancias. Es el caso de los grupos de WhatsApp Desde casa, como espacios de interacción abierta y virtual en los que los profesores pueden interactuar entre ellos y con nosotros alrededor de preguntas, información y recursos. Centramos el objetivo de los grupos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a distancia. También, lanzamos la base de datos de materiales y recursos, como portal de internet en el que los profesores acceden a enlaces en los que encuentran materiales y recursos para su práctica.

El proyecto Aprender y enseñar matemáticas desde casa se continuó a partir de 2021 con el proyecto AYEM. Este proyecto engloba actualmente todas las actividades, recursos y espacios de interacción que hemos descrito. El éxito de los grupos de WhatsApp Desde casa, nos llevó, al año siguiente, a crear los grupos de WhatsApp AYEM, uno por cada nivel educativo.

Evolución de la comunidad AYEM

En lo que sigue, describimos el alcance y la evolución diacrónica de la comunidad AYEM en términos de participantes y acceso a los recursos y espacios de interacción. La comunidad AYEM tiene en la actualidad 445 miembros con rol de productores y 525 miembros que son colaboradores. Desde 2010, más de 2.200.000 personas han usado algún recurso o participado en alguna actividad ofrecido por la comunidad AYEM, la mayoría de ellos como usuarios únicos del repositorio Funes. De este grupo, 21.625 profesores nos han proporcionado sus datos con el propósito de que les informemos sobre nuestros recursos, actividades y proyectos. En la figura 1, presentamos la distribución geográfica de los miembros de la comunidad AYEM que nos han compartido el país donde viven, para los ocho países en los que hay más miembros. Observamos que Colombia, Venezuela y Ecuador representan el 58% de participantes.

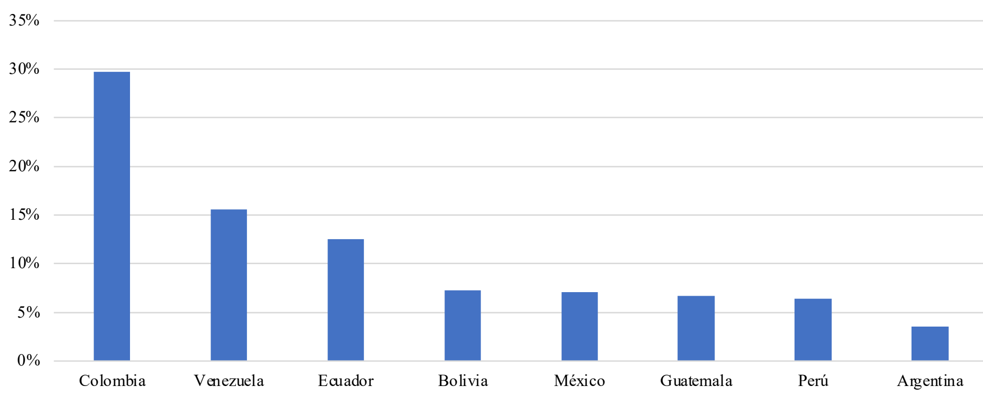


Figura 1. Distribución geográfica de los miembros de la comunidad AYEM

Acceso a recursos

En este apartado, presentamos la evolución de la cantidad de documentos y videos que han sido publicados en el repositorio Funes y el canal de YouTube, respectivamente. También, analizamos el alcance de estos recursos en términos de usuarios y visualizaciones.

Repositorio Funes

Para el repositorio Funes, en la figura 2, mostramos el comportamiento de las cantidades acumuladas de documentos publicados, usuarios que han accedido y las visitas que se realizaron entre enero de 2010 y diciembre de 2022. En ese periodo de tiempo, Funes llegó a alojar 26.808 documentos. Se registró el acceso de 2.681.720 usuarios, de los cuales 2.201.045 son usuarios nuevos, y se contabilizó un total de 6.219.766 visitas al sitio. La cantidad acumulada de visitas se ajusta a un comportamiento exponencial ($R^2 = 0{,}9604$). Los resultados ponen de manifiesto la relevancia de Funes en la comunidad y la fidelización de personas a este recurso.

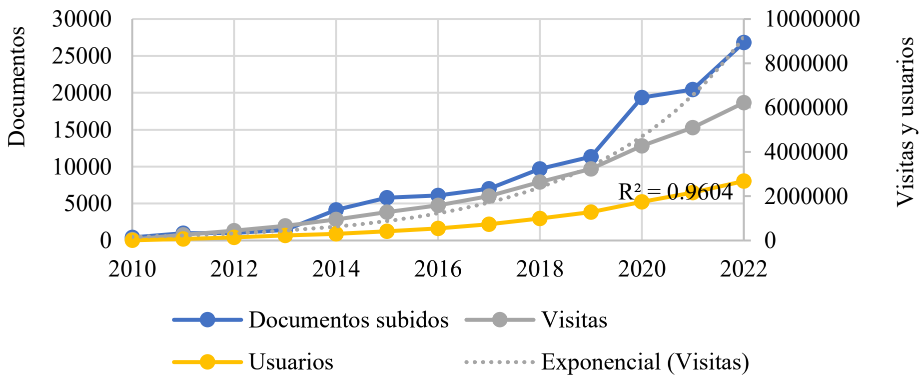


Figura 2. Evolución del repositorio Funes

Al analizar la ubicación geográfica de los usuarios nuevos (figura 3), sobresale la cantidad de personas que acceden desde Colombia y México. También, destaca el comportamiento regular que se observa en Perú, España y Ecuador. Aunque la cantidad de usuarios de Brasil está por debajo de los 50.000, creemos que en los próximos años el acceso desde ese país aumentará debido al depósito que se hizo en 2022 del contenido de acceso abierto del 87% de las revistas brasileras de Educación Matemática.

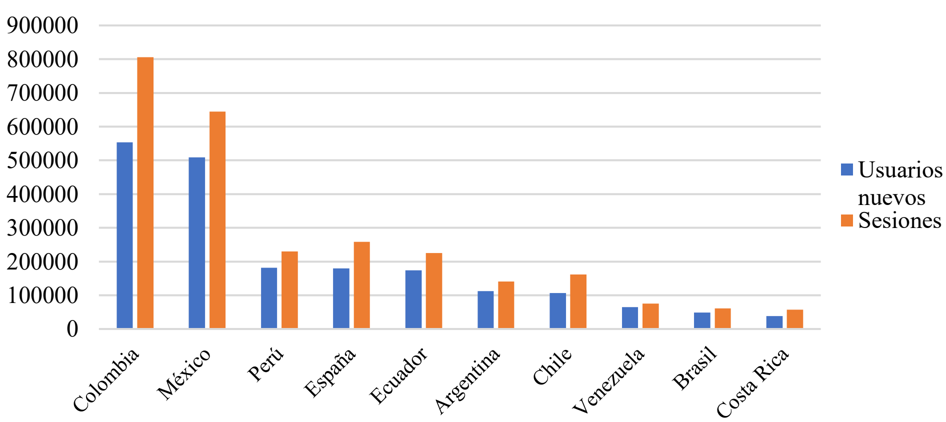


Figura 3. Ubicación geográfica de usuarios nuevos en Funes

Canal de YouTube

En la figura 4, exponemos el comportamiento de las cantidades acumuladas de videos publicados en el canal de YouTube desde 2017 y de suscriptores y visualizaciones que se realizaron entre enero de 2019 y diciembre de 2022. En este lapso, se contó con un total de 2.429 suscriptores y 271.297 visualizaciones. Cabe subrayar que las visualizaciones no están restringidas a suscriptores, dado que el acceso al contenido del canal es público.

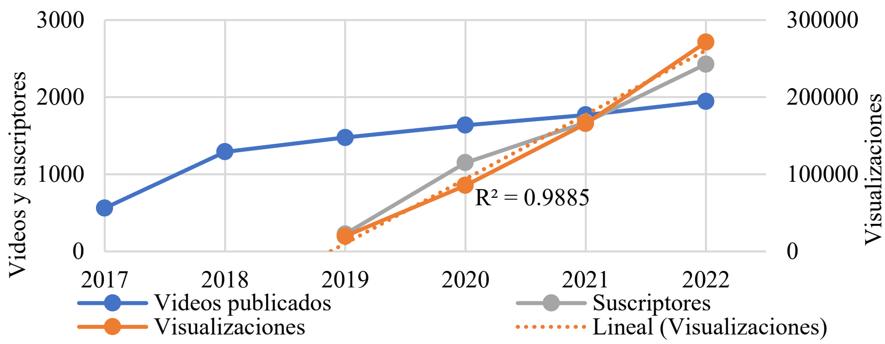


Figura 4. Evolución del canal de YouTube

Si bien la cantidad acumulada de videos publicados se ajusta a un comportamiento logarítmico (R^2 = 0,9741), vemos que la evolución de las visualizaciones y los suscriptores tiene un comportamiento lineal creciente (R^2 = 0,989). Estos resultados evidencian el reconocimiento que el canal tiene en la comunidad, pues el aumento en el acceso a los videos no está ligado necesariamente a la publicación de nuevos contenidos.

En la figura 5, mostramos los diez países en los que se registran más visitas al canal de YouTube. Vemos que Colombia vuelve a destacar entre otros países latinoamericanos, y que, en comparación con lo que sucede en el repositorio Funes con México y España en segundo y cuarto lugar respectivamente, Perú genera más visualizaciones que México, y Ecuador y Argentina más que España.

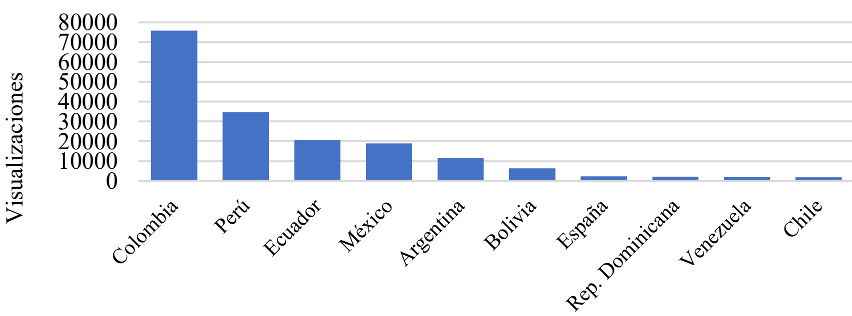


Figura 5. Ubicación geográfica de visualizaciones de videos

Espacios de interacción

Describimos a continuación la evolución de los espacios de interacción sincrónica y asincrónica de la comunidad AYEM.

Conferencias y comunicaciones

Entre 2012 y 2022, se realizaron 99 conferencias de expertos. De esas, 32 se desarrollaron en 2020, año de confinamiento a nivel mundial. En promedio, en los otros años, se gestionaron siete conferencias por año. En la figura 6, vemos la cantidad de conferencias realizadas por año (barras) y la evolución en el tiempo de la cantidad acumulada de conferencias y de las visualizaciones de los videos que surgen de ellas. Estos videos son publicados en una lista de reproducción del canal de YouTube con acceso público. Las visualizaciones suman 48.329.

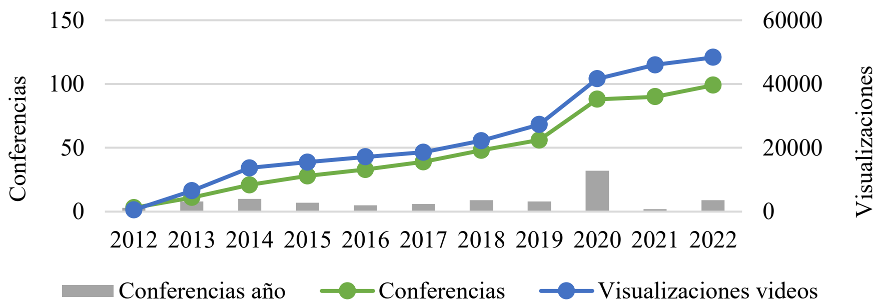


Figura 6. Evolución de conferencias de expertos

Para analizar la evolución de las comunicaciones de innovación, tuvimos en cuenta el periodo comprendido entre 2018 y 2022. Además de las variables contempladas previamente, incluimos la cantidad de postulaciones. En la figura 7, se observa el aumento en la cantidad de comunicaciones que se realizaron en 2020, con motivo del espacio proporcionado a las experiencias a distancia, en el marco del proyecto Aprender y enseñar matemáticas desde casa. Desde 2021, se realizan dos comunicaciones por mes.

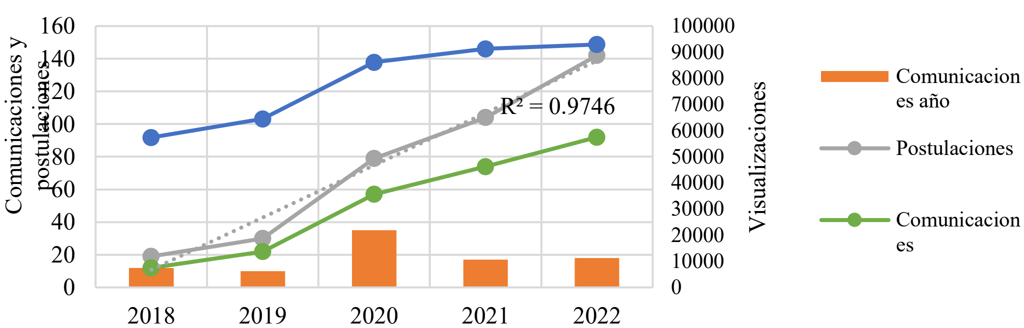


Figura 7. Evolución de comunicaciones de innovación

De la figura 7, nos interesa resaltar el comportamiento que tiene la cantidad acumulada de postulaciones. Su crecimiento tiene una tendencia lineal creciente (R^2 = 0,9746). Este resultado evidencia que, en la comunidad, se destaca el interés de los profesores por sistematizar y difundir sus prácticas. Los videos de las comunicaciones están disponibles con acceso público en una lista de reproducción del canal de YouTube y cuentan con 92.943 visualizaciones.

En cuanto a los asistentes a las reuniones virtuales que UED ha venido desarrollando desde 2012, el confinamiento vivido en 2020 fue una oportunidad para fortalecer estos espacios. La participación de la comunidad a nivel iberoamericano aumentó considerablemente. En 2021 y 2022, 2.956 personas participaron en las conferencias y comunicaciones. De esa cantidad, el 43% se ubican en Colombia, el 12% en Perú, el 10% en Ecuador, un 8% en México y otro 8% en Venezuela.

Foros EMAD

En la figura 8, exponemos el comportamiento de la cantidad de asistentes al Foro EMAD, la cantidad de visualizaciones por año en el canal de YouTube de las presentaciones y la evolución de la cantidad acumulada de visualizaciones de los videos.

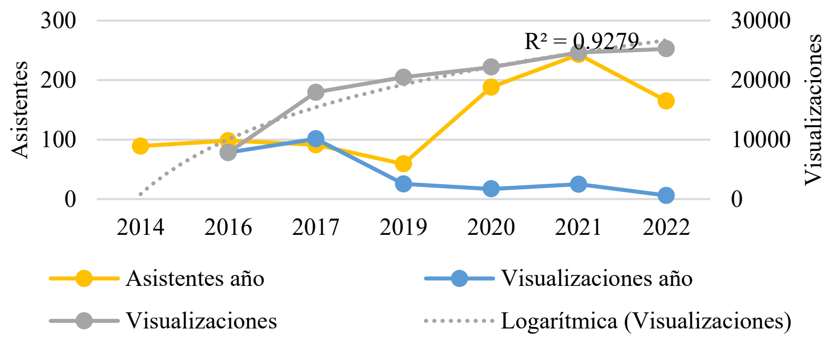


Figura 8. Evolución de foros EMAD

La cantidad de participantes en las primeras versiones del Foro EMAD (modalidad presencial) fue, en promedio, de 84 personas por versión. Desde 2020 (modalidad virtual y abierta), contamos con un promedio de 200 personas por año. En la figura 8, se observa un comportamiento inverso entre la cantidad de asistentes y visualizaciones por año. Este resultado puede ser consecuencia del cambio de modalidad de los foros. Consideramos que, al facilitarse la interacción sincrónica con los conferencistas, se reduce el acceso a los videos de las charlas. No obstante, es importante destacar que el acumulado de las visualizaciones de los videos, que asciende a 25.244, tiene un comportamiento logarítmico creciente.

Grupo de Facebook

Para el periodo comprendido entre enero de 2019 y diciembre de 2022, el grupo de Facebook Conversemos de Educación Matemática contó con 3.154 miembros. En 2020, se unió una cantidad considerable de personas (más de 1.500). Este comportamiento puede estar relacionado con la participación profesores en el proyecto Aprender y enseñar matemáticas desde casa y que, con motivo de ello, recibieron invitaciones para unirse. En 2021 y 2022 se unieron 354 personas al grupo.

Grupos de WhatsApp

Con motivo de la gestión de los grupos de WhatsApp, exaltamos la pertinencia de este medio de comunicación en la comunidad de educadores matemáticos. Los administradores de los grupos participamos como productores de contenido, pero también se destacan algunos miembros por colaborar con la difusión de recursos que aportan a los colegas del grupo de acuerdo con los objetivos de cada grupo. En la figura 9, presentamos distribución de personas por grupos y años.

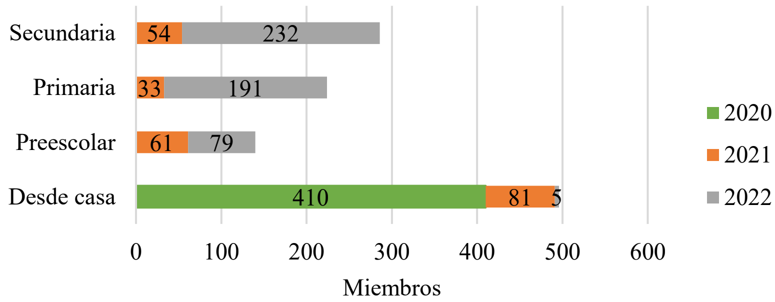


Figura 9. Miembros en grupos de WhatsApp

El crecimiento en la cantidad de personas que se han unido a los grupos evidencia la fidelización en este esquema de interacción. En 2020, llegamos a reunir 410 personas en el grupo denominado Desde casa. En 2021, iniciamos los grupos AYEM de niveles educativos y continuamos con el grupo Desde casa. Al final de ese año, tuvimos 229 nuevos miembros en los grupos y un total de 639. En 2022, se unieron 507 nuevos miembros, de los cuales 423 se unieron a los grupos de primaria y secundaria. En total, completamos 1146 personas en el conjunto de grupos.

Conclusiones

Los resultados que acabamos de presentar describen la evolución de la comunidad AYEM. En su comienzo, la comunidad giró alrededor del repositorio Funes, como fuente de documentación para los profesores que enseñan matemáticas y los investigadores en Educación Matemática. Durante tres años, la interacción fue asincrónica y consistió principalmente en la descarga de documentos. Comenzamos a tener interacción sincrónica en 2012 con el lanzamiento del ciclo de conferencistas expertos. Este tipo de interacción se potenció dos años más tarde con la creación del Foro EMAD. Hasta 2017, la mayoría de los participantes productores de la comunidad fueron expertos iberoamericanos que compartían su trabajo con los profesores que enseñan matemáticas. En ese año, lanzamos el ciclo de comunicaciones de innovación curricular en el que los profesores en ejercicio eran los productores. En ese mismo año, también lanzamos el canal de YouTube como nueva fuente de información para los miembros. La participación de los profesores en ejercicio se impulsó al año siguiente con el lanzamiento del grupo de Facebook Conversemos de Educación Matemática. Nos hicimos conscientes de que estábamos desarrollando una comunidad en 2020, con motivo del confinamiento, producto de la pandemia. En ese año, en el contexto del proyecto Aprender y enseñar matemáticas desde casa, multiplicamos nuestros esfuerzos en las activades que veníamos haciendo desde hacía diez años y decidimos darle identidad a la comunidad con nuevos recursos y espacios de interacción, en los que destacan los grupos de WhatsApp. En los últimos dos años, la comunidad AYEM ha venido desarrollándose y consolidándose en Iberoamérica.

Este desarrollo ha sido posible como consecuencia de tres factores. En primer lugar, desde 2020, hemos tenido el apoyo de un aliado que nos ha permitido ofrecer todos los recursos y espacios de interacción gratuitamente y con libre acceso para todos los participantes. En segundo lugar, nosotros hemos sido cada vez más conscientes de la importancia de apoyar a los profesores que enseñan matemáticas con esquemas complementarios a los programas académicos de formación de profesores. En ese sentido, hemos asumido el papel de líderes en nuestro intento de fomentar una cultura de colaboración y apoyo mutuo. Y, en tercer lugar, consideramos que los profesores que enseñan matemáticas han cambiado su visión de su papel como profesores y colegas.

El confinamiento producto de la pandemia generó en los profesores la necesidad de salir del aislamiento de su aula de clases y los motivó a aprovechar la tecnología para interactuar entre ellos y con los expertos. Adicionalmente, la participación de una proporción de los profesores en programas de formación ha generado, por un lado, la necesidad de tener acceso a información en Educación Matemática y los ha convertido en productores de información. Como gestores de la comunidad AYEM, hemos percibido que los profesores están más dispuestos a buscar y usar información que les sea útil, pero también están más dispuestos a compartir la información que ellos producen y a apoyar a sus colegas en la resolución de los problemas diarios del aula.

La evolución de la comunidad AYEM que hemos presentado en este documento es apenas el comienzo de un trabajo de largo plazo. Esperamos continuar teniendo el apoyo de aliados que nos permitan ofrecer más recursos y espacios de interacción a los profesores iberoamericanos que enseñan matemáticas. También esperamos poder apoyar a otras organizaciones interesadas en desarrollar y consolidar sus comunidades de profesores. Nos queda un trabajo pendiente: investigar sobre el impacto de nuestra comunidad en las prácticas del profesor y el aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

El desarrollo de la comunidad AYEM desde 2020 ha sido posible gracias al apoyo del Fondo Puentes de Caña.

Referencias y bibliografía

Brodie, K. (2014). Professional Learning Communities in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 501-505). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_130

Figueroa, M., García, S., Maldonado, D., Rodríguez, C., Saavedra, A. M. y Vargas, G. (2018). La profesión docente en Colombia: normatividad, formación, selección y evaluación. *Documentos de Trabajo EGOB*, *54*, 1-90.

Goos, M. (2020). Communities of practice in mathematics teacher education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 107-110). Springer.

Goos, M. y Geiger, V. (2012). Connecting social perspectives on mathematics teacher education in online environments. *ZDM*, *44*, 705-715.

Goos, M. E. y Bennison, A. (2008). Developing a communal identity as beginning teachers of mathematics: Emergence of an online community of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 41-60.

Herrington, A., Herrington, J., Kervin, L. y Ferry, B. (2006). The design of an online community of practice for beginning teachers. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *6*(1), 120-132.

Jaworski, B. (2020). Communities of inquiry in mathematics teacher education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 102-104).

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429-459). Sense Publishers.

Nickerson, S. y Sowder, J. (2002). What factors influence the formation of teachers' professional communities and why should we care? 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 3, Norwich.

Østergaard, K. (2013). Theory and practice in mathematics teacher education. Proceedings of the IVth international congress on the anthropological theory of didactics (ATD),

Rust, F. O. C. (2009). Building bridges between early childhood educators and education policymakers. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *10*(3), 260-262.

Shonkoff, J. P. (2000). Science, policy, and practice: Three cultures in search of a shared mission. *Child development*, *71*(1), 181-187.

Tseng, F.-C. y Kuo, F.-Y. (2014). A study of social participation and knowledge sharing in the teachers' online professional community of practice. *Computers & Education*, *72*, 37-47. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.10.005

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

¿Qué lecciones puede sacar la comunidad educativa del currículo de Matemáticas de Costa Rica?

Edison **de Faria** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
edefaria@gmail.com
Hugo **Barrantes** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
habarran@gmail.com

Resumen

En 2022 se cumplió una década de la aprobación de los Programas de Matemáticas para la Educación Primaria y Secundaria en Costa Rica (MEP, 2012). Su propósito principal es el fortalecimiento de la competencia matemática y el desarrollo de las siguientes capacidades cognitivas superiores en los estudiantes: razonar y argumentar, conectar, representar, comunicar y plantear y resolver problemas. Para ello promueven la resolución de problemas con énfasis en contextos reales. Los programas enfatizan capacidades superiores, pero no es un currículo "por competencias". Es una perspectiva curricular original. Durante 10 años el principal insumo para esta reforma ha sido el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* creado en 2012 (MEP-PREMCR, 2020a): investigadores, expertos en tecnologías, y docentes en servicio apoyados por las diversas administraciones gubernamentales de Costa Rica. ¿Qué se puede aprender de esta reforma?

Palabras clave: Costa Rica; Currículo; Educación matemática; Reforma matemática; Capacidades superiores; Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Introducción

El 21 de mayo del 2022 se cumplieron 10 años en que autoridades educativas costarricenses aprobaron los nuevos programas de matemáticas (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, [MEP], 2012). Estos programas representaban un salto cualitativo en relación con los currículos de matemáticas previos y con otros programas de otras asignaturas en este país. De múltiples maneras, este currículo integra lecciones y experiencias de la comunidad internacional de educación matemática y un estudio cuidadoso de la realidad nacional de Costa Rica en la cual fuera posible introducir con pertinencia y originalidad elementos del contexto internacional más amplio.

Con el pasar de los años, tanto los objetos curriculares como los medios para implementar el nuevo currículo han sido valorados internacionalmente como una importante referencia para el diseño y el desarrollo curricular, en países con condiciones similares en la región latinoamericana o en el mundo (Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo, 2018, Ruiz, 2018, 2020a).

¿Por competencias o por contenidos?

MEP (2012) afirma la búsqueda del desarrollo de una “competencia matemática general” que se interpreta como una capacidad de los individuos para comprender y usar las matemáticas en diferentes contextos de la vida ciudadana. Los contextos pueden ser laborales profesionales, científicos, personales o matemáticos (esto se ha elaborado con mayor precisión en Ruiz (2018)). El uso de las matemáticas no se interpreta como el simple conocimiento de contenidos o procedimientos matemáticos. Más bien se interpreta en términos de capacidades o competencias que la preparación matemática puede brindar a las personas. Por supuesto, en algunos contextos se requerirá el uso de conocimientos específicos, y por eso la competencia matemática general incluye conocimientos, capacidades, e incluso actitudes y creencias.

Un elemento clave en la construcción de esa competencia matemática general es el desarrollo de capacidades cognitivas superiores, transversales a todas las áreas matemáticas. Estas son: plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, comunicar, conectar y representar. Puesto de otra forma, se busca que estas capacidades, que en el currículum costarricense se asocian de manera unívoca a los denominados “procesos”, sean desarrolladas a lo largo de la preparación escolar. El avance de estas capacidades es un asunto que se debe valorar en diferentes tiempos, sobre todo, medianos y largos.

Ahora bien, la malla curricular, es decir los diferentes contenidos específicos de este currículo, no se articulan por medio de estos procesos o capacidades cognitivas superiores. La articulación se realiza a partir de conocimientos de las cinco áreas matemáticas con las que trabaja este programa. Esas áreas son: números, medidas, geometría, relaciones y álgebra, y estadística y probabilidad.

Aquí hay un tema importante en la teoría del currículo. Ha habido un debate en torno a si el diseño curricular debe hacerse “por contenidos” o “por competencias”. Es decir, si la articulación del currículum se hace por medio de los contenidos, como el sustrato fundamental o, por lo contrario, se usan las competencias que organizan y articulan esos conocimientos y en general toda la malla curricular. Los programas oficiales de Costa Rica no son “por competencias” ni tampoco “por contenidos”. Se da una articulación a partir de los conocimientos y se plantea el desarrollo de las capacidades superiores en diferentes dimensiones a partir de una batería de acciones alrededor de la mediación pedagógica en todos los niveles.

Una lección que consideramos se desprende aquí es la de utilizar perspectivas o algunos objetos curriculares o teóricos de la comunidad internacional, pero colocados dentro del escenario específico de la sociedad local. En Costa Rica no habría sido posible articular los programas con base en esas capacidades cognitivas superiores. Tanto los docentes, asesores, directores, estudiantes y padres de familia tienen una cercanía mayor con los conocimientos matemáticos a los que han estado acostumbrados. Si se hubiera dejado solamente en términos de una articulación sin acudir a capacidades o competencias superiores, entonces por supuesto habría sido un currículum por contenidos. El currículo actual no es así, se coloca la perspectiva del desarrollo de capacidades superiores con mucha fuerza a través de diferentes estrategias que son cuidadosamente definidas en el currículum.

Por ejemplo, Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo (2018) consignaron lo siguiente en la conferencia internacional del *ICMI Study 24* realizada en Tsukuba, Japón:

> Desde nuestra perspectiva la reforma de las matemáticas escolares en Costa Rica aboga y apoya un énfasis funcional del currículo matemático (. . .). La propuesta de reforma está lejos de visiones estructuralistas o formalistas. Más bien busca aportar a la educación comprehensiva de los estudiantes de tal manera que puedan usar las Matemáticas con rigor y buen juicio para responder otros problemas y asuntos que se pueden encontrar a lo largo de sus vidas. (...). El foco funcional del currículo de matemáticas busca que el conocimiento se enfoque en el desarrollo de las estrategias cognitivas de cada uno, subrayando el uso de diferentes formas de representación, habilidades de argumentación, y técnicas de modelación para así proponer y resolver problemas en contexto. En resumen, su propósito es desarrollar la competencia matemática de los estudiantes mejorando su razonamiento y dándoles a ellos cierta autonomía. (pp. 262-263)

Distribución de los años escolares por ciclo educativo

En Costa Rica la Educación General Básica y Diversificada (modalidad académica) se divide en cuatro ciclos, tal y como se muestra en la Tabla 1. Los tres primeros son parte de la educación general básica mientras que el cuarto ciclo se denomina educación diversificada y corresponde a los años décimo y undécimo.

Tabla 1
Organización de la Educación General Básica y Diversificada en Costa Rica

		Ciclos	Edades(años)	Años que cubre el ciclo
Educación General Básica	Primaria	I	7 a 9	3
		II	10 a 12	3
	Secundaria	III	13 a 15	3
Educación Diversificada		IV	15 a 17	2

Notas: MEP (2012)

La integración de habilidades

Los conocimientos tampoco se trabajan como objetivos programados o tópicos matemáticos en sí mismos. Lo que se plantea son capacidades precisas asociadas a los conocimientos. Esas capacidades precisas refieren a tiempos cortos dentro del año lectivo o a tiempos largos de acuerdo con los ciclos educativos que posee el sistema educativo costarricense.

Este currículum los llama “habilidades específicas” y “habilidades generales” respectivamente (MEP, 2012). Entonces, más que conocimientos abstractos matemáticos lo que plantea este currículo son habilidades asociadas a estos que tienen varias características que las distancian de los objetivos programados o meras colecciones con listados de tópicos matemáticos. Una de ellas, que es crucial, es que las habilidades deben trabajarse convenientemente y con pertinencia de manera integrada. En las perspectivas conductistas tradicionales que dominaron los currículos en Costa Rica, cada tópico u objetivo, se trataba de una manera compartimentalizada. De esa forma, metodologías y evaluación estaban definidas de manera también compartimentalizada (Ruiz y Barrantes 1995, Ruiz, 2013). En el nuevo currículo eso no sucede, más bien es al revés. Se trata de lograr la mayor integración posible de las habilidades ya sea de corto plazo como de mediano plazo. Y estas habilidades se pueden integrar no sólo dentro de un área matemática, sino también entre varias áreas, e incluso se promueve la integración con asignaturas diferentes de las matemáticas cuando esto sea posible.

La enseñanza importante en esta dimensión es la utilización de otras capacidades de corto o mediano plazo directamente asociadas a los conocimientos, y el sentido de la integración de habilidades. Esto brinda una flexibilidad, un dinamismo y una mejor aproximación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Lecciones sobre el papel de los ejes disciplinares

Con este marco teórico básico y para favorecer el desarrollo de la competencia matemática general se plantean 5 ejes disciplinares centrales (MEP, 2012). Estos son, en esencia, énfasis que en el desarrollo e implementación del currículo permiten unificar los propósitos y nutrir el progreso de la competencia matemática general. El primer eje es la resolución de problemas, vista como una estrategia para la acción pedagógica tanto en el aula como en los diferentes materiales que se utilizan para la acción educativa. En segundo lugar, es lo que llama este currículo una “contextualización activa” que pretende brindar en la medida de lo posible un lugar privilegiado a los contextos reales, con el propósito de acercar más a los estudiantes a la acción educativa en matemáticas y, al mismo tiempo, aprovechar todas aquellas características y destrezas y objetos también epistemológicos que participan cuando se trabajan las matemáticas en contextos reales. En tercer lugar, se da un énfasis al uso inteligente de tecnologías digitales dentro de una perspectiva muy clara. También como estrategia pedagógica se incluye el uso de la historia de las matemáticas. Y otro eje, que en realidad abarca y afecta al conjunto de los otros ejes y del programa, se busca de una manera directa y explícita el cultivo de creencias y actitudes positivas acerca de las matemáticas y su enseñanza.

Aquí hay varias lecciones importantes. Subrayar la “resolución de problemas” como estrategia pedagógica no es un elemento aislado del marco teórico que introduce competencia, procesos y habilidades. Detrás está la visión de que es en la práctica pedagógica múltiple que esos elementos curriculares juegan de una manera armónica y positiva para los aprendizajes. En segundo lugar, una lección importante consiste en insistir en el carácter que aquí se llama *activo* del trabajo con contextos reales pues lo usual es que se usen contextos artificiales sin sentido para supuestamente acercar las matemáticas a la realidad. En criterio de los redactores de estos programas los contextos artificiales no generan el involucramiento de los sujetos ni para el interés ni para responder al desafío intelectual de los mismos.

Otra lección importante es comprender el uso de tecnologías no como un fin en sí mismo sino con propósitos propiamente ligados al desarrollo de la enseñanza-aprendizaje. Es decir, todos los elementos tecnológicos que se puedan utilizar, dependiendo del contexto y la sociedad, deben hacerse en función de lograr mejores aprendizajes por parte de los estudiantes (MEP, 2012, Ruiz, 2020b). En relación con el uso de la historia, tampoco se trata de hacer historia por la historia. Se pretende usar, de diversas formas, recursos históricos para construir aprendizajes y capacidades y en particular una perspectiva alrededor de las matemáticas y su enseñanza que favorezca el involucramiento de los estudiantes. El cultivo de actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas se sintoniza con la premisa de que los espacios actitudinales y socioafectivos son cruciales para los aprendizajes. Es importante ganarse el corazón de los estudiantes antes, para partir de esa situación y construir los aprendizajes.

Y una lección general sobre todo esto es que todos estos ejes y énfasis intervienen de una manera sinérgica fortaleciendo uno al otro, y entre todos, creando los medios que busca el currículum para lograr el progreso en la competencia matemática. Para que todo esto tenga sentido, estos ejes deben ser parte, de manera explícita, de la malla curricular. Es decir, en cada nivel educativo, en cada área matemática, en los diversos conocimientos y habilidades que se trabajan, es necesario declarar con precisión la intervención posible de estos ejes disciplinares. Por lo tanto, y esto es una lección general, el currículo introduce de manera explícita con llamadas precisas en toda la malla curricular, la presencia y las posibilidades de cada uno de estos ejes.

Lecciones sobre las áreas matemáticas

¿Cuáles otras lecciones podemos describir ya en relación con las áreas matemáticas que establece este currículo?

En el caso de relaciones y álgebra hay varias lecciones importantes. Una de ellas es que se debe trabajar el pensamiento algebraico y funcional tanto en primaria como en secundaria. Esto se separa de tratamientos que han dominado los currículos de matemáticas. Por ejemplo, las funciones se solían trabajar en algún momento de la educación secundaria mediante un ingreso drástico y rápido con características bastante abstractas. En este currículo se va haciendo una asociación gradual con elementos que van a ir preparando para la comprensión natural de conceptos tan claves como las funciones. De igual manera, en esta área hay una fuerte participación de un elemento que se declaró central en la contextualización activa, que es el uso de modelos matemáticos (MEP, 2012). Desde los modelos sencillos a los más complejos. La modelización permite darle sentido a una serie de elementos matemáticos que se dan en relaciones y álgebra. Pero también aparecen en otras áreas como estadística y probabilidad, geometría y números. De alguna manera, en relaciones y álgebra, que llega a constituir una parte central del currículo de secundaria, hay muchos más elementos que pueden utilizarse para el cultivo del uso de modelos (Figura 1).

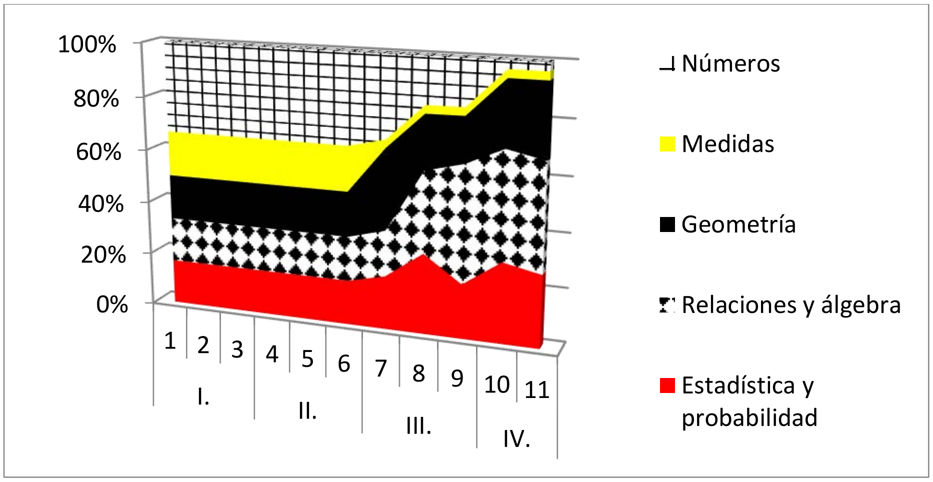


Figura 1. Las áreas matemáticas del currículo escolar de Matemáticas en Costa Rica (MEP, 2012. p. 49).

Una de las lecciones en el área de geometría es el desprendimiento de perspectivas viejas en el tratamiento de algunos elementos de la geometría euclidiana, que si bien pueden nutrir ciertas características o capacidades para la argumentación y la deducción no resultan en este momento de la historia de las matemáticas y su enseñanza las más convenientes de preservar. Por eso, el currículo tomó una decisión importante al quitar una serie de tópicos de la geometría euclidiana y, entonces, introducir elementos importantes de la geometría de coordenadas. De igual manera, la visualización geométrica es una capacidad que se persigue con este currículo, especialmente en el espacio. O sea, la visualización espacial de figuras se favorece en lugar de cómputos repetitivos o de poco interés para la preparación estudiantil.

En el área de estadística y probabilidad se define un enfoque que busca especialmente subrayar la capacidad de descripción y manejo de la información y apuntalar competencias en la toma de decisiones. Esto último se separa de aquellas perspectivas que se pueden llamar aritmética estadística o aritmética probabilística qué subrayan el cálculo de algunas de las fórmulas u objetos que son propios de la estadística y la probabilidad. Los elementos de la estadística y la probabilidad y todos los cálculos que puedan involucrarse en algún momento están o deben estar en función del tratamiento de situaciones reales (Chaves Esquivel, 2020).

En el área de números, la visión que se tiene se separa de aquella en que se promueve el aprendizaje mecánico y abstracto de los números y no su relación en múltiples situaciones y con las otras áreas matemáticas. Los sistemas numéricos que son columnas del pensamiento matemático se visualizan asociadas a la necesidad de su uso y sus características.

Es importante señalar que no todas las áreas matemáticas permiten un tratamiento similar en el uso de las capacidades superiores, los procesos o los ejes disciplinares como, por ejemplo, la contextualización activa, el uso de la historia o el de las tecnologías. Se desprende de esto que es necesario establecer estrategias diferenciadas, aunque preservando los elementos más importantes del currículum.

La implementación curricular

Implementar este currículum que rompió con la inercia de currículos basados estrechamente en contenidos, que eran básicamente listados de tópicos matemáticos, o que estaban asociados a las perspectivas conductistas tradicionales, no ha resultado fácil. La gran mayoría de agentes educativos, en especial los docentes, fueron formados con otros esquemas y visiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es por ello que se creó el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (MEP-PREMCR, 2020a), para tratar de darle continuidad a una apropiada implementación curricular. Este proyecto que ha tenido una larga trayectoria e impacto con gran innovación educativa, nació en el 2012 y ha incluido a los principales redactores del currículo y a otros profesionales. Sobre esto último se introdujeron cursos bimodales desde el inicio y luego diversos cursos virtuales con la modalidad MOOC y, finalmente, recursos virtuales libres dinámicos con base en vídeos muy cortos y amigables (MEP-PREMCR, 2020b, Ruiz, 2020a, 2020b).

Una de las principales lecciones que ha tenido el desarrollo del currículo de matemáticas en Costa Rica es precisamente la forma como este proyecto ha tenido que abordar los diferentes desafíos que este proceso generaba en la sociedad costarricense. Por ejemplo, se trataba de llegarle al mayor número posible de personas en un plazo muy corto porque de alguna manera este currículo fue aprobado por un gobierno y, por lo tanto, se estaba siempre con la amenaza de que un nuevo gobierno político nacional echara por tierra el currículo y las acciones de implementación que se habían desarrollado. Hacer todo eso con premura implicaba utilizar recursos disponibles en el escenario, tales como las plataformas tecnológicas que permitieran llegar a muchas personas en corto tiempo. Esa es la razón por la que se crearon “cursos bimodales” (una parte presencial y otra parte en línea), y esto constituyó una extraordinaria innovación en los procesos de capacitación de docentes en servicio en Costa Rica y en la implementación curricular.

De igual manera, se usaron las ventajas de la internet 2.0 para avanzar en la misma dirección. Esta es la razón por la que este proyecto produjo, desde el año 2014, MOOC y Mini-MOOC para docentes, estudiantes, y muchos otros recursos de naturaleza virtual (Ruiz, 2020b). Al estar nutriendo y orientando la implementación curricular este proyecto tuvo la necesidad de usar y diseñar instrumentos de vanguardia para responder a esos desafíos. Esto es una lección relevante.

En esa misma dirección, por ejemplo, se hizo imprescindible en el año 2016 avanzar en el marco teórico diseñado en el 2012, en relación con la evaluación. Entonces, se ofreció al país construcciones intelectuales de gran valor en las que se aportaron modelos teóricos para poder valorar la intervención de las capacidades cognitivas superiores transversales. Y también para determinar, lo que era otro elemento fundamental del marco teórico: los “niveles de complejidad”, con base en la participación de esos procesos o capacidades cognitivas superiores (Ruiz, 2018). La propuesta generada en Costa Rica es de un gran nivel de precisión para la medición de capacidades superiores en matemáticas. Aunque se usa el currículo costarricense, la metodología ofrece resultados intelectuales y científicos que pueden ser utilizados a nivel internacional. La lección es que, frente a los desafíos de la implementación, los reformadores educativos pueden diseñar objetos intelectuales con un gran nivel, de vanguardia, que pueden servir de referencia en otras regiones.

Todos los elementos que produjo el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* han buscado potenciar la implementación del currículo dentro de las diferentes circunstancias históricas que le ha tocado vivir.

Una de las épocas más difíciles fue precisamente los dos años que duró la pandemia. No obstante, el énfasis, por ejemplo, que se siguió por diversas razones (Ruiz, 2020a) en la construcción de recursos virtuales fue extraordinariamente útil en ese periodo. Pero en general, ya solo en cuanto a recursos, como señala el *Informe del Estado de la Educación* (2019): en Costa Rica lo que ha ofrecido el Proyecto es el único reducto de buenas prácticas en el desarrollo de recursos para apoyar la implementación de un currículum.

Desafortunadamente, en septiembre del año 2022, el apoyo que sostenía a este proyecto dentro del Ministerio de Educación Pública dejó de existir. Y ahora el Proyecto sigue ofreciendo nacional e internacionalmente todos los recursos construidos y sigue teniendo una presencia, pero ya de una manera separada del Ministerio de Educación Pública. Esa es la situación actual de esta experiencia de diseño y desarrollo curricular en Costa Rica.

Las lecciones consignadas en este documento solo son un punto de referencia que pueden ser útiles para equipos de profesionales en Educación Matemática que trabajen en el diseño de currículos y su implementación.

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. y Ruiz, A. (1995). Los programas antes de la creación de la Universidad. En A. Ruiz, A. (Ed.), *Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción.* San José, Costa Rica: Editoriales EUCR, EUNA. https://centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20de%20las%20matematicas%20en%20Costa%20Rica.pdf

Chaves Esquivel, E. (2020). Alfabetización estadística en tiempos de pandemia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Universidad de Costa Rica. Año 15, N. 19.

Lupiáñez, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Learning expectations, development of processes, and active contextualization in Costa Rica's mathematics program. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities: Proceedings of ICMI Study 24* (pp. 523-530). Tsukuba, Japan: ICMI https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2024/ICMI%20Study%2024%20Proceedings.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de estudio de Matemáticas I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada.* San José, Costa Rica: autor. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica MEP-PREMCR (2020a). Sitio web principal. Costa Rica: autor. https://www.reformamatematica.net/

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica MEP-PREMCR (2020b). Sitio web Recursos Libres de Matemáticas. Costa Rica: autor.

https://recursoslibres.reformamatematica.net/

Programa Estado de la Nación (2019). *Sétimo Informe Estado de la Educación*. Costa Rica: autor. https://estadonacion.or.cr/informes/

Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* Número especial, Costa Rica. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1186

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México: Comité Interamericano de Educación Matemática. https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf

Ruiz, A (2020a). Reforma Matemática en tiempos de crisis nacional: fortalezas, debilidades, amenazas, oportunidades. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número 19. ISSN 1659-2573. Costa Rica.

Ruiz, A. (2020b). Technology as a Curricular Instrument, en S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *Handbook of Mathematics Teacher Education* Vol. 2: Technological tools and Technological Mediation in Mathematics Teacher Education. Second Edition, Leiden: Koninklijke Brill NV. DOI: https://doi.org/10.1163/9789004418967_005

¿Estamos formando a los docentes del nivel primario para las expectativas curriculares actuales?

Sarah **González** de Lora
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas,
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
Santiago, República Dominicana
sarahgonzalez@pucmm.edu.do

Resumen

En las últimas décadas, la disciplina Educación Matemática se ha fortalecido en muchas dimensiones en nuestra región. A pesar de estos avances, hay muchos desafíos pendientes para alcanzar las metas de calidad propuestas y, como producto de la pandemia reciente, se han sumado retos importantes para las tareas de enseñar y aprender Matemática. En este trabajo, hemos comparado pinceladas de las competencias y áreas curriculares que se proponen en los currículos del nivel primario de Chile, Costa Rica, Perú, República Dominicana y Singapur, y de las competencias requeridas en los programas de formación inicial de docentes para lograr que los estudiantes alcancen las expectativas curriculares para ese nivel, en estos países. Hemos encontrado que en los documentos oficiales se observa correspondencia entre las expectativas de los currículos propuestos para el nivel primario y las que se incluyen en los programas de formación inicial de docentes para este nivel.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria, Formación docente; Resolución de problemas; Ministerio de Educación Chile, Ministerio de Educación Costa Rica, Ministerio de Educación Perú, Ministerio de Educación República Dominicana, Currículo de Singapur.

