ABRAHAM ARCAVI & NURIT HADAS

EL COMPUTADOR COMO MEDIO DE APRENDIZAJE: EJEMPLO DE UN ENFOQUE

Traducción libre realizada por:
✓ Maria Fernanda Mejía P. Email: mafanda1216@yahoo.com.ar
✓ Edinsson Fernández M. Email: edi454@yahoo.com
Documento de Trabajo del Grupo EM&NT
Area de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía
Universidad del Valle, Septiembre 2003

RESUMEN. Hay muchos posibles enfoques en que los ambientes computarizados dinámicos juegan un papel significativo y posiblemente único, apoyando las trayectorias de aprendizaje innovador en general en las matemáticas, y particularmente en la geometría. Estos enfoques son influenciadas a propósito por lo que uno ve en la matemática y en la actividad matemática.

En este articulo nosotros describimos brevemente un enfoque basado en una situación problema y nuestras experiencias utilizadas con los estudiantes y profesores. Esto lleva naturalmente a una discusión de algunas de las maneras en las cuales las componentes del currículo de matemáticas, las práctica del aula, y el aprendizaje del estudiante pueden diferir del enfoque tradicional.

PALABRAS CLAVES: geometría dinámica, las representaciones, las funciones, las interpretaciones, hacer hipótesis

1. LA RAZÓN FUNDAMENTAL

Los ambientes computarizados dinámicos constituyen laboratorios virtuales en los cuales los estudiantes pueden jugar, investigar y aprender matemáticas. Lo siguiente son algunas de las características en que los tales laboratorios tienen el potencial de nutrir, siempre que ellos estén acompañándos convenientemente por materiales del currículo y prácticas del aula.

1.1. La visualización

"La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual" (Hershkowitz, 1989, Pág. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, "es un factor esencial para crear la sensación de auto-evidencia e inmediatez" (Fischbein, 1987, Pág. 101). Por lo tanto, la visualización "no sólo organiza los datos disponibles en estructuras significativas, sino que también es un factor importante que orienta el desarrollo analítico de una solución." (Ibíd.) Los ambientes dinámicos no sólo les permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y por lo tanto visualizarlas, sino que también le permite al usuario transformar construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir hacia

International Journal of Computers for Mathematical Learning 5: 25—15, 2000. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

la formación del hábito de transformar (o bien mentalmente o por medio de una herramienta) un ejemplo particular, para estudiar las variaciones, visualmente da indicios de invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas.

1.2. Experimentación

Además de la visualización, el desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, y "a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos..., para buscar casos extremos, ejemplos adversos y de carácter no estéreotípados..." (Yerushalmy, 1993, Pág. 82). Con estos no sólo se pueden hacer observaciones, sino que también miden, comparan, cambian (o incluso distorsionan) las figuras y hacen construcciones auxiliares mucho más fáciles. La información obtenida de esta manera pueden ser un paso hacia la enunciación de generalizaciones y conjeturas que a su vez deben servir como base para la siguiente característica importante a considerar.

1.3. La sorpresa

Es improbable que los estudiantes se encauzen a su propia experimentación fructíferamente desde el comienzo. Las actividades curriculares, tales como las situaciones problema, deben ser diseñadas de tal manera que los tipos de preguntas que a los estudiantes le sean requeridas puedan jugar papeles significativos en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental. Un tipo de pregunta significante para acompañar la experimentación, es exigirles a los estudiantes que hagan predicciones explícitas e inteligentes sobre un resultado de un cierto fenómeno o acción que ellos están a punto de abordar. Al realizar tales predicciones haciendolas explícitas se: (a) Alerta a los estudiantes para que sean más claros acerca de cómo ellos prevén la situación en la que van a trabajar, (b) Orienta a los estudiantes a la posición de crear sus "propias predicciones" y así es probable que ellos tengan más cuidado en lo que piensan sobre esto, y como consecuencia, se comprometen más con la situación, y (c) Crea expectativas y motivaciones para la experimentación real. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generado cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. (Los estudiantes al trabajar sobre tales actividades son descritas en Hadas y Hershkowitz, 1998, 1999). Éste puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para re-analizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo.

1.4. La retroalimentación

Las sorpresas descritas anteriormente originan una desigualdad entre una expectativa explícita de una cierta acción y del resultado de esa acción.

La retroalimentación es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido. Esto es una implicación "seca" de la acción del estudiante que será confrontada. Tal retroalimentación directa es potencialmente más efectiva que el proporcionado por un profesor, no solamente porque es un afirmación emotiva (carencias de juicio de valor), sino también porque puede involucrar motivación para volver a verificar, revisar la predicción y puede motivar la necesidad de una demostración. Esta suposición es tal que exista el conocimiento previo y apropiado para apreciar tal retroalimentación significativa, y que esto serviría de base para la reflexión. Además, sostenemos la idea de que las situaciones problema para ser diseñadas en ambientes computacionales (un ejemplo en el cual nosotros proponemos en este articulo) y la implementación que el profesor les de, los estudiantes deberían apoyarse a apreciar y a formular "conflictos" o inconsistencias y a encontrar maneras para resolvérlos.

1.5. Necesidad de pruebas y Demostraciones

Dreyfus y Hadas (1996) discuten y ejemplifican cómo uno puede usar en beneficio propio una acción en cada sorpresa del estudiante a fin de que infunda y alimente la necesidad para la justificación y la prueba. Siguiendo una sorpresa, muchos estudiantes pueden requerir una prueba, o quizás no explícitamente, pero exige de otros o de ellos una respuesta a su "por que"' (o el "por qué no").

El diseño de tareas exitosas debe tener en cuenta también algo más. Si es posible, en la prueba, particularmente con la respuesta al "por que", deberia provenir de las observaciones y las re-visiones del proceso de experimentación en sí mismo. En otros términos, el ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión debe suministrar las semillas de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar una declaración. De esta manera el ambiente dinámico apoya realmente a "cerrar el ciclo"

A continuación mostramos un análisis de una situación problema "suficientemente concreta"- "bien relacionada a lo que el estudiante ya sabe" - así como tambien que sea interesante y resoluble -" (Noss y Hoyles, 1996, Pág. 67) con la potencia para animar a los estudiantes a generar genuinas y espontáneas preguntas por ellos mismos. La perspectiva teórica general que inspiró el diseño de la situación problema esta basada en las ideas principales de Duval (1999, por ejemplo). Brevemente enunciado, la teoría demanda que un componente esencial para el aprendizaje de las matemáticas es la coordinación de las diferentes representaciones de un concepto dado. Tal coordinación implica manipulaciones dentro de una cierta representación y traducción a través de las representaciones. La situación problema que presentamos y analizamos más adelante es simplemente un ejemplo de muchos, el cual creemos ilustra y consolida las afirmaciones y procesos descritos anteriormente. La descripción incluye la misma situación problema, su implementación con un particular sistema de geometría dinámica,

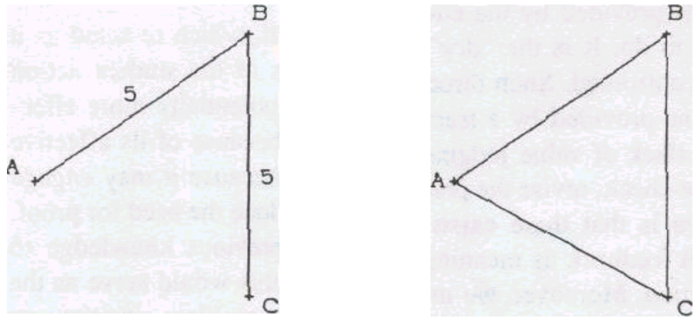

Figura 1 . Construyendo un triángulo isósceles dinámico..

