Lo cotidiano y lo académico en Matemáticas[1]

Abraham Arcavi
Weizmann Institute
Israel

Resumen

En este artículo se examinan tres conceptos que han de tenerse en cuenta para crear un puente entre las prácticas cotidianas y las matemáticas escolares: lo cotidiano, la matematización y la familiaridad con el contexto. Discuto detalladamente cada uno de ellos mediante ejemplos extraídos de mi trabajo con profesores en ejercicio, mis experiencias en desarrollo curricular y la literatura de investigación.

Abstract

This paper examines three concepts to consider in creating a bridge between everyday practices and mathematics in school: everydayness, mathematization, and context familiarity. I discuss each concept in detail using examples from my work with in-service teachers, my experiences in curriculum development, and the research literature.

Introducción

En los últimos 15 o 20 años se ha prestado una seria y amplia atención a las matemáticas cotidianas. Bajo este título, los investigadores han descrito y analizado el aprendizaje de las matemáticas y las prácticas matemáticas que tienen lugar en contextos extraescolares, ajenos al mundo académico. Por ejemplo: en carpintería (Millroy, 1992); venta ambulante (Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993; y periódicos (Schlieman, 1995). En estos contextos "los problemas son dilemas para resolver" y "El que resuelve problemas procede actuando, generalmente involucrándose a sí mismo, su propio cuerpo, sus susceptibilidades y el entorno" (Lave, 1998, pp. 19-20). En otras palabras, los problemas surgen dentro de una cierta práctica, y las soluciones pueden requerir estrategias matemáticas apropiadas basadas en elementos o consideraciones inherentes al problema y en las experiencias personales previas.

Como consecuencia de lo anterior y de otros muchos estudios, la reforma de los programas de educación matemática (por ejemplo, de *Professional Standards*, National Council of Teachers of Mathematics, 1991) incluyó en sus fundamentos la propuesta de aprovechar e integrar aspectos de las prácticas matemáticas extraescolares, pretendiendo que tal integración es, no sólo deseable, sino también factible.

En este capítulo pretendo contribuir a alcanzar dicha integración. Se revisan y discuten en él tres nociones que pueden considerarse centrales cuando se trata de tender

---

[1] Traducción de Manuel Fernández Reyes y Juan Antonio García Cruz del original en inglés: "The Everyday and the Academic in Mathematics" by Abraham Arcavi, *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom*. A Monograph edited by M. Brenner and J. Moschkovich (Eds.) *Journal for Research in Mathematics Education*. 12-29, 2002.

Translated and reprinted with permission from Journal for Research in Mathematics Education, copyright © 2002 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

un puente entre las prácticas cotidianas y el estudio y el aprendizaje más formal de las matemáticas en la escuela. Las referidas nociones son: lo cotidiano, la matematización y la familiaridad con el contexto.

Primero, en lo referente a cotidiano examino las posibles connotaciones que la expresión “prácticas cotidianas” puede tener para diferentes personas, en especial si se pregunta en qué consiste lo cotidiano. Segundo, sugiero aspectos de lo que es cotidiano para los alumnos, que puede ser pasado por alto en sus informes sobre sus experiencias matemáticas extraescolares, y que podrían constituir fuentes ricas de matemáticas significativas. En tercer lugar, considero qué puede significar lo cotidiano para las matemáticas académicas, y sugiero que, de modo no sorprendente, puede también significar aquí cosas diferentes para personas distintas.

En “matematización” describo por qué parece ser ésta una idea principal cuya apropiada realización tiene la posibilidad de crear un puente entre las matemáticas cotidianas y las académicas. Sin embargo, mi contribución se centra en una noción que, de alguna manera, es opuesta y complementaria a la matematización. Me refiero a la contextualización, que podría también jugar un importante papel en la referida conexión entre lo académico y lo cotidiano.

La matematización y la contextualización dependen del conocimiento y la comprensión del alumno acerca de los contextos de las situaciones de problema, y de sus formas informales de pensamiento. Estos aspectos se discuten bajo el epígrafe de familiaridad con el contexto.

Al volver sobre estas tres nociones, asumo la perspectiva de las matemáticas académicas. En matemáticas académicas contemplo: a) contenidos y problemas que, generalmente, no surgen en la mayoría de las prácticas diarias fuera de la escuela dado que incluyen temas avanzados; y b) el estudio y producción de métodos generales de solución aplicables a una serie de situaciones independientemente de sus peculiaridades contextuales. El origen y las tendencias de las ideas y ejemplos que se presentan en este capítulo se deben a mi experiencia como profesor de matemáticas, como diseñador de currículos, como formador de profesores, y como investigador en el aprendizaje de las matemáticas escolares, interesado y motivado por los estudios de las matemáticas cotidianas.

¿Qué es cotidiano?

¿Qué incluyen o excluyen las matemáticas cotidianas? ¿Queremos decir todos lo mismo con esta expresión? Con mucha frecuencia, cuando la empleamos parece que damos a entender que es una expresión única, bien definida, cuyo contenido es compartido y entendido por todos. Puede ser que, en vez de especificar el contenido matemático, se refiera a alguna versión de las seis actividades básicas encontradas por Bishop (1998) que son universales, esto es, que se dan en todas las culturas: contar, localizar, medir, designar, jugar y explicar. Sin embargo, además de estas actividades generales, las matemáticas cotidianas pueden consistir en cosas diferenciadas, dependiendo de la cuestión ¿qué es cotidiano? Las diversas profesiones y actividades (especialmente las que son más matemáticamente ricas, como la ingeniería; ver, por ejemplo, Noss & Hoyles, 1996a) pueden tener contenidos matemáticos muy importantes en su práctica cotidiana, y lo que es muy cotidiano para uno, puede resultar abstruso para otro.

Por eso, lo que incluimos en las matemáticas cotidianas depende mucho del contexto y de la práctica de donde emergen las matemáticas. Podemos estar tentados de extraer implicaciones educativas muy sólidas; por ejemplo, que las matemáticas deberían aprenderse directamente en aquellos contextos en los que se espera las usen los estudiantes. Llevar a cabo tal implicación no sólo podría perpetuar el estatus diferencial mencionado por Moschkovich (Brenner y Moschovich, 2002), sino que también podría suponer que el problema de la transferencia del conocimiento puede resolverse "argumentando que (la transferencia) no debería existir en el primer lugar"(Sierpinska, 1995).