Introducción

En las últimas tres décadas y luego de la Publicación de los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Matemática escolar del Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos (NCTM) en 1989, en los currículos de muchos países se incluyeron los estándares propuestos en este documento como estándares o como ejes: Razonamiento, Comunicación, Conexiones, Modelar y representar, Resolución de Problemas, considerando las áreas temáticas de: Números y operaciones, Geometría, Mediciones, Estadística y Probabilidades para los grados desde el primero de la primaria hasta el último grado de educación secundaria. En muchos países, otra innovación fue introducir en el currículo de primaria la Estadística elemental y las Probabilidades.

Asimismo, luego de los resultados de las pruebas TIMSS y PISA y la propuesta del sistema de competencias de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), muchos países de la región latinoamericana han diseñado sus currículos enfocados en el desarrollo de **competencias,** entendiendo las competencias como: **"**El conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas que pueden aprenderse, permiten a los individuos realizar una actividad o tarea de manera adecuada y sistemática, y que pueden adquirirse y ampliarse a través del aprendizaje" (OCDE, 2015, p. 2)**.** El enfoque por competencias es considerado por la OCDE como una propuesta educativa que no solo abarca aprendizaje de contenidos, sino que apunta a la formación de ciudadanos constructivos y con capacidad de reflexión, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003).

Este enfoque de competencias supone expectativas más retadoras para los programas de formación de docentes porque es una visión diferente para planificar, desarrollar y evaluar la enseñanza y el aprendizaje, de la visión que se mantuvo por muchas décadas, y para las que muchos de los docentes en servicio o docentes de los programas de formación de docentes no fueron formados. La pregunta que sigue es: ¿Estamos formando a los nuevos docentes con las competencias requeridas para abordar de manera efectiva esta nueva forma de enseñar y aprender?

En la literatura de formación de docentes se observa que hay acuerdo en relación a que los docentes de Matemática deben tener un conocimiento profundo de la Matemática. Sin embargo, no hay un acuerdo para definir las competencias requeridas para que un docente pueda ofrecer a sus estudiantes las oportunidades de aprendizaje de Matemática adecuadas. Existen diversos modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos en los que los profesores deben ser competentes para promover el aprendizaje de los estudiantes. Estos modelos son necesarios para organizar los programas de formación, inicial o permanente, y para evaluar su efectividad.

Ball y otros (2008) hacen referencia al conocimiento matemático que se necesita para enseñar, MKT, (Mathematics Knowledge needed for teaching), incluyendo los dominios que se muestran en el gráfico siguiente, segmentados en dos áreas "conocimiento del contenido" y "contenido pedagógico del conocimiento", con un área intermedia: "conocimiento especializado del contenido".

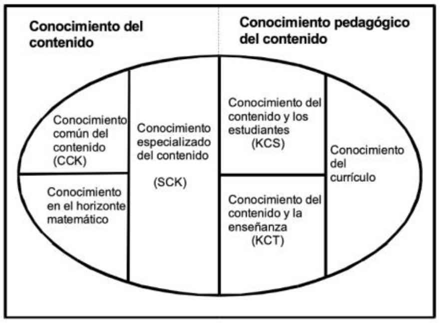


Figura 1. Conocimiento Matemático que se necesita para enseñar.
Fuente: Ball, Thames & Phelps (2008, p. 403)

Por otro lado, Godino, Giacomone Batanero y Font (2017) indican que hay un acuerdo generalizado sobre el *conocimiento especializado* del contenido que debe tener el profesor, que incluye las transformaciones que se deben aplicar al contenido en los procesos de enseñanza y aprendizaje y las interacciones del contenido matemático que se enseña con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos, etc.) que condicionan dichos procesos. Godino, Batanero y Font (2007) propusieron el "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) y señalan, que el profesor

> debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, para formular nuevos problemas y adaptarlos a cada situación educativa. El desarrollo de esta competencia es un desafío para los formadores de profesores, debido a la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta (p. 289)

ellos han denominado este modelo, "conocimientos y competencias didáctico – matemáticas" (CCDM). De manera similar, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) se refieren al concepto de "Competencia (proficiency) en la enseñanza de la Matemática" y proponen estas dimensiones: Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud, conocer a los estudiantes como personas que piensan, conocer a los estudiantes como personas que aprenden, diseñar y gestionar entornos de aprendizaje, desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de "enseñar a comprender", construir relaciones que apoyen el aprendizaje y reflexionar sobre la propia práctica.

También es importante en la formación inicial de docentes tener presente trabajar las "creencias", Blömeke y Kaiser (2017) indicaron que "las creencias son una faceta crucial de las características afectivas – motivacionales". Ellos enfatizan la necesidad de considerar al docente como una persona individual al analizar las competencias. En nuestra experiencia, hemos verificado que muchas veces los docentes de primaria no eligen la carrera de educación porque les gusta la Matemática y, en algunos casos, además, tuvieron experiencias negativas en su aprendizaje de Matemática en primaria y secundaria, por eso, es fundamental trabajar la parte afectiva hacia la Matemática de manera que no sigan propagando esas actitudes en sus estudiantes. En el caso de las creencias, es común que en sus propias experiencias de aprendizaje de la Matemática la hayan experimentado como un cuerpo de conocimientos estático, conformado por algoritmos y fórmulas que deben memorizarse y se hace necesario que experimenten la verdadera naturaleza de la Matemática.

Finalmente, la OCDE (2003) define la Competencia Matemática en PISA como "la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo." (p.28). Incluye el razonamiento matemático y usar los conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir los fenómenos. En OECD (2015a) se señalan tres procesos matemáticos que los estudiantes utilizan para conectar la Matemática con el contexto del problema en el proceso de solución: 1. Formulación de situaciones matemáticas; 2. Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos matemáticos; 3. Interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos. Estos procesos requieren la aplicación de conocimientos matemáticos, clasificados en cuatro categorías: 1. Cambio y relaciones: identificación de variables y las relaciones entre los datos de un problema. 2. Cantidad: aplicación del conocimiento del número y operaciones numéricas en una amplia variedad de escenarios. 3. Espacio y forma: razonamiento geométrico, involucrando visualización, medición y álgebra espacial. 4. Incertidumbre y datos: variación, cuantificación, incertidumbre, error y probabilidad en la medición de los datos o resultados obtenidos.

I. Comparamos currículos de Matemática en el nivel primario

Para realizar el análisis, hemos identificado los documentos curriculares oficiales de los países seleccionados: Chile, Costa Rica, Perú y República Dominicana, y Singapur, y hemos comparado las descripciones o enfoques de enseñanza – aprendizaje de la Matemática que se proponen en ellos; de igual manera, hemos identificado los documentos de formación inicial de docentes de Matemática del nivel primario y contrastado los enfoques, las asignaturas y competencias que se plantean en ellos para la formación de los docentes para que luego puedan ofrecer a sus estudiantes las oportunidades de aprendizaje adecuadas.

I.1 Currículo de Matemática del nivel primario de Chile

En el documento "Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes", del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2023) se indica:

> La asignatura Matemática tiene propósitos formativos que progresan a lo largo de la trayectoria educativa. Desde 1° a 6° Básico, se espera enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en las y los estudiantes". (p. 1)

En este documento se identifican como focos: el "desarrollo del Pensamiento Matemático", que incluye la búsqueda de explicaciones del entorno a partir del uso de la matemática; la "Resolución de Problemas", donde se pone en juego la creatividad para buscar y probar diversas soluciones desde la matemática; la "Representación", que se enfoca en que los estudiantes traduzcan la vida cotidiana a un lenguaje concreto, pictórico y simbólico; el "Modelamiento Matemático", que procura representar la realidad mediante símbolos matemáticos; y, la "Argumentación y Comunicación", promoviendo además el uso de las TIC como herramientas clave para la comprensión del conocimiento matemático. (p. 2)

En estas declaraciones curriculares observamos el énfasis en resolución de problemas, en la comunicación, la representación y modelamiento, el razonamiento lógico, las conexiones de las diferentes áreas de la Matemática entre sí y con otras áreas del saber.

I.2 Currículo de Matemática del nivel primario de Costa Rica

En el documento: Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012) se indica que: "Aprender a plantear y resolver problemas y, especialmente, usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades". (p. 11). Además, se establece que en ese currículo "se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos." Se señala que el currículo se organiza en cinco áreas matemáticas: Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad, y se incluyen cinco ejes disciplinares transversales: La resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la contextualización activa como un componente pedagógico especial, el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales, la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas y el uso de la historia de las Matemáticas." Asimismo, se plantean cinco actitudes que deben desarrollarse: "Perseverancia, confianza en la utilidad de las Matemáticas, participación activa y colaborativa, autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas, respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas". (p. 11). También se hace referencia a que el currículo se enfoca desde la perspectiva de la "competencia matemática", en contraposición al enfoque por contenidos, para generar capacidades en conexión con la vida social, y los aprendizajes de contenidos se visualizan en función de esas capacidades; se utiliza la definición de competencia planteada por la OCDE en 2010.

De la conceptualización expresada en el documento del currículo, se observa que el currículo enfatiza la resolución de problemas, la modelización, la perspectiva de competencias, las conexiones de la Matemática con la realidad, la importancia de las actitudes y creencias, la utilización de la historia de las Matemáticas y el uso inteligente de las tecnologías digitales.

I.3 El currículo de Matemática del nivel primario de Perú

En el documento: "Currículo Nacional de la Educación Básica" del Ministerio de Educación de Perú (MINEDU, 2016) se incluye el perfil de egreso del nivel primario con las competencias esperadas. Se define la competencia como "la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético". En el gráfico hemos insertado una flecha en la pieza que hace referencia al conocimiento y competencia Matemática: "El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto". En el documento citado, se indica: "El estudiante busca, sistematiza y analiza información para entender el mundo que lo rodea, resolver problemas y tomar decisiones relacionadas con el entorno. Usa de forma flexible estrategias y conocimientos matemáticos en diversas situaciones, a partir de los cuales elabora argumentos y comunica sus ideas mediante el lenguaje matemático, así como diversas representaciones y recursos" (p. 15). En el currículo se declara el énfasis en la Resolución de problemas; se definen las expectativas planteadas de Resolución de problemas mediante las capacidades que conforman las competencias:

- **Resuelve problemas de cantidad (capacidades:** traduce cantidades a expresiones numéricas, comunica su comprensión sobre los números y las operaciones, usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo, argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones)
- **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio (capacidades:** Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas, comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas, usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia)
- **Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre (capacidades:** Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas, comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos, usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos, sustenta conclusiones o decisiones basado en información obtenida)
- **Resuelve problemas de forma, movimiento y localización (capacidades:** Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio, argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas –

Figura 2. Currículo de Matemática de Perú.
Fuente: MINEDU (2016. p.16)

Además, el currículo incluye una descripción muy detallada de los niveles de desarrollo de cada competencia en una escala que va desde 8 a 1. El currículo tiene 6 áreas, una de las cuales es Matemática; tiene 14 competencias, de las cuales 2 corresponden al área de Matemática; tiene 31competencias específicas del nivel primario, 4 son de Matemática.

Se observa que es un currículo organizado por competencias y centrado en la resolución de problemas, se enfatizan también las conexiones entre las áreas de Matemática y de la Matemática con el mundo, la comunicación y la argumentación, las representaciones y la modelización.

I.4 El currículo de República Dominicana

En el documento Bases para la Revisión y Actualización Curricular del Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD, 2014) se expresa que el Diseño curricular se organiza por "Competencias", definiendo las competencias como "la capacidad para actuar de manera eficaz y autónoma en contextos diversos movilizando de forma integrada conceptos, procedimientos, actitudes y valores" (p. 35). Señala también que las competencias son el dominio efectivo de las habilidades que una determinada sociedad acuerde como necesarias para afrontar los problemas y aportar soluciones; y que se desarrollan de forma gradual en un proceso que se mantiene a lo largo de toda la vida, tienen como finalidad la realización personal, el mejoramiento de la calidad de vida y el desarrollo de la sociedad en equilibrio con el medio ambiente (p. 36). No se restringen a las habilidades cognitivas o al grado de eficiencia en la ejecución, implican un conjunto mucho más complejo que incluye motivaciones, emociones y afectos que están situados y son mediados culturalmente. En el documento: "Diseño Curricular del nivel primario, primer ciclo" (MINERD, 2016), se indica que este diseño curricular tiene 7 competencias fundamentales: Ética y Ciudadana, Comunicativa, de Pensamiento Lógico, Creativo y Crítico, de Resolución de Problemas, Científica y Tecnológica, Ambiental y de la Salud, de Desarrollo Personal y Espiritual. Además, se declara que: "La alfabetización Matemática se entiende como "la capacidad para identificar y comprender el papel que desempeña la matemática en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar la matemática y comprometerse con ella y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo". La competencia matemática implica "el dominio de las capacidades para analizar, razonar y comunicar eficazmente en la formulación y resolución de problemas matemáticos en una variedad de contextos y situaciones. (p. 82) Los procesos orientados al desarrollo de competencias matemáticas deben partir de la experiencia, necesidades, intereses y motivaciones de los estudiantes, y girar en torno a la resolución de problemas tanto como competencia y como estrategia de aprendizaje, y a la discusión y reflexión a partir de lo realizado.

De las declaraciones de intenciones curriculares, se observa que el currículo está estructurado en base a competencias, definidas en los términos de la OCDE y que se enfatiza la Resolución de problemas, las conexiones, la comunicación.

I.5 El currículo de Matemática de Singapur

A partir de los resultados de las evaluaciones de TIMSS y PISA, en los que Singapur ha obtenido excelentes calificaciones, el currículo de Singapur ha sido objeto de estudio en muchos países. Hemos incluido las informaciones básicas del currículo de este país como referencia para los currículos de los países latinoamericanos seleccionados. En el gráfico siguiente se muestra el marco del currículo de Matemática de Singapur.

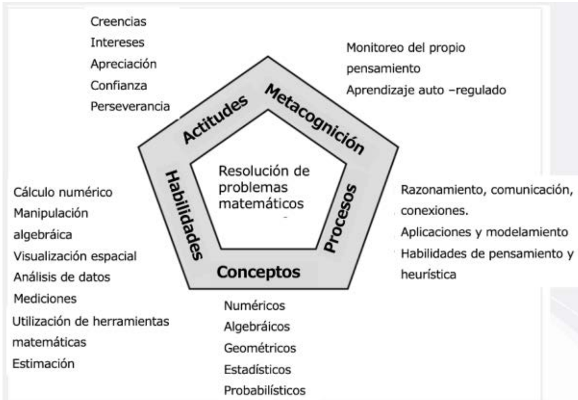


Figura 3. Marco de Matemática.
Fuente: Kaur (2014. p. 6)

Kaur (2014) explica que este marco se utiliza para toda la educación preuniversitaria, se enfoca en la resolución de problemas, que el currículo está diseñado con un modelo en espiral y que se plantea el aprendizaje de conceptos y habilidades utilizando abordajes pedagógicos apropiados a la edad de los estudiantes. Señala también, que el abordaje: "Concreto – Pictórico – Abstracto" es central en el nivel primario y en los primeros grados del nivel secundario; los profesores guían a los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos abstractos mediante experiencias, contextos significativos y utilizando representaciones concretas y pictóricas. Indica, además, que el sistema es dinámico y se desarrolla constantemente, las iniciativas y políticas son guiadas por evidencias provenientes de la investigación, análisis de otros sistemas educativos del mundo y deliberaciones de los líderes de educación.

Observamos en el modelo que incluye 5 componentes: conceptos, habilidades, procesos, metacognición y actitudes que apoyan el desarrollo de la resolución de problemas.

Kaur (2014) señala, además, algunos factores que pueden explicar el desempeño de Singapur en TIMSS y en PISA:

> Puede decirse que el currículum está elaborado para satisfacer las necesidades de los estudiantes y, de acuerdo, a sus habilidades. El Ministerio de Educación entrega el currículum propuesto a todas las escuelas. Tiene un abordaje en espiral. Es una guía para que los maestros planifiquen su programa de enseñanza, pero los profesores no están atados a la secuencia de temas, sin embargo, deben asegurar la jerarquía y las conexiones entre ellos. Los libros de texto son una parte esencial del currículum propuesto, son producidos por casas editoras, pero con la guía y el seguimiento cercano de especialistas del currículo y de la división de planificación y desarrollo curricular del Ministerio de educación. Todos los libros de texto deben ser aprobados por el Ministerio de Educación." (p. 11)

1.6 Comparación de algunos aspectos curriculares de los países seleccionados.

En el cuadro siguiente se comparan algunos aspectos de los currículos de Chile, Costa Rica, Perú y República Dominicana y se incluyen, además, datos de Singapur.

Cuadro 1: *Comparación de las Habilidades, Ejes, Áreas, Procesos, Competencias en los currículo de Chile, Costa Rica, Perú, República Dominicana y Singapur*

Chile	**Chile**	**Costa Rica**	**Costa Rica**	**Perú**	**República Dominicana**	**República Dominicana**	**Singapur**	**Singapur**
Estándares disciplinarios	Habilidades	Áreas de Matemática	Procesos	Resolución de problemas	Áreas Matemáticas	Competencias específicas	Centrado en Resolución de problemas	Áreas de la Matemática
Números y operaciones	Resolver problemas	Números	Razonar y argumentar	Resuelve problemas de cantidad	Números y operaciones	Razonar y argumentar	Conceptos	Números
Patrones y Algebra	Argumentar y comunicar	Medidas	Plantear y resolver problemas	Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Geometría	Comunicar	Habilidades	Álgebra
Geometría	Modelar	Geometría	Comunicar	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Mediciones	Modelar y representar	Procesos	Geometría
Medición	Representar	Relaciones y Álgebra	Conectar	Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Estadística y probabilidades	Conectar	Metacognición	Mediciones
Datos y probabilidades		Estadística y probabilidad	Representar			Resolver problemas	Actitudes	Estadística
						Utilizar herramientas tecnológicas		

Fuente: Elaboración propia a partir de los documentos curriculares de los Ministerios de educación y de artículos relacionados de Chile, Costa Rica, Perú, Rep. Dominicana y Singapur.

En el análisis comparativo de los currículos propuestos por los ministerios de educación de los países seleccionados para la comparación, observamos que en Chile se hace referencia a: Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, Representar como “Habilidades”, en Costa Rica se establecen como “Procesos”: Razonar y argumentar, Plantear y Resolver Problemas, Comunicar, Conectar y Representar, y en República Dominicana se denominan “Competencias” a Razonar y Argumentar, Comunicar, Modelar y representar, Conectar, Resolver Problemas y Utilizar herramientas tecnológicas. Como puede inferirse del cuadro, en los currículos de estos países, aunque las categorías se denominan de manera diferente, comparten: Razonar y argumentar, comunicar, resolver problemas, conectar, modelar y representar.

Por otro lado, en la comparación de las áreas de la Matemática que se incluyen en los currículos del nivel primario de estos países, observamos que comparten: Números, Geometría, Mediciones, Estadística y Probabilidad; los currículos de Chile y Costa Rica incluyen Patrones y Álgebra, el de Rep. Dominicana incluye Patrones en las áreas de Números y Geometría, pero no incluye Álgebra. El currículo de Perú (2016) tiene una estructura diferente, centrado principalmente en Resolución de Problemas, enfatizando problemas de cantidad, de regularidad, equivalencia y cambio, de gestión de datos e incertidumbre, de forma, movimiento y localización; en estos enunciados nos damos cuenta de que se trabajan también las áreas de números, estadística y probabilidad, geometría y medición desde la perspectiva de las competencias.

II. Comparamos los currículos de formación de docentes con los currículos de primaria de varios países

En los documentos relacionados con formación inicial de docentes se establecen estándares, ejes o dominios que se proponen guiar esos procesos de formación. Como se indicó en la Introducción de este documento, en la literatura no hay un acuerdo sobre cuáles son las competencias que debe desarrollar un docente, cómo puede empoderarse de ellas, cómo debe utilizarlas para proporcionar oportunidades que generen aprendizajes significativos y autónomos y las competencias propuestas en los currículos de estos países para los estudiantes. Sin embargo, si hay puntos de coincidencia importantes en muchos autores: todos los documentos consultados incluyen estándares disciplinares y pedagógicos. En este sentido, Shulman (1986) expresó:

> La relación entre los Estándares Pedagógicos y los Estándares Disciplinarios es indispensable para la Formación Inicial Docente, es decir, estos estándares deben siempre ser entendidos en complementariedad. El docente recién egresado debe ser capaz de dominar los conocimientos, habilidades y actitudes planteados en los Estándares Pedagógicos y, al mismo tiempo, ser capaz de poner estos conocimientos al servicio de los propios contenidos que plantean los Estándares Disciplinarios. En otras palabras, se requiere una estrecha vinculación entre el conocimiento del contenido (disciplinar y didáctico) y el conocimiento pedagógico del contenido y ambos conocimientos son componentes esenciales de las competencias de los docentes. (p.10)

Presentamos a continuación datos tomados de los programas de formación inicial de docentes de primaria, y de documentos relacionados con este tema, en los países seleccionados: Chile, Costa Rica, Perú, República Dominicana y Singapur.

II.1 Programa de formación inicial de docentes en Chile (MINEDUC, 2022)

En el documento: Estándares de la profesión docente. Carreras de Pedagogía en Educación General Básica MINEDUC (2022, p. 8) se establece: "El conocimiento de la profesión docente se estructura en base a tres dominios de saber y saber hacer, referidos respectivamente a los ámbitos: 1) de las disciplinas, 2) del aprendiz y su contexto, y 3) de la enseñanza para el crecimiento y transformación del aprendiz".

Además, estos estándares se organizan en estándares pedagógicos y estándares disciplinares. El documento que los describe es muy completo y puede ser de gran utilidad para las instituciones formadoras de docentes.

Los estándares pedagógicos están organizados en "Dominios" y describen expectativas con respecto a las prácticas docentes en cualquier asignatura, explicitando habilidades, conocimientos y disposiciones necesarias para asegurar interacciones pedagógicas de calidad que potencien los aprendizajes disciplinarios y transversales del currículum vigente. Son los siguientes:

Dominio A: Preparación del proceso de enseñanza y aprendizaje

Estándar 1: Aprendizaje y desarrollo de los/las estudiantes
Estándar 2: Conocimiento disciplinar, didáctico y del currículum escolar
Estándar 3: Planificación de la enseñanza
Estándar 4: Planificación de la evaluación

Dominio B: Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje
Estándar 5: Ambiente respetuoso y organizado
Estándar 6: Desarrollo personal y social

Dominio C: Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/as estudiantes
Estándar 7: Estrategias de enseñanza para el logro de aprendizajes profundos
Estándar 8: Estrategias para el desarrollo de habilidades del pensamiento
Estándar 9: Evaluación y retroalimentación para el aprendizaje

Dominio D: Responsabilidades profesionales
Estándar 10: Ética profesional
Estándar 11: Aprendizaje profesional continuo
Estándar 12: Compromiso con el mejoramiento continuo de la comunidad escolar

Estándares disciplinares

En el mismo documento se señala:

> En general, los estándares disciplinarios refieren a lo que el/la docente egresado debe demostrar en cuanto al manejo de los conocimientos propios de su disciplina y el saber didáctico específico para su enseñanza. En este sentido, expresan la visión de que la excelencia de la enseñanza descansa en una imbricación profunda del conocimiento del contenido y la capacidad pedagógica de generar representaciones, acciones y reflexiones sobre tales conocimientos (p.77).

Los estándares disciplinares se organizan también por áreas del conocimiento. Los de Matemática son estos:

Estándar A: Números y Operaciones.
Estándar B: Patrones y Algebra.
Estándar C: Geometría y Medición.
Estándar D: Datos y probabilidades.
Estándar E: Habilidades y actitudes matemáticas.

Para conocer el alcance de la definición de estos estándares, se puede consultar el documento de los Estándares. (MINEDUC, 2022, pp. 110 -131).

Para identificar las asignaturas de Matemática incluidas en los programas de formación inicial de docentes en Chile, se consultaron los de la Universidad de Chile y de la Pontificia Universidad Católica de Chile y se incluyen en el Cuadro 5, de la p. 19

II.2 Programas de formación inicial de docentes del nivel primario en Costa Rica

En un estudio comparativo de diferentes programas de formación inicial de profesores de matemática de universidades públicas y privadas, Barrantes (2003) ya realizó observaciones sobre las carencias en la formación didáctica de profesores de matemática y el divorcio entre los cursos de matemática y pedagogía. Este fenómeno también se subrayó en el documento II Estado de la Educación del Programa de Estado de la Nación (2008) donde se indica que los programas no asumen apropiadamente la naturaleza específica de la Educación Matemática como disciplina científica y profesional, diferente de la Educación y las Matemáticas, que existe una separación inadecuada entre las Matemáticas y la Pedagogía y un espacio muy limitado de competencias y conocimientos en pedagogía específica de las Matemáticas. (p. 157)

Más recientemente, en el Informe del Estado de la Educación del Programa Estado de la Nación (2019) se señaló que las personas docentes en servicio tienen deficiencias en su formación y no cuentan con la preparación para implementar las metodología que se pretenden en el Programa de Estudios vigente (Ministerio de Educación Pública, 2012), e insta a las universidades a evaluar y modificar los planes de estudio de manera que sus graduados tengan "dominio de la materia, un manejo de las didácticas específicas de cada asignatura y un conocimiento pleno de los programas del MEP y sus requerimientos", (p. 18).

En un estudio realizado por Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce (2019), el análisis de los datos reveló que existe una amplia variedad de programas para formar docentes de educación primaria. Se indica, además, que los programas de formación inicial de docentes no tienen "lineamientos generales y tienen poco control; señalan que, en Costa Rica, no existen regulaciones sobre el propósito, la duración, el perfil ni los contenidos de estos programas, lo cual podría afectar la enseñanza de matemáticas en las instituciones de educación primaria, ya que llegan docentes con énfasis distintos en su formación". Indican, además que

> Actualmente, en Costa Rica, no se tiene ninguna regulación para los planes de estudio de carreras que se relacionen con la enseñanza de I y II ciclos de la Educación General Básica (EGB); es decir, no se regulan los requisitos de entrada, el nombre de la carrera, la cantidad de cursos por cada área temática, el tiempo total de duración de tal carrera o de los cursos particulares (cuatrimestre, semestre), el contenido que debe abarcarse, la especialidad del profesional que imparte cada curso acorde con el plan de estudios, o el tipo de competencias profesionales que debe desarrollar un docente en formación. Esto significa que no se regula ni el conocimiento del contenido ni el pedagógico que se está desarrollando en los docentes en formación, quienes se encargarán, en un futuro próximo, de impartir las clases de matemáticas en la educación primaria.

De acuerdo con Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce (2019), el número de créditos del área de Matemática en los programas de formación docente varían desde 6 a 42. (Tabla 16)

Valverde, Araya y Picado (2019) realizaron un estudio detallado sobre la descripción de tres tipos de programas de estudios para la formación inicial de docentes de matemática que existen en Costa Rica: 1. Programas de formación inicial centrados en la Pedagogía y la

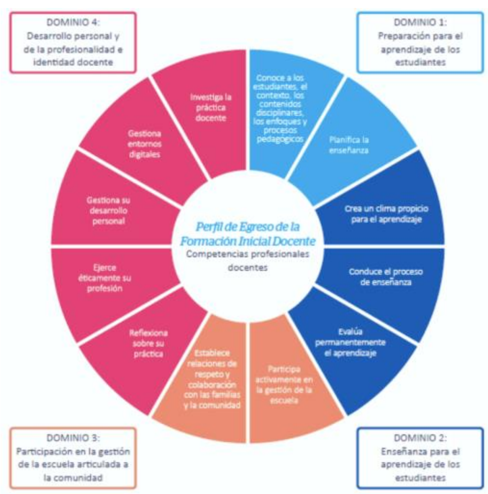
Matemática: Este modelo de formación es caracterizado por la separación de las dos áreas básicas: Matemáticas y Pedagogía, 2. Programas de formación inicial centrados en la Pedagogía, la Matemática y la Educación Matemática, son programas que se originan a partir de un reconocimiento disciplinar de la Educación Matemática y de mejorar la formación del docente; estos planes de estudios incluyen una serie de modificaciones en la malla curricular, fundamentalmente tienen la inclusión de cursos que particularizan los problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos específicos y 3. Programa de Formación Inicial Centrado en la Educación Matemática, este modelo busca formar un profesional especialista que estudie los fenómenos de aprendizaje y enseñanza de los objetos matemáticos (en primaria, secundaria, diversificado y universidad), su comprensión, secuencia curricular, secuencia histórico-epistemológica y el desarrollo de estos en la Matemática; define dos áreas de formación: didáctico-matemática y matemática y el área didáctico-matemática cuenta con cursos de Didáctica de la Matemática tanto general como específica y sitúa desde inicios de carrera la especialidad de la formación, vinculando cada una de las temáticas con el estudio escolar de la matemática.

En el Octavo Informe (2021) se señaló la importancia de que el país iniciara cambios urgentes en dos temas claves: la formación inicial docente y la gestión de un sistema educativo con una amplia diversidad de poblaciones, centros educativos y grandes desigualdades internas en materia de necesidades y recursos. (p. 110); se indicaron tres acciones concretas para lograr mejoras rápidas y sustantivas: la acreditación obligatoria de las carreras de educación en el país; elaborar un marco nacional de cualificación para las carreras de educación, que establezca un conjunto de estándares de calidad de cumplimiento obligatorio para todos los programas de formación inicial, y, finalmente, en el ámbito del reclutamiento, contratación e inducción de los docentes, se recomendó aplicar una prueba de idoneidad a los futuros docentes y revisar los requisitos establecidos en la Ley de Carrera Docente, (p. 111)

II.3 Currículo de Formación inicial de docentes de primaria en Perú

El documento Diseño Curricular Básico de la Formación Inicial Docente (DCBN), (MINEDU, 2019) es el documento de política educativa que presenta tanto el Perfil de egreso como las competencias profesionales docentes, así como los niveles de desarrollo de dichas competencias. Establece un plan de estudios de diez ciclos académicos que incluye una serie de cursos y módulos organizados en tres componentes curriculares: formación general, formación específica y formación en la práctica e investigación. En el modelo curricular se presentan las descripciones de los cursos y módulos, y las orientaciones pedagógicas generales para el desarrollo de las competencias. En el documento se indica que: La relación entre la Formación Inicial Docente y la Educación Básica es una de las más importantes para comprender la necesidad de un cambio de paradigma en el sistema educativo. (p.12). Se indica que la Educación Básica presenta un conjunto de demandas a la Formación Inicial Docente debido a los escenarios de alta complejidad y diversidad que tiene actualmente para desarrollar el máximo de las potencialidades de las personas y que: "Un reto especialmente importante para los docentes de Educación Básica es comprender los cambios que se han producido en la concepción y desarrollo sobre las formas en que aprenden las personas, se requiere un uso creativo de los espacios educativos y del vínculo con la comunidad, de los recursos y materiales y de las tecnologías digitales. Se requiere pensar en todos ellos como medios que movilizan la indagación, reflexión, el pensamiento crítico y la creatividad en la resolución de problemas complejos, entre otros procesos, mediante un trabajo basado en competencias y no en contenidos. (p. 13). El sistema educativo peruano, y en particular el currículo vigente de la Educación Básica, se centran en las competencias, entendidas como actuaciones complejas y situadas que se desarrollan a lo largo de la vida. (p. 14)

A continuación, se incluye el esquema del perfil de egreso de los la FID. (MINEDU, 2019)

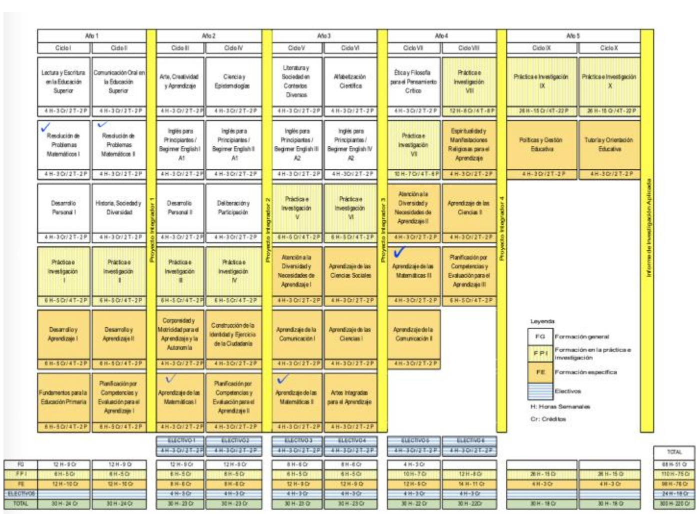


El esquema del perfil de egreso tiene cuatro dominios:
Dominio 1: Preparación para el aprendizaje de los estudiantes (Conoce a los estudiantes, contenidos disciplinares, enfoques y procesos pedagógicos. Planifica la enseñanza)
Dominio 2: Enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes (Crea un clima propio para el aprendizaje, Conduce el proceso de enseñanza, Evalúa permanentemente el aprendizaje)
Dominio 3: Participación en la gestión de la escuela articulada a la comunidad
Dominio 4: Desarrollo personal y de la profesionalidad e identidad docente.

Figura 3. Esquema del perfil de egreso de la Formación Inicial Docente
Fuente: MINEDU. Diseño Curricular Básico de la Formación Inicial Docente (DCBN). 2019, p.20

Componentes curriculares

El DCBN de la Formación Inicial Docente se organiza en tres componentes curriculares, formación general, formación específica y formación en práctica e investigación. Esta forma de organización contribuye a la formación integral del estudiante de FID desde una visión sistémica y coherente donde ya no se trabajan contenidos atomizados, sino que se promueve el desarrollo sinérgico de las competencias profesionales docentes del Perfil de egreso.



En la malla curricular se observa que hay cinco asignaturas del área de Matemática:
2 asignaturas denominadas "Resolución de Problemas I, II" y
3 asignaturas que se denominan "Aprendizaje de la Matemática I, II y III."

Figura 4. Malla curricular del DCBN del Programa de Estudios de Educación Primaria

Fuente: MINEDU.DCBN. Programa de estudios de la Educación Primaria. (2019. p.61)

Resolución de problemas matemáticos I. Comprensión y uso de los conjuntos numéricos, sus representaciones y operaciones. Análisis e interpretación de situaciones de incertidumbre y de gestión de datos provenientes de investigaciones o de otras fuentes, de preferencia relacionadas con prácticas docentes. (p.67)

Resolución de problemas matemáticos II. Visualización, modelamiento y transformación de las formas bidimensionales y tridimensionales, medición y estimación de objetos, y descripción de su ubicación mediante sistemas de referencia, interpretación y generalización de patrones, establecimiento de igualdades y desigualdades, análisis de relaciones de cambio entre magnitudes de distinta naturaleza y modelamiento mediante funciones. (p.71)

Aprendizaje de las Matemáticas I. Comprensión de los procesos que se realizan cuando los estudiantes de educación primaria construyen las nociones y significado de número, operaciones aditivas, equivalencia, patrones, formas geométricas y propiedades, organización espacial, lo posible o imposible de un suceso y manejo de datos y utilización de diversas representaciones de las nociones matemáticas. (MINEDU, p.78)

Aprendizaje de las Matemáticas II. Comprensión de los procesos que se movilizan para aprender las nociones de número natural, fracción y decimal, sus diferentes representaciones, estrategias y algoritmos de cálculo y estimación, construcción e identificación de patrones, relaciones de equivalencia y cambio. Principales dificultades que pueden presentar los estudiantes de primaria en el aprendizaje de estos conceptos, especialmente en el tránsito de la generalización hacia la formalización y simbolización. (MINEDU, p.87)

Aprendizaje de las Matemáticas III. Comprensión de las formas bidimensionales y tridimensionales con estrategias de visualización y procedimientos de modelación. Procesamiento de datos e interpretación de información, y la construcción de la noción de probabilidad. Principales dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de estos conceptos, especialmente las asociadas al desarrollo del pensamiento aleatorio, a la lectura de datos y al desarrollo del pensamiento geométrico. (MINEDU, p.95). Para conocer el alcance de la definición de estas asignaturas, se puede consultar el vínculo siguiente: https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6671

II.4 Currículo de formación inicial de docentes de primaria en República Dominicana

En la última década, en República Dominicana se han aprobado tres normativas para la Formación inicial de docentes, la 08-2011, que se creó a partir de una evaluación exhaustiva de la situación de la Formación inicial de docentes en el año 2010, la 09-2015 que se creó porque en el 2014 se realizó un nuevo Diseño Curricular y la formación inicial debía responder al mismo, y la 02-2023, que luego de evaluar la 09-2015, modifica ciertos aspectos de la misma. En estas dos últimas normativas, se indica que los programas de formación para futuros docentes deben estar estructurados en base a 3 componentes de formación: 1. General, 2. Psicopedagógica, y 3. Disciplinaria. Los énfasis en cada componente dependen del ciclo y nivel educativo. El Programa de Formación docente para el nivel primario tiene 160 créditos tanto para el primer ciclo (grados primero a tercero) como para el segundo ciclo (grados cuarto a sexto).

Tabla 1: *Porcentaje asignado a cada componente de formación inicial docente por ciclo de educación primaria*

Componentes	General	Psicopedagógico	Disciplinario
Primer Ciclo de primaria	15%	50%	35%
Segundo ciclo de primaria	15%	35%	50%

Fuente: Elaboración a partir de la Normativa 02-2023 MESCYT. 2023

En el documento se indica que en lo relativo a matemáticas, debe contener como mínimo el estudio de los sistemas numéricos, la métrica, aritmética, geometría, álgebra, y el análisis e interpretación de datos, y que se dedicará a la Matemática un 27.5% de los créditos del programa. En el área de Matemáticas se han concebido unas seis competencias: **Razonar y argumentar, Comunicar, Modelar y representar, Conectar, Resolver problemas y Utilizar herramientas tecnológicas**. Para conocer el alcance de la definición de estas competencias, se puede consultar el vínculo siguiente: https://www.didactica.edu.do/wp-content/uploads/2018/02/Normativa-para-la-Formaci%C3%B3n-Docente-de.pdf

II.5 Algunas notas sobre la formación inicial de docentes en Singapur

Kaur (2014) señala en su documento que "The National Institute of Education: (2002) indica sobre los docentes:

> Para construir la visión "Escuelas Pensantes, nación que aprende" (Goh, 1997), se han identificado los profesores como la clave para su logro. La jornada de aprendizaje para ser maestro se inicia con la educación inicial que ofrece el Instituto Nacional de Educación (NIE), que es la única institución en Singapur donde se forman todos los docentes de primaria, secundaria y "Junior colleges". Como todas las demás instituciones de educación superior en Singapur, los programas y cursos del NIE se modifican constantemente para mantenerse actualizados para enfrentar los rápidos cambios que ocurren localmente e internacionalmente. El Ministerio de educación recluta candidatos adecuados para posiciones de docentes en primaria, secundaria y Junior colleges durante todo el año."

Indica, además: "El NIE representa la esperanza de la nación de que todos sus profesores serán bien educados, comprometidos, preocupados por sus estudiantes y dedicados a la tarea de moldear el futuro de Singapur"

En ese documento, Kaur incluye el cuadro siguiente, en el que se presentan las expectativas de un profesor de Matemática relacionadas a los dominios de conocimientos y habilidades para tres niveles de la carrera de enseñanza; se señala además:

> Es evidente de la observación de la tabla que un profesor que desee avanzar en su carrera debe involucrarse en un aprendizaje durante toda la vida para fortalecer sus competencias tanto en dominio de contenido como en áreas pedagógicas que son específicas a sus necesidades como maestro. Hay una motivación extrínseca para los profesores avanzar de un nivel a otro porque su salario y otros beneficios están vinculados a los niveles en su campo de trabajo la enseñanza.

Cuadro 2: *Expectativas en los dominios de conocimiento y habilidades*

Nivel	Conocimientos de Matemática	Habilidades para enseñar Matemática
Profesor que inicia	Comprende el marco y los conceptos fundamentales del currículo de Matemática	Entiende las habilidades de gestión de estudiantes. Es competente en la enseñanza de lecciones de Matemática.
GEO 1 A 1/ 2 A 1	Demuestra conocimiento de conceptos fundamentales y un amplio dominio del currículo de Matemática, de recursos de enseñanza y de programas de enriquecimiento y remediales asociados con el nivel de Matemática que enseña.	Demuestra habilidades de gestión de estudiantes y de la aplicación de una variedad de técnicas de pedagógicas para enseñar Matemática. Organiza y desarrolla lecciones interesantes para estudiantes de perfiles y habilidades diferentes y logra aprendizajes de Matemática a través de actividades interactivas
Profesor "Master"	Demuestra conocimiento de relaciones significativas de historia y estructuras con la Matemática y la aplicación de este conocimiento para inspirar interés en Matemática; una conciencia fuerte de las tendencias y temas del entorno de la Matemática más allá del ambiente escolar y en el campo de la industria. Conocimiento de conceptos fundamentales de otras asignaturas relacionadas con las cuales se integra la Matemática al mundo fuera de la escuela.	Demuestra técnicas y estrategias especializadas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y la integración con el curriculum para asegurar los logros de los objetivos de aprendizaje e inspirar aprendizaje en el cluster incluyendo abordajes para nichos de grupos de estudiantes

Fuente: Kaur. B. (2014)

II.6 Comparación de algunos aspectos de los programas de Formación inicial de docentes

En el cuadro siguiente, se comparan algunos aspectos de los programas de formación inicial de docentes de los países seleccionados.

Cuadro 3. *Algunos aspectos de los programas de formación inicial de docentes.*

Chile **Estándares Pedagógicos**	**Costa Rica** **Ejes**	**Perú** **Dominios**	**República Dominicana** **Dimensiones**	**Singapur** **Principios**
Dominio A: Preparación del proceso de enseñanza y aprendizaje **Estándar 1:** Aprendizaje y desarrollo de los/las estudiantes **Estándar 2:**	Eje Didáctico Matemático Eje Desempeño docente Eje Historia y Epistemología	Dominio 1: Preparación para el aprendizaje de los estudiantes Dominio 2: Enseñanza para el	Dimensión 1: Desarrollo Personal y Profesional Dimensión 2: Sociocultural	Principio 1. Se enseña para aprender, se aprende para entender, se comprende para razonar y aplicar y finalmente para resolver problemas.

Conocimiento disciplinar, didáctico y del currículum escolar **Estándar 3:** Planificación de la enseñanza **Estándar 4:** Planificación de la evaluación Dominio B: Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje **Estándar 5:** Ambiente respetuoso y organizado **Estándar 6:** Desarrollo personal y social Dominio C: Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/as estudiantes **Estándar 7:** Estrategias de enseñanza para el logro de aprendizajes profundos **Estándar 8:** Estrategias para el desarrollo de habilidades del pensamiento **Estándar 9:** Evaluación y retroalimentación para el aprendizaje Dominio D: Responsabilidades Profesionales **Estándar 10:** Ética profesional **Estándar 11:** Aprendizaje profesional continuo **Estándar 12:** Compromiso con el mejoramiento	de las Matemáticas Eje Aplicaciones de la Matemática Eje Tecnologías de la Información y las comunicaciones	aprendizaje de los estudiantes Dominio 3: Participación en la gestión de la escuela articulada a la comunidad Dominio 4: Desarrollo personal y de la profesionalidad e identidad docente Fundamentos epistemológicos: Pensamiento complejo, Interdisciplinariedad, Diálogo de saberes. Fundamentos pedagógicos: Formación basada en competencias, aprendizaje y enseñanza situada, enfoque crítico reflexivo, evaluación formativa, investigación formativa.	Dimensión 3: del conocimiento del sujeto educando Dimensión 4: Pedagógica Dimensión 5: Curricular Dimensión 6: de Gestión Escolar	Principio 2. La enseñanza debe construir el conocimiento de los estudiantes, poner atención a los intereses y experiencias de los estudiantes e involucrarlos en un aprendizaje activo y reflexivo. Principio 3. La enseñanza debe conectar el aprendizaje al mundo real, utilizar de manera controlada las herramientas de las tecnologías de la información y las comunicaciones.

continuo de la comunidad escolar				

Fuente: Elaboración propia de documentos curriculares citados de los diferentes países

Cuadro 4: *Competencias en los Programas de Formación Inicial de Docentes*

Chile[1]	**Costa Rica**	**Perú** **Resolución de problemas**	**República Dominicana**	**Singapur Matemática para resolución de problemas Competencias para el siglo XXI**
Se indica la necesidad de contar con docentes competentes para desarrollar las habilidades del S.XXI: a. Pensamiento crítico b. Pensamiento creativo c. Trabajo colaborativo			• Razonar y argumentar • Comunicar • Modelar y representar • Conectar • Resolver problemas • Utilizar herramientas tecnológicas	Procesos: • Razonamiento • Comunicación y conexiones • Aplicaciones y modelamiento • Habilidades de pensamiento y heurística
				Metacognición
				Habilidades • Cálculo numérico • Manipulacción Algebráica • Visualización espacial • Análisis de datos • Mediciones • Utilización de herramientas matemáticas • Estimación

Fuente: Elaboración propia de documentos curriculares citados de los diferentes países

[1] El documento consultado se refiere principalmente a "estándares" pero en el discurso escrito se mencionan las competencias en diferentes dimensiones de manera reiterada. MINEDU. Estándares de la profesión docente. Carreras de pedagogía en educación general básica. 2022. p.13

Cuadro 5. *Asignaturas del área de Matemática en los programas de formación inicial de docentes de primaria*

Chile[2]	**Costa Rica** [3]	**Perú**[4]	**República Dominicana**[5]	**Singapur**[6]
Universidad de Chile* • Fundamentos de la educación matemática en la niñez (3 horas, 5 Cr) • Desarrollo del pensamiento matemático en básica inicial (3 horas, 5 Cr) • Desarrollo del pensamiento matemático I (3 horas, 5 Cr) • Desarrollo del pensamiento matemático II (3 horas, 5 Cr) • Además, hay 10 créditos adicionales para dos menciones, 5 créditos para cada una.	UCR • Matemática en la Educación primaria I • Matemática en la Educación primaria II • Matemática en la Educación primaria III • Seminario: Investigación en didáctica de la Matemática en etapa escolar	• Resolución de problemas matemáticos I • Resolución de problemas matemáticos II • Aprendizaje de las Matemáticas I • Aprendizaje de las Matemáticas II • Aprendizaje de las Matemáticas III	• Lógica y teoría de conjuntos • Conjuntos numéricos y operaciones • Geometría descriptiva, plana y del espacio • Didáctica especial de las Matemáticas I • Didáctica especial de las Matemáticas II	Conceptualización • Números • Algebra • Geometría • Estadística • Probabilidades y Análisis
• Pontificia Universidad Católica de Chile Profesor de Educación General Básica, (Mención Matemática) • Números • Geometría I • Análisis de datos • Didáctica de la Matemática I	UNED Matemática I para I y II Ciclos Matemática II para I y II Ciclos Matemática III para I y II Ciclos			

[2]Universidad de Chile. Nota: no se incluye en el listado de asignaturas la didáctica de la Matemática, aunque si se incluye la didáctica de las demás áreas.
[3] Alpizar y Alfaro (2019), p.131
[4] MINEDU. 2019
[5] MESCYT. Normativa 09-2015. 2015
[6] Kaur, B. National Institute for education. 2014

• Didáctica de la Matemática II				
	UNA Didáctica de la Matemática para la Educación Básica Didáctica de las Ciencias y la Matemática para la Educación Básica			
Univ. Chile 30 C	Univ. CR 12 C, 16 h			
Pont. Univ. Católica Chile	UNED 9 C			
	UNA (7 C, 13 h)	15 C	18 C	

Fuentes cuadros 3, 4, 5: Elaboración propia de documentos curriculares citados de los diferentes países

Del cuadro se observa una gran variabilidad en las asignaturas del área de Matemática que se consideran necesarias para la formación de docentes del nivel primario. Llama la atención que en algunos casos no se incluyen asignaturas de didácticas específicas de las áreas de Matemática.

