Learning to listen: from historical sources to classroom practice

Abraham Arcavi & Masami Isoda

Educational Studies in Mathematics (2007) 66:111–129

Traducción: Daniela Pagés
Correcciones y comentarios: Mónica Olave, Fernando Bifano, Abraham Arcavi

Aprender a escuchar: de las fuentes históricas a la práctica del aula.

Resumen: Escuchar a los alumnos de manera productiva parece ser la esencia de las prácticas de enseñanza alineadas con los principios básicos de la perspectiva constructivista. Presentamos una definición de formas productivas de escuchar, discutimos los desafíos que involucra implementarla, y proponemos un modo de sostener la descentración necesaria para aprender a escuchar para ser usada en programas de formación docente. La propuesta se basa en leer y comprender textos históricos como una forma de ejercitar el punto de vista "del otro". Describimos los materiales desarrollados para talleres con profesores, su implementación y lo que aprendimos los participantes, y nosotros, de esta experiencia.

Palabras clave: aprender a escuchar – historia de las matemáticas – enseñanza constructivista – formación de profesores – interacciones entre docentes y alumnos.

1 Introducción

El propósito de este artículo es describir y analizar un enfoque para desarrollar la capacidad de los docentes para escuchar productivamente a sus alumnos. En primer lugar, definimos "escuchar" (Sección 1) y discutimos sus desafíos y dificultades (Sección 2). Luego planteamos la pregunta "¿Cómo podemos apoyar el desarrollo de la capacidad de escuchar?" y proponemos una aproximación para responderla a través de la historia de las matemáticas (Secciones 4 y 5). Finalmente, describimos la forma en que implementamos este enfoque (Sección 6) y relatamos lo que aprendimos de la experiencia (Sección 7).

2 "Escuchar" a los alumnos

La filosofía constructivista de la práctica de la educación matemática se sostiene en dos supuestos interrelacionados:

1. Cuando los alumnos se involucran genuinamente en la resolución de problemas matemáticos, proceden de formas subjetivamente razonables y productivas.

2. Los investigadores y docentes deben aprender a escuchar y a oír el sentido y los significados alternativos de esos abordajes. (Confrey, 1991, p. 111)

Inspirados en esta cita, proponemos la siguiente definición de "escuchar" a los alumnos: prestar cuidadosa atención a lo que los alumnos dicen (y observar lo que hacen), tratando de comprenderlo, así como sus orígenes y sus implicaciones. "Escuchar", tal como lo concebimos, no es una tarea pasiva, ya que debería incluir las siguientes componentes:

- Detectar, aprovechar, y crear oportunidades en las que los alumnos puedan expresar libremente sus ideas matemáticas;
- Cuestionar a los alumnos para develar la esencia y las fuentes de sus ideas;

- Analizar lo que oímos (a veces consultando con colegas) y hacer el enorme esfuerzo intelectual de tomar la perspectiva “del otro” para comprender su esencia; y
- Decidir de qué manera se puede integrar productivamente las ideas de los alumnos en el transcurso de una clase.

Es decir, “escuchar … promueve la reflexión que puede conducir a una concepción de enseñanza basada en la adaptación, una condición necesaria para el desarrollo profesional” (Cooney & Krainer, 1996, p. 1181).

Muchos investigadores han descrito distintos modos de escuchar a los alumnos como una componente integral del proceso de enseñanza. Por ejemplo, Moschkovich (2004) estudió en detalle cómo un tutor basaba su interacción con las ideas de una alumna para ayudarla a avanzar. La autora presenta y analiza el constructo de “apropiación”, cuya existencia y función se basa precisamente en la escucha mutua profesor-alumno. “La apropiación involucra una actividad productiva conjunta, un foco de atención compartido, y significados compartidos… también involucra tomar lo que otro produce durante la actividad conjunta, para el propio uso en la siguiente actividad productiva …” (p. 51).

Más allá de implementar un enfoque constructivista en la práctica de la educación matemática, escuchar puede tener importantes funciones intelectuales y afectivas. Por ejemplo, el desarrollo de la escucha docente puede ser una componente robusta de una forma receptiva y empática de estar atento (Smith, 2003, p. 498) en las conversaciones docente-alumno. Si a menudo esta escucha es ejercitada por los docentes, los alumnos se sentirán respetados y valorados. Más aún, la escucha practicada por el docente puede ser internalizada por los alumnos como un hábito a incorporar a su repertorio de técnicas de aprendizaje y habilidades interpersonales.

Escuchar puede beneficiar también a los propios escuchas. “Pensarnos a través de observar a otras personas nos conduce a reflexionar acerca de nuestra propia relación con la matemática” (Jahnke, 1994, p. 155). En otras palabras, la escucha efectiva puede influenciar “a quienes escuchan”, llevándolos a re-inspeccionar su propio conocimiento, a partir de lo que fue escuchado de otros. Tal re-inspección de las comprensiones propias de quien escucha (que pueden haberse dado por sobreentendidas) pueden promover el re-aprendizaje de cierta matemática o meta-matemática. Hay muchos auto reportes francos sobre este fenómeno. Por ejemplo, Aharoni, un investigador matemático involucrado en enseñanza experimental en la escuela primaria reportó sobre su propia experiencia que “… lo que me sorprendió más fue que aprendí matemática. De hecho, mucha.” (Aharoni, 2003, p. 1) De forma similar, Henderson (1996) reportó sobre su enseñanza universitaria que: “Al principio estaba sorprendido - ¿Cómo podía yo, un experto en geometría, aprender de los alumnos? Pero este aprendizaje ha continuado por 20 años y ahora espero que siga ocurriendo. De hecho, como espero más y más que ocurra y aprendo a escucharlos más efectivamente, encuentro que una gran parte de los alumnos en la clase me muestran algo sobre geometría que nunca antes había visto.” (p. 46)

Por lo tanto, como una destreza que puede servir a muchos propósitos de desarrollo profesional, escuchar debería convertirse en una capacidad central de la enseñanza que debería ser aprendida, desarrollada y continuamente fomentada. Sin embargo, escuchar no es una tarea sencilla.

3 Los desafíos de "escuchar"

Los siguientes son algunos de los desafíos y dificultades de escuchar y sus posibles fuentes.

3.1 *Conocimiento "empaquetado"*

Una vez que aprendemos y entendemos una idea o un cuerpo de conocimientos matemáticos, tendemos a olvidar, y posiblemente incluso (inconscientemente) a desestimar, el proceso que nosotros (u otros) experimentamos durante el aprendizaje de ese conocimiento. El conocimiento del experto parece sufrir una progresión irreversible hacia la "compactación" o "empaquetado" que borra algunas de las memorias del proceso de aprendizaje. Freudenthal (1983, p. 469), describe este fenómeno del siguiente modo: "He observado, no sólo con otras personas sino conmigo mismo… que las fuentes del conocimiento pueden ser obstruidas por los automatismos. Uno finalmente domina una actividad tan perfectamente que la pregunta de cómo y por qué deja de formularse, no puede formularse más, y ni siquiera se la comprende como una pregunta significativa y relevante." De forma similar, también "… las disputas históricas, aun las más feroces, tienden a ser completamente olvidadas una vez que los matemáticos consiguen reconciliarse con las nociones problemáticas" (Sfard, 1994, p. 130). Así, para un matemático moderno "nada podría ser más simple…" (ibid.). En otras palabras, "Los procesos cognitivos y perceptuales altamente practicados se vuelven automatizados de modo que para los expertos no hay nada en la memoria para "reproducir", verbalizar, y sobre lo que reflexionar" (Nathan & Petrosino, 2003, p. 907). Este fenómeno puede impedir escuchar empáticamente a los que están sumidos en el proceso de aprendizaje. Por lo tanto, parece que el tipo de escucha que proponemos debe ser desarrollada a contramano de la tendencia natural del experto, y debería incluir el "desbloqueo de automatismos" (Freudenthal, 1983, p. 469), desempaquetando cuestiones dadas por sentadas, dejando de lado artificialmente mucho de lo que sabemos tan bien. Si éste es el caso, una parte importante del aprendizaje de escuchar a los alumnos incluiría, paradójicamente, algún tipo de "desaprendizaje matemático" por parte del docente. (La expresión "desaprendizaje" para la enseñanza es tomada de Ball (1988) aunque aquí la estamos aplicando de forma diferente que en el original.)

