El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos

Abraham Arcavi
Instituto Weizmann
de Ciencias. Israel

La idea de «sentido de los símbolos» *proviene de distintas fuentes: desde el campo de la aritmética escolar hasta el campo del álgebra escolar, del libro* Acts of Mearnings *de Bruner, donde estipula que una cultura y la búsqueda de sus significados son las causas de toda acción humana, reconocida como la fuerza motriz de las actividades intelectuales y con la propia necesidad de identificar la búsqueda de significados para integrar en la enseñanza de las matemáticas.*
Con el objetivo de observar cómo ocurren estos procesos, recopilé ejemplos de conductas de alumnado y docentes sobre problemas algebraicos.

Palabras clave: *didáctica de las matemáticas, aprendizaje del álgebra, el sentido de los símbolos.*

The Development and Use of the Meanings of Symbols
The idea of the «meaning of symbols» comes from many sources, including the fields of school arithmetic and algebra. In his book Acts of Meaning, *Bruner states that a culture and the search for its meanings are the root causes of all human action. I identify this driving force behind intellectual activity with my own need to identify the search for meanings in order to integrate it into mathematics teaching. To observe how these processes occur, I gathered examples of students' and teachers' approaches to algebraic problems.*

Keywords: *mathematics teaching, learning algebra, the meaning of symbols.*

El sentido de los símbolos. Orígenes de la idea

La inspiración para proponer la idea de «sentido de los símbolos» (symbol sense) tiene varios orígenes:

- A partir de los trabajos realizados sobre el sentido de los números (number sense) en los años 80 y comienzos de los 90, parecía natural pensar en extender la idea del *sentido de los números* desde el campo de la aritmética escolar al campo del álgebra escolar. Algunos investigadores, como Fey (1990), comenzaron a desarrollar la idea.
- Bruner, en su libro *Acts of Meaning* (1990, p.20) estipula que una cultura y la búsqueda de los significados dentro de ella son las causas mismas de toda acción humana. Sfard (2003) afirma que la necesidad, culturalmente matizada pero esencialmente universal, de obtener significados y la necesidad de entendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea, han sido ampliamente reconocidas como las fuerza motrices básicas de todas nuestras actividades intelectuales.

- Mi convicción es que esta fuerza motriz no es el monopolio de unos pocos. Por lo tanto, en mi trabajo con alumnos y maestros de matemáticas (particularmente en álgebra) y con estudiantes no inclinados hacia las matemáticas (y que tienen dificultades con ellas), sentí la necesidad de identificar las formas que toma esa búsqueda de los significados, si acaso se puede desarrollar y cómo, y si es posible integrarla, fomentarla y apoyarla en la enseñanza.

Actualmente, parecería que hay un amplio acuerdo acerca de que construimos y reconstruimos los significados de maneras idiosincrásicas cada vez que aprendemos o manejamos ideas. Con la convicción de que es instructivo observar y tratar de entender cómo ocurren esos procesos, comencé a coleccionar ejemplos de conductas interesantes de alumnos y maestros trabajando sobre problemas algebraicos. El aprendizaje del álgebra siempre me ha interesado y estuve y estoy involucrado en trabajos sobre principiantes en el tema (véase, por ejemplo, Arcavi, 1995).

El sentido de los símbolos. En resumen

A partir de los ejemplos que he reunido, emerge un espectro amplio de interesantes formas de comprensión de los significados. Una destilación del núcleo de lo que observé me llevó a proponer una definición de «sentido de los símbolos». Una definición de este tipo puede pasar a ser un medio para captar la idea misma, refinarla y convertirla en operativa, sea como un marco para investigar aprendizaje (del álgebra) o como una herramienta para diseñar la enseñanza, o para ambos. Por lo tanto, la definición, lejos de ser fija o estricta, es más bien una herramienta de trabajo para estimular nuevas reflexiones.

En la lista siguiente, resumo las componentes más importantes del sentido de los símbolos (para una descripción más detallada, consultar Arcavi, 1994).

- *Amigabilidad con los símbolos*: Incluye la comprensión de los símbolos y un sentido estético de su poder; cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que, de otra manera, permanecerían ocultas e invisibles. Considérese, por ejemplo, los siguientes problemas:

Complete las celdillas vacías para obtener un 'cuadrado mágico' cuya suma es 9.

	3	
2		1

y

Complete las celdillas vacías para obtener un 'cuadrado mágico' cuya suma es 10.