El plan de estudios de República Dominicana tiene 167 créditos de los cuales 18 son del área específica de la Matemática y el plan de estudios de Perú tiene 300 horas y 220 créditos de los cuales 20 horas y 15 créditos se dedican para el desarrollo de las competencias de Matemáticas.

III. Reflexiones finales

En el análisis de los documentos, en general, se ha observado correspondencia entre los programas de formación inicial de docentes del nivel primario y los programas curriculares oficiales para los estudiantes de ese nivel en los países seleccionados, en cuanto a las competencias que se proponen que desarrollen los estudiantes del nivel primario, y a las áreas de la Matemática consideradas. Sin embargo, se observa que en Chile, Perú y República Dominicana hay documentos de normativas y estándares oficiales para la formación inicial de docentes de primaria que deben cumplir todas las informaciones formadoras, mientras que los programas de formación inicial en Costa Rica varían mucho dependiendo de la Universidad que los ofrece.

Además, las estructuras de estos programas de formación docente difieren mucho de un país a otro y no hay homogeneidad en los términos que se utilizan para denominar algunas categorías, por ejemplo, se utilizan términos diferentes: competencias, procesos, ejes. Se observa también una gran disparidad del número, créditos y tipos de asignaturas específicas del área de la Matemática o de didáctica de la Matemática que se consideran necesarios en los programas de formación de docentes en un mismo país y entre los diferentes países.

Los currículos de Matemática del nivel primario de estos países están de acuerdo a las grandes tendencias mundiales. Por ejemplo, Ruíz (2023) indica que el currículo de Costa Rica "se trata de un currículo coherente con la investigación y buenas prácticas en Educación

Matemática en el mundo, aunque mediante construcciones teóricas originales”. Las normativas son adecuadas, el gran desafío es lograr la implementación de esos currículos sobre todo cuando muchas veces, en nuestros países las políticas educativas se modifican basándose en opiniones y sin evaluar sus logros.

Otro gran reto de los currículos en el nivel primario es que las asignaturas del área de pedagogía como diseño curricular, planificación, práctica docente, evaluación, investigación,… generalmente están a cargo de docentes generalistas de diferentes áreas de la educación y no trabajan en sus clases las especificidades de la construcción de las competencias Matemáticas como la comunicación en Matemática (concreta, verbal, pictórica y simbólica), las conexiones entre las diferentes áreas de la Matemática y de la Matemática con otras áreas, dado que los diseños curriculares por competencias suponen la integración de las áreas, debe modelarse adecuadamente esta integración en el proceso de la formación docente, la utilización de aplicaciones tecnológicas en el área de Matemática, representar y modelar conceptos y operaciones matemáticas de manera concreta, pictórica y simbólica, interpretar y analizar gráficos, entre otras. Esta situación se agrava porque muchas veces las asignaturas de didáctica de la Matemática son impartidas por estos mismos docentes no formados en las especificidades de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Por otro lado, muchos docentes de primaria no eligieron esta carrera porque les gusta la Matemática, es necesario trabajar las competencias socioemocionales para que los docentes analicen su auto percepción como aprendices de Matemática y entiendan que pueden transmitir su aversión hacia la Matemática en caso de tenerla.

Finalmente, hemos modificado los currículos a formas más complejas, incluyendo varias dimensiones de las competencias, se reiteran las preguntas: ¿qué se requiere para lograr las expectativas curriculares? Cuando planteamos que el docente debe construir situaciones de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen la competencia de **razonar**, ¿cuáles competencias deben desarrollar los docentes en su programa de formación inicial para que ellos puedan lograr este propósito?

Cuando planteamos que el docente deba enseñar a los estudiantes a **comunicarse** matemáticamente, ¿cuáles son las competencias que deben desarrollar los docentes en su programa de formación inicial para que sus estudiantes aprendan a comunicarse con materiales concretos, verbalmente, simbólicamente, gráficamente? En primaria, se ha visto la importancia de conversar con los niños sobre matemática, conversar sobre números y operaciones, conversar sobre geometría y mediciones, conversar sobre estadística elemental y probabilidades, es fundamental para que el docente pueda entender cómo piensan los niños, su razonamiento y las complejidades del aprendizaje de la Matemática. Por ejemplo, Parrish (2010) señaló que en una clase de tercer grado se planteó la resta de 328 - 69 y se realizó la operación utilizando el algoritmo:

$$\begin{array}{rccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 18} \\ & \cancel{3} & \cancel{2} & 8 \\ - & & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 5 & 9 \end{array}$$

Cuando se les preguntó a los niños: “Cuando tachaste los números y escribiste otros números encima de ellos, ¿estos números que escribiste tienen la misma cantidad que había en 328? Los estudiantes mostraron confusión e indicaron que las cantidades 328 (tres centenas, dos decenas y ocho unidades) y 2 centenas, once decenas y 18 unidades son diferentes”, lo que indica que ellos no entendieron completamente el procedimiento que utilizaron, esto solo podría descubrirlo el docente mediante la conversación con los estudiantes.

De manera similar, ¿Cuáles son las competencias que debe desarrollar un docente en su formación inicial para lograr que sus estudiantes logren conectar el conocimiento de las diferentes áreas de la matemática entre sí, por ejemplo números con mediciones y con estadística y probabilidades, y de la matemática con otras áreas del saber; en este último caso, existe el agravante de que estas áreas, generalmente, se enseñan y aprenden de manera separada en los currículos de formación inicial, y sería necesario vincularlas para que luego los estudiantes puedan resolver y plantear problemas interesantes que las interrelacionen.

¿Cuáles son las competencias que debe desarrollar el docente en su formación inicial para lograr que sus estudiantes puedan modelar y representar situaciones matemáticas? El docente en formación debería estar en contacto con materiales de aprendizaje y libros de texto bien diseñados para analizar diferentes formas de presentación, y en sus clases, deben experimentar buenos ejemplos de representar y modelar para luego reproducirlos con sus estudiantes.

¿Cuáles son las competencias que debe desarrollar el docente en su formación inicial para lograr que sus estudiantes puedan resolver situaciones y problemas del área de matemática y del entorno con un abordaje matemático? De manera transversal, en la formación inicial de docentes de matemática del nivel primario, el docente debe aprender a formular y analizar situaciones problemáticas, modelarlas de manera concreta de diferentes formas o visualizarlas gráficamente, traducirlas a expresiones matemáticas, utilizar conceptos, procedimientos, razonamientos y operaciones matemáticas para resolverlas, interpretar, verificar y evaluar que sus resultados tengan sentido.

Estos cambios en los procesos de enseñanza – aprendizaje requieren que el aula se transforme de un ambiente didáctico estático a un ambiente que se caracterice por procesos de exploración, escucha, discusión, razonamiento, justificación de ideas y procedimientos, identificación, análisis y aplicación de patrones, comunicación de conjeturas y generalizaciones, realización de representaciones y modelos, análisis de situaciones y resolución de problemas de diferentes maneras en forma grupal e individual.

Vaillant (2013) y Navarro (2002) señalaron que “Entre los vacíos detectados en la Formación Inicial Docente en Latinoamérica es posible evidenciar la falta de conexión entre teoría y práctica, la poca actualización en el manejo de competencias digitales, la escasa articulación con reformas curriculares, la débil e insuficiente formación en las áreas de contenido disciplinario, así como un enfoque muy fragmentado de lo que se enseña y aprende en las instituciones de formación docente (. Esto dificulta la posibilidad de que los estudiantes de FID asimilen y practiquen una visión interdisciplinar del aprendizaje, requisito imprescindible en los currículos de Educación Básica para el siglo XXI. En MINEDU (2019). p.11

Además, Ruíz, A. (2023) ha señalado un desafío que hace más retadora la formación inicial docente, relacionada con los efectos en el aprendizaje de la pandemia mundial reciente …"la preparación docente deberá ajustarse para incorporar a un nuevo perfil de estudiantes con diversos niveles de escolaridad, algunos muy débiles (aunque hayan logrado completar formalmente la secundaria), también llama la atención sobre la necesidad de que la formación inicial deberá desarrollar competencias para que sus egresados puedan trabajar en un contexto diferente, afectado por condiciones distintas a las que se tenían hace poco tiempo, un escenario que durará muchos años"; además, "que será necesario hacer ajustes en el papel de las tecnologías virtuales; los nuevos egresados deberán lidiar con contextos dispares y con fuertes rezagos en escolaridad". Ruíz concluye indicando "la necesidad de ajustes significativos de los programas de formación docente para apoyar su derrotero positivo. Esto no es para un futuro abstracto y lejano, sino para esta tercera década del siglo XXI, en la que ya vivimos. Es decisivo que las universidades comprendan esta urgencia." (p. 207)

Referencias y Bibliografía

Alpízar-Vargas, M y Alfaro Arce, A. (2019) La formación universitaria de docentes de educación primaria: el caso de matemáticas**.** *Uniciencia*. 33 (2), 110 -154. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.33-2.8

Barrantes, H. (2003). Formación del profesorado en Matemáticas en Costa Rica: Balance y perspectivas. *Uniciencia*, 20, 77-88

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1500391

Blömeke, S. y Kaiser, G. (2017) Understanding the development of teachers' professional competencies as personally, situationally and socially determined. Chapter 45 en D. J. Clandinin and Husu (Ed). *The Sage handbook of research on teacher education* (pp.783-802). SAGE Publications India. https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/59437/Clandinin_Styled_Chap45_SB.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Blomeke, S. y otros. (2020) Profiles of mathematics teachers'competence and their relation to instructional quality. *ZDM* 52, 329-342. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01128-y

CONARE. Programa Estado de la Nación. (2008). *Segundo Informe Estado de la Educación*. Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. https://repositorio.conare.ac.cr/bitstream/handle/20.500.12337/660/Estado%20de%20la%20Educacion%202%202008.pdf?sequence=19&isAllowed=yCONARE.

CONARE. Quinto Informe Estado de la Educación. (2015). Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. https://repositorio.conare.ac.cr/handle/20.500.12337/669

CONARE. Programa Estado de la Nación. (2019). *Informe Estado de la Educación*. Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. https://estadonacion.or.cr/wpcontent/uploads/2019/11/informe_estado_nacion_2019.pdf

Díaz, V. y Poblete, A. (2016) Modelo de Competencias Profesionales de Matemáticas (MCPM) y su Implementación en Profesores de Enseñanza Primaria en Chile. *Boletim de Educação Matemática*, 30 (55), 786-807. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a23

Fallas, R., Alfaro, H. y Arias, F. (2022) Formación inicial de docentes de matemática en el último decenio en Costa Rica. *Fuentes de Aprendizaje e Innovación*. Número 3.127 https://www.researchgate.net/profile/Rodolfo-Fallas-Soto 2/publication/362343163_Formacion_inicial_de_docentes_de_matematica_en_el_ultimo_decenio_en_Costa_Rica/links/62e41f043c0ea87887669318/Formacion-inicial-de-docentes-de-matematica-en-el-ultimo-decenio-en-Costa-Rica.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135. En Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B; (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo ccdm. *Investigación en Educación Matemática XX* . 285-294. Málaga: SEIEM. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2016_Modelo_CCDM_SEIEM_M%C3%A1laga.pdf

Godino, J. D.; Giacomone, B;Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas**. *Bolema.* 31 (57) . https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05**

International Commission on Mathematics Instruction (2015). ICMI Study 23. *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades.* Maria G. Bartolini Bussi • Xu Hua Sun (Eds). ISSN 1387-6872. New ICMI Study Series. Springer. ISBN 978-3-319-63554-5 https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2

Kaur, B. (2014). Mathematics Education in Singapore – An insider's perspective. National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore. *Indo MS-JME*, 5 (1), 1-16. https://www.researchgate.net/publication/312646797_Mathematics_education_in_Singapore-an_insider's_perspective

MEP (2012). Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Programas de Estudio de Matemáticas. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

MINEDU Ministerio de Educación de Perú (2019) Diseño Curricular Básico de la Formación de docentes (DCBN). Perú. http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn-educacion-primaria-2019/

MINEDU. Ministerio de Educación de Perú (2016). Currículo Nacional de Educación Básica. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf/

MINEDUC. Ministerio de Educación de Chile (2022). Estándares de la profesión docente. Carreras de Pedagogía en Educación General Básica https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/02/basica_2023_digital.pdf

MINEDUC_Ministerio de Educación de Chile (2023)._Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-332018_priorizacion.pdf

MINEDUC Ministerio de Educación de Chile (2023). Orientaciones Didácticas Matemáticas. Chile. 2023. pp.5 https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/334707:Orientaciones-didacticas-Matematica

MINERD (2014). Bases para la Revisión y Actualización Curricular del Ministerio de Educación de la República Dominicana. Santo Domingo. https://www.didactica.edu.do/wp-content/uploads/2018/02/Bases-de-la-Revisi%C3%B3n-y-Actualizaci%C3%B3n-Curricular.pdf

MINERD (2016). Diseño Curricular del nivel primario, primer ciclo. Santo Domingo. https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/docs/direccion-general-de-curriculo/MusI-diseno-curricular-del-nivel-primario-primer-ciclopdf.pdf

MINERD (2016). Diseño Curricular del nivel primario, segundo ciclo. Santo Domingo. https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/docs/direccion-general-de-curriculo/gZol-diseno-curricular-del-nivel-primario-segundo-ciclopdf.pdf

Ministry of Education Singapore. (2013). Mathematics Syllabus Primary one to six. https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. (1989). Principles and Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics NCTM Principles and Standards for School Mathematics. (2003) Reston, VA https://www.nctm.org/store/Products/NCTM-Principles-and-Standards-for-School-Mathematics,-Full-Edition-(PDF)/

National Council of Teachers of Mathematics NCTM. (2006). Curriculum Focal Points. Reston, VA.

OCDE.(2003). Organization for economic co-operation and development - Marcos teóricos de PISA. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. https://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf

OCDE (2019) El trabajo de la OCDE sobre Educación y Competencias. https://www.oecd.org/education/El-trabajo-de-la-ocde-sobre-educacion-y-competencias.pdf

OECD (2015)a. Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving. PISA 2015 Mathematics Framework. https://doi.org/10.1787/9789264281820-5-en

OECD (2015)b. Skills Strategy. Informe de Diagnóstico. España. 2. https://www.oecd.org/skills/nationalskillsstrategies/Spain_DR_Executive_Summary_Espagnol.pdf

Otondo, M.y otros. (2022). Formación inicial del profesorado de matemática en la inclusión educativa: análisis de los perfiles de formación en universidades chilenas. *Formación Universitaria*. 15 (3), 133-142 http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000300133

Parrish, S., Dominick, A. (2016). *Number Talks. Fractions, Decimals, Percentages.* Math Solutions. California, USA.

Ruíz, A. (2021). Desafíos para la preparación de docentes de matemáticas en la tercera década del siglo. Revista *Innovaciones Educativas*/ ISSN 2215-4132 / 23 (34) /
DOI: https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3516
URL: https://revistas.uned.ac.cr/index.php/innovaciones/article/view/3516

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*. 321-354. Rotterdam: Sense Publishers.

UNESCO. Estudios en educación matemática, v. 8: Hacia el siglo veintiuno.https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000193662**. I**SBN:978-92-3-302780-0, 92-9089-030-4

UNESCO. Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE 2019)_ reporte nacional de resultados; República Dominicana - UNESCO Digital Library.htm. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380254

Valverde, A., Araya, A., y Picado, M. (2019). Programas de formación inicial de docentes de matemáticas en Costa Rica: la perspectiva de la Universidad Pública. En J.R Marinho (Ed.), *Formação de professores de matemática*. 85-107.

Minicursos

Desarrollo de la subcompetencia de valoración de la idoneidad epistémica: el caso de las ambigüedades y de los errores matemáticos

Adriana **Breda**
Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las CCEE y de la Matemática
Universitat de Barcelona
adriana.bereda@ub.edu
Alicia **Sánchez**
Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las CCEE y de la Matemática
Universitat de Barcelona
asanchezb@ub.edu
Vicenç **Font**
Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las CCEE y de la Matemática
Universitat de Barcelona
vfont@ub.edu

Resumen

En este minicurso se fomentará la reflexión de los participantes acerca de los errores y ambigüedades que identifican futuros profesores, estudiantes de un máster profesional de matemáticas, cuando analizan su propia práctica en sus trabajos de fin de máster. En estos trabajos finales, los futuros profesores valoran su práctica docente considerando seis criterios de idoneidad didáctica. Los errores y las ambigüedades son dos componentes del criterio de idoneidad epistémica. Tomando en cuenta los comentarios sobre errores y ambigüedades de los futuros profesores que aparecen en sus trabajos de fin de máster, se pretende que los participantes, mediante un análisis de contenido, establezcan categorías de errores y ambigüedades. Como resultado se pretende llegar a obtener una clasificación, la cual permita generar una pauta más detallada para que los futuros profesores puedan organizar su reflexión sobre los errores y ambigüedades que cometen en sus clases.

Palabras clave: Formación inicial; profesores de Matemática; reflexión sobre la práctica; errores; ambigüedades.

Introducción

En Educación Matemática existen varios modelos teóricos que caracterizan los conocimientos y competencias que debería tener un profesor de matemáticas para realizar su tarea docente. En estos modelos, la reflexión sobre la práctica, entendida como la capacidad del docente para describir e identificar, explicar y valorar factores claves que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como tomar decisiones basadas en tales reflexiones, suele considerarse esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Desarrollar la competencia reflexiva requiere adoptar marcos conceptuales y metodológicos que permitan afrontar este objetivo como la competencia de análisis de la idoneidad didáctica propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2017) y su desarrollo a partir del aprendizaje del uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) como guía para organizar su reflexión cuando esta se orienta a la mejora del proceso de instrucción.

En el máster que es el contexto de la investigación sobre la cual se ha organizado este minicurso, los futuros profesores debían de reflexionar sobre su práctica utilizando como pauta de reflexión los CID (con sus componentes e indicadores). Por tanto, entre otros aspectos, los futuros profesores debían recordar si cometieron errores y ambigüedades durante su práctica educativa y explicarlos.

Los objetivos de este minicurso forman parte de una investigación más general en la que, por una parte, se busca caracterizar los errores detectados por los futuros profesores en la reflexión sobre su propia práctica a partir de las respuestas a las siguientes preguntas de investigación: 1) ¿Los futuros profesores identifican errores al reflexionar sobre su propia práctica?; 2) ¿Qué tipos de errores matemáticos identifican? Por otra parte, se busca iniciar la caracterización de las ambigüedades matemáticas que identifican los futuros profesores en su propia práctica a partir de las respuestas a las siguientes preguntas: 1) ¿Los futuros profesores identifican ambigüedades al reflexionar sobre su propia práctica? ¿Qué tipos de ambigüedades matemáticas identifican? Por último, se pretende generar una subcategorización (más detallada) de los CID para orientar a los profesores en su reflexión sobre los tipos de errores que cometen (o pueden cometer) y las ambigüedades que propician.

Marco teórico y metodológico

Criterios de Idoneidad Didáctica

En el sistema teórico que configura el EOS (Godino et al, 2007) se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Dicho constructo general de idoneidad se ha particularizado en seis criterios parciales, (Font et al, 2010): 1) epistémico: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia, 2) cognitivo: grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial del alumnado, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados, 3) interaccional: Un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, 4) Mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, 5) emocional: grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio y 6) ecológico: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Ahora bien, para que dichos criterios sean operativos, se propone una caracterización a partir de componentes (Tabla 1) e indicadores (Breda et al, 2017).

Tabla 1

Criterios y componentes de idoneidad didáctica.

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Fuente: Morales-López y Font (2019).

Tanto los componentes como los indicadores de los CID han sido elaborados considerando las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas, los principios de la NCTM (2000) y los resultados de investigaciones en Educación Matemática que gozan de amplia aceptación en la comunidad. Los CID es una herramienta consensual que se está usando básicamente de dos maneras: 1) cómo categorías a priori para investigar los criterios que orientan la práctica de los profesores y futuros profesores (Breda, 2020; Morales-López y Font, 2019) y, 2) como herramienta para organizar la reflexión del futuro profesor (o en activo) sobre su propia práctica en programas de formación de profesores o futuros profesores de diferentes países: Argentina, Brasil, Chile, Costa Rica, Ecuador, México, Panamá y España (Burgos y Castillo, 2021; Morales-Maure et al., 2019; Esqué y Breda, 2021; Giacomone et al., 2018; Seckel y Font, 2020). Los CID también se han usado para la valoración de libros de texto (Burgos et al., 2020).

Caracterización de error y ambigüedad

La noción de error tiene diferentes interpretaciones (Moro et al., 2017), y va ligada a otros conceptos, tales como dificultad u obstáculo que, en ocasiones, puede confundirse. Además, muchas de las investigaciones se han focalizado en los errores cometidos por los estudiantes (por ejemplo, Cury y da Silva, 2008). Aunque algunos otros analizan los errores de futuros docentes (por ejemplo, Işik y Kar, 2012). En este trabajo, el error se entiende como una práctica matemática que, desde el punto de vista de la institución matemática, no se considera válida. En concreto, se analizan los errores que los futuros docentes detectan en su práctica.

Técnicamente, una construcción lingüística o emisión es ambigua si puede ser interpretada de más de una manera (Löbner 2002). Esta misma caracterización de ambigüedad se puede aplicar cuando en lugar de la lengua natural nos referimos a la lengua utilizada en las clases de matemáticas. Si bien el lenguaje matemático tiene el propósito de ser preciso alejándose así de las ambivalencias propias del lenguaje natural; por diferentes razones, entre otras, que en las matemáticas hay términos que, utilizados en el lenguaje cotidiano, pueden tener diferentes interpretaciones como, por ejemplo, diferencia o pendiente (en español).

Dado que la noción de ambigüedad puede abarcar un amplio abanico de emisiones, desde la perspectiva del criterio de idoneidad epistémico interesan las que tienen su origen en emisiones del profesor (futuro profesor en este minicurso), en cuanto representante de la institución matemática; estas emisiones las puede hacer él directamente o bien hallarse en los libros de texto y material didáctico (emisiones que él avala). Por tanto, nos interesan, en particular, las emisiones del futuro profesor que: a) son interpretadas por los alumnos de manera diferente a la que él espera al realizarlas, b) la interpretación del alumno le parece razonable al futuro profesor, incluso cuando sea errónea y c) el futuro profesor asume una cierta responsabilidad en el hecho de que suceda a y b (por ejemplo, en un examen acepta como respuesta correcta la respuesta inesperada que da el alumno).

La tercera característica nos lleva a excluir la polisemia propia de las matemáticas de la ambigüedad que nos interesa estudiar en esta investigación. Por ejemplo, el signo << - >> es polisémico al cambiar su significado según se aplique a un número (en este caso, es el signo del número y forma parte del número) o bien se aplique a una operación entre dos números (en este caso no forma parte del número). Dicho de otra manera, excluimos la polisemia cuya causa está en las mismas matemáticas y de la cual el futuro profesor no sería responsable. También excluimos las ambigüedades y polisemias que están fuertemente arraigadas en los libros de texto de la secundaria (aquellas que se pueden considerar como un resultado de la transposición didáctica y/o de la evolución histórica de un objeto matemático) y tampoco se pueda considerar que en ellas el futuro profesor tenga responsabilidad. Un ejemplo, sería el uso de sistema de ejes cartesianos perpendiculares al estudiar las funciones (es decir, usar siempre ejes perpendiculares no será considerado ambigüedad ya que es lo habitual en esta etapa educativa, en cambio, usar metáforas orientacionales que identifiquen el eje de abscisas con el eje horizontal y el de ordenas con el vertical si lo serán). Quedan excluidas, a su vez, las ambigüedades cuyo origen está en palabras que tienen un significado diferente en el lenguaje natural al que tienen en matemáticas. El hecho de que un objeto matemático pueda tener varios significados diferentes, también queda excluido de esta caracterización de ambigüedad, ya que es un aspecto que tiene que ver con el componente <<representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar>>.

Lo primero que hay que destacar es que la noción de ambigüedad que aquí nos interesa –en sí misma– es ambigua, ya que en muchos casos no tendremos claro si el episodio que se analiza lo es o no, es decir si cumple las tres condiciones acabadas de comentar. Lo segundo que hay que destacar es que, dado que en última instancia hay un contexto que juega un papel central en la desambiguación, nos interesan aquellas ambigüedades en las que el contexto no ha sido suficiente para evitarlas (al menos para algunos alumnos), generando así una disparidad de interpretaciones, según la opinión de los futuros profesores cuyos Trabajos de Fin de Máster (TFMs) se han analizado. Es importante señalar que las emisiones de un futuro profesor que sean el origen de ambigüedades, si bien pueden ser imprecisas y poco claras no se consideran errores matemáticos.

Metodología

Contexto de la investigación

La investigación relacionada con este minicurso se desarrolla en el contexto de un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas de España. Dicho Máster prescribe la realización de prácticas docentes en centros de secundaria, en las que los futuros profesores diseñan e implementan una secuencia de tareas. Después, en sus TFMs, realizan la valoración de su idoneidad y se formula una propuesta de mejora justificada de dicha secuencia. Para ello, en las diferentes asignaturas que intervienen en el ciclo se presentan los CID. Con esta pauta, los futuros docentes estructuran el análisis y la evaluación de su implementación, bajo la supervisión de un profesor tutor. En su TFM, los futuros profesores escriben comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los CID. Estos comentarios son el foco de nuestro análisis. Se trata, pues, de un análisis del contenido en el que las categorías han sido fijadas previamente (errores y ambigüedades).

Análisis temático

En términos de Braun y Clarke (2006), el análisis temático es un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos. Para el análisis temático se presentarán a los participantes párrafos de los futuros profesores sobre lo que ellos consideran como error y ambigüedad para generar códigos y temas a partir de ellos. Será párrafos como los siguientes:

> El libro presenta errores fotográficos al confundir la parábola con una catenaria, al igual que los distintos vídeos sobre el tema de la parábola, que han sido corregidos en clase.
>
> Aunque se han intentado evitar/controlar las ambigüedades y metáforas que pueden crear confusión relacionadas con el tema, el uso del programa dinámico GeoGebra ha propiciado la metáfora de gráfica de una función como camino que deja un punto que se mueve sobre la misma.

Uno que bordeaba la incorrección desde el punto de vista matemático, fue tratar sólo los monomios de grado natural o cero, es decir no utilizar x con exponentes negativos. Ésta es una visión algebraica de los polinomios. Ahora bien, por ejemplo, en el análisis complejo tenemos ejemplos como el polinomio de Laurent.

Hasta ahora, evalué los conceptos en los que trabajé en clase y los errores que cometí, pero hubo un concepto en el que no trabajé: ¿qué es un movimiento en el plano? Considero esto un grave error, ya que toda la unidad hablaba de movimientos en el plano.

Las definiciones dadas fueron: Decimos que un suceso es seguro si pasa siempre. En cambio, decimos que un suceso es imposible si no pasa nunca. Estas definiciones sacadas del libro de texto, no fueron suficientemente precisas. Esto supuso respuestas en el examen del estilo "es imposible que esta noche venga un ovni y me lleve" o "es imposible ir caminando a la Luna" pues los alumnos relacionaron los conceptos con la frecuencia con que suceden.

Resultados

Se espera que el análisis temático realizado permita observar, entre otros aspectos, que los futuros profesores a veces confunden error matemático con ambigüedad y con mala opción didáctica. También se espera obtener una tipología de errores, información sobre cómo se gestionó el error y sobre quién lo detectó, etc. En el caso de las ambigüedades se espera que los participantes observen que, a veces, los futuros profesores confunden error matemático con ambigüedad y que en otros casos no se cumplen las tres características de ambigüedad explicitadas en el marco teórico. También se espera generar una tipología de ambigüedades.

Agradecimientos

Estudio desarrollado en el marco del Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa"**.**

Referencias y bibliografía

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema, 34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema. 34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03
.
Burgos, M. y Castillo, M. J. (2021). Criterios de idoneidad emitidos por futuros maestros de primaria en la valoración de vídeos educativos de matemáticas. *Uniciencia, 35*(82), 1-17.

Cury, H. N. y Da Silva, P. N. (2008). Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 1*(1), 85–97. https://doi.org/10.3895/S1982-873X2008000100006

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa, 44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Işik, C. y Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(3), 2303-2309.

Löbner, S. (2002). Understanding semantics. Routledge
.
Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa, 45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones, 6*(2), 142-162.

Moro, M. L. F., Soares, M. T. C. y Spinillo, A. G. (2017). Que ações didáticas escolher diante de erros de alunos em problemas matemáticos? *Zetetike*, *25*(3), 418–439. https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8649678

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. 2. ed. Reston, VA: NCTM.

Seckel, M. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis, 12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp.

Educación Matemática y Tecnologías Digitales: Planeamiento de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes

Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumen

Este curso tiene como objetivo presentar, discutir y reflexionar sobre la importancia de las actividades investigativas en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La atención se centrará en el aprendizaje de los estudiantes y cómo estas tareas pueden ayudar a los profesores en su planificación didáctica. Los objetos de aprendizaje fueron desarrollados con el software GeoGebra planeados en el ámbito del Grupo de Estudios Curriculares en Educación Matemática (GECEM) formado con investigadores y estudiantes del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil.

Palabras clave: Tecnologías Digitales; Tareas de investigación; Demanda cognitiva; Aprendizaje; GeoGebra.

Introducción

En este curso se presentarán los resultados de investigación del Grupo de Estudios Curriculares de Educación Matemática (GECEM), del programa de posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas (PPGECIM) de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA), en el municipio de Canoas, en el estado de Rio Grande do Sul/Brasil, en el que se aborda el uso de las Tecnologías Digitales y el desarrollo de tareas de investigación que se consideran de alta demanda cognitiva.

Teniendo en cuenta que las tareas matemáticas pueden influir, estructurar y comandar la forma en que los profesores organizan sus clases y cómo los estudiantes perciben y aprenden matemáticas, entendemos la importancia de las investigaciones en la planificación y organización de tareas de alta demanda cognitiva (procesos de pensamiento), dado que la relevancia de la relación entre el proceso de pensamiento (nivel de requerimiento cognitivo) y las tareas matemáticas es la principal imagen de las investigaciones de GECEM.

Así, se percibe que en entornos de aprendizaje es interesante combinar la investigación Matemática con softwares educativos, como el software GeoGebra, que puede brindar oportunidades para la creación, manipulación, exploración de situaciones, análisis, elaboración de conjeturas, verificación de regularidades, discusión de resultados y generalización. En este sentido, es necesario diseñar tareas que puedan ser el punto de partida de las investigaciones y exploraciones matemáticas de los alumnos y discutir cómo se pueden trabajar en el aula (Homa y Groenwald, 2016a). Las tecnologías pueden hacer una contribución significativa a esto. Se presentarán ejemplos de tareas utilizando objetos de aprendizaje desarrollados por el GECEM, que son tareas de investigación que, a nuestro entender, llevan a los estudiantes a realizar investigaciones en matemáticas.

Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas pueden variar desde un conjunto de ejercicios de rutina hasta un problema complejo y desafiante que centra la atención de los estudiantes en una idea matemática en particular (NCTM, 2014; NCTM 2015). Las tareas son los proyectos, preguntas, problemas, construcciones, aplicaciones y ejercicios en los que los estudiantes participan con el fin de desarrollar el pensamiento matemático, proporcionando los contextos intelectuales para el desarrollo matemático de los estudiantes. (NCTM, 1994).

Stein, Grover y Henningsen (1996, p. 460) definen una tarea como "una actividad de clase cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un tema en particular". Según el documento NCTM (2014), la enseñanza efectiva utiliza las tareas como una forma de motivar el aprendizaje de los estudiantes para ayudarlos a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

La reflexión sobre el papel de la tarea y su relevancia para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje puede ayudar al profesor a comprender cómo la elección de la tarea puede influir en el aprendizaje de los estudiantes (Jesus, Cyrino y Oliveira (2018).

Se entiende que por la forma en que se presentan, interpretan, exploran y resuelven en las clases, las tareas matemáticas son un punto clave del aprendizaje de los estudiantes y, en este sentido, se valora la planificación de tareas que sean significativas y que los estudiantes requieran reflexiones que involucren conceptos matemáticos y habilidades de pensamiento matemático.

Según Penalva y Llinares (2011) es posible establecer un vínculo entre el aprendizaje de los estudiantes y la gestión de las tareas, siempre que les permitan seguir un camino claro hacia la comprensión del contenido matemático, los conceptos y los procedimientos involucrados.

Para Ponte (2004), hay diferentes tipos de tareas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Comparación de diferentes tipos de tareas

Características de la tarea	**Ejemplos**	**Potencialidades**
Naturaleza cerrada	Ejercicios, problemas	Importante para el desarrollo del razonamiento matemático del alumno, caracterizado por una estrecha y rigurosa relación entre datos y resultados.
Naturaleza más accesible	Exploraciones, ejercicios	Dar al estudiante un alto grado de éxito y desarrollo de confianza en sí mismo
Naturaleza más desafiante	Investigaciones, problemas	Indispensable para que los alumnos vivan una experiencia matemática efectiva.
En contextos reales	Tareas de investigación y modelado	Es importante que los estudiantes se den cuenta de cómo se usan las matemáticas en muchos contextos y que aprovechen el conocimiento de estos contextos.
Formulado en contextos matemáticos	Investigaciones, problemas, exploraciones.	Permiten al alumno darse cuenta de cómo se desarrolla la actividad matemática de los matemáticos profesionales.

Fuente: Ponte (2004)

Se entiende que, en la práctica profesional los docentes deben seleccionar las tareas que cumplan con los objetivos trazados, ajustando el nivel de requerimiento en cada situación, y el ajuste debe realizarse considerando el nivel cognitivo requerido de los estudiantes en la realización de la tarea. Según Penalva y Llinares (2011), el término Demanda Cognitiva se ocupa de la clase y el nivel de pensamiento requerido por los estudiantes para resolver la tarea, señalando lo que se alcanza y lo que se aprende en cada nivel. La demanda cognitiva de una tarea se refiere a los procesos del pensamiento, como la naturaleza del razonamiento, entendido en y para su resolución (Doyle, 1988).

Smith e Stein (1998) califican los niveles de demanda cognitiva en cuatro niveles: Nivel 1 - tareas que requieren memorización; Nivel 2 - tareas que utilizan procedimientos sin conexión; Nivel 3 - tareas que utilizan procedimientos con conexión; Nivel 4 - tareas que requieren "hacer matemáticas". Smith e Stein (1998) definen los niveles 1 y 2 como demandas de bajo nivel y los niveles 3 y 4 como demandas de alto nivel.

Las tareas de nivel 1 son de memorización, implican la reproducción de fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas; no se pueden resolver mediante procedimientos, porque no existen o por el tiempo dado para resolverlos; la tarea es breve para emplear el procedimiento; no son ambiguos, ya que implican reproducir exactamente algo visto anteriormente y lo que debe reproducirse está establecido de manera clara y directa; no tienen relación con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Las tareas del nivel 2 son de procedimientos sin conexión, son algorítmicas, porque utilizan procedimientos que se reclaman específicamente o su uso es obvio en función de la información que se encuentra en la tarea planificada; exigen un requerimiento cognitivo limitado para llevarlas a cabo con éxito; hay poca ambigüedad en lo que hay que hacer y cómo hacerlo; no tienen relación con conceptos o significados subyacentes al procedimiento utilizado; se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática; no requieren explicaciones, o sólo explicaciones centradas en describir el procedimiento utilizado.

Las tareas de nivel 3 son procedimientos con conexión, que centran la atención del estudiante en el uso de procedimientos para desarrollar una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas; siguen formas (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales, que tienen una estrecha relación con las ideas conceptuales, en lugar de algoritmos que no están claros en relación con los conceptos subyacentes. Por lo general, se representan de varias maneras (diagramas visuales, gráficos, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas); hay conexiones entre múltiples representaciones, ayudando a desarrollar el significado matemático; requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo; aunque es posible seguir procedimientos generales, no se pueden usar sin pensar, porque los estudiantes necesitan comprometerse con las ideas conceptuales detrás de los procedimientos para realizar con éxito, la tarea.

Las tareas de nivel 4 necesitan hacer matemáticas porque requieren: un pensamiento complejo y no algorítmico (no hay aproximación con caminos ya recorridos en otras tareas, que se pueden recordar o un camino que es explícitamente sugerido por la tarea o instrucción previa); requiere que los estudiantes exploren y comprendan conceptos matemáticos, así como procesos y sus relaciones; implican autoverificación o autorregulación de los procesos cognitivos; ameritan que los estudiantes encuentren una respuesta que requiera la comprensión conceptual de la noción matemática, verificando y explicando la respuesta producida; les exige que accedan a conocimientos o experiencias relevantes y hagan un uso adecuado de ellos en el desarrollo de la tarea; esfuerzo cognitivo considerable y puede implicar un cierto nivel de ansiedad en los estudiantes debido a la naturaleza imprevisible del proceso de resolución requerido.

Las tareas deben llevar a los estudiantes a pensar en hacer Matemáticas, superando la memorización simple y los procedimientos sueltos, valorando los conocimientos previos aportados por ellos y permitiéndoles avanzar en la comprensión de los conceptos y el uso de los procedimientos matemáticos. Entendemos que es importante, en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, todo tipo de tareas, por lo que es relevante que el docente busque presentar las tareas de alta demanda cognitiva (tareas de nivel 4).

Ejemplo de una tarea de investigación

Los objetos de aprendizaje presentados fueron desarrollados en GeoGebra y están disponibles en el repositorio digital del Laboratorio de Matemáticas del Programa de Posgrado en Ciencias y Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

En la Figura 1, el Objeto de Aprendizaje Diagonal del Polígono permite al estudiante definir el polígono por el número de sus lados y observar las diagonales asociadas a cada vértice y todas las diagonales simultáneamente, y así hacer sus hipótesis y deducir el modelo matemático para el número de diagonales de un polígono de n lados.

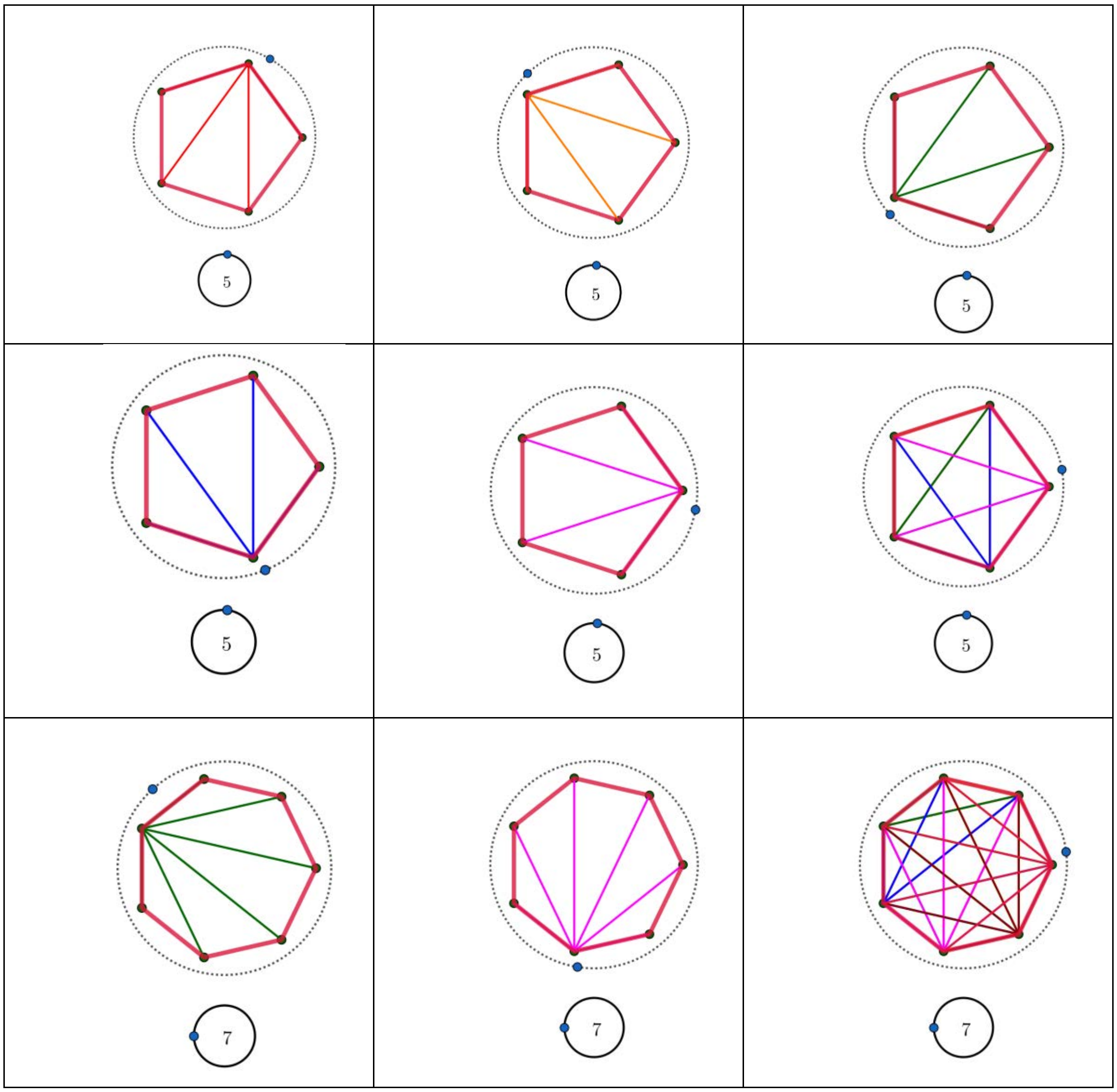


Figura 1. Posibles interacciones de polígonos de cinco y siete lados
Fuente: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

Al observar las interacciones es posible verificar que cada vértice se conecta a todos los demás vértices, pero las conexiones con los adyacentes no cuentan como diagonal. Por lo tanto, el número de diagonales por vértice viene dado por $(d)(n)$: $d(n) = n\ (n - 3)$.

Para un polígono de cinco lados totalizarían 10 diagonales, pero en la representación de todas las diagonales están presentes solo 5 diagonales. Para el desarrollo del pensamiento matemático se debe trabajar la actividad de manera que el alumno identifique la razón por la que las diagonales totales son la mitad, que, en el caso, cada diagonal se cuenta dos veces. Por lo tanto, la hipótesis para n lados es: $d(n) = \frac{n\,(n-3)}{2}$.

Por ejemplo, para un polígono de cinco lados, tenemos: $d(5) = \frac{5\,(5-3)}{2}$.

Para verificar esta hipótesis, el estudiante selecciona otros polígonos y comprende el número total de diagonales calculado con el número contado, partiendo de la hipótesis a una generalización. En la representación del polígono de 7 lados, se verifica que el número calculado de diagonales es el mismo que el representado en el objeto educativo: $d(7) = \frac{7\,(7-3)}{2} = 14$.

Para facilitar el recuento de las diagonales, el objeto de aprendizaje las muestra en diferentes colores. A medida que las diagonales se superponen, el recuento (en el polígono de 7 lados) en el sentido de las agujas del reloj muestra 4 rojos, 4 marrones, 3 rosas, 2 azules y 1 verde, totalizando las 14 diagonales.

Consideraciones finales

Finalmente, se enfatiza que el docente debe estar preparado para insertar estos recursos en el aula, pero no debe apuntar a utilizar la tecnología solo por uso, sin una intención clara, definida y conocida por los estudiantes.

También es destacable que el software Geogebra es adecuado para el desarrollo de actividades interactivas, no siendo necesario el conocimiento de programación avanzada porque cuenta con interfaz intuitiva, recursos gráficos animados, además de ser multiplataforma, y poder ser utilizado en computadoras, tabletas y teléfonos móviles. Es importante destacar que los objetos desarrollados no deben ser presentados aisladamente, pues se basan en el conocimiento matemático de los conceptos involucrados, por lo tanto, se enfatiza la importancia de construir una secuencia didáctica que presente los objetos encadenados, para que permitan la visualización, la generación de hipótesis, el desarrollo de conjeturas y la generalización por parte de los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students’ thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167–180.

Homa, A. I. R. y Groenwald, C. L. O. (2016a). Incluindo tecnologias no currículo de matemática: planejando aulas com o recurso dos tablets. *Revista Unión*, 48, 22–40.

Homa, A. I. R. y Groenwald, C. L. O. (2016b). Área de figuras planas com objetos de aprendizagem no Geogebra. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 9, 123–147.

Jesus, C. C. De; Cyrino, M. C. Da y C. T.; Oliveira, H. M. De. (2018). Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 20(2). 21–46.

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (2014*). Principles to actions: ensuring mathematical success for all. Reston*: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción* – para garantizar el éxito matemático para todos. México: Editando libros S.A.

Penalva, M. C. y Llinares, S. C. (2011). Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In: GOÑI, J. M.; COLL, C. (Eds.). *Didáctica de las Matemáticas/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado.* 12 (II). Madrid: Graó, (pp. 27–51).

Ponte, J. P. DA. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In: Giménez, J.; Santos, L.; Ponte, J. P. (Eds.). *La actividad matemática en el aula. Barcelona*: Graó, (pp. 25–34).

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: For Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle Scholl*, 3, 344–350.

Stein, M. K.; Grover, B. W.; Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488.

Educación Matemática inclusiva: desafíos, compromisos y oportunidades

José Mª **Marbán**
Facultad de Educación y Trabajo Social – Universidad de Valladolid
España
josemaria.marban@uva.es

Resumen

La educación es una actividad social basada en múltiples relaciones, algunas ciertamente complejas, entre los tres polos del triángulo didáctico: docente, discentes y contenidos. Estas relaciones se llevan a cabo en contextos que, en algunos casos, obvian la diversidad presente en el aula y se convierten en incapacitantes. Este minicurso centra su atención precisamente en esta cuestión y en la necesidad de entender la diversidad no solo como uno de los desafíos más estimulantes del siglo XXI en el campo de la Educación Matemática, sino, sobre todo, como una oportunidad para el aprendizaje y el crecimiento colectivo. Así, se realizará una aproximación inclusiva al concepto de diversidad acompañada de orientaciones para ejecutar buenas prácticas de inclusión desde los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje. Por otra parte, se hará hincapié en la gestión de entornos inclusivos atendiendo a diferentes variables que dan cuenta de la diversidad en el aula.

Palabras clave: Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas; Diseño Universal para el Aprendizaje; Diversidad; Educación inclusiva; Educación Matemática.

Educación matemática inclusiva

Las matemáticas juegan un importante papel formativo, instrumental, aplicado y, también, social, justificando su destacada presencia, de una forma u otra, en todos los currículos de la Educación Obligatoria. El profesorado debe, por tanto, no solo consolidar su formación en esta disciplina sino también adquirir herramientas didácticas suficientes para su trabajo en el aula en este campo. En este sentido, cabe decir que el éxito o el fracaso de un determinado proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es siempre una consecuencia directa de la acción e interacción de múltiples variables y, en lo que afecta al perfil docente, requiere que este muestre suficiente preparación para, entre otras cosas, generar entornos inclusivos de aprendizaje. Surge aquí la primera cuestión a resolver: ¿qué entendemos por educación inclusiva? Siendo múltiples las respuestas a este interrogante, partiremos en este documento del planteamiento realizado a través del Proyecto ROMA (Melero, 2005) al presentar la educación inclusiva como

> Principio general que busca impregnar la cultura de la comunidad, las políticas educativas y las prácticas de enseñanza y aprendizaje, para hacer posible que todas las personas, independientemente de su origen socioeconómico y cultural, y de sus capacidades individuales innatas o adquiridas, tengan las mismas oportunidades de aprendizaje en cualquier contexto educativo, contribuyendo, de este modo, a forjar sociedades justas y equitativas (p. 54).