(Geometry Inventor, 1994), y datos anecdóticos en los salones de clases (9no y 10mo grado, de edades entre 15 a 16 años) y a partir de los talleres para profesores en Israel. El conocimiento de fondo de los estudiantes (y de los maestros) incluyen: el concepto de función en general, las representaciones simbólicas, tabulares y gráficas (Cartesiano) de un repertorio de funciones, y una cantidad sustancial de Geometría Euclideana. Los datos provienen de varios ensayos. Sin embargo, en lo que se sigue no analizamos los protocolos, ni damos citas literales. Más bien intentamos (a) describir el desenvolvimiento de la actividad y la manera entrecruzarse las distintas ideas a través de las diferentes representaciones, (b) proponer sugerencias intermedias o preguntas que insinúan la respuesta (el cuál nosotros refinamos después de varios ensayos) y una muestra de respuestas interesantes (no necesariamente correctas), y (c) transmitir el esfuerzo común de las características especiales de la actividad, como un ejemplo del potencial pedagógico y cognitivo de lo realizado con estás tecnologías computacionales. Intercambiamos comentarios para analizar y resaltar los problemas matemáticos, cognitivos y pedagógicos de las experiencias planteadas. Finalmente, reflexionamos sobre posibles implicaciones.

2. LA SITUACIÓN PROBLEMA– PRIMERA FASE

El primer paso consiste en la construcción sobre el “tablero de dibujo[1]” (del Geometry Inventor), de dos segmentos de longitud 5 con un punto final común. Uniendo los dos otros puntos finales se produce un triángulo isósceles (Figura 1). Por ejemplo, al ir arrastrando el vértice C , se produce varias posibilidades de triángulos isósceles cuyos lados iguales eran iguales a 5 (como se ve en la Figura 2).

El efecto de lo “continúo” y de la variación dinámica determina la escena para nuestra primera pregunta: ¿Qué es lo que cambia y qué es lo que sigue igual? Los estudiantes normalmente señalaron como constante los lados iguales dados (algunos incluso mencionaron la suma de los ángulos interiores) y mencionaron como variable la más obvia: el tercer lado AC. Cuando se requirio encontrar más variables, también mencionaron

---

[1] N.T.: El “drawing board” es traducido como tablero de dibujo o también se le denomina ventana de diseño o área de trabajo dentro de los software de geometría dinámica.

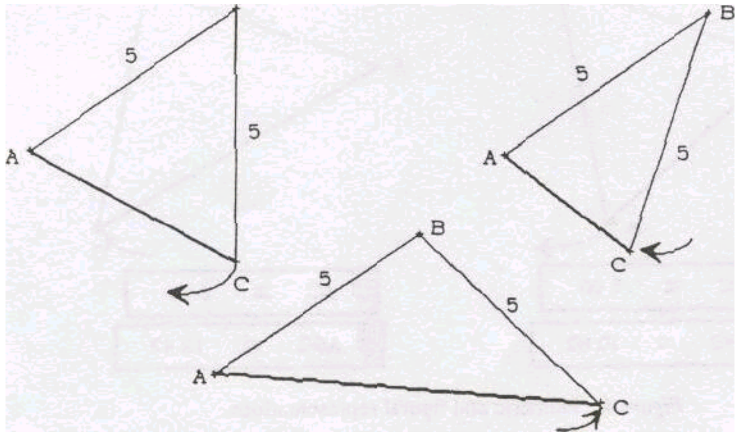

Figura 2. El cambio dinámico del triángulo

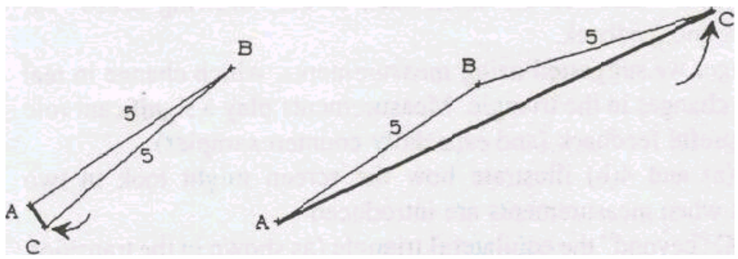

Figura 3. Visualizando el dominio de la función.

los ángulos y el área del triángulo. Se les propuso estudiar la variación del área como una función de AC. Arrastrando el vértice C, el dominio de variación de AC (entre 0 y 10) se hace evidente (Figura 3).

También el rango (o codominio) se hace evidente a partir de los cambios dinámicos: el área mínima es 0 (cuando AC es 0), este luego aumenta, pero en algún punto empieza a disminuir hasta alcanzar 0 de nuevo cuando AC se vuelve 10.

Nuestra próxima pregunta se dio muy naturalmente: predecir cuando el área alcanza su valor máximo.

Una respuesta consistía en señalar a uno o más triángulos que parecen tener una área máxima diciendo “el triángulo más grande probablemente es uno de éstos”. Otra respuesta, más frecuente entre profesores, era que el triángulo equilátero (CA = 5) tiene el área más grande. Dado el medio, es natural que la mayoría de las predicciones fueron caracterizaciones geométricas del triángulo con el área máxima, en lugar de un valor numérico para AC o el área. Todas las predicciones fueron grabadas (uno de las correctas no fue la más

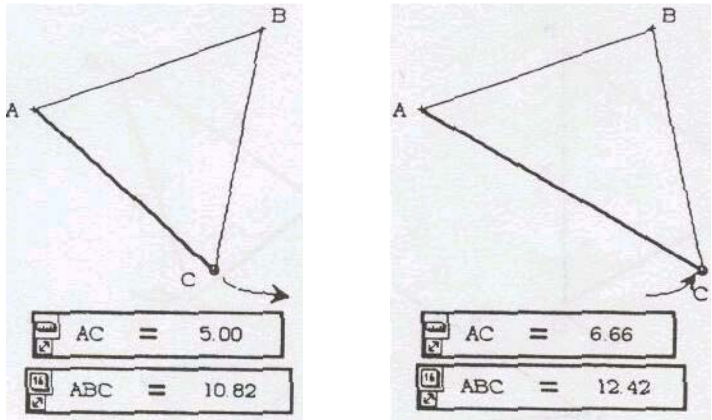

Figura 4. Representaciones numéricas y figurales.

común). Entonces nos dirigimos a devolvernos en el trabajo en la "tablero de dibujo" para fomentar la comprobación y la retroalimentación.

En esta fase, sugerimos usar medidas, el cual cambian en tiempo real con los cambios del triángulo. Las medidas juegan un papel significante proporcionando convenientemente la retroalimentación (y especialmente los contraejemplos).