No obstante, es indudablemente importante admitir la diversidad de lo cotidiano, aunque sea con el exclusivo fin de comunicación y debate entre investigadores. Además de esto, se puede ampliar el inventario de prácticas matemáticas a aquéllas en las que no fuimos conscientes previamente, y pueden mostrar el gran potencial educativo que contienen. A su vez, y como Civil ha señalado (En Brenner y Moschovich, 2002), se pueden descubrir una variedad de contextos, familiares a los estudiantes, en vez de asumir una cotidianeidad compartida por todo el mundo.

Sin duda se necesita más trabajo para descubrir las diferentes prácticas matemáticas cotidianas y para analizar sus componentes matemáticos (ver, por ejemplo, Smith, en Brenner y Moschovich, 2002). Este análisis debería constituir un paso importante (y, posiblemente, un prerrequisito) en cuanto al establecimiento de un puente entre lo cotidiano y lo académico. Esto es especialmente importante, ya que muchas ocupaciones se hacen cada vez más matemáticas, y los fenómenos como la abstracción situada (Noss & Hoyles, 1996b) empiezan a ser analizados en detalle. En particular, merece la pena considerar las prácticas cotidianas, los intereses y las experiencias de los niños fuera del aula.

Experiencias cotidianas de los estudiantes

Además de las prácticas matemáticas existentes y arraigadas en determinadas comunidades, ya descritas o por explorar, las matemáticas cotidianas deberían incluir más de las vidas de los estudiantes. Aparte de los informes de los propios alumnos sobre el uso que hacen de las matemáticas (como los descritos por Masingila, en Brenner y Moschovich, 2002), quisiera sugerir que son necesarios más estudios para descubrir situaciones que pueden parecer no matemáticas para los niños, pero pueden constituir un punto de partida para las matemáticas académicas. A vía de ilustración, he aquí tres ejemplos.

La primera situación se refiere a la búsqueda de una dirección. En la mayoría de los edificios de varios pisos de Israel, los apartamentos se numeran consecutivamente a partir del primer piso hacia arriba. Por tanto, a diferencia de las habitaciones de los hoteles, por ejemplo, no se puede predecir el piso de un determinado apartamento sólo por el primer dígito (o los dos primeros dígitos) de su número. Por ejemplo, el apartamento 10 en un edificio con cuatro apartamentos por piso está en el tercer piso; o bien en el quinto piso, si hay dos apartamentos en cada piso. Generalmente, en las direcciones aparece sólo el número del apartamento, lo cual identifica sin ambigüedad el apartamento, pero no el piso.

Lo que se relata a continuación no fue grabado, pero la trama fue, más o menos, como sigue. AB, un adulto, acompañaba a IA, de nueve años de edad, cuando éste visitó por primera vez a un amigo. En el camino, AB le preguntó cuál era la dirección exacta. IA sabía la dirección y que el número del apartamento era el 26, pero desconocía en qué piso estaba. AB le preguntó que si podía calcular el número del piso. IA supuso que el edificio tenía cuatro apartamentos por piso, y empezó a contar de cuatro en cuatro: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28. Y dijo: Puesto que el 24 es el último apartamento del piso número 6, el apartamento 26 estará en el piso número 7. Entonces, AB le preguntó si en la escuela había aprendido alguna operación que le permitiera hacer más rápidamente el cálculo.

Pasado un momento, IA respondió: “La división”. Y, al preguntarle AB “¿por qué?”, dijo: Traté de averiguar cómo obtener la respuesta, el séptimo piso, dividiendo 26 entre 4.

Consideremos la segunda situación: “Magia con números”. He realizado varias veces la actividad que sigue, con alumnos de entre 12 y 14 años de edad. Les pido que introduzcan en sus calculadoras un número de tres cifras *xyz*, y que lo repitan, para obtener el número de seis cifras *xyzxyz.* Me concentro, con la teatralidad con que actúan los magos, y les digo: “Ahora, dividid el número por 91”. Y comento: “Estoy seguro que todos habéis obtenido un número entero por cociente”, lo cual causa alguna sorpresa. Y cuando les digo que si dividen dicho cociente por 11 obtendrán el número de partida, y comprueban mi afirmación, la sorpresa aumenta. Y es aún mayor la sorpresa y la curiosidad al ver lo que resulta al dividir otro número cualquiera *xyzxyz,* por 143, y luego por 7.

La tercera situación trata de un factor de corrección. DA, de 15 años de edad, contó que su profesor de matemáticas estaba disgustado por las calificaciones obtenidas por la clase en un examen sobre funciones, y consideró que las cuestiones planteadas habían sido demasiado difíciles. En consecuencia, decidió ajustar las calificaciones así: si x era la nota obtenida, la transformaría en $10\sqrt{x}$. Al parecer, esta es una corrección común entre los profesores israelíes. De esta situación surgen varias cuestiones para explorar los usos de la noción de función. Por ejemplo: ¿quién obtiene la misma nota antes y después de la corrección?; ¿la mejoran todos?; ¿quién obtiene la mejor nota?; ¿es justo este factor de corrección?; ¿cómo es esta corrección respecto a otras, como, por ejemplo, aumentar todas las calificaciones en 10 puntos o en un 20%?; ¿puedes determinar un factor de corrección justo?

En cierto sentido, puede considerarse que las tres situaciones pertenecen a las experiencias cotidianas de los alumnos. La primera tuvo lugar en circunstancias normales de la vida (visitando a un amigo); la segunda, supone que los niños tomen parte en actividades (realizar trucos mágicos y comprender lo que hay detrás de la magia); y la tercera tiene como propósito dar sentido a una situación compleja (un factor de corrección para las calificaciones), en la que, entre otras cosas, hay que juzgar sobre la equidad o no del factor de corrección empleado.

Otra razón para considerar estas tres situaciones como matemáticas cotidianas es la facultad que adquieren los niños al resolver estos problemas en su vida diaria. En el primer ejemplo, desarrollando un método para hallar el piso en que se encuentra un apartamento, dado su número. En el segundo, al comprender los mecanismos de una situación sorprendente, el niño “es dueño” de un truco mágico y podría desarrollar trucos similares, por ejemplo, dividir por 77 y 13, para asombrar a otros. En el tercero, la comprensión del mecanismo de un factor de corrección y el uso de éste, sirve para defenderlo o para proponer otros factores.

