El SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS:
CREACIÓN DE SENTIDO INFORMAL EN LA MATEMÁTICA FORMAL

Abraham Arcavi

Traducción del original "Symbol sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics"
For the Learning of Mathematics, 14(3), 1994, pp. 24-25.

PRÓLOGO

Ireneo Funes, el memorioso, fue un personaje creado por la fantástica paleta de Borges. Tenía una memoria retentiva extraordinaria, era capaz de recordarlo todo, ya sea las formas que tenían las nubes en la puesta del sol del 30 de abril de 1882, o todas las palabras del inglés, francés, portugués, latín. Cada una de sus experiencias estaba asegurada y completamente registrada en su memoria infinita. En cierta ocasión él pensó en reducir cada día pasado de su vida a 70,000 recuerdos a los que se referiría por números. Dos cosas lo disuadieron: la tarea era interminable y fútil. Hacia el final de la historia, la verdadera tragedia de Funes es revelada. En general él era incapaz de tener ideas platónicas generales. Por ejemplo, le costaba mucho entender que el nombre genérico de perro incluía a muchos individuos de diferentes formas y tamaños. Más aún, también lo perturbaba el hecho de que el perro que había visto y memorizado a las tres catorce de la tarde, desde un costado era el mismo perro que veía a las trece quince desde el frente. Precisamente porque Funes tenía esa memoria monumental es que era incapaz de pensar, porque, decía Borges: “Pensar es olvidar diferencias, es generalizar, es abstraer” (1989).

MOTIVACIÓN

Se acepta ampliamente que el correcto desempeño en las operaciones aritméticas no debería ser el único foco de la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética. Temas como el conocimiento de cuándo utilizar una operación y el “sentido de los números” están recibiendo mucha atención.

En términos generales, el “sentido de los números” (NCTM, 1989; Sowder & Shappelle, 1989; Sowder, 1992) se puede describir como la percepción no-algorítmica de los números, la comprensión profunda de su naturaleza y de la naturaleza de las operaciones, la necesidad de examinar la razonabilidad de los resultados, el sentido de los efectos relativos de operar con números, percatarse y establecer órdenes de magnitud, y ejercitar la libertad para reinventar maneras de operar con los números en forma diferente a la repetición mecánica de lo que fue enseñado y memorizado.

¿Existe una situación paralela con el álgebra? ¿La comunidad de educación matemática ya no considera las manipulaciones simbólicas como el tema central en la enseñanza del álgebra? Las respuestas parecen ser afirmativas si se tiene en cuenta el surgimiento de los manipuladores simbólicos digitales y, en parte, porque muchos alumnos de la secundaria le dan poco sentido a los símbolos literales, aun cuando hayan tenido años de estudio del álgebra.

Incluso aquellos alumnos que logran manejar con éxito las técnicas algebraicas, a menudo fracasan en ver al álgebra como una herramienta para entender, expresar y comunicar generalizaciones, para revelar y/o manifestar estructuras, y para establecer conexiones y formular argumentos matemáticos.

La enseñanza no siempre provee oportunidades no sólo de ir más allá de la memorización sino también de olvidarse de las reglas de cálculo simbólico y de ser capaces de ver a través de ellas a fin de pensar, abstraerse, generalizar y planificar estrategias para la solución de problemas. Por consiguiente, sería razonable intentar una descripción de la noción paralela a la de sentido de números en aritmética: la idea de sentido de los símbolos[1].

¿QUÉ ES EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS? UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

Si se compara con la atención que se le ha dado al sentido de los números, hay muy poca literatura acerca del sentido de los símbolos. Una notable excepción es Fey (1990). Si bien él no define el sentido de los símbolos directamente, Fey lista un grupo razonable de objetivos o metas para enseñarlo, incluyendo las siguientes competencias:

- sondear una expresión algebraica para estimar patrones que emergerían en representaciones numéricas y/o gráficas de esa expresión;

[1] A lo largo de este artículo, nos referimos a símbolos literales del álgebra de la escuela secundaria.

- hacer comparaciones fundamentadas de los órdenes de magnitud para las funciones de la forma n, n^2, n^3,..., n^k;
- explorar el gráfico o la tabla de valores de una función, interpretar verbalmente condiciones establecidas, e identificar la forma probable de una regla algebraica que exprese una relación dada;
- inspeccionar operaciones algebraicas y predecir la forma del resultado, o, de manera similar a la estimación en aritmética, inspeccionar un resultado y juzgar si se ha realizado correctamente;
- determinar cuál de las varias formas equivalentes de una expresión algebraica podría ser la más apropiada para responder a una pregunta específica.

En este trabajo, pretendemos expandir estas competencias tanto en número como en contenido y ejemplificarlas. Al igual que Fey, no intentaremos definir el sentido de los símbolos, la tarea es demasiado complicada. Creemos que se ha discutido ampliamente la noción del sentido de número (por ejemplo, en Sowder & Schappelle, 1989), y se ha visto que la definición es extremadamente elusiva. Por consiguiente, nos centraremos en describir y discutir conductas que vemos como ejemplos de sentido de los símbolos.

Una digresión metodológica: como no pretendemos describir una investigación sobre el conocimiento de alumnos y sus maneras de aprender, podemos permitirnos ser indulgentes con las interpretaciones de los datos anecdóticos que proveemos. Por lo tanto, proponemos desestimar los riesgos de malinterpretar los comentarios de alumnos (ya sea sobre- o sub-evaluándolos). Traemos los ejemplos como meras ilustraciones de, lo que a nuestro parecer, sería el sentido de los símbolos.

CONDUCTA NÚMERO 1: AMIGARSE CON LOS SÍMBOLOS

Sostenemos que tener sentido de los símbolos debería incluir la sensación intuitiva de cuándo convocar a los símbolos en el proceso de resolver un problema, y a la inversa, cuándo abandonar un tratamiento simbólico cambiándolo o sustituyéndolo por herramientas mejores.

¿Para qué sirven los buenos amigos?

El siguiente es el desarrollo de una lección que repetimos varias veces. Comenzamos presentando cuadrados mágicos de tres por tres (en el cual la suma de los tres casilleros de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma), y luego presentamos el primer ejercicio

> *“Completa los casilleros vacíos a fin de obtener un cuadrado mágico con la suma de 9”*

	3	
2		1

Y continuamos con este

	2	
1		5

en el cual la suma debe ser 6. En este caso se permite el uso de números negativos. Luego, dependiendo de la clase, damos uno o dos cuadrados más antes de proponer el siguiente para el cual la suma requerida es 8.

	4	
2		2

Como todos los ejemplos previos funcionaron fácilmente, éste sorprende. Luego de revisar los cálculos una y otra vez, o comenzar a partir de un casillero distinto, algunos alumnos comienzan a sugerir que ésta es una “misión imposible”; otros continúan calculando guiados por una certeza implícita de que debían haber cometido algún error.

Una vez que todos los alumnos se convencen de que no hay una solución posible, la pregunta que surge naturalmente es ¿cómo puede ser que con los otros cuadrados la consigna funcionó y con éste no?

Ciertamente parece depender de los datos, y los estudiantes sugieren conjeturas. Por ejemplo, el último cuadrado mágico no funciona porque la suma requerida es exactamente la suma de los tres números dados.

En general se generan discusiones, se proponen muchas conjeturas, ejemplos y contraejemplos que no dejan apático a nadie[2]. En la mayoría de los casos pasa bastante tiempo antes de que algún alumno tímidamente sugiera usar álgebra, o si no directamente somos nosotros los que debemos promover su uso (por ejemplo, preguntando ¿qué herramientas tenemos a nuestra disposición en esta situación para verificar o refutar las conjeturas?). En una oportunidad después de que se mencionara el álgebra, un alumno escéptico preguntó ¿cómo es que las letras pueden ayudarnos acá?

Diríamos que los individuos que saben cómo realizar manipulaciones algebraicas, pero no consideran la posible relevancia de los símbolos para revelar la estructura de un problema que les ha causado curiosidad, no han desarrollado completamente su sentido de los símbolos. Tener sentido de los símbolos incluye la invocación del álgebra cuando ello es relevante; o en otras palabras, tener a los símbolos a mano, fácilmente disponibles, como posibles herramientas para la creación de sentido.

Una indicación adicional de la ausencia de sentido de los símbolos se evidenció cuando, en el proceso de resolver el problema algebraicamente, algunos alumnos fueron incapaces de reconocer la solución cuando la tuvieron delante de ellos. Por ejemplo, en una ocasión, en el proceso de completar el cuadrado mágico llegamos al siguiente estadio, donde a, b y c son los números dados, y S la suma dada:

2 S-b-c		1 S-a-b
3 b+c-a	b	4
a		c

[2] La dinámica de estas discusiones que no detallaremos acá es, por lo general, interesante y muy rica.

Completar el primer casillero (1) implica darse cuenta de que su contenido se debería expresar en términos de S, a y b. Algunos alumnos recién iniciados en el álgebra suelen introducir una nueva variable, ya sea porque no saben qué es exactamente lo que están buscando o porque no tienen suficiente experiencia cómo los símbolos pueden expresar relaciones entre números.