Las figuras 4(a) y 4(b) ilustran cómo en la pantalla podría aparecer en dos tomas distintas cuando se introducen las medidas.

Arrastrando C del triangulo equilátero un "poco más allá" (como se muestra en la transición de Figura 4(a) a 4(b)), normalmente ayuda a descartar la conjetura de que es el de área máxima: los valores del área aumentaron más allá de 12, hacia 12.4, 12.5 y luego empezaron a disminuir. La sorpresa causada por la refutación empírica (numérica) de la "conjetura del triángulo equilátero" da la escena para el trabajo geométrico en el "por qué".

Se recordó la fórmula de la altura por la base sobre dos para utilizarla en el siguiente paso. Sin embargo, cuándo los estudiantes o los profesores escogieron a CA como la "base", la dificultad fue inmediata: ¿Cómo establecer el valor máximo con el producto de dos cantidades variables (CA y la altura correspondiente)? De esa manera, alguien en la clase sugirió (y en algunas clases se hizo de esta manera) cambiando la perspectiva y buscando otro par de base-altura en cuál uno de estos valores permanezca constante; por ejemplo, AB y la altura correspondiente, como se muestra en Figura 5.

Arrastrando C de nuevo, algunos pudieron ser capaces inmediatamente no sólo de "ver" la respuesta correcta, sino además su justificación geométrica: el área será máxima, cuando la altura es más grande, particularmente cuando DC coincide con BC (Figura 6 ilustra el aumento dinámico visualmente fuerte de la medida de la altura hasta que alcanza su máximo).

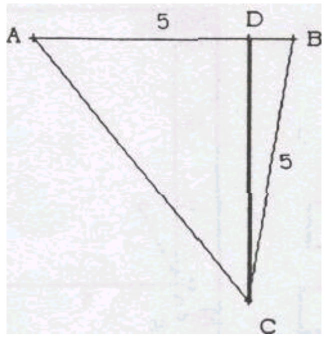

Figura 5. El cambio de perspectiva.

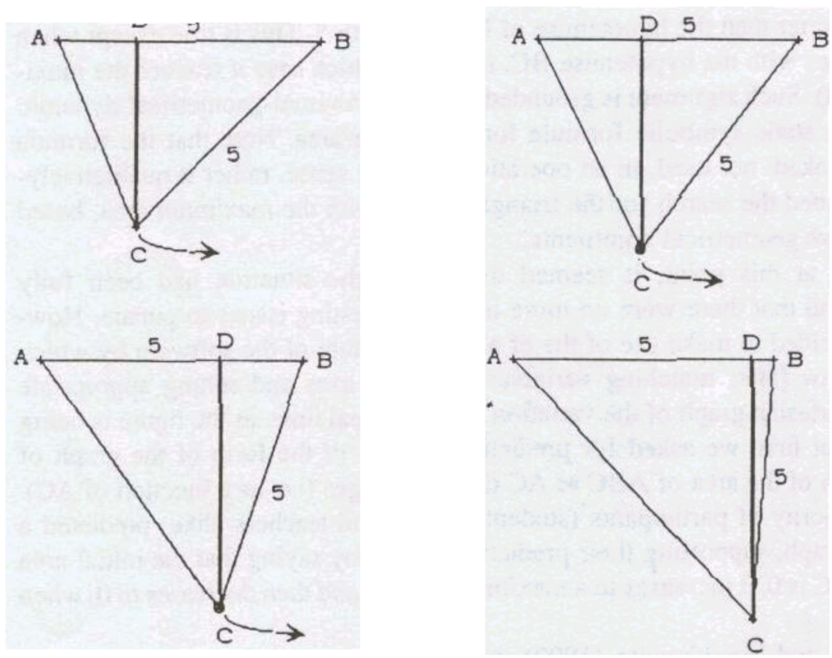

Figura 6. Representanción justificada por el cambio dinámico.

De esa manera el máximo se alcanza cuando el triangulo ABC es un triángulo rectangulo. Este hallazgo es coherente con el valor de 12.5 para área máxima (la mitad de la base por la altura es igual a $\frac{5\times 5}{2}$), ya observada previamente.

Para resumir hasta el momento, la exploración se inició con una familia de triángulos isósceles con los lados iguales de longitud fija que cambia dinámicamente, mientras se observa la variación y se hacen predicciones. En la mayoría de los casos, las predicciones llevaron a una sorpresa que causó el “por qué." La respuesta a ese por qué fue inducido por la experimentación propuesta, guiando a la respuesta correcta y su justificación (la altura variable DC siempre es un cateto del triángulo rectángulo BDC

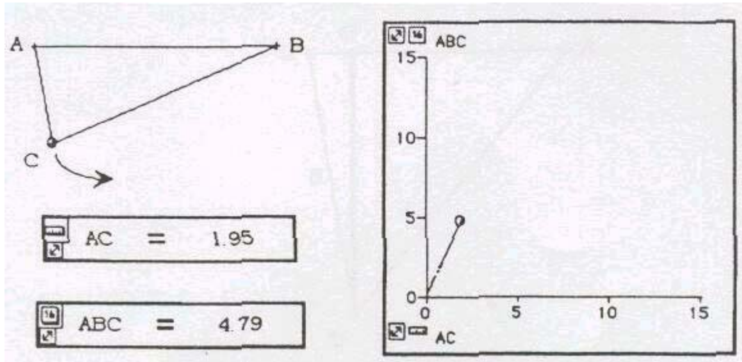

Figura 7. Uno foto incipiente de la primer gráfica.

y es más corto que la hipotenusa de longitud 5. Esto es verdad, excepto cuando DC coincide con la hipotenusa BC, en cuyo caso alcanza la máxima longitud). Tal argumento se conecta con una perspectiva dinámica-visual-geométrica de la fórmula simbólica estática para el área. Note que la fórmula no fue mencionada, ni usada, en un sentido operacional, más bien se guió una búsqueda cualitativa-visual para el triángulo con el área máxima, basado en los argumentos geométricos cualitativos.

Normalmente, en este momento, parecía que la situación había sido explorada totalmente, y que no había ningún problema interesante para seguir. Sin embargo, se decidió hacer uso de un aspecto del software por el cuál se puede graficar (después de hacer corresponder las variables a los ejes y dando las escalas apropiadas) un gráfico Cartesiano de variación en de tiempo real, cuando la figura está siendo arrastrada. Pero primero, solicitamos predicciones de la forma gráfica de la variación del área de ABC cuando AC cambia (es decir como una función de AC). La gran mayoría de los participantes (los estudiantes e igualmente profesores) predijeron una gráfica parabólica, apoyando sus predicciones al decir que el área inicial es 0 cuando AC es 0, esta aumenta a un máximo y luego decrece a 0, cuando AC es 10.

Schwarz y Hershkowitz (1999), informan que muchos estudiantes tienden a pensar en términos de dos funciones prototípicas: la lineal y la cuadrática. En esta situación problema particular, esto se manifestó explícitamente: una gráfica que describe un aumento de 0 hacia un máximo y entonces se devuelve a 0, debe ser una parábola. Posiblemente, cuando lo veamos, hay también una expectativa implícita de simetría. Se les solicita a los estudiantes usar el software para dibujar la gráfica y verificar la predicción. La Figura 7 muestra dos fotos estáticas de lo que pasa dinámicamente en la pantalla. Al arrastrar C posteriormente, la Figura 7 se convierte en la Figura 8.