Puede objetarse que las referidas situaciones no son buenos ejemplos de matemáticas cotidianas, porque no pertenecen a una práctica progresiva, continua, en la que se realizan actividades similares una y otra vez. Podían haberse evitado fácilmente los problemas, revisando cada piso en el primer ejemplo; considerando el truco mágico, en el segundo; o calculando la nota a que se tiene derecho, en el tercero. Además, las dos primeras situaciones llegan a ser matemáticas debido a la intervención de un adulto, quien, o bien presentó el problema, o señaló sus elementos matemáticos. En el tercer ejemplo, no hubo tal intervención, y ni el profesor ni los alumnos hicieron uso de lo que sabían acerca de las funciones y gráficas, para formular, modelizar o discutir cuestiones.

No obstante, la discusión sobre si los ejemplos propuestos pueden considerarse o no buenos y claros representantes de las matemáticas cotidianas, tiene menos importancia aquí que la conclusión que tengo la intención de extraer. Al observar con atención las actividades, experiencias, intereses e intentos diarios de los estudiantes, se pueden captar situaciones en las que lo cotidiano las hace potencialmente poderosas como puntos de partida para el establecimiento de puentes hacia las matemáticas académicas. Esta conexión puede consistir en integrar el genuino, significativo, atractivo origen del problema (las experiencias de los niños) con la orientación para desarrollar y utilizar herramientas matemáticas (posiblemente adecuadas en el comienzo), para ayudar a los alumnos a dar un sentido más profundo a los problemas (como en las dos últimas situaciones vistas). El puente proporciona también un camino de retorno a la situación cotidiana, con mayor conocimiento para manipularla y enfocarla.

La cotidianidad académica

En los dos apartados anteriores he tratado de ilustrar los diferentes aspectos de lo que creo incluye, o debería incluir, la expresión matemáticas cotidianas, las cuales no siempre se consideran explícitamente. Sugerí también que pueden ser diferentes, según las distintas prácticas, y propuse que el mundo del alumno debería incluirse también en dichas prácticas diarias. En la presente sección me referiré a otro aspecto de lo cotidiano: lo relativo al entorno de las matemáticas académicas. Los que se dedican a las matemáticas académicas (matemáticos y profesores de matemáticas) pueden actuar de modo diferente en su trabajo diario (por ejemplo, cuando tratan de resolver un problema o investigan) y en sus presentaciones académicas (por ejemplo, cuando enseñan o dan una conferencia a sus colegas). En el primer caso, se permiten ser despreocupados, desordenados, menos formales; mientras que en el segundo presentan unas matemáticas pulidas y rigurosas. En consecuencia, tiene sentido hablar también de la cotidianidad en las matemáticas académicas. Además, como se verá más adelante, puede haber diferencias en cuanto a lo cotidiano en las matemáticas académicas.

A continuación, describo un ejemplo de cómo resuelven el mismo problema distintos grupos de profesores. Presento las soluciones y analizo cómo su práctica docente los conduce a dos enfoques distintos. El problema, tomado prestado de De Guzmán (1995, p. 114), pide resolver la ecuación $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$. Invito al lector a que se detenga y piense sobre este problema.

Propuse el problema a varios grupos de profesores en ejercicio durante cursos impartidos en los dos últimos años. Unas veces, para que fuera resuelto durante la sesión; otras, como trabajo para casa. Hubo dos enfoques distintos del problema: simbólico y gráfico.

En el enfoque simbólico, el primer paso consiste en eliminar el denominador para obtener una forma más sencilla de la ecuación inicial, lo que lleva a $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Ninguno de los profesores que siguieron este enfoque conocía una fórmula para resolver esta ecuación de cuarto grado sin coeficientes nulos. Algunos probaron diversas manipulaciones, sin éxito. Otros, sugirieron tratar de restringir el dominio en el que pudieran encontrarse las soluciones. Una línea de razonamiento fue la siguiente: puesto que los sumandos son cuadrados cuya suma es 1, tienen que ser números positivos menores que 1. Por lo tanto, es $x^2 < 1$, es decir, $-1 < x < 1$. Esto fue perfeccionado con otros argumentos más sofisticados sobre los dos sumandos. En general, los que trabajaron el problema en casa presentaron resoluciones totalmente simbólicas. Mostraron diversos modos de abordarlo, todos consistentes en encontrar el camino correcto de transformar las variables. Por ejemplo, dado que el primer miembro de la ecuación es la suma de dos cuadrados, puede recurrirse al método de "completar el cuadrado” para transformar dicho miembro en el cuadrado de una diferencia. Resulta que el cuadrado de la suma no proporciona la solución, pero completando el cuadrado de la ecuación original resulta:

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x+1} = 1 - 2\frac{x^2}{x+1}$$

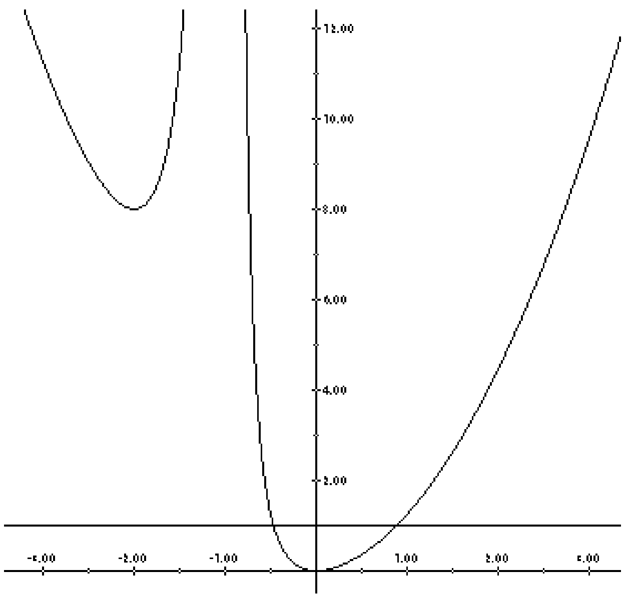
$$\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 = 1 - 2\frac{x^2}{x+1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - 2\frac{x^2}{x+1}$$

La sustitución $t = \dfrac{x^2}{x+1}$ conduce a la ecuación cuadrática. No detallamos aquí otros tratamientos simbólicos de los profesores, que requirieron complejas manipulaciones sintácticas y la identificación de una apropiada variable de sustitución.

En el enfoque gráfico, se presentaron distintas soluciones basadas en considerar la ecuación resultante de igualar dos funciones cuyas gráficas pueden dibujarse ya sea por pertenecer a una familia conocida de funciones o porque se puedan deducir. A continuación, dos de las resoluciones presentadas.