De la propia definición se desprende el reconocimiento de una condición natural presente en nuestras aulas y que no es otra que la diversidad. Este concepto se interpreta también de muy diversas maneras, algunas muy simplistas y centradas solo en alguna característica concreta como, por ejemplo, la discapacidad, al tiempo que, lamentablemente, observo cómo en muchos contextos y docentes el término se asocia con pensamientos negativos y se muestra predisposición hacia el trabajo en aula donde la diversidad se reduzca al mínimo. Este hecho muestra, por un lado, la existencia de concepciones y creencias erróneas sobre lo que significa diversidad y, por otro lado, el reconocimiento implícito de la incapacidad para trabajar en entornos en los que haya diversidad, algo que, por otra parte, se va a dar siempre.

Sin recurrir a ninguna definición formal, durante años de experiencia docente mis estudiantes han terminado consensuando de forma grupal una definición de diversidad que recoge, a mi juicio, ideas muy interesantes:

> Entenderemos por diversidad en el aula la heterogeneidad presente en la misma, entendida como conjunto de características, individuales o colectivas, que pueden ser vistas como oportunidades (diversidad a proteger) o como amenazas (diversidad a suprimir) para la plena participación y un correcto desarrollo tanto del proceso educativo como de los talentos, capacidades y aprendizajes de quiénes participan del mismo.

Sea como fuere, la diversidad debe considerarse como una oportunidad y como uno de los principales desafíos del siglo XXI en el campo de la Educación Matemática; oportunidad y desafío que deben abordarse en un contexto de buenas prácticas de inclusión en las aulas de matemáticas y que requieren de una formación sólida en la generación y gestión de entornos inclusivos atendiendo a las diferentes variables que dan cuenta de la diversidad en el aula, en particular en aquellos aspectos directamente vinculados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Reflexión inicial

¿Qué es para ti diversidad? ¿Qué factores o variables que dan cuenta de la diversidad presente en el aula crees que son más determinantes a la hora de generar entornos inclusivos en el aula de matemáticas?

Siendo, como hemos dicho, múltiples las variables que caracterizan la diversidad en el aula, dos suelen ser fuente de preocupación constante entre docentes, familias y administraciones; hablamos de las vinculadas a *dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas* (en adelante DAM) y de aquellas que se enmarcan en lo que se conoce como *dominio afectivo en matemáticas*. De ambas nos ocupamos brevemente en las siguientes secciones.

Las Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas (DAM)

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden estar causadas por múltiples y diferentes factores, de entre los que podemos destacar cinco (Mundia, 2012). Algunos estudiantes parecen estar influidos de forma negativa por las creencias estereotipadas que tienen muchas personas de que las matemáticas son una materia difícil. Para otros, sus problemas parecen derivar de una enseñanza insatisfactoria y la consiguiente falta de experiencia de éxito. En otras ocasiones, las dificultades parecen estar vinculadas a los procedimientos utilizados para evaluar a los estudiantes en matemáticas. Hay estudiantes que, lamentablemente, pueden tener un verdadero trastorno específico de aprendizaje de las matemáticas. Y, por último, el bajo rendimiento en matemáticas también podría atribuirse a la financiación inadecuada de la educación, lo que da como resultado menos recursos de enseñanza-aprendizaje y una educación de baja calidad.

El concepto de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (DAM) se aplica generalmente a los alumnos que están por debajo de la media de su grupo y/o los alumnos que presentan un funcionamiento matemático por debajo de su propia media de rendimiento (Fernández Baroja, Llopis y Pablo Marco, 1991). Mazzocco (2007) realizó una propuesta terminológica, que ha encontrado aceptación en la comunidad investigadora. La recomendación de Mazzocco (2007) es que los niños identificados por un criterio de rendimiento estadístico más liberal, por ejemplo, aquellos cuyo resultado en las pruebas estandarizadas está por debajo del percentil 25 se identifiquen con **dificultades en el aprendizaje de las matemáticas - DAM** o dificultades matemáticas. Los datos de sus investigaciones muestran que, en el grupo DAM, el rendimiento académico en matemáticas de un año a otro es menos estable y la etiología es más variada, con mayor probabilidad de contribución de variables socioemocionales y económico-culturales.

Una de las características de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas es que pueden presentarse a lo largo de toda la escolaridad, desde la etapa infantil hasta la universitaria. Las dificultades pueden aparecer en contenidos como la aritmética, la geometría, el álgebra, la probabilidad o la medida. Pero es en la aritmética donde el alumnado encuentra más dificultades, ya que son los contenidos a los que se enfrentan en primer lugar, además de que constituyen la base sobre la que se asienta el resto. Las dificultades pueden manifestarse en las destrezas y habilidades preliminares, como el conteo o la seriación, en el aprendizaje de las combinaciones básicas para realizar operaciones aritméticas, en el aprendizaje mecánico para la memorización de números o hechos numéricos o en la resolución de problemas matemáticos, entre otros (Aguilar, Navarro, Alcalde y Marchena, 2005)

En todo caso, es de vital importancia llevar a cabo una intervención temprana en los casos en los que se observa la presencia de DAM, ya que las diferencias entre alumnado con dificultades y sin ellas se incrementan con los años de escolaridad si no se realiza una intervención que palíe o elimine tales diferencias. Existe, de hecho, y afortunadamente, la posibilidad de que todos los estudiantes alcancen niveles de logro apropiados para su edad.

En cuanto a la clasificación de las DAM vamos a destacar dos tipos. La primera es una clasificación en función del grado de severidad de las dificultades que tienen los estudiantes según la cual pueden manifestar un grado leve, moderado o grave de dificultad. Dentro del grupo de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en general, nos encontramos con alumnado que tiene dificultades más graves y persistentes, alumnado al que se le asocia el término *discalculia* (Espina, Marbán y Maroto, 2022).

La discalculia es un trastorno específico del aprendizaje de origen neurobiológico, causado por anomalías en algunas estructuras del cerebro que apoyan la representación y el procesamiento de informaciones numéricas y, probablemente, también de origen genético, ya que el alumnado que tiene familiares con discalculia tiene un mayor riesgo de padecer este trastorno. No se trata, a su vez, de un trastorno "raro" pues los estudios que se han realizado a nivel mundial sobre su prevalencia estiman está entre el 2% y el 7% de la población escolar. La discalculia afecta a la correcta adquisición de las habilidades aritméticas y puede interferir significativamente en el rendimiento académico y en las actividades de la vida diaria que requieren el uso de matemáticas. Según diversos autores, es una dificultad «inesperada», ya que se presenta en escolares con un nivel de inteligencia normal y una escolaridad apropiada. La discalculia, además, se muestra de forma heterogénea, pero, en general, los niños y niñas con discalculia experimentan dificultades en los aspectos más básicos del procesamiento numérico y del cálculo. Así, pueden manifestar una pobre noción del sentido de los números y de las cantidades, problemas para identificar, contar, leer, escribir o clasificar los números y dificultades para realizar operaciones aritméticas o para resolver problemas matemáticos. Por otra parte, aunque puede presentarse como un único trastorno, una cuarta parte del alumnado afectado por discalculia muestra comorbilidad con otras alteraciones como el TDAH, la dislexia, trastorno del lenguaje, ansiedad…

En cuanto a la segunda clasificación, esta se establece en función del tipo de déficit (Karagiannakis, Baccaglini-Frank y Papadatos, 2014). Los estudiantes pueden tener un déficit numérico central con dificultades en el sentido básico de numerosidad y en el proceso de subitización, es decir, tienen dificultades para estimar con precisión un pequeño número de objetos. También pueden tener dificultades para realizar estimaciones aproximadas de cantidades diferentes, para colocar los números en una recta numérica, para el procesamiento de los números, para la transcodificación de un número de una representación a otra, para comprender los principios básicos del conteo o para capturar el significado del valor posicional o de los símbolos básicos de las operaciones matemáticas. Por otro lado, pueden tener un déficit de memoria. El alumnado, a estas edades, puede tener dificultades en la recuperación de hechos aritméticos, como, por ejemplo, saber que 2 + 2 son 4 sin tener que contar, les puede resultar confusa la terminología matemática, tienen problemas para realizar cálculos mentales con precisión, para recordar y llevar a cabo procedimientos, así como reglas y fórmulas y para seguir los pasos para la resolución de un problema aritmético. Dentro del déficit de razonamiento, los niños tienen dificultades para comprender conceptos matemáticos, ideas y relaciones, para comprender los múltiples pasos en procedimientos o algoritmos complejos y les resulta difícil tomar decisiones en la resolución de problemas. Por último, nos encontramos con el déficit visuoespacial. Los niños tienen dificultades para interpretar y utilizar la organización espacial de representaciones de objetos matemáticos, para colocar los números en una recta numérica, se confunden con los números y símbolos matemáticos similares, tienen dificultad para el cálculo escrito, para visualizar y analizar figuras geométricas o sus partes y para comprender e interpretar la información matemática cuando se organiza de forma visual y espacial, como por ejemplo las tablas y los gráficos.

El dominio afectivo en matemáticas

Los datos de los informes como PISA o TIMSS relativos a los factores emocionales relacionados con las matemáticas no mejoran la panorámica que, a nivel internacional, se ofrece en relación con la competencia matemática. En particular, el informe de la OCDE de 2015 sobre los resultados de la evaluación PISA 2012 ya señalaba una correlación significativa entre países con niveles de ansiedad matemática alta y bajos rendimientos en los resultados de dicha materia y señalaba, a su vez, que:

> El informe también revela preocupantes diferencias de género en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas: incluso cuando las chicas se desempeñan tan bien como los chicos en matemáticas, reportan menos perseverancia, menos motivación para aprender matemáticas, menos creencia en sus propias habilidades matemáticas, y niveles más altos de ansiedad sobre las matemáticas. Mientras que la chica promedio tiene un bajo rendimiento en matemáticas en comparación con el chico promedio, la brecha de género a favor de los chicos es aún mayor entre los de más alto rendimiento estudiantes. Estos hallazgos tienen serias implicaciones no sólo para la educación superior, donde las mujeres jóvenes ya están sub-representadas en los campos de estudio de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas, sino también más adelante, cuando estas jóvenes entran en el mercado laboral. Esto confirma las conclusiones de la Estrategia de Género de la OCDE, que identifica algunos de los factores que crean -y amplían- la brecha de género en la educación, el trabajo y la iniciativa empresarial. El apoyo a las actividades positivas de las niñas las actitudes hacia y la inversión en el aprendizaje de las matemáticas contribuirá en gran medida a reducir esta brecha (OCDE, 2015,4)

De hecho, en los informes PISA previos ya se apuntaba al hecho de que los problemas en el dominio afectivo de las matemáticas son iguales o peores que los problemas de comprensión. En particular, cuando se analizaron en este contexto las actitudes y emociones hacia las matemáticas, una proporción sustancial de los países participantes mostraron altos niveles de ansiedad matemática y un bajo autoconcepto y autoeficacia matemática. Esto concuerda con múltiples investigaciones en el ámbito de la investigación en Educación Matemática que señalan los afectos y las emociones negativas en matemáticas como culpables (en parte o potencialmente) de los casos de fracaso y bajo rendimiento relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el terreno del dominio afectivo en matemáticas objeto de atención en los párrafos anteriores, es necesario señalar que este dominio se ha considerado habitualmente como un constructo conformado principalmente por actitudes, creencias y emociones. Los estudios sobre creencias, sin duda, han hecho aportes relevantes. En cuanto a los estudios sobre las emociones y, fundamentalmente, sobre la ansiedad hacia las matemáticas, puede decirse que también se han generado importantes trabajos contribuyentes al campo de conocimiento científico. Sin embargo, son las actitudes hacia las matemáticas las que han generado el mayor interés por su importancia en el campo de la educación. En particular, se observa cómo las actitudes de los y las estudiantes hacia las matemáticas influyen en su elección de materias o estudios de grados STEM. Dentro de la actitud, varios estudios muestran que la componente que más negativamente afecta al rendimiento en matemáticas es la ansiedad.

Para Rosenberg-Lee, Barth y Menon (2011) los primeros años de la escolarización obligatoria, cuando comienza el contacto con las operaciones aritméticas básicas, resulta un período importante para la adquisición y el dominio de las habilidades matemáticas básicas. Registraron que en ese estrecho intervalo se dan cambios significativos en la respuesta y la conectividad del cerebro relacionados con las tareas aritméticas. Las exigencias a estas edades son importantes para el resto de la escolarización y los problemas pueden crear ansiedad matemática que derive en una mala relación con las tareas matemáticas en el futuro, condicionando y limitando elecciones posteriores.

Por otro lado, a pesar de la similitud del funcionamiento neuronal entre niños y niñas (Kersey, Csumitta y Cantlon, 2019) y de la igualdad entre géneros ante la mayoría de las tareas matemáticas (e.g. Hutchison, Lyons y Ansari, 2019), aparecen diferencias en cuanto a la ansiedad matemática (Van Mier, Schleepen y Van den Berg, 2019). Diversos trabajos han revelado complejas diferencias vinculadas al sexo en los mecanismos neurales que impulsan la forma en que la ansiedad se relaciona con el aprendizaje de STEM, estando entra las posibles causas los estereotipos, los sesgos basados en el género, la falta de modelos de conducta no estereotipados o la ansiedad de las profesoras de matemáticas (Hernández et al., 2018).

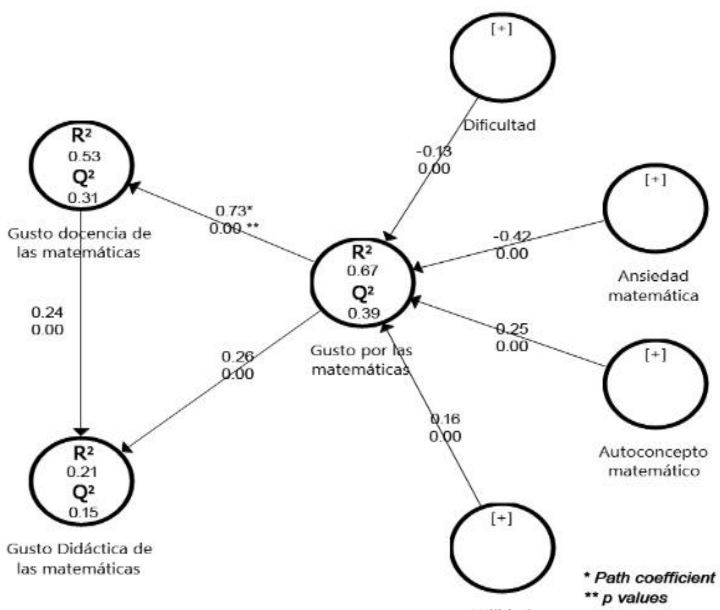


Figura 1. Gusto por la docencia de las matemáticas del profesorado en formación inicial. Fuente: Marbán, J.M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020).

Este último aspecto es especialmente relevante pues, no en vano, la formación del profesorado es un elemento clave de todo sistema educativo de calidad por lo que, en el ámbito de la educación matemática, identificar los factores que determinan actitudes positivas hacia la enseñanza de esta disciplina en contextos de formación inicial del profesorado constituye un reto ineludible. En este sentido, un reciente estudio de Marbán , Palacios y Maroto (2020) muestra, a través de un estudio multivariado basado en un modelo de ecuaciones estructurales en el que las creencias, las emociones y las actitudes hacia las matemáticas se entrelazaban como explicación del gusto por su enseñanza, que la ansiedad es un factor con una notable influencia sobre gusto por las matemáticas y que es a través de esta influencia como actuaría sobre el gusto por la docencia de las matemáticas y las actitudes positivas hacia el estudio de su didáctica (Figura 1).

El DUA y la educación matemática

La generación de entornos inclusivos en matemáticas es una acción tan necesaria y obligada como compleja, lo que puede conllevar sentimientos de frustración en el profesorado más convencido de ello o apatía entre quienes se encuentran más cómodos en su estado inercial de confort. Luchar contra ambas amenazas y caminar hacia una cultura de aula inclusiva en el aula de matemáticas requiere de marcos claros de desarrollo, así como de recursos y herramientas para la acción. De hecho, son 6 las fuerzas que UNESCO (2021) identifica para caminar, alcanzar y mantener la inclusión en el aula: la personalización, un currículo empático y participativo, la tecnología como recurso comunitario, el trabajo entre iguales, la visibilización del conocimiento y, por último:

> Transformación de los centros educativos intramuros, en espacios de formación a lo largo y ancho de toda la vida para facilitar oportunidades de aprendizaje desde cero a siempre. La inclusión se visualiza como una dimensión societal comunitaria que facilita que las personas puedan formarse en diversidad de espacios y a todo momento removiendo barreras y sin apriorismos sobre su potencial. Se sabe que la inclusión es apuntalar el potencial de excelencia de cada alumno liberado de prejuicios (p. 3)

Todas estas fuerzas, por otro lado, parten de una idea de inclusión basada en la supresión de barreras para el aprendizaje, superando así conceptos como los de equidad o integración, mucho más limitados.

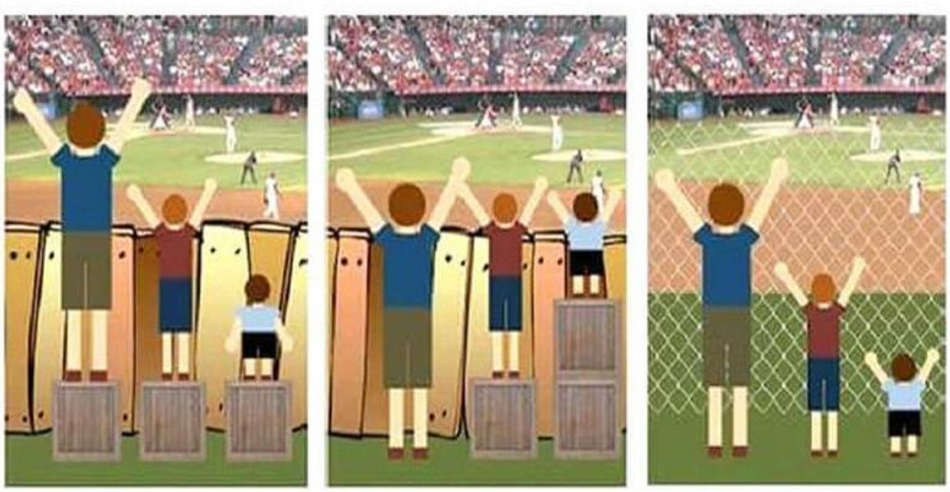


Figura 2. De la equidad a la inclusión. Fuente: https://www.theinclusionsolution.me/equity-vs-equality-eliminating-opportunity-gaps-education/

Y si hablamos de barreras, una de las más rígidas es la que viene dada por el currículo, como bien se observa en la segunda de las fuerzas mencionadas, entendiendo este en su sentido más amplio, esto es, como un conjunto coherente y bien estructurado conformado por competencias, objetivos, contenidos, métodos y evaluación. Y es contra esta barrera contra la que han surgido iniciativas ciertamente interesantes como la conocida como Diseño Universal para el Aprendizaje (en adelante, DUA), una propuesta que nace de la mano de CAST, inicialmente preocupado por la discapacidad pero que, a partir de finales de los años 80, gira su mirada hacia el propio currículo y sus limitaciones "incapacitantes" para el alumnado. Esto es, el problema deja de estar en el estudiante y pasa a estar en el currículo.

La idea inicial del DUA se termina materializando en forma de marco de currículo flexible y no limitante basado en tres principios, procedentes de la neurociencia, cada uno de los cuales incorpora pautas de acción en el aula y estrategias para su desarrollo. Veamos ahora estos principios, sus pautas y algunas estrategias, acompañándolas de algún ejemplo en el aula de matemáticas.

El primer principio centra su atención en el *porqué* del aprendizaje y se preocupa por lo emocional, por despertar el interés, por motivar, por enganchar y por facilitar la perseverancia, la autorregulación y, en cierto sentido, el flujo (Csikszentmihalyi, Abuhamdeh y Nakamura (2014).

Tabla 1
Principio 1 del DUA: Proporcionar múltiples medios para el compromiso

	Pautas: Proporcionar opciones para…		
	Captar el interés	Mantener el esfuerzo y la perseverancia	Autorregularse
Estrategias	Optimizar la elección propia y el trabajo autónomo Optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad de lo que se hace Minimizar amenazas y distracciones	Aumentar la relevancia de metas y objetivos Varias las demandas y los recursos para optimizar los retos Estimular la cooperación Incrementar el feedback orientado a la mejora	Generar expectativas y creencias que aumenten la motivación Facilitar el desarrollo de estrategias propias de resolución de problemas Desarrollar procesos de autoevaluación y reflexión

Fuente: https://udlguidelines.cast.org/. 2023.

Ejemplo de feedback (cooperativo) orientado a la mejora: Véase el vídeo *La mariposa de Austin*

Ejemplo de recurso que genera expectativas y creencias que aumentan la motivación para trabajar con funciones cuadráticas: https://www.geogebra.org/m/YVJAwt94

El segundo principio tiene en cuenta el *qué* del aprendizaje y parte de la evidencia de que todos percibimos la información de manera diferente y que incluso tenemos formas preferidas de percibirla. Al mismo tiempo, resalta el valor de las representaciones múltiples para establecer conexiones entre conceptos y entre experiencias propias.

Tabla 2
Principio 2 del DUA: Proporcionar múltiples medios de representación

	Pautas: Proporcionar opciones para…		
	La percepción	El lenguaje y los símbolos	La comprehensión
Estrategias	Ofrecer formas de personalizar la presentación de información Ofrecer diferentes alternativas para presentar la información oral Ofrecer diferentes alternativas para presentar la información visual	Clarificar vocabulario y símbolos Clarificar sintaxis y estructura Apoyar la decodificación de textos, expresiones matemáticas y símbolos Promover la comprensión entre lenguas Ilustrar mediante diferentes medios	Activar o proporcionar conocimiento base previo Destacar patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones Guiar el tratamiento de la información y su visualización Maximizar transferencia y generalización

Fuente: https://udlguidelines.cast.org/. 2023.

Ejemplo de clarificación de símbolos, vocabulario, sintaxis y estructura: Resolución de ecuaciones de primer grado usando balanzas algebraicas

Finalmente, el tercer principio se ocupa del *cómo* del aprendizaje y, en esta ocasión, promueve la comunicación y la expresión desde la idea clara de que no hay medios de acción o expresión óptimos para todo el alumnado.

Tabla 3
Principio 3 del DUA: Proporcionar múltiples medios para la acción y la expresión

	Pautas: Proporcionar opciones para…		
	La acción física	La comunicación	Las funciones ejecutivas
Estrategias	Variar los medios de respuesta y navegación Maximizar el acceso a herramientas y tecnologías de apoyo	Emplear diferentes medios de comunicación Utilizar múltiples herramientas de construcción/composición Promover la fluidez a través de secuencias graduadas para la práctica y el rendimiento	Orientar en la fijación de objetivos adecuados Apoyar el desarrollo de estrategias Facilitar la gestión de información y recursos Aumentar la capacidad para hacer seguimiento de procesos

Fuente: https://udlguidelines.cast.org/. 2023.

Ejemplos de promoción de la fluidez a través de secuencias graduadas y de empleo de diversos medios de comunicación:

Las tareas ricas en matemáticas

La búsqueda del extraño

Principios pedagógicos inclusivos en el aula de matemáticas

Los métodos y los principios pedagógicos que los sustentan son pieza clave en el currículo y una de las bazas más importantes que puede jugar el DUA. Para cerrar este documento se presenta de forma muy breve cómo cuatro iniciativas de innovación metodológica puestas en marcha por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León en el periodo 2018-2021 en el marco de su Plan para la Mejora de las Matemáticas (PMM) y evaluadas por el Grupo de Investigación Reconocido "Educación Matemática" de la Universidad de Valladolid, del que soy coordinador, provocaron, entre otros resultados, mejoras en el ámbito afectivo del alumnado e incremento de una cultura inclusiva en las aulas. Se señalan a continuación las cuatro propuestas implementadas junto con extractos de valoración de la experiencia del profesorado participante (una descripción más detallada de resultados puede verse en este enlace y en este otro enlace).

Piensa Infinito

La denominación Piensa Infinito corresponde a un proyecto editorial de SM que, en colaboración con la Universidad de Alcalá, ha elaborado libros de texto y materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas basados en la metodología utilizada en los centros educativos de Singapur. El conocido como Método Singapur, de hecho, es una propuesta metodológica de enseñanza de las matemáticas que se apoya en evidencias que emanan de la investigación y que fue impulsada y avalada por el propio Ministerio de Educación de Singapur como respuesta a una necesidad social de mejora de la educación matemática en el ámbito escolar. Nace a principios de los años ochenta, siendo la base de las diferentes modificaciones posteriores de autores de diferentes países y sitúa la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática en el aula, apoyando esta actividad en la argumentación, el aprendizaje cooperativo y la metacognición y prestando especial atención también a aspectos afectivos -en particular, actitudes- así como a la comprensión profunda de conceptos clave, al desarrollo de habilidades básicas y a los diferentes procesos que definen y describen la actividad matemática en diferentes contextos. Esto afirmó el profesorado participante: "*Todos o casi todos tienen la percepción de que las matemáticas son divertidas y que son capaces de aprenderlas; se perciben más capaces y están más motivados*"

JUMP Math

Programa innovador de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas creado por John Mighton y que busca optimizar el rendimiento tanto de los alumnos como de sus docentes. El programa fue desarrollado por un equipo de matemáticos y educadores con un conocimiento profundo de las matemáticas, además de sentir pasión por ellas. Actualmente se encuentra implantado en países como Canadá, Estados Unidos, Gran Bretaña, Bulgaria y España.

Promovido por UpSocial, sus principios básicos son la adquisición de confianza, la práctica guiada, el descubrimiento guiado, la evaluación continua y a simple vista dentro del aula y la instrucción rigurosamente pautada. En este caso, el profesorado afirmó que "*Lo mejor ha sido las afirmaciones de los niños manifestando que entienden las matemáticas*"

NUMICON

Método de Matemáticas desarrollado por la editorial Oxford bajo el nombre comercial de NUMICON. El enfoque de NUMICON comenzó a desarrollarse por primera vez en 1996 (con financiación del gobierno del Reino Unido) por profesorado en ejercicio en las escuelas ordinarias como enfoque que apoyaría a niños de todas las edades y habilidades. NUMICON se basa en un enfoque multisensorial en el que los números se pueden ver y se pueden tocar, facilitando un puente entre lo abstracto y lo concreto. Sobre el impacto de esta experiencia, el profesorado participante destacó "*Mejora en la percepción de la capacidad de aprender; muy motivados y más seguros al trabajar las matemáticas, más en infantil que en Primaria; lo ven como juego y eso facilita el aprendizaje; mejora en el tiempo de resolución de problemas porque visualización del resultado; mejora sobre todo en niños con algunas dificultades*"

ABN

Ante la controversia que plantea el uso abusivo de los algoritmos tradicionales para el cálculo, junto con sus dificultades y limitaciones, surgió como alternativa la propuesta conocida como algoritmo ABN (Abierto Basado en Números) el cual plantea, de forma innovadora, un enfoque del cálculo más abierto y flexible, centrado en los conceptos de número y cantidad en lugar de hacerlo en el concepto de dígito. A su vez, ABN fomenta el desarrollo de estrategias propias de cálculo, el planteamiento de problemas y la argumentación al tiempo que establece puentes constantes entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la vida cotidiana. En esta ocasión, el profesorado valoró la experiencia como positiva porque "*Aporta una visión innovadora y cambio en la ejecución de los algoritmos, enseño la asignatura con la que disfrutan, no la que odian los estudiantes*"

Referencias y bibliografía

Aguilar, M., Navarro, J. I., Alcalde, C. y Marchena, E. (2005). El constructo "conciencia numérica". Su importancia en la detección y prevención de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Tavira: Revista de Ciencias de la Educación, 21*, 55-78.

Csikszentmihalyi, M., Abuhamdeh, S., y Nakamura, J. (2014). Flow. *Flow and the foundations of positive psychology: The collected works of Mihaly Csikszentmihalyi*, 227-238.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. (2022). A retrospective look at the research on dyscalculia from a bibliometric approach1 Una mirada retrospectiva a la investigación en discalculia desde una aproximación bibliométrica. *Revista de Educación*, *396*, 201-229. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-535

Fernández Baroja, F., Llopis, A.M. y Pablo Marco, C. (1991). *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Santillana.

Hernández, P. R., Bloodhart, B., Adams, A. S., Barnes, R. T., Burt, M., Clinton, S. M., ... y Fischer, E. V. (2018). Role modeling is a viable retention strategy for undergraduate women in the geosciences. *Geosphere*, *14*(6), 2585-2593. https://doi.org/10.1130/GES01659.1

Hutchison, J. E., Lyons, I. M. y Ansari, D. (2019). More similar than different: Gender differences in children's basic numerical skills are the exception not the rule. *Child development*, 90(1), e66-e79. https://doi.org/10.1111/cdev.13044

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. y Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in human neuroscience,* 8(57). https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00057

Kersey, A. J., Csumitta, K. D. y Cantlon, J. F. (2019). Gender similarities in the brain during mathematics development. *npj Science of Learning*, 4(1), 19.

Marbán, J.M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Enjoyment of teaching mathematics among pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal* https://doi.org/10.1007/s13394-020-00341-y

Mazzocco, M. M. (2007). Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. En D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities, (pp. 29-47), Baltimore: Brookes.

Melero, M. L. (2005). Escuelas inclusivas, el proyecto Roma. *Cuadernos de pedagogía*, (346), 53-57.

Mundia, L. (2012). The Assessment of Math Learning Difficulties in a Primary Grade-4 Child with High Support Needs: Mixed Methods Approach. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 4(2), 347-366.

OCDE (2015). PISA 2012 Results: Ready to Learn, Students' engagement, drive and self-beliefs. Vol.III. https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-III.pdf

Rosenberg-Lee, M., Barth, M., y Menon, V. (2011). What difference does a year of schooling make?: Maturation of brain response and connectivity between 2nd and 3rd grades during arithmetic problem solving. *Neuroimage*, 57(3), 796-808. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.05.013

UNESCO (2021). Inclusión en Educación. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000378427_spa

Van Mier, H. I., Schleepen, T. M., y Van den Berg, F. C. (2019). Gender differences regarding the impact of math anxiety on arithmetic performance in second and fourth graders. *Frontiers in psychology*, 2690. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02690

Reflexiones sobre las prácticas matemáticas realizadas en el contexto de los patrones y las sucesiones

Norma **Rubio** Goycochea
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
nrubio@pucp.edu.pe

Resumen

Sabemos que la enseñanza eficaz de las matemáticas es compleja y requiere tanto de diversos conocimientos como de competencias del profesorado que brinda experiencias de aprendizaje. El propósito de esta presentación es fomentar el diálogo en relación con las prácticas matemáticas realizadas por los profesores, frente a algunos episodios mostrados. Para ello, analizaremos los objetos ostensivos, (expresiones, símbolos, gráficos, etc.), los no ostensivos (conceptos, proposiciones, propiedades, etc.) y los procesos matemáticos que intervienen tanto en las prácticas operativas como en las discursivas, en las que la reflexión es sumamente importante. Mostraremos algunas herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, que nos ayudarán en el análisis. Los patrones y las sucesiones nos servirán de contexto, por ser tratados en los diferentes niveles educativos y por su riqueza en procesos, cuando son incluidos en tareas, como: resolución de problemas, argumentación, representación, conexiones y comunicación, entre otros.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación; Enseñanza; Desarrollo profesional; Enfoque Ontosemiótico; Objetos y procesos; Álgebra.

Introducción

En todos los niveles educativos, la enseñanza eficaz de las matemáticas desarrollada por los profesores es compleja y requiere no solo tener los conocimientos de la disciplina que imparten, sino también de competencias profesionales que brinden experiencias para el logro de los aprendizajes de los contenidos propuestos a los estudiantes.

En la formación inicial y continua de profesores de muchas instituciones educativas, la práctica reflexiva de los docentes es una componente importante del desarrollo profesional requerido para mejorar la calidad del proceso de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. En el Perú, la reflexión sobre la práctica docente es un tema que ha sido abordado en diversas políticas y documentos educativos, tales como el Modelo del Buen Desempeño Docente (Ministerio de Educación del Perú, 2015) y el Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente Programa de estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática (Ministerio de Educación, 2020) publicados por el Ministerio de Educación. En estos documentos, se promueve la reflexión sobre la práctica docente como un componente importante del desarrollo profesional. Sin embargo, en ellos no se proporcionan herramientas que ayuden a los profesores en la reflexión sobre su práctica matemática de manera de sistematizarla. Por ello, es que consideramos importante conocer herramientas que ayuden en la reflexión y en un análisis sistematizado de la práctica docente.

El propósito de este Minicurso es fomentar el diálogo con los profesores participantes, que ayude a la reflexión y al análisis en relación con las prácticas matemáticas realizadas por ellos, frente a algunos episodios mostrados, tomando como contexto los patrones y las sucesiones. Se ha considerado estos objetos matemáticos, porque son tratados en los diferentes niveles educativos y porque, cuando son incluidos en actividades matemáticas, se evidencia la riqueza en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Estos procesos son tomados en cuenta, para ser aprendidos, por los Principios y Estándares del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Se consideran, además, los procesos tratados en las diversas investigaciones en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) donde estos procesos son agrupados por aires de familia (Font y Rubio, 2016, 2017; Font et. al, 2008). En este Minicurso se propone analizar los objetos primarios establecidos en el EOS (Godino et. al, 2007) clasificados como ostensivos, (expresiones, símbolos, gráficos, etc.), los no ostensivos (conceptos, proposiciones, propiedades, etc.) y los procesos matemáticos que intervienen tanto en las prácticas operativas como en las discursivas, en las que la reflexión es sumamente importante.

Se presenta en este trabajo, en primer lugar, una breve descripción de algunos aspectos y herramientas del EOS que nos sirven para la reflexión y análisis de la práctica matemática realizada. Luego, se muestran la importancia de los patrones y las sucesiones con algunos episodios, los cuales serán analizados en el Minicurso haciendo uso de las herramientas propuestas por el EOS. Finalmente, se incluyen algunas reflexiones finales.

Análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos de la práctica reflexiva de los profesores

En Godino (2009), se propone un modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor, basado en el EOS, en el que se consideran las diversas facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional, mediacional y ecológica.) incluidas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, así como diversos niveles de conocimiento en cada una de dichas facetas. En este modelo se propone un sistema de categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que permiten realizar un análisis global de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego para una enseñanza efectiva de las matemáticas. Hay varias investigaciones que dan cuenta de la utilidad de este modelo como las de Giacomone et.al, 2016; Pino et.al, 2022; Pino et.al, 2015 y Rubio, 2012, entre otras.

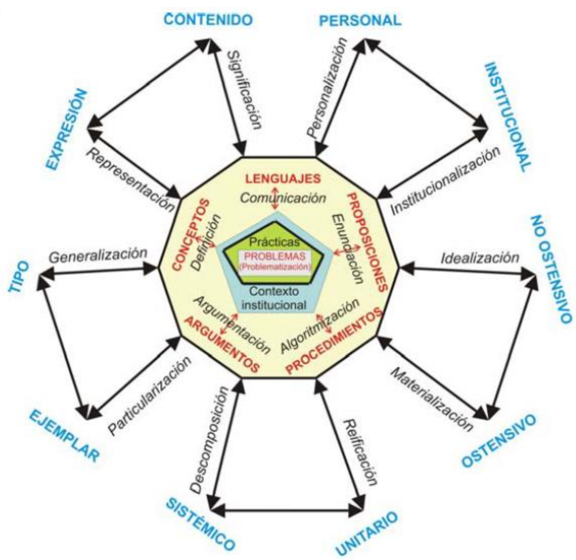


Figura 1. Prácticas, objetos y procesos matemáticos.
Tomada de Godino (2009, p.22)

En relación con el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos (ver Figura 1), considerado en el EOS como "un estudio sistemático de los factores que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular o de aspectos parciales de los mismos". En Godino (2009) se toman en cuenta cuatro niveles:

1. Prácticas matemáticas y didácticas en las que se describen las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje; además de describir las líneas generales de actuación del docente y de los estudiantes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). En las cuales se describen de objetos y de procesos matemáticos que intervienen en el desarrollo de las prácticas, así como los objetos y los procesos que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. En este nivel se describen el conjunto de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Es el nivel en el que se identifican de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

En este Minicurso haremos hincapié en los dos primeros niveles de análisis didáctico.

Contexto de reflexión. Patrones y sucesiones

Una de las formas en que se describen las matemáticas ha sido como el estudio de los patrones. Estos patrones los encontramos en muchos lugares, como, por ejemplo, en los mosaicos, azulejos o mayólicas de pared o pisos, los papeles decorativos de pared, hexágonos en los paneles de abejas y en cáscaras de piñas, las simetrías, etc. En diversas áreas, se estudian los patrones, entre ellas: botánica, química, biología, finanzas, estadística, psicología y en otros campos ajenos a las matemáticas, ciencias naturales, o ciencias sociales, como en la investigación policial, etc.

Además, los patrones y las sucesiones son tratados en los diferentes niveles educativos y, cuando son estudiados, se evidencia la riqueza con la que se pueden desarrollar los procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. La búsqueda de patrones debe ayudar a que los estudiantes empiecen, en sus primeros años, relacionando patrones visuales con los numéricos, luego estos con los algebraicos, formular conjeturas hasta llegar a ser capaces, de acuerdo al nivel educativo en el que se encuentren, a generalizar y a demostrar, desarrollando el pensamiento inductivo y deductivo. Por otra parte, los patrones y las sucesiones matemáticas son temas fundamentales en muchos cursos universitarios avanzados, como matemáticas, física y estadística.

A manera de ejemplo, se presenta a los profesores participantes en este Minicurso algunos episodios para ser analizados, como el siguiente:

Una profesora muestra a sus estudiantes la figura siguiente:

Luego, les pregunta: Si continuamos con el mismo patrón, ¿qué figura continúa un triángulo o un pentágono?, a lo que María contesta: *sigue un pentágono* y Luis responde: *sigue un triángulo*. ¿Quién tiene la razón y por qué?

Figura 2. Episodio sobre patrones

Otro episodio que se muestra a los profesores es el siguiente:

En una sesión de clase de secundaria, un profesor pide a sus estudiantes que completen el patrón numérico siguiente:

1 2 4 _____

¿Hay una única respuesta?
¿Está mal formulada la pregunta?
¿Qué cree que se propone el profesor al formular esta pregunta?

Figura 3. Episodio sobre patrón numérico. Sucesión de números

El objetivo de presentar estos episodios es analizar los objetos matemáticos presentes en la resolución de las tareas y todos los procesos que se pueden activar cuando son discutidos con sus colegas y que sus estudiantes pueden desarrollar, ya que deben para dar respuestas, deben comunicar sus ideas, justificarlas, conectarlas con otros temas, representar y formular problemas.

Además, se pretende que los participantes reconozcan los errores comunes en relación con los patrones, cuando no es claro el núcleo a considerar en dichos patrones y cuando se proporcionan pocos números, en el caso de las sucesiones de números.

Asimismo, se propone trabajar con la sucesión de los primeros n números enteros positivos, en diferentes contextos (aritmético, algebraico, geométrico) y diversos niveles educativos mostrando otros procesos como el de particularización y generalización propuestos en el EOS, entre otros procesos.

Reflexiones finales

Estamos de acuerdo en que enseñar matemáticas es una labor compleja que requiere no solo saber matemáticas, sino que además se debe conocer a los estudiantes y lo que ellos saben, disponer de estrategias pedagógicas y cuándo usarlas, conocer de tecnologías y cuándo utilizarlas y, además, conocer cómo las matemáticas se conectan con otras áreas y con ella misma, lo que en el EOS se conoce como conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento profundo que debe tener un profesor. Es evidente, que no es suficiente con la formación inicial que se brinda a los profesores, porque mucho del conocimiento que se adquiere proviene propiamente de la experiencia en el aula. Por ejemplo, se ha tratado de mostrar, en relación con la suma de los primeros n números enteros positivos desarrollada en este Minicurso que, de acuerdo a los conocimientos que el profesor tenga sobre sus estudiantes, esta tarea podría ser presentada desde la historia o como una anécdota, resolviéndola dentro del contexto aritmético o algebraico, con diversas estrategias y llegando a plantear un problema que involucre el tema de combinatoria. Además, se trata de promover el desarrollo de diferentes procesos como la comunicación, representación, argumentación, conexiones, generalización y resolución de problemas, entre otros. Para ello, el profesor debe saber organizar la secuencia de las actividades propuestas en clase, saber preguntar y saber qué conocimientos previos deben tener sus estudiantes para resolverlas.

Por otro lado, para lograr que los estudiantes aprendan y, con ello, consideremos que el proceso de enseñanza ha sido eficaz, se requiere que se reflexione y analice las prácticas realizadas, en la que se tome en cuenta las respuestas de los estudiantes frente a las preguntas formuladas, por ejemplo, de manera de tomar decisiones sobre cómo corregir el error o añadirlo en la siguiente oportunidad para discutirlo con los propios estudiantes y el lograr los aprendizajes propuestos.

Asimismo, aunque en muchos de los casos la reflexión y el análisis de nuestras prácticas matemáticas las realizamos de manera individual, se pueden enriquecer los mismos procesos compartiendo las experiencias vividas en estas prácticas con nuestros colegas.

Referencias y bibliografía

Font, V. y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica, 24* (1-2), 97-123.

Font, V. y Rubio, N. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso*

International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Font, V., Rubio, N y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y proceso en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 269-277). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Ministerio de Educación del Perú. (2015). *Marco del Buen Desempeño Docente.* Lima-Perú.

Ministerio de Educación. (2020). *Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente Programa de estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática*. Lima-Perú.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

Pino-Fan, L.R., Castro, W.F. & Moll, V.F. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, España. http://www. tdx. cat/ handle/ 10803/ 294031

Aprendiendo como incorporar elementos socioculturales en Educación Matemática

Learning how to incorporate sociocultural elements in Mathematics Education

M. Alejandra **Sorto**
Texas State University
USA
sorto@txstate.edu
Marta **Civil**
University of Arizona
USA
civil@math.arizona.edu

Resumen

Los participantes de este minicurso tendrán la oportunidad de aprender en forma activa y participativa como incorporar aspectos culturales y lingüísticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos basaremos en nuestra experiencia trabajando con profesores, estudiantes y padres y madres de familia en comunidades de origen mexicano en Estados Unidos. Las actividades de aprendizaje del minicurso están diseñadas bajo lineamientos teóricos basados en los conceptos de fondos de conocimiento y calidad de enseñanza con estudiantes cuya primera lengua no es la lengua de enseñanza en la escuela. La implementación de actividades se dividirá en tres partes: (1) una breve introducción de los conceptos teóricos y principios de diseño de las actividades, (2) observación y análisis de situaciones reales de aula, (3) observación y análisis de talleres matemáticos con familias. El minicurso finalizará con una discusión sobre cómo diseñar actividades en el contexto propio de los participantes.

Palabras Clave: Equidad; Prácticas de enseñanza en matemáticas; Fondos de conocimiento; Aspectos culturales y lingüísticos; Participación de las familias.

Abstract

Participants in this minicourse will have the opportunity to learn actively how to incorporate cultural and linguistic aspects into the teaching and learning of mathematics. We based our work on our work with teachers, students, and parents from communities of Mexican origin in the United States. The learning activities of this minicourse are designed under theoretical approaches based on the concept of funds of knowledge and quality of education for students whose first language is not the language of instruction in school. The implementation of activities will be divided into three parts: (1) a brief introduction of the theoretical concepts and design principles of the activities, (2) observation and analysis of actual classroom situations, and (3) observation and analysis of mathematical workshop with families. The minicourse will end with a discussion about how to design activities in the context of the participants.

Keywords: Equity; Mathematics teaching practices; Funds of knowledge; Cultural and linguistic aspects; Family engagement

Introduction

In this minicourse, we describe the activities that will be implemented during the session. We start with a brief introduction of the theoretical concepts drawn from our work in mathematics education with teachers, students, and families from communities primarily of Mexican origin in the United States. Grounded on a sociocultural approach to research, we designed the activities on linguistic and cultural diversity as assets for the teaching and learning of mathematics. Next, we will engage participants in observations and analysis of classrooms and workshops with respect to these elements. We will end with a discussion about how to design activities in the context of the participants.

Theoretical Concepts and Design Principles

The quality of mathematics education for bilingual students goes beyond good teaching practices identified in monolingual settings (Celedón-Pattichis & Ramirez, 2012). These practices include the teacher creating a safe intellectual environment where the native language is honored, a recognition or noticing that the meaning of words is fundamental to approaching a mathematical task. Other strategies include the task's context being based on a real-life situation, providing a visual representation of the objects, and using cognates (Sorto & Bower, 2017; Chval & Chávez, 2011). Design principles of activities based on these practices required real examples from classroom observations with at least one element clearly observable. Examples include whole class lessons, short video clips, transcripts, or vignettes. A clear description of the observed element and a quality level should accompany the example(s). Teachers should have time to observe the lesson (or read the transcript) multiple times, if necessary, before engaging in the analysis. The observation and analysis should be done individually before discussing in pairs or small groups.

Our work with families and mathematics is grounded on the concepts of funds of knowledge (González et al., 2005) and parents as intellectual resources (Civil & Andrade, 2003). Funds of knowledge refers to the "historically accumulated and culturally developed bodies of knowledge and skills essential for household or individual functioning and well-being" (Moll et al., 1992, p. 133). The idea is that all communities have a richness of knowledge and experiences that can be leveraged for school teaching and learning. At the center of the funds of knowledge work is the idea of teachers learning about and from their students' families and communities. As we started having mathematical workshops with parents, we realized that we needed to develop a two-way dialogue between home and school, where parents and teachers (as well as researchers) would learn from and with each other. For example, in an activity on the mathematics of "Papel Picado" (a craft that is quite typical in our local Mexican American context), the mothers became the leaders as they taught the researchers how to do it (Civil & Andrade). This initial work with a group of mothers led to the concept of parents as intellectual resources. As Civil and Andrade write, "In looking at home-school partnerships, there seemed to us to be urgency for parents to be intellectually engaged, especially mothers in language minority and working-class communities" (pp. 155-156). This idea of parents as knowledge holders and experts guides the work that we do in the mathematics workshops with parents and families that we illustrate in this minicourse.

Classroom Observation and Analysis Activity

Teachers can learn how to implement these practices by observing examples of classrooms from videotaped lessons and analyzing the situations utilizing a common rubric to capture the elements at different levels of quality (see Table 1 for an example of one element). The goal of the observation and analysis is to identify the extent to which multilingual learners have opportunities to reason and do mathematics while learning the language of instruction.

Illustrating the teaching elements and levels of quality

Participants in the minicourse will be exposed to video clips that illustrate effective teaching practices for multilingual learners. They will also hand out a rubric describing each level's elements and descriptions (Not Present, Low, Medium, and High). The facilitators will use video clips to illustrate each element and provide the corresponding level of quality. Participants will have the opportunity to become familiar with the rubric and question the decisions about the different levels of quality.

Observing and analyzing practice

Participants will then observe a different video clip, identify the elements they observe, and then assign a level of quality according to the rubric. This first observation and assignation of level will be done individually before discussing in small groups. When discussing the observation in small groups, the participants should focus the discussion on the observable teaching moves and the alignment with the rubric.

Reflection

Participants will be asked to compare and contrast the examples given and their own classrooms and to reflect on how this activity helps them better serve their multilingual learners.