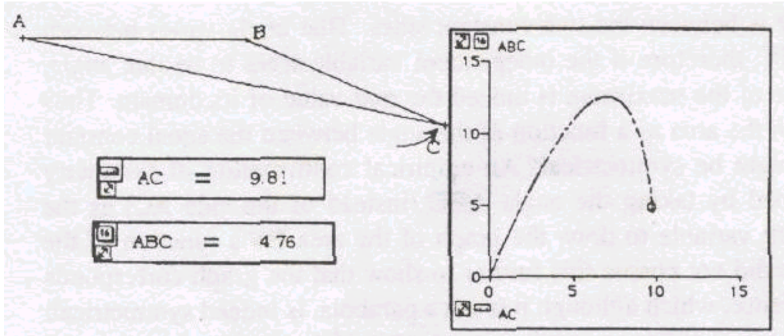

Figura 8. La asimetría de la gráfica.

En este punto, la mayoría se sorprendió al notar la aparente asimetría de la gráfica (con respecto a un eje de ordenadas), contra su expectativa explícita de una parábola, y proponer la pregunta de "¿por qué?" o "¿por qué no (simétrico)?"

En nuestros ensayos, la realización (y la explicación subsiguiente) de que el área máxima es alcanzada cuando triángulo es rectángulo, no se conectó explícitamente a la posible forma de un gráfico (y a que se debe esto?). Sin embargo, en contra del impacto visual de la asimetría del gráfico y la necesidad de explicarlo, y (en algunos casos) siguiendo nuestras preguntas ("¿que podría significar que el gráfico fuera simétrico? ¿En dónde estaría su máximo?"), se dirigió la atención a los valores de AC cuando se alcanza ese máximo. Como resultado, algunos concluyeron: entre otras cosas, la simetría del gráfico habrían implicado que el máximo está en el medio del dominio (AC = 5, particularmente cuando el triángulo es equilátero), pero esto ya estaba descartado. El máximo estaba en alguna parte - más allá de la mitad del dominio – cuando el triángulo es rectángulo, para el cuál el valor de AC es $\sqrt{5^2+5^2} \approx 7.07$ (hallado utilizando Pitágoras).

Para algunos, con esta explicación concluyo el asunto. Para otros (sobre todo los profesores), a pesar de entender la explicación de por qué el gráfico no puede ser simétrico, no se dió la explicación. Ellos sentían y expresaban incomodidad, por su impresión intuitiva de simetría, el cuál aunque se hacía explicita, era todavía fuerte. A lo mejor, se reforzó con lo que ellos habían encontrado sobre el área máxima, para el triángulo rectángulo, que parecía estar "intermedio" entre los valores extremos del dominio cuando se hacían los cambios dinámicos. Pensamos que necesitábamos dirigirnos a este problema, aun cuando no lo habíamos planeado hacerlo así. Por lo tanto sugerimos discutir la propuesta que a lo mejor es ciertamente algo simétrico. La discusión y el razonamiento se dieron más o menos como se sigue: para que el gráfico sea simétrico, es necesario que el valor de x para el área máxima corte el dominio de "la variable independiente" en dos mitades. Pero, el máximo se obtiene para un triángulo rectángulo dónde el el ángulo recto está entre los dos lados constantes. Ese ángulo varía entre 0° y 180°; por consiguiente si la variable independiente fuera ser este ángulo, el valor máximo de x es de hecho el valor medio de su dominio. Así, si graficamos el área como una función del ángulo entre los lados constantes iguales, ¡este podría ser simétrico! Una confirmación empírica de simetría se obtuvo tomando el ángulo ABC (en lugar del lado CA) como la variable independiente para dibujar el gráfico del área (como una función del ángulo). No se muestra que el gráfico correspondiente a y = 12.5sin *x*, el cual aunque no es una parábola, es de hecho simétrico.

En este caso, el cual animó a el análisis de la representación gráfica para facilitar la revisión del fenómeno. Esto conllevó a un conocimiento de propiedades que fueron inadvertidas por muchos (o incluso contra-intuitivas para algunos) al observar simplemente el propio fenómeno. Es más, podrían tomarse la realización de estas propiedades como un detonador para re-analizar las fuentes de una intuición fuerte (de algunos) que mostraron puede ser "equivocada" en algún sentido o "correcta" en otro.

Hasta ahora, la exploración de la situación, el cual aprovechó las características especiales del ambiente computacional, fueron basadas en:

(1) la manipulación dinámica de la propia situación (es decir, de arrastrar un vértice del triángulo y de dar cuenta/ conjeturar propiedades);

(2) Mediciones (que cambian en tiempo real a medida que el triángulo cambia y de esa manera es capaz de cuantificar el fenómeno visual observado);

(3) el gráfico (interpretando el gráfico como otra descripción de la situación ayuda a identificar las propiedades anteriormente inadvertidas); y

(4) preguntas, discusiones y reflexiones, basadas en gran medida en significados construidos por resultados que tenían diferencias con lo previsto.

Lo "ausente" de la actividad hasta aquí, fue la representación simbólica de la función que describe la variación del área de ABC como una función del lado variable AC. La representación simbólica del problema es ciertamente compacta, precisa y general ($A = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{4}$,donde x es la longitud de CA y A el área), y esto recoge toda la información que habíamos encontrado (el dominio, el co-dominio, la asimetría etc.). Sin embargo, si este problema se analiza inicialmente creando la representación simbólica, nos podríamos distanciar del propio fenómeno, para intentar descifrar de algún modo lo oculto de los símbolos.

Por ejemplo, considere hallar simbólicamente el máximo. En primer lugar, puede implicar conocimiento y habilidad en las técnicas algebraicas (posiblemente cálculo). En segundo lugar, tal tratamiento dirige la atención y la energía mental en varios problemas sintácticos, relegando u "olvidando" la situación de referencia durante algún tiempo, y en el mejor de casos, posponiendo el significado hasta que un resultado sea

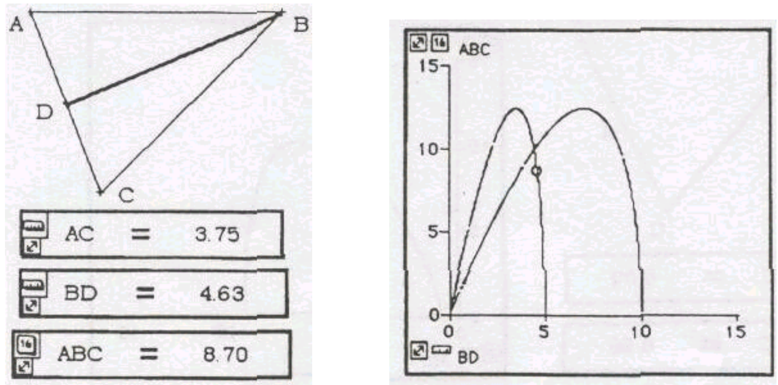

Figura 9. Las dos gráficas en yuxtaposición.

obtenido. Tal trayectoria no siempre permite levantar y discutir preguntas "por qué". En tercer lugar, la solución simbólica, por ser muy estática y de naturaleza general, parece absorber, y así se disocia de, lo visual y las perspectivas dinámicas del problema y los matices de este como fue descrito anteriormente.