1. Trazando las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ y $g(x) = 1$ en los mismos ejes de coordenadas, se determinará la localización aproximada de las raíces buscadas. Para valores grandes de x, la gráfica de $f(x)$ está muy próxima a la de $g(x) = x^2 + 1$, porque el segundo término tiende a 1. Para $x = 0$, $f(x)$ vale 0. Para $x = -1$, no está definida, y en su proximidad (por la derecha o por la izquierda) “se lanza” hacia el infinito positivo. Así que su gráfica se parece a esta:



La gráfica de *g(x)* = 1 es la recta paralela a X´X que aparece en la figura. Esta gráfica indica la existencia de dos soluciones reales y sus valores aproximados. Esta solución también sugiere la posibilidad de generalizar el problema cambiando el número del segundo miembro de la ecuación por 2, 3, 4, etc. La gráfica permite visualizar cuándo habrá tres o cuatro soluciones, determinar sus signos y dar aproximadamente sus valores.

2. Se transformó la ecuación original para dar a sus partes la forma correspondiente a gráficas conocidas:

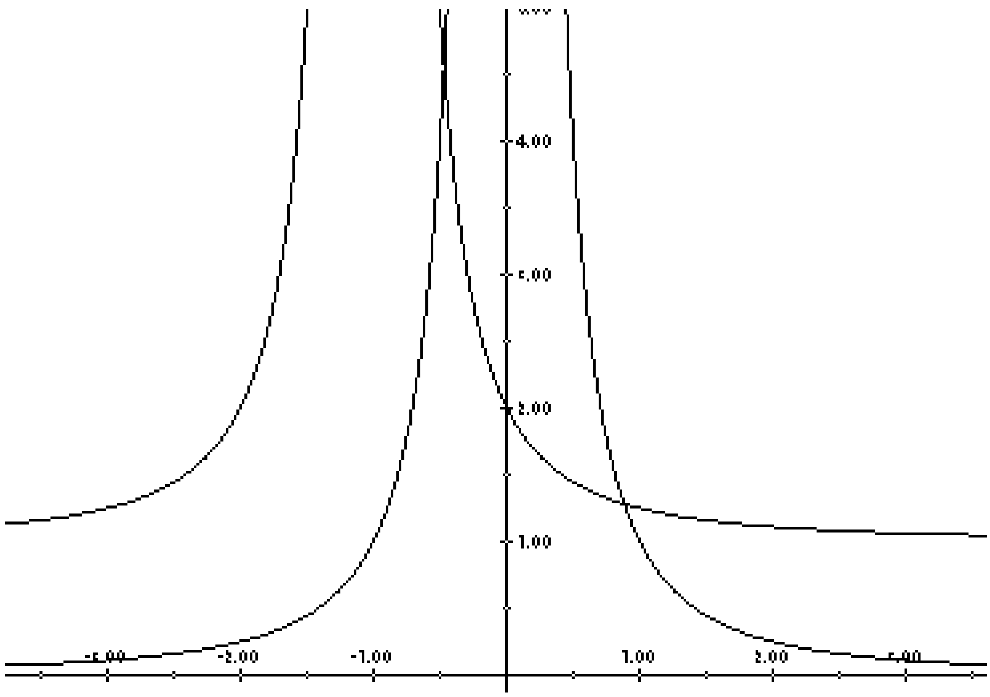
Primero así

$$x^2\left[1+\frac{1}{(x+1)^2}\right]=1$$

y luego así

$$1+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x^2}$$

Ambas partes eran funciones cuyas gráficas eran conocidas por los profesores y ambas eran funciones de la forma $\frac{1}{x^2}$. A la izquierda, vieron dos traslaciones de $\frac{1}{x^2}$, una unidad a la izquierda (sobre el eje de abscisas) para $\frac{1}{(x+1)^2}$, y luego una unidad hacia arriba (sobre el eje de ordenadas) para el sumando 1. En consecuencia, dibujaron las dos gráficas que siguen, que consideraron como una solución aproximada.



Los enfoques simbólico y gráfico representan dos aspectos de la cotidianidad académica que difieren en la forma de considerar el problema y en los objetos matemáticos manipulados (símbolos o gráficas, ecuaciones o funciones). En el planteamiento simbólico, se proponen hallar soluciones numéricas y, sólo cuando no se encuentran, se recurre a las acotaciones. En el tratamiento gráfico, se buscan las funciones y sus diferentes representaciones, enfatizando especialmente lo que puede visualizarse en las gráficas: no solamente las soluciones aproximadas, sino también las posibles generalizaciones de un tipo de ecuaciones semejantes.

Los dos grupos de profesores comparten el mismo sistema educativo; enseñan según el mismo plan de estudios, que incluye geometría analítica, funciones y gráficas, introducción al cálculo, programación lineal, trigonometría, probabilidad, estadística y geometría del espacio, y asisten al mismo curso de formación. Entonces, ¿qué podría justificar tal notable diferencia en la manera de abordar este problema? Creo que la respuesta está en sus distintas experiencias cotidianas con las matemáticas académicas. Los profesores que lo enfocaron gráficamente, estaban adscritos a un currículo para alumnos con dificultades en las matemáticas de Secundaria. Este currículo hace hincapié en el uso del razonamiento cualitativo, visual y gráfico, y en la integración de diversas representaciones como formas de abordar las mismas ideas (Arcavi, Hadas & Dreyfus, 1994). Los otros profesores no usaron dicho currículo. Así que, las mismas matemáticas académicas se siguieron de dos maneras distintas: por enfoques relacionados con distintas prácticas, determinadas por preferencias, estética o creencias; y, naturalmente, por experiencias y familiaridad.

El ejemplo comentado puede tomarse también como una dirección posible para proseguir el reto de Moschkovich (En Brenner y Moschovich, 2002) en cuanto a caracterizar mejor lo cotidiano de las prácticas matemáticas académicas. Dado que la población del ejemplo está formada por profesores, es al mismo tiempo válida en cuanto al hallazgo de Brenner (En Brenner y Moschovich, 2002) relativo a la necesidad de desarrollar la conciencia en los profesores sobre sus propias prácticas, sean cotidianas/informales o académicas.

En resumen, mi propuesta es que:

1. Lo cotidiano no es único y, por lo tanto, las matemáticas cotidianas deberían incluir (o referirse a) muchos contextos y prácticas, que necesitan ser más explorados.