3.2 *"Descentrando" capacidades*

Como maestros, a veces no sólo necesitamos dejar de lado nuestro propio conocimiento y maneras de saber, sino que también tenemos que desarrollar la capacidad de 'leer a través' de formas idiosincrásicas de expresión de los alumnos y aprender a apreciar su lógica subyacente y su potencial. En otras palabras, "Dar sentido a las ideas de los niños no es tan fácil. Los niños usan sus propias palabras y sus propios marcos en formas que no necesariamente se adaptan a la forma de pensar del profesor." … "La capacidad de *oír* lo que los niños están diciendo trasciende la disposición, la agudeza auditiva y el conocimiento, aunque también dependa de todos ellos" (Ball, 1993, p. 378). Por lo tanto, escuchar no sólo implica un ejercicio de desbloqueo de nuestros propios conocimientos matemáticos relevantes para la situación en cuestión, sino que también requiere el desarrollo de una capacidad de "descentración". Tomamos y adaptamos la idea de descentración de Piaget (ver, por ejemplo, Ginsburg y Opper, 1979, p. 65) y, en nuestro contexto, lo entendemos como la capacidad de adoptar la perspectiva del otro, de "llevar sus gafas conceptuales" (alejando lo más posible nuestras propias perspectivas), de poner a prueba en ciclos iterativos nuestra comprensión de lo que oímos, y posiblemente de adoptarlo y aplicarlo. Tal descentración requiere un profundo esfuerzo intelectual para aprenderla y ejercitarla.

3.3 Diferentes modos de escuchar

Otra dificultad consistiría en engañarnos a nosotros mismos haciéndonos creer que escuchamos atentamente, mientras que en realidad no lo hacemos. Confrey (1991) contrasta los enfoques del 'aprendizaje por descubrimiento' (discovery learning) con la perspectiva constructivista, una distinción que cuando se extiende a la enseñanza puede resultar en formas diferentes: "escucha evaluativa" (Davis, 1997) como opuesta a la "escucha atenta" (según la define Smith, 2003, en base a "escucha hermenéutica", ibid.), respectivamente. La primera, que es más común, consiste en escuchar teniendo en cuenta la respuesta correcta esperada. Implica una 'medición' virtual de la "distancia" entre el estado actual de los conocimientos del alumno y el objetivo deseable, proporcionando retroalimentación directa basada en la 'corrección' y la aplicación de estrategias de consolidación. Para algunos maestros, esta puede ser una práctica común que se concibe como "escuchar". Sin embargo, tal escucha tiende a ignorar el pensamiento de los alumnos, las fuentes de sus ideas originales y su potencial como fuente de aprendizaje.

3.4 Sesgos inevitables

Supongamos que hayamos experimentado y desarrollado cierta capacidad para "desbloquear" y descentrarnos hacia una escucha atenta, en lugar de evaluativa. Aún las dificultades pueden estar lejos de resolverse. Los investigadores han descrito el fenómeno de la "escucha de menos" por parte de los profesores, o la "sobre-escucha" (por ejemplo, Wallach y Even, 2002). Estos fenómenos pueden atribuirse a las limitaciones bajo las cuales los maestros trabajan, o más fundamentalmente, a una imposibilidad inherente al ser humano: los maestros (y los seres humanos en general) "siempre *escucharán a través de* varios factores personales o 'pantallas'; .... no es realista esperar que un profesor comprenda 'exactamente' lo que los alumnos están diciendo y haciendo. Ese 'escuchar a través' no es algo que puede ser fácilmente superado. Más bien, es una característica fundamental de la comprensión de una persona de lo que otra persona está diciendo, haciendo y sintiendo." (Even y Wallach, 2004, p. 491)

3.5 Concomitancia

Escuchar a los alumnos implica implementar hábilmente diferentes maneras de sostener conversaciones, cuestionamientos y sondeos, destinados a desempaquetar, y verificar, lo más fielmente posible, la perspectiva del otro. Esto consume mucho tiempo y sus resultados pueden no ser inmediatos. La comprensión de la perspectiva del otro puede ocurrir cuando revisamos (mentalmente o a partir de un registro) conversaciones con alumnos mucho después de que éstas han ocurrido. Indagar y al mismo tiempo entender (aunque sea parcialmente) la perspectiva del alumno puede ser una tarea muy exigente, y a veces incluso imposible de implementar en tiempo real.

4 Preguntas de investigación

Afirmamos que, aunque pueda resultar imposible capturar completamente los pensamientos y comprensiones de los alumnos, hay mucho para aprender entre la "sordera" (o indiferencia) completa y la completa apertura de nuestra audición y nuestras mentes a esas ideas. Por lo tanto, dada la importancia de "escuchar" hacia la comprensión del punto de vista de los alumnos y a pesar de los desafíos descritos más arriba, asumimos que (al menos en cierta medida) los docentes pueden y deben aprender a escuchar. La principal pregunta es ¿Cómo? ¿Qué tipo de experiencias deberían orquestarse para desarrollar esas capacidades deseables de escuchar? ¿Qué tipo de "currículo para el aprendizaje profesional" (Ball y Cohen, 1999, p. 20) y "pedagogía para el desarrollo profesional" (ibid., p. 25) pueden diseñarse para cultivar y desarrollar la habilidad de escuchar y tratar de comprender las ideas de los alumnos, sus orígenes y sus posibles implicaciones? ¿Cómo podría funcionar tal currículo en cursos para docentes y en qué medida puede alcanzarse el objetivo de aprender a escuchar?

Hay muchos enfoques para abordar estas preguntas. Por ejemplo, el modelo japonés de "estudio de clases" incluye, entre otros componentes, la posibilidad de que los docentes observen clases de sus colegas. De esa manera, los docentes que, en sus propias clases, están demasiado ocupados para prestar la atención necesaria a las formas en que los alumnos responden, son libres de observarlos y escucharlos. Esta práctica de observar y seguir lo que los alumnos dicen y hacen permite a los docentes desarrollar "ojos para ver a los niños" (*kodomo wo miru me*). Los docentes observadores "examinan" la clase buscando evidencias de aprendizaje y motivación de los alumnos, focalizándose en cómo estos, incluyendo los más pasivos, hablan o se involucran en comunicación no verbal. Esto les proporciona oportunidades para pensar más profundamente en sus propios alumnos de lo que le permite su propia práctica. Lo que los alumnos dicen y producen es siempre una cuestión crucial en las discusiones del estudio de clases y una fuente y base para (a) comparar y contrastar interpretaciones con colegas, y (b) desarrollar actividades de clase exitosas en sintonía con los alumnos (ver, por ejemplo, Isoda, Stephens, Ohara y Miyakawa, 2007, y Lewis, 2002).