En este caso, las celdas indicadas como 1, 2 y 3, se completaron sin dificultad, y la celda 4 se completó mediante la suma de columna obteniendo $a+b-c$. A esta altura, alguien se dio cuenta de que la expresión para la suma de la fila del medio $(b+c-a)$ + b + $(a+b-c)$ era $3b$ y esa expresión no contenía el término S. Les llevó un rato a los alumnos de ese curso darse cuenta de que si ellos querían que la suma fuera S, entonces $S=3b$ expresa precisamente la condición buscada.

Por lo tanto, incluiríamos en el sentido de los símbolos la convocación de los símbolos cuándo y dónde esto fuera adecuado, y el reconocimiento e interpretación del significado de la solución simbólica. Tal vez quisiéramos incluir un poco más. Aún si se usan los símbolos, y se reconoce la solución que ellos proveen, sería deseable que los estudiantes aprecien el poder de los símbolos: sólo usándolos se puede rechazar o aceptar de manera concluyente una conjetura o un argumento general. Otro ejemplo simple y claro es el siguiente:

> *"¿Qué le sucedería al área de un rectángulo si una de sus dimensiones se aumenta un 10% y la otra se reduce un 10%?"*

La reacción inicial de los alumnos es que "no se produce cambio alguno", probablemente debido a una compensación." O, "el cambio que se produce depende de cuál dimensión se aumenta y de cuál se disminuye." Cálculos numéricos simples muestran que aparentemente en todos los casos hay una disminución, pero solamente cuando convocamos a los símbolos es que el resultado se torna obvio y contundente. Si a ó b son las dimensiones originales, el área del nuevo rectángulo va a ser $1.1a \times 0.9b$ ó $0.9a \times 1.1b$, es decir $0.99ab$, en ambos casos. De una manera muy hermosamente concisa, los símbolos expresan la situación expuesta en el problema: primeramente, el área siempre disminuye, luego, siempre lo hace en un 1%, y por último, el resultado no depende de la dimensión que es incrementada o disminuida.

Sería deseable que nuestros alumnos “vieran” (y ¡apreciaran!) la solución simbólica y que les resulte convincente incluso cuando ésta contradiga las intuiciones iniciales que tuvieron sobre este problema. Personas competentes en el uso del álgebra consideran $0.99ab$ no sólo como la solución sino también como un portador de su explicación. Por lo tanto, sostenemos que el sentido de los símbolos debería incluir, más allá de su invocación relevante y de su uso correcto, la apreciación de la elegancia, la brevedad, la comunicabilidad y el poder de los símbolos para desplegar y justificar relaciones numéricas generales de una manera que la aritmética sola no provee.

Cuando los amigos son menos amistosos

Si el sentido de los símbolos nos requiere que los invoquemos cuando su uso es apropiado o indispensable, de la misma manera el sentido de los símbolos nos requiere que los abandonemos cuando estamos por “ahogarnos” en manipulaciones técnicas. Consideremos dos ejemplos:

“¿Para qué valores de a el par de ecuaciones

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

tiene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u 8 soluciones?” [3]

Como ya mencionáramos, problemas propuestos en términos algebraicos, nos inducen, bastante fuertemente, a proceder mediante una solución algebraica. Por consiguiente, no sorprende que al resolverlos muchos alumnos se lancen a lidiar con los símbolos sin darse cuenta (o aun percatándose) de que las manipulaciones algebraicas pueden ser trabajosas y propensas a error.

La decisión de descartar esa tentación inicial casi inevitable de proceder simbólicamente, requiere una combinación saludable de “autocontrol” y sentido de los símbolos. En breve, autocontrol consiste en:

[3] Este problema ha sido tomado de la clase de resolución de problemas de Alan Schoenfeld.

"una categoría de conducta que trata de las maneras en que los individuos usan la información que está potencialmente a su disposición. Se enfoca sobre decisiones importantes acerca de qué hacer en un problema, decisiones que en sí mismas pueden redundar en el fracaso o el éxito del intento de resolver un problema. Las conductas de interés incluyen elaboración de planes, elección de los metas globales o locales, monitoreo y evaluación de las soluciones a medida de que estas evolucionan, y revisión o abandono de los planes cuando las evaluaciones indican que tal medida debe ser tomada¨ (Traducción libre de Schoenfeld, 1985, p. 27).

En nuestro ejemplo, la toma de decisión de cambiar el curso de una acción involucra más que autocontrol, también está motivada por un sentido de la estética, de la elegancia, de la eficiencia y de la apreciación (o aun la creencia) de que el trabajo matemático incluye mucho más que el estoicismo de embarcarse en arduas manipulaciones simbólicas. La idea es que los alumnos desarrollen reacciones del tipo: "esto es un trabajo demasiado difícil, técnico y poco interesante, *tiene que haber* otra manera de abordar este problema."

Esa otra manera podría surgir al enfocar el problema de una manera diferente, o cambiando su representación. En este caso, un gráfico cartesiano y las consiguientes consideraciones geométricas proveen una visualización de este problema: el número de intersecciones entre las dos diagonales del plano cartesiano ($x^2 - y^2 = 0$, es decir $y = \pm x$) y una familia de círculos de radio 1 cuyos centros yacen en el eje x. De ahí en más la solución es bastante fácil.

Se pueden hacer consideraciones similares para abandonar las manipulaciones algebraicas a favor de otras representaciones cuando se resuelve, por ejemplo, $|x - 2| > |x - 6|$. El tratamiento algebraico de esta inecuación involucra inevitablemente el pesado uso de conectivos lógicos, mucho trabajo técnico y una alta probabilidad de cometer errores. En lugar de manipulaciones, actuar con sentido de los símbolos implicaría recobrar significados: $|x - 2|$ puede "leerse" como la distancia en el eje numérico de cualquier número a 2, visto así lo que el problema requiere es encontrar los números cuyas distancias a 2 sean mayor que sus distancias a 6. Un simple diagrama del eje numérico o una mera consideración verbal puede solucionar este problema. Otro enfoque posible es considerar $|x - 2| > |x - 6|$ como la comparación de los valores de dos funciones de x, y en tal caso la solución de este problema es también inmediata usando los correspondientes gráficos cartesianos (Friedlander y Hadas, 1988).

En los dos ejemplos anteriores el sentido de los símbolos implicaría una premonición de que insistir con una solución simbólica nos causaría muchísimo trabajo. Más aún, el sentido de los símbolos incluiría la tendencia a intentar otras maneras de representar el problema, bajo la creencia o convicción de que pueden existir enfoques más directos y más elegantes que deberíamos considerar. En otras palabras, el sentido de los símbolos incluye la perspicacia que nos permitiría decidir cuándo conviene invocar a los símbolos y cuándo abandonarlos.

CONDUCTA NÚMERO 2: MÁS ALLÁ DE LAS MANIPULACIONES - LECTURA A TRAVÉS DE LOS SÍMBOLOS

La resolución de ecuaciones algebraicas simples no requiere más que manipulaciones comunes a fin de lograr el resultado deseado, y la única "lectura" significativa requerida es interpretar la respuesta en la forma de $x =$ _ . En realidad, desde cierto punto de vista, el poder de los símbolos reside en que ellos nos permiten separarnos, e inclusive olvidarnos, de sus referentes a fin de producir resultados de manera eficiente. Alfred Whitehead (1911) destacó la naturaleza de los símbolos en matemáticas y "la enorme importancia de una buena notación":

> *"… con la ayuda de los símbolos, podemos hacer transiciones en el razonamiento en forma casi mecánica a través de los ojos, lo que de otra manera requeriría recurrir a facultades superiores del cerebro. Es una verdad profundamente errónea, que se repite en todos los libros y es reiterada por gente eminente en sus conferencias, de que nosotros deberíamos cultivar el arte de pensar acerca de lo que estamos haciendo. Todo lo contrario. La civilización avanza extendiendo la cantidad de operaciones*

importantes que podemos realizar sin pensar en ellas. Las operaciones del pensamiento son como cargas de caballería en una batalla: estrictamente limitadas en cantidad, requieren caballos lozanos, que se deberían reservar sólo para momentos decisivos." (Traducción libre, p. 59)

Sin embargo, pensamos que es posible que Whitehead estuviera de acuerdo con Freudenthal (1983, p. 469, traducción libre)

"He observado, no sólo en otras personas sino también conmigo mismo....que las fuentes del discernimiento y del conocimiento profundo pueden estar atascadas por automatismos. Uno finalmente domina una actividad tan perfectamente que la preguntas de cómo y por qué ya no se formulan, no pueden ser formuladas, y ni siquiera son consideradas como preguntas relevantes y significativas."

Interrumpir un procedimiento simbólico mecánico a fin de inspeccionar y re-conectarnos con los significados subyacentes podría ser, usando los términos de Freudenthal, un buen ejercicio "desatascador".

Leer en lugar de manipular

Mientras una alumna simplificaba una ecuación lineal para resolverla, la ella llegó a lo siguiente $3x + 5 = 4x$. En lugar de proceder en forma mecánica, es decir "sustraer $3x$ a ambos lados de la igualdad", se detuvo y cambió a un modo diferente: la lectura de los símbolos. Se percató de que para obtener $4x$ a la derecha del signo igual a partir de $3x$ a su izquierda, uno tendría que sumar x, por consiguiente el valor del sumando *5* debería ser el valor de $\boldsymbol{x}$. A pesar de que matemáticamente no se pueda distinguir entre el método estándar y el método de esta estudiante, psicológicamente hay una diferencia importante. Sostenemos que interrumpir una rutina casi automática a fin de leer y reparar en una relación simbólica, como en este caso, es una pequeña pero saludable instancia del sentido de los símbolos.