En nuestros ensayos, introdujimos la representación simbólica *después* de que la investigación (descrita anteriormente) tuviera lugar. Con el ánimo de desarrollar el "significado simbólico" (Arcavi, 1994), el énfasis no se convirtió entonces en aprender sobre las condiciones de lo simbólico, pero sí principalmente en descifrar y rastrear como la información, que nosotros ya sabemos y esperamos, sea expresado en símbolos. Como lo veremos más adelante, en la próxima fase de la actividad, los símbolos, cuando se llega al final de la exploración, también estos pueden desempeñar una extensión, más explicativa e interpretativa.

El área del triángulo se exploró como una función de AC (lado variable) y también se hace referencia al área como una función del ángulo (entre los dos lados iguales). Por consiguiente, era natural proponer la exploración del área del triángulo, esta vez como una función de otra variable: su altura del lado variable (desde B hasta AC). ¿Cómo se vería el gráfico, simétrico o asimétrico?

Jugando con el software y mirando las medidas, muchos sugirieron que el gráfico podía ser como el gráfico del área una función de la base. Nosotros propusimos dibujar los dos gráficos en yuxtaposición como aparece en la pantalla Figura 9[1].

¿Algunos preguntaron por qué el gráfico del área como una función de la altura es más "delgada" que el otro? Y agregamos otros problemas para considerar, como:
¿los gráficos parecen alcanzar la "misma altura"? En ese caso, ¿Por qué, de otro modo, por qué no? ¿Cuál es el significado, en términos de la situación geométrica, del punto de intersección de los dos gráficas?

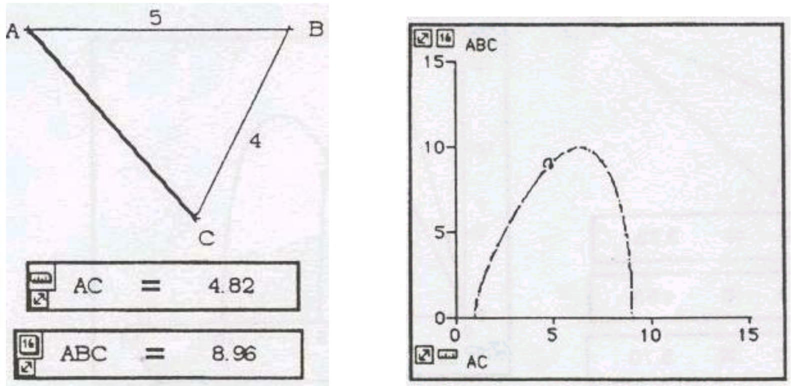

Figura 10. El área como una función del lado variable.

De nuevo, la observación de una cierta representación, en este caso el gráfico, preguntas propuestas cuyas respuestas deben buscarse en el fenómeno. Saltamos los detalles de la discusión de estas preguntas hasta aqui, para enfocarnos en el desarrollo la situación problema en donde creemos alcanza su "clímax".

3. LA SITUACIÓN PROBLEMA – SEGUNDA FASE

Siguiendo de nuevo con el enfoque "que pasa si?", la pregunta se vuelve: "hasta ahora, exploramos triángulos isósceles dónde los lados iguales tienen un valor fijo dado. ¿Qué pasarían si nosotros hacemos un "pequeño" cambio, de tal manera que el triángulo no sea isósceles, pero "cercano" a uno "que si lo es?"

El software permite hacer cambios que se propagan a toda la construcción para que sea realizada más fácilmente. Así, al emplear esta facilidad, propusimos cambiar únicamente uno de los lados fijos de longitud 5 a una de longitud 4 (dejando el otro con longitud 5). Explorando cómo el área varía como una función del lado variable llevada al gráfico en la Figura 10.

La pequeña sorpresa el cual exploramos aquí era que la gráfica "no empieza" en el origen. Sin embargo, la sorpresa más grande llegó en el próximo paso. Aquí de nuevo propusimos investigar el área como una función de la altura para el lado variable. La siguiente (Figura 11) es una serie de fotos de la gráfica a medida que es dibujada por el computador cuando el vértice C es arrastrado (el cual se inicia con triángulos con la altura en el interior).

La nueva gráfica parecía ser muy similar a aquellas previamente obtenidas. En algunos grupos de estudiantes, hicimos el arrastre para toda la clase. La expectativa general fue a favor de una figura similar a las obtenidas previamente (como en la Figura 9). Sin embargo, más allá del rendimiento de arrastre, es decir lo que vemos en la figura 12.[2]

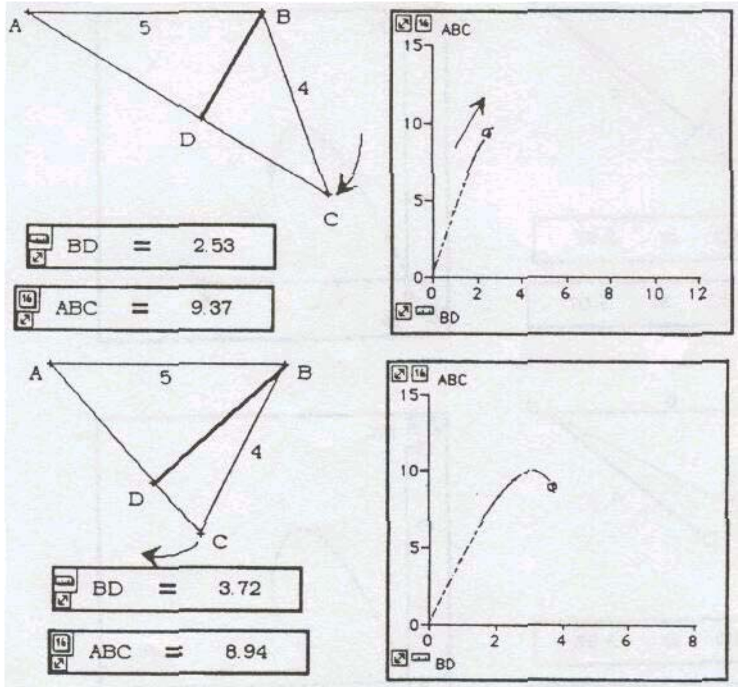

Figura 11. Las nuevas graficas del área como función de la altura.

La gran mayoría de profesores no estuvieron tan sorprendidos como los estudiantes, y la más frecuente espontánea exclamación que escuchamos fue: “:... ¡pero no es una función!”. Para muchos profesores, la “prueba de la línea vertical” visual para determinar si un gráfico es una función o no lo es, es una herramienta mucho mas usada y evocada, y los gráficos que no pasan la prueba son de alguna manera sospechosos (vea, por ejemplo: Even y Bruckheimer, 1998). Para otros, la gráfica “que va al revés” era la característica más sorprendente.

La pregunta inmediata (qué no necesitamos plantear) era “¿que es lo que esta pasando aquí?”