Para otro tipo de experiencias se puede consultar, por ejemplo, Crespo (2000), quien reporta un estudio en el que algunos docentes que tomaron un curso especial de metodología notaron que escuchar les permitía cambiar sus interpretaciones acerca de las comprensiones de los alumnos, y así modificar su enseñanza.

5 El fundamento de nuestro enfoque

Aquí proponemos un enfoque para desarrollar y cultivar la habilidad de descentración para escuchar ideas y perspectivas de los otros. Nuestra aproximación consiste en una forma especial de trabajo diseñada para apoyar la comprensión de cierto tipo de documentos originales de la historia de la matemática. Nuestros supuestos básicos son los siguientes:

a) Para comprender completamente las ideas que están detrás de un documento histórico original necesitamos un tipo de descentración similar al necesario para escuchar a los alumnos;
b) Tal descentración puede ser aprendida; y
c) Los ambientes de aprendizaje para sostener este aprendizaje pueden y deberían ser diseñados.

La historia de las matemáticas provee aproximaciones a la resolución de problemas muy diferentes de las actuales. Tales procesos de resolución suelen ser poco transparentes y ocultan la justificación en la que se basan. Por lo tanto, para lograr comprenderlos, debemos embarcarnos en un ejercicio de "desciframiento" del razonamiento subyacente y del sustrato matemático que torna un método/abordaje inusual en válido y posiblemente general. Involucrarse en tal ejercicio encierra algunas similitudes con el proceso de captar lo que hay detrás del pensamiento y las acciones de nuestros alumnos. No afirmamos que pueda haber paralelismo entre la matemática subyacente en las fuentes primarias y aquellas de nuestros alumnos. Lo que afirmamos es que experimentar el proceso de comprender el enfoque matemático de una fuente histórica primaria puede ser una sólida preparación para la escucha de los alumnos. Basamos esta afirmación en lo siguiente:

- Las respuestas de muchos alumnos, que difieren de lo esperado, a menudo son fácilmente descartadas. Cuando nos enfrentamos a una fuente histórica con la aproximación (extraña para nosotros), sabemos que las mejores mentes de su tiempo y cultura estuvieron detrás de ella. Por tanto, un texto histórico no puede ser fácilmente descartado en base a la dicotomía correcto-incorrecto, como sucede comúnmente con las respuestas de los alumnos. Una fuente histórica debe ser atendida en toda su idiosincrasia, y muchas veces nuestros conocimientos no pueden ser inmediatamente proyectados en ella; uno tiene que analizar profundamente la naturaleza propia del texto. Al hacer esto, removemos un primer obstáculo en la ardua tarea de la descentración. La repetición de este ejercicio puede sostener tanto el desarrollo del hábito de no desechar cualquier solución como el despliegue de un enfoque matemático idiosincrásico.
- Al enfrentarnos a una fuente histórica inicialmente críptica, tenemos que desarrollar herramientas para encontrarle sentido. Las principales herramientas pueden ser: desglosar la fuente y revisar sus distintas partes, plantearse preguntas a uno mismo (o a un compañero) acerca de ella, parafrasear partes del texto con nuestras palabras y notaciones, resumir las comprensiones parciales, localizar y verbalizar lo que aún queda por clarificar, y contrastar diferentes partes en busca de coherencia. En cierto sentido, esto implica un tipo de práctica "hermenéutica" (interpretativa): "La historia de las matemáticas es esencialmente un esfuerzo hermenéutico: se interpretan las teorías y sus creadores. La interpretación comprende un proceso circular de formación de hipótesis y testeo de éstas en relación al material dado…" (Jahnke, 1996, p. 173). Inspirados por la escuela hermenéutica tradicional, Isoda (2002) e Isoda y Kishimoto (2005) identificaron componentes de la interpretación matemática en general, y en particular, de la lectura de fuentes primarias. En primer lugar, cuando deliberada o inconscientemente usamos nuestras propias matemáticas para dar sentido a un texto matemático, podemos no avanzar e incluso percibir contradicciones. En este punto, podemos comenzar a considerar seriamente la pregunta: ¿Qué es lo que está escrito? ¿Por qué el autor escribió de este modo? ¿Cuáles son los supuestos implícitos? Si este texto dice A, y A implica B - ¿dónde está B en el texto? Este tipo de cuestionamiento puede conducirnos a adoptar la 'perspectiva de los escritores'. Esta práctica puede ayudar a desarrollar una comprensión que luego necesite ser re-confirmada con un proceso en algún modo recursivo (por ejemplo, aplicando nuestra comprensión a textos, ejemplos o problemas similares).

En suma, aprender a leer y comprender documentos históricos originales puede resultar en el aprendizaje de las destrezas y las herramientas necesarias para aprender a escuchar a los alumnos.

6 Descripción y análisis de los materiales

En esta sección, presentamos un ejemplo de una actividad en torno a 'Matemáticas

Egipcias’, adaptado del trabajo previo descrito en Arcavi (1987) y Arcavi y Bruckheimer (2000), seguido por la descripción de su implementación y sus resultados. Invitamos a los lectores, especialmente a aquellos no familiarizados con las matemáticas egipcias antiguas, a hacer una pausa luego de leer cada etapa, y tratar de responder las preguntas (antes de leer los comentarios), para reflexionar sobre ellas y sobre la experiencia.

Primera etapa:

El siguiente texto (Fig. 1) del Papiro Rhind presenta un cálculo, en escritura Hierática y en Jeroglíficos, llevado a cabo durante la resolución del problema #74.

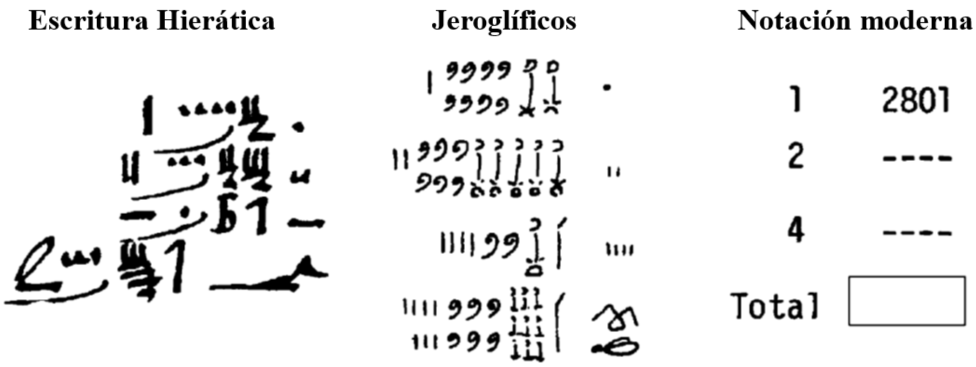


Fig. 1 Cálculos desarrollados durante la resolución del problema #74

1 En base a la traducción inicial a la notación moderna, indique el posible significado de cada signo jeroglífico.
2 Complete los espacios en blanco.
3 Explique cuál fue el cálculo desarrollado en este extracto.

6.1 Comentario

Las preguntas ofrecen una guía hacia la comprensión del texto. Los cálculos de esta etapa y los de la siguiente serán necesarios en la tercera etapa.

La primera pregunta es introductoria y dirige la atención a la construcción de un ‘diccionario’. Se puede observar que hay dos columnas distintas de números, que una barra representa al número 1, y los números entre 1 y 9 se escriben como agregaciones de barras.