Leer y manipular

La solución de ecuaciones algebraicas simples, como las que generalmente se encuentran en los libros de texto estándares y como las que se enseñan normalmente en clase, automáticamente despiertan un instinto para la manipulación técnica. Tanto es así que se requiere cierta madurez para rechazar la invitación de comenzar a resolver un ejercicio, por ejemplo $(2x+3)/(4x+6)=2$, y en cambio, intentar "leer" significados a través de los símbolos. En este caso, uno podría darse cuenta de que cualquiera sea x, como el numerador es la mitad del denominador, esta ecuación no puede tener una solución. Sostenemos que esta inspección a-priori de los símbolos que se realiza con la expectativa de poder captar significados es otro ejemplo del sentido de los símbolos.

Uno de nuestros alumnos fue aún más allá. Luego de percatarse de que no había solución, dijo: "… entonces este problema no tiene solución, pero ¿qué pasaría si de todas maneras yo lo 'resuelvo'?" Probablemente para este alumno 'resolver' significaba aplicar los procedimientos mecánicos que conducen a hallar $x=$ __, y por lo tanto estaba expresando su propia necesidad de 'sentir' la manera en que el álgebra expresa la ausencia de solución. Desafortunadamente, en estos casos, el álgebra no es muy comunicativa: sin advertencia previa, las manipulaciones técnicas nos llevarán a obtener $x=-1.5$. Nuestro alumno se desconcertó con esta contradicción, y le llevó cierto tiempo resolverla. Recién al sustituir $x=-1.5$ se dio cuenta de que ese es precisamente el valor que a uno no se le permite sustituir pues se anula el denominador. De esta manera el alumno confirmó que su lectura original era correcta. Él no dijo mucho, sin embargo, sugerimos de que él estaba aprendiendo algo acerca "del lenguaje de los símbolos" y de cuán engañosos pueden resultar si uno trata de manipularlos sin un criterio sensato para la razonabilidad de los resultados.

La lectura como meta para las manipulaciones

Existen ciertas situaciones en las cuales la lectura a través de los símbolos es esencial. Por ejemplo:

> *"¿Qué se puede decir de los números que resultan de las diferencias entre la tercer potencia de un número entero y el número mismo (n^3-n)?"* (Fischbein & Kedem, 1982).

Si utilizamos la heurística de Polya de considerar casos especiales, podremos percatarnos que los números obtenidos son múltiplos de 6. Los símbolos son necesarios para demostrar que esto es siempre verdadero. Sin embargo, una mera manipulación algebraica como, por ejemplo, la factorización $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$, por sí sola no nos ayuda mucho. Solamente por medio de una lectura de los significados de los símbolos, nos daremos cuenta de que el miembro a la derecha del signo igual representa el producto de tres enteros consecutivos, y por lo tanto por lo menos uno de ellos debe ser par y uno de ellos debe ser múltiplo de 3, y así se podrá completar nuestro argumento.

Los ejemplos anteriores ilustran la búsqueda del significado en los símbolos, ya sea porque es esencial para la solución del problema o porque agrega comprensión.

Lectura hacia la razonabilidad

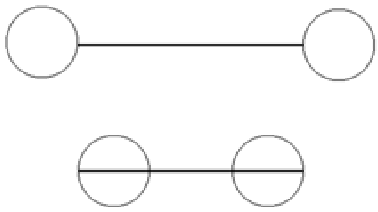
Tomamos como ejemplo de este aspecto uno de los clásicos de la literatura de educación matemática: el problema de los estudiantes y los profesores.

> "*Escribir una ecuación usando las variables A y P para representar la siguiente afirmación: hay 6 veces más alumnos que profesores en esta universidad*" (Clement, 1982, traducción libre[4])

Los resultados reportados por Clement (1982) muestran que más del 30% de 150 estudiantes de primer año de ingeniería que respondieron a esta pregunta fallaron en resolverla correctamente. La típica respuesta incorrecta fue $6A = P$. Estos hallazgos se condicen con otros obtenidos al estudiar de qué manera los alumnos resuelven este problema.

Proponemos, que al menos para algunos de los alumnos, este error no es una manifestación de una concepción errónea profunda acerca de la noción de variable, como no lo es la percepción de que los dos segmentos paralelos de la figura siguiente tienen longitudes diferentes.

[4] En el original se usan las variables S y P. Usamos *A* y *P* para ser fiel a la intención del problema original de usar la primera letra de las palabras Alumnos y Profesores .



En esta figura, los círculos actúan como un marco que distrae nuestra visión y sesga nuestra percepción de la longitud de los dos segmentos, que aunque es la misma no lo aparenta. Similarmente, y tal como el mismo Clement lo señala, en el problema de los alumnoss y los profesores, existe un distractor verbal, es decir el orden de las palabras claves ("seis veces más alumnos que profesores") lo cual nos predispone hacia la traducción literal, palabra por palabra como $6A = P$.

En este caso no proponemos que tener sentido de los símbolos implique necesariamente evitar el error. Muchos alumnos y aun sus profesores pueden trastabillar por estos distractores lingüísticos y cometer el error descripto al construir el modelo simbólico de este tipo de problemas. Lo que sí proponemos es, que en este caso, el sentido de los símbolos consistiría en desarrollar el hábito saludable de releer y controlar (mediante simple sustitución, por ejemplo) si la expresión simbólica que uno ha construido es razonable. Estar alerta y reconocer que uno es pasible de ser víctima de "ilusiones simbólicas" puede que no impida que caigamos en ellas, pero sí puede reforzar la necesidad de controlarnos y así poder superar concepciones erróneas si estas ocurren.

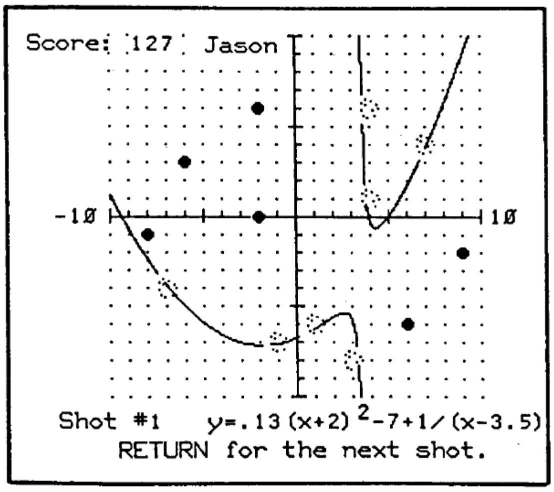
CONDUCTA NÚMERO 3: DISEÑAR EXPRESIONES SIMBÓLICAS

El juego digital "Globos Verdes" (Green Globs, véase Dugdale & Kibbey, 1986) consiste en una pantalla que muestra una cartilla cartesiana con globos ubicados aleatoriamente. El objeto del juego es ingresar la expresión algebraica de una función de manera que su gráfico (al ser trazado automáticamente por la computadora) destruya al tocarlos la mayor cantidad posible de globos. A tal efecto, el jugador debe imaginar un gráfico deseado, cuya fórmula algebraica correspondiente debe construirse e ingresarse, ya que esa es la única manera en que la computadora trace ese gráfico.

Dugdale (1993) describe un ejemplo sobre la interesante conducta de un alumno durante este juego. Con el propósito de aumentar la cantidad de globos alcanzados, el estudiante modificó una simple función cuadrática de la siguiente manera

$$y = 0.13(x+2)^2 - 7 + \frac{1}{x-3.5}$$

El siguiente es el gráfico obtenido en la pantalla (Dugdale, 1993)



Agregando el término racional $\frac{1}{x-3.5}$ a la función $y = 0.13(x+2)^2 - 7$ cuyo gráfico fue visualizado como el de una parábola, el alumno desplegó un considerable sentido de los símbolos. Él fue capaz de crear una expresión algebraica para el gráfico que él quería que fuera una parábola en casi todos sus puntos, pero que se comportara casi como una línea vertical en una vecindad deseada. Por lo tanto, él agregó un término racional que no afecta en forma significativa el gráfico de la parábola en casi todos sus puntos excepto cuando x se acerca a 3.5, y en la proximidad de esa discontinuidad el gráfico "se quiebra" y "salta" para alcanzar otros tres globos.

Consideramos que este razonamiento muestra un nivel cognitivo superior del sentido de los símbolos que el que ilustráramos en la conducta 2. En ese ejemplo, sugeríamos que el sentido de los símbolos incluiría "leer" significados a través de ellos. Ahora proponemos que el sentido de los símbolos también involucra: primero, una apreciación de que es posible crear una expresión simbólica ad hoc para satisfacer un propósito deseado, y que está a nuestro alcance elaborarla; segundo, y más específicamente, darse cuenta de que lo que se necesita es una expresión, con determinadas características (en este caso un término racional). Finalmente, el sentido de los símbolos incluiría la capacidad de elaborar exitosamente esa expresión.