2. Las matemáticas cotidianas no han de restringirse necesariamente a las prácticas matemáticas de una determinada colectividad. Deberían consistir también en situaciones que se presenten en las vidas de los niños que posean un fuerte potencial para ser matematizadas.

3. De modo semejante a la forma en que las matemáticas cotidianas incluyen diversas prácticas, las matemáticas académicas incluyen diferentes prácticas y enfoques que requieren ser analizados y expuestos de forma explícita.

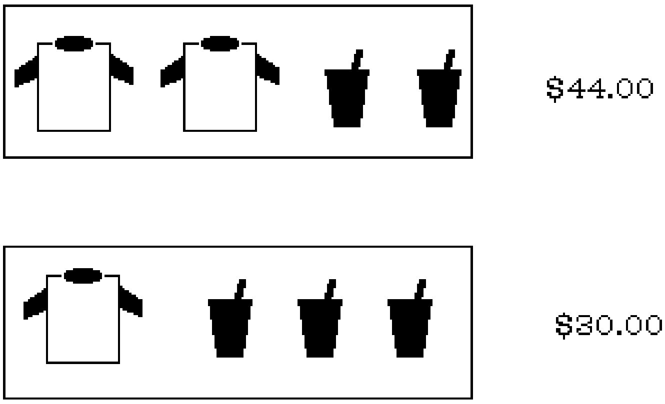
Estas tres cuestiones deberían tenerse en cuenta cuando se trata de cubrir el espacio entre las matemáticas cotidianas y las académicas.

Matematización

Una ojeada a la historia de la educación matemática puede llevar a afirmar, a algunos defensores de los problemas de enunciado, que las matemáticas cotidianas y las académicas estaban ya integradas en el pasado en las prácticas escolares. Sin embargo, en muchos casos, estos problemas constituían meros disfraces artificiales o excusas para aplicar una determinada técnica matemática.Y los que no lo eran, se presentaban generalmente con un enfoque que Freudenthal (1973) describe como una "inversión antididáctica”, que explica así: “En vez de partir del problema concreto e investigarlo por medio de las matemáticas, vienen primero las matemáticas y, más tarde, vienen los problemas concretos como una aplicación. Actualmente, muchos deberían aceptar que el alumno debería aprender a matematizar cuestiones no matemáticas o insuficientemente matemáticas, esto es, aprender a organizarlas en una estructura asequible a mejoras matemáticas. Llegar a ver las *gestalts*[2] espaciales como figuras es matematizar el espacio ... “ (pp.132-133).

La *Dutch School of Realistic Mathematics Educatión* se desarrolló sobre la base de las ideas de Freudenthal. Treffers (1987) distingue dos tipos de matematización: horizontal y vertical. La primera consiste en trasladar un problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, “mediante métodos informales o preformales a diferentes niveles de abstracción” (van Reeuwijk 1995, p. 137). La matematización vertical es la formalización de las construcciones y producciones de los alumnos hacia generalidades de contenido y método. Es evidente que la matematización vertical es el objetivo ideal de la educación matemática. No obstante, debe precederle la matematización horizontal, no sólo como punto de partida para conectar las situaciones con sus modelos matemáticos, sino también, y con no menos importancia, como una manera de legitimar y hacer explícitas ante los alumnos las estrategias adecuadas.

Considérese el problema que sigue (van Reeuwijk, 1995, p. 136):



¿Cuánto cuesta la camiseta? ¿Y cuánto vale un refresco?
Explica cómo obtuviste tus respuestas.

Los alumnos emplearon distintas estrategias para resolverlo, entre ellas la de “ensayo y error” y la de “intercambio”. Esta última consistió en observar que si en el dibujo superior se sustituye una camiseta por un refresco, el precio disminuye en 14 $. Haciendo un cambio más, es decir, sustituyendo la camiseta restante por otro refresco, el precio (30 $) disminuye de nuevo en 14, o sea, que los cuatro refrescos valen 16 $, y por tanto, un refresco cuesta 4 $. De aquí, es fácil deducir que el de una camiseta es 18 $. Esta estrategia corresponde a la matematización horizontal.

La matematización vertical tiene lugar cuando estas estrategias *ad hoc* no pueden ya aplicarse, y consiste en desarrollar un enfoque más formal al resolver un sistema de ecuaciones.

La matematización (primero horizontal y luego vertical) parece ser una potente idea que puede utilizarse como puente entre las matemáticas cotidianas y las

---

[2] N. del T.- *Gestalt*: Una estructura o unidad de percepción integrada, que se concibe funcionalmente, más que como la suma de sus partes.

académicas. Respeta y se construye a partir de las formas idiosincráticas de los alumnos para resolver problemas por cualesquiera medios disponibles, desde los experiencias previas y las capacidades de dar sentido, y evoluciona lentamente y cuidadosamente (al menos en el curriculum holandés) hacia unas matemáticas más formales. Los dos fines de este proceso de matematización se consideran muy importantes. Por un lado, el punto de partida contextual se conecta con los enfoques informales del alumnado; por otro, se trata de llegar a la generalización basándose en el contexto. El objetivo no es que los alumnos se impliquen sólo en la generalización, sino también que comprendan y aprecien que la generalización constituye una poderosa "consolidación de la información. Diversos hechos íntimamente relacionados se envuelven, cuidadosa y económicamente, en un solo paquete" (Davis & Hersch, 1982, p. 135)