El signo  representa 100, la flor de loto  representa 1000, y estos signos también son yuxtapuestos para componer números. Mientras que el significado de estos signos puede inferirse directamente de la traducción parcial a la notación moderna, el significado de “dedo doblado”, que representa 10000, debería ser conjeturado y chequeado a partir de los cálculos y de sus dos apariciones. Esto conduce a completar los espacios en blanco:

1	**2801**
2	5602
4	11204
Total	19607

Esta traducción provee un indicio implícito acerca de las características del sistema de numeración: la escritura es de derecha a izquierda, el sistema es, en cierto sentido, decimal (un símbolo representa diez símbolos ‘menores’ idénticos), los números se componen yuxtaponiendo símbolos, pero no hay valor posicional (si los símbolos que designan un número se reacomodan de otra manera, siguen representando el mismo número), lo cual hace que un símbolo para el cero sea innecesario en este sistema.

A esta altura, se puede tener una primera idea del procedimiento. La palabra *total* sugiere una adición de los números en esa columna, lo que puede confirmarse fácilmente. Sin embargo, esto no constituye aún una explicación completa del cálculo efectuado. ¿Cuál es el significado de los números en la primera columna? Una nueva revisión nos lleva a notar que en cada línea (de ambas columnas) se expresa la duplicación del número de la línea anterior. Por lo tanto, el cálculo realizado es 1 x 2801 + 2 x 2801 + 4 x 2801, o en otras palabras, 7 x 2801. Ahora, tenemos una idea más clara de “qué” fue lo que se hizo, y cuál es la propiedad matemática en la que se basa. Todavía, podemos querer especular sobre el por qué la multiplicación se hizo de tal forma. Es posible que esto tenga que ver con las características del sistema de escritura, en el cual la agregación de símbolos (sustituyendo 10 de ellos por uno ‘mayor’ cuando sea necesario) facilita la duplicación y la suma. En este caso, el desciframiento no trajo consigo al principio ‘nuestra’ forma de multiplicar, porque no sabíamos qué cálculo se había realizado. Por lo tanto, en este caso, no tenemos la opción a priori de contrastar el documento con un cálculo esperado, y nos abocamos enteramente a comprender qué se había hecho (las comparaciones entre métodos ciertamente pueden hacerse a posteriori). Nótese, además, que la comprensión de este texto tuvo dos niveles claros: la traducción que conduce a la comprensión de que se realizó una adición, y luego el entendimiento de que, de hecho, este cálculo es una multiplicación desarrollada por un método original basado en la propiedad distributiva. Finalmente, podemos especular, en base al sistema numérico, por qué se hizo el cálculo de esta forma. Todavía, se debe hacer una reflexión matemática más completa sobre la generalidad del método, y en eso se enfoca la siguiente parte.

Segunda etapa:

La siguiente (Fig. 2) presenta otro cálculo, desarrollado durante la resolución del problema #52.

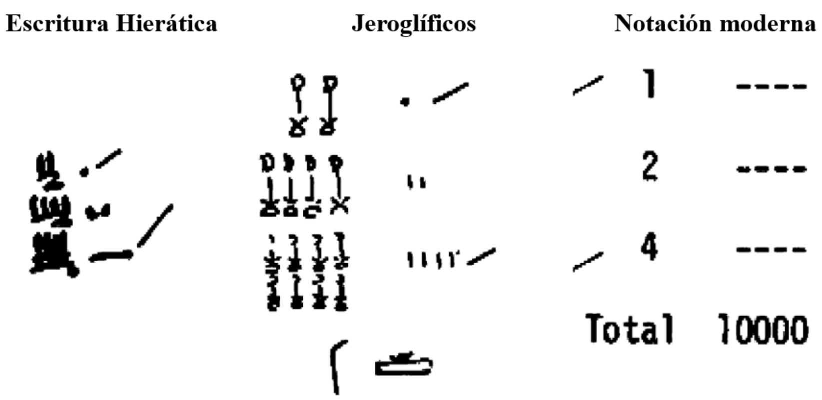


Fig. 2 Cálculos realizados durante la resolución del problema #52

1 En base al paso previo, ¿qué preguntas se formularía para el nuevo texto?

Pausa para recoger las preguntas

2 En base a la traducción de los jeroglíficos, ¿qué significa cada uno de los signos?

3 Complete los espacios en blanco.

4 Explique qué cálculos fueron realizados en este caso, y cuál es el significado de las barras inclinadas.
5 Calcule 13 x 27 por el método egipcio.
6 ¿Pueden multiplicarse dos números cualesquiera por este método? Explique.

6.2 Comentario

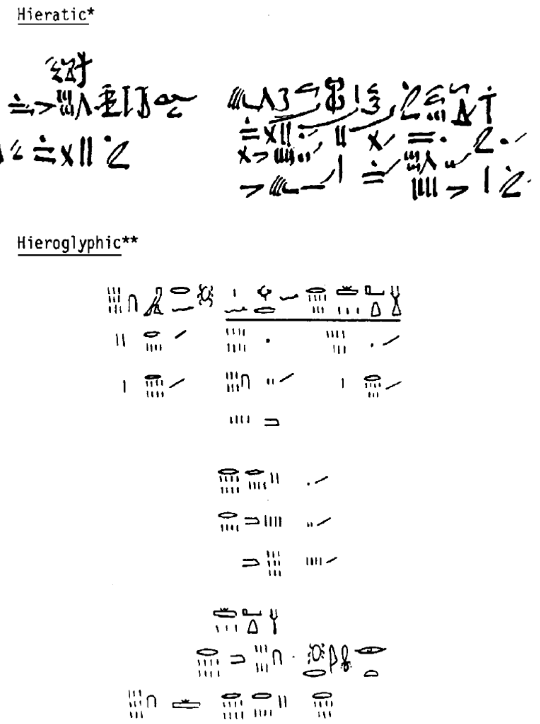
En este ejemplo no se requieren todas las cantidades duplicadas para realizar la operación 5 x 2000, pero todas ellas son presentadas como pasos intermedios para obtener los sumandos necesarios (1 x 2000 + 4 x 2000). En este ejemplo, se aclara una nueva característica del método: construir *y elegir* los sumandos precisos. Nótese que antes de proporcionar las preguntas guía, se solicita generar preguntas propias como un modo de comenzar a ejercitar la comprensión de un texto sin apoyo externo. Luego presentamos nuevamente las preguntas guía. Esto puede contribuir a la internalización del cuestionamiento productivo necesario para la comprensión de textos.

La operación 13 x 27 tiene el objetivo de consolidar la comprensión, proporcionando un ciclo iterativo, esta vez *aplicando* activamente la 'perspectiva del otro' a un nuevo ejemplo. Estos dos factores de la multiplicación fueron elegidos deliberadamente de modo que el cálculo no sea inmediato. Por último, se discute la pregunta sobre la generalidad del método, es decir, ¿se podrá multiplicar dos números cualesquiera mediante el método egipcio? ¿Por qué? Y si es así, queda una cuestión abierta relacionada con la investigación histórica: ¿los egipcios eran conscientes de la generalidad de su método?

Notemos que cuando tratamos de comprender las producciones de los alumnos necesitamos herramientas similares: proponer buenas preguntas, traducir las ideas centrales a un lenguaje más entendible, revelar el conocimiento subyacente implícito, buscar generalidad (y/o las limitaciones) de un método o un argumento, relacionándolo con el conocimiento existente del alumno y considerar cómo integrarlo en el proceso de enseñanza.

Tercera etapa:

La siguiente (Fig. 3) es la solución completa del Problema #24. La traducción al inglés (Peet, 1970) presenta omisiones deliberadas (líneas punteadas) para ser completadas por los participantes como parte de la tarea de descifrado del texto.