CONDUCTA NÚMERO 4: EXPRESIONES EQUIVALENTES PARA SIGNIFICADOS 'NO-EQUIVALENTES'

Comenzamos esta sección con dos ejemplos. Cuando se trabaja con la fórmula para calcular la media aritmética de dos números, una alumna observó que una simple manipulación de símbolos transforma $(a+b)/2$ en $(a/2)+(b/2)$. Pero, ella no se detuvo ahí, sino que propuso una nueva conceptualización de la media de dos números: "es un número formado por la mitad de uno de los números y la mitad del otro." Esta re-conceptualización surgió de considerar expresiones simbólicas equivalentes no como meros resultados formales sino como posibles fuentes de nuevos significados.

El siguiente es otro ejemplo de una conducta similar.

> *"Tomen un número impar, elévenlo al cuadrado y luego réstenle 1.*
> *¿Qué podemos afirmar acerca del número resultante?"*

Este problema se puede representar de la siguiente manera $(2n-1)^2-1$. Podemos proceder para obtener la forma equivalente $4n^2-4n$ y llegar a una conclusión general. A primera vista, la conclusión es que el número resultante es múltiplo de 4, sin embargo, si re-acomodamos los símbolos, obtendremos es $4n^2-4n=4n(n-1)$, y si ahora "leemos" a través de los símbolos, podemos ver de que el resultado es siempre múltiplo de 8 (ya que n y $n-1$ son enteros consecutivos y por lo tanto uno de ellos tiene que ser par). Un nuevo reacomodamiento de los símbolos nos revela más aún. Si escribimos $4n(n-1)$ como $8{\times}n(n-1)/2$ no sólo es más evidente de que los números resultantes son múltiplos de 8, sino que esos múltiplos de 8 son muy especiales: aquellos en los que el otro factor $(n(n-1)/2)$ es un número triangular.

Estos dos ejemplos tienen algo en común. Ambos "ganaron" significados más ricos mediante expresiones equivalentes obtenidas manipulando símbolos.

Proponemos que “sentir” los símbolos y tener confianza en ellos nos guían en la búsqueda de nuevos aspectos de los significados originales, y por lo tanto constituyen otra faceta del sentido de los símbolos.

CONDUCTA NÚMERO 5: LA ELECCIÓN DE LOS SÍMBOLOS

Cuando representamos una situación mediante símbolos, uno de los primeros pasos consiste en elegir qué se va a representar y cómo. Esa elección, como veremos en los ejemplos siguientes, puede tener efectos cruciales sobre el proceso de solución y sus resultados.

Primero reconsideremos el último ejemplo de la sección anterior. Si al número impar dado lo representamos como n en lugar de $2n-1$, la expresión que obtenemos será n^2-1. Si bien la elección de la variable es totalmente legítima, es probable que las conclusiones resultantes sean menos informativas. Así, si factorizamos $n^2-1=(n-1)(n+1)$ podremos leer de esta expresión que el número resultante es siempre el producto de dos pares consecutivos, por lo tanto uno de esos números debe ser múltiplo de 4, de manera que podemos concluir en que el resultado es un múltiplo de 8. Sin embargo, no es claro cuáles son esos múltiplos de 8 obtenidos. La elección de $2n-1$ para representar el número impar, al contrario de n, nos indica los distintos tipos de información que se puede encapsular mediante distintas representaciones simbólicas, y consecuentemente la transparencia (u opacidad) de ciertos aspectos de la “estructura” de la situación.

Otros ejemplos simples de las elecciones alternativas de variables son:

- elegir representar la suma de dos negativos como $a+b$ o como $-a-b$ (dependiendo en si seleccionamos a y b para representar negativos o naturales respectivamente);
- elegir representar un número racional como a o como p/q (donde p y q son naturales).

El sentido de los símbolos nos ayudaría a realizar la elección más adecuada teniendo en cuenta el objetivo del problema.

La elección de los símbolos no sólo puede obscurecer aspectos de la situación, como en el primer ejemplo de más arriba, sino que también puede impedir resolverla. Consideremos el siguiente problema (SNARK, 1977, p.5):

> *"Juan fue al banco a cobrar un cheque por una suma menor de U$100. El cajero confundió los centavos con los dólares (es decir, si la suma del cheque era de U$19.45, el cajero le pagó a Juan U$45.19). Juan recogió el dinero y luego de haber gastado U$3.50, se percató de que tenía exactamente el doble de la cantidad escrita en el cheque. ¿Por qué cantidad se había librado el cheque?"*

Si uno elige x para representar el monto original del cheque, es altamente improbable progresar hacia una solución. Por otro lado, si representamos cada uno de los cuatro dígitos por una variable, las cosas se nos complicarían mucho en corto tiempo. La elección óptima parecería ser representar a los centavos con una variable y a los dólares con otra, es decir cada variable representaría un número de dos dígitos.

No queremos sugerir que una elección desafortunada de las variables al comienzo de un proceso de solución necesariamente indica la ausencia de sentido de los símbolos, pero sí aspiramos a que haya conciencia de por lo menos dos cuestiones:

- La libertad para representar el problema como uno lo desee: aun cuando los símbolos representen el mismo "tipo" de número, existen diferentes maneras de elegirlos. Por ejemplo, tres enteros consecutivos pueden representarse ya sea como n, $n+1$, $n+2$ o como $n-1$, n, $n+1$, o como $n-2$, $n-1$, n. La elección puede influir en la simplificación del cálculo, o en la información que proveerá la expresión del resultado final.
- El reconocimiento de que la elección inicial no es de manera alguna la única a seguir, y que si uno lo desea, el problema puede ser re-representado por propia decisión o porque la elección original parece ser improductiva.

Proponemos incluir en el sentido de los símbolos el sentido premonitorio o a posteriori acerca de la elección óptima para representar un problema simbólicamente (véase primer ejemplo de esta sección).

CONDUCTA NÚMERO 6:
DESTREZAS PARA MANIPULAR FLEXIBLEMENTE

Aun en aquellos contextos en los cuales coincidimos plenamente con Whitehead de que uno debería olvidarse de los significados, y debería ser capaz de realizar manipulaciones mecánicamente, debería haber un sentido formal o técnico de los símbolos, guiando y controlando nuestro trabajo. La correcta manipulación de los símbolos consiste en mucho más que un cumplimiento estricto de las reglas, hay muchas maneras de percibir los símbolos como tales aun cuando uno razonablemente olvide o ignore sus referentes. Por ejemplo: percatarse de una circularidad potencial en la manipulación de símbolos, desarrollar una percepción gestáltica de algunas expresiones simbólicas, y manipular expresiones con una "meta formal" pre-establecida.

Circularidad

Por circularidad entendemos al proceso de manipulación simbólica que culmina en una identidad obvia o tautológica, que no es ni productiva ni informativa. La capacidad para anticiparse a tal circularidad es una manifestación del sentido de los símbolos. Por otra parte, cuando no se anticipa esa circularidad, el tener sentido de los símbolos prevendría la parálisis y activaría una respuesta natural de búsqueda de una aproximación distinta al problema (véase, por ejemplo, la cita de Wenger, 1987, en la sección siguiente).

Gestalt

Tener una "visión gestalt" es percibir los símbolos no sólo como una concatenación de letras, sino como un arreglo global con una cierta forma como lo expresa, por ejemplo, Wenger (1987):

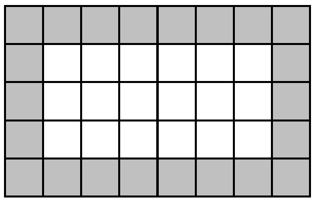
> *"Si eres capaz de ver más allá de la aglomeración de símbolos y observar que la ecuación # 1 ($v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$ para la cual se requiere que sea resuelta para v), es lineal en v, el problema está esencialmente resuelto: una ecuación del tipo $av = b + cv$ tiene como solución $v = \frac{b}{a-c}$, si $a \neq c$, sin importar cuán complicadas pueden llegar*

a ser las expresiones representadas por a, b y c. Sin embargo los alumnos tienen mucha dificultad con este tipo de problemas. Generalmente comienzan a realizar transformaciones permitidas de las ecuaciones, pero obtienen otras que resultan ser cada vez más difíciles de manejar; suelen dar "vueltas en círculo" y después de tres o cuatro manipulaciones regeneran una ecuación que ya habían derivado... Nótese que en estos estos ejemplos los alumnos a veces realizan las manipulaciones correctamente..." (Traducción libre)

La primera parte de la cita anterior es un ejemplo de lo que denominamos "Gestalt"; los comentarios de la segunda parte se refieren a la circularidad. En el mismo párrafo, Wenger también dice que los alumnos "*a menudo parecen elegir su próximo movimiento casi aleatoriamente, en lugar de hacerlo con un propósito específico en mente*". Esta acotación nos conduce a la próxima sub-sección.

Blancos formales

"Se dibuja un rectángulo (el término también incluye al cuadrado) sobre papel gráfico, y sus bordes son celdas sombreadas.



En este caso el número de celdas sombreadas en los bordes no es igual al número de celdas sin sombrear en el interior. ¿Es posible trazar un rectángulo tal que su borde (del ancho de una celda) contenga la misma cantidad de celdas que el interior?" (Problema 87 de Longley-Cook, 1965, tal como aparece en Gardner, 1983).