	4	
2		2

En el primer caso, completar el cuadrado de tal manera que los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sumen 9 puede realizarse sin mayores problemas. En el segundo caso, uno cae muy pronto en la cuenta de que es imposible. La pregunta que emerge entonces es: ¿Cuándo estos arreglos numéricos «funcionan», es decir, producen un cuadrado mágico, y por qué? Descubrimos que la mayoría de los alumnos con considerable experiencia en álgebra no recurren a los símbolos como una herramienta que les permitiría investigar esta pregunta de manera general. A pesar de tener a los símbolos como una herramienta disponible, éstos no son invocados, a menos que alguien se los sugiera. Por lo tanto, una primera componente del sentido de los símbolos es tenerlos fácilmente disponibles para entender situaciones como la anterior, y tener la confianza implícita en que éstos son los utensilios apropiados. De alguna manera, y en contraposición con lo antedicho, el sentido de los símbolos debería incluir, a su vez, la sensación (o el presentimiento) de que en ciertas ocasiones los símbolos pueden constituir una opción engorrosa, y entonces pueden preferirse otros métodos u otras representaciones.

- *Capacidad para 'manipular' y también «leer a través» de expresiones simbólicas, como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos*: Por un lado, separarse de los significados y, al mismo tiempo, adoptar una visión global (*gestalt*) de las expresiones simbólicas, son condiciones necesarias para que las manipulaciones sean relativamente rápidas y eficientes. Por otro lado, la lectura de y «a través» de las expresiones simbólicas, con el objeto de captar significados, agrega niveles de conexión y razonabilidad a los resultados. Cuando observamos a alumnos trabajando en situaciones que involucran símbolos, en general presenciamos manipulaciones automáticas. No obstante, considérese el proceso de solución siguiente producido por un alumno al confrontarse con la ecuación:

$$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

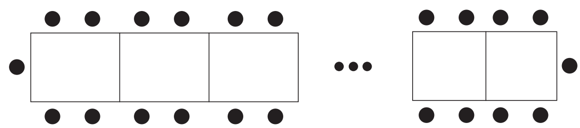
En lugar de abalanzarse para producir una solución, se detuvo para hacer una «lectura» de los símbolos. Él notó que el numerador es la mitad del denominador y por ende la fracción (en el lado izquierdo de la igualdad) nunca puede ser igual a 2, concluyendo que la ecuación carece de solución. No obstante, quiso intentar «resolver» la ecuación, usando las conocidas reglas sintácticas, para ver cómo los símbolos le confirmarían su hallazgo. Desafortunadamente, la manipulación técnica produce:

$$x=-1\,\frac{1}{2}$$

El alumno quedó desconcertado por unos momentos, hasta que intentó sustituir ese valor en la ecuación original. Fue entonces cuando notó que el valor hallado es precisamente el único que no es posible sustituir en la expresión simbólica (porque anula el denominador), y que esa es la manera en que el álgebra expresa la imposibilidad de solución. Tanto la inspección *a priori* de los símbolos para «sentir» el problema y su significado, como el intento de verificación y la comparación de los significados con el resultado de las manipulaciones *a posteriori* son ejemplos del sentido de los símbolos.

- *Conciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada* (véase, por ejemplo, la sofisticación del diseño de la expresión simbólica correspondiente a un gráfico imaginado y deseado, descrita en Arcavi, 1994, p.28).
- *Capacidad de seleccionar una posible representación simbólica (es decir, de elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección, prestarle atención e ingeniarse para buscar una mejor*: Por ejemplo, en el proceso de resolución de un problema, hacer una pausa para considerar si sería más conveniente representar tres números consecutivos como n, n+1, n+2, ó n–1, n, n+1 ó quizás como n–2, n–1, n (véase Arcavi, 1994, para ejemplos más elaborados).
- *Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la re-*

solución de un problema o durante la inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones (o premoniciones) acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema. Considérese, por ejemplo, los problemas del tipo usado en varios textos al comenzar el estudio del álgebra para ejercitar la acción y el lenguaje de las generalizaciones numéricas. Uno se esos problemas requiere expresar la cantidad de sillas necesarias para acomodarlas alrededor de n mesas, de la siguiente manera:



Algunos alumnos propondrán la expresión $4n+2$, o la expresión $1+2n+1+2n$. Una actividad que relacionamos con el sentido de los símbolos sería la «operación inversa», que podríamos llamar «desmodelización», y que consiste en lo siguiente: un alumno produjo la expresión $4(n-2)+10$. Reconstruyamos el proceso de conteo que se utilizó para generarla. Esta actividad implica la revisión de un resultado simbólico para recuperar sus significados o sus orígenes.