A quantity whose seventh part is added to it becomes 19.

$/1$	7
$/\frac{1}{7}$	---
1	8
$/2$	---
$\frac{1}{2}$	---
$/\frac{1}{4}$	---
$/\frac{1}{8}$	---
$/1$	$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$/2$	-----
$/4$	-----

The doing as it occurs:—The quantity is $16\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
one seventh is ---
Total ---

Fig. 3 Solución al Problema #24

1 Genere preguntas cuyas respuestas ayuden a comprender el proceso de solución para el problema propuesto.

Pausa para recolección de las preguntas y discusión.

2 Escriba, en notación moderna, la ecuación correspondiente a la primera oración, y resuélvala.

Las preguntas 3 – 9 tienen el objetivo de ayudar a comprender el método solución, desglosando el texto.

3 Observe el primer paso:

$$
\begin{array}{ll}
/1 & 7 \\
/\frac{1}{7} & ---
\end{array}
$$

Aparentemente, los egipcios abordaron el problema sustituyendo un número tentativo, y observando qué sucede.

a) ¿Qué número tentativo usaron?
b) Complete los espacios en blanco.
c) ¿Qué resultado se obtuvo?
d) ¿Por qué cree que eligieron ese número?

4 Observe el segundo paso:

$$\begin{array}{ll}
1 & 8 \\
/2 & --- \\
\frac{1}{2} & --- \\
/\frac{1}{4} & --- \\
/\frac{1}{8} & ---
\end{array}$$

a) Complete los espacios en blanco.
b) ¿Qué operaciones se realizaron, y cuál fue el resultado?

5 Observe el tercer paso:

$$\begin{array}{ll}
/1 & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
/2 & --- \\
/4 & ---
\end{array}$$

a) Complete los espacios en blanco.
b) ¿Qué operaciones fueron realizadas, y cuál fue el resultado?

6 Observe el paso final (Fig. 4):

The doing as
it occurs :—The quantity is $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
one seventh is $---$
Total $---$

Fig. 4 Paso final

Complete los espacios en blanco y explique qué se ha obtenido en este paso.

7 Resuma el método de solución y explíquelo.

8 Escriba la solución del problema, como si hubiera aparecido en el Papiro (pero en notación moderna), si el primer número de prueba hubiera sido 14 en lugar de 7.

9 El Problema #25 del Papiro es “A una cantidad se le suma su mitad obteniendo 16.” Resuelva el problema de dos maneras: como lo haría hoy y usando el método egipcio (como usted piensa que aparecería en el Papiro, pero usando notación moderna).

6.3 Comentario

Para aquellos que no lo conocen, este método de solución para resolver ecuaciones lineales resulta críptico, ciertamente a primera vista y posiblemente también después de algunos esfuerzos para encontrarle sentido. No se asemeja al eficiente método de solución simbólico y directo que enseñamos y usamos actualmente.

En las etapas previas, nuestras preguntas modelaban las siguientes herramientas: ‘desglosar’ el texto (dividiéndolo en secciones pequeñas), identificar las operaciones matemáticas (basado en lo que fue hecho en las etapas anteriores) y efectuar una síntesis (vea el análisis más abajo). Al inicio de esta etapa, se invita a los participantes a reflexionar sobre el tipo de cuestionamiento que puede ser productivo y por qué.

La primera pregunta que proponemos solicita la resolución moderna del problema. La simplicidad de nuestro método simbólico, al menos a primera vista, contrasta con el método egipcio, que aparece largo, complicado y puramente numérico. Este contraste puede inducirnos a dejar de lado el método moderno para encontrarle sentido al método egipcio. Como se describió más arriba, un primer paso del esfuerzo hermenéutico (interpretativo) sería tal sensación de contradicción o contraposición que estimularía la búsqueda del 'punto de vista del otro'.

Trabajar sobre las próximas preguntas puede no ser del todo propicio para la comprensión completa del método. Así, uno puede producir buenas respuestas a las preguntas 3, 4, 5 y 6 de más arriba, y aún tener un relato descriptivo de lo que fue hecho en cada etapa (adición, multiplicación, división, etc.) sin comprender cuál es el método y por qué funciona. La pregunta 7 requiere que el lector junte todas las piezas y produzca una explicación completa. Puede llevar un tiempo articularla coherentemente, por ejemplo, del siguiente modo: comenzar con un número supuesto conveniente para las operaciones del problema, como si fuera la solución buscada. Luego de aplicar a este número las condiciones del problema, se ajusta el resultado usando un razonamiento proporcional. En nuestro caso, aplicar los cálculos a 7 lleva al número 8. La razón entre este resultado (8) y el resultado deseado (19), es decir, cuántas veces "8 cabe en 19" debería ser el número de veces que nuestro número de prueba, 7, "cabe en" el número desconocido que buscamos. La idea matemática clave subyacente en el método egipcio es la proporcionalidad, en sus varias manifestaciones (incluyendo el supuesto escondido de que "1 es a 8, como 2 es a 16, como ¼ es a 2, como 1/8 es a 1, y también como (2 + ¼ + 1/8) es a (16 + 2 + 1)."

También pedimos al lector que aplique el método comenzando con otro número tentativo, y luego, intente la solución de un problema similar mediante este método. El propósito de este ejercicio es ser capaz de reproducir el método para lograr y consolidar una mayor comprensión de éste y de su fundamento – esta actividad corresponde a los ciclos iterativos, una componente importante del proceso hermenéutico.

La siguiente etapa, que no describimos aquí, consiste en comprender un extracto de *L'Arithmétique* del matemático francés J. Peletier, publicado en 1549, con el objetivo de discutir y aplicar la Regla de la Falsa Posición (el método pre-simbólico para resolver ecuaciones lineales que tiene similitudes con el método egipcio – ver, por ejemplo, Smith, 1958, vol. II, pp. 437-441).

Los tipos de preguntas que diseñamos para facilitar la comprensión de los textos históricos consisten en:

- Crear traducciones tipo 'diccionario' de las notaciones antiguas a las nuestras.
- Solicitar la descripción de un cálculo. Nótese que tal descripción puede ser provista en distintos niveles de profundidad. Por ejemplo, en la primera etapa, puede notarse una característica superficial (la adición realizada) y sólo más tarde la estructura profunda del método (la multiplicación).
- Resolver el problema con nuestro método moderno notando que éste difícilmente pueda corresponderse con los pasos del método egipcio – estimulando así, indirectamente, a la búsqueda de la 'perspectiva del texto'.

- Desglosar el texto y concentrarse en la comprensión ‘local’ de sus componentes.
- Solicitar ‘unir las piezas’ hacia una comprensión global del método.
- Aplicar el método a otro problema.
- Clarificar los tipos de conocimientos previos relevantes para comprender el texto.
- Investigar los fundamentos matemáticos de un método de solución (por ejemplo, las propiedades matemáticas supuestas, la generalidad, etc.).

7 El taller

Condujimos un taller de dos sesiones con los materiales descritos, en un curso de formación inicial de profesores de matemática de la Universidad de Tsukuba en Japón. El curso es parte de un programa de maestría en Educación Matemática que prepara/especializa a los participantes como docentes del nivel secundario superior. Quince de los diecisiete participantes eran graduados recientes de una licenciatura en matemáticas, arquitectura o ingeniería, o graduados de un profesorado de matemáticas. Los otros dos participantes eran docentes experimentados que retornaron a la escuela de posgrado. La primera sesión del taller duró tres horas sin interrupción y la segunda duró cuatro horas y 10 minutos sin interrupción. El conductor del taller (instructor regular del curso y segundo autor de este artículo), tuvo intervenciones mínimas, excepto al inicio, dirigiendo las discusiones y haciendo un resumen. El taller fue totalmente videograbado, y se administraron dos cuestionarios breves.