La siguiente es una solución que efectuó un matemático. Comenzó por igualar el número total de celdas en los bordes $2a + 2(b-2)$ con el número total de celdas del interior $ab - [2a + 2(b-2)]$.
Luego de reducir términos, obtuvo la ecuación $ab - 4a - 4b + 8 = 0$ (1). Esta expresión le sugirió la posibilidad de buscar una factorización, a través de la cual podría ser fácil leer todos los posibles valores enteros de a y b. Su

primer intento produjo $a(b-4)-4(b-2)$, pero no pudo completar la factorización. Sin embargo, él notó que si transformaba $(b-2)$ en $(b-4)$ la factorización se puede completar. Lo hizo agregando 8 a ambos lados de (1), para obtener $(a-4)(b-4)=8$, ecuación que le permitió obtener los dos únicos rectángulos distintos que resuelven este problema (6×8 y 5×12).

Esta solución ilustra el sentido de los símbolos en dos de sus aspectos: primero, imaginar y visualizar la forma de un objetivo simbólico fácil de manejar y de interpretar, y luego, elegir deliberadamente las manipulaciones formales que se necesitan para lograr llegar a ese objetivo elegido.

CONDUCTA NÚMERO 7: SÍMBOLOS EN RETROSPECCIÓN

En una clase de estudiantes universitarios observamos una solución muy diferente para el problema del rectángulo. Después de que muchos de ellos lidiaran con los símbolos sin lograr muchos progresos, a uno de los estudiantes se le ocurrió la solución que describimos en la sección anterior. Al llegar a este punto, una matemática que asistía a la clase como oyente decidió presentar su propia solución, la cual (¿sorprendentemente?) no hace uso alguno de los símbolos. De acuerdo con su propio testimonio, su inspiración proviene de su experiencia con la papiroflexia (Origami), el arte japonés del plegado de papel. La matemática "plegó" mentalmente una de las hileras de celdas de los bordes del rectángulo sobre una hilera adyacente en el interior, y así el número de celdas en el interior y en el borde se yuxtaponen excepto por las dos celdas extras en los bordes. Repitiendo el mismo pliegue con la otra fila del borde, se agregan dos celdas más que no se yuxtaponen. Después ella dobló las dos columnas de los bordes (sin que las celdas de las esquinas estuvieran dobladas hacia adentro), logrando cuatro celdas adicionales que no se yuxtaponen con celdas del inteior, haciendo un total de 8 celdas extra (dos celdas por cada esquina). Para lograr que el número de celdas del interior coincida completamente con el número de celdas de los bordes, todo lo que ella necesitó hacer fue aparear esas 8 celdas con 8 celdas interiores (no coincidentes). Existen sólo dos posibilidades de hacerlo: un rectángulo interior de 1×8 y otro de 2×4. Desdoblando los pliegues en cada caso obtuvo los dos rectángulos originales requeridos por el problema. La explicación verbal es un tanto trabajosa, pero se aclara plegando un rectángulo de papel. Esta es una solución muy ingeniosa y hermosa en sí misma, completamente general, carente de símbolos y visualmente atractiva.

Otro alumno de esa clase notó lo que para él fue un aspecto interesante y sorprendente de esta solución alternativa: aun cuando no se haga uso de símbolos, esta solución está íntimamente relacionada con la solución algebraica presentada anteriormente (y descripta en la Conducta número 6). Este alumno remarcó el hecho de que cuando resolvemos una ecuación algebraica que modela un problema, nos desconectamos del significado de los símbolos y de sus referentes. Generalmente, a los pasos intermedios no les asignamos significados asociados con el contexto del problema, los efectuamos de manera mecánica (y eficiente) mediante manipulaciones que conducen a la solución. Sin embargo, en este caso, la solución simbólica y la solución inspirada en origami tienen un significativo punto de contacto. En la solución algebraica el 8 parecía surgir como un mero artefacto de la manipulación simbólica en el proceso de obtención de nuestro objetivo formal: la ecuación factorizada $(a-4)(b-4)=8$. Sin embargo, a posteriori, la solución inspirada en origami le dio un significado al 8 y a toda la ecuación.

Cuando uno resuelve un problema construyendo un modelo matemático de una situación, habitualmente los símbolos y los significados se conectan al principio (cuando se establece el modelo) y al final (para interpretar el resultado en términos de la situación modelada). Pero en los pasos intermedios, uno generalmente va progresando con la simple ejecución de derivaciones formales cuyos significados, en términos de la situación, no se tienen en cuenta. Para este estudiante, los símbolos verdaderamente le “hablaron en voz alta”, ya que él fue capaz de reconocer el significado que había en ellos aun en los pasos intermedios, lo cual generalmente no es ni necesario ni común de hacer. En esta conducta vemos un lindo ejemplo de sentido de los símbolos.

CONDUCTA NÚMERO 8: SÍMBOLOS EN CONTEXTO

Consideremos, por ejemplo, la relación lineal generalmente expresada como $y = mx + b$. Aun cuando x, y (las variables) y m, b (los parámetros) representan números, los tipos de objetos matemáticos que uno obtiene sustituyendo en ellos son muy diferentes. En términos del plano cartesiano, elegir valores numéricos para x, y, fija un punto del conjunto de todos los puntos, y los valores numéricos de m, b fijan una línea recta del conjunto de todas las líneas rectas. Así, $y = b$ se puede interpretar de dos maneras diferentes dependiendo del contexto. Si nos referimos al resultado de sustituir $x = 0$ en $y = mx + b$, entonces lo que hemos encontrado es la correspondiente ordenada (o familia de ordenadas), es decir el punto donde una línea de la forma $y = mx + b$ intercepta el eje de las y. Pero, si por otro lado, $y = b$ se deriva como resultado de sustituir $m = 0$ en $y = mx + b$, lo que obtenemos es la familia de líneas de pendiente cero[5].

En esta sección, sugerimos que un componente deseable del sentido de los símbolos consiste en un reconocimiento operativo e “in situ” de los diferentes roles que los símbolos pueden tener en el álgebra de la escuela secundaria. Ese reconocimiento implica distinguir la multiplicidad de significados que los símbolos pueden llegar a tener dependiendo del contexto, y la capacidad de manejar los objetos y los procesos matemáticos diferentes involucrados (Sfard, 1992; Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi, 1993).

Presentamos dos ejemplos de estudiantes de segundo año (noveno grado) que nos solicitaron ayuda. En ambos casos los alumnos estaban confundidos por el significado contextual de los símbolos. En el primer caso, la alumna pudo resolver sus dificultades recurriendo a su propio sentido común aplicado a los símbolos. En el segundo caso la situación no fue tan afortunada. En el primer caso el problema era:

> *“Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia que pasa por los puntos (a, b), $(-a, b)$ y $(0, 0)$”*

Uno puede pensar que en este problema un primer paso sensato consistiría en “visualizar” los tres puntos, su ubicación en el plano cartesiano, simetrías,

---

[5] Para desambiguar usaríamos la notación de conjuntos así: $\{(x, y),\ x = 0, y = b\}$ y $\{(x, y),\ y = b\}$ respectivamente.

etcétera. De esta manera, uno abandonaría temporariamente los símbolos en favor de un enfoque gráfico el cual nos ayudaría a encontrar por lo menos parte de la solución: el centro de la circunferencia debería caer sobre el eje de las ordenadas. Nuestra alumna no procedió a trabajar con gráficos, se quedó con los símbolos. Al principio tuvo cierta dificultad para escribir las ecuaciones relevantes porque estaba acostumbrada al uso convencional de las letras a y b. En la ecuación general de una circunferencia en la forma $(x-a)^2 + (y-b)^2$, con la que ella estaba familiarizada, a y b son las coordenadas del centro, mientras que en este problema están dadas como coordenadas de dos puntos genéricos de la circunferencia. Sin embargo, ella se sobrepuso a esa dificultad y estableció las siguientes tres ecuaciones, con (m, n) como las coordenadas al centro que estaba buscando:

$$(a-m)^2 + (b-n)^2 = r^2$$

$$(-a-m)^2 + (b-n)^2 = r^2$$

$$m^2 + n^2 = r^2$$

Luego ella igualó las dos primeras ecuaciones, canceló términos y obtuvo $ma = 0$. Ella sabía que esto implica que $m = 0$ ó $a = 0$ pero no sabía cuál de estos resultados expresaba lo que ella estaba buscando. Debido al esfuerzo invertido en la manipulación de los símbolos parecía haber olvidado el significado de los símbolos y cuál era el objetivo de resolver la ecuación. A fin de salir de este atasco, se decidió a revisar las consecuencias de ambas posibilidades. Luego de un rato, se percató de que si $a = 0$ no habría circunferencia (los tres puntos dados yacerían en el eje y) y luego recordó que a había sido dado en el problema como la abscisa de un punto general, y por lo tanto ella no podía asignarle valores. Ella concluyó correctamente que $m = 0$ es el resultado buscado y que eso significa que el centro de la circunferencia yace en sobre el eje y.

Esta historia sugiere que el sentido de los símbolos no necesariamente implica un reconocimiento inmediato de los roles de los símbolos: en algunas situaciones este reconocimiento puede tornarse dificultoso para algunos alumnos. Pero el sentido de los símbolos puede manifestarse como una destreza de aplicar el sentido común que puede ayudar a los alumnos a reconocer errores, a aclarar algunas confusiones y a salir adelante.