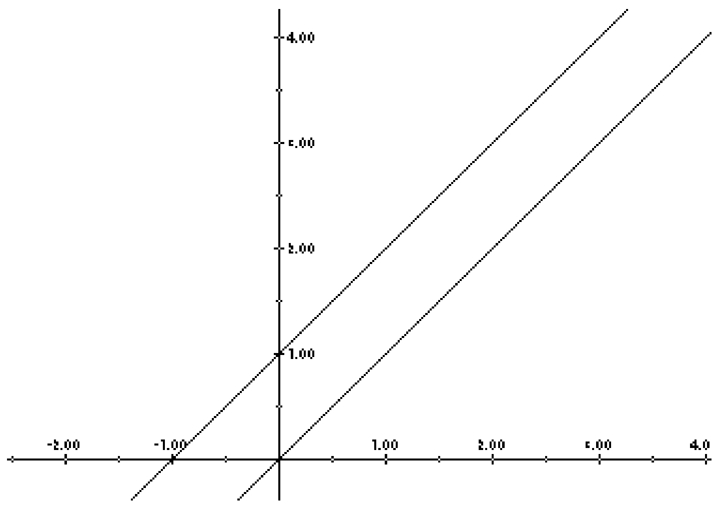
Es notablemente evidente el éxito de este enfoque. No obstante, la matematización aparece como una vía de sentido único: desde lo cotidiano a lo académico. Propongo considerar otra idea que podría resultar importante cuando se trate de conectar significativamente lo académico con lo cotidiano: la noción de contextualización. La contextualización va en sentido opuesto de la matematización, pero la complementa. Así, para dar significado a un problema presentado con vestido académico, se puede recordar, imaginar o, incluso, construir un contexto, de manera tal que las particulares características contextuales sirvan de andamio y ampliación de las matemáticas relativas a dicho problema. Parafraseando a Davis y Hersch (1982), podemos decir que la minuciosidad del contexto otorga privilegios adicionales, de los que podemos obtener provecho. Presentamos seguidamente dos ejemplos.

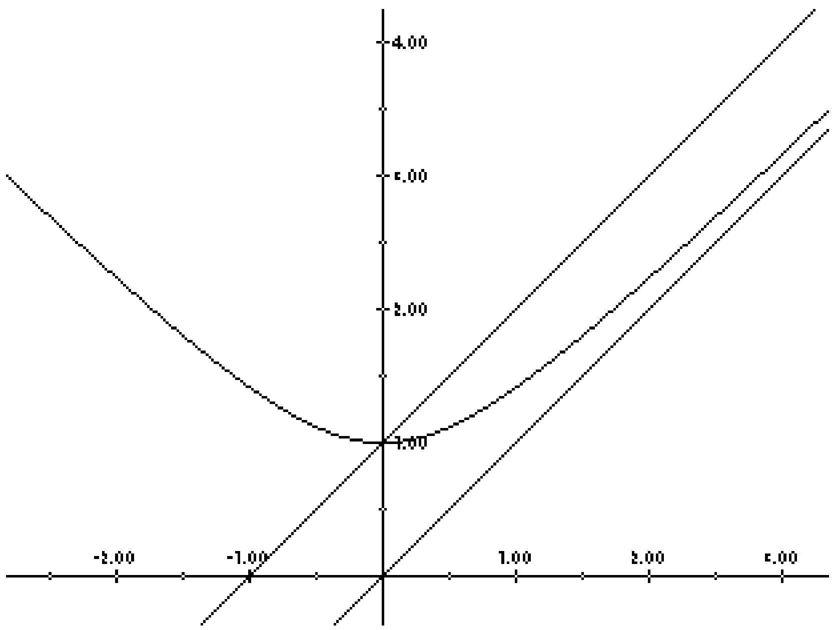
En una ocasión, reuní billetes del transporte público con números capicúas, para un amigo. Los billetes tenían cinco dígitos. Me preguntaba por entonces cuántos capicúas de cinco cifras habría. Muchos años después, pregunté a algunos colegas cómo resolverían esta cuestión, pero omití el hecho de los billetes de autobús, que parecía irrelevante para las matemáticas del problema. Las respuestas que obtuve fueron todas algo parecidas a la siguiente: las unidades, las decenas y las centenas pueden variar libremente; los millares dependen de las decenas, y las decenas de millar dependen de las unidades. Entonces, hay diez posibilidades para cada uno de los dígitos que varían (si se incluyen números como 00100 como dígitos de cinco cifras) y, por tanto, hay 1000 capicúas. Y, si sólo se consideran los números de cinco cifras a partir del 10 000, el número de capicúas se reduce a 900.

Debido a tener en cuenta el contexto del autobús, mi primera solución fue muy diferente. Los billetes se arrancaban de un taco de ellos con números consecutivos. Por lo tanto, si me daban, por ejemplo, el 23436, sabía que el primero de los cuatro billetes anteriores era capicúa, y que el próximo capicúa aparecería cuando el 4 pasara a 5, es decir, sería el número 23 532, esto es, 96 billetes después del que me dieron. Concluí, en consecuencia, que la densidad de capicúas es del 1 % y, dado que hay 100 000 números de cinco cifras, 1000 de ellos son capicúas; y, si sólo se tienen en cuenta los números de cinco cifras del 10 000 en adelante, hay 900 capicúas.

No me sentía a gusto con el valor anterior de la densidad, y me tomé un momento para averiguar por qué. Vi que el capicúa siguiente al 19 991, o sea, el 20 002, ¡no estaba 100 números más allá! Pero, analizando más detenidamente el problema, descubrí que esto no afecta a la densidad; habrá un capicúa cada 100 números, aunque no estén uniformemente distribuidos. El contexto del problema no sólo permitió tener en cuenta una solución diferente de las de la versión descontextualizada, sino que también reveló una propiedad de la distribución de capicúas que no aparecía en las otras soluciones.

El segundo ejemplo se me ocurrió cuando trataba de dar sentido a la forma de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Como no disponía de una calculadora y no estaba dispuesto a tomarme la molestia de recurrir al cálculo, me dediqué a buscar un contexto en el que dicha función tuviera sentido. No se me ocurrió escribirla en su forma implícita $y^2-x^2=1$, que probablemente me hubiera permitido reconocerla como una hipérbola. La forma original sugería el teorema de Pitágoras, donde $f(x)$ podía considerarse la hipotenusa de un triángulo de catetos x y 1 (o la diagonal de un rectángulo de lados x y 1). A continuación, comparé las longitudes. La hipotenusa es, por supuesto, el lado mayor; por tanto, es $\sqrt{x^2+1}>x$. También, la hipotenusa es más corta que la suma de los catetos; en consecuencia, ha de ser $\sqrt{x^2+1}<x+1$. Pero las gráficas de las funciones x y $x+1$ se pueden trazar fácilmente, y la gráfica de $f(x)$ tiene que estar entre estas dos líneas. Cuando $x=0$, es $f(x)=0$; y cuando x aumenta, la hipotenusa se aproxima a x. Por tanto, pude predecir la forma correcta de la gráfica, para valores positivos de x, y por simetría (ya que la función es par), trazar la gráfica completa.





