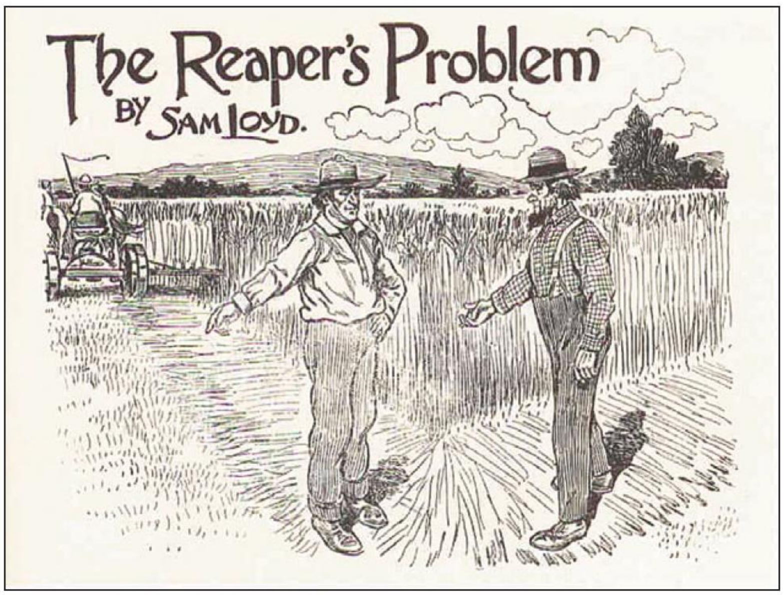
Generando problemas a partir de problemas y soluciones a partir de soluciones[1]

Abraham Arcavi y Zippora Resnick
Traducción: Abraham Arcavi

Muchos problemas matemáticos pueden ser resueltos completamente de manera analítica. En general, cuando llegamos a una solución, quedamos complacidos y consideramos que la tarea ha concluido. En este artículo, ilustramos la práctica de reexaminar el resultado de una solución analítica completa, lo cual nos lleva a buscar una solución geométrica alternativa que incrementará nuestra comprensión de ambas soluciones.

EL PROBLEMA DEL LABRADOR



El problema del labrador, creado por Sam Lloyd (Gardner, 1960), provee una buena plataforma para esta práctica:

> "*Un ranchero de Texas, que era dueño de más tierra que la que podía cultivar convenientemente, arrendó la mitad de uno de sus campos a un vecino. Este campo tenía 2,000 yardas de longitud por 1,000 yardas de ancho, pero debido a imperfecciones del terreno a lo largo del campo, se decidió que una división más justa se obtendría cortando una franja alrededor del campo…*
>
> *Supongo que aquellos con afinidad para resolver acertijos no encontrarán gran dificultad en determinar el largo y el ancho de la franja que contendrá la mitad de la cosecha."* (p. 63)

[1] Traducido del original: Arcavi, A. & Zippora Resnick (2008). Generating problems from problems and solutions from solutions. *Mathematics Teacher* 102(1), pp. 10-14.

SOLUCIÓN INICIAL

El problema del labrador puede visualizarse como lo ilustra la Figura 1.

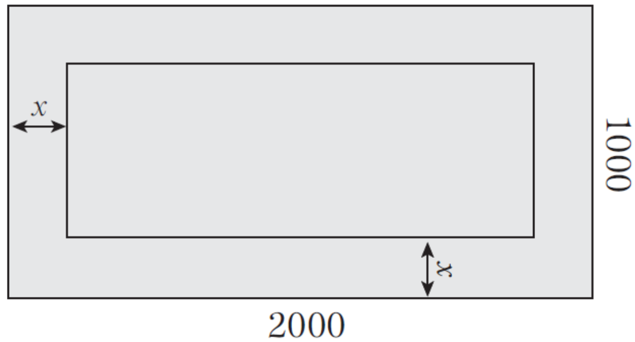


FIGURA 1: Una manera de dividir el campo en dos

Sabemos que la franja exterior y el rectángulo interior deben tener la misma superficie. El problema puede ser representado mediante una ecuación cuadrática simple:

$$(2000 - 2x)(1000 - 2x) = 1{,}000{,}000$$

en la cual $(2000 - 2x)$ representa la longitud del rectángulo interior y $(1000 - 2x)$ su ancho.

El problema también puede ser representado por la ecuación

$$2x(100 - 2x) + 2x \cdot 2000 = (2000 - 2x)(1000 - 2x)$$

en la cual el lado derecho representa el área del rectángulo interno y el lado izquierdo representa el área de la franja exterior del terreno. Y puede haber otras maneras de representar el problema.

En cualquier caso, la solución de estas ecuaciones da dos resultados para el ancho de la franja: 1309,016 y 190,983. Sólo la segunda solución satisface las condiciones del problema. De esta manera, el problema del labrador es más un ejercicio que un problema, pues sólo requiere la traducción de una situación a una ecuación, cuya resolución es sencilla.

UN PRIMER INTENTO DE GENERALIZACIÓN

El enunciado del problema del labrador concluye así (Gardner, 1960, p.63):

> *"Hay una regla simple que se puede aplicar a cualquier rectángulo"*

Esta frase invita a generalizar. Generalizar es lo que hacen frecuentemente los experimentados solucionadores de problemas frente a una solución numérica particular. En este caso, una generalización consistiría en resolver el problema para un rectángulo cualquiera de lados *a* y *b*. Por ejemplo, resolveríamos

$$(a - 2x)(b - 2x) = \tfrac{1}{2}ab \quad \text{para obtener} \quad x = \frac{a+b \pm\sqrt{a^2+b^2}}{4}$$

Consideraciones algebraicas o geométricas simples muestran que, de estas dos soluciones posibles, solo la de la raíz negativa es admisible. La otra versión del numerador produce un valor imposible para el ancho de la franja exterior, ya que resulta más larga que la suma de los dos lados del rectángulo original. Además, la diferencia es siempre positiva.

CUANDO LA SOLUCIÓN SE TORNA EL PROBLEMA

La solución del problema de Lloyd dice así:

> *"En el interesante problema de los labradores que recortan una franja alrededor de un campo rectangular hasta que se recoge la mitad de la cosecha, encontré que ellos tenían una regla muy simple. Ellos dijeron: "Un cuarto de la diferencia entre un atajo a través del lote y alrededor por el camino". Matemáticos lo entenderán mejor si dicen "de la suma de los dos lados réstese la diagonal del campo y divídase el resultado por cuatro. El campo tenía 2,000 yardas de largo y 1,000 de ancho. Usando un instrumento de medición, estos granjeros honestos hallaron que la diagonal de un rincón a su opuesto era un poco más que 2,236 yardas. Ir "alrededor por el camino", ciertamente, eran 3,000 yardas, y así la diferencia era un poco menos de 764 yardas. Un cuarto de esto es un poquito menos de 191 yardas (190.983), que es el ancho que debe tener la franja externa (Gardner, p. 49)*"

Nosotros no le atribuimos espontáneamente un significado geométrico a la solución general:

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

Sin embargo, esta expresión ciertamente puede 'hablarnos' en lenguaje geométrico: de la suma de los lados se resta la longitud de la diagonal y se divide el resultado por 4. Al interpretar la regla de Gardner a la luz de una solución analítica, sentimos que esta solución se torna en un problema en sí mismo. Una vez que el resultado se interpreta geométricamente, sentimos que además de imponer una interpretación geométrica a una solución analítica, necesitábamos que a su vez esa interpretación tenga sentido geométrico. En otras palabras, el nuevo problema se torna en lo siguiente: ¿podemos producir una *justificación* (no sólo una interpretación) visual o geométrica de la regla que establece que un cuarto de la diferencia entre la suma de los lados y la longitud de la diagonal es el ancho de la franja que divide al rectángulo por la mitad? En otras palabras ¿podemos encontrar la manera de usar diagramas, longitudes y áreas (en lugar de símbolos) para justificar la regla geométricamente? Si la encontramos, tal justificación geométrica agregaría poder explicativo a la impecable pero bastante opaca solución analítica. Invitamos al lector a hacer una pausa y pensar en una justificación geométrica de la regla.

UNA POSIBLE SOLUCIÓN AL NUEVO PROBLEMA

¿Cuál podría ser la inspiración para tal solución geométrica? Una estrategia obvia en este caso sería comenzar a pensar geométricamente. Por ejemplo, ¿cuáles son las maneras posibles de dividir un rectángulo en dos partes iguales, y cómo se compararían esas divisiones con la división que nos interesa? La más obvia es una línea que une los puntos medios del ancho o del largo (Figure 2).

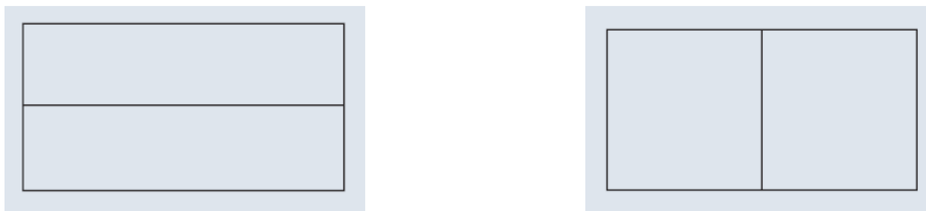


FIGURA 2: Dos maneras simples de dividir un rectángulo por la mitad

Sin embargo, no aprendemos demasiado al comparar esta manera de dividir el rectángulo con la manera sugerida por el problema. Dada la frase–"un cuarto de la diferencia entre la suma de los lados y la longitud de la diagonal"– quizá deberíamos buscar maneras de dividir el rectángulo que involucren a la diagonal (Figura 3).

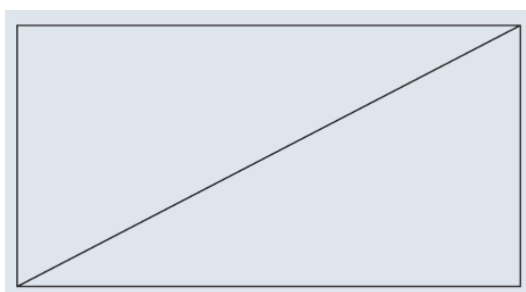


FIGURA 3: Usando la diagonal para dividir el rectángulo por la mitad

Pero, nuevamente, no progresamos. ¿Habría otras maneras de dividir el rectángulo en dos partes iguales que involucren a la diagonal y que fueran más sugerentes? Se nos ocurrió lo siguiente: el rombo inscripto tal que sus lados son la mitad de la longitud de la diagonal encierra la mitad del área del rectángulo (Figura 4).

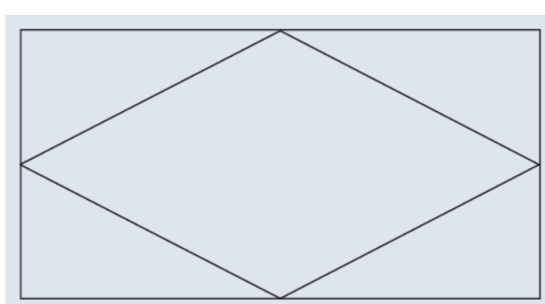


FIGURA 4: Otra manera posible de dividir el rectángulo por la mitad

De esta manera, si consideramos a los cuatro triángulos congruentes como una sola unidad, ciertamente hemos divido el rectángulo por la mitad. El numero de triángulos (4) puede estar relacionado de alguna manera con la división entre 4 que aparece en la fórmula de más arriba, así quizá esta aproximación es prometedora. Una exploración de la yuxtaposición de dos maneras de dividir el rectángulo nos ayudó a avanzar (Figura 5).

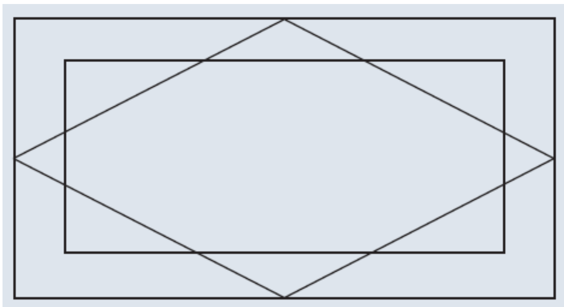


FIGURA 5: Yuxtaposición de dos maneras de dividir el rectángulo

Como las cuatro esquinas son congruentes, nos centramos por el momento en una de ellas. Si aspiramos a que la franja del borde tenga la mitad del área, la suma de las áreas de los triángulos 1 y 3 deberá ser igual al área del triángulo 2 (Figura 6).

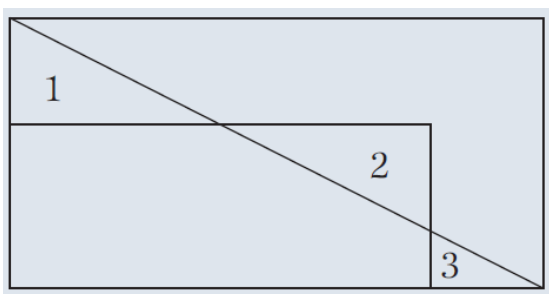


FIGURA 6: El rincón superior derecho de la Figura 5

En el triángulo 2, trazamos la altura OP (Figura 7).

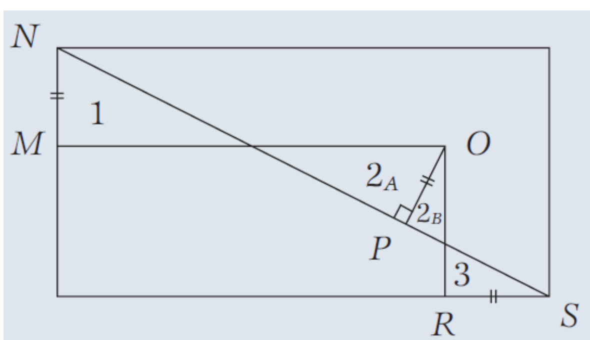


FIGURA 7: Comparación de las áreas de los tres triángulos pequeños

Se puede demostrar fácilmente que los triángulos 1 y 2_A y los triángulos 2_B y 3 serán congruentes si y sólo si $MN = OP = RS$. Ambos pares de triángulos son rectángulos y tiene ángulos opuestos por el vértice. Si se satisface la igualdad $MN = OP = RS$, cada par consiste en triángulos congruentes por el teorema de congruencia A-L-A ("Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado común adyacente a ellos también es igual"). En cuyo caso las áreas compensan y toda la franja es en realidad la mitad del área del rectángulo original. Si se satisface $MN = OP = RS$, entonces en la Figura 7 podemos remarcar todos los segmentos que son iguales (Figura 8).

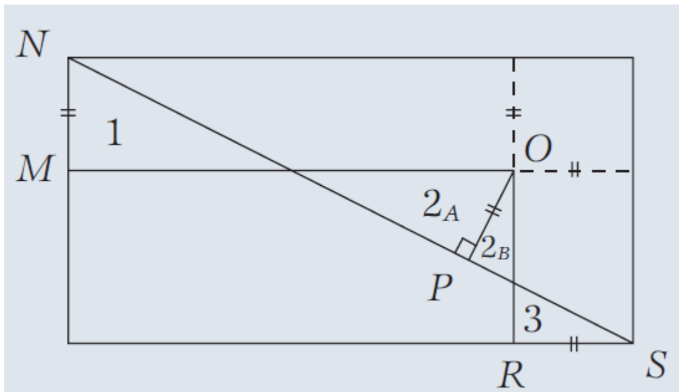


FIGURA 8: Todos los segmentos iguales

Invitamos nuevamente al lector a hacer una pausa y para pensar. ¿Qué podrían sugerir estos tres segmentos? O en otras palabras, que sugiere el hecho de que el punto O es equidistante de los lados del rectángulo? Los tres segmentos iguales desde O sugieren la posibilidad de inscribir un circulo en el triángulo grande tal como lo muestra la Figura 9.

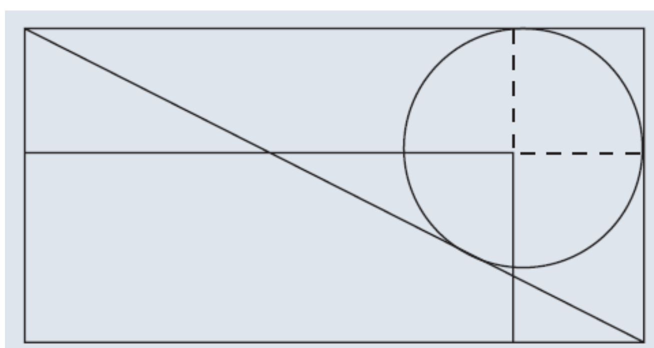


FIGURA 9: Inscribiendo un circulo dentro del triángulo de la esquina

Reposicionemos el triángulo por conveniencia visual (Figura 10).

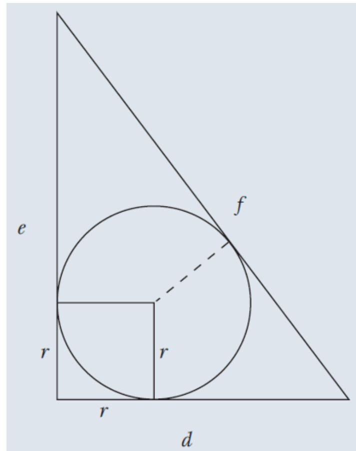


FIGURA 10: El triángulo con el circulo inscrito

Este diagrama a su vez sugiere que descompongamos el triángulo (Figura 11).

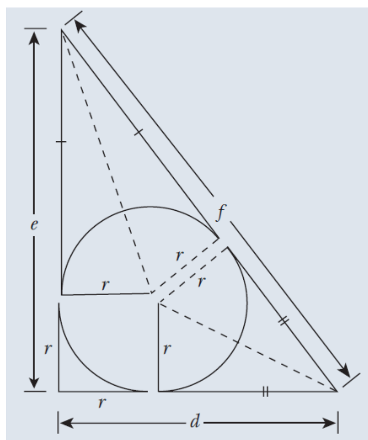


FIGURA 10: Descomposición del triángulo con el circulo inscrito

La figura destaca las relaciones entre las longitudes involucradas. Debido a la congruencia de los triángulos pequeños observamos que la suma de las longitudes $d-r$ y $e-r$ es igual a la longitud de f, es decir $d-r+e-r=f$, por lo tanto $r=(d+e-f)/2$. Pero d es la mitad de uno de los lados del rectángulo inicial (lado a), e es la mitad del otro (lado b), f es la mitad de la diagonal, es decir

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

y r es el ancho buscado. Por lo tanto, si sustituimos en $r=(d+e-f)/2$, obtendremos el ancho buscado:

$$x=\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}{2}$$

En otras palabras, el ancho de la franja del borde es un cuarto de la diferencia entre la suma de los lados y la longitud de la diagonal, que originalmente fue expresada así:

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

APOSTILLA

Si examinamos la solución analítica de un problema de manera significativa, podremos ir bastante más allá de la mera confirmación de que los procedimientos han sido correctos hacia el planteo un nuevo problema. En este caso, el nuevo problema no es un problema afín, sino la situación del problema es exactamente la misma. Sin embargo, el objetivo de plantear el problema nuevo fue buscar, primero una interpretación geométrica y, luego, una justificación geométrica. Educadores en matemática sostienen que "plantear problemas puede ayudar a profundizar nuestra comprensión de un tema estándar y puede permitir verlo bajo una nueva luz" (Brown and Walter 1983, p.1, traducción nuestra).

En ciertos problemas, las soluciones analíticas son largas y tediosas. Esos problemas ciertamente invitan soluciones alternativas (posiblemente visuales). Considérese, por ejemplo, el siguiente problema:

> "*¿Para qué valores de a el siguiente par de ecuaciones*
>
> $$x^2 - y^2 = 0$$
> $$(x - a)^2 + y^2 = 1$$
>
> *tienen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8 soluciones?*" (Arcavi, 1994, p. 26)

Problemas como éste, formulados en términos algebraicos, invitan a producir una solución algebraica. Por lo tanto, no sorprende que los alumnos abordan el problema de manera procedimental, sin darse cuenta (o quizá a pesar) de que la solución puede ser trabajosa y propensa a errores. El plano cartesiano y una interpretación geométrica sugiere otra mirada a este problema: buscamos el número de intersecciones entre las dos diagonales del plano cartesiano ($x^2 - y^2 = 0$ ó $y = \pm x$) y una familia de circunferencias de radio 1 cuyos centros están en el eje x. A partir de acá, la solución emerge bastante fácilmente.

Sostenemos que aun para aquellos problemas para los cuales su solución analítica es elegante y eficiente (como el problema del labrador), podemos abocarnos a la búsqueda de otros significados que agreguen sentido aun después de haber resuelto el problema. Proponemos que reexaminar una solución analítica impecable, en vez de transmitir un mensaje de desconfianza en los símbolos, añade nuevos estratos de significado.

Si bien las soluciones analíticas son eficaces y generales, pueden ser oscuras a los ojos de muchos alumnos (aun cuando ellos mismos no lo sientan así). Muchos alumnos son capaces de desempeñarse muy bien con los procedimientos, resolviendo un problema, y quedar satisfechos. Sin embargo, pueden no desarrollar hábitos de buscar significados y un “sentido de símbolo” (Arcavi, 1994). El sentido de símbolo y de lo que éstos representan puede cultivarse mediante la conexión de soluciones analíticas con soluciones alternativas. Estrategias visuales u otras para crear significado pueden involucrar la comprensión de los alumnos más allá del manejo simbólico.

Invitamos a los lectores–alumnos o profesores–a desarrollar el saludable hábito de buscar soluciones alternativas a las soluciones analíticas. Cada vez que completamos la resolución de un problema, nos plantearíamos la siguiente pregunta: ¿Qué significado verbal o geométrico puede tener esta solución?” y/o “¿Puedo usar otra representación para conectar los símbolos con el significado de lo que ellos representan?” Este proceso puede llevar tiempo, y quizá los alumnos no puedan desarrollar independientemente soluciones alternativas como la presentada en este artículo. Pero guiando a los alumnos a buscar esas soluciones alternativas y haciéndoles ver su valor es una componente importante para apoyarlos a que se conviertan en pensadores matemáticos.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal sense making in formal mathematics” *For the Learning of Mathematics* 14, pp. 24-35.

Brown, S. I. and Walters, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Gardner, M. (1960). More Mathematical Puzzles of Sam Lloyd. New York: Dover Publications.