El primer paso que muchos participantes tomaron fue volver a hacer la situación, y percatarse que, en una cierta fase, la altura "se sale" fuera del triángulo (o hace saltos de afuera hacia el interior del triángulo). Aprovechamos la oportunidad para discutir por qué esto no había ocurrido en el triángulo isósceles. La altura que se sale a fuera fue sospechosa de ser de algún modo asociada al tipo de gráfica que era sorprendente. Otros asociaron esa observación a sus descubrimientos posteriores de que la altura no aumenta en todo su dominio, también “se reduce de tamaño” en algunas partes de este, lo que explica por qué la gráfica “retrocede”. Otros también notaron que el aumento y luego el decrecimiento de la altura (la variable independiente) genera dos valores diferentes del área para el mismo

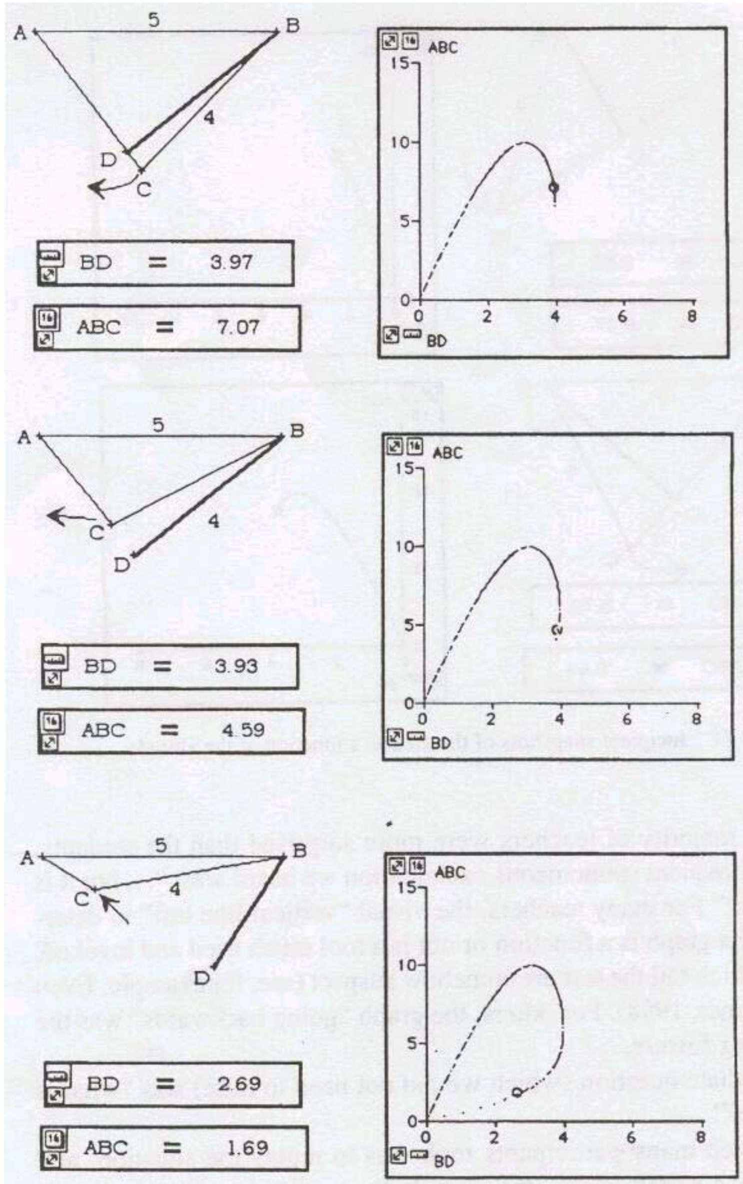

Figura 12. La gráfica que es sorprendente.

valor de la altura: si la altura está afuera del triángulo "la base" es mucho menor y así el área será mas pequeña, pero la misma altura puede estar dentro del triángulo, y esto ocurre para una "base" más grande, en cuyo caso el valor para el área es más grande (vea Figura 13). Encontramos estos tipos de explicación especialmente interesante porque:

(a) estos surgen después de jugar y de volver a hacer la situación geométrica dinámicamente, (b) estos están relacionadas estrechamente con lo

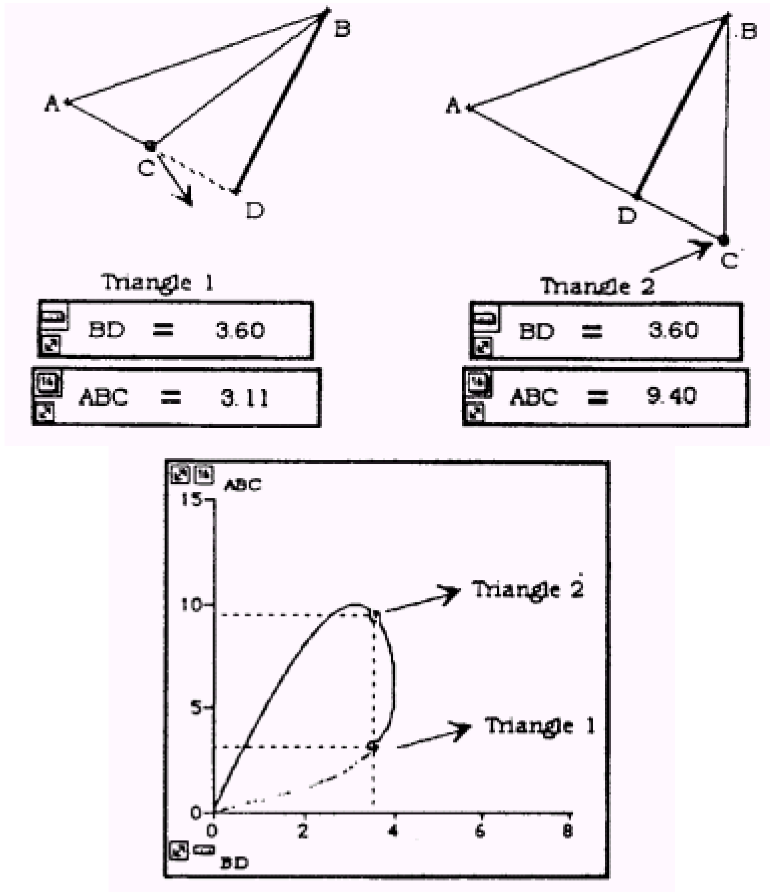

Figura 13. La explicación figural de la sorpresa

perceptual que experimenta la variabilidad el cual es el núcleo central de la idea de una función al describir una situación dinámica, y (c) aunque estos surgen de las observaciones empíricas, estos sirven como escalones para producir argumentos más generales y deductivos los cuales parezcan estar mas convencidos agradablemente.

En este momento, decidimos dedicar un tiempo a la creación y análisis de la representación simbólica, a la "repetición" con profesores y estudiantes de lo que les ocurrió cuando nos inventamos y pusimos en acto esta situación. Preguntamos (cuando nos preguntamos así mismos): "¿cómo los símbolos describirían esta situación?"