El taller tuvo dos componentes distintas: la histórica y la pedagógica, como se describe más abajo.

Componente histórica

- *Introducción.* Se comenzó con una pregunta general: “En su opinión, ¿qué se puede aprender de la historia de las matemáticas para la práctica de la enseñanza de las matemáticas?” Luego de la discusión, el líder explicó que el objetivo del taller era aprender de las experiencias y de las opiniones de los participantes.
- *Primera etapa.* (Descrita anteriormente)
- *Segunda etapa.* (Descrita anteriormente)
- *Tercera etapa.* (Descrita anteriormente)

[Final de la primera sesión]

- [Inicio de la segunda sesión] Revisión de los pasos principales del método egipcio de solución para resolver una ecuación lineal con una incógnita.
- *Cuarta etapa.* Trabajo con el texto de Peletier.
- *Cuestionario 1.* Se solicita a los participantes que escriban de qué formas creen que la experiencia de este taller puede ser útil para ellos como profesores.

Componente pedagógica:

- *Quinta etapa.* Se presenta la siguiente tarea tomada de Even y Wallach (2004).

  *Ahuva, una docente de quinto grado quería evaluar si sus alumnos sabían cómo encontrar el todo cuando se conoce una parte. Planteó a sus alumnos una prueba que incluía el siguiente problema: “3/5 de un número es 12. ¿Cuál es el número? Explica tu solución.” Ron, uno de los alumnos, escribió: “12 * 2 = 24, 24:6 = 4, 24–4=20.”*
- ¿Es correcta la solución de Ron?

— Si tú fueras el profesor de Ron, ¿cuál sería tu evaluación de sus conocimientos?

El propósito de esta tarea era promover un ejercicio interpretativo, tomando la solución escrita de un alumno como 'texto'.

— *Sexta etapa.* Se presenta un video con fragmentos de una clase de matemáticas de quinto grado en Japón, en la que los alumnos realizan muchos ejercicios de división derivados de y equivalentes a $5.4 \div 3 = 1.8$. Algunas de sus producciones eran esperadas, otras fueron inesperadas y sofisticadas, algunas correctas y algunas que reflejaban errores interesantes (por ejemplo, $15.12 \div 9$). La tarea consistió en determinar cuál pudo haber sido el pensamiento detrás de cada respuesta.
— *Discusión.* Se comparten impresiones y reflexiones sobre el taller y las conexiones entre la componente histórica y la pedagógica.
— *Cuestionario 2.* Se pregunta a los participantes, por segunda vez, en qué formas piensan que la experiencia del taller puede ser útil para ellos como docentes.
— *Resumen y cierre.* El líder comparte explícitamente el objetivo del taller que se vincula con aprender a escuchar.

8 Aprendiendo del taller

En esta sección abordamos el doble sentido implícito en este título: el taller fue una experiencia de aprendizaje tanto para los participantes como para nosotros (los autores de este artículo). Los hallazgos que reportamos a continuación se basan en datos de los dos cuestionarios escritos, en los diálogos, en las discusiones y las soluciones registradas, y en nuestras observaciones subjetivas.

8.1 ¿El abordaje es factible?

Los participantes del taller estuvieron involucrados en la tarea todo el tiempo, y su participación fue animada y entusiasta. El primer autor de este artículo, quien actuó como observador sin conocimiento del japonés (idioma en el que se condujo el taller), tuvo la impresión que hubo momentos en los que la atmósfera de la clase parecía de suspenso. Esto se notó especialmente cuando los participantes se involucraban colectivamente en la producción de una explicación del método egipcio (ver pregunta 7, tercera etapa más arriba), o cuando trabajaban en comprender la solución de Ron. El surgimiento de la explicación completa de la solución egipcia llevó aproximadamente 40 minutos, lapso en el que los integrantes del grupo participaron colectivamente en producirla. Muchos estudiantes se turnaban para ir a la pizarra, y muchas veces toda la clase percibía que una explicación era parcial, ya fuera porque se concentraba en un paso específico, o porque era una mera descripción de los cálculos realizados. Después de muchas presentaciones, un participante fue a la pizarra y unió todas las piezas produciendo la explicación global que satisfizo a todos y el grupo entero lo aplaudió. El proceso de buscar y develar la explicación (cuya descripción detallada amerita por sí sola un artículo completo) de la intrigante solución egipcia fue tan motivante como una empresa detectivesca. Enfatizamos la naturaleza colaborativa del trabajo de estos participantes, su sentido de insatisfacción con explicaciones parciales, su persistencia en la búsqueda de una explicación global, su reconocimiento en cuanto la obtuvieron y la subsiguiente satisfacción cuando ésta fue lograda. Por lo tanto, las actividades propuestas mostraron ser tanto significativas como motivadoras.

8.2 ¿Qué es la 'práctica de enseñanza'?

Como se mencionó, al comienzo del taller propusimos a los participantes la siguiente pregunta: ¿Qué puede aprenderse de la historia de las matemáticas para la práctica de la enseñanza de las matemáticas? Se puede argumentar que, para responder esta pregunta, puede requerirse conocimiento y experiencia previos en las dos áreas (historia y enseñanza). Sin embargo, la pregunta es legítima de todas maneras, porque, en ausencia de esa experiencia, las respuestas reflejarían creencias y expectativas, que pueden servir como un anclaje a partir del cual es posible estudiar cambios de actitudes. En general, las respuestas orales que recogimos se centraban en las matemáticas (y la historia) que un docente debería saber para tener buenos recursos para usar en la clase, aún si no hubiera tiempo o lugar en el currículo para abordar directamente cuestiones históricas. La visión implícita sobre la práctica de enseñanza que emergió de esas respuestas se relaciona principalmente con el conocimiento de la materia que un docente debe tener para poder responder a las preguntas de los alumnos o para tener un repertorio de herramientas para matizar su enseñanza.

Como ya mencionamos, además de la pregunta inicial, los participantes también respondieron a un cuestionario escrito, luego de completar sus componentes histórica y pedagógica, respectivamente. Como se esperaba, las respuestas en el primer cuestionario se relacionaban con los contenidos de las tareas precedentes. Las respuestas al segundo cuestionario (administrado después de la componente pedagógica) reflejaban las conexiones que hicieron los participantes entre la interpretación de textos históricos y la comprensión de las ideas de los alumnos. Un comentario frecuente se refería a la comprensión, lo que puede hacerse con una base matemática 'restringida', y cuán importante es para los docentes ser conscientes de esto. Por lo tanto, hay ciertos indicios de que este taller puede haber contribuido a ampliar la concepción de historia de las matemáticas para la "práctica de enseñanza" no solamente por el conocimiento del contenido per se, sino también por incluir también conocimiento de contenido al servicio de la comprensión del pensamiento de otros.

8.3 Aprendiendo a preguntar

Proponer preguntas exploratorias es esencial para comprender la perspectiva del otro. Durante todo el taller, los participantes se involucraron en proponer diferentes preguntas, y en compararlas. Al principio, la mayoría de las preguntas se centraban en el desciframiento, por ejemplo, "¿Qué significa la '/'?" (Segunda etapa), "¿Qué operación se realizó aquí?" (Tercera etapa). A medida que transcurría el taller, surgieron otros tipos de preguntas que apuntaban a establecer la necesidad de develar el conocimiento ausente o pre-supuesto. Afirmamos que al ejercitar este cuestionamiento (que fue sostenido por las preguntas que propusimos), los participantes pueden haber comenzado a "apropiarse" (en el sentido de Moschkovich, 2004) de los tipos de preguntas guía que propusimos en la tarea para poder entender un texto. La "micro-evolución" de los tipos de cuestionamiento – desde meras guías para descifrar hasta herramientas para encauzar la comprensión de las ideas subyacentes – puede ser considerada como una indicación del desarrollo de una "escucha atenta".