El contexto del autobús impuso la sucesión numérica como una clave para guiar la solución y atrajo la atención sobre la cuestión de la densidad. En la figura 5, la visualización triangular ayudó a delimitar la gráfica entre dos rectas. En ambos ejemplos, la introducción del problema en un contexto sugirió el enfoque de la solución. Pero la contextualización hizo más que esto: proporcionó ideas acerca de la situación que, de otro modo, habrían pasado inadvertidas (densidad de los capicúas y asíntotas de la gráfica de la función). Por tanto, las particularidades de un contexto familiar sustentaron el dar sentido al problema y la aparición de una solución más rica.

Propongo que cuando se trate de establecer un puente entre las matemáticas cotidianas y las académicas, la matematización y la contextualización constituyan importantes prácticas complementarias. Mientras que la primera es ampliamente discutida y realizada en los programas curriculares y en el aula, la contextualización requiere una mayor exploración. Debe ser la herramienta para relacionarnos con contextos significativos e implicarnos en ellos, no sólo por el hecho de desarrollar y alimentar continuamente nuestro sentido común, sino también como posible vehículo para enriquecer las matemáticas académicas en sí mismas.

Familiaridad con el contexto

Como se describió en la sección anterior, una de las premisas en apoyo del establecimiento de un puente entre las prácticas matemáticas cotidianas y las académicas, es construir sobre lo que es familiar a los estudiantes, sea en contenidos contextuales o en destrezas informales/cotidianas de razonamiento. Aunque esto puede ser un punto de partida, me gustaría presentar los siguientes aspectos a considerar: la familiaridad con un contexto no hace necesariamente la vida más fácil; la familiaridad puede alimentarse dentro de la clase; el contexto puede referirse al conocimiento de un tópico matemático al servicio de otro; la familiaridad con el contexto se relaciona con la mayor o menor libertad otorgada a los alumnos dentro de la clase; y acarrea la influencia del lenguaje ordinario en el aprendizaje y comprensión de las matemáticas escolares.

Tendemos a pensar que el contexto cotidiano ayuda más a los alumnos a dar sentido y aprender, que los problemas matemáticos descontextualizados y abstractos. Considérese, por ejemplo, la situación del factor de corrección descrita antes. Esta situación se aprovechó y desarrolló como un proyecto de trabajo para el programa

ComputMath. Éste es un gran programa de desarrollo curricular para los niveles 7-9 (se acompaña de cursos de formación en servicio y por investigación), para fomentar el uso de herramientas tecnológicas, y cambiar el énfasis sobre los contenidos y las formas en que se aprenden las matemáticas. Los alumnos trabajan en grupos sobre situaciones problematicas, surgen hipótesis y discuten los resultados, utilizan gráficas y otras herramientas para corroborar o refutar conjeturas, y resumen descubrimientos con su profesor (para una descripción detallada, ver Hershkowitz & Schwarz, 1999). El problema del factor de corrección de calificaciones es muy atractivo para los alumnos, que discuten no sólo el factor mencionado antes, sino también otros, y los comparan. Mientras los alumnos trabajan esta situación, por lo general hay algunas sorpresas. Para los alumnos, $F(x) = x$ es una de las funciones más fáciles de comprender en todas sus representaciones convencionales (símbolos, tablas y gráficas) cuando se trabaja en un marco descontextualizado. Sin embargo, en este contexto específico no fue así. $F(x) = x$, que modeliza el no introducir corrección en las calificaciones, y constituye la base sobre la cual comparar las otras correcciones, fue la función más difícil a la que recurrir y de comprender. Los alumnos no sabían como expresar la falta de corrección en términos de funciones; algunos sugirieron considerar solamente el eje de abscisas, y otros no supieron qué hacer. Uri Leron, me envió un e-mail que decía: "En términos cotidianos intuitivos, "*function*" tiene sus propias connotaciones (una cosa es función de otra si un cambio en la primera causa un cambio en la otra). En tales contextos, la función constante y la función identidad ¡no se consideran en absoluto funciones!"

Este ejemplo muestra que, a veces, una idea matemática puede ser más fácil de usar y contextualizar en un entorno descontextualizado que en un contexto familiar. Es necesaria más investigación para discernir cuándo se trata de este caso. El ejemplo muestra también que la familiaridad del alumno con un contexto no es necesariamente un prerrequisito para resolver un problema. El factor de corrección no es generalmente conocido por los alumnos, pero el aula puede proporcionar la base experimental para familiarizarse con él, y proceder luego a matematizar la situación. Así pues, en un intento de conectar las matemáticas cotidianas con las académicas, el aula puede constituir el marco para preparar y alimentar durante cierto tiempo la base necesaria para la matematización.

Surgen cuestiones interesantes a este respecto: ¿En qué medida pueden crear o recrear las aulas contextos extraescolares? ¿Qué cantidad de artificialidad sería necesario introducir en este proceso? Y entonces, ¿qué son contextos artificiales y qué son contextos naturales? Parece que la artificialidad no debiera juzgarse necesariamente por la lejanía de la situación respecto al mundo real (o experiencia cotidiana), sino más bien en cuanto a su autenticidad y significación para los alumnos, y a cuántas matemáticas auténticas pueden surgir de ella.

La familiaridad con un contexto puede referirse también a la familiaridad con un determinado contexto matemático (académico) al servicio de otro; por ejemplo, la familiaridad con el teorema de Pitágoras, en el caso descrito antes, como un contexto para trazar la gráfica de una función. Otro ejemplo a considerar es el de las muy diferentes estrategias que usan los matemáticos para el cálculo aritmético, como describió Dowker (1992). Pidió a 44 matemáticos que hicieran una serie de estimaciones numéricas, y encontró una variación considerable en los procedimientos seguidos: ¡23 estrategias diferentes para el mismo problema! Aparentemente, estaban concebidas según contextos matemáticos subjetivos: proximidad a números enteros, conocimiento previo de un determinado resultado, sustituir números por otros más fáciles de estimar y hacer luego correcciones, y empleo de propiedades aritméticas apropiadas. Las estrategias dependían en gran medida del contexto, de los propios números en este caso y de las experiencias previas de los matemáticos con ellos.

Boaler (1993) sugiere que “los alumnos interactúan con el contexto de una tarea en muchas formas distintas e inesperadas, y que esta interacción es, por su naturaleza, individual” (p.16). Así, puede muy bien ocurrir que, además de la familiaridad con el contexto en sí, es la libertad permitida a los alumnos “en el desarrollo de la actividad” lo que “los capacita para seguir sus propios caminos” (p.16), y dar así utilidad y significación al contexto. Se pretende, pues, que la transparencia del problema y la atmósfera de la clase no son menos importantes, y quizás lo son más, que la familiaridad con el contexto del mismo.