Para aquellos quienes produjeron/siguieron la explicación cualitativa geométrica, el proceso de modelar esta situación simbólicamente agregó otra nivel de significación. En primer lugar, se formalizo la explicación verbal hacia $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{BD} \cdot AC}{2} = \frac{BD(AD \pm DC)}{2}$. Esta formula que ayudo a revisar en símbolos como para la misma altura BD, uno consigue dos valores diferentes para el área (el cual fue la sorpresa gráfica): una vez, el área es calculada como la suma de dos triángulos con altura como lado común, y de nuevo, cuando la altura cae afuera, el área es calculada como la diferencia entre los dos triángulos (vea Figura 13).

En segundo lugar, al volver a escribir la fórmula en términos de la altura variable (x = BD) para obtener $A=\frac{x(\sqrt{25-x^2}\pm\sqrt{16-x^2})}{2}$, se convirtió en algo mucho mas claro, es decir, tenemos dos funciones que describen esta situación, para diferentes subdominios. Las gráficas de estas dos funciones "suavemente unidas" cuando la altura coincide con el lado de longitud 4 (el cual es precisamente el valor máximo de la altura). La substitución de ese valor en la expresión proporciona un mayor entendimiento que, en este caso, no hay ninguna suma o diferencia de dos triángulos, los cuales ya habían sido vistos gráficamente como "colapsándose" hacia un solo triángulo.

Los tópicos los cuales tratamos aquí consistieron en comparar, contrastar y movilizar de un lado a otro la situación geométrica, su representación gráfica y las expresiones simbólicas. Por ejemplo, ¿por qué 4 es el valor máximo para la altura a AC y cómo en la situación, la gráfica y los símbolos expresan todo esto? Ó, ¿Cuál es el significado geométrico de las funciones que se pegan muy suavemente? O, ¿que quiere decir que la gráfica siempre tenga (con dos excepciones) dos valores x para cada valor y y viceversa? O, ¿Qué ocurriría si nosotros fuéramos a considerar, por ejemplo, el área de ABC como una función de la altura a AB (el lado longitud 5)? Y así sucesivamente.

Vemos esta actividad de una manera similar a la que Dennis y Confrey (1996, pág. 35) describen en su perspectiva sobre la evolución de conocimiento en la historia de las matemáticas: "como la coordinación y contraste de múltiples formas de representación. ... que a menudo uno distingue una forma particular de representación como la primordial para la exploración, mientras que otra puede formar la base de la comparación para decidir si el resultado es correcto. La representación confirma que debe ser relativamente independientes o que contraste la representación exploratoria primordial. Esta debe mostrar el contraste, así como también la coordinación para la comprensión, que debe ser apremiante." Ellos afirman que, el sentido para ciertas representaciones esta desubicado y tergiversado para la mayoría de los currículos. Por ejemplo, "el plano Cartesiano es tratado predominantemente como un medio de presentación de las ecuaciones algebraicas". En cambio, en nuestro caso, el gráfico Cartesiano estaba expresando directamente características del fenómeno el cual requería explicaciones. Algunas de esas explicaciones se produjeron verbalmente al volver a observar el fenómeno. Éstos y otros fueron refinados y reproducidos cuando la representación simbólica fue introducida para contrastar, verificar y extender las comprensiones.

4. LA REFLEXIÓN

El problema que nosotros propusimos explorar es un caso en el cual se construyen los siguiente tópicos.

(1) El papel de las herramientas computarizadas

La existencia del computador plantea a los educadores matemáticos el desafió de diseñar actividades en las cuales aprovechen esas características con el potencial de apoyar nuevas maneras de enseñanza. En el caso específico nosotros reportamos aquí, lo que seria la posibilidad de representar gráficamente y dinámicamente y en tiempo real la variación de un fenómeno geométrico el cual parece prometedor.

Lo ejecutamos durante un tiempo hasta que trajimos a colación la idea de una colección de situaciones problema similar al descrito (Arcavi y Hadas, 1999). Así, en nuestro caso, el detonador para diseñar proyectos de exploración fue la disponibilidad de la herramienta y la ventaja de habernos ganado sus capacidades. Nos dimos cuenta de que tenemos un poderoso medio para estimular el aprendizaje del estudiante a través de investigaciones matemáticas, haciéndolas significativas, las cuales desde nuestra perspectiva se conectan fuertemente a las explicaciones producidas de los fenómenos inesperados, contando con los fenómenos mismos y las diferentes representaciones matemáticas de eso mismo.

Para nosotros, el encuentro con la herramienta surgió de nuestra comprensión de su necesidad. Al contrario, era un punto de partida para motivarnos a aparearlo en consonancia con nuestros puntos de vista del aprendizaje, y así investigar y diseñar situaciones problema consecuentemente.

(2) La matemática y la actividad matemática

Creemos que la situación problema descrita anteriormente y la manera en que la hemos llevado a cabo puede ser considerada como un ejemplo de hacer algo de matemáticas de una nueva manera, en lugar de hacer uso de la herramienta para aplicar "viejos enfoques" dentro de otro ropaje.
Imagine esta situación presentada en un trasfondo mas tradicional de papel y lápiz; por ejemplo, "¿Cuáles de esos triángulos isósceles cuyos lados iguales son de longitud 5 tienen el área mas grande?". Ó incluso de una manera un poco mas abierta: "Investigue el área de los triángulos isósceles con lados iguales de longitud 5." Es casi seguro que los símbolos serían lo primero, y si no, el único medio, que se haría uso (posiblemente con algunos dibujos imprecisos para apoyar el proceso de modelación). En nuestras experiencias, la gráfica fue producida y utilizada antes de su representación algebraica. Tanto la situación como su gráfica son parecidas en lo dinámico, toda la información recogida está íntimamente relacionada y expresada en términos de la situación original, y es colocada al servicio de una mejor comprensión. Esto esta en la traducción entre la gráfica y la situación más que en las sutilezas del fenómeno desarrollado. La ausencia inicial de la representación algebraica, no parece impedir un razonamiento matemático genuino y profundo.

Muy por el contrario, pretenderíamos que su ausencia ayude a tener presente que casi todo el tiempo el fenómeno modelado por las gráficas, nos evitaría estar distraídos por la manipulación simbólica la cual puede distanciarnos de los significados originales. Pero, cuando finalmente se introducen los símbolos, la “expresión algebraica revive..." (Noss y Hoyles, 1996, Pág. 245), a medida que es inspeccionada en las maneras en las cuales

(a) expresa la información que ha sido encontrada, y
(b) puede agregar una comprensión al análisis (como en la última fase anteriormente mencionada).

Así, la actividad ilustra nuevas maneras de hacer matemáticas, puesto que:

— Las exploraciones empíricas de los fenómenos geométricos pueden ser descubiertos al mirar muchos casos particulares y las transiciones dinámicas entre ellos. La observación puede no solo a ayudar a dar a conocer los patrones, sino también puede ser la fuente de la comprensión y significando, y sirve para tener las bases para demostrar y para fomentar la exploración.