Como en el caso de las ilusiones simbólicas (descriptas en la Conducta número 2), el sentido de los símbolos debería incluir el ingenio para librarnos de confusiones, recurriendo a aquellas herramientas disponibles para retomar el significado de los símbolos.

El siguiente es un ejemplo menos feliz en la cual el alumno no pudo percibir el sentido de los diferentes roles que pueden tomar los símbolos en el siguiente problema propuesto por su libro de texto (Resnick, 1991):

> *"En las expresiones siguientes, encuentren, si es posible, un número que al ser sustituido en d, se obtiene una función lineal"*

Esta tarea traía doce expresiones algebraicas, la última de las cuales era $y = (x^2 - 4)/(d - 2)$. Si uno distingue claramente los roles de los símbolos, el problema parece sencillo: no importa qué número uno sustituya en d (y por cierto no el 2) esta expresión jamás será una función lineal. Nos sorprendió lo que hizo el alumno. Haciendo gala de su visión gestalt (que describimos en la Conducta número 6) el alumno descompuso $x^2 - 4$ en $(x - 2)(x + 2)$, porque había notado que haciendo $d = x$ ($d \neq 2$), $x - 2$ y $d - 2$ se pueden cancelar para obtener la función $y = x + 2$ que es lineal. En este caso, su sentido del símbolo técnicamente sano, que le permitió visualizar la posible cancelación, interfirió con el proceso de distinguir entre los roles diferentes que los símbolos pueden tener. Él no se cuestionó la legitimidad de su movimiento, ni tampoco obtuvo una retroalimentación directa del propio problema que pudo haberlo alertado de que algo estaba funcionando mal. Muy por el contrario, el alumno estaba feliz de haber logrado el objetivo. Por ende no se cuestionó el significado (o la falta de significado) de su accionar. Nuestra reacción en el momento tampoco fue muy afortunada, y no logramos llamarle la atención acerca de lo que había hecho. Es posible que las sutilezas involucradas en el paso "ilegal" $d = x$ estuvieran más allá del alcance de lo que el alumno podía manejar en ese momento.

¿QUÉ ES EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS?
SEGUNDA APROXIMACIÓN

Si examinamos las propiedades comunes de las conductas descritas, estaremos en mejores condiciones para intentar caracterizar el sentido de los símbolos. En general, diríamos que el sentido de los símbolos es una "percepción" compleja y multifacética de los símbolos.

Parafraseando una de las acepciones propuestas por el Diccionario Enciclopédico de Inglés de Oxford para la palabra "sentido", el sentido de los símbolos sería una apreciación rápida y acertada, una comprensión, o un instinto relacionado con los símbolos.

En base a las conductas descritas, el sentido de los símbolos incluiría:

- Una comprensión y un sentido estético del poder de los símbolos: cómo y cuándo los símbolos pueden y deben ser utilizados a fin de expresar relaciones, generalizaciones y demostraciones que de otra manera están ocultas o son invisibles.
- La percepción de cuándo conviene abandonar a los símbolos en favor de otro tipo de enfoques a fin de poder progresar en la resolución de un problema, o con el objetivo de encontrar una solución o representación más fácil y más elegante.
- La capacidad de manipular y la capacidad de "leer" expresiones simbólicas como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Esto implica, por un lado, saber desprendernos de los significados para las manipulaciones y tener una visión gestalt global de las expresiones simbólicas, haciendo que el manejo de símbolos sea relativamente rápido y eficiente. Por otro lado, la lectura de las expresiones simbólicas en pos de su significado puede agregarnos más estratos de conexiones y de razonabilidad a los resultados.
- Tener conciencia de que uno puede confeccionar exitosamente relaciones simbólicas que expresen la información verbal o gráfica dada para poder hacer progresos en un problema, y ejercitar la capacidad de diseñar tales expresiones.

- La capacidad de seleccionar una representación simbólica posible para un determinado problema, y de ser necesario, tener el coraje, primero, de reconocer la propia insatisfacción que podamos tener sobre nuestra elección, y segundo, ingeniarnos para buscar una expresión mejor en su reemplazo.
- Dar lugar a la necesidad constante de controlar los significados de los símbolos mientras se resuelve un problema, y comparar y contrastar esos significados con las propias intuiciones o con los resultados o las consecuencias que esperamos obtener en el problema a resolver.
- Percibir los roles diferentes que pueden jugar los símbolos en los diferentes contextos.

A esta altura quisiéramos referirnos a dos limitaciones importantes de la caracterización anterior del sentido de los símbolos: primero, el "catálogo" anterior está lejos de ser exhaustivo, y segundo, hay mucho más para decir sobre el sentido de los símbolos que lo que puede verse en este catálogo, independientemente de cuán completo pueda ser.

Acerca de las limitaciones del catálogo

Hemos recogido ejemplos a partir de nuestra propia experiencia de observar informalmente a alumnos y a profesores trabajando con álgebra, y creemos que esta compilación puede ser de utilidad como un primer paso para describir el sentido de los símbolos.

Nosotros (profesores, formadores de profesores, investigadores) podemos utilizar esta caracterización no sólo tal como se ha presentado, sino principalmente como un medio para concientizarnos acerca de posibles conductas similares relacionadas con diversos aspectos del sentido de los símbolos. De esta manera, nos puede servir como una plataforma para nuevas observaciones. Sostenemos que buscar una definición satisfactoria de sentido de los símbolos debería combinar ideas teóricas y filosóficas con observaciones empíricas detalladas de la conducta tanto de expertos como de novatos. No hay duda alguna de que observaciones metódicas de las conductas de resolución de problemas aumentarán y extenderán nuestras descripciones.

Un catálogo en sí mismo no es suficiente

No quisiéramos transmitir la impresión de que definir el sentido de los símbolos es una simple cuestión de expandir un catálogo. A pesar de que sería muy tentador tener una lista completa para evaluar la ausencia o presencia del sentido de los símbolos, eso sería demasiado simplista. El sentido de los símbolos involucra complejidades y sutilezas de las cuales quizá no seamos plenamente conscientes. Sugerimos, para empezar, señalar algunas de esas. Por ejemplo:

- Los diferentes aspectos del sentido de los símbolos pueden interactuar entre sí y no necesariamente de manera positiva. Por ejemplo, una visión global (y por otra parte saludable) de una expresión simbólica como $y = (x^2 - 4)/(d - 2)$ puede tentar a ciertos alumnos a simplificar y concluir que cuando $x = d$ la función es lineal.
- Hay situaciones en las cuales los alumnos no parecen actuar de acuerdo a las conductas "esperadas" o "correctas", pero ellos son capaces de sobreponerse a sus dificultades con los símbolos y puede que lo logren acudiendo a cualquiera de las herramientas que se encuentren a su disposición. Así, aquella alumna a quién se la podía haber había considerado como carente de sentido de los símbolos cuando al intentar encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia que pasa por $(0,0)$, (a, b) y $(-a, b)$ quedo fijada en los símbolos en lugar de utilizar consideraciones gráficas, en realidad mostró tener un sentido de los símbolos cuando se las ingenió a su manera para lograr interpretar el resultado de $ma = 0$.
- Un catálogo exclusivo para el sentido de los símbolos es inevitablemente incompleto porque este sentido, en algunas situaciones, se nutriría de la comprensión y percepción de otras representaciones. Transitar ida y vuelta entre diferentes representaciones resultará en un aumento de nuestra comprensión de cada una de ellas. El sentido de los símbolos va a desarrollarse y va a transformarse nutriéndose e interactuando con los otros sentidos, como el sentido de los números, el pensamiento visual, el sentido de las funciones y el sentido de los gráficos.

Estas y otras facetas potenciales del sentido de los símbolos deben ser tenidas en cuenta además de la ampliación del catálogo.

Considerando la naturaleza del sentido de los símbolos, puede ser ilustrativo hacer una analogía con la acepción fisiológica de la palabra "sentido" según el Diccionario Enciclopédico de Inglés de Oxford: "cualquiera de las facultades corporales especiales a través de las cuales se despierta o estimula la sensación". Podríamos adaptar esto al sentido de los símbolos de la siguiente manera "cualquiera de las facultades matemáticas especiales a través de las cuales se activan o estimulan los significados". Un objetivo deseable para la educación matemática sería promover el sentido de los símbolo para que se torne en una parte indivisible de nuestro arsenal de herramientas matemáticas, de forma similar a la que nuestros sentidos fisiológicos son una parte integral de nuestro ser biológico. La analogía sugiere que el sentido de los símbolos debería ser una parte de nosotros mismos, listo para ser puesto en acción casi al nivel de un reflejo. Pero también, de la misma manera en que cuando nos fallan nuestros sentidos nosotros tendemos a desarrollar sustitutos, nuestro sentido de los símbolos debería tender a desarrollar maneras para resolver y sobrellevar "fracasos" (por ejemplo, sobreponerse por cualquier otro medio a las situaciones que involucran "ilusiones simbólicas").