Table 1
Teaching element and corresponding levels of quality

Meaning and multiple meanings of words			
Teacher or students communicate meaning by using synonyms, gestures, drawings, cognates, or translations to students' first language that supports the learning. This code includes reading strategies meant to increase comprehension. Meaning that occurs between students that is correct can adjust the score upward.			
Not Present	Low	Mid	High
No opportunities for students to explore the meaning through speech and other forms of expression are found. OR The translation/meaning is incorrect, or the use of gestures to convey meaning is confusing.	Brief opportunities for students to explore the meaning of speech and other forms of expression are found. Examples: ● Correct translation and support of math terms. ● Use of gestures to convey meaning, e.g., pointing, as when indicating the apex of a pyramid ● Use of synonyms ● Use of drawings ● Use of cognates	The teacher or students engage in a discussion of words or terms used in mathematical contexts or tasks that has the features noted under High, but it occurs in an isolated instance and does not characterize the segment.	The teacher and students explore the meaning of words or terms used in mathematical contexts or tasks through speech and other forms of expression in an extended way. Examples are: ● A conversation about the multiple meanings of mathematical words (mathematical meanings and/or colloquial meanings). ● Emphasis on cognates ● Use of a combination of techniques such as gestures, drawings, and the use of synonyms to convey meaning.

Source: Sorto et al., 2018

Mathematics Workshops with Families

In this minicourse participants will learn about different approaches that we have used to engage with families in mathematics explorations, including mathematics for parents (MFP) short courses, mathematics workshops for families co-facilitated by parents in the community, *tertulias matemáticas* where parents do mathematics but also engage in critical conversations about mathematics education, and parents' mathematics classroom visits.

After a brief overview of these different approaches, we will focus on examples from a MFP, a *tertulia matemática* session, and a parent-child interaction in a mathematics workshop. Through video clips of these different activities, we aim to emphasize the importance of the linguistic and cultural contexts when working with parents and families. We also emphasize an asset-based view in our analysis of these activities, by which we learn with and from the families. An example from a tertulia involves a grandmother (Celia) and her daughter (Martina) (who was the mother of a child in that school) working on adjusting a recipe for horchata from four to six people (Menéndez & Civil, 2009). Celia had brought in an horchata recipe for 4 people based on her own experience making this drink.

The recipe called for ¼ kg of rice for 4 people. The question then was "how much rice would be needed for 6 people." Martina who had at least a high school level education had taken the lead in the activity and said that it would be ½ kg. In hearing that, Celia (who had attended school only till 2nd grade) right away said that it was not right. Celia and Martina then engage in an exchange in which Martina seems to be trying out numbers to see if any of them may be right while Celia is providing key ideas throughout, such as "it is going to be half of a fourth for two more people." That is, if we need ¼ kg of rice for 4 people, then Celia is arguing that for 2 people it would be half of that, hence the "half of fourth" so that for 6 people it would the ¼ kg plus the half of a fourth. At this point they are not sure how to proceed. Martina says "if you put it all together, it's three fourths" somehow implying that ¼ plus half of a fourth would be ¾. And from there she concludes that it is 750 g (which would ¾ kg). Celia is not convinced at all and says "one fourth is 250 grams, then half of 250 grams is one hundred…." To which Martina says "twenty-five" and Celia then says "one hundred twenty-five" and after doing some calculation on paper Celia concludes "three hundred seventy-five", which is the correct amount of rice for 6 people.

This is just one example of how a culturally based activity such as adjusting a recipe that the participants chose leads to a context to discuss proportional reasoning and also illustrates the richness of Celia's experiential knowledge and her sense-making. While Martina had arguably more formal education, Celia draws on her everyday experience and knows that ½ kg would be too much rice for 6 people. While Celia did hesitate a little bit on how to find half of 250 and Martina helped there, still throughout Celia was contrasting the different answers given to what she felt was the case given her experience. This back and forth in the groups as they worked on the problems is a feature we want to highlight in this work, as it shows the participants' engagement and the power of collaboration. As one of the participants I these *tertulias* shared:

> We are all wonderful because we don't make anybody else feel inferior…. There are things that maybe I didn't get and for example maybe [another participant] did, and she can tell me "well it's like this." So then nobody, we don't feel, nobody feels inferior to anybody else. And we help each other. That's what we notice. If the gentleman [a participant in the group] knows something that I don't, he teaches us or we teach. We all help each other.

Conclusion

The main goal of this minicourse is to engage participants in activities designed for teachers and families grounded on sociocultural and language theories with a non-deficit approach. By observing and identifying teaching elements of multilingual mathematics lessons, the participants will have the opportunity to reflect on their practice and have the tools to create more equitable learning experiences. The activities related to family engagement will serve as a context to discuss with the audience avenues to working with families as resources for the teaching and learning of mathematics. We will look at some key principles that we argue should guide this work while keeping in mind the characteristics of the local contexts.

Acknowledgments: Grant support

This research was supported by the National Science Foundation grants (DRL-1055067, ESI-9901275; ESI-0424983). The views expressed here are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the funding agencies.

References and bibliography

Hill, H. C. (2014). *Mathematical quality of instruction* (MQI) [Coding tool]. Cambridge, MA: Harvard Graduate School of Education.

Chval, K. B. & Chávez, O. (2011). Designing math lessons for English language learners. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17*(5), 261 – 265.

Celedón-Pattichis, S. & Ramirez, N. G. (Eds.). (2012). *Beyond good teaching: Advancing mathematics education for ELLs*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Civil, M. & Andrade, R. (2003). Collaborative practice with parents: The role of the researcher as mediator. In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 153-168). Kluwer.

González, N., Moll, L. C. & Amanti, C. (Eds.) (2005). *Funds of knowledge: theorizing practice in households, communities, and classrooms*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Menéndez, J. M. & Civil, M. (2009). The role of cognition and affect on adults' participation in a nonformal setting for learning mathematics. In K. Safford-Ramus (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference of Adults Learning Mathematics - A Research Forum* (pp. 147-164). Philadelphia, PA: Chestnut Hill College, Philadelphia.

Moll, L. C., Amanti, C., Neff, D. & González, N. (1992). Funds of knowledge for teaching: Using a qualitative approach to connect homes and classrooms. *Theory into Practice, 31*(2), 132–41. http://dx.doi.org/10.1080/00405849209543534

Sorto, M. A., Wilson, A. & White, A. (2018). Teacher knowledge and teaching practices in linguistically diverse classrooms. In J. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues, & M. Schütte (Eds.) *Language and communication in mathematics education: International perspectives* (pp. 219-231). Dordrecht: Springer.

Sorto, M. A. & Bower, R. S. G. (2017). Quality of instruction in linguistically diverse classrooms: It matters! In A. Fernandes, S. Crespo, & M. Civil (Eds.), *Access and equity: Promoting high quality mathematics in grades 6-8* (pp. 27 – 40). Reston, VA: NCTM.

Geometría: una herramienta para explorar el mundo físico y matemático

Beatriz Elena **Londoño** Flórez
Iniciativa Ciencia y Tecnología para Todos, @SciTechXE
Colombia
blondono@gmail.com
Ana Cecilia **Agudelo** Henao
Universidad Nacional
Colombia
acagudeloh@unal.edu.co
Juan Carlos **Granada** Echeverry
Universidad del Valle
Colombia
juan.granada@correounivalle.edu.co
Rubén Antonio **Vargas** Zapata
Universidad del Valle
Colombia
ruben.vargas@correounivalle.edu.co

Resumen

En el presente texto planteamos la actividad de medir distancia sin uso de cinta métrica, con la finalidad de resaltar la dependencia que existe entre la geometría y la medida de distancia entre dos puntos. Partiendo del conocimiento que se tiene sobre la circunferencia en el plano, se ilustra el proceso llevado a cabo por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra. Realizamos así un análisis sobre las hipótesis empleadas en dicha medida, enfatizando el rol fundamental del V postulado de Euclides. Con el fin de presentar diversas geometrías y generalizar el concepto de distancia, visualizamos los conceptos de curvatura y geodésica y recalcamos la relación entre la teoría general de la relatividad de Einstein y las geometrías no Euclidianas.

Palabras clave: Educación Matemática; Geometría; Espacio; Medida; Distancia; Física.

Introducción

En nuestra propuesta tomamos como premisa que las ciencias modernas pueden y deben estar presentes en la escuela. En la actualidad, los teléfonos inteligentes, los televisores y los automóviles (entre otros objetos) tienen dentro de sus componentes electrónicos chips de alta tecnología que se han podido elaborar a nivel industrial gracias a los logros de diversas ramas de la ciencia, entre las que destaca la mecánica cuántica. Así mismo, la exactitud y la precisión de los actuales Sistemas de Posicionamiento Global (GPS, por su sigla en inglés) han demandado el uso de las predicciones de la teoría de la relatividad general. De los ejemplos anteriores se constata que las ciencias modernas están presentes en la tecnología que nos rodea. En este sentido consideramos pertinente preguntarnos ¿cómo podemos lograr una mayor presencia en la escuela de los principios básicos de la relatividad y la mecánica cuántica? Presentamos aquí un primer acercamiento para abordar esta pregunta.

La irrupción de la ciencia y la tecnología en la cotidianidad marca derroteros ineludibles en la sociedad. Uno de ellos está relacionado con la necesidad de divulgar a los ciudadanos criterios fundamentales de ciencia y tecnología. Para tal fin, dependiendo de la audiencia, hoy en día tenemos diversas maneras de comunicación, así como diversos niveles de profundidad. Algunos medios presentan la ciencia moderna como un conjunto de ideas, experimentos y logros de científicos famosos; de hecho, nombres como Einstein, Galileo y Newton son familiares para la mayoría de las personas. Otros se centran más en desarrollos tecnológicos como la TV, el teléfono celular, los computadores, las tabletas, etc. Sin embargo, es importante recordar que las plataformas fundamentales en las que subyacen los grandes descubrimientos científicos y tecnológicos son las ciencias naturales y la matemática, y dentro de ella la geometría. Es afortunado que la juventud actual se interese en la ciencia. De hecho, han surgido programas disponibles libremente en internet con propuestas muy interesantes de jóvenes científicos en las que divulgan el conocimiento profundizando en aspectos matemáticos básicos en general y geométricos en particular. Este enfoque tiene muchas ventajas, porque en lugar de aislarnos, nos acerca al maravilloso mundo de las matemáticas en la comprensión del mundo. Sin las matemáticas el avance científico sería insignificante (Dawkins, 2000 y Fischer, 2003).

Nuestra hipótesis es que la Geometría permite el acercamiento hacia el pensamiento matemático presente en las ciencias modernas. La búsqueda de la forma, la regularidad y su relación con el mundo que nos rodea es una constante en el desarrollo científico. Nuestra filosofía científica es heredera del pensamiento Platónico (Platón, 2020). Desde el planteamiento formulado en el *Timeo* (ver Figura 1) hasta nuestros días, continuamos en la búsqueda del conocimiento de la naturaleza y las propiedades medibles del Espacio (Zenil, 2015).

En la ciencia clásica el Espacio es estático y los objetos se mueven sobre él. Bajo esta mirada, es evidente el protagonismo de la geometría de Euclides. Por otro lado, las ciencias modernas nos enfrentan a un universo altamente dinámico, donde las geometrías no euclidianas se hacen necesarias para una descripción adecuada de la realidad física. Nuestra propuesta general consiste en usar diversas actividades que utilizan como punto de partida la geometría euclidiana y que nos lleven paulatinamente a considerar ideas que salen del contexto clásico para llevarnos a escenarios donde otras geometrías son posibles.

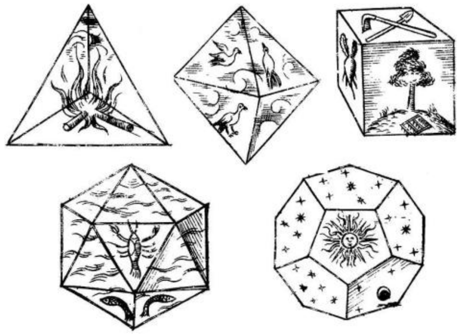


Figura 1. Imagen de dominio público, basada en los dibujos realizados por Kepler en su obra "El Misterio Cosmográfico" publicada en 1596. Este dibujo es una alusión a la obra *Timeo*, donde los primeros cuatro sólidos Platónicos (octaedro, tetraedro, hexaedro, icosaedro) se asocian a los elementos fundamentales: fuego, aire, tierra, agua, mientras que el quinto sólido (dodecaedro) se asocia a la quintaesencia, la cual Dios mismo utilizó para pintar el Universo.

En las líneas siguientes usaremos la actividad de medir Distancia para ilustrar nuestra propuesta.

Medir Distancia

Es altamente probable que, cuando pensamos en medir la distancia entre dos puntos o la longitud de un objeto, llegue a nuestra mente la idea de usar una regla o cinta métrica. Sin embargo, la propuesta que planteamos aquí es usar sólo una mínima información dada y algunas hipótesis para inferir la medida que se busca determinar.

Radio de la pizza sin uso de cinta métrica.

Observemos el ejemplo que se presenta en la Figura 2. Se plantea hallar el radio de la pizza que se ilustra a la izquierda, sabiendo que, al partirla en ocho porciones iguales, la longitud del borde de cada trozo es 10 cm. Con los conocimientos geométricos sobre las relaciones en la circunferencia se puede deducir el radio de la pizza.

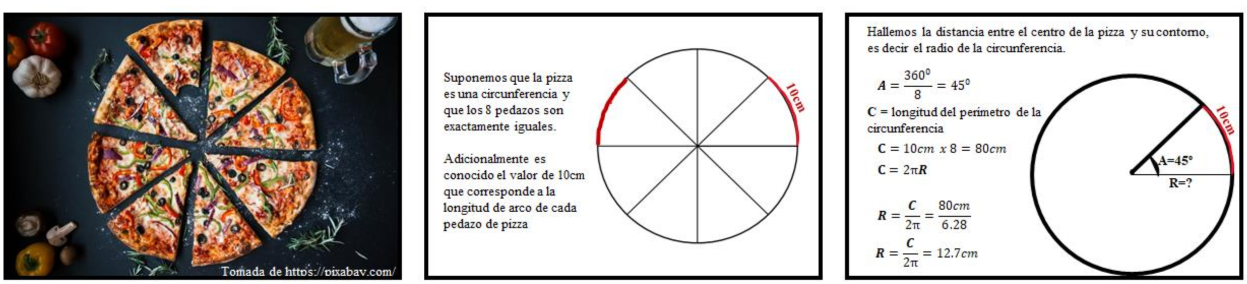


Figura 2. Radio de la pizza. Para hallar *R* estamos usando los supuestos como hipótesis, los valores dados y el conocimiento sobre las relaciones en la circunferencia.

Partiendo del desarrollo anterior, podemos establecer una analogía con el método llevado a cabo por Eratóstenes para hallar la longitud de la circunferencia y el radio terrestres.

Medida del radio de la Tierra.

Eratóstenes concluyó la esfericidad de la Tierra a partir de observaciones realizadas simultáneamente al medio día durante el solsticio de verano en dos ciudades diferentes de Egipto, Alejandría y Siena. Al comparar las observaciones se constató que en la ciudad de Alejandría un obelisco proyecta sombra, mientras que en la ciudad de Siena se observa ausencia de sombra. Eratóstenes interpretó esta discrepancia en el comportamiento de las sombras proyectadas por los obeliscos como una evidencia de la esfericidad de la Tierra. A partir de esa conclusión y conociendo la distancia entre las dos ciudades y el ángulo entre el obelisco y la sombra proyectada en Alejandría, pudo determinar la circunferencia terrestre y su radio, mediante un procedimiento análogo al que se indicó en el ejemplo de la pizza.

En la Figura 3 se esquematiza el desarrollo del razonamiento realizado para obtener el valor del radio de la Tierra.

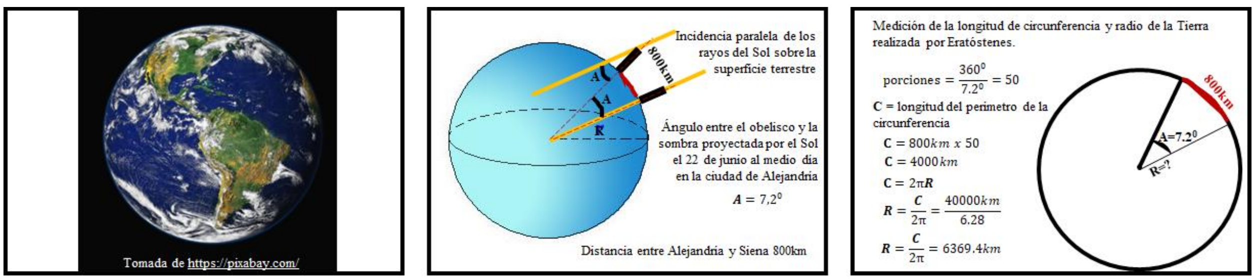


Figura 3. Radio de la Tierra. Eratóstenes usa como hipótesis para sus medidas la esfericidad de la Tierra y el paralelismo de los rayos del Sol incidiendo sobre la superficie terrestre, además se realizan las medias de ángulo de la sombra proyectada por el Obelisco en Alejandría y distancia entre las ciudades de Siena y Alejandría.

Es admirable que Eratóstenes, unos cientos de años antes de Cristo, lograra obtener estos valores. Las medidas modernas nos dan valores de 40 074 km y 6 378 km para la longitud de la circunferencia y el radio terrestres, respectivamente.

Medida del radio de la Tierra. La hipótesis

Examinemos con más detalle el proceso seguido por Eratóstenes.

Eratóstenes asumió que los rayos del Sol incidían de manera paralela sobre la superficie de la Tierra y recurrió a la idea de un Espacio Euclidiano para definir el paralelismo.

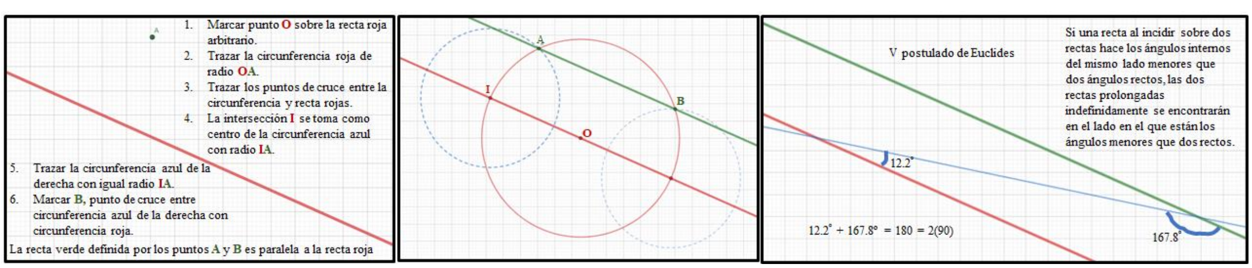


Figura 4. Rectas paralelas según geometría Euclidiana.

En el primer rectángulo de la Figura 4 se enuncian seis pasos para trazar una recta paralela a una recta dada. Dichos pasos se ilustran en el rectángulo del medio y finalmente se muestra cómo las dos rectas paralelas satisfacen el quinto postulado de Euclides. Dicho postulado tiene varias equivalencias entre ellas: "las rectas paralelas son equidistantes", "la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es dos ángulos rectos o 180º", "los ángulos alternos internos tienen igual medida" (Zenil, 2015). Justo esta última afirmación es usada en la Figura 3 al asignar igual medida a los ángulos indicados con la letra A.

Reflexionar sobre las hipótesis usadas en el proceso de medida nos puede llevar a explorar diversas posibilidades y plantearnos muchas preguntas, por ejemplo ¿qué pasaría si mi pizza estuviera sobre una superficie esférica? (Ver Figura 5).

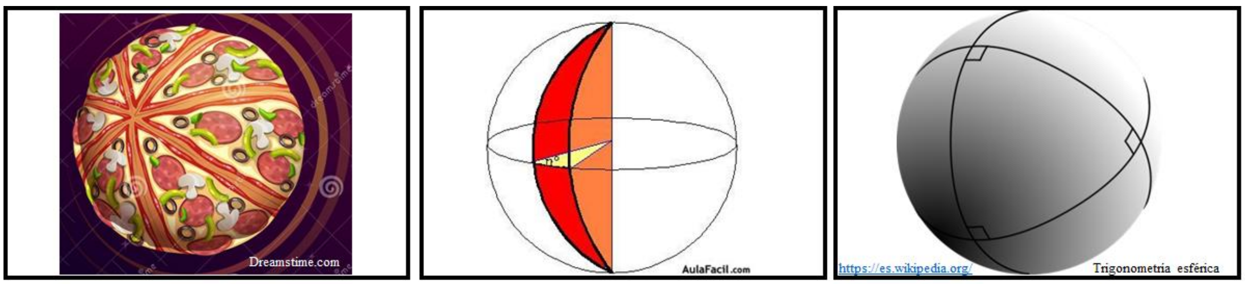


Figura 5. Pizza esférica. Sobre una superficie esférica el V postulado de Euclides no se cumple. Aquí "la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo **es mayor** a dos ángulos rectos o 180º".

Alrededor del V postulado de Euclides hay una historia fascinante y tuvieron que pasar más de veinte siglos para que, con los trabajos independientes de Bolyai, Lobachevsky y Gauss, se constatara la independencia de este postulado respecto a los otros cuatro postulados en los que basó Euclides su geometría. Con este descubrimiento se abrió la posibilidad para explorar la existencia de otras geometrías, donde el V postulado no se cumple. (Zenil, 2015).

La geometría Euclidiana está en la base de una inmensa variedad de desarrollos científicos y tecnológicos y es el cimiento de la mecánica de Newton. Es de resaltar que Euclides vivió antes de Cristo y que sólo hasta el siglo XX de nuestra era las geometrías no Euclidianas empezaron a ganar protagonismo en el mundo físico para ser usadas en las ciencias y tecnologías actuales.

Curvatura

Si comparamos las pizzas en las Figuras 2 y 5 observamos que en la Figura 2 las líneas son rectas y en la Figura 5 las líneas son curvas. La curvatura es esencial en el momento de caracterizar el tipo de geometría. En la Figura 6 podemos observar la idea general de la curvatura de una línea.

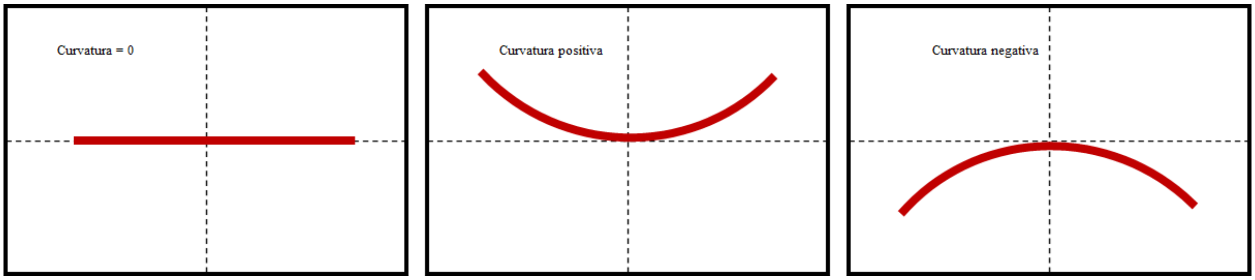


Figura 6. Curvatura de la línea.

También es posible medir la curvatura de una superficie. En general, las superficies son más complejas y pueden presentar localmente diferentes valores de curvatura, como el caso de la silla de montar que se muestra en la Figura 7. La curvatura total se obtiene al multiplicar los dos valores obtenidos. (Madrid, 2018).

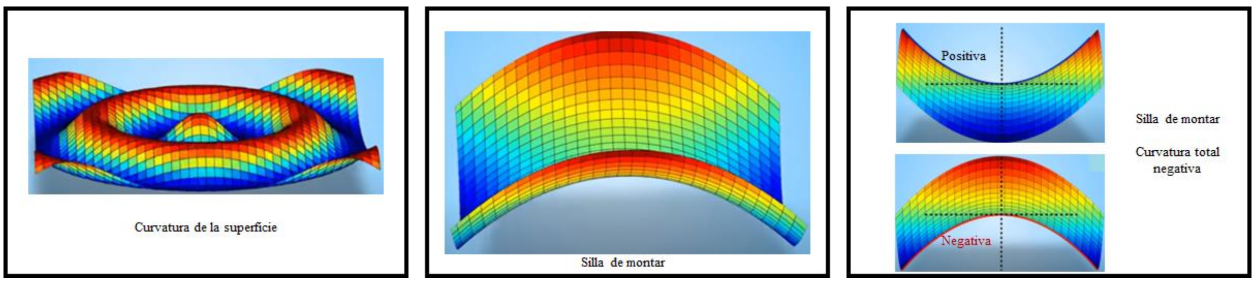


Figura 7. Curvatura de la superficie. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Una superficie cilíndrica también presenta dos curvaturas: una perspectiva desde la base nos permite observar un semiarco con curvatura negativa, pero al rotar la superficie y verla lateralmente, vemos una línea recta, la cual presenta curvatura cero. Por lo tanto, la curvatura total de la superficie cilíndrica es cero. De esta forma, el plano y la superficie cilíndrica tienen igual curvatura, curvatura cero, ver Figura 8.

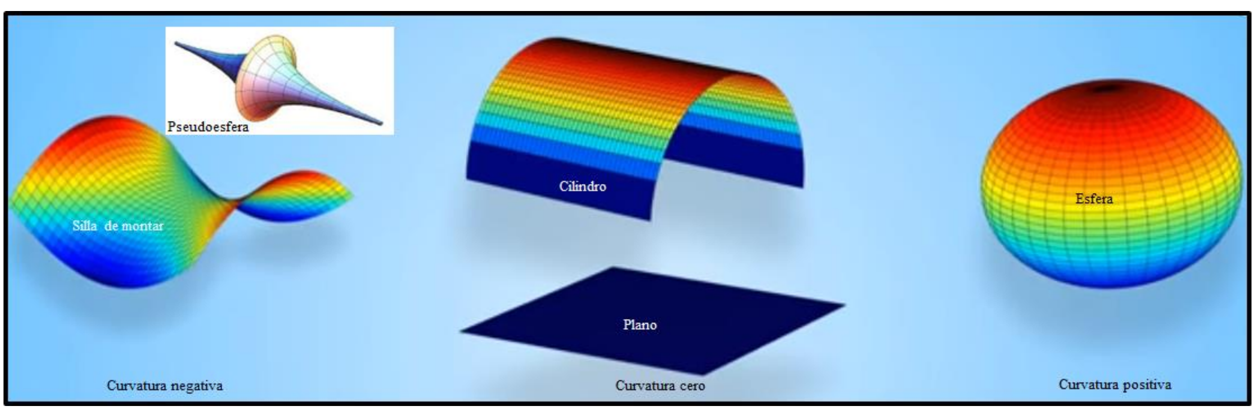


Figura 8. Curvatura negativa, positiva y nula. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Un resultado interesante del teorema Egregium de Gauss es que entre dos superficies con igual curvatura existe una isometría (es decir, al aplicar una transformación entre las dos superficies, la distancia entre puntos se conserva). En otras palabras, la isometría también puede verse como la invarianza en la curvatura al deformar la superficie sin estirarla. Por esto en cartografía, cuando se representa la Tierra en un plano, los mapas siempre lucen deformados, como se puede ver en la Figura 9. De hecho, la deformación en un mapa hace que una isla como Groenlandia parezca comparable en tamaño a Europa, cuando en realidad no es así. (Madrid, 2018).

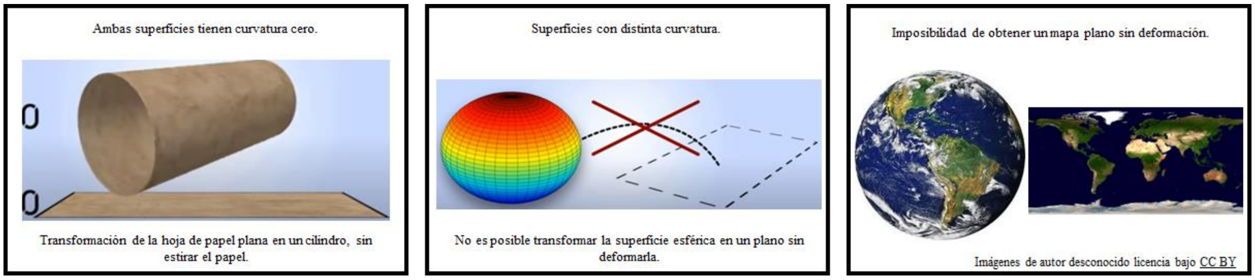


Figura 9. Curvatura de superficies y transformaciones. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Distancia

Podemos ver que, desde situaciones cotidianas, como la partición de una pizza, es posible adentrarnos en la generalización del concepto de distancia. Concluimos pues con una observación fundamental: la medida de la distancia entre dos puntos depende de la geometría del espacio en el cual ellos se sitúan.

Distancia. La Geodésica

Dependiendo de la curvatura de la superficie, el camino más corto entre dos puntos (denominado geodésica) puede tomar diversas formas, tal como se evidencia en la Figura 10.

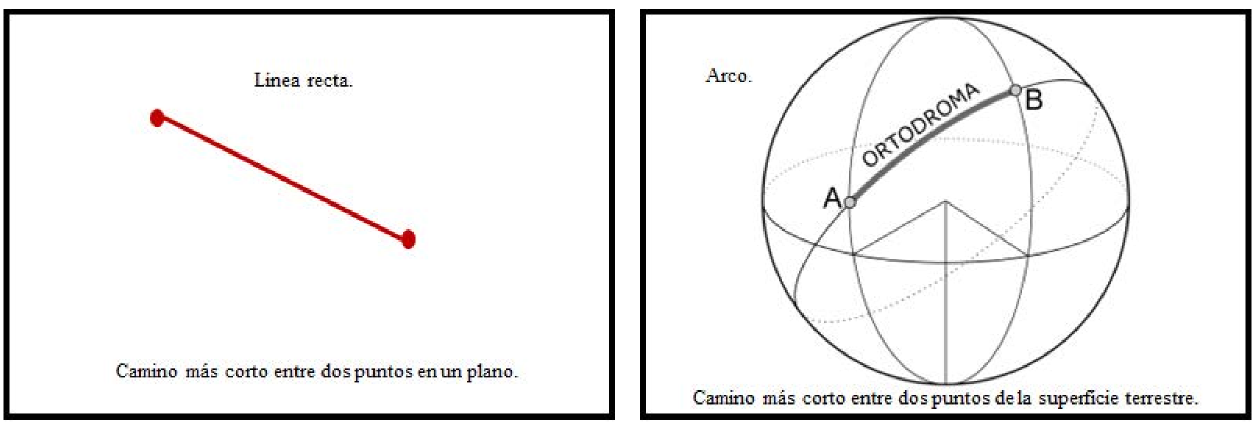


Figura 10. Geodésica. Figura de ortodroma, tomado de Wikipedia.

En lo anterior podemos observar cómo el hecho de explorar situaciones acerca de la medida de distancia sobre superficies no planas puede conducirnos a geometrías no euclidianas, las cuales no satisfacen el V postulado de Euclides. Además, hemos observado cómo en superficies con curvaturas diferentes de cero se hace necesario generalizar el concepto de distancia, como se observa en la Figura 10. La ortodrómica es precisamente la geodésica de la superficie terrestre. Por tanto, debemos enfatizar que la frase: “la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta” es válida sólo en el contexto de un plano, es decir, en la llamada geometría plana o de Euclides.

En la Figura 11 se observan de manera esquemática algunos puntos generales de cuatro geometrías. El primer cuadro corresponde a la geometría de Euclides, donde su V postulado es válido. Los otros tres cuadros representan geometrías donde el V postulado de Euclides no se cumple y por ello se consideran geometrías no euclidianas.

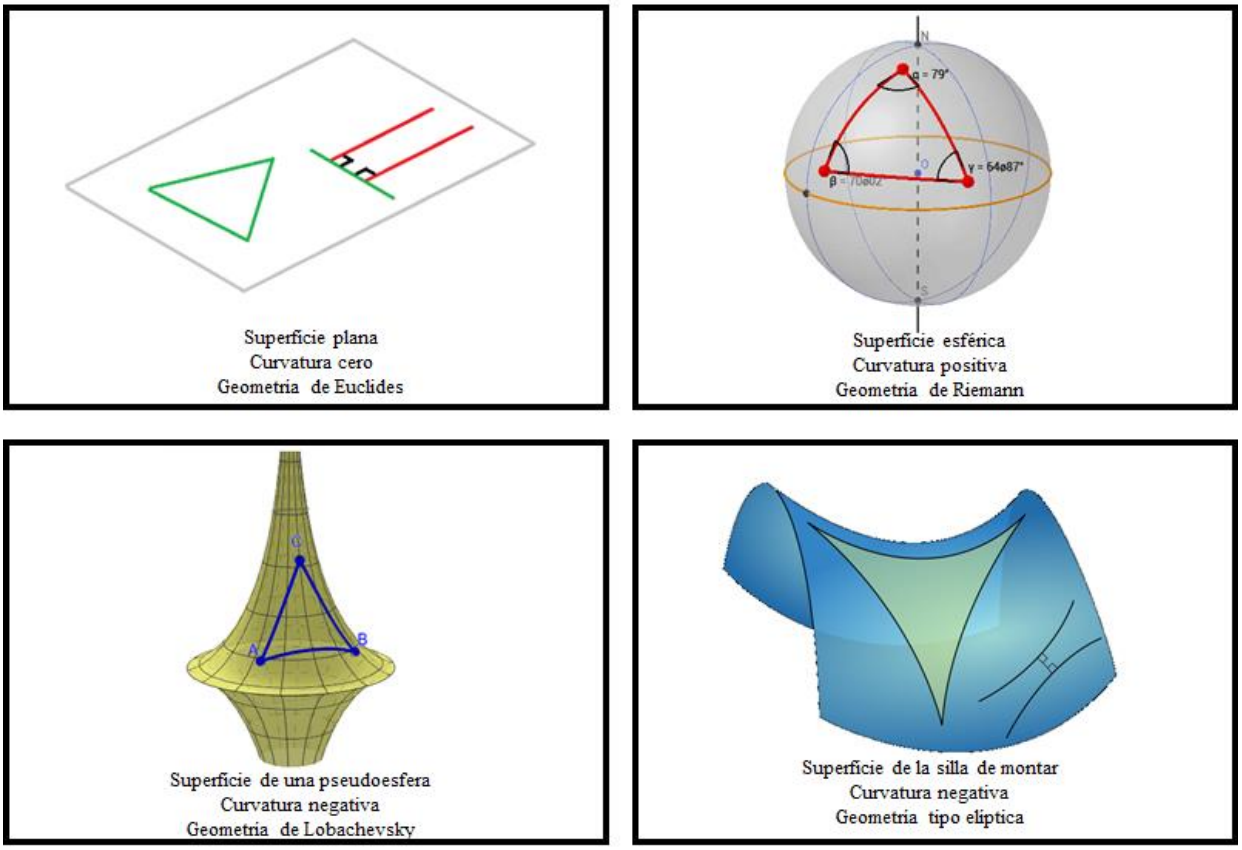


Figura 11. Tipos de geometrías.

El surgimiento de geometrías no euclidianas en el siglo XIX abrió el camino a gran variedad de nuevas áreas en la matemática. En el siglo XX, estas ideas matemáticas y geométricas permitieron a Einstein enunciar la teoría de la relatividad general, uno de cuyos resultados es la trayectoria curvilínea de la luz (deflexión) en presencia de un campo gravitacional (Figura 12), con lo que se evidencia la necesidad de introducir geometrías no euclidianas para la descripción adecuada de los fenómenos físicos relacionados con la interacción gravitacional.

En la Figura 3 vimos que Eratóstenes usó como hipótesis el paralelismo de los rayos solares incidiendo sobre la superficie terrestre. Dicho paralelismo está enunciado en el marco de la geometría Euclidiana. Sin embargo, en la actualidad el uso de geometrías no euclidianas es necesario cuando se pretende estudiar el Universo a gran escala, como lo han evidenciado las predicciones de la teoría de la relatividad general y la gran variedad de observaciones que corroboran la deflexión de la luz cerca de objetos masivos, por ejemplo, el Sol.

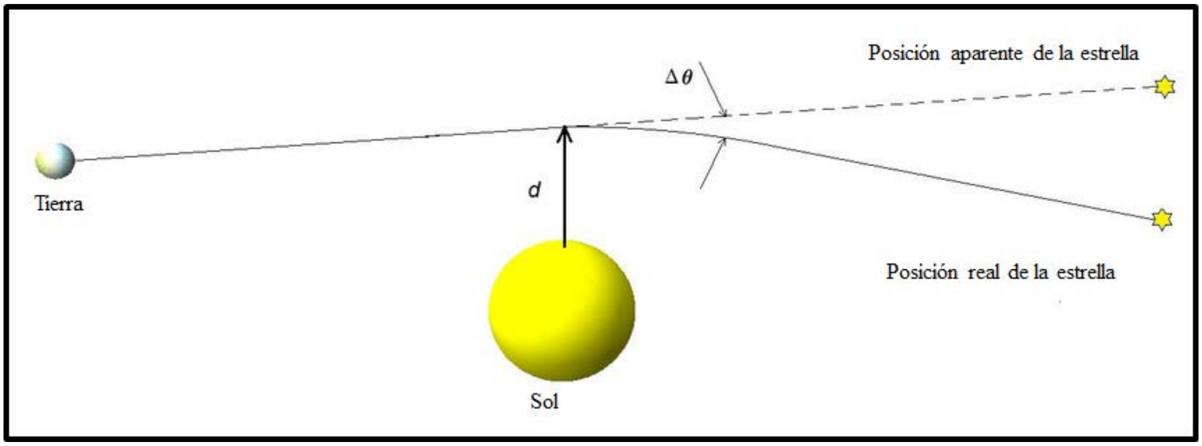


Figura 12. Deflexión de la luz al pasar cerca al Sol.

En el texto anterior presentamos las ideas a desarrollar en este minicurso, el cual se centra en el uso de objetos geométricos para resaltar la fuerte dependencia entre la medida de distancia y la geometría del espacio.

Referencias y bibliografía

Dawkins, R. (2000). *Destejiendo el arcoíris*. Tusquets editores.

Fischer, E. (2003). La otra cultura: lo que debería saber de las ciencias naturales. Galaxia Gutenberg.

Madrid, J. (2018). La manera más matemática de comerse una pizza. @lemnismath. https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Platón. (2020). Timeo. Traducción de Carola Tognetti. Greenbooks editore. Edición digital.

Zenil, H. (2015). Lo que cabe en el espacio: la geometría como pretexto para explorar nuestra realidad física y matemática. *Copit ArXives* UNAM. Edición digital.

.

Polígonos y evaluación de los aprendizajes

Marianela **Zumbado-Castro**
Cátedra Didáctica de las Matemáticas, Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica
mazumbado@uned.ac.cr
Ricardo **Poveda-Vásquez**
Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional
Costa Rica
ricardo.poveda.vasquez@una.cr

Resumen

Este minicurso abordará los elementos básicos de la evaluación de los aprendizajes en un escenario específico que surge de la resolución de problemas y los polígonos. La metodología de trabajo será tipo taller, con cuatro momentos. Primeramente, se realizará un abordaje teórico de: (1) la estrategia metodológica de resolución de problemas según la perspectiva del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012), (2) la evaluación de los aprendizajes en Educación Matemática, (3) estructura de ítems para el juzgamiento del aprendizaje, (4) estrategia para interpretar el nivel de desempeño estudiantil. El segundo momento consistirá en analizar en subgrupos diversos ítems sobre polígonos, caracterizar su estructura e interpretación del desempeño estudiantil. En el siguiente momento se propondrán situaciones contextualizadas sobre polígonos para la elaboración de ítems. Finalmente, en el cuarto momento se expondrá a nivel grupal cada ítem y algunos indicadores asociados con la valoración del desempeño estudiantil.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Evaluación sumativa; Investigación Educativa; Polígonos; Ministerio de Educación Pública; Costa Rica.

Marco conceptual

Estrategia metodológica de resolución de problemas

Según la perspectiva del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012) la resolución de problemas es su estrategia metodológica principal y ella está constituida por dos etapas. La primera etapa se denomina "El aprendizaje del conocimiento" y a su vez se subdivide en cuatro momentos: (1) planteamiento de un problema, (2) trabajo estudiantil independiente, (3) discusión interactiva y comunicativa y (4) cierre o clausura. La segunda etapa se denomina "Movilización y aplicación de los conocimientos".

Los recursos didácticos por excelencia para llevar a cabo la mediación pedagógica de la estrategia de resolución de problemas son los problema contextualizados o abstractos creados, seleccionados o adaptados.

Por el vínculo entre mediación pedagógica y evaluación de los aprendizajes, los ítems empleados para la prueba escrita deben ser problemas con una o varias tareas matemáticas (Zumbado-Castro, 2022).

Evaluación de los aprendizajes en Educación Matemática

Para efectos del minicurso, se asumirá la evaluación de los aprendizajes como sinónimos de "assessment of learning" donde se pretende juzgar el resultado de los aprendizajes, e implicará los siguientes requerimientos: una actividad o tarea, un sujeto evaluador, un instrumento apropiado para juzgar las acciones del estudiantado sobre la tarea, un reporte y una interpretación, que permita comunicar cuánto aprendió quien estudia (Harlen, 2016).

Se entenderá por actividad o tarea, específicamente, un problema contextualizado o abstracto de geometría con el tópico de polígonos con un nivel de complejidad predeterminado. Quien evalúa será aquel sujeto que posea las capacidades para juzgar los aprendizajes adquiridos por el estudiantado (Callejo, 1998; Gómez y Pinzón, 2018; Loría y Lupiáñez, 2019). Esta condición puede incluir a docentes de secundaria con formación base en enseñanza de las matemáticas, personal de la asesoría pedagógica del área, personal académico de las universidades vinculado con educación matemática en secundaria, entre otros. Para efectos del minicurso este requerimiento lo asumirán quienes participen del mismo.

Respecto al instrumento estará construido con los principios de validez y fiabilidad (Martínez et al., 2014) y en concordancia con los fundamentos de los programas de Matemáticas del MEP (2012). Su propósito será recolectar evidencias de los aprendizajes estudiantiles al resolver una tarea matemática, para realizar un juzgamiento que permita generar un reporte.

El reporte será entendido como la síntesis, generada en texto, de los resultados de la comparación con estándares establecidos respecto a cada tarea matemática seleccionada (Martinovic y Manizade, 2018; Vargas, 2013). Esta será analizada en términos de los parámetros admitidos para cada una de ellas y, finalmente, se generará lo que se ha denominado una interpretación respecto a la expectativa de aprendizaje (Alsina y Coronata, 2015; Loría y Lupiñez, 2019; MEP, 2012).

En la siguiente tabla se presenta la síntesis del modelo propuesto por Harlen (2016) para la evaluación de los aprendizajes, de manera que se visualicen sus requerimientos y una breve descripción de estos, excluyendo a quien evalúa.

Tabla 1
Modelo para la evaluación de los aprendizajes o "assesment of learning" (Harlen, 2016).

Requerimiento	Descripción
Tareas matemáticas	Un problema contextualizado o abstracto de geometría con el tópico de polígonos con un nivel de complejidad determinado.
Instrumento	Conjunto de ítems que conforman una prueba construida bajo los principios de validez y fiabilidad, concordante con la fundamentación teórica de los programas y la delimitación del contenido matemático.
Reporte	Síntesis generada en texto de los resultados de la comparación de estándares establecidos respecto a cada tarea matemática seleccionada e incluida en el instrumento.
Interpretación	Con base en el reporte, presentación de los resultados respecto a las expectativas de aprendizaje.

Nota: Elaboración propia.

Estructura de ítems o reactivos para el juzgamiento del aprendizaje

Con el fin de facilitar la comprensión de los diferentes elementos que conforman un ítem sobre polígonos regulares desde la perspectiva del minicurso, se muestra un ejemplo de un formulario de TEAMS de Microsoft, en la Figura 1.

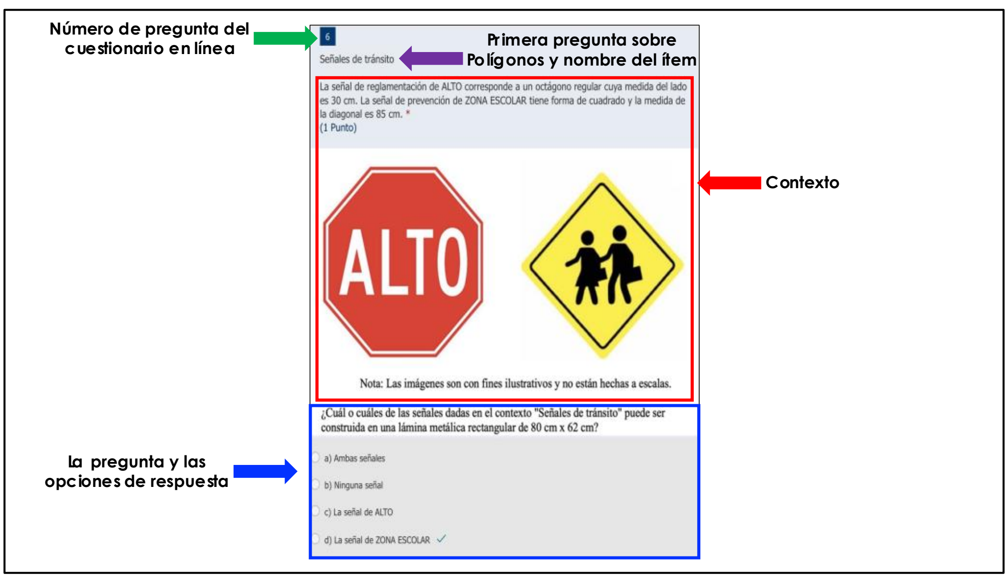


Figura 1. Ítem de polígonos "Señales de tránsito" y sus elementos (Zumbado-Castro,2022)

Primero se observa el número seis que indica la ubicación de la pregunta o ítem en el cuestionario. La frase "Señales de tránsito" ejemplifica el nombre de cada ítem. El recuadro en rojo que contiene un texto descriptivo y las imágenes se ha denominado contexto. En la parte inferior de la figura en recuadro color azul se ubica la pregunta por responder y las opciones.

Con respecto a los ítems que conforman una prueba, cada ítem está constituido por dos partes: (1) el texto que contiene la situación problema, que se denomina "contexto" y que da nombre al ítem; (2) la pregunta y las opciones de respuesta.

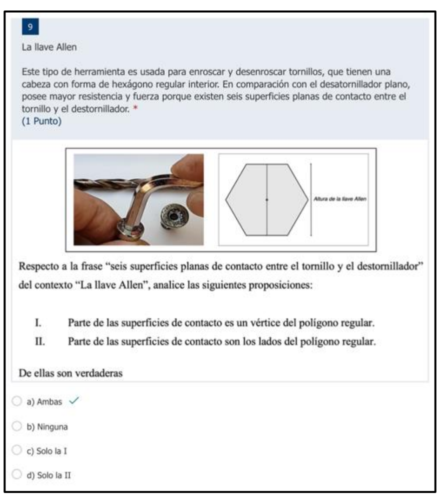
Estrategia para interpretar el nivel de desempeño estudiantil

En este minicurso para lograr una interpretación del desempeño estudiantil se emplea la estrategia 4+6 (Ruiz, 2018) que permite establecer, mediante *cuatro* pasos y *seis* elementos, el nivel de complejidad de las tareas matemáticas. Cada pregunta es desarrollada siguiendo estos *pasos*: (1) enunciar, (2) resolver, (3) identificar y (4) valorar. A su vez, el paso 3 implica la identificación de cuatro *elementos*: conocimientos y áreas; contextos; habilidades generales; y habilidades específicas, según el ente ministerial. El paso 4 implica la valoración de dos *elementos* más: grados de los procesos (EIPP) y nivel de complejidad.