Surge aquí un aspecto complejo: ¿Qué podría significar exactamente esta libertad? ¿Es siempre verdad que los problemas o investigaciones estructurados (aunque lo sean en torno a un contexto familiar) “pueden sólo mostrar métodos esencialmente impersonales” (Boaler, 1993, p. 17) y, por consiguiente, el contexto se considera ajeno? En mi opinión, una actividad estructurada y guiada no necesariamente ha de ser identificada con la falta de libertad, y se requiere una descripción más precisa de lo que las actividades estructuradas pueden suponer para distintos alumnos.

Algunas prácticas matemáticas cotidianas pueden consistir en una aplicación rutinaria de una regla inventada por otros, y, por tanto, no ser muy prometedoras en términos educativos. Por otra parte, puede que ser que se requiera criterio matemático y pedagógico para aprovechar el potencial de situaciones cotidianas, y se necesite algún tipo de estructuración y guía para evitar que los alumnos se pierdan.

Pimm (1987, p. 75) considera otra cuestión más que afecta a la familiaridad con el contexto: el lenguaje. Existen muchos términos que los matemáticos han pedido prestados al lenguaje ordinario; por ejemplo: cara, grado, relación, media, real, irracional, imaginario, etc. Hay alguna evidencia de que cuando los alumnos encuentran y utilizan estas palabras, pueden tener en mente otros significados que los propuestos por las matemáticas académicas; por ejemplo, algunos creen que las líneas rectas son sólo horizontales o verticales (Moschkovich, 1992).

Este lenguaje ordinario, prestado, puede ocultar conceptualizaciones muy profundas que son ajenas a las matemáticas académicas. Así, pongamos por caso, la palabra “prueba” (al menos en algunas lenguas) se usa tanto en matemáticas (prueba de un teorema) como en el de las leyes (prueba judicial). En uno de nuestros estudios (Hershkowitz & Aracavi, 1990) con alumnos del séptimo nivel, que no habían tenido experiencia con la connotación matemática de la prueba, asociaron su significado con el de prueba legal, que en hebreo se utiliza incluso en el lenguaje diario de los niños. Consideraron una justificación convincente la presentación de un hecho (uno o dos ejemplos) que confirma la afirmación general bajo discusión. Uno de ellos lo expresó claramente así: “Creo que probar algo significa mostrar algunos ejemplos.”

En una versión más elaborada del ejemplo como “prueba judicial”, encontramos alumnos que comprueban una afirmación general a partir de ejemplos provenientes de diferentes campos (números pequeños frente a números grandes, diferentes tipos de triángulos, etc.) para hacerla más convincente para ellos y para otros.

Parece que en el caso del lenguaje, la sugerida continuidad entre lo cotidiano y lo académico necesita una cuidadosa atención.

Epílogo

He intentado señalar algunos de los aspectos importantes que deberían considerarse y explorarse más, si pretendemos integrar las matemáticas cotidianas y las académicas. Dichos aspectos podrían ayudar a arrojar alguna luz sobre las diversas facetas que necesitamos tener en cuenta: materiales curriculares, puntos de vista del profesorado sobre lo cotidiano y lo académico, atmósfera de la clase, y puntos de vista de los alumnos respecto a las diferentes prácticas matemáticas.

La comunidad educativa matemática empezó ya a asumir el reto de integrar lo cotidiano y lo académico en matemáticas, en la mayoría de los frentes: proyectos curriculares (los antedichos son sólo ejemplos), investigación sobre las creencias y prácticas de los profesores, y el desarrollo de una cultura del aula que funciona inspirada en las prácticas cotidianas de las matemáticas académicas (p.e., Arcavi, Kessel, Meira & Smith, 1998; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1992). Sin embargo, queda mucho todavía por investigar. Por ejemplo: ¿es siempre posible suavizar la transición entre contextos familiares y cotidianos, en los que los alumnos usan estrategias apropiadas para resolver problemas, y contextos académicos en los se aprenden matemáticas más generales, formales y descontextualizadas? ¿Existen puntos de ruptura? Si los hay, ¿cuál es su naturaleza? Los estudios sobre matemáticas cotidianas y el interés en las etnomatemáticas constituyen la más valiosa contribución, no sólo por su valor intrínseco, sino también por la reflexión que provocan en la comunidad de educación matemática en general. Hay mucho todavía por ganar de esa contribución.

References

Arcavi, A., Hadas, N., & Dreyfus, T. (1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. *Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education* (PME 18, Vol. 2, pp. 280-287). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. (1998). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. *Research in Collegiate Mathematics Education* 3 (7), 1-70.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"? *For the Learning of Mathematics*, 13 (2), 12-17.

Brenner, M E. y Moschkovich, J. (editores) (2002): *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom*. Monograph v. 11. *Journal for Research in Mathematics Education.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, P. J., & Hersch, R. (1982). *The mathematical experience*. Boston: Houghton Mifflin Co.

de Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid, Spain: Pirámide S. A.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (1), 45-55.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Hershkowitz, R., & Arcavi, A. (1990). The interplay between student behaviors and the mathematical structure of problem situations--issues and examples. *Proceedings of the Fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 193-200). Oaxtepec, Mexico: CINVESTAV.

Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (1999). Reflective processes in a technology based mathematics classroom. *Cognition and Instruction*, 17 (1), 65-91.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal,* 27 (1), 29-63.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Millroy, W. L. (1992). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters (Monograph). *Journal for Research in Mathematics Education*, 5. Reston, VA: NCTM.

Moschkovich, J. N. (1992). Students' use of the x-intercept: An instance of a transitional conception. In W. Geeslin and K. Graham (Eds.), *Proceedins of the Sixteenth Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 128-135). Durham, NH: Program Committee of the Sixteenth PME Conference.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996a). The visibility of meanings: Designing for understanding the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1 (1), 3-31.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996b). *Windows on mathematical meaning*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge.

Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 45-60). Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1995). Mathematics: "in context", "pure", or "with applications"? A contribution to the question of transfer in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 15 (1), 2-15.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

van Reeuwijk, M. (1995). Students' knowledge of algebra. *Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education* (PME 19, Vol. 1, pp. 135-150). Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Abraham Arcavi.
Weizmann Instute. Israel.

abraham.arcavi@weizmann.ac.il