8.4 La postura evaluativa

Como se mencionó, la escucha evaluativa prevalece y está muy arraigada. Un resultado de este taller fue hacernos más conscientes de cómo la escucha evaluativa puede obstaculizar el ejercicio de la escucha atenta. Por ejemplo, una tarea diseñada con el propósito de adoptar la perspectiva del otro puede promover involuntariamente juicios de valor, en lugar de desalentarlos. La solicitud de la solución del problema egipcio con nuestra notación moderna tuvo la intención de destacar las grandes diferencias aparentes entre nuestro método simbólico y el método egipcio. Asumimos que tales diferencias impulsarían a los participantes a abandonar los intentos de hacer corresponder un método con el otro, y, en cambio, dirigir toda su atención a desentrañar la 'perspectiva del otro' desde adentro. Sin embargo, para algunos participantes, tal ejercicio enfatizó el poder, la generalidad y la inmediatez del simbolismo algebraico, en contraste con el largo método numérico egipcio. Así, la intención de cultivar la escucha atenta, creando una brecha entre nuestro método y el egipcio, tuvo un leve efecto contraproducente para algunos: el método simbólico es tan poderoso y eficiente, como para preocuparse en considerar una alternativa complicada tan difícil de comprender.

Es muy posible que en interacciones de este tipo (lector-texto o docente-alumno), el juicio de valor y la evaluación son ineludibles. Las comparaciones (por ejemplo, entre métodos), las expresiones de opinión en una discusión en clase, y la toma de decisiones (por ejemplo, qué curso de acción tomar) están impregnadas de evaluación y juicios. ¿Es esto indeseable? Tal vez no siempre. En última instancia, nos esforzamos para que nuestros alumnos desarrollen métodos matemáticos sofisticados y profundicen su comprensión; por lo tanto, es muy importante volver a apreciar el poder del álgebra sobre otros métodos.

Una implicación de este hallazgo puede ser la necesidad de conciliar los efectos positivos y adversos de la postura 'evaluativa'. ¿Cómo podríamos lograrlo? Proponemos considerar tiempos apropiados. Educar hacia la escucha atenta no implica necesariamente descartar completamente la evaluación y el juicio de valor. En cambio, debería apuntarse a aplazarlos para etapas posteriores en las que tenemos una mayor comprensión de los alumnos (o los textos originales). En el taller, muchos participantes expresaron sorpresa y una apreciación de la riqueza de las matemáticas que pueden ser hechas con 'significados restringidos' – la que es, en sí misma, una comprensión evaluativa positiva, que fue producida solo *después* de comprender completamente lo que leyeron y escucharon. Por tanto, el desafío consiste en establecer un delicado equilibrio entre descartar el juicio inmediato de las ideas de los alumnos (y tratar de entenderlas) y beneficiarnos con una evaluación posterior de ellas. Es necesaria más investigación para dilucidar si un taller de este tipo puede ayudar a poner en evidencia estos matices.

8.5 Interpretando textos – escuchando a los alumnos

Como resultado de la experiencia del taller, consideramos promisoria la vinculación entre la interpretación de textos y la interpretación de las producciones de los alumnos: los participantes practicaron la interpretación y comprensión de textos inicialmente crípticos y algunos aspectos de la experiencia parecieron transferirse a la comprensión de las producciones matemáticas de los alumnos. Uno de los desafíos es encontrar textos históricos apropiados a través de los cuales esa vinculación pueda fortalecerse. En esta experiencia, hemos utilizado una actividad tomada de una colección de trabajos basados en documentos originales de la historia de las ecuaciones lineales y cuadráticas (Arcavi, 1985). Se necesitarían más textos apropiados, que también incluyan fuentes que presentan dudas conceptuales, posibles contradicciones entre ideas, etc. (véase, por ejemplo, Arcavi y Bruckheimer, 2000).

Otro desafío sería encontrar una colección apropiada de soluciones de alumnos o producciones interesantes y originales de alumnos, pasibles de interpretación y discusión, como una continuación de la lectura de documentos históricos originales. Finalmente, otro desafío sería que aprender a escuchar atentamente se alcanza no sólo en el nivel intelectual in vitro, sino también adecuada y productivamente durante interacciones de clases in vivo. Practicar la escucha atenta durante una clase en paralelo a las múltiples tareas educacionales que los docentes deben atender puede ser un trabajo extremadamente demandante y que requiere ejercitación.

8.6 ¿Qué podemos decir de los docentes en servicio?

¿Las experiencias descritas arriba podrían beneficiar a los docentes experimentados? Con el fin de intentar una respuesta a esta pregunta, condujimos otro taller para docentes en servicio en la Universidad de Educación Joetsu, Japón, con el mismo plan y el mismo líder. Por restricciones de tiempo sólo pudieron hacerse períodos más breves tanto para trabajo individual como para las discusiones grupales. Sin embargo, los participantes parecieron trabajar a un ritmo más rápido. Este segundo taller, seguido por una presentación a cargo del conductor, totalizó cinco horas.
La atmósfera de compromiso durante la componente histórica fue muy similar a la del primer taller. Sin embargo, hubo diferencias en la componente pedagógica: los análisis y discusiones fueron más dinámicos y eficientes. Las experiencias previas de los participantes (en sus prácticas del estudio de clases) discutiendo las perspectivas de los alumnos hicieron que esta parte fuera para ellos un simple ejercicio. Por su propia cuenta, estos docentes en servicio encontraron la parte histórica mucho más significativa e instructiva, y espontáneamente pudieron tender puentes entre las componentes histórica y pedagógica.

Parecería que trabajar sobre materiales históricos cuidadosamente seleccionados sigue haciendo de este taller una experiencia productiva y sostenedora aún para docentes habituados a la práctica de escucha atenta.

8.7 Herramientas para escuchar

Los futuros docentes y los docentes en servicio usaron modelos gráficos similares para buscar sentido a la solución de Ron: los docentes en servicio usaron bloques (ver Figura 5) y los futuros docentes utilizaron la recta numérica.

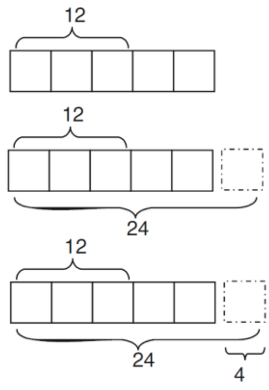


Fig. 5 Bloques usados por los docentes en servicio

Los participantes se abocaron a comprender el razonamiento de Ron más que a evaluarlo y contrastarlo con la solución 'clásica' esperada. Sin embargo, en el proceso pusieron en práctica sus propias herramientas (diagramas) no presentes explícitamente en la solución registrada de Ron. Esto implica que el proceso de descentrarse hacia la escucha atenta con el fin de comprender las soluciones de otros puede estar mediado por nuestro propio repertorio de herramientas ad hoc. Aunque el 'espíritu' detrás de los diagramas podría reflejar fielmente el razonamiento de Ron, los participantes no podían saber (a partir de los datos) si él había pensado de este modo o no. No obstante, usaron la representación para comprender la solución de Ron.