Los pasos 2 y 4 de la estrategia 4+6 (Ruiz, 2018) permiten el análisis de la resolución de cada ítem y la identificación los indicadores de la EIPP. Además, se debe redactar una valoración que evidencie el vínculo con cada indicador.

Un ejemplo de la aplicación parcial de la estrategia se muestra en la Figura 2, porque se muestra una posible solución del estudiantado.

Paso 1. Enunciar



Paso 2. Resolver

Se espera que el estudiantado logre visualizar si las proposiciones describen apropiadamente la situación descrita.

I. Parte de las superficies de contacto es un vértice del polígono.

De acuerdo con el contexto, la llave Allen se ajusta a la cabeza hexagonal interior de un tornillo, por tanto, entre los elementos de la llave que entran siempre en contacto con el interior del tornillo son: los vértices, los lados y la superficie.

Por tanto, la proposición en verdadera.

II. Parte de las superficies de contacto son los lados del polígono regular.

Cada lado de la llave Allen entra en contacto con la cabeza hexagonal del tornillo y son los lados del polígono, entonces la segunda proposición es **verdadera**.

Por tanto, las dos proposiciones son verdaderas y la respuesta es "Ambas".

Figura 2. Ítem de polígonos "La llave Allen" y sus elementos (Zumbado-Castro,2022)

Con la información de la Figura 2. se procede con el paso 4. Valorar, en función de los cinco procesos matemáticos establecidos para el MEP (2012) como se muestra en la Figura 3.

Paso 4. Valorar

1. Intervención de los procesos en el problema

Razonar y argumentar

Se debe responder mediante un razonamiento directo, de hecho, corresponde a una interpretación de la información en un contexto real donde se involucra al vértice, el lado y el perímetro (H.15) con la llave Allen, por tanto, la acción involucrada implica el indicador RA1.4.

Plantear y resolver problemas

Para la resolución del problema solo se deben usar los datos del enunciado que están de manera explícita, debido a que se debe relacionar la descripción del enunciado sobre las superficies de contacto y los elementos del polígono. La acción anterior implica la presencia del indicador PRP1.1.

Conectar

El estudiantado identifica la relación entre los conceptos (vértice y lado) y las características de una llave Allen y un tornillo de cabeza hexagonal. Por tanto, está presente el indicador C1.1.

Comunicar

El estudiantado, para manifestar la respuesta, debe interpretar una secuencia de razonamientos considerados en cada proposición, que implican determinar la relación entre la llave Allen, el vértice y el lado, por tanto, se hace presente el indicador COM2.2.

Representar

Durante el proceso de resolución, el estudiantado emplea únicamente la representación literal que debe ser interpretada, "seis superficies de contacto" en la relación con la llave Allen, no se requiere de otra representación. La acción anterior implica que el indicador R1.2 está presente.

2. Nivel de complejidad

Al resumir los indicadores de la siguiente manera: RA1.4, PRP1.1, C1.1, COM2.2 y R1.2, cuatro de los procesos se encuentran en el grado 1. Entonces, se emplea el criterio simplificado para valorar el nivel de complejidad, denominado NCS1, porque existen, al menos, tres indicadores de grado 1, esto implica que el problema posee el nivel de complejidad denominado *Reproducción*.

Figura 3. Paso 4 de la estrategia 4+6 (Ruiz, 2018) al ítem "La llave Allen"

En la Figura 3 se muestran las justificaciones o valoraciones que respaldan la selección de cada indicador por proceso matemático en relación directa con el proceso resolutorio del ítem. En la Figura 4, en el proceso *conectar* se puntualiza cuáles elementos de la solución se vinculan con el indicador y cuál es la valoración.

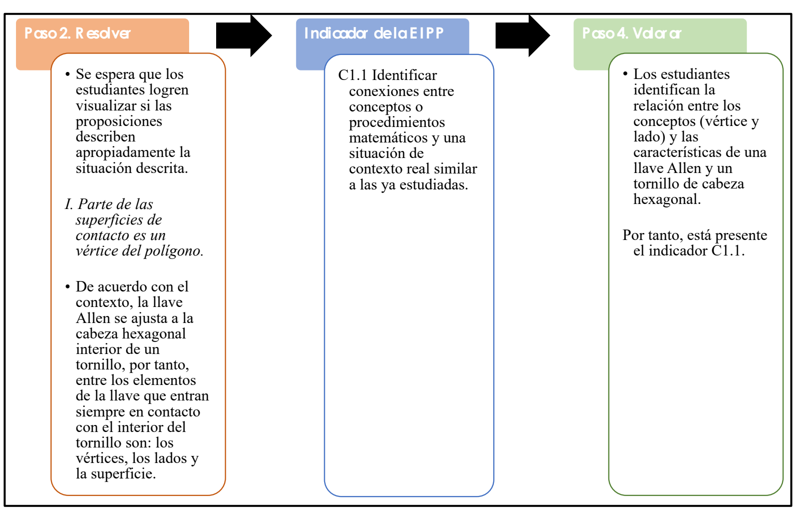


Figura 4. Descripción de pasos en la estrategia 4+6, proceso comunicar, ítem "La llave Allen".

En la Figura 4 con el título “Paso 4. Valorar” se presenta de manera específica cómo el indicador C1.1 se expresa en función del ítem. La información del indicador pasa de ser general a ser particular y asociada con la resolución del ítem.

Por tanto, si en cada ítem de una prueba se dispone de la valoración de cada indicador y todas las valoraciones de un indicar fueran colocadas en un Excel; será posible mediante el análisis del discurso determinar patrones y escribir una síntesis o interpretación de las acciones estudiantiles según cada indicador presenta en una prueba.

Por ejemplo, respecto al proceso matemático comunicar, se parte de la interpretación, que corresponde a la máxima expectativa y de aquí se crea una escala decreciente que agrupa las proporciones de cada indicador, en una prueba, en un máximo de tres niveles de logro: esperado, intermedio e inicial. La interpretación del indicador COM 2.2 se visualiza en la Tabla 2.

Tabla 2
Interpretación del indicador COM2.2 agrupado por nivel de logro

Proporción	**Agrupamiento**	**7/7, 6/7, 5/7**	**4/7, 3/7, 2/7**	**1/7 y 0/7**
7/7	**Niveles**	**Esperado**	**Intermedio**	**Inicial**
Indicador COM2.2	La persona estudiante interpreta ***7 veces*** la secuencia de razonamientos para validar proposiciones que se asociaban con los polígonos regulares (radio, vértice, apotema, lado, cálculo y comparación de área y perímetro).	La persona estudiante interpreta entre ***7 y 5 veces*** la secuencia de razonamientos para validar proposiciones que se asociaban con los polígonos regulares (radio, vértice, apotema, lado, calculo y comparación de área y perímetro).	La persona estudiante interpreta entre ***4 y 2 veces*** la secuencia de razonamientos para validar proposiciones que se asociaban con los polígonos regulares (radio, vértice, apotema, lado, calculo y comparación de área y perímetro).	La persona estudiante interpreta entre ***1 y 0 veces*** la secuencia de razonamientos para validar proposiciones que se asociaban con los polígonos regulares (radio, vértice, apotema, lado, calculo y comparación de área y perímetro).
	Máxima expectativa	**Escala decreciente**		

Nota: Elaboración propia.

En la Tabla 2 se observan dos aspectos importantes. El primero, en la columna dos se encuentra la síntesis o interpretación del indicador e incluye todas las valoraciones de los ítems donde este se hace presente. El segundo, los posibles ocho valores que cada estudiante puede obtener en la prueba; para este indicador se han agrupado los valores de tres en tres en los niveles de logro definidos a excepción del último que contiene dos valores de manera que la persona estudiante es ubicada en un rango y no en un punto dentro de la escala, lo que es más cercano a la realidad. Según Harlen (2016), estos procesos de juzgamientos del aprendizaje no son exactos, por tanto, una aproximación a los estándares es lo más justo.

La interpretación del valor numérico asignado como puntuación (nota en la prueba) es el desglose por indicador en términos de la proporción alcanzada en la escala decreciente por nivel de logro elaborada para cada indicador, según la síntesis o la interpretación. Cada puntuación, al estar desglosada por una proporción personalizada, se asociará con una interpretación específica e individual. Por ejemplo, en la Tabla 3 se muestra la interpretación de un estudiante que aplicó un cuestionario con 12 preguntas sobre polígonos y obtuvo una nota de 66,66 de 100.

Tabla 3

Interpretación de una nota de 66,66 con base en los 16 indicadores de la EIPP que contenía la prueba sobre polígonos regulares

La persona estudiante:
RA1.1 y RA1.3 Siempre identifica el radio y la apotema de manera directa y explícita en un polígono regular cuando se calcula el perímetro.
RA1.4 Siempre realiza razonamiento directo sobre información proveniente de un contexto real que involucra: vértice, lado y perímetro de un polígono regular.
RA2.1 y RA2.2 Determina entre 6 y 4 veces en los diferentes enunciados (contextos reales y abstractos) datos implícitos como: ángulo central, ángulo interno, apotema, radio, vértice y lado del polígono regular para responder de manera directa a preguntas sobre el cálculo y comparación del área o perímetro.
PRP1.1 Siempre usa los datos explícitos sobre elementos de los polígonos regulares (radio, apotema, vértice y lado) presentes en los enunciados para la resolución de problema.
PRP 1.2 Siempre emplea fórmulas y procedimientos sencillos (despejar una ecuación, aplicar el teorema de Pitágoras, alguna razón trigonométrica) para la resolución del problema sobre áreas y perímetros de polígonos regulares.
PRP2.1 Determina entre 5 y 3 veces una estrategia de solución que involucra diversos elementos del polígono regular (lado, radio, diagonal que pasa por el centro, apotema) para calcular y comparar longitudes y áreas.
C1.1 Siempre identifica la relación entre un objeto real y dos elementos de un polígono regular: vértice y lado.
C1.2 Siempre relaciona conceptos de geometría entre sí: área, perímetro, lado, apotema y razones trigonométricas.
C2.1 Usa entre 6 y 4 veces la relación de diversos elementos del polígono regular (radio, apotema, lado, área, perímetro, vértice, ángulo central) en situaciones contextualizadas.
COM 1.4 Comunica sus ideas entre 3 y 2 veces al discriminar entre las opciones la respuesta correcta en problemas de área y perímetro de polígonos regulares.
COM 2.2 Interpreta entre 5 y 4 veces la secuencia de razonamientos para validar proposiciones que se asociaban con los polígonos regulares (radio, vértice, apotema, lado, cálculo y comparación de área y perímetro).
R1.1 Siempre identifica en las representaciones dadas en los enunciados la información explícita para la resolución de problemas de área y perímetro de polígonos regulares.
R1.2 Usa entre 4 y 3 veces una representación (lenguaje natural -literal o lenguaje algebraico) de los objetos matemáticas asociados con los polígonos regulares.
R2.4 Usa entre 5 y 3 veces dos representaciones o más (lenguaje natural y lenguaje algebraico) de los objetos matemáticas asociados con los polígonos regulares.

Cabe destacar que las ideas abordadas en el minicurso son tan poderosas, que el reporte para cada estudiante es personalizado y que una misma calificación implica diferentes indicadores, por tanto, diferentes niveles de desempeño. En la siguiente Figura 4. se observa en la última columna con el indicador RA1.1 y RA1.3 como tres estudiantes el ID 1, ID 5 y ID 180 con la misma nota presentan un nivel de logro diferente.

Informe por estudiante				
ID	Puntuación	Nota	RA1.1 y RA1.3	RA1.4
1	8,00	66,67	La persona estudiante siempre identifica el radio y la apotema de manera directa y explícita en un polígono regular cuando se calcula el perímetro.	La persona estudiante siempre realiza razonamiento directo sobre información proveniente de un contexto real que involucra: vértice, lado y perímetro de un polígono regular.
5	8,00	66,67	La persona estudiante identifica 1 de 2 veces el radio o la apotema de manera directa y explícita en un polígono regular cuando calcula el perímetro.	La persona estudiante NO realiza un razonamiento directo sobre información proveniente de un contexto real que involucra: vértice, lado y perímetro de un polígono regular.
180	8,00	66,67	La persona estudiante NO identifica ni el radio, ni la apotema de manera directa y explícita en un polígono regular cuando calcula el perímetro.	La persona estudiante siempre realiza razonamiento directo sobre información proveniente de un contexto real que involucra: vértice, lado y perímetro de un polígono regular.

Figura 5. Estudiantes con la misma nota y diferentes niveles de desempeño por indicador.

Esta interpretación del reporte coincide con la propuesta de Harlen (2016), debido a que ofrece información individualizada, lo cual facilita el monitoreo por sujeto en términos de estándares. Ellos han sido establecidos en rangos por niveles de logro y esto puede favorecer la toma de decisiones. Además, la estrategia de emplear tres niveles o rangos es frecuente cuando se emplean instrumentos de evaluación (Yang y Li, 2018; DGEC, 2010, 2020).

Metodología del minicurso

A continuación, se presenta la propuesta para desarrollar el minicurso, la metodología de trabajo será tipo taller, con cuatro momentos como se muestra en la Tabla 4.

Prospectivas sobre el minicurso

La persona participante conocerá el modelo 4+6 de Ruiz (2018), una poderosa herramienta para el análisis del nivel de complejidad de una tarea matemática que ha sido empleada para la evaluación de los aprendizajes mediante la construcción de niveles de desempeño utilizando los indicadores que propone Ruiz en su modelo.

Tabla 4
Tiempo propuesto y descripción de cada actividad.

Tiempo	Actividad
I Momento	
40 min	Exposición magistral: 1) Resolución de problemas 2) Evaluación en educación matemática 3) Ítems contextualizados y formato 4) EIPP (Modelo de 30 indicadores)
II Momento	
20 min	Trabajo en subgrupo 5) Análisis de un ítem y su EIPP 6) Discusión y cierre
III Momento	
35 min	7) Aplicar los indicadores de la EIPP a un ítem
IV Momento	
20 min	8) Exposición 5 subgrupo por 5 minutos, un proceso (RA; PRP; COM; R; C) por cada equipo de trabajo.
5 min	Síntesis y despedida

La persona participante experimentará el análisis de una tarea matemática mediante parte de la estrategia 4+6 para posteriormente aplicarla y de manera conjunta construir posibles niveles de desempeño estudiantil con base en la experiencia.

El alcance de este minicurso es la introducción a la propuesta de Zumbado-Castro (2022) de su tesis doctoral denominada "*La evaluación de los aprendizajes en geometría del estudiantado de décimo año, a partir del modelo estructura de intervención de procesos en un problema*", por tanto, las actividades no pretenden ser exhaustivas.

Referencias y bibliografía

Alsina, A. y Coronata, C. (2015). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 23-36.

Callejos, M. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.

Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. [DGEC]. (2010). *Primer informe sobre los resultados de la prueba para docentes de Matemáticas*. San José: Ministerio de Educación Pública. Recuperado de http://www.dgec.mep.go.cr/sites/all/files/dgec_mep_go_cr/documentos/i_informe_prueba_mate_prof_definitivo_1.pdf

Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. [DGEC]. (2020). *Informe Nacional. Bachillerato, 2019.* San José: Ministerio de Educación Pública. Recuperado de https://dgec.mep.go.cr/sites/all/files/dgec_mep_go_cr/documentos/bachillerato_2019_-_informe_2019.pdf

Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Diseño de un instrumento para evaluar un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria y media. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(2), 55-57. Recuperado de http://www.ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/325/334

Harlen, W. (2016). Assessment and the curriculum. En D.Wyse, L. Hayward and J. Pandya (Eds.), *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment Volume 2* (pp. 693-709). Londres, Reino Unido: SAGE.

Loría, J. y Lupiáñez, J. (2019). Estudio del conocimiento de profesores de secundaria sobre procesos matemáticos. *PNA, 13*(4), 247–269. https://doi-org.cidreb.uned.ac.cr/10.30827/pna.v13i4.8892

Martínez, M., Hernández, M.V. y Hernández M.J. (2014). *Psicometría*. Madrid: Alianza Editorial.

Martinovic, D. y Manizade, A. (2018). The challenges in the assessment of knowledge for teaching geometry. *ZDM Mathematics Education,* 50(4), 613-629. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0934-4

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* San José: autor.

Ruiz, A. (2018). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Ciudad de México: CIAEM. Recuperado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf

Vargas, G. (2013). *El desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos y su nivel de logro en el aprendizaje de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica.

Yang, K. y Li, J. (2018). A Framework for Assessing Reading Comprehension of Geometric Construction Texts. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(1), 109-124. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9770-6

Zumbado-Castro, M. (2022). *Evaluación de los aprendizajes en geometría del estudiantado de décimo año, a partir del modelo estructura de intervención de procesos en un problema* [Tesis doctoral]. Universidad Estatal a Distancia. https://aleph23.uned.ac.cr/exlibris/aleph/a23_1/apache_media/B9PUK84TYDUNRDHBTGSQJ9KTDN7ECV.pdf

Problematización matemática de situaciones reales

Emma **Carreño** Peña
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Piura
Perú
emma.carreno@udep.edu.pe
Flor **Hau Yon** Palomino
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Piura
Perú
flor.hauyon@udep.edu.pe

Resumen

La demanda de la matemática como herramienta para comprender la realidad requiere desarrollar una actitud problematizadora que permita cuestionar hechos, datos y situaciones sociales con la finalidad de interpretarlas, explicarlas y en algunos casos, proponer alternativas de solución. Temas como la elección de autoridades o el acceso a bonos, por ejemplo, sirven de contexto para desarrollar diversos temas matemáticos desde un enfoque multidisciplinar, transitar por procesos de complejización o simplificación de problemas contextualizados, según los niveles educativos de referencia y contribuir con ello al logro de aprendizajes fundamentales. En este minicurso proponemos la creación de problemas matemáticos a partir de una publicación real en distintos medios de comunicación (portal de noticias, redes sociales, publicidad en las calles) para desarrollar conocimientos matemáticos que contribuyan al ejercicio de la ciudadanía en un contexto de democracia participativa. En dicho proceso de creación analizaremos el conocimiento especializado requerido por el profesor de matemáticas.

Palabras clave: Matemática para la Ciudadanía; Problemas Matemáticos Contextualizados; Matematización de Situaciones; Modelación Matemática; Creación de Problemas; Conocimiento Especializado del Profesor.

Introducción

El Proyecto Educativo Nacional al 2036 en Perú tiene entre sus propósitos: vida ciudadana e inclusión y equidad (Consejo Nacional de Educación, 2020), lo cual requiere una Educación para el ejercicio de la ciudadanía, entendiendo esta "como un proceso en construcción permanente de derechos y responsabilidades personales puestas en ejercicio en proyectos de bien común" (Gimeno y Henríquez, 2001, p. 24). Según Callejo (2000), la formación de ciudadanos implica 3 aspectos; 1) desarrollar una actitud problematizadora para cuestionar los hechos, los datos y las situaciones sociales, así como sus interpretaciones y explicaciones; 2) entender y asumir al individuo como sujeto autónomo y social que ha de formarse con conciencia crítica, y 3) dominar los distintos lenguajes y símbolos en los que circula la información en la sociedad, entre ellos el lenguaje matemático. Considerando lo anterior, en este minicurso queremos abordar la potencialidad de la variada información que se publica en distintos medios de comunicación social, para crear y estudiar problemas que promuevan el análisis crítico desde un rol de ciudadano propositivo.

Desde hace varias décadas se ha cuestionado la enseñanza de una matemática realista y contextualizada que aporte a la construcción de una sociedad democrática, lo cual requiere una alfabetización matemática que permita desarrollar procesos complejos de matematización de situaciones y de resolución de problemas (Callejo, 2000). Abordar dicha necesidad, conlleva a poner atención a dos aspectos: 1) la actualización de los roles del docente y del estudiante y 2) la implementación de un modelo educativo que permita organizar y desarrollar un currículo temático y no disciplinar. Esto último supone "por un lado, delimitar un conjunto de temáticas o situaciones problemáticas relevantes para tratarlas en un contexto interdisciplinar donde la matemática es una herramienta (…), por otro lado, identificar qué otros aspectos básicos de esta ciencia quedan fuera de estas temáticas" (Callejo, 2000, p. 6). Dado que concretar lo anterior requiere un nuevo modelo educativo, que contemple interdisciplinariedad y concebir al estudiante como ciudadano propositivo en formación, se hace necesario promover estrategias que incluyan: actividades que impulsen el debate reflexivo, sereno y argumentado, el desarrollo del pensamiento lógico, el trabajo y aprendizaje cooperativo en un clima democrático y la asunción de responsabilidad y compromiso social (Gimeno y Hernández, 2001).

Respecto del rol docente, el profesor (no solo de matemática) debe transitar de un modelo transmisivo a uno de aprendizaje basado en la indagación. Esto supone, tomar como punto de partida los conocimientos previos de los estudiantes, formularles preguntas desafiantes, gestionar discusiones en pequeños y gran grupo, emplear los errores como oportunidades de aprendizaje y ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre sus ideas (Maass et al., 2019). Integrado a la dimensión didáctica anterior, se precisa que el profesor posea un conocimiento profundo de la materia que enseña, de tal forma que pueda establecer conexiones interconceptuales, curriculares e interdisciplinares que le permitan promover en sus estudiantes la problematización matemática de situaciones reales, mediante la modelización matemática, pues involucra decisiones con implicaciones éticas, morales, sociales o culturales.

Educación matemática para el ejercicio de la ciudadanía

Uno de los desafíos educativos emergidos en Latinoamérica a raíz de la pandemia generada por el coronavirus, es la Educación Matemática vinculada con la civilidad. Esta es la virtud cívica referida a la participación de los ciudadanos en la vida pública y democrática (Castro et al., 2020). Dicha participación requiere el conocimiento de materias de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM) pues es fundamental para ser un ciudadano activamente comprometido y responsable y para tomar conciencia de los complejos desafíos que enfrenta nuestra sociedad (Maass et al., 2019). Así pues, promover la matemática para el ejercicio de una ciudadanía democrática supone ver esta ciencia como instrumento de conocimiento y como herramienta al servicio de una problemática concreta. La matemática como instrumento de conocimiento implica estar al servicio de una problemática concreta e integrarse con otras ciencias. Además, posee un carácter formativo pues permite "fomentar valores como el espíritu crítico, la capacidad de iniciativa y de decisión, la propositividad, el seguimiento y control de los proyectos sociales, o por el contrario, se puede manipular o engañar (Callejo, 2000, p. 8).

Considerando las perspectivas anteriores de la matemática y su carácter formativo, el desarrollo de la clase de matemática para el ejercicio de la ciudadanía involucra cuatro características: "un currículo basado en la resolución de problemas, una cultura de la inclusión y los derechos, una participación igualitaria en la toma de decisiones y la generación de oportunidades y estímulos para que todos aprendan las matemáticas de forma exitosa" (Vanegas y Prat, 2022, p. 6). Si bien el rol de la matemática en la formación de ciudadanos se puede abordar desde distintas perspectivas (p.ej. perspectiva cultural Etnomatemática, pedagogía crítica), las autoras citadas señalan que promover la competencia ciudadana a través de las matemáticas implica cuatro ejes (Figura 1).

Figura 1. Ejes en la promoción de la competencia ciudadana a través de las matemáticas (Vanegas y Prat, 2022, p. 7)

Los ejes anteriores son un referente para el diseño de tareas, pues al usar ejemplos de situaciones estadísticas presentadas en noticieros u otros medios informativos, se promueve competencias relacionadas con la convivencia, identidad, solidaridad y cohesión social. Esto, puede requerir, además del conocimiento matemática, el conocimiento de los derechos civiles, de la constitución del país de referencia y la actuación del gobierno en ejercicio (Vanegas y Giménez, 2012).

Conocimiento especializado del profesor para la creación de problemas

Si bien resolver problemas es un elemento estructural de la Educación Matemática, la creación de problemas, por parte de docentes y estudiantes, también debe promoverse pues estimula la creatividad y permite el desarrollo de la competencia matemática. Según Malaspina (2017), los problemas deben contener cuatro elementos: información (datos dados en el problema), requerimiento (lo que se pide en el problema), contexto (intra matemático o extra matemático) y entorno matemático (conocimiento matemático requerido o empleado para resolver el problema). En coherencia con la Educación Matemática para la ciudadanía, interesa crear problemas por elaboración libre, de contexto extra matemático puesto que:

> La realidad es rica en situaciones que permiten crear problemas, lo cual conlleva el identificarlos y el saber plantearse preguntas, que son capacidades fundamentales a desarrollar en nuestros alumnos. Crear problemas de matemática a partir de situaciones reales, contribuirá a tener una mirada más analítica de la realidad, que será útil no solo en el campo de las matemáticas. (Malaspina, 2017, p. 3)

La creación de problemas por parte de los docentes demanda un conocimiento especializado compuesto por una dimensión matemática y otra didáctica. Si bien hay distintos modelos para estudiar el conocimiento del profesor, en este trabajo empleamos el Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) ideado por Carrillo y colaboradores en la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2018). En el MTSK, el dominio de conocimiento matemático está compuesto por tres subdominios: el *conocimiento de los temas*, referido a la comprensión profunda de los conceptos, procedimientos, representaciones y aplicaciones de los tópicos; *el conocimiento de la práctica matemática* que comprende las formas de proceder y producir en matemáticas (p.ej. demostraciones, características de una definición) y el *conocimiento de la estructura de las matemáticas* que incluye las conexiones interconceptuales para simplificar o complejizar el desarrollo de un concepto, así como las conexiones auxiliares. Por su parte, el dominio de conocimiento didáctico del contenido se estructura con tres subdominios: el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* referido a los saberes que tiene el profesor sobre las teorías personales o institucionales de enseñanza de la matemática, los recursos didácticos físicos y digitales, así como las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos condicionados por el contenido matemático; el *conocimiento de las características del aprendizaje matemático* en el que se incluye el conocimiento sobre las teorías de aprendizaje matemático, las dificultades y fortalezas en el aprendizaje de las matemática, las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas; y finalmente, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas que incluye los resultados de aprendizaje (lo que el profesor debe enseñar), estudiante debe aprender), el nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y la secuenciación de los temas en un mismo grado o año de estudio o en la transición de estos.

El modelo MTSK y los aspectos teóricos tratados en torno a la Educación Matemática para el ejercicio de la ciudadanía son la base para trabajar sobre las situaciones que proponemos en el siguiente apartado.

Situaciones para desarrollar una actitud problematizadora

Situación 1: la veracidad de un post de Facebook

El 6 de junio de 2021 se realizó la segunda vuelta de las elecciones presidenciales en Perú. Esta elección tuvo como candidatos a Keiko Fujimori y a Pedro Castillo. Luego del flash electoral que anunció un empate técnico, las redes sociales estallaron en publicaciones y una de ellas fue la siguiente:

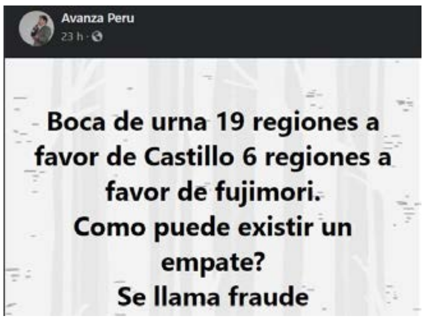


Figura 2. Publicación de una página de Facebook

Esta situación, de contexto político, requiere ser analizada dejando de lado la simpatía por cualquiera de los candidatos involucrados y teniendo a la matemática como herramienta. Luego de esta petición, cuestiónese lo siguiente:

1. La información del post mostrado en la Figura 1, ¿es correcta? ¿por qué?
2. ¿Qué elementos o recursos tiene a disposición para "convencer" a otro de lo que ha señalado en la respuesta dada en (1)?
3. ¿Qué conocimientos se ponen en juego o se adquieren al resolver las preguntas planteadas en (1) y (2)?
4. ¿Qué problema o situación podría crear para promover aprendizajes matemáticos para el ejercicio de la ciudadanía democrática? Indique para qué grado o nivel sería el problema.
5. ¿Qué conocimientos, además de los matemáticos, se puede promover con el problema que ha planteado en (4)? De ser posible, indique el área curricular, las competencias, capacidades y desempeños involucrados.

Situación 2: Problemas para un álbum matemático

Con el propósito de hacer visible la matemática en el entorno y la cotidianidad, se pidió a futuros profesores de la asignatura Aritmética y su didáctica que elaboraran un álbum que contuviera 8 publicaciones (de periódico, publicidad, redes sociales, etc.) que involucraran matemática y que crearan 4 problemas a partir de las mismas. A continuación, se muestra la publicación presentada y el problema creado por uno de los futuros profesores.

LR Data

Así avanza la vacunación contra la COVID-19 en Perú

En febrero de 2021 comenzó la distribución de dosis para enfrentar la pandemia del coronavirus en nuestro país. Este especial, elaborado en base a la plataforma de Datos Abiertos del Gobierno, muestra cómo evoluciona la cobertura en todas las regiones.

Total con tres dosis
21.417.320 personas

Total con cuatro dosis
5.473.580 personas

Total dosis aplicadas
85.169.222 dosis

El reporte y las siguientes gráficas están actualizadas al: 01/11/2022*
* Últimos datos publicados por el MINSA.

Avance por región en Perú

Figura 3. Noticia de diario La República extraída de: https://data.larepublica.pe/avance-vacunacion-covid-19-peru/

PROBLEMA PROPUESTO PARA 3° DE SECUNDARIA

A la fecha del 26 de mayo del 2022, el avance de la vacunación por región en el Perú se expresa en la siguiente tabla:

REGIÓN	DOSIS 1	DOSIS 2	POBLACIÓN	AVANCE (DOSIS 2)
AMAZONAS	323.394	292.621	452.125	64,72%
ÁNCASH	1.082.890	1.040.016	1.189.403	87,44%
APURÍMAC	408.006	368.737	440.629	83,68%
AREQUIPA	1.335.490	1.243.003	1.488.247	83,52%
AYACUCHO	544.416	475.190	658.081	72,21%
CAJAMARCA	1.243.364	1.141.315	1.528.904	74,65%
CALLAO	1.028.430	993.625	1.090.990	91,08%
CUSCO	1.158.240	1.051.482	1.392.648	75,50%
HUANCAVELICA	300.887	265.898	414.882	64,09%
HUÁNUCO	643.891	572.352	823.560	69,50%
ICA	903.630	857.363	889.916	96,34%
JUNÍN	1.184.307	1.104.855	1.340.064	82,45%
LA LIBERTAD	1.774.562	1.661.933	1.955.991	84,97%
LAMBAYEQUE	1.169.082	1.094.877	1.325.269	82,62%
LIMA	10.371.286	9.834.726	10.741.923	91,55%
LORETO	811.532	693.955	1.096.407	63,29%
MADRE DE DIOS	148.892	120.050	170.503	70,41%
MOQUEGUA	175.402	165.149	190.442	86,72%
PASCO	233.361	220.357	283.946	77,61%
PIURA	1.780.989	1.676.943	1.966.703	85,27%
PUNO	936.781	811.288	1.221.523	66,42%
SAN MARTÍN	738.650	670.475	920.842	72,81%
TACNA	309.552	285.031	365.771	77,93%
TUMBES	233.255	209.533	235.194	89,09%
UCAYALI	483.448	419.504	597.287	70,23%

A partir de la información anterior, responder:

a. ¿En qué departamento existe el mayor avance de vacunación respecto a la aplicación de la segunda dosis? ¿Por qué?
b. ¿En qué departamento existe el menor avance respecto a la aplicación de la segunda dosis? ¿Por qué?

Figura 4. Problema propuesto por un futuro profesor de matemática de secundaria

Para el problema mostrado en la Figura 4:

1. Analice si las preguntas formuladas requieren: cuestionar datos, hechos o situaciones sociales, así como interpretarlos y explicarlos. Justifique su respuesta.
2. ¿El problema es pertinente para 3° de secundaria? ¿por qué? Intente responder apoyándose en las competencias, capacidades y desempeños propuesto en el currículo.
3. ¿Qué otras preguntas (indique al menos una) podría formular para promover la matemática para el ejercicio de la ciudadanía?
4. Las preguntas formuladas en la Figura 4 ¿podrían complejizarse? ¿cómo?
5. El contexto mostrado en la Figura 3 y los datos brindados en la Figura 4 ¿podrían usarse para plantear un problema en grados menores? ¿Podría proponer un problema para dos grados menores a 3° de secundaria, pero consecutivos entre sí?
6. ¿Qué aprendizajes se promovería en cada problema?

Situación 3: ¿A quién le toca un bono?

https://www.elperuano.pe/noticia/207428-bonos-2023-conozca-aqui-si-beneficiario-de-algunos-de-los-programas-de-apoyo-economico-del-estado/

1. ¿Qué es un bono y cuál es su finalidad?
2. ¿Cuántos bonos se ofrecen actualmente?
3. ¿Cuánto dinero se destina para los bonos?
4. ¿Considera que los bonos solucionan algún problema? Explique
5. ¿Propondría usted una medida alternativa a la de los bonos? ¿cuál y por qué?
6. ¿Qué otras preguntas (indique al menos una) podría formular para promover la matemática para el ejercicio de la ciudadanía?

Referencias y bibliografía

Callejo, M.l. (2000). Educación Matemática y Ciudadanía. Propuestas desde los Derechos Humanos. Centro Poveda. https://www.centropoveda.org/IMG/pdf/matematicasDDHH.pdf

Castro, W.F., Pino-Fan, L.R., Lugo-Armenta, J.G., Toro, J.A., & Retamal, S. (2020). A Mathematics Education Research Agenda in Latin America Motivated by Coronavirus Pandemic. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(12), em1919. https://doi.org/10.29333/ejmste/9277

Consejo Nacional de Educación. (2020). *Proyecto Educativo Nacional al 2036: el reto de la ciudadanía plena*. https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6910

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzáles, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). El modelo de conocimientos especializados del profesor de matemáticas (MTSK). *Research in Mathematics Education*, 20, 236- 253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Gimeno, C. y Henríquez, A. (2001). Hacia una conceptualización de ciudadanía crítica y su formación. Anuario Pedagógico. Centro Poveda. https://www.centropoveda.org/IMG/pdf/conceptualizacionciudadania.pdf

Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education, 51*, 991–1003. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01048-6

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Vanegas, Y. y Giménez, J. (2012). Tareas profesionales y escolares para desarrollar la relación entre competencia matemática y ciudadanía. En V. Font y otros (Coords.), Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y Bachillerato. Universitat de Barcelona.

Vanegas, Y. y Prat, M. (2022). Educación matemática y ciudadanía. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 97, 4-9.

Impacto de la pandemia en la Educación Matemática de Perú, Paraguay, Bolivia y Ecuador: un primer estudio

María del Carmen **Bonilla-Tumialán**
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle
Perú
mariacbonillat@gmail.com
Maria Manuel **Nascimento**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Portugal
mmsn@utad.pt
Eulalia **Calle**
Universidad de Cuenca
Ecuador
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec
Reinaldo **Guzmán** Machaca
Universidad Autónoma Tomás Frías
Bolivia
naldoguzman@gmail.com
María Angélica **Ayala** Zelada
Universidad de Itapúa
Paraguay
mayalazelada@hotmail.com
Juan Vicente **Huamán** Monroy
Universidad Nacional San Agustín
Perú
jvicentehm@gmail.com

Resumen

El presente estudio desarrollado por investigadores de la Comunidad de Educación Matemática de América del Sur (CEMAS) tiene por objetivo analizar el impacto producido por la pandemia del Covid-19 en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la Educación Básica de Perú, Paraguay, Bolivia y Ecuador. Desde un enfoque metodológico mixto se recogió información mediante encuestas y grupos focales. El análisis de los resultados, desde la Matemática Crítica, permitió identificar categorías que emergen de las condiciones impuestas por la educación remota, como la *profundización de la desigualdad educativa*, *exclusión educativa* sufrida por los estudiantes, e *inoperancia educativa estatal*, categorías que se identificaron en los cuatro países. Las políticas educativas y acciones gubernamentales implementadas, el desempeño docente ante una realidad imprevista y las capacidades de acceso a recursos y herramientas digitales, caracterizan los cambios producidos por la pandemia en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; enseñanza remota; autoformación docente; Covid 19; CEMAS.

Introducción

La investigación procura analizar desde la Matemática Crítica (Skovsmose, 1999, 2016) el efecto que ha producido la pandemia en la Educación Matemática de Perú, Paraguay, Bolivia y Ecuador. Diversos estudios demuestran el interés de la comunidad matemática por conocer la realidad educativa vivida durante el confinamiento (Appelbaum et al., 2022; Borba, 2021; Cabrera, 2020; Gómez-Arteta y Escobar-Mamani, 2021; Gutiérrez-Ríos et al., 2023; Sosa, 2021) y las consecuencias que de ello derivan. En esta línea, también es necesario conocer la situación en la que se desenvuelve la educación matemática en América Latina, principalmente, en los cuatro países involucrados en este estudio: Perú, Paraguay, Bolivia y Ecuador, hermanados por similares realidades en lo económico, político, cultural y social.

Con respecto a la educación, se puede mencionar que los cuatro países tienen sistemas educativos muy similares (Bonilla-Tumialán, 2020). En el Perú, las etapas del sistema educativo son Educación Básica y Educación Superior. Las modalidades de Educación Básica son Básica Regular (EBR), Básica Alternativa y Básica Especial. Dentro de la EBR se ubican los niveles Inicial, Primaria y Secundaria, y se divide en siete ciclos. En Bolivia, está vigente la Ley de Educación Abelino Siñani - Elizardo Pérez, la misma determina en el subsistema de educación regular tres niveles de formación: inicial en familia comunitaria, primaria comunitaria vocacional y secundaria comunitaria productiva. En todas las instituciones educativas se aplica el Modelo Educativo Socio-comunitario Productivo. En Paraguay, el sistema educativo nacional incluye la educación de régimen general (formal, no formal y refleja), la educación de régimen especial y otras modalidades de atención educativa. La educación de régimen general se estructura en tres niveles: el primer nivel de Educación Inicial y la Educación Escolar Básica, el segundo nivel la Educación Media y el tercer nivel la Educación Superior. En Ecuador, la estructura curricular está organizada en 10 años de Educación General Básica (EGB) y tres años de Bachillerato General Unificado (BGU); el régimen de clases puede ser costa, sierra y oriente; y existen dos sistemas de educación: Sistema Nacional de Educación (SNE) y Sistema de Educación Intercultural Bilingüe (SEIB).

Con referencia a la realidad expuesta, los sistemas educativos de los cuatro países se vieron afectados por la pandemia del Covid-19 pues en cada uno de ellos se produjo una coyuntura de emergencia sanitaria, situación que llevó a que se produjeran experiencias pedagógicas de enculturación de la educación remota de emergencia (Gutiérrez-Ríos et al., 2023, p. 8) en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Del análisis de los datos obtenidos en lo cuantitativo y cualitativo se busca identificar categorías que emerjan de las condiciones impuestas por la educación remota y virtual, estudio que servirá como referencia para la implementación de políticas educativas y acciones gubernamentales orientadas a favorecer el desarrollo educativo, económico y social de los pueblos latinoamericanos antes mencionados.

Marco teórico

Los cuatro países que forman parte de este estudio se encuentran ubicados en América del Sur, cuentan con gobiernos formalmente democráticos, pero con constante inestabilidad política, y sistemas educativos históricamente parecidos y supeditados, en cierta forma, a la necesidad de mejorar procesos educativos, especialmente en el área de las matemáticas. Sin embargo, es necesario señalar que los cuatro países en la década del 90 implementaron, así como toda Latinoamérica, una serie de reformas educativas, sobre todo curriculares, impulsadas por organismos financieros internacionales, como el BIRF y el Banco Mundial (Rosales, como se citó en Bonilla-Tumialán, 2018). Las reformas educativas neoliberales buscaron solucionar problemas de calidad de los sistemas educativos de la región, partiendo de un diagnóstico en el que participaron actores sociales nacionales, dirigidos por políticos e intelectuales de Estados Unidos, quienes identificaron que la ineficiencia educativa se debía al acelerado crecimiento de los sistemas educativos nacionales, a la masificación de la matrícula y la administración altamente centralizada, es decir, todo se redujo a un problema de gestión (López y Flores, 2006).

La solución propuesta fue la transformación de los sistemas educativos a través de la lógica de la libre competencia del mercado. Muchas funciones, recursos y competencias de los gobiernos centrales fueron transferidos a los locales, con el pretexto de lograr mayor eficacia administrativa, descentralización que favorecería la autonomía educativa local y la democratización de la educación, disminuyendo así los costos de la burocracia estatal. Chile fue el laboratorio de las reformas que posteriormente se generalizaron al resto de los países. El objetivo de mejorar la calidad educativa a través de la competencia fue una estrategia, “un pretexto”, para privatizar la educación, trasladando el financiamiento público al privado, lo que llevó al abandono y debilitamiento de los sistemas educativos nacionales, situación que ha sido fácilmente visible en la emergencia sanitaria de la pandemia del Covid 19. Toda esta explicación de carácter *político y económico* es necesaria, pues la Matemática Crítica (Skovsmose, 1999) señala que los fenómenos educativos no solo pueden explicarse dentro del aula, sino que es necesario abordar la dimensión política de la educación en general, y del conocimiento matemático y de la educación matemática, en particular.

La Matemática Crítica

La educación matemática crítica (EMC) considera que la matemática es una rama científica que no está separada de lo social, cultural y político (Borba, 2021). En ese sentido, pone en evidencia la desigualdad social y de otros tipos que existe en la educación matemática, la que no es neutral, pues puede promover igualdad o desigualdad. La pandemia ha acrecentado la desigualdad social, también en el campo educativo, ya que el acceso a internet, el uso de medios electrónicos, es posible en los grupos sociales de mayor poder adquisitivo. La EMC, a pesar que reconoce que un enfoque educativo no puede lograr la justicia crítica, se preocupa por abordar cualquier forma de supresión y explotación, y considera que una preocupación principal es trabajar por la justicia social, concepto abierto que puede explorarse en muchas direcciones diferentes. Otro concepto importante es el de equidad, preocupación constante de la EMC. Justicia social y equidad llevan a abordar procesos de inclusión y exclusión.

La exclusión social adopta diversas formas producto del racismo, sexismo, la inmigración, las discapacidades como la ceguera, sordera, discursos que pueden etiquetar a grupos de personas como "desechables", "una carga" o "no productivos". Es una preocupación de la EMC abordar cualquier forma de exclusión social (Skovsmose. 2016). De igual manera, los conceptos de matemacia, diálogo, imaginación pedagógica son desarrollados por la EMC, pero en ellos no se puede dar por sentada ninguna base teórica particular pues siempre necesitan críticas. Estos conceptos están en disputa, en construcción. Teniendo en cuenta que las formas de explotación, supresión, problemas ambientales y situaciones críticas cambian continuamente, la EMC tiene una naturaleza abierta y es un esfuerzo continuo. En la pandemia se ha visto cómo los cambios se han dado de manera vertiginosa.

Educación, Tecnología y Pandemia

A partir del 2020, la educación mundial tomó un rumbo diferente con el impacto de la pandemia provocada por la COVID-19, puesto que obligó a todo el sistema educativo a cambiar su perspectiva de trabajo, convirtiendo a la tecnología en una aliada para no detener la educación y avanzar apoyados en la virtualidad, situación reflejada en los cuatro países en referencia. Todo ello tuvo como resultado, la educación remota más larga de la historia sobre todo en contextos caracterizados por la presencialidad y, cuyas consecuencias serán reflejadas a corto y a largo plazo en los resultados educativos, haciéndose necesaria la visibilización de las respuestas educativas nacionales y regionales al confinamiento vivido, tal como sugieren estudios realizados en diferentes realidades (Font y Sala 2020; Breda et al., 2020; Calle et al., 2021; Llinares, 2021; Anaya et al 2021).

En ese contexto, era necesario afrontar la pandemia incorporando de manera masiva las Tics en la educación (Calle et al., 2021) con el objetivo de implementar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera remota. A pesar de que las autoridades de educación deben asegurar en el profesorado el desarrollo de competencias que incorporen las Tics en la educación matemática, los docentes se vieron afectados pues no contaban con las competencias digitales necesarias, situación que refleja el descuido de los estados latinoamericanos. Por ello, se tuvieron que implementar con urgencia programas de formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ese sentido.

Desarrollo Profesional Docente

El desarrollo profesional docente implica el interés de los profesores por mejorar los procesos de instrucción, tomando a la reflexión sobre su práctica como una estrategia clave con ese fin (Calle et al., 2021). Moreno et al. (2019) sostienen que el concepto de desarrollo profesional está vinculado con la consolidación de la responsabilidad profesional. La formación y actualización educativa requieren el apoyo de los gobiernos para estar a tono con las nuevas tendencias mundiales en la enseñanza de las matemáticas y responder, incluso, a situaciones emergentes como la que se ha presentado en el último confinamiento mundial. Resulta increíble pensar que esta situación obligó a una capacitación masiva y emergente en el ámbito de la tecnología y, lo que en un momento era considerada de uso opcional, en otro se convirtió no solo en algo prioritario sino urgente y necesario, sensación de agobio para muchos docentes. En esta virtud, Romero (2021) menciona la importancia de tener presente que el desarrollo profesional docente es capaz de incidir en la sociedad para la mejora continua de las condiciones de vida de los grupos vulnerables y del bien común, demostrando nuevas formas de ser y hacer educación.

Metodología

La investigación empleó una metodología mixta que combina los enfoques cuantitativo y cualitativo (Hernández et al., 2018). Por un lado, en el enfoque cuantitativo se utilizó la técnica de la encuesta y el instrumento empleado fue un cuestionario aplicado a una muestra de docentes de Educación de primaria y secundaria de Perú (152 docentes), Ecuador (107 docentes), Paraguay (159 docentes) y Bolivia (210 docentes). Las preguntas del cuestionario abarcan las siguientes *dimensiones*: 1) *normativa*; 2) *pedagógica*, con tres subdimensiones: *planificación* (macro del estado y micro del docente), *didáctica* y *evaluación*; 3) *tecnológica* (niveles micro y macro); 4) *emociona*l y 5) *laboral*. Para recolectar información con mayor profundidad sobre el efecto de la pandemia en la Educación Matemática, que fue tratada desde una perspectiva cualitativa, se realizaron cuatro grupos focales que agruparon a docentes de diversos niveles, zonas, de gestión pública o privada de los cuatro países. Además, en los grupos focales se plantearon preguntas de discusión relacionadas con los principales problemas a resolver en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, cuáles son los principales cambios en la enseñanza de las matemáticas que se han producido por la pandemia y que pueden ser utilizados en el futuro.

Resultados

A continuación, se darán a conocer los resultados obtenidos, tanto del cuestionario aplicado en los docentes, como de las respuestas registradas en los grupos focales.

a) De las encuestas: Las encuestas aplicadas a los profesores participantes de los cuatro países, han generado importantes resultados. En cuanto al *género,* la mayoría de los encuestados en cada uno de los países eran mujeres: Bolivia, 92.9%; Paraguay, 73%; Perú, 58.6% y Ecuador, 56.1%. En lo que se refiere al *nivel de estudios* en el que enseñan los profesores inquiridos, la mayoría eran de educación secundaria: Bolivia, 92.9%; Paraguay, 74.8%; Perú, 70.4% y Ecuador 64.5%. Sobre el *área de trabajo*, la mayoría de los encuestados fueron docentes de zonas urbanas, Perú, 67.1%; Bolivia, 58.1%; Paraguay, 86.8 % y Ecuador, 84.1%. En cuanto al *tipo de institución educativa*, la mayoría de los encuestados eran docentes de la educación pública: Perú, 77%; Bolivia, 84.8%; Paraguay, 82.4% y Ecuador, 69.2%.