— Tiene sentido que se de una situación geométrica mientras se ejecuta primero la misma situación, y luego por medio de la interpretación de sus representaciones (las gráficas, los símbolos), parece realzar tanto la comprensión de la situación como de las representaciones. El concepto de función, el cual modela la situación geométrica, recupera su dinamismo, como un modelo genuino para el cambio y la variación desde su representación gráfica que esta siendo producida en tiempo real describiendo el fenómeno que ocurre. Es más, la interacción entre la perspectiva global (el gráfico en conjunto, la fórmula como un objeto) y la perspectiva local de una función (la perspectiva de modo puntual de la función como una conexión procesal entre dos cantidades) se pone de manifiesto. De esta manera, los gráficos y las funciones son usadas tanto como objetos y como procesos (por ejemplo, Moschkovich et al., 1993) por medio de lo cual se piensa acerca de aspectos de la situación que son matematizados.

— El profesor, quien lleva esta situación problema al salón de clases para sus estudiantes o a para sus colegas , se vuelve un guía el cual plantea preguntas apropiadas en los momentos apropiados. Por ejemplo, el profesor

   (a) solicita predicciones en las cuales anime a los estudiantes a que tomen una postura sobre el problema y que sirva de fondo contra lo que se encargará de afrontar los resultados inesperados (por ejemplo “Predecir cuando área alcanza su máximo”, “Predecir la forma que tomará la grafica”);
   (b) se les pide a los estudiantes que sean explícitos sobre el por qué (o por qué no) de lo que ellos están viendo (por ejemplo “¿Por qué la grafica no se dobla para no ser simétrica”);
   (c) ayuda a hacer explícito y a encargarse de las intuiciones o conocimientos los cuales pueden ser la base de una predicción “incorrecta” (por ejemplo “¿que

significaría que el gráfico fuera simétrico? ¿Dónde estaría su máximo?”),

(d) dirige la discusión, propone nuevas preguntas, y promueve la coordinación entre las diferentes representaciones.

En otras palabras, la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no se acompaña por situaciones problema las cuales le efectúe un uso significativo. Sin embargo, cualquier currículo también requiere la implementación hábil del papel del profesor descrito anteriormente para ser fiel a su espíritu. En nuestro caso, esto implica involucrar el conocimiento del estudiante, haciéndolo explícito, fundamentando, y ayudando a los estudiantes a coordinar las piezas aparentemente desconectadas y conciliar inconsistencias aparentes.

— Las tareas como las descritas anteriormente, los límites entre las subdiciplinas matemáticas se torna confusas: las funciones describen fenómenos geométricos, las explicaciones geométricas surgen para explicar las características de una representación gráfica y simbólica de la función, y viceversa.

(3) ¿Una nueva manera de pensar?

Noss y Hoyles (1996, Pág. 240 ff.) describen tres enfoques completamente diferentes (producidos por un grupo de investigadores en educación matemática) para solucionar el mismo problema dos de los cuales son “computarizados”. Ellos reportan que aquellos que resolvieron el problema fueron sorprendidos por la “diversidad de conocimientos, estilos y soluciones” involucrados en cada enfoque. Ellos aseveraban que la elección del medio para solucionar el problema “media el rango de significados y conexiones los cuales son muy probable que estructuren la interacción, y los cuales son probables se provengan de el" (Pág. 245). Tal selección depende de la familiaridad, de la conveniencia y de la habilidad desarrollada durante años de trabajo en un mismo medio, y que gradualmente determina un enfoque preferido a los problemas.

En retrospectiva, vemos que es suficiente con lo que nosotros hemos experimentado. Nuestra propia práctica continua en un cierto ambiente computarizado, desempeña con las situaciones como lo descrito anteriormente, un resultado en el desarrollo de un enfoque con el cual empezamos a vislumbrar una tipo completo de problemas. Nos encontramos a nosotros mismos usando las gráficas Cartesianas para representar ciertas situaciones geométricas como una manera de provocar demostraciones y de obtener comprensión. Esta manera de pensar fue fortalecida posteriormente en el transcurso de la investigación y para el diseño de las situaciones problema geométricas en el proceso de crear la colección que nosotros desarrollamos.

El fundamento para el diseño fue con base en lo que creemos sobre el desarrollo de lo que es una buena comprensión matemática. Pero, más sutilmente, nos damos cuenta que estamos avanzando en un cierto enfoque, un cierto punto de vista, el cual desarrollamos después de tener muchas experiencias con el, y en el cual nos acarrea simpatizar.

Aunque un componente importante en la educación es acerca de la intervención y acerca de establecer un conjunto de valores para influenciar puntos de vistas y prácticas, muchas preguntas permanecen abiertas. ¿Estamos haciendo un uso racional del poder de decisión que nosotros, como profesores o diseñadores, tenemos que adelantar en ciertas prácticas mas que en otras? O, ¿Debemos hacer progreso en varios enfoques y dejar que los estudiantes escojan? ¿Pudiese no ser que las nuevas maneras no pareciesen emocionantes y significativas para nosotros, los diseñadores, debido a que los podemos disfrutar encontra del trasfondo de lo que ya sabemos, pero podría, ser a la larga menos, fructífero para muchos estudiantes?.

Proponemos que estos temas sean para retroalimentarlos y para reflexionarlos con base en el problema que aquí analizamos, y como base para la investigación posterior.

NOTAS

[1] Debido a que éste es una fotografía estática, se pone de relieve la última gráfica dibujado: el área como una función de la altura (el "punto que se mueve" está sobre el y la variable que aparece sobre el eje x es BD).

[2] Algunos estudiantes o profesores quienes lo hicieron por si solos, generaron la gráfica en la "dirección opuesta". Para ellos, el resultado final no fue ninguna sorpresa.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Arcavi, A. (1994).Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics 14(3): 24—35.

Arcavi, A. and Hadas, N. (1999). *On Geometrical! Change and Graphs***.** Rehovot**,** Israel**:** The Weizmann Institute of Science (In Hebrew).

Dennis, D. and Confrey, J. (1996). The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of John Wallis. *Research in Collegiate Mathematics. II.* CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 6 (pp. 33-60). AMS & MAA.

Dreyfus, T. and Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *International Reviews on Mathematical Education* 96(1): 1-5.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt and M. Santos (Eds), *Proc. 21st PME-NA Conference,* 1 (pp. 3-26).Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Even, R. and Bruckheimer, M. (1998). Univalence: A critical or non-critical characteristic of functions? *For the Learning of Mathematics* 18(3): 30-32.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Education Approach.* Reidel.

Geometry Inventor (1994). Logal Educational Software Lid.. Cambridge, Mass.

Hadas, N. and Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. In A. Olivier and K. Newstead (Eds), *Proc. 22nd PME Conference,* 3 (pp. 25-32). Siellenbosch, South Africa.

Hadas, N. and Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environments. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proc. 23rd PME Conference,* 3 (pp. 57-64). Haifa, Israel.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the international Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 70-95). Cambridge University Press.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A.H. and Arcavi A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations, and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds), *integrating Research on the Graphical Representation of Function* (pp. 69-100). Eribaum, NJ.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers.* Dordrecht: Kluwer.

Schwarz B.B. and Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? *Journal for Research in Mathematics Education* 30(4); 362-389.

Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy and B. Wilson (Eds), *The Geometric Supposer, What is it a Case of?* (pp. 57-84). Mahwah, NJ: Lawrence Eribaum.

Departamento de Ciencias de la Enseñanza
Instituto de Ciencia Weizmann
Rehovot, Israel