Se puede discutir acerca de la relevancia de saber si éste fue en realidad el modelo de Ron. En cualquier caso, hay lugar para una llamada de advertencia. Un matemático, que presenció el segundo taller, comentó que una forma de encontrar sentido al método egipcio es pensar en funciones lineales de la forma $y = ax$. Las funciones lineales lo ayudaron a entender el método egipcio; sin embargo, esta es una clara imposición de una visión moderna dentro de una fuente primaria, más que abocarse a la escucha atenta de lo que la fuente está diciendo.

Los modelos gráficos que usaron los docentes para entender la solución de Ron y las funciones lineales traídas por el matemático para comprender el método egipcio son herramientas muy distintas. Éstas difieren no solamente porque la primera es una ilustración gráfica y la segunda una formalización conceptualmente sofisticada. El modelo gráfico, como una ilustración para representar el proceso de pensamiento, pudo haber sido parte del repertorio de Ron, mientras que las funciones lineales, tales como las concebimos hoy, estaban ciertamente ausentes en las matemáticas egipcias.

Estos hallazgos muestran que:

a) La descentración cuyo objetivo es dar sentido a la perspectiva del otro puede apoyarse en herramientas que nosotros, como intérpretes, traemos a la situación, con el fin de mediar la construcción de nuestras comprensiones; y
b) Las herramientas que traemos pueden ser de distintos tipos, yendo desde aquellas que pueden ser atribuibles a los alumnos a aquellas que están claramente más allá de su alcance – en ambos casos, las herramientas pueden ser útiles para el intérprete. Sin embargo, es necesaria la precaución cuando se trata de atribuir esas herramientas al pensamiento de los alumnos.

8.8 En síntesis

Los materiales de la historia de las matemáticas diseñados con el propósito de aprender a entender la perspectiva del otro pueden ser motivadores y significativos. Los futuros docentes y los docentes en servicio pueden aprender que la práctica de aula incluye la comprensión de formas idiosincrásicas de aprehender y hacer matemáticas, y que tal comprensión puede ser lograda por medio de modos ad hoc de preguntar – diferentes de las preguntas tradicionales que la mayoría de los docentes estamos tan acostumbrados a formular. Además, los desafíos de escuchar pueden ser mucho más sutiles de lo esperado – por ejemplo, la postura evaluativa puede jugar roles complejos en el desarrollo de una escucha atenta. Finalmente, la realización de una escucha atenta puede estar mediada por herramientas ad hoc traídas por quien escucha, y estas herramientas pueden ser de diferentes tipos – algunas de las cuales, incluso siendo útiles, pueden conducir a sobre-interpretación. Los resultados sugieren que la creación de tales escenarios para aprender a escuchar es una dirección promisoria y fascinante para investigar y desarrollar y debería ser más explorada en toda su complejidad.

Entendemos que hemos respondido nuestras preguntas (de la Sección 3 arriba): Hemos descrito un ejemplo de una actividad diseñada para promover la escucha atenta, su fundamento, su implementación y algunos de sus resultados. Sin embargo, enfatizamos que con el fin de aprender a escuchar se necesita mucho más que el buen uso de materiales curriculares apropiados (solo ejemplificados aquí – se necesita más trabajo hacia todo el currículo de formación docente). Incluso cuando la implementación de estos materiales es fiel a sus fundamentos, éstos pueden no ser suficientes. El complejo proceso de escuchar está vinculado profundamente con una colección intrincada de creencias fuertemente arraigadas sobre el conocimiento matemático, sobre los alumnos, sobre el aprendizaje y sobre el rol docente. Uno no puede convertirse en un buen escucha a menos que esté genuinamente convencido (mucho más profundamente que al nivel meramente declarativo) de que:

— los alumnos son creadores de sentidos en formas idiosincrásicamente sofisticadas,
— aprender es un proceso largo y diverso en el que las interacciones sociales (especialmente aquellas entre el docente y los alumnos) deberían respetar las ideas e incorporarlas al proceso, y que
— el rol de la enseñanza se basa en gran medida en crear y fomentar los diálogos que son fundamentales para la continua reorganización del conocimiento.

Por tanto, sugerimos que un currículo para la formación docente del tipo propuesto debería estar inmerso en un conglomerado de actividades, discusiones y reflexiones de desarrollo docente, orientadas coherentemente hacia el desarrollo de una red de creencias interconectadas capaz de sustentar la escucha atenta. El trabajo descrito en este artículo puede ser una pequeña contribución a tal esfuerzo global.

Agradecimientos. Agradecemos a los participantes del taller por su compromiso entusiasta y por su apertura a compartir con nosotros sus visiones y críticas. Agradecemos a los Profesores Hiroshi Iwasaki y Hitoshi Takahashi, de la Universidad de Educación Joetsu, por invitarnos a conducir el segundo taller y por sus profundos comentarios sobre este trabajo.

Referencias

Aharoni, R. (2003). What I learnt in primary school. In *Invited talk at the 55th British Mathematics Colloquium (BCM)*. University of Birmingham, Great Britain, available at http://www.math.technion.ac.il/~ra/education.html

Arcavi, A. (1985). *History of Mathematics as a Componenet of Mathematics Teachers Background*. Unpublished Doctoral dissertation, available from the author.

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher, 35*(4), 13–16.

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education, 1*(1), 44–64.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40–48.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 93*(4), 373–397.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners – Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession. Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Confrey, J. (1991). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 111–138). Dordrecht: Kluwer.

Cooney, T., & Krainer, K. (1996). Inservice mathematics teacher education: The importance of listening. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1155–1185). Dordrecht: Kluwer.

Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 155–181.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 355–376.

Even, R., & Wallach, T. (2004). Between student observation and student assessment: A critical reflection. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 4*(4), 483–495.

Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Ginsburg, H., & Opper, S. (1979). *Piaget's theory of intellectual development* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

Henderson, D. W. (1996). I learn mathematics from my students – Multiculturalism in action. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 46–52.

Isoda, M. (2002). Hermeneutics for humanizing mathematics education (in Japanese). *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics, 21*, 1–10.

Isoda, M., & Kishimoto, T. (2005). *A problem solving lesson approach for understanding mathematics in elementary school* (in Japanese). Tokyo: Meijitosyo.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics.* Singapore: World Scientific.

Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding – Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (pp. 139–156). Lisbon, Portugal.

Jahnke, H. N. (1996). Set and measure as an example of complementarity. In H. N. Jahnke, N. Knoche & M. Otte (Eds.), *History of mathematics and education: Ideas and experiences* (pp. 173–193). Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools: Philadelphia.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1–3), 49–80.

Nathan, M. J., & Petrosino, A. (2003). Expert blind spot among preservice teachers. *American Educational Research Journal, 40*(4), 905–928.

Peet, T. E. (1970). *The Rhind mathematical papyrus*. University of Liverpool Press.

Sfard, A. (1994). What history of mathematics has to offer to psychology of mathematical thinking. In J. P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (pp. 129–132). Lisbon, Portugal.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*, vol. II. New York: Dover.

Smith, T. J. (2003). Pedagogy as conversation: A metaphor for learning together. In *Invited keynote address. Mathematics Association of Victoria Annual Conference*, Monash University: Melbourne, available at http://www.mav.vic.edu.au/pd/confs/2003/papers/Smith_paper.pdf

Wallach, T., & Even, R. (2002). Teacher hearing students. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th international conference for the psychology of mathematics education*, vol. 4 (pp. 337–344). Norwich, England.