- *Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias*. Considérese los distintos roles que pueden desempeñar las variables y los parámetros, y los distintos «tiempos de sustitución». Por ejemplo, en el caso de la expresión general de funciones lineales $y=ax+b$, tanto x,y (las variables) como a,b (los parámetros) representan números, pero los objetos matemáticos que uno obtiene al efectuar la sustitución son muy diferentes. En términos del plano cartesiano, sustituir valores para x,y fija un punto del conjunto de todos los puntos, mientras que sustituir valores para a,b fija una línea (o una función lineal) del conjunto de todas las líneas posibles. Así, $y=b$ puede interpretarse de dos maneras diferentes: si fue el resultado de haber sustituido $x=0$ (en $y=ax+b$), o si fue el resultado haber sustituido $a=0$ en ($y=ax+b$). En el primer caso, encontramos la ordenada (general) de un punto cuya abcisa es 0. En el segundo caso, encontramos la ecuación de una recta (general) cuya pendiente es 0. Sugerimos que distinguir esta multiplicidad de significados que pueden tener los símbolos dependiendo del contexto y la capacidad de manejarlos es una componente del sentido de los símbolos (para más ejemplos, véase Arcavi, 1994 y Moschkovich, Schoenfeld, Arcavi, 1993).

Algunas cuestiones a considerar

La idea de «sentido de los símbolos» abre varias cuestiones para la reflexión, la discusión y la investigación. Por ejemplo:

- *La caracterización de la idea no está completamente desarrollada*: Una posibilidad consistiría en aumentar la colección de ejemplos para las componentes/categorías ya existentes, reexaminar la colección de ejemplos para proponer una lista más extensa de categorías, y convertirla en un marco operativo tanto para la investigación como para el diseño de la enseñanza. O, alternativamente, disputar la idea desde cualquier punto de vista.
- *¿Cómo se desarrolla en los expertos en sentido de los símbolos?*: ¿Es una cuestión innata o adquirida? Si es adquirida, ¿cuáles serían los roles de la enseñanza?, y ¿acaso podríamos considerar el sentido de los símbolos no sólo como una aptitud de expertos sino esperarla también de los novicios, y en qué medida?
- *¿Cuál sería el conocimiento subyacente que se requiere para desarrollar el sentido de los símbolos?*: ¿Cuál es el rol de la manipulación técnica de los símbolos? ¿La práctica repetitiva de la técnica algebraica precede, es paralela, o impide el desarrollo del sentido de los símbolos?

Me concentraré en las dos últimas cuestiones, no sólo para proponer algunas respuestas incipientes y parciales, sino para aguzar las preguntas.

¿Cómo se desarrolla en los expertos el sentido de los símbolos?
Para comenzar, consideremos la dicotomía: ¿es una cuestión innata o adquirida? ¿Es el sentido de los símbolos algo que sólo los matemáticamente dotados desarrollan por ellos mismos a través de la práctica o del uso de su perspicacia, o, en cambio pueden casi todos (si no todos) desarrollarlo, aunque sea parcialmente? ¿Se puede enseñar el sentido de los símbolos?

En mi opinión, ser educadores matemáticos, significa, por lo menos en parte, diseñar, implementar y comprobar intervenciones con el objetivo de maximizar el potencial de aprendizaje de los alumnos. Por lo tanto, debemos hacer hincapié en lo que se puede aprender, en lugar de sucumbir a la visión fatalista de que nacemos con capacidades innatas y que poco o nada podemos hacer al respecto mediante la educación.

Aun habiendo dicho esto, creo que puede ser muy instructivo observar a personas matemáticamente competentes y considerar cómo ellos desarrollan o despliegan sentido de los símbolos.

Los siguientes datos han sido recogidos durante un estudio piloto (Naftalis, 2003) destinado a investigar diferentes abordajes de alumnos para resolver problemas sobre extremos (máximos y mínimos) durante el estudio del cálculo infinitesimal en los cursos superiores de escuela secundaria. Más específicamente, este estudio buscó y registró ejemplos acerca de dónde, cuándo y cómo distintos alumnos desplegaron su sentido de los símbolos (o, en general, sus capacidades de buscar significados) mientras resolvían ese tipo de problemas.

Considérese el siguiente problema:

> Dada la función:
>
> $$f(x)=\frac{1}{x}$$
>
> P es un punto en el gráfico de la función (en el primer cuadrante). La recta tangente al gráfico en P crea, con los ejes cartesianos, un triángulo rectángulo. ¿Cuáles deben ser las coordenadas de P, para que la hipotenusa de ese triángulo tenga longitud mínima?

De acuerdo al currículo israelí, este tipo de pregunta es bastante común en los textos de cálculo para el nivel avanzado de los últimos años de la escuela secundaria. Modificamos levemente esta versión de la pregunta por la siguiente: ¿Cuáles deben ser las coordenadas de P, para que la hipotenusa de ese triángulo tenga longitud mínima/máxima? Lo hicimos porque la versión tradicional no deja al alumno la posibilidad de decidir por sí mismo de qué tipo de extremo se trata, y le revela, sin ninguna explicación, que el extremo buscado es un mínimo. En nuestra opinión, eso lo priva de la oportunidad de apreciar a fondo la situación del problema. El tener ante sí una doble posibilidad constituye un estímulo indirecto para que el alumno pueda considerar las condiciones del problema y decidir por sí mismo qué tipo de extremo debe buscar y por qué.

IA, un estudiante competente en matemáticas, dotado con las más altas calificaciones del curso más avanzado de cálculo de una prestigiosa escuela secundaria, fue uno de los entrevistados. La entrevista tuvo lugar un año después de haber finalizado sus estudios secundarios, y sin que, desde entonces, él hubiera tomado ningún curso de matemáticas.

Lo primero que dijo fue, «veamos qué ocurre aquí» y procedió con su solución, que consistió en los siguientes pasos:

1. Esbozó el gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$ en el primer cuadrante, marcó un punto arbitrario $P(x_0,y_0)$en el gráfico, trazó la tangente que pasa por ese punto, y destacó los puntos de intersección (con los ejes coordenados); así obtuvo un bosquejo genérico de las hipotenusas buscadas

2.Anotó la derivada de la función $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ para encontrar la pendiente de la recta tangente, y, en base a la pendiente y al punto, formó la ecuación de esa recta así:

$$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}\ (x-x_0)$$

3. Buscó las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, sustituyendo en la ecuación, y halló $(2x_0, 0)$ y (0, $(0, \frac{2}{x_0})$
4. Calculó la longitud del segmento comprendido entre esos puntos, que es la hipotenusa buscada, y estableció la expresión general:

$$g(x)=\sqrt{4x_0^2+\frac{4}{x_0^2}}$$

Todo este proceso lo realizó sin errores. Cuando tuvo la expresión de la función, se detuvo para pensar si estaba buscando un mínimo o un máximo para esa función, y se dirigió al gráfico por segunda vez. La primera vez, IA usó el gráfico como un instrumento para organizar y planear los pasos de su trabajo. Cuando necesitó tomar la decisión sobre qué tipo de extremo buscar, volvió a observar el gráfico por segunda vez, pero con un propósito distinto. Esta vez el gráfico fue un instrumento operativo para entender a fondo la situación. IA «jugó» con el gráfico para ver cómo varía la tangente para diferentes puntos, y después de un momento, llegó a la conclusión de que el valor buscado es un mínimo, que ocurre cuando la tangente pasa por el punto (1,1). IA dijo, «podía haberlo resuelto usando el sentido común y la idea de simetría, sin ningún tipo de cálculo, porque en esa dirección, cuando x tiende a infinito, [la longitud del segmento] crecerá todo el tiempo, y también aquí [señalando el valor de y cuando tiende a infinito]. Por eso habrá un mínimo en (1,1)». Yo actué como su entrevistador, y, a esas alturas, mi curiosidad fue saber qué lo llevó a dirigirse al gráfico por segunda vez. Dado mi interés en el sentido de lo símbolos, quise saber si él «vio» algo en la expresión de la función $g(x)$, y quiso visualizarlo en el gráfico. Me respondió que no vio mucho en los símbolos, pero cuando quiso buscar la derivada de la función e igualarla a cero, para iniciar la búsqueda del extremo, cayó en la cuenta de que no sabía si estaba buscando un máximo o un mínimo, y que quizá igualando la derivada a cero daría una ecuación con más de una solución. IA quería saber cuál de esas soluciones correspondería a un máximo o a un mínimo (la forma en que él leyó el problema era que podría haber ambos tipos de extremo). Cuando le pregunté por qué no hizo ese análisis desde el principio, su respuesta fue sorprendente: «Tengo un amigo que siempre hace eso [juega con el problema para encontrarle algún sentido], y, después de tal esfuerzo, en general, no tiene ni tiempo ni energías para embarcarse en una solución simbólica, no se le reconoce lo que pudo haber hecho, y fracasa en los exámenes. Si no tengo necesidad, yo me ocupo solamente de los símbolos, que es lo que la maestra y el examen quieren». Especulamos que, si el problema le hubiera sido dado sin la pequeña modificación, es decir, si el problema hubiera requerido directamente hallar el mínimo, él hubiera continuado su trabajo formal sin detenerse, y quizá sin mirar por segunda vez el gráfico, para entender la situación con su sentido común. Este tipo de actividad es percibido por él como no remunerable en la cultura del aula de la que él provenía. Tal como lo mencionamos más arriba, esta entrevista fue llevada a cabo un año después de su finalización escolar, sin que en él hubiese estudiado o practicado matemáticas de este tipo. Además, él no estaba en una situación de examen y, sin embargo, resolvió el problema guiado por los patrones de conducta matemática desarrollados en su clase. Aparentemente, estos hábitos estaban bien enraizados en su quehacer matemático: él tenía un camino seguro, un plan bien diseñado, que incluía procedimientos simbólicos a seguir, y eso es lo que uno supuestamente *debe* hacer. Sus capacidades de emplear su sentido común y relacionarse con los significados estaban latentes y, sin embargo, no fueron invocadas hasta que no le fue absolutamente necesario. Algo en el enunciado del problema lo obligó a recurrir a su sentido común, que de otra manera hubiera permanecido aletargado porque él estaba acostumbrado a relegarlo por no ser redituable.

Este ejemplo está muy lejos de proveer una respuesta a la pregunta de cómo desarrollan los expertos su sentido de los símbolos. No obstante, nos aporta algunas ideas acerca de qué implica apoyar y estimular su desarrollo. En mi opinión, este ejemplo ilustra que el desarrollo del hábito de usar el sentido común y buscar significados está fuertemente ligado a la cultura de aula que lo apoya o lo suprime, y por lo tanto, no es necesariamente una cuestión de habilidades matemáticas innatas. Una conclusión posible es que debemos redirigir nuestra atención hacia lo que nuestras prácticas de aula recompensan. Por lo tanto, desarrollar un sentido de los símbolos, o un sentido de significados en general, ciertamente va más allá de lo puramente cognoscitivo. Está conectado a lo que se espera que uno produzca, a lo que es valorizado, a lo que es aceptado como las «reglas del juego», además de la manipulación simbólica.

Esta conclusión no es una noticia que merezca titulares. Pero es importante comentarla porque es consonante con muchos otros resultados de investigación, que colocan a la cultura del aula como un factor crucial de lo que se aprende y lo que se desarrolla. Más allá de eso, puede tener implicaciones para apoyar el desarrollo de sentido de los símbolos, colocándolo una y otra vez en un primer plano; por ejemplo, solicitando a los alumnos que desarrollen el hábito de no abalanzarse sobre los símbolos desde un primer momento, sino de mirar el problema con sentido común, esbozar un gráfico o una figura, estimular la descripción lo que ven y razonar sobre ello. Si los alumnos tienen dificultad en producir razonamientos informales, debemos mostrarles cómo esos razonamientos son producidos, y qué se puede ganar con ellos. Si los alumnos no viven esas actividades, o si no se provee a esas actividades de un «sello de aprobación», en el mejor de los casos el uso espontáneo del sentido común y la búsqueda de significados quedarán relegados a una prioridad inferior (como en caso de IA) o no ocurrirán del todo.

Como ya hemos dicho, estamos lejos de una respuesta satisfactoria a la pregunta «¿cómo se desarrolla el sentido de los símbolos?». Sin embargo, es posible que hayamos avanzado algunos pasos en la dirección correcta al proponer que el sentido de los símbolos sea cultivado, y una condición necesaria para ello es proporcionar prácticas de enseñanza apropiadas.

¿Cuál sería el conocimiento subyacente que se requiere para desarrollar el sentido de los símbolos?

Esta pregunta implica lo siguiente: ¿Cuál es el rol de la manipulación técnica de los símbolos? ¿La práctica repetitiva de la técnica algebraica precede, es paralela, o impide el desarrollo del sentido de los símbolos? Estas cuestiones parecerían llevarnos a una serie de respuestas de orientación cognoscitiva.

Empezaré con una conclusión general, quizá trivial, que sugiero elaborar a partir de nuestra propuesta de caracterización del sentido de los símbolos: ser competente en álgebra escolar implicaría, entre otras cosas, el ejercicio de una transición bidireccional, oportunista y flexible entre el uso de acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos) y la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados (en alguna de las maneras mencionadas anteriormente, u otras).

Dicho de otra manera, la competencia incluiría:

- La oportuna postergación de los