Por último, nos referimos a la pregunta "¿Qué es el sentido de los símbolos?" en el amplio contexto del pensamiento y el aprendizaje matemático. El sentido de los símbolos es el componente algebraico de una cuestión más amplia: 'construir sentido' en matemáticas. Construir sentido en y con las matemáticas parece ser el objetivo de la mayor parte sino de toda la educación matemática, según lo refleja el espíritu de los Estándares curriculares del NCTM (1989). Esto implica el significado de todas las actividades matemáticas que emprendemos, el poder que nos da la comprensión y la manipulación de situaciones, y la utilidad de las herramientas matemáticas para hacer progresos en y más allá de las matemáticas.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

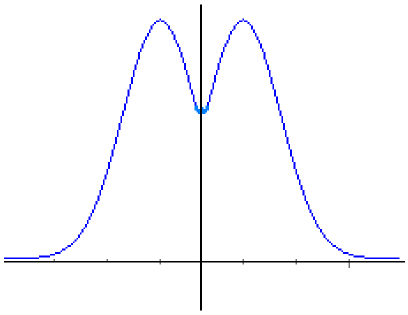
Puede parecer presuntuoso describir y recetar implicaciones precisas para la enseñanza de una idea no completamente desarrollada como es el caso del sentido de los símbolos. Es más, aun si se lograra una caracterización más satisfactoria del sentido de los símbolos, todavía necesitamos responder a muchas preguntas abiertas antes de discutir implicaciones precisas para su enseñanza. Algunas de esas preguntas no son para nada triviales: ¿Cómo se "adquiere" el sentido de los símbolos? ¿Qué se requiere del conocimiento subyacente? ¿Cuál es el papel que cumplen las manipulaciones técnicas de los símbolos? La práctica procedimental con los símbolos ¿precede al desarrollo del sentido de los símbolos, o se desarrolla en paralelo, o quizá obstaculiza su desarrollo? El sentido de los símbolos ¿es una condición de los expertos o se puede esperar también de los novatos y hasta qué punto? Y muchas otras preguntas.

Sin embargo y a pesar de lo que desconocemos, creemos que estamos en una posición en la cual se puede y se debe iniciar la discusión sobre implicaciones para la enseñanza del sentido de los símbolos. A continuación, sugerimos implicaciones que se pueden derivar de nuestras descripciones.

1. Comenzamos proponiendo que el sentido de los símbolos es la esencia de lo que significa ser competente en álgebra y que la enseñanza del álgebra debería estar orientada hacia él. Mientras puede ser fácil entender y aceptar (aunque a menudo se olvide) que ser competente en aritmética incluye mucho más que realizar perfectamente, sin tachas, los algoritmos computacionales, cuando se trata del álgebra somos más propensos a aceptar que conocer las reglas de manipulación formales es el objetivo central de su enseñanza. Por consiguiente, sugerimos que una de las primeras implicaciones para la enseñanza (probablemente obvia pero no obstante crucial) es que las manipulaciones simbólicas se deberían enseñar dentro de contextos ricos que provean a los alumnos de muchas oportunidades para aprender cómo y cuándo usar estas manipulaciones.
2. Continuamos refiriéndonos a las maneras en que podemos subordinar la tecnología al servicio del desarrollo de tareas y problemas las cuales en

las manos de un profesor con experiencia, tienen el potencial para fomentar el sentido de los símbolos. Estas tareas deberían apoyarse en el poder computacional que libera recursos mentales para desarrollar y enriquecer significados y conexiones entre conceptos. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema, que no se encuentra generalmente en los libros de texto tradicionales.

> *"Usando una calculadora gráfica o cualquiera otra herramienta que grafique funciones, encuéntrese una expresión algebraica para la función del gráfico siguiente*"



Esta tarea[6] no es fácil, y muchos estudiantes (y algunos profesores) se resisten a trabajarla porque no hay procedimientos pre-hechos para encarar su resolución. En el intento de crear una expresión simbólica para la función, surgen muchos interrogantes. ¿Se trata de una función polinomial? ¿Por qué no? ¿Será una función racional? Si lo es, ¿cuáles son los grados del numerador y del denominador? Dado que la función está definida por todo el dominio real, ¿qué significa eso en términos de su denominador? ¿Cómo afecta la simetría del gráfico la elección de las funciones? Una vez visualizada la forma simbólica general representada por este gráfico, ¿cuáles son los parámetros que se deberían cambiar para hacerla más parecida a la del gráfico dado? Etc. En nuestra experiencia, esta tarea puede mantener ocupados a los profesores por aproximadamente una hora y media, usando tecnologías gráficas para re-examinar las expresiones conjeturadas y ajustarlas si es necesario. Los diferentes tipos de conocimiento, incluyendo el conocimiento informal, se emplean de manera sorprendente. Invitamos a los lectores a trabajar un

[6] Otra versión de este problema incluye números específicos en los ejes.

rato con este problema y notar cuántas facetas de su propio sentido de los símbolos este problema estimula. Sugerimos que se deberían desarrollar muchas más tareas de esta naturaleza y experimentar con ellas en clase.

3. No queremos implicar con lo anterior de que lo que se debe hacer es dejar de lado completamente los problemas del currículo tradicional para concentrarse en la creación de tareas novedosas o problemas que usen tecnologías. En cambio, decimos que, si bien se necesiten nuevos problemas y tareas, éstas en sí mismas no son exclusivas para desarrollar el sentido de los símbolos. Aun cuando la tarea aparezca como muy interesante o novedosa, será la *actividad* a la que se guíe a los alumnos a realizar la que determine si se apoya la construcción de sentido de los símbolos. Y recíprocamente, una tarea que parezca anodina o extremadamente tradicional, puede ser una fuente potencial de discusiones profundas y reveladoras. Por ejemplo, consideremos uno de los problemas anteriores que es ciertamente tradicional y que trata de encontrar las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los puntos (a, b), $(-a, b)$ y $(0, 0)$. En lugar de dejar que los alumnos salten inmediatamente a manipular ecuaciones, se puede encaminarlos a que colectivamente construyan sentido, por ejemplo, trazando un croquis cartesiano del problema. Tal actividad promovería una discusión en la cual se podrían revelar aspectos implícitos del problema que no son aparentes si todo lo que hacemos es manipular ecuaciones a fin de encontrar la solución. Por ejemplo durante este tipo de discusión podría notarse que:

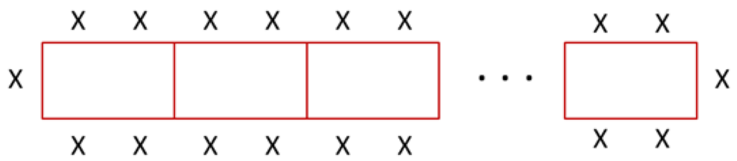
   - por simetría, el centro debería caer en algún lugar del eje de las ordenadas, de manera que la abscisa del centro buscado es 0 (esta hipótesis se puede confirmar sobre las bases de conocimiento geométrico relacionado a bisectores perpendiculares, si la clase ya posee ese tipo de conocimientos);
   - las coordenadas del centro dependen de los valores de a y b. Se puede invitar a los estudiantes a jugar con diferentes valores para ganar una intuición acerca de la naturaleza de esta dependencia. Se puede notar, por ejemplo, que mientras que el signo de a es irrelevante, el signo de b determinará el signo de la ordenada del

centro. Es más, intentos de dibujar la circunferencia indican que para valores absolutos pequeños de b, el valor absoluto de la ordenada del centro (y el radio) serán grandes y viceversa.

Estos hallazgos obtenidos mediante observación informal son muy informativos respecto a la naturaleza de la respuesta a este problema. Usándolos como ancla, el resultado de la manipulación algebraica para la ordenada del centro resulta $y_c = (a^2 + b^2)/2b$. Gracias a la discusión anterior, esta expresión se convierte en algo imbuido de significado, y los alumnos tienen elementos para examinar y controlar si la expresión articula las conclusiones esperadas de ella. Así, una tarea, que podría haber sido meramente técnica, se puede convertir en un espacio que proporciona oportunidades para desarrollar aspectos del sentido de los símbolos.

4. El simbolismo algebraico debería ser introducido desde el comienzo mediante situaciones en las cuales los alumnos puedan apreciar cuán poderosos pueden ser los símbolos para expresar generalizaciones y justificaciones de fenómenos aritméticos (Friedlander, Hershkowitz & Arcavi, 1989; Hershkowitz & Arcavi, 1990). Al desplegar estructuras, los símbolos algebraicos no son introducidos como entidades formales y sin sentido con las cuales hacer malabarismos procedimentales, sino como herramientas poderosas para solucionar y comprender problemas y poder comunicarse acerca de ellos. El siguiente problema (adaptado de Gamoran, 1990) es un ejemplo de muchas situaciones similares que se pueden usar en la introducción al álgebra.

"En siguiente disposición de n mesas, X indica un asiento para una persona, y "…" indica un número variable de mesas.



¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de n mesas?"

Una manera posible de resolver este problema es considerarlo como un problema de perímetro, así el número de asientos será $2(2n) + 2 \times 1$, es decir $4n + 2$. Otra manera es contar el número de asientos en las mesas en las que sólo se pueden sentar 4 personas, es decir $n - 2$ y luego agregar 10 asientos más por las dos mesas de los extremos, resultando $4(n - 2) + 10$. Además de trabajar hacia la construcción de un modelo simbólico del problema, también podemos aprovechar las diferentes soluciones producidas por alumnos e ir en la dirección opuesta, es decir tomar como punto de partida la ecuación simbólica obtenida y en base a ella reconstruir el modo en que se realizó el conteo, preguntando, por ejemplo: ¿cuál es la manera en que se contó si la expresión resultante fue $5n - (n - 2)$? Este tipo de actividad suele ser muy reveladora acerca del propósito de las manipulaciones y acerca de la invariancia de la expresión final, independientemente de la manera que uno realice el conteo. En resumen, en trabajos de este tipo, las manipulaciones están al servicio de las estructuras y de los significados.