Ante la pregunta: El 2020, *¿a qué grado de dificultad se enfrentó como profesor a los siguientes problemas que surgieron en el proceso educativo durante la emergencia sanitaria?*, en cuanto al *manejo de la tecnología (uso de diversos softwares para crear actividades virtuales, uso del WhatsApp, Facebook u otros medios virtuales en la enseñanza)* en los cuatro países la opinión más frecuente y mayoritaria fue la regular, así como en la *planificación curricular (creación o adecuación de sesiones de aprendizaje)*. Sobre el *grado de conectividad (acceso a la señal de internet)* en los cuatro países la opinión más frecuente fue la regular. Sin embargo, en Bolivia, Paraguay y Perú la suma de muy difícil y difícil pasa o iguala la regularidad, por lo que el grado de conectividad reveló un problema para los profesores encuestados de estos tres países. En cuanto a las *condiciones laborales (factibilidad de trabajo a distancia desde sus hogares, cuenta con equipo de laptop, celular, pizarra u otros materiales disponibles)* en los cuatro países la opinión más frecuente fue la regular, resultados similares se obtuvieron en la *metodología didáctica (capacidad para trabajar con grupos a distancia, así como el manejo de herramientas didácticas)*. Con respecto a las *situaciones socio-afectivas (problemas emocionales, afectivos y de salud)* en los cuatro países la opinión más frecuente fue la regular, obteniéndose el mismo resultado en lo que se refiere a la *conexión afectiva emocional con los estudiantes*.

En lo relacionado con el *aporte de las autoridades educativas para cumplir con la planificación propuesta,* el 81.8% de Paraguay y el 54.2% de Ecuador eligió la *creación de una plataforma virtual*. El 69% de Bolivia y el 55.3% de Perú, la mayoría de los profesores, no eligió esa alternativa. La mayoría de los profesores encuestados no eligió el *acompañamiento pedagógico* en Bolivia, Paraguay y Perú (87.1%, 72.8% y 57.9%, respectivamente). La mayoría de los profesores han elegido la alternativa *capacitación en el manejo de tecnología*, Bolivia, 71.9%; Perú, 59.2% y Ecuador, 60.7%, solo en Paraguay no la eligieron (54.7%). Sobre *la capacitación en metodología para el uso didáctico de los entornos virtuales*, solo en Paraguay la mayoría de los profesores ha elegido esta opción (57.9%) y en los otros países la mayoría no la eligieron: Bolivia, 82.3%; Perú, 69.7% y Ecuador 82.4%. En lo que se refiere a la alternativa *implementación de programas televisivos,* en Paraguay los profesores la eligen en mayoría (57.9%) y no la eligen en mayoría en Bolivia (82.4%), Perú (69.7%) y Ecuador (82.2%). Los profesores encuestados no eligen en mayoría la opción *implementación de programas radiales* (Bolivia 83.3%, Paraguay 91.2%, Perú 71% y Ecuador, 90.6%).

Con respecto al *porcentaje de estudiantes que se logró conectar cada semana,* sin contar con algunos valores discrepantes, Bolivia presenta los valores más bajos (0 al 60%), esto es, el menor porcentaje de estudiantes, y Ecuador, la más alta (41 al 100%). En Paraguay el 50% de la muestra varía del 21 al 80% y solo en Perú la dispersión entre los cuartiles es menor (entre 41 al 80%). A pesar de las diferencias, los porcentajes de estudiantes que se lograron conectar con el profesor cada semana, no muestran ser diferentes en promedio. Sobre el *porcentaje de cumplimiento de las actividades en el área de matemáticas propuestas en la planificación del 2020 antes de la pandemia*, sin contar con algunos valores discrepantes, Bolivia presenta los menores porcentajes (0 al 60%), Paraguay, Perú y Ecuador presentan mayores porcentajes (40 al 80%) y similar. Paraguay, Perú y Ecuador no presentan promedios diferentes en sus porcentajes.

A la pregunta sobre *qué medios de comunicación y en qué porcentaje utilizaron los docentes, o el Ministerio de Educación, para la implementación de actividades y contenidos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*, los docentes respondieron que la *radio y la televisión* fueron poco utilizadas, en ambos casos la mayoría contestó del 0 al 20%. El *teléfono* fue usado o muy usado, del 41 al 60%. Los *textos o cartillas* impresos, quitando Bolivia (poco usado), fueron usados o muy usados por los docentes encuestados de Perú, Paraguay y Ecuador. Sobre el uso de las *plataformas educativas* (Classroom, Moodle, Chamilo, Webex y otros) destaca la clase hasta al 80% en Bolivia, Paraguay y Ecuador, pero en Perú destaca la clase de 81 al 100%. En relación con el empleo de las *videoconferencias en línea*, destaca la clase de 0 al 20% en Paraguay, Bolivia y Perú. La clase del 41 al 60% es mayoritaria en Ecuador. En Perú la clase del 81 al 100% es muy similar al porcentaje de la clase del 0 al 20%. Sobre el uso de las *redes sociales* por los docentes, destacan porcentajes superiores de las clases del 41 a 100%, o sea, las redes sociales fueron usadas o muy usadas.

En lo que se refiere a los *medios de comunicación virtual más empleados en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas,* los docentes respondieron que las *plataformas e-learning propias* no fueron usadas o poco usadas. *Classroom* fue poco usado, excepto en Bolivia pues su uso fue más repartido. Sobre el uso del *WhatsApp*, Bolivia se destaca con dispersión mayor en los porcentajes del 41 al 100%. Paraguay, Perú y Ecuador presentan sus mayores frecuencias en la clase 81 al 100%. A respecto del *Zoom* como medio de comunicación virtual todos los países lo han usado poco hasta mucho con los mayores usos de Bolivia en la clase de 61 al 80%, Paraguay y Perú en la clase de 0 al 20%. Ecuador se destacó con la mayoría de uso en la clase de 81 al 100%. Sobre el *Meet (Google)* se destaca que todos los países tuvieron poco uso (clase 0 al 20%) con destaque para Ecuador.

Sobre la pregunta: *en el 2020 las clases virtuales fueron preferentemente de qué forma y en qué porcentaje*, en Bolivia y Paraguay hubo menor porcentaje para las clases síncronas y más porcentaje para las clases virtuales asíncronas. En Perú las clases síncronas presentan la mayor variabilidad y porcentajes más altos que las clases asíncronas. En Ecuador las clases síncronas varían entre valores más altos que en las clases asíncronas. En cuanto a la pregunta, durante el 2020, *¿cuáles fueron los medios que principalmente utilizaron sus estudiantes para el envío de sus tareas o productos que evidencian su aprendizaje, y en qué porcentaje lo hicieron?* Para el celular (o de manera oral) destaca el 41 al 60% en Bolivia. En los otros países la mayor frecuencia está en 0 al 20% Paraguay, Perú y Ecuador. En la misma cuestión, para la *plataforma e-learning* destaca del 0 al 20% en la mayor parte en todos los países. En resumen, la plataforma de e-learning no fue o fue poco usada. A continuación, sobre la misma cuestión, entre los porcentajes de estudiantes que usaron *WhatsApp* se destaca el 81 al 100% en la mayor parte de los países de Bolivia, Paraguay, Perú y Ecuador. El WhatsApp fue muy utilizado. En los porcentajes de estudiantes que usaron el *Messenger del Facebook* para el envío de sus tareas o productos, destaca el 0 al 20% en la mayor parte en todos los países. En resumen, el Messenger del Facebook no fue o fue poco usado. Para finalizar esta pregunta, entre los porcentajes de estudiantes que *entregan en forma impresa sus envíos* destaca el 0 al 20%. En resumen, también la entrega en forma impresa no fue o fue poco usada (un poco más en Paraguay).

Sobre la opinión del profesor, si *el estudiante ha logrado construir o adquirir aprendizajes en el área de matemática*, la mayoría en Paraguay (53.5%) y Ecuador (56.7%) marcó que está “ni en desacuerdo ni en acuerdo”, es decir, la indiferencia. En Perú, “ni en desacuerdo ni en acuerdo” es la mayor parte de las opiniones (46%) y destaca la opinión “de acuerdo” (20.3%). En Bolivia la mayor parte también está “ni en desacuerdo ni en acuerdo” (41.9%), pero sobresalen “totalmente en desacuerdo y en desacuerdo” (37,6%). En lo que concierne al *porcentaje de los aprendizajes de matemática de los estudiantes en la educación no presencial que el docente considera ha logrado evaluar adecuadamente en el 2020*, la mayor parte, en Bolivia (38.5%), Paraguay (40.2%), Perú (33.6%) y Ecuador (37.4%) eligió entre el 41 al 60%. En Bolivia, las respuestas “0 al 20% y “21 al 40%” son el 49%, y en Perú las respuestas “21 al 40% y 41 al 60%” son el 60.5%. Ante la pregunta, *¿cómo percibe la educación no presencial en el área de matemática en tiempos de la pandemia del COVID-19?* La mayoría en Bolivia (52.3%), Paraguay (63.5%), Perú (66.7%) y Ecuador (63.5%) respondió que de forma regular. Solo en Bolivia las respuestas “muy mala y mal” destacan (40%).

b) De los grupos focales: Las discusiones llevadas a cabo mediante los grupos focales, dan cuenta de una realidad muy común entre los países en estudio que se expone a continuación.

Los docentes entrevistados dieron a conocer una realidad muy cruda y crítica, pues las autoridades educativas exigían a los padres de familia que adquirieran celulares o compartieran el celular que tenían con sus hijos, y, además, les pedían que tuvieran conectividad para poder participar en las clases virtuales. En muchas familias solo había un celular para los padres y varios niños. La mayoría de los estudiantes de las zonas urbanas tenían la posibilidad de tener un celular o una laptop y de acoplarse a una red de internet, pero, en el caso de las zonas marginales urbanas y zonas rurales, los pocos ingresos de los padres no permitían cubrir esos gastos, o no podían acceder a redes de internet o de telefonía, pues en muchas zonas no existen. En el Perú aproximadamente un 45% de los estudiantes de zonas rurales viven en lugares sin acceso a redes telefónicas o de internet. Muchos estudiantes, para poder acceder a una señal telefónica o de radio en zonas rurales, tuvieron que caminar hasta la cima de los cerros o a la carretera, cuidándose de las inclemencias del tiempo, lluvias y rayos. Y así tuvieran acceso a redes de internet, la dificultad era la compra de datos o megas para recargar el internet pues no tenían crédito ilimitado, el bajo ingreso económico de las familias no permite realizar esos gastos.

La enseñanza a distancia obligó a los docentes a aprender a usar las herramientas virtuales, así como las aplicaciones digitales y las plataformas virtuales. Las autoridades educativas promovieron esos aprendizajes organizando capacitaciones, así como reuniones colegiadas. De igual forma, habilitaron plataformas educativas en Internet con contenidos que también eran transmitidos por televisión y radio. En algunos lugares, las autoridades locales crearon programas radiales para los docentes, instalaron internet libre en sus sedes, o habilitaron ambientes con computadoras, internet e impresoras para los niños que no tenían. En lo pedagógico, algunos docentes utilizaron material didáctico concreto para las videoconferencias síncronas, otros han digitalizado el material didáctico, han empleado juegos con Power Point, con Scratch, han buscado material en la web y utilizado Kahoot. La pandemia ha obligado a los docentes a explorar todas las funcionalidades de los procesadores de textos, de los softwares como Paint, han aprendido a elaborar vídeos cortos. La metodología y didáctica son las mismas de antes, pero se usaron más los materiales digitales y herramientas tecnológicas, se usaron más fácilmente las imágenes de internet, fichas y vídeos. El WhatsApp fue el medio más utilizado para el envío de fichas de trabajo en PDF, fotos, o vídeos. Algunos docentes han podido retroalimentar a los estudiantes usando WhatsApp, pero con dificultad, con el Zoom o Meet era más fácil la retroalimentación, solo en aquellas zonas que contaban con medios para usarlos.

Los alumnos han aprendido capacidades digitales y creado sus correos. Pero su gran problema era la conectividad. Otras dificultades que presentaban los estudiantes fueron: la impresión de las fichas de actividades del profesor, la calidad del envío del trabajo realizado en casa y la contestación de las llamadas telefónicas del docente, muchos ya no contestaban. Los docentes expresaron que en la pandemia se evidenció la necesidad del monitoreo de algún familiar en casa, que pueda supervisar al estudiante y ver si está realizando las actividades que indica su maestro, no solo en la Primaria, también en Secundaria. Se ha presentado el caso de estudiantes que sí tenían posibilidades económicas, tenían celulares, laptop o internet, pero no participaron en las clases porque se dedicaron a jugar, entrar a redes sociales, es decir, se distrajeron en la web. Incluso algunos padres de familia de Perú, ante esa situación, devolvieron tablets que fueron obsequiadas por el ministerio de educación. Es necesario señalar que existen estudios sobre la adicción que producen los dispositivos electrónicos. Por otro lado, se ha podido evidenciar que, en muchos casos, por la crisis económica, los padres llevaban a sus hijos a trabajar y perdían el contacto con la escuela.

La solidaridad es un valor que fue desarrollado durante la pandemia en la comunidad educativa, algunos docentes promovían el préstamo o la compra de celulares para los que no tenían, así como el préstamo del wifi de los vecinos. En las zonas rurales los dirigentes comunales servían de mediadores para el reparto de las fichas de trabajo impresas. Los padres buscaban a algún vecino capacitado para que enseñe, cuando ellos no lograban hacerlo.

Con respecto a los cambios que se han generado por la pandemia, a la pregunta referida a *los principales problemas a resolver en el futuro de la enseñanza de las matemáticas*, los profesores participantes responden que hay una brecha social generada por la falta de recursos económicos de los Estados que no ha permitido que los estudiantes dispongan de la tecnología necesaria para continuar con sus aprendizajes, así como, el dotar a las instituciones educativas de estos recursos tecnológicos para el retorno a las aulas. Además, se requiere que los gobiernos capaciten a los docentes en el uso de la tecnología con los cambios actuales. A la pregunta sobre *los principales cambios en la enseñanza de las matemáticas que se han producido por la pandemia y que pueden ser utilizados en el futuro*, los profesores manifiestan que hay una necesidad de cambios metodológicos, por ejemplo, en la forma de comunicarse entre profesores y estudiantes; así como, tener en cuenta las tendencias para mejorar la educación matemática utilizando la tecnología y el entorno, es decir, la resolución de problemas de contexto.

Ante la pregunta, *si considera que los alumnos han logrado aprender matemática en el contexto de la pandemia,* los profesores demuestran estar conscientes de que hicieron un gran esfuerzo para enseñar, pero también saben que los estudiantes tenían diversos problemas, económicos, sanitarios, cognitivos, etc. El aprendizaje de las matemáticas se ha dado en función del entorno social, demostrando la desigualdad en las condiciones sociales en las que se ha sucedido el proceso de instrucción. Muchos estudiantes no solo no aprendieron matemáticas, sino que olvidaron lo que ya habían aprendido porque dieron importancia a temas personales de sobrevivencia. La desigualdad social está presente en quienes debieron dejar de estudiar para trabajar. A pesar de lo manifestado por algunos docentes, otros consideran que sus alumnos sí han logrado aprender matemática en el contexto de la pandemia.

Discusiones y conclusión

Al analizar los resultados obtenidos, tanto en las encuestas como en la discusión de los grupos focales, se han podido identificar categorías que emergen de las condiciones impuestas por la educación remota y virtual, tales como: *la profundización de la desigualdad educativa*, la *exclusión educativa* sufrida por los estudiantes, la *inoperancia educativa estatal*, la *adaptación al cambio* y la *resiliencia en los actores educativos*. Las políticas educativas y las precarias acciones gubernamentales implementadas, el desempeño docente ante una realidad imprevista y el aumento de la capacidad de acceso a dispositivos y herramientas digitales, caracterizan los cambios producidos por la pandemia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Lo interesante de este estudio es que, la información ha sido recopilada en su mayoría con mujeres que tienen vasta experiencia en la profesión docente del nivel secundario y público de los cuatro países, y que, si bien no se podría considerar como una muestra representativa, constituyen un buen referente para conocer el impacto producido por la pandemia del Covid-19 en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la Educación Básica de Perú, Paraguay, Bolivia y Ecuador.

En casi todas las preguntas de la encuesta, la regularidad que los profesores presentan nos revela su capacidad para – de un momento a otro – *adaptarse a las nuevas condiciones de trabajo*, lo que refleja profesionalismo y dedicación, a pesar de las dificultades reportadas por el bajo grado de conectividad, coincidiendo con lo resaltado en Calle et al (2021) sobre la actitud positiva y de desafío de los profesores de matemáticas. Ellos han buscando formas de llegar a sus alumnos a través del desarrollo de talleres, resolución de problemas y análisis de resultados, todo lo cual ha implicado constantes capacitaciones para la enseñanza de la matemática acorde a los entornos educativos en los que han tenido que desempeñarse. Los estudiantes, con la ayuda de sus padres hicieron esfuerzos extraordinarios para acceder y participar en las clases virtuales. Lo mencionado refleja *la resiliencia desarrollada por los actores educativos y sociales*.

Los resultados demuestran también las desigualdades sociales existentes en los países participantes del estudio. El considerable tiempo de confinamiento y el alto porcentaje de trabajadores del sector informal que, según reporte de la Organización Internacional del Trabajo (OIT), el 84,9% en Bolivia, 68,9 % en Paraguay, 64,8 % en Perú y el 63,5% en Ecuador, son trabajadores informales, ocasionó en las familias falta de ingresos económicos y el gasto de sus ahorros en el sustento de sus necesidades básicas, motivo por el cual no lograron proveer a sus hijos de smartphones, tablets o computadoras. En otros casos, tampoco lograron cubrir el servicio de internet permanente, se *profundizó la brecha digital y la desigualdad educativa* (Skovsmose, 1999, 2016). En la mayoría de los casos, los dispositivos con los que contaban los estudiantes no tenían la capacidad necesaria para operar con aplicaciones de videoconferencias, pizarras digitales y otras específicas del área utilizadas en la educación virtual; finalmente, la dificultad de acceso y la inestabilidad del servicio de internet fue una de las preocupaciones latentes. En las áreas urbanas existió inestabilidad a causa de la sobresaturación de uso en determinados horarios, en el área rural la señal de internet es limitada y en todos los países existen muchas comunidades sin acceso a internet. Esta realidad puso en riesgo el derecho a la educación, aumentó la *exclusión educativa*, más aún cuando los estados no lograron implementar las acciones necesarias para responder a dichas necesidades, por la *inoperancia educativa estatal* debido al bajo presupuesto destinado a la educación en los cuatro países (Skovsmose, 1999).

Los profesores de los cuatro países consideran que uno de *los principales cambios en la enseñanza de las matemáticas que se han producido por la pandemia y que pueden ser utilizados en el futuro*, ha sido la necesidad de cambios metodológicos en la forma de comunicación entre los profesores y los estudiantes referidos a la tecnología, ya que como se menciona en Llinares (2021): el uso de la tecnología para mantener la comunicación entre estudiantes y profesores, está generando nuevas formas de pensar y representar las matemáticas a ser aprendidas y sobre los contextos en los que tienen que ser aprendidas; por lo tanto, la tecnología no es solo la herramienta, sino que se ha convertido en el medio a través del cual se establece la relación entre docentes y estudiantes (Font y Sala, 2020). En la educación matemática actual, además de los elementos didácticos tradicionales, se debe considerar las herramientas tecnológicas como medio y fin de la enseñanza y el aprendizaje en los diferentes niveles formativos.

La discusión de los profesores en los grupos focales de los diferentes países sobre si *consideran que sus alumnos han logrado aprender matemática en el contexto de la pandemia,* tiene un denominador común: la enseñanza de las matemáticas se ha dado en función del entorno social, visibilizando la *desigualdad* de condiciones sociales en las que se ha dado este proceso como son la composición familiar, niveles educativos de los padres, ingresos económicos, número de hijos en el hogar, tipo de familia, entre otros, que han afectado negativamente a los estudiantes (Cabrera 2020). Han manifestado su preocupación sobre la *desigualdad social* generada por la falta de recursos económicos que no ha permitido que los estudiantes dispongan de la tecnología necesaria para continuar con sus aprendizajes y en otros casos más preocupantes, la *desigualdad y exclusión educativa* se ha reflejado en quienes debieron dejar de estudiar para trabajar y apoyar económicamente a sus familias, lo que demuestra la necesidad urgente de tener en cuenta cuestiones de equidad y justicia social para hacer llegar la educación matemática a todos (Llinares, 2021; Skovsmose, 2016), que a criterio de Gómez-Arteta y Escobar-Mamani (2021), nos aleja del objetivo 4 de la agenda 2030 para el desarrollo sostenible. El retorno a las clases en la modalidad presencial, exige que las autoridades educativas doten a las instituciones educativas de recursos tecnológicos y capacitación a los docentes en su uso, ya que la enseñanza durante la emergencia sanitaria ha permitido que los docentes se acerquen a la reflexión y al trabajo con dispositivos y medios digitales, incluso a quienes hasta ahora habían pensado que eso no era su tema, y habían podido sostener su actividad sin tomar en cuenta que sus alumnos y ellos mismos están profundamente atravesados por la digitalidad (Dussel, 2020).

A manera de conclusión, la crisis sanitaria desnudó las diversas realidades existentes en los países, en lo social, salud, economía, política y educación, entre otros aspectos. En el estudio se observó que los cuatro estados no respondieron de manera efectiva y suficiente ante la problemática generada por la pandemia del COVID-19, posiblemente plantearon políticas educativas y orientaciones precisas, pero, las mismas no lograron concretarse en su plenitud debido a las adversas condiciones materiales y la *inoperancia educativa estatal*. El desempeño docente ante una realidad imprevista, fue el mejor, la mayoría participó en cursos de actualización, a pesar de las limitaciones, buscaron maneras de llegar a sus alumnos, utilizaron herramientas digitales para la comunicación, preparación y desarrollo de las clases virtuales de matemática, y los que no lograron conectarse con sus alumnos emplearon medios escritos y otros. Los aprendizajes logrados no fueron los esperados, hubo estancamiento en la mayoría de los casos y se requiere de procesos de nivelación, debido a las desigualdades en el acceso a recursos y herramientas digitales y las dificultades de conexión a internet; sin embargo, la experiencia deja incalculables aprendizajes nuevos y retos desafiantes para la mejora continua de la educación matemática en nuestros países.

Referencias y bibliografía

Anaya Figueroa, T., Montalvo Castro, J., Calderón, A. I., y Arispe Alburqueque, C. (2021). Escuelas rurales en el Perú: factores que acentúan las brechas digitales en tiempos de pandemia (COVID-19) y recomendaciones para reducirlas. *Educación, 30*(58), 11-33. https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/23568

Appelbaum, P., Stathopoulou, C., y Xenofontos, C. (2022). Actionable Mathematics Education Via Dystopia. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12), Bozen-Bolzano, Italy. hal-03747780. https://hal.science/hal-03747780/

Bonilla-Tumialán, M. C. (2018). The Mathematical Dimension of the Curriculum Reform in Peru. *The Twenty-fourth ICMI Study School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities.* University of Tsukuba. https://www.researchgate.net/publication/334508404_THE_MATHEMATICAL_DIMENSION_OF_THE_CURRICULUM_REFORM_IN_PERU

Bonilla-Tumialán, M.C. (2020). CANP 5: La formación docente inicial y continua en Educación Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú. En Y. Morales-López y Á. Ruíz (Eds.), Comité Interamericano de Educación Matemática, *Educación Matemática en las Américas 2019,* 403 - 414. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/view/1094

Borba, M. C. (2021). El futuro de la educación matemática a partir del COVID 19: humanos-con-medios o humanos-con-cosas-no-vivientes. *Revista de Educación Matemática (RevEM), 36*(3), 5-27. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/36050

Breda, A., Farsani, D. y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *Revista INTERMATHS, 1*(1), 3-19. DOI: https://doi.org/10.22481/intermaths.v1i1.7400

Cabrera, L. (2020). Efectos del coronavirus en el sistema de enseñanza: aumenta la desigualdad de oportunidades educativas en España. *Revista de Sociología de la Educación-RASE, 13* (2) Especial, COVID-19, 114-139. http://dx.doi.org/10.7203/RASE.13.2.17125

Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2021). Reflection on the Complexity of Mathematical Objects in the Initial Training of Teachers. *Journal of Higher Education Theory and Practice, 21*(13). https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

Calle, E., Mora, M., Jácome, M. y Breda, A. (2021). La enseñanza de las matemáticas en un curso de formación en contexto de pandemia: la percepción de futuros profesores de matemáticas de Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* (20), 200-215. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48505

Dussel, I. (2020). La formación docente y los desafíos de la pandemia. *Revista Científica EFI· DGES Volumen*, 6(10). http://dges-cba.edu.ar/wp/wp-content/uploads/2020/08/Dussel.pdf

Font, V. y Sala, G. (2020). 2021. Un año de incertidumbres para la Educación Matemática. *Bolema: Boletim de Educaçao Matemática, 34*(68). https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68e01

Gómez-Arteta, I. y Escobar-Mamani, F. (2021). Educación virtual en tiempos de pandemia: incremento de la desigualdad social en el Perú. *Revista Chakiñan de Ciencias Sociales y Humanidades*, (15), 152-165. https://preprints.scielo.org/index.php/scielo/preprint/download/1996/3262/3383

Gutiérrez-Ríos, M. Y., Jiménez Ibáñez, J., Hernández Rincón, M., Ojeda Pérez, R. M., Betancur Chicué, V., Arias Campos, R. L., Martínez Morales, É. M., Pérez Morales, P., Rodríguez-Lozano, M. N., Umaña-Serrato, J. P., Loor Cedeño, G. N., Chamorro-Pinchao, C. X., Aparicio-Franco, A. M.; Ruggeri, A. M. y Riquetti, J. S. (2023). Desafíos del pensamiento crítico en la educación remota de emergencia. *Educación y pedagogía. 31.* https://ciencia.lasalle.edu.co/cgi/viewcontent.cgi?article=1030ycontext=edunisalle_educacionpedagogia#:~:text=Este%20se%20enfoca%20en%20c%C3%B3mo,la%20voz%20de%20sus%20protagonistas

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. Editorial Mc Graw Hill Education. http://repositorio.uasb.edu.bo:8080/handle/54000/1292

López Guerra, S. y Flores Chávez, M. (2006). Las reformas educativas neoliberales en Latinoamérica. *Revista electrónica de investigación educativa*, *8*(1), 1-15. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttextypid=S1607-40412006000100006

Llinares, S. (2021). Educación Matemática y COVID-19 en las Américas: limitaciones, adaptaciones, y lecciones aprendidas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* (20), 12-28. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48472

Moreno, A., Flores, P. y Ramos-Rodríguez, E. (2019). Reflexión de profesores de matemáticas durante un curso sobre desarrollo profesional. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 329-350). Ediciones Universidad Salamanca. https://eusal.es/eusal/catalog/download/978-84-1311-073-8/5054/4211-1?inline=1

Romero Lara, R. (2021). Trascendencia de la formación docente de pandemia, aplicada para el regreso a la presencia. Reflexiones sobre la importancia de la formación docente durante la pandemia para el regreso a clases. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 51(ESPECIAL), 325-334. https://rlee.ibero.mx/index.php/rlee/article/view/451

Sosa Neira, E. A. (2021). Percepciones de los estudiantes sobre la estrategia Aprende en Casa durante la pandemia COVID-19. *Academia y Virtualidad*, 14(1), 133-150. https://revistas.unimilitar.edu.co/index.php/ravi/article/view/5261

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica (P. Valero, Trad., Primera Edición). Una empresa docente. Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf

Skovsmose, O. (2016). Critical Mathematics Education: Concerns, Notions, and Future. En P. Ernest, O. Skovsmose, J. P.l van Bendegem, M. Bicudo, R. Miarka, L. Kvasz y R. Moeller, *The Philosophy of Mathematics Education* (pp. 9-13). Springer. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-40569-8_1

Sesiones temáticas

Balance y perspectivas de la Etnomatemática en la Educación Matemática

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br
María del Carmen Bonilla-Tumialán
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle
Perú
mariacbonillat@gmail.com

Resumen

La presente sesión temática tiene como objetivo lograr un balance de las perspectivas de las Etnomatemáticas en la Educación Matemática. Así, con el fin de entender el desarrollo de las Etnomatemáticas como un programa, es necesario discutir sus perspectivas actuales y futuras para analizar sus metas, objetivos y supuestos con respecto a la promoción de la ética, del respeto, de la solidaridad y de la cooperación entre las culturas. Uno de los principales pilares de esta sesión temática está basado en los aportes de las Etnomatemáticas porque se interesa en estudiar los factores sociales y culturales que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en entornos escolares y extraescolares en diversos contextos sociales, económicos, políticos, culturales, ambientales y multiculturales. Así, esta base teórica permite relacionar los elementos culturales, sociales y matemáticos inmersos en las prácticas matemáticas desarrolladas en contextos diversos.

Palabras clave: Educación Matemática; Etnomatemática; Perspectivas; Multiculturalidad; Sesión Temática.

Consideraciones Iniciales

Es importante que los investigadores y profesores a partir de su formación inicial conozcan y respeten la cultura de los miembros de los grupos culturales distintos y, por otro lado, es necesario adquirir herramientas para considerar los valores y costumbres de cada una de las culturas, desde una posición crítica que ayude a fortalecer sus principios (Rosa y Orey, 2017a).

La presente sesión temática tiene como objetivo lograr un balance de las perspectivas de las Etnomatemáticas en la Educación Matemática. Así, con el fin de entender el desarrollo de las Etnomatemáticas como un programa, es necesario discutir sus perspectivas actuales y futuras para analizar sus metas, objetivos y supuestos con respecto a la promoción de la ética, del respeto, de la solidaridad y de la cooperación entre las culturas.

Por ejemplo, Rosa, Orey y Gavarrete (2017) destacan que es esencial mostrar que las etnomatemáticas incluyen ideas, técnicas, estrategias, procedimientos, perspectivas y prácticas matemáticas de miembros de culturas distintas, que son manifestadas y difundidas de diversos modos. En ese contexto, el desarrollo de las etnomatemáticas debe ser documentado, como parte el estudio del progreso social, cultural, económico, político y científico de las ideas y las prácticas matemáticas desarrolladas por los miembros de grupos culturales distintos.

Así, las Etnomatemáticas son una corriente de investigación para la educación matemática que permite contextualizar los elementos y símbolos presentes en las prácticas matemáticas cotidianas. Entonces, “La etnomatemática se reconoce como una práctica escolar válida que refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural y ofrece una amplia visión de la humanidad que tiende de forma creciente hacia el multiculturalismo y pluriculturalismo” (D’Ambrosio, 2000, p. 440).

Además, de acuerdo con Rosa y Orey (2017a), las Etnomatemáticas están en constante evolución y no es una teoría finalizada, pues es una propuesta de programa de investigación que tiene una base teórica en constante desarrollo. Entonces, las Etnomatemáticas son un programa que fomenta la transculturalidad y transdisciplinariedad, donde utiliza métodos de investigación de las ciencias, de cognición, mitología, antropología, historia, sociología, política, economía, educación y estudios culturales en general.

Adicionalmente, el concepto de Etnomatemáticas tiene una visión más amplia que solo el estudio de prácticas matemáticas, debido al reconocimiento de grupos diferenciados, utilizando etnografía y estudios antropológicos (D’Ambrosio, 2018). En este contexto, al conceptualizar las Etnomatemáticas, en sentido amplio, este término es definido por medio de tres raíces griegas:

a) *ticas* (techné), que define modales, estilos, artes y técnicas.
b) *matema,* que significa hacer y saber, explicaciones, comprensiones, enseñanza y aprendizaje para afrontar situaciones y resolver problemas de su propio contexto sociocultural.
c) *etno,* que significa el entorno natural, sociocultural e imaginario de los miembros de culturas distintas (D’Ambrosio, 1990).

Estas raíces están relacionadas con los modos, estilos, artes y técnicas (ticas) para hacer y conocer, explicar, comprender, enseñar y entender (matema) en el entorno natural, sociocultural e imaginario (etno), siendo que se puede sintetizar este concepto de la relación entre las Matemáticas y la Cultura por medio de un término compuesto por las ticas de matema en diferentes etnos: tica+matema+etno o reordenando la expresión: *etno+matema+tica*, o simplemente Etnomatemáticas (D'Ambrosio y Rosa, 2008).

Consecuentemente, uno de los principales pilares de esta sesión temática está basado en los aportes de las Etnomatemáticas porque se interesa en estudiar los factores sociales y culturales que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y extraescolares en diversos contextos sociales, económicos, políticos, culturales, ambientales y multiculturales (Rosa y Orey, 2017a).

Así, esta base teórica permite relacionar los elementos culturales, sociales y matemáticos inmersos en las prácticas matemáticas desarrolladas en diversos contextos, concepciones y perspectivas de las Etnomatemáticas Es importante resaltar las diferentes formas de organización del conocimiento a nivel mundial, como lo es la Educación Matemática formal, es decir que es aquella que se aprende y enseña a través de los programas de educación (Bishop, 2000).

Entonces, la Educación Matemática no formal ocurre en situaciones que se desarrollan fuera del contexto educativo, como, por ejemplo, en medio de la televisión, la radio y de los periódicos, o en medio de las situaciones cotidianas que se desarrollan en la vida diaria. En esa perspectiva, Peña (2014) comenta que:

> Una concepción de unas matemáticas desconectadas de la historia, de otros conocimientos, y del entorno, de manera natural nos ha llevado a ignorar los conocimientos matemáticos de los estudiantes, lo que ha tenido implicancias pedagógicas para el desarrollo potencial del pensamiento matemático de estudiantes de aulas culturalmente homogéneas o diversas (p. 171).

Etnomatemática y Decolonialidad

Desde una perspectiva intercultural, las Etnomatemáticas estudian las diversas formas como las sociedades y grupos humanos construyen cuerpos de conocimiento matemático, cada uno desde una posición epistemológica original, producto de su desarrollo histórico, social, económico, ambiental y político, condicionado por las condiciones materiales que dominan las sociedades.

Desde el inicio de la Modernidad, se han producido invasiones europeas en diversos continentes, como es el caso de América Latina, proceso político en el que se ha impuesto la hegemonía de la cultura occidental sobre las culturas de los pueblos originarios. Esa dominación política, económica y social ha producido un epistemicidio, una sistemática destrucción e invisibilización de los conocimientos de los pueblos originarios colonizados, también en el área de la matemática (Bonilla-Tumialán, 2019), con la finalidad de sojuzgar el alma de los pueblos y mantener su hegemonía.

Una evidencia histórica del epistemicidio en la cultura andina está dada por la destrucción de los quipus (sistema de escritura inca), ordenada por el Concilio de Lima de 1583 (Vargas Ugarte, citado por Ascher & Ascher, 1997). Ambos investigadores señalan que la forma en que los incas concibieron los conceptos de número, configuración geométrica y lógica, así como el quipu, no tuvo paralelo con otras culturas, los incas no iban en la misma dirección que otras culturas, no se puede saber a dónde habrían llevado sus ideas de no haberse producido la invasión española. Con el quipu tenían una forma distinta de registrar sus conocimientos, no con signos lingüísticos sino con cuerdas, de manera tridimensional y táctil.

Otra evidencia histórica de la intención de destruir la cultura andina estuvo dada por las leyes emitidas por la corona española contra la cultura incaica después del sofocamiento de la Revolución de Túpac Amaru de 1780. Los españoles se arrepintieron de haber educado a la nobleza incaica y tomaron medidas contra la educación y cultura andina, pues pensaban que con ello iban a impedir una futura rebelión. Prohibieron el uso de los títulos nobiliarios incaicos, de la vestimenta incaica, del idioma quechua. Por lo tanto, debían vestirse según la costumbre española y hablar el idioma español, profundizándose su enseñanza en las escuelas, imponiéndose penas cada vez más rigurosas contra quienes incumplan la prohibición.

Después de la Emancipación de las colonias latinoamericanas, el genocidio, la exclusión, la inequidad, el dominio de lo europeo sobre lo indígena fueron características que persistieron en la República. Pero no solo se invisibilizaron las prácticas culturales, también se ignoró y menospreció la forma de aprender de los pueblos originarios amerindios, su epistemología, dándole un carácter de atraso y de inferioridad. Los pueblos americanos también desarrollaron una ciencia indígena, también investigaron para encontrar la solución de sus problemas, pero el proceso de producción de conocimientos es distinto al occidental (Bonilla-Tumialán, 2023).

En consecuencia, considerando lo expresado líneas arriba, desde las Etnomatemáticas es posible sostener una posición no colonial de los saberes, una decolonialidad que implica la búsqueda, divulgación y respeto de los saberes y haceres matemáticos de los pueblos originarios, tan válidos en su contexto como la matemática formal de la cultura occidental. Estos saberes y haceres muchas veces subyacen en sus prácticas sociales y han resistido la destrucción promovida por la cultura occidental. Dado lo anterior, es importante trabajar de una forma holística y conjunta, pues D'Ambrosio (1985) sostiene que un puente entre los antropólogos e historiadores de las culturas, y los matemáticos, es un paso importante hacia el reconocimiento de que diferentes modos de pensamiento pueden conducir a diferentes formas de matemáticas; este es el campo que nosotros podemos llamar etnomatemáticas.

Lograr el reconocimiento de los diferentes modos de pensamiento y formas de matemáticas, es decir, reconocer las diferentes epistemologías, significa luchar por una justicia epistémica, reconocer dentro de los derechos culturales, el derecho epistémico de los pueblos, definido como el derecho a ejercer procesos de construcción y validación del conocimiento que emanan de las prácticas culturales de cada comunidad. Es decir, el derecho que tiene cada pueblo originario a: desarrollar una epistemología distinta que corresponde a su devenir histórico; relacionarse con la naturaleza de acuerdo a su cosmovisión; enfrentar y solucionar los problemas que surgen en la práctica comunitaria teniendo en cuenta sus normas y principios; investigar y construir cuerpos de conocimientos o teorías sobre las diversas áreas de la actividad humana que ponen en práctica, según sus criterios de validación; registrar de manera autónoma, no necesariamente mediante signos lingüísticos, la información que es recogida de las prácticas sociales; y analizar la información, mediante procesos cognitivos pertinentes y propios, con la finalidad de producir conocimiento (Bonilla-Tumialán, 2023).

El Programa de Investigación Etnomatemática

Es importante resaltar que, en el Programa Etnomatemáticas los sistemas de conocimiento se perciben como conjuntos de respuestas que los miembros de grupos culturales distintos brindan a los impulsos de supervivencia y trascendencia, que son inherentes a la especie humana. Estos impulsos pueden considerarse como las acciones y conocimientos producidos por una determinada cultura (D'Ambrosio, 2006).

En este sentido, estas acciones son las observaciones hechas desde la realidad, a las que también se denominan conocimiento empírico, a diferencia del conjunto de principios fundamentales de una ciencia, a los que se les denomina conocimiento teórico (Rosa y Orey, 2012). Entonces, uno de los objetivos más importantes del Programa de Etnomatemáticas es comprender la relación entre las acciones y los conocimientos, saber y hacer desarrollados por miembros de una determinada cultura (D'Ambrosio, 2006).

Consecuentemente, para Rosa y Orey (2017a), el Programa Etnomatemáticas se asocia con la forma en que el conocimiento matemático se construye, cuando se reflexiona la manera en cómo se aprende o cómo se aprendió y también cómo los miembros de grupos culturales distintos saben y que es lo que saben. En esta dirección, Rosa y Orey (2017a) afirman que los sistemas de conocimiento matemático son conjuntos de respuestas que los miembros de esos grupos dan a los impulsos de supervivencia y de trascendencia inherente a la especie humana. Estos son los haceres y los saberes de una cultura.

Así, de acuerdo con D'Ambrosio (2006), para comprender la relación entre las acciones relacionadas con la observación de la realidad a través del empirismo y el conocimiento relacionado con los conceptos teóricos para comprender y explicar la realidad, se pueden discutir tres cuestiones directas, que sirven de base para que podamos explicar la evolución del conocimiento humano:

a) ¿Cómo pasamos de las observaciones y prácticas *ad hoc*[1] a la experimentación y el método?
b) ¿Cómo pasamos de la experimentación y el método a la reflexión y la abstracción?
c) ¿Cómo procedemos con las invenciones y las teorías?

De acuerdo con ese contexto, Rosa (2019) afirma que el propósito de las Etnomatemáticas es desarrollar un cuerpo estructurado y de naturaleza alternativa del saber-hacer del conocimiento matemático. Para lograr este objetivo, es fundamental desarrollar estas tres preguntas en las investigaciones en Educación Matemática. Entonces, para Rosa (2019), es necesario comprender cómo las prácticas matemáticas se desarrollan desde las soluciones *ad hoc* (locales) hasta invenciones científicas formalizadas (globales) y desde las experiencias a los experimentos, que se relacionan con los métodos científicos (dinamismo cultural).

De ese modo, Rosa (2019) destaca que este proceso traslacional es bidireccional (*saber/hacer* matemático local y conocimiento matemático escolar/académico) en la relación humana y, también, multidireccional en los aspectos relacionados con los campos: científico, cognitivo, conductual, organizacional, comportamental, político, económico y ambiental.

[1] *Ad hoc* es una expresión latina que significa para este propósito. Generalmente, significa una solución diseñada para problemas o tareas específicas, no generalizables y que no se pueden adaptar a otros propósitos o contextos (Rosa & Orey, 2010).

Por ejemplo, en un contexto escolar, los estudiantes desarrollan observaciones y trabajan con geometría experimental. Ellos están observando sólidos geométricos dentro de una caja de agua (práctica *ad hoc*). Al desarrollar la geometría experimental, los estudiantes miden el nivel del agua (método) y explican los cambios en el nivel del agua para desarrollar el concepto de volumen (teoría). Luego, ellos construyen otros sólidos geométricos con cierto volumen (invención).

Para Rosa (2010), según este punto de vista, el Programa Etnomatemáticas también se basa en la integración del sistema de conocimiento con las cuestiones inherentes a la supervivencia y trascendencia de la humanidad. Entonces, la relación entre los conocimientos y las prácticas desarrolladas por los miembros de grupo culturales distintos resume la controversia entre la observación de la realidad (empirismo) y el conjunto de principios fundamentales de una ciencia (teoría).

En este contexto, D'Ambrosio (1993) destaca que estas cuestiones pueden orientar una reflexión sobre la evolución del conocimiento, pues en este programa, su generación, organización y difusión y, también, su retorno a quienes lo produjeron puede desarrollar un ciclo armónico del conocimiento de manera integrada, que considera la constante interrelación de los individuos con la realidad y su acción.

Es en este sentido que D'Ambrosio (1990) afirma que las Etnomatemáticas son un programa de investigación científica que estudia la historia y filosofía de las Matemáticas, siendo de carácter dinámico y holístico, que se preocupa por el retorno de la producción de saberes y haceres matemáticos a las comunidades investigadas para discutir sus epistemologías y cosmologías.

De igual manera, para que podamos realizar un balance de las perspectivas de las Etnomatemática en la Educación Matemática, es necesario ampliar la discusión de las posibilidades para la inclusión de las perspectivas Etnomatemáticas que respeten y den voces a la diversidad social y cultural de los miembros de grupos culturales distintos y, de este modo, desarrollar una comprensión de sus diferencias a través del diálogo y el respeto en busca de la paz (Rosa, Orey, y Gavarrete, 2017).

Consecuentemente, es necesario discutir y debatir perspectivas innovadoras relacionados entre sí en el Programa de Etnomatemática, tales como su relación con la justicia social, los derechos civiles, la educación indígena, los contextos profesionales, la práctica de los juegos, los contextos urbanos y rurales, la etnotransdisciplinaredad, la etnopedagogía, la etnometodología, la etnomodelación y la etnocomputación (Rosa & Orey, 2017a).

La percepción de la conexión entre la Cultura y las Matemáticas es crucial para subrayar la importancia de hacer el trabajo etnomatemático primero. Este enfoque lleva a una buena comprensión de los aspectos matemáticos de la cultura y un propósito claro de la actividad pedagógica, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas tienen un papel vital en el desarrollo de la humanidad.

Preguntas Generales para la Discusión

1) ¿Cuáles son las perspectivas actuales y futuras de la Etnomatemática para analizar sus metas, objetivos y supuestos en cuanto a la promoción de la ética, el respeto, la solidaridad y la cooperación entre culturas?
2) ¿De qué manera las Etnomatemáticas contribuyen a la visibilización y estudio de los *saberes* y *haceres* matemáticos de los pueblos originarios desde una perspectiva decolonial?
3) ¿Por qué las Etnomatemáticas están en constante evolución y no es una teoría finalizada?
4) ¿Por qué las Etnomatemáticas son una propuesta de programa de investigación que tiene una base teórica en constante evolución?
5) ¿Cuáles son las perspectivas innovadoras relacionados entre sí en el Programa Etnomatemáticas?
6) ¿Cuáles son las posibilidades para la inclusión de las perspectivas Etnomatemáticas que respeten y den voces a la diversidad social y cultural de los miembros de grupos culturales distintos y, de este modo, desarrollar una comprensión de sus diferencias a través del diálogo y el respeto en busca de la paz?

Las discusiones desarrolladas en estas dos sesiones temáticas demostraron que las Etnomatemáticas enriquecen las temáticas novedosas para los profesores, maestros, estudiantes e investigadores, así como muestran como las aplicaciones matemáticas pueden encontrarse no sólo en muchas áreas de las ciencias, de los negocios y de la vida cotidiana; sino también muestran que podemos ver las matemáticas en las prácticas culturales desarrolladas por los miembros de grupos culturales distintos en todo el mundo.

Las ideas, los procedimientos, las técnicas, las estrategias y las prácticas etnomatemáticas describen nuevas formas de ver la matemática, que buscan promover una mejor comprensión de los conceptos y de los usos de los contenidos curriculares en una perspectiva sociocultural. Consecuentemente, muchas veces los resultados de investigaciones en Etnomatemáticas se llevan directamente a las aulas, enriqueciendo el material con el que trabajan los estudiantes y, otras veces, no se puede aplicarlos directamente, pues depende de la información aprendida en el trabajo desarrollado en el campo.

Entonces, los maestros y profesores de matemáticas diligentes necesitan aprender acerca de la cultura de sus alumnos y adaptar los contenidos matemáticos para que sean relevantes para los intereses locales. Dado que cada vez más las políticas educativas reclaman que el trabajo etnomatemático sea incluido para enriquecer la diversidad en el currículo de las escuelas, la enseñanza de la matemática comienza a ser una actividad creativa, insubordinada, subversiva y responsable.

Por ejemplo, Rosa y Orey (2017a) sostienen que esta aplicación nos brinda la oportunidad de examinar los sistemas de conocimientos locales y globales, para tener una idea de las formas de las matemáticas utilizadas en diversos contextos y grupos culturales, por medio de una *relación dialógica simétrica y con alteridad*. Este enfoque pedagógico que conecta esta diversidad de comprensión de las matemáticas está mejor representado por un proceso de traducción y elaboración de los problemas y preguntas tomados de los fenómenos diarios.

Por lo tanto, con el fin de entender el desarrollo de las Etnomatemáticas como un programa, del pasado al futuro, es necesario discutir sus perspectivas actuales y futuras para analizar sus metas, objetivos y supuestos con respecto a la promoción de la ética, del respeto, de la solidaridad y de la cooperación entre las culturas. De ese modo, es esencial mostrar que las Etnomatemáticas incluyen ideas, perspectivas y prácticas matemáticas de individuos en diferentes culturas y que estas ideas son manifestadas y transmitidas de diversos modos. Así, el desarrollo de las Etnomatemáticas debe ser documentado como parte del estudio del progreso científico de las ideas y las prácticas matemáticas efectuadas por los miembros de grupos culturales distintos.

Según este contexto, muchos investigadores han desarrollado aportes sobre las matemáticas de los pueblos nativos y otros han afirmado que los matemáticos, al comunicar sus concepciones matemáticas, tienden a despersonalizar y aislar el contexto, para favorecer la generalidad y la abstracción. Sin embargo, los profesores tienen que dar significado a los contenidos matemáticos, así que tienen que personalizar y contextualizarlos en los marcos: geográfico, temporal, político, económico, ambiental, social y cultural.

Cuando se examinan las aplicaciones educativas de las etnomatemáticas es útil recordar los estudios realizados sobre el aprendizaje en situaciones fuera de la escuela y cómo nos puede ayudar en la pedagogía de la educación matemática. Entonces, la Educación Matemática debería centrarse en el desarrollo de modelos matemáticos para el razonamiento y no en operaciones aritméticas; así como también la enseñanza de las operaciones debería ser utilizado como un instrumento adicional a la resolución de problemas, más que como el punto de partida para la resolución de problemas.

Las argumentaciones a partir de ejemplos etnomatemáticos en las aulas permiten mostrar a los estudiantes que pertenecen a culturas con baja representación, la contribución que dan al pensamiento matemático y al mismo tiempo exponer a los estudiantes que pertenecen a culturas mayoritarias a diferentes culturas de todo el mundo, promoviendo el respeto por la diversidad y contribuyendo a la *educación glocal* que busca promover un enfoque que garantice el desarrollo de la comprensión de las diferentes maneras de hacer las matemáticas mediante diálogo y respeto mutuos entre las perspectivas locales y globales a través de la glocalización.

Los ejemplos pueden venir de las tradiciones familiares, aficiones, religiones y ocupaciones; actividades basadas en la geografía; celebraciones de días festivos y eventos de la vida; intereses personales, tales como deportes, música, arte, danza, o la artesanía; actividades e incluso relacionados con la infancia, juegos y fiestas de cumpleaños. Las Etnomatemáticas ofrecen una visión más amplia de las matemáticas, las cuales abarcan ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas culturales arraigadas en distintos ambientes, lo cual favorece un aumento de la evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes que se fomentan en las aulas.

Una reflexión sobre las dimensiones sociales y políticas de etnomatemáticas, pues se favorece la posibilidad de desarrollar enfoques innovadores para una sociedad dinámica y glocalizada. La *glocalización* enriquece las temáticas novedosas para los estudiantes y les muestra como las aplicaciones matemáticas pueden encontrarse en muchas áreas de la ciencia, de los negocios, de la vida cotidiana y en las diversas prácticas culturales.

En ese sentido, Rosa y Orey (2017b) afirman que la glocalización (***glo****bal*+*lo****cal***) es un abordaje dialógico que considera la interacción entre los conocimientos matemáticos *locales* (desde dentro/émicos/*insiders*) y globales (desde fuera/éticos/*outsiders*). Este enfoque también está relacionado con la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales distintos que componen la sociedad.

Consideraciones Finales

Es importante ampliar la discusión de las posibilidades para la inclusión de las perspectivas Etnomatemáticas que respeten y den voces a la diversidad social y cultural de los miembros de grupos culturales distintos y, de este modo, desarrollar una comprensión de sus diferencias a través del diálogo y el respeto en busca de la paz. Entonces, es necesario destacar que la agenda actual del Programa de Etnomatemáticas es continuar su trayectoria progresiva por contribuir a la consecución de la justicia social y la dignidad para todos.

Entonces es importante promover un enfoque sociocultural en el currículo de las matemáticas con el fin de luchar contra la descontextualización curricular que resulta de una visión monocultural de la sociedad. Este enfoque tiene el reto d*e trascender* el *etnocentrismo* y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con *respeto y equidad* en clase. En este sentido, el empoderamiento de los estudiantes en las áreas intelectual, social, emocional y política impacta en su realidad y sus contextos socioculturales e históricos, ya que les permite transmitir conocimientos, impartir habilidades académicas y cambiar las actitudes hacia la instrucción de las matemáticas y su encuentro con la paz.

Así, las Etnomatemáticas se basan en las experiencias y prácticas socioculturales de los estudiantes, sus comunidades y la sociedad en general, usándolos no sólo como vehículos para hacer el aprendizaje matemático más significativo y útil, sino también, para proporcionar a los estudiantes las percepciones de que el conocimiento matemático está incrustado en diversos ambientes. Este enfoque lleva a una buena comprensión de los aspectos matemáticos de la cultura y un propósito claro de la actividad pedagógica, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas distintas tienen un papel vital en el desarrollo de la humanidad.

Este enfoque también debe favorecer un cambio en la percepción actual de las conexiones entre las culturas y las matemáticas, con la finalidad de subrayar la importancia de dirigir investigaciones etnomatemáticas. Desde esta perspectiva, se ofrece una mejor comprensión de las visiones matemáticas de la cultura, como la émica, la ética y la dialógica, así como se favorece la actividad pedagógica con el uso de los artefactos, mentefactos y sociofactos, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas tienen un papel vital en el desarrollo de la humanidad.

Referencias

Ascher, M. & Ascher, R. (1997). *Mathematics of the Incas: Code of the Quipu*. Dover Publications.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? En: Gorgorió, M. N., & Solá, J. D. P. (Coords.). *Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 35-56). Barcelona, España: Graó.

Bonilla-Tumialán, M. C. (2019). *Un estudio del proceso de elaboración del tejido quechua en telar de cuatro estacas. Aportes para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica.* Pontificia Universidad Católica del Perú.

Bonilla-Tumialán, M. C. (2023). Ethnomathematics and Complexity: A Study of the Process of Elaboration of a Peruvian Andean Textile. En: Borba, M.C., Orey, D.C. (Eds). *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 179-200). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31293-9_13

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*: arte ou técnica de conhecer e aprender. São Paulo, SP: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: um programa. *A Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (2000). Las dimensiones políticas y educacionales de la Etnomatemática. En: Cejas, A. M. (Coord.). *Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos* (pp. 439-444). Madrid, España: Revista de Didáctica de las Matemáticas.

D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics*: link between traditions and modernity. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (2018). Etnomatemática, justica social y sustentabilidad. *Estudios Avanzados*, *32*(94), 189-204.

D'Ambrosio, U., & Rosa, M. (2008). Um diálogo com Ubiratan D'Ambrosio: uma conversa brasileira sobre etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *1*(2), 88-110.

Peña, P. (2014). Etnomatemáticas y currículo: una relación necesaria. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 170-180.

Rosa, M. (2010). *The perceptions of high school leaders about English language learners (ELL)*: the case of mathematics. Educational Leadership. Doctorate dissertation. College of Education. Sacramento, CA: California State University, Sacramento - CSUS.

Rosa, M. (2019). *From ad hoc solutions to scientific invention*: the achievements of scientific standards in ethnomodelling research. Plenary Panel: Scientific Standards and How We Can Achieve Them in Mathematical Modelling Educational Research. The 19th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications – ICTMA19. Hong Kong, China: The University of Hong Kong.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 58-67.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2012). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. Ed*ucação e Pesquisa*, *38*(4), 865-879.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2017a). *Influências etnomatemáticas em salas de aula: caminhando para a ação pedagógica*. Curitiba, PR: Appris Editora.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2017b). *Etnomodelagem*: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. São Paulo, SP; Editora Livraria da Física.

Rosa, M., Orey, D. C., & Gavarrete, M. E. (2017). El programa etnomatemáticas: perspectivas actuales y futuras. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(2), 69-87.

Valcárcel, C. D. (1945). Síntomas y consecuencias de la rebelión de Túpac Amaru. *Letras (Lima), 11*(30), 96–126.

Balance y perspectivas de la Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl
Edwin **Chaves**
Profesor jubilado: Escuela de Estadística Universidad de Costa Rica; y Escuela de Matemática, Universidad Nacional; Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
echavese@gmail.com

Resumen

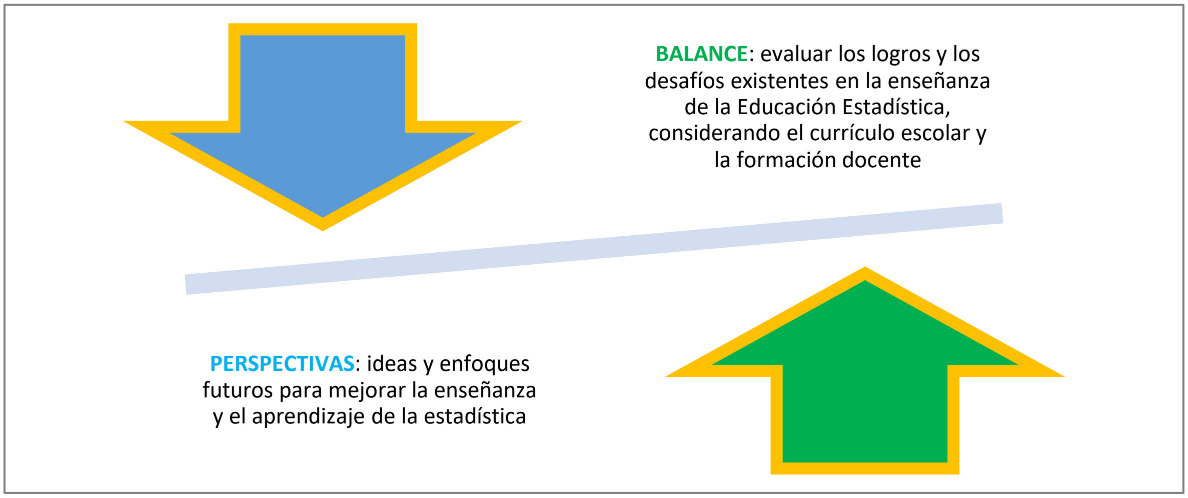
Se sintetiza la sesión temática, Balance y perspectivas de Educación Estadística, la cual se constituyó en una experiencia para compartir reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en el contexto de los países de la región. La sesión se proyectó como un espacio para reconocer e integrar la Estadística Cívica como una línea de investigación emergente para nuestro tiempo y pretendía mediante debates y diálogos académicos, llegar a reunir las ideas surgidas sobre una variedad de perspectivas relacionadas con problemáticas reales que los participantes hayan tenido como parte de su práctica educativa.

Los resultados obtenidos en la sesión sobrepasaron las expectativas no solamente en asistencia sino también en el debate de ideas de crucial importancia para el desarrollo de la Educación Estadística en nuestra región. Muchos de temas quedaron abiertos para la discusión, por lo que se espera poder seguir ofreciendo espacios de análisis para que se continúe el debate sobre los mismos.

Palabras clave: Educación Estadística; Estadística Cívica; aprendizaje y enseñanza de la Estadística; formación de profesores.

Introducción

En el marco de la XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), Soledad Estrella (Chile) y Edwin Chaves (Costa Rica) lideraron la sesión temática que abordaba aspectos de balance y perspectivas de la estadística y la probabilidad en la educación matemática de nuestro tiempo. El evento tuvo lugar en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023.



El objetivo principal de la sesión temática fue compartir la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad entre los países representados (Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, México, Panamá, Perú, Puerto Rico, Uruguay, Estados Unidos, y Venezuela). Además, se consideró la Estadística Cívica como una línea de investigación en evolución y necesaria para estos tiempos. Los 42 participantes, a lo largo de dos sesiones de una hora, participaron en discusiones grupales sobre los temas: Currículo escolar y formación docente; y Cuestiones sociales y cambio climático.

La primera sesión tuvo como objetivo reunir ideas planteadas por los propios participantes desde diversas perspectivas en relación con problemas reales. La segunda sesión buscó presentar las ideas resumidas e integrarlas en el marco de la Estadística Cívica, de modo que los participantes pudieran relacionar efectivamente cuestiones cívicas, sociales y políticas, para comprender mejores aspectos de la sociedad y la vida ciudadana, especialmente en una época caracterizada por los avances tecnológicos, grandes cantidades de datos y desafíos y urgencias cada vez mayores. Los organizadores de la Sesión Temática resumieron las discusiones grupales sobre temas como: formación docente, cambios curriculares, educación estadística en el currículo escolar, análisis de datos y nuevas tecnologías, entre otros.

En los siguientes cuatro apartados, damos cuenta de lo acontecido en dichas sesiones que buscaban compartir en la comunidad de educadores estadísticos, reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Estadística, Inferencia y Probabilidad en el contexto de la educación matemática en nuestros países. En ambas las sesiones se dio un espacio para reconocer las 11 facetas de un modelo conceptual sobre Estadística Cívica. También, vislumbrábamos llegar a reunir las ideas surgidas sobre una variedad de perspectivas relacionadas con problemáticas reales, como la crisis social y el cambio climático, que debiesen ser asumidas desde el currículo escolar y en la formación inicial y continua de los docentes, de modo que efectivamente lleguen a permear la vida cívica, con el fin de motivar debates y diálogos académicos.

1. La enseñanza de la Estadística y Probabilidad dentro del currículo de Matemáticas: ¿Difieren ellas de las otras áreas matemáticas?

La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en los niveles educativos previos a la universidad ha estado tradicionalmente incluida dentro del currículo de Matemáticas. Esto ha sido fuente de discusión por años, debido a que se argumenta que existen importantes diferencias disciplinares entre ambas áreas. Al respecto los asistentes a la sesión señalaron:

- Desde el punto de vista de la disciplina, la Estadística es una ciencia autónoma, la formación de Estadísticos se basa en principios epistemológicos diferentes a los que rigen la formación matemática. Los profesionales en estadística tienen que adecuarse a trabajar con diferentes disciplinas científicas que son las que le proporcionan los datos y le plantean retos para la generación de respuestas a problemas complejos. Esta diferencia epistemológica que se presenta entre la Estadística y Matemáticas debería también evidenciarse en el currículo educativo escolar, quedando claro que, aunque la Estadística utiliza herramientas matemáticas, su razón de ser supera ese análisis matemático y requiere permanentemente interpretar e integrar el contexto que originó los datos.

- Muchos de los problemas que se presentan en la enseñanza de Estadística se deben a que su enseñanza está incluida como un área más dentro de las Matemáticas; pero el pensamiento estadístico es distinto al pensamiento matemático.

- Los análisis estadísticos requieren de una serie de procedimientos matemáticos, pero no pueden quedarse allí, porque el cálculo matemático simplemente es una herramienta para avanzar hacia el análisis de datos, la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre y la resolución eficaz de problemas estadísticos.

- Los contextos empleados en los problemas de las otras áreas matemáticas, en la mayoría de los casos son artificiales y su función consiste en proporcionar información numérica para la aplicación de procedimientos matemáticos y generación de cálculos. Sin embargo, en Estadística el contexto de los problemas es de crucial importancia, pues proporciona las interrogantes a investigar y los datos se constituyen en la base de los análisis, interpretaciones y decisiones.

- Este potencial de la Estadística para resolver problemas en diferentes áreas puede ser utilizada como herramienta en otras disciplinas curriculares. Sin embargo, el estar incluido dentro del currículo matemático se limita este potencial y raramente es empleado por otras disciplinas.

- Aunque paulatinamente la Estadística ha venido encontrando un campo aparte de las Matemáticas, la Estadística ofrece una oportunidad para valorar un uso adecuado de las

Matemáticas en la resolución de problemas en contextos reales y pudiendo ser utilizada para facilitar el aprendizaje y el sentido de otras áreas.

- Particularmente en Estados Unidos y en Puerto Rico se discute sobre la necesidad de separar la Educación Estadística de la Educación Matemática. Aunque para algunos especialistas sea razonable buscar está separación curricular entre Matemáticas y Estadística, en la práctica resulta imposible, para la mayoría de los países de la región.

A manera de resumen, se puede observar que la discusión ha quedado abierta; sin embargo, queda en evidencia en este resumen que, aunque se argumenta que existen importantes diferencias entre la Estadística y la Probabilidad respecto las áreas matemáticas como Álgebra y Geometría, tampoco se desconocen los principios matemáticos que están detrás de los procedimientos estadísticos, que como se apuntó: el uso de la Estadística y la Probabilidad en la resolución de problemas constituye indirectamente un ejemplo de la utilidad de las Matemáticas.

2. Formación de educadores matemáticos en la región: retos para la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad

En este apartado se incluyen las opiniones y argumentos de los participantes de las sesiones sobre los problemas y desafíos que enfrenta el docente de Matemáticas al enseñar Estadística.

En la enseñanza de cualquier asignatura escolar el docente es fundamental en el proceso educativo, pues es el responsable de lograr que los estudiantes alcancen las habilidades y conocimientos planteados en el currículo; incluso se ha documentado que la calidad de la formación que reciben los estudiantes está predeterminada por la calidad de docentes que ha tenido.

- En la mayoría de nuestros países la formación de maestros en primaria y secundaria adolece de propuestas didácticas específicas para la enseñanza de la Estadística, por lo que, en el trabajo de aula, ellos tienden a reproducir las estrategias utilizadas por quienes los formaron matemáticamente, reproduciendo aquellas que enfatizan procedimientos y fórmulas.

- Hay una necesidad de lograr que los maestros tengan una formación sólida disciplinar de la Estadística y las Probabilidades, y en didáctica específica en el campo, preferiblemente en forma conjunta. Debe existir un equilibrio entre los dos componentes para la formación docente de modo que puedan tener la capacidad para desarrollar en las aulas actividades de enseñanza que potencien en forma progresiva el aprendizaje y el pensamiento estadístico de los estudiantes, según avanzan en los diferentes niveles educativos.

- En muchos casos se requiere generar acciones de desarrollo profesional docente que propicien que los maestros resuelvan problemas estadísticos en situaciones reales, para que tengan experiencias reales con el razonamiento estadístico detrás de un problema, que sean partícipes en la búsqueda de soluciones y valoren la importancia de los diferentes elementos disciplinares e investigativos para llegar a la solución en contexto.

- Los maestros, al enseñar Estadística a diferencia de otras áreas matemáticas, deben tener claro que el énfasis no se concentra en procedimientos, cálculos o construcciones gráficas y tabulares, dado que existen herramientas que pueden utilizarse para llevarlos a cabo; siendo fundamental concentrarse en el análisis, visualización e interpretación del comportamiento de los datos en la búsqueda de una solución del problema original.

- Se considera que, en la formación de los maestros, de primaria o secundaria, se requiere dar énfasis a las diferencias que existen en la Matemática y la Estadística desde el punto de vista epistemológico y desde el punto de vista práctico, para que puedan reconocer que se requieren enseñanzas diferentes. En particular, en la enseñanza de la Estadística se deben propiciar una didáctica disciplinar que promueva la indagación mediante el ciclo investigativo, y las diferentes formas de pensamiento estadístico y probabilístico de acuerdo con la edad de los estudiantes.

A manera de resumen, se percibe que hay importantes desafíos que deben abordarse en el desarrollo profesional docente de los educadores matemáticos para favorecer un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística y Probabilidad en los niveles educativos anteriores a los estudios universitarios. Los retos se relacionan no solamente con mejorar la formación disciplinar en las áreas sino también en cuanto a las didácticas específicas. Acá encontramos consistencia con los aportes anteriores debido a que, al identificarse diferencias entre la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad con las otras áreas del currículo matemático, es de esperar que también haya diferencias en la aplicación del conocimiento propio de sus didácticas específicas. De lo resumido en estos dos temas, resalta la importancia que otorgan los actores a una enseñanza dentro de un ciclo investigativo, mediante la resolución de problemas, las representaciones, los modelos, la argumentación y comunicación de las conclusiones, y el uso de tecnologías, que potencien diferentes procesos mentales propios del razonamiento estocástico.

3. Requerimientos curriculares en Estadística y Probabilidad en Latinoamérica

Se presenta en este último apartado, la opinión de diferentes actores educativos de trece países de la región sobre las necesidades de innovación sobre el currículo en la estadística escolar.

Un paso importante para el reconocimiento nacional de la importancia que conlleva la formación en Estadística y Probabilidad de un ciudadano consiste en la incorporación de estos tópicos dentro de los currículos educativos en la educación escolar. Esta necesidad ha sido valorada por las autoridades educativas en la mayoría de los países de la región. Sin embargo, el mero hecho de su incorporación en los currículos escolares, específicamente de Matemáticas, no implica necesariamente que se esté potenciando una adecuada alfabetización en estas áreas. Los asistentes a la sesión temática señalaron algunas reflexiones relacionadas con este tópico:

- Existen grandes diferencias en la propuesta curricular para la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad entre los países de la región (al menos entre los países representados). Por ello, uno de los principales retos para mejorar la educación estadística y probabilística sería una unificación curricular (dentro de las posibilidades) de modo que los sistemas educativos de los países de nuestra región posean una propuesta curricular en estas áreas que genere una adecuada alfabetización estadística para nuestro tiempo, por ejemplo, incorporando aspectos de la Estadística Cívica.

- Es necesario dosificar las expectativas y metas planteadas dentro de los currículos escolares. Se han observado discrepancias entre expectativas de contenidos y procedimientos estadísticos en los distintos niveles educativos. Se requeriría clarificar metas intermedias en cada nivel, en que el planeamiento desde la Didáctica de la Estadística y la Didáctica de la Probabilidad aporten congruencia y coherencia con los niveles cognitivos de los estudiantes. Con esto se espera que ellos vayan progresando paulatinamente hacia mayores niveles de razonamiento estadístico al momento de resolver problemas, utilizando así las habilidades y conocimientos adquiridos en las etapas anteriores.

- La propuesta curricular en muchos de nuestros países promueve una enseñanza de la disciplina similar a la que se utiliza para otras áreas matemáticas, que está basada en procedimientos algorítmicos y construcciones procedimentales mecanizadas. En este sentido sería necesario realizar modificaciones a los programas de estudio de Matemáticas para que promuevan estrategias de enseñanza coherentes con la naturaleza de la Estadística y el desarrollo que ha tenido su didáctica.

- Ante cierta falta de competencia que presentan algunos docentes respecto a la Estadística y su didáctica específica para la enseñanza, sería oportuno que los currículos de Matemáticas incluyeran orientaciones metodológicas para el abordaje empírico y teórico de los tópicos estadísticos y probabilísticos. Una posibilidad consiste en incluir indicaciones metodológicas dentro de la malla curricular que sirvan de orientación a los docentes. Del mismo modo, se pueden explicitar ejemplos de situaciones o problemas que muestren la interdisciplinariedad propia de la Estadística con otras áreas matemáticas. Algunos países, como Chile, tiene estándares de formación inicial docente en el que integran los contenidos del eje de Estadística con la disciplina de la Didáctica de la Estadística, tanto para educación primaria como secundaria.

- También, parece necesario explicitar curricularmente la importancia que tiene la resolución de problemas y modelamiento en contextos cercanos al estudiante, que involucre desde la recolección de datos, su sistematización y análisis hasta la generación de conclusiones o toma de decisiones vinculadas con el problema. Incluso, se podría incorporar la inferencia estadística informal, de modo que los estudiantes sean capaces de realizar generalizaciones basadas en la evidencia de los datos que expresen la incertidumbre del contexto (ya algunos países lo hacen).

En resumen, aunque muchas de las observaciones y recomendaciones que dieron los participantes de la Sesión Temática dependen de decisiones de tipo político en lo interno de cada país o estado, es importante considerar que estas apreciaciones son elaboradas desde su experiencia académica y de las necesidades que han encontrado en sus sistemas educativos.

Asimismo, debe indicarse acá que —por limitaciones de tiempo—, no se llevó a cabo una reflexión exhaustiva ni técnica de los diferentes currículos involucrados; sin embargo, estas apreciaciones y preocupaciones son muy valiosas al momento de que se realicen valoraciones o evaluaciones de los currículos matemáticos en la región. Pero también, son un valioso insumo para las reflexiones que sobre el tema se realicen en los diferentes eventos académicos, tales como los que regularmente lleva a cabo el CIAEM-IACME.

4. Otros aportes de relevancia para la Educación Estadística

Por último, se van a citar una serie de apreciaciones que llevaron a cabo los asistentes a las sesiones en tópicos relacionados con el tema. Seguidamente se presenta un extracto de estos de ellos:

- **Uso de las tecnologías digitales:** el auge de las tecnologías digitales en la segunda mitad del siglo XX fue uno de los principales impulsores para que la Estadística pudiera alcanzar los niveles de desarrollo que cuenta hoy día. Gracias a las computadoras y a los softwares especializados, ha sido posible que la disciplina trascendiera el campo académico de los matemáticos y los estadísticos matemáticos y se convirtiera en una herramienta fundamental para la mayoría de las disciplinas científicas y para la comunidad en general. Como consecuencia de ese auge, la disciplina Estadística fue integrada dentro de los currículos escolares en los diferentes países.

  i. Uno de los presentes señaló que actualmente existen personas dedicadas a realizar análisis estadísticos de datos en diferentes campos con el apoyo de herramientas tecnológicas, pero que no son especialistas en Estadística, con lo cual plantea las siguientes preguntas ¿Qué problemas puede traer esto para la toma de decisiones en problemas concretos? ¿cómo puede afectar la enseñanza de la disciplina? En otras palabras, desde el punto de vista educativo ¿de qué manera se ve afectada la formación de esta cultura estadística el hecho que existan herramientas tecnológicas cada vez más sofisticadas para el análisis de datos? En la actividad no se dieron respuestas específicas a estas interrogantes; pero evidentemente plantean una sería preocupación que se relaciona con la importancia de la comprensión del instrumental estadístico, sus virtudes y limitaciones, así como los peligros de uso indiscriminado de los recursos tecnológicos en el análisis de datos. Esperamos que el tema pueda ser abordado en futuros encuentros.

  ii. En relación con lo anterior, en uno de los grupos de trabajo, se mencionó el riesgo que implica el énfasis que algunos países desarrollados han dado a herramientas como Data Analysis, Big Data, Data Science o la Inteligencia Artificial para los análisis de grandes bases de datos. La preocupación de los integrantes del grupo se enmarca en el impacto que ello tendría sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, y la formación docente en Estadística.

  iii. Como respuesta a esta preocupación, algunos de los participantes plantearon que no se debería verse como un riesgo sino como una oportunidad para reflexionar sobre la necesidad de generar nuevas estrategias educativas que pudieran aprovechar el potencial de estas herramientas para favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad en los nuevos tiempos. Indicaron que debería ser está una línea de investigación dentro del campo educativo.

- **Variabilidad y diversidad:** se ha mencionado que los datos son la herramienta de trabajo de la Estadística, de allí la importancia que estos datos no sean simplemente números o códigos aislados de un contexto al cual representan. Sin embargo, hay una particularidad en los datos que provocan que la Estadística tenga sentido, este es el principio de variabilidad que hay detrás de los datos. La comprensión de la variabilidad es factor clave para comprender el mundo, un mundo cambiante y diverso, donde resulta imposible encontrar dos objetos exactamente iguales. Esta comprensión de lo diverso abre un potencial de oportunidades para favorecer en las aulas escolares la tolerancia por las diferencias y apoyar la integración e inclusión, lo cual constituye una de las mayores prioridades del sistema educativo.

  En este punto, una de las docentes planteó una experiencia inspiradora, ella señalaba que durante algún tiempo ha trabajado con estudiantes con serios problemas de vinculación educativa. Indicó que tiene ejemplos concretos sobre estudiantes que normalmente obtienen poca participación en trabajo de aula y bajas calificaciones en otras áreas matemáticas como álgebra y geometría; pero que son capaces de desarrollar proyectos en Estadística en donde lograron no solo integrarse sino obtener muy buenas calificaciones. La docente señala que esta experiencia es un ejemplo del potencial que puede alcanzar la Estadística como un factor de retención de población escolar vulnerable. Otros docentes han tenido experiencias similares, quizás debido a que la vinculación de datos auténticos y el contexto dan sentido a muchos estudiantes a resolver problemas, modelar, representar, y aprender contenidos y procedimientos.

  Resolución de problemas en contextos de desarrollo sostenible: la Estadística y la Probabilidad son herramientas fundamentales al momento de buscar evidencias basadas en datos que permitan fundamentar hipótesis y apoyar la toma de decisiones; pero también combatir con argumentos sólidos los "*Fake News*" o noticias falsas que saturan las redes sociales e impactan negativamente la convivencia en la sociedad.

  i. Específicamente sobre este tema, en uno de los grupos mencionó la necesidad que en la acción educativa deberían ser incluidos problemas ambientales y de cambio climático que están poniendo en riesgo a las comunidades, sobre los que existe fuerte evidencia estadística que fundamenta cambios en el actuar de las personas en materia ambiental. Con este tipo de problemas no solo se involucra al estudiante en el análisis de problemas con datos en contextos reales, sino también permiten sensibilizarlos sobre la importancia de cuidar el ambiente, bienestar y la convivencia.

  ii. En relación con lo anterior, otra participante señaló ampliar temas como problemas en materia ambiental, y que era fundamental considerar en el aula problemas integradores de tres dimensiones del desarrollo sostenible: lo social, lo económico y lo ambiental. Específicamente en el tema de la crisis social y el cambio climático,

> existen diferentes estudios que aportan argumentos estadísticos sólidos que normalmente no son tomados en cuenta por los tomadores de decisiones. Se consideró como importante que el sistema educativo aproveche estos estudios como elementos de discusión dentro del aula no solo para la enseñanza de la disciplina sino también para sensibilizar sobre la situación actual.

Aunque esta categoría incluyó diferentes tópicos, la relevancia de cada uno de ellos los pudo convertir en un tema aparte; sin embargo, no fue posible detallarlos con mayor profundidad.

Conclusiones y proyecciones finales

Las sesiones se enmarcaron en un modelo conceptual integral (Engel, 2017; Gal et al., 2023; Nicholson et al., 2018) que describe el conocimiento, las habilidades y las disposiciones que los sujetos necesitan para comprender, evaluar críticamente, comunicar y comprometerse con la estadística cívica respecto a problemas sociales “candentes”. Todo ello con la finalidad de promover el empoderamiento de los ciudadanos informados, que comprenden y discuten temas sociales relevantes para sus vidas en comunidad, y participan en la toma de decisiones basadas en datos (C.f., Estrella et al., 2021; Isoda et al., 2021).

Indudablemente la experiencia fue muy enriquecedora no solamente para quienes participaron en ella, sino que arroja insumos importantes para la comunidad de Educación Estadística en la región, especialmente quienes están involucrados en el desarrollo de la Didáctica Estadística, de la Inferencia y la Probabilidad. Se espera que los insumos que se han resumido en el presente documento sean base para continuar con el análisis de cada uno de los tópicos centrales, aportando nuevas experiencias y desafíos para estos tiempos, y ofreciendo posibles alternativas que lleguen a mejorar y desarrollar una Educación Estadística de nuestra Región.

Referencias y bibliografía

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 44-49.

Estrella, S., Vergara, A., & González, O. (2021). El desarrollo del sentido del dato: haciendo inferencias desde la variabilidad de los tsunamis en primaria. *Statistics Education Research Journal, 20*(2), 1-14. https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.413.

Isoda, M., Estrella, S., Zakaryan, D., Baldin, Y., Olfos, R., & Araya, R. (2021). Digital competence of a teacher involved in the implementation of a cross-border lesson for classrooms in Brazil and Chile. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 10*(4), 362-377. https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2021-0045

Gal, I., Nicholson, J., & Ridgway, J. (2023). A conceptual framework for Civic Statistics and its educational applications. In *Statistics for Empowerment and Social Engagement: Teaching Civic Statistics to Develop Informed Citizens* (pp. 37-66). Cham: Springer International Publishing.

Nicholson, J., Gal, I., & Ridgway, J. (2018). Understanding civic statistics: A conceptual framework and its educational applications. *A product of the ProCivicStat Project*.

Sesión Ubiratan D'Ambrosio

Reflecting on our past and future: A book showcasing the work and life of Ubiratan D'Ambrosio and how it has affected us all

Daniel C. **Orey**
Universidade Federal de Ouro Preto
oreydc@gmail.com
Brazil
Marcelo C. **Borba**
Universidade Estadual Paulista, Rio Claro
marcelo.c.borba@unesp.br
Brazil

Abstract

This first session Ubiratan D'Ambrosio will be based on the recently published book about D'Ambrosio (Borba and Orey, 2023a) with chapters written by many scholars from around the globe and edited by the two coordinators of this session. This book is prefaced by his son Alexandre D'Ambrosio. Authors from Brazil discussed the roots of ethnomathematics in D'Ambrosio fashion, showing, for example, the first master and doctorate degree of Mathematics Education; how D'Ambrosio interacted with graduate students. The book included his work in history of Mathematics. Finally, it shows how Ubi's work was not restricted to Brazil. It had great influence and Latin America and in the whole world. Moreover, the ethnomathematics program continues to expand after his death. The session will include the participation of invited scholars to react and contribute to the presentation by its coordinators.

Keywords: Ethnomathematics; Ubiratan D'Ambrosio; Janus; Trivium; Culture

This plenary session is named Ubiratan D'Ambrosio after this giant of Mathematics Education who unfortunately passed away on May 12, 2021. The CIAEM has wanted to honor the contribution and the academic and personal figure for the human team that constitutes the *CIAEM Community*.

CIAEM's aim is that all the following *Inter-American Conferences of Mathematics Education* will include a special *Session Ubiratan D'Ambrosio* with issues related to the themes that D'Ambrosio addressed.

Aims and agenda

On this occasion, this session will use as a base a recent book published by the Springer publishing house edited by D. Orey and M. Borba. Its aim is to indicate some of the ideas and perspectives of Ubiratan D'Ambrosio that are described in this publication, as well as information about the collaboration of this great Brazilian intellectual with other scholars in the development of Ethnomathematics, undoubtedly his greatest contribution to the Mathematics Education.

The session will have a first part (30 minutes) with a presentation by Orey and Borba on elements of the book they edited.

In another segment of the session there will be the intervention of selected scholars to refer to the previous presentation or aspects of D'Ambrosio work. This segment will last 10 minutes.

Finally, a space will be offered for questions and brief interventions from the public.

Elements of the presentation by Orey and Borba

In this presentation we will use the recently published book about D'Ambrosio (Borba and Orey, 2023a) written by many colleagues from around the globe and edited by the two authors of this presentation. We valued in the beginning the impact of D'Ambrosio on the two of us and we end by presenting a little of the ideas of our colleagues.

We began our introductory chapter in the book *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education: Trajectory, Legacy and Future* (Borba, & Orey, 2023b) with the quote: "As mathematicians and math educators we have responsibility towards issues of sustainability, climate change and pandemics, which are urgent." Ubiratan D'Ambrosio

The quote came from a paper, initially published in Portuguese (D'Ambrosio, 2018), where he foresaw the COVID pandemic in the paper, D'Ambrosio used more than once, the word pandemic in its plural form: pandemics. We have come through one pandemic after many before, and as he said, "many more to come". He wrote about how the power of the COVID pandemic, so drastically and rapidly changed the world we now live in. And we talked about, how like the Roman god Janus, we might consider using this opportunity to look both before us and into our mutual futures.

Ubi often used the example of the Roman god Janus, in his work.

> Janus, who the Romans named the first month of the year in his honor, would look back, and forth at the same time. Ubi, as one of the renown international specialists in the history of mathematics and who developed the program of ethnomathematics, he taught us to look back and then to the future, at the same time. From both his global and historical perspective, he described a certain tension between

> the past and future of humanity to address mathematics education in its current form. (Borba & Orey, 2023b, p. 2).

Modern technologies (mostly in relation to communication and information) have been highly influential in Mathematics Education in many countries. Ubiratan often talked about how the global transition from orality to writing marked many new roles and opportunities for educators. Together we transitioned from the sole repositories of knowledge, and became mentors, coaches, guides, and interpreters of knowledge. Ubiratan wrote how remarkable the emergence of writing strengthened our individual memories.

Professor D'Ambrosio both utilized and analyzed different forms of media across history to support the use of digital technologies in Mathematics Education. Mathematics Education in many places, is often presented as a dichotomy between humans and hardware. He often referred to both books and computer hardware, and incorporates new technologies, which allows us to glimpse into the future. It is from this exchange of ideas that he invented his Trivium (Rosa & Orey, 2015).

D'Ambrosio's Trivium model presents us with a curriculum model that can be used to identify pedagogical actions in the form of teaching–learning practices based on his "Program Ethnomathematics." The curriculum proposal is composed of literacy, matheracy, and technoracy, and supports diverse school activities based on both ethnomathematics and modelling.

In Ubiratan's three-point curriculum model, literacy is the capacity of students to process information present in their daily lives; *matheracy* is the capacity of students to interpret and analyze signs and codes in order to propose models and to find solutions to problems faced daily; and *technoracy* is the capacity of students to use and combine different instruments to solve increasingly complex problems. And of course, *numeracy* plays an important role in this curriculum model. (Borba & Orey, p. 2, 2023b)

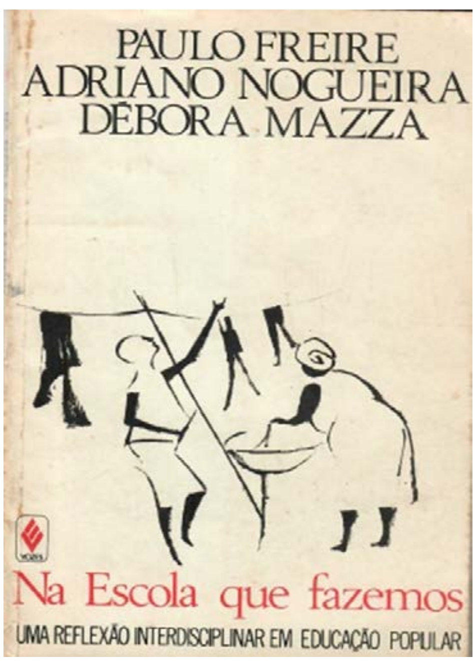
A Janus-Trivium influenced curriculum does not discard any view of education that values the past, it merely asks us to be more cognizant, aware, mindful, and flexible as new situations arrive. It asks us to think about what we teach and how it connects to where we might be going.

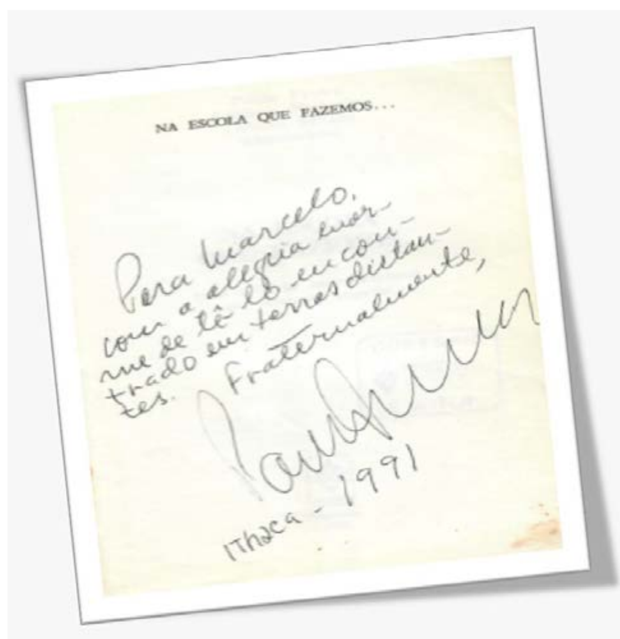
D'Ambrosio was cognizant that his work stood on the foundations built by many scholars such as Ascher & Ascher and Bishop. The Aschers wrote an ethnomathematical inventory of the Mathematics of traditional Andean people who developed the quipu. Ascher & Ascher presented strong evidence that the base 10 system was present hundreds of years ago in what is now called Latin America.

In the book, Professor Borba discussed how D'Ambrosio prepared his memorable talk of the ICME in Adelaide, Australia, in July 1984. This occurred while D'Ambrosio was teaching at the graduate program in Mathematics Education, at the Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro. Professor Borba, as a young master's student, shared the excitement when Ubiratan gave a "pre-session" practice talk in which he first summarized ideas related to ethnomathematics.

Through dialogue with colleagues, Eduardo Sebastiani and Maria Viggiani Bicudo – professors of the graduate program at the Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) - Ubiratan continued to consolidate his ideas and designed a study which included long-term field work and participatory research in the favelas (slums) of Campinas. The study looked at the ethnomathematics of the community primarily composed of migrants from different regions of Brazil. Many residents were illiterate, in that the traditional forms of literacy were not apparent. The results of the project demonstrated that the members of the community were indeed "literate", even though their literacy was not in the traditional form. At the time, there were no mathematics educators on the team. Both Professors D'Ambrosio and Sebastiani, who were professors at UNICAMP, and taught in the graduate program at UNESP, made the connection so that Marcelo Borba became part of the team.

This profound concept: that poor or marginalized people know Mathematics that is used and expressed in a unique or particular manner, was an innovative concept for Mathematics educators in Brazil. Professor Borba's master thesis, the second one defended in the program, had professor D'Ambrosio as a member of the evaluating committee, and reported on the ethnomathematics of students regarding a vegetable garden project and the geometry of a soccer field. Besides his masters work a book was published by Paulo Freire and two of his doctoral students, in which Marcelo participated (Freire et al. 1998). Ubiratan was very happy indeed to see this developing connection with Paulo Freire's work.





SUMÁRIO

Figure 1. Cover of the book that with chapters on ethnomathematics and interdisciplinarity by Borba, Freire and colleagues.

Curiously, about the same time in 1986, Daniel Orey had returned to the United States from two years living and teaching in Guatemala to begin master's and doctoral work in New Mexico.

Orey's master's degree program at the New Mexico State University (NMSU) invited him to work on a project that allowed him to travel throughout New Mexico, Colorado, and West Texas giving people their first access to technology. This was a time when there was no Internet, and this type of research is impossible to replicate given the worldwide diffusion of smart phones and WIFI. During much internal conflict, he took the NMSU model back to Guatemala and worked in two schools there.

Shortly after Ubiratan's death, the two editors of this book were invited by Professor Gabriel Kaiser to organize a tribute to Ubiratan. Although much of ethnomathematics research is published and done in Brazil, the editors were encouraged to search for a broader, international perspective on Ubiratan's life and work. A call was sent out to numerous people who knew him, worked with him, or were mentored by him. What came about was a collection of perspectives on how our dear professor's life, research, writings, and love affected us all. The project allowed not just the editors, but as we soon learned, many of the authors as well, to reflect, grieve, mourn, and then celebrate the life of our dear mentor. What brought not just the two editors but this group of scholars together is our mutual love for and work at adapting the teachings that Ubiratan encouraged in all of us. As we wrote in the book, "it has been our mutual experience, indeed our Janus moments in regard to technology, including research and interest in culture, technology and mathematics education." (Borba & Orey, 2023b, Borba and Villarreal, 2005).

We did have quite a few authors from Brazil, who discussed the roots of ethnomathematics in D'Ambrosio fashion, discussing carefully, for example, about the first master and doctorate degree of Mathematics Education or about how D'Ambrosio interacted with graduate students. D'Ambrosio has for the most part created the notion of a History of Brazilian Mathematics and influenced both history of Mathematics in Latin America and elsewhere as discussed in several chapters of the book. In another chapter, one may see how D'Ambrosio acted on the history of Mathematics and Mathematics Education: his personal archive is now being analyzed by professionals who will bring new light to the history of Mathematics Education.

Ubi, in a 2018 paper (D'Ambrosio, 2018) had predicted the pandemic that would arrive two years later and presented his search for a Mathematics for peace. He listed challenges that we had to overcome from a perspective of a Mathematics that has been used for war and violence. In other chapters is discussed how D'Ambrosio influenced and helped to create Critical Mathematics Education. The notion of ethnomathematics can be understood as a way of democratizing the production of Mathematics and one may see academic Mathematics, as "a" mathematic, that is, a form of expression of Mathematics, as an ethnomathematics, as suggested by Borba (1990). Much of this relation with critical Mathematics Education was built with colleagues from the USA, where he also developed and helped to found associations and groups related to ethnomathematics, as reported in a different chapter.

Yet another chapter helps to document the ethnomathematics movement in Brazil, with a virtual center that tries to retrieve initiatives and promote ethnomathematics in Brazil. We now have teacher mathematics education master's programs based on ethnomathematics for teachers of a state of the USA. In more than one chapter the relation of ethnomathematics to modelling is related, another movement promoted by him, in what we have called a "tapestry of trends in mathematics education" (D'Ambrosio & Borba, 2010).

Finally, the book discusses a "mystic" side of D'Ambrosio in which his political tone was always combined with facial expressions, and words that would make most of us stop and listen to him in a way that we usually do not listen to other people. The preface of the book, by Ubi's son opens the book with a facet not always valued when Ubi is the center: besides being an amazing speaker, he was a great listener! The book shows that ethnomathematics is the legacy of Ubi and is moving! There is discussion about ethno biomathematics, and about agency of things, of artefacts, a discussion that Ubi had developed for a long time with the authors of this paper.

Ubiratan wrote:

> Like Janus, the ancient Roman god whose double-faced head signified his knowledge of the present and the future, education has always been a two-faced enterprise. The past establishes goals and methods of education, and the other face tries to capture the future and suggests and proposes new directions of thought and new styles of action for the next generation who will in a few years, take

over routines and societal innovation in the many diverse contexts worldwide. History tells us that this face of education has always been sensitive to emerging technologies. D'Ambrosio (2005)

We hope that this book does this.

The Janus story itself provides a perfect metaphor for how both collaborator-editors made vital changes or awakened to ethnomathematics and began to use it in their unique teaching, and research. As well, we saw as the book came together how this happened in all the authors. This is a common theme or thread of the authors found in the book.

To say the least, the passing of our dear professor, teacher, and mentor was a shock, but this exercise allowed us to join together and to heal our broken hearts together, and in the case of the editors rekindle an old friendship – something we think would make Ubiratan smile deeply. The organizers are two scholars: one born and raised in the north, and one in the south, educated in the opposite hemispheres, that because of their mutual mentor came together to bring a truly creative group of scholars to celebrate a life and work of our mutual mentor. This project provided all of us, the time we desperately needed to reflect and move forward after Ubi´s passing.

We can gain just a glimpse in the book of Ubiratan's dream for peace and how his plan for a *Programa Etnomatemática* has grown to become a worldwide phenomenon and it was both outlined by and encouraged by him to diversify along the many unique lines and cultural-national contexts. We are confident that this book accomplishes that goal.

The book presents one mutual, transnational Janus moment for all of us who take his teachings and seek in our own unique and beautiful contexts to apply them in different settings: ethnomathematics, culture in Mathematics and technology, and will manifest in the forces of social class, ethnicity, history, gender, and sexual orientation that influence ethnomathematics.

#UbiratanPresente
#ParasempreUbi

References and Bibliography

Borba, M. & Orey, D. (2023a). *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education: Trajectory, Legacy and Future.* New York: Springer.

Borba, M. & Orey, D. (2023b). *Past and Future: Ubi's way of seeing education in the present.* In M. Borba,, & D. C. Orey. (eds) *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education: Trajectory, Legacy and Future*. New York: Springer.

Borba, M. (1990). Ethnomathematics and Education. *For the Learning of Mathematics* 10(1), 39–43. http://www.jstor.org/stable/40247974 .

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer, 2005. (Vol. 39)

D'Ambrosio, U. (2005). Preface. In *Borba, M. y Villarreal, M. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

D'Ambrosio, U. & Borba, M. (2010). Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 42(3-4), 271-279. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/71691

D'Ambrosio, U. (2018). Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados, [S. l.],* 32(94), 189–204. https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0014

Freire, P., Nogueira, A., & Mazza, D. (Org.). (1998). *Na escola que fazemos: Uma reflexão interdisciplinar em educação popular* (1st ed.). Editora Vozes.

Rosa, M. & Orey, D. (2015). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* 47, 587–598 https://doi.org/10.1007/s11858-015-0688-1

Índice alfabético de autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Trabajos invitados de la XVI CIAEM

ISBN: 978-9945-18-785-4

9 789945 187854

https://ciaem-iacme.org