5. Un hábito recomendable para los profesores es el del análisis “post mortem” que puede ser de gran utilidad en monitorear el uso de automatismos. En tales discusiones es probable encontrar enfoques alternativos para resolver los problemas. La inspección de esas alternativas es generalmente útil para establecer conexiones entre enfoques simbólicos y otros enfoques de un mismo problema. Fue durante una de esas discusiones que un alumno, que luego de haber visto la solución simbólica y la solución Origami del problema de las celdas del borde de un rectángulo, le reimpuso significado a cada paso formal de la manipulación algebraica a fin de establecer conexiones entre las dos soluciones. Sugerimos que una implicación para nutrir el desarrollo del sentido de los símbolos sería proveer de oportunidades para que se hagan este tipo de conexiones o para que se vean como otras personas las hacen.

6. Los diálogos y las prácticas de aula deberían legitimar y estimular las preguntas del tipo “¿qué ocurriría si…?” especialmente en relación al rol de los símbolos y de sus reglas. Por ejemplo,

“$y = mx + b$ es la expresión general de una función lineal, si se sustituyen los valores para m y b se obtendrá una función lineal específica. ¿Cuál sería el sentido de sustituir, por ejemplo, los valores para $x = 3$ e $y = 2$, para obtener $2 = m3 + b$?”

Preguntas de este tipo, si se permiten y se formula con frecuencia, ayudarían a los alumnos a considerar a los símbolos como entidades que pueden ser objeto de su re-inspección constante, y que no están gobernados solamente por reglas que les son impuestas arbitrariamente por una autoridad.

Por último, en lugar de seguir explayándonos acerca de implicaciones para la enseñanza confeccionando una colección *lista para ser usada*, quisiéramos concluir con una invitación: si creamos y trabajamos problemas del tipo descripto (tanto en el aula como en cursos de formación docente) promoviendo prácticas apropiadas de pensamiento y de discusión, agudizaremos nuestro sentido de lo que es, o debería ser, el sentido de los símbolos; es más, podríamos recoger más implicaciones para la enseñanza que surgirían de genuinas observaciones de nuestros propios ámbitos.

EPÍLOGO

“Una vez tuve trato con un hombre que manejaba sus negocios desde su apartamento. Tenía una gran clientela. Vivía en el cuarto piso de un edificio de apartamentos, y el acceso a su apartamento era a través de una puerta trasera en la planta baja próxima a una playa de estacionamiento. Normalmente, esa puerta estaba cerrada con llave. La manera de subir a su apartamento era la siguiente. Después de llamarlo justo antes de tu hora citada, estacionabas tu coche en la playa y tocabas la bocina. El hombre salía a su balcón trasero y deslizaba hasta la planta baja una llave atada a una larga cuerda. Tú abrías la puerta con la llave, subías a su apartamento y le devolvías la llave. Este proceder me parecía sumamente excéntrico y misterioso. Un buen día le pedí que me explicara que ocurría.

“¿Por qué no instalas una cerradura eléctrica de manera que puedas oprimir un botón en tu apartamento para abrir la puerta trasera?”

“Ya hay una cerradura eléctrica en la puerta”

“Entonces, por el amor de Dios, ¿Por qué no la usas?”

“Te lo diré. Hace diez años, me divorcié de mi esposa. Fue bastante desagradable, y durante meses después del divorcio ella venía y me causaba problemas. Un día simplemente decidí que cuando alguien pulse el botón abajo, lo ignoraría, pero por supuesto debería preocuparme por mis clientes. Así que acá lo tienes; no es para nada misterioso.”

“Entiendo que ella todavía sigue viniendo y te causa problemas”

“No. Ella murió hace unos cinco años”

…

“Formalismo, en el sentido en que yo uso el termino, es la situación en que la acción está separada de su significado y se lleva a cabo mecánicamente en una cierta dirección”

…

“A través de los tiempos, los matemáticos han luchado para recobrar el pensamiento y los significados en la enseñanza de las matemáticas, para proveer alternativas a los modos formales y ritualistas de aprender en la mayoría de las clases de matemáticas, pero a pesar de nuevas teorías, nuevos programas, nuevos cursos, nuevos instrumentos, la batalla nunca se gana. La lucha en contra de la acción formalizada y sin pensar es perpetua.”

…

“No quiero sugerir que el formalismo es una sustancia material que reside en la atmósfera y puede infectarnos… Uso el término formalismo sólo para llamar la atención acerca de la tendencia natural de la forma y la función para desbalancearse e ir por caminos separados. No podremos impedir su separación y probablemente no debemos intentarlo, pero debemos ser conscientes del proceso, de manera que podamos instituir contramedidas cuando se sale de control.”

[Estas citas en traducción libre provienen de Davis & Hersh, 1986].

Menciones

Agradezco a Maxim Bruckheimer y David Wheeler por la meticulosa lectura de las versiones anteriores y por sus comentarios que me ayudaron a mejorarlas significativamente. Agradezco también a Zvi Artstein, Ruhama Even, Barbara Fresko, Alex Friedlander, Nurit Hadas, Rina Hershkowitz, James Kaput, Anna Sfard, Jack Smith y Michal Yerushalmy por sus valiosos comentarios.

Referencias bibliográficas

Borges, J. L. (1989) Funes el memorioso. En Borges, J. L. *Ficciones*. Decimo-sexta reimpresión, Alianza Editorial, Madrid, pp. 121-131.

Clement, J. (1982) Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13(1), pp. 16-30.

Davis, P.J., & R. Hersh (1986) *Descartes' dream: the world according to mathematics*. Harcourt Brace Jovanovich, Pubs, San Diego, Boston, New York, pp. 283-4, 287, 289

Dugdale, S. & D. Kibbey (1986) *Green globs and graphing equations* (A computer-based instructional package). Sunburst Communications, Pleasantville, NY.

Dugdale, S. (1993) Functions and graphs: perspectives on student thinking. In Romberg, T. A., E. Fennema & T. P Carpenter (Eds.) *Integrating research on the graphical representation of functions*. L. Erlbaum Associates, Ind. Hillsdale, NJ. pp. 101-130.

Fey, J. (1990) Quantity. In Steem, L. A. (Ed.) *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy*. National Academy Press, Washington, D. C., pp. 61-94.

Fischbein, E. & I. Kedem (1982) Proof and certitude in the development of mathematcal thinking. In Vermandel, A. (Ed.) *Proceedings of the 6th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (PME 6). Antwerp, pp. 128-131

Freudenthal, H. (1993) *The didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel.

Friedlander, A. & N. Hadas (1988) Teaching absolute value spirally. In Coxford, A. F. & A. P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K-12*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA., pp. 212-220.

Friendlander, A., R. Hershkowitz & A. Arcavi (1989) Incipient algebraic thinking in pre-algebra students. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (PME 13), Paris, France, Vol. 1, pp. 283-290.

Hershkowitz, R. & A. Arcavi (1990) The interplay between student behaviors and the mathematical structure of problem situations: issues and examples. *Proceedings of the 14th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (PME 14), Mexico, Vol. II, 193-200.

Gamoran, M. (1990) Strategies and representations: how to serve dinner for a thousand. Unpublished manuscript available from the author at http://www.sesp.northwestern.edu/profile/?p=84

Longley-Cook, L. H. *Fun with brain puzzlers*. Fawcett, 1965. (As quoted in Gardner, M., 1983. *Wheels, life and other mathematical amusements*. Freeman and Co., pp. 10-18.)

Moschkovich, J., A. H. Schoenfeld & A. Arcavi (1993) Aspects of understanding: multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In Romberg, T. A., E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating research on the graphical representations of functions*. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 69-100.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM, Reston, VA, pp. 36-37 - Version en castellano: https://es.scribd.com/document/243901193/Estandares-del-NCTM-pdf

Resnick, Z. (1991) *Functions* (Hebrew textbook from the Mathematical Chapters Series for 9th grades). The Department of Science Teacheing, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, p. 151.

Schoenfled, A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. Academic Press, Inc., p.27

Sfard, A. (1992) Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function. In Harel, G. and E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, Vol. 25), Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 261-289.

SNARK (1977) *Revista de juegos y entretenimientos*. Año II, Número 7, Home Ludens SRL, Buenos Aires, Argentina, p. 5.

Sowder, J. & B. P. Schappelle (Eds.) (1989) *Establishing foundations for research on number sense and related topics: report of a conference*. Center for Research in Mathematics and Science Education, College of Sciences, San Diego State University.

Sowder, J. (1992) Estimation and number sense. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*. Macmillan Pubishing Company, New York, pp. 371-389.

Wenger, R. H. (1987) Cognitive science and algebra learning. In Schoenfeld, A.H. (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 217-251.

Whitehead, A. N. (1911) *An Introduction to Mathematics*. William & Norgate, London, pp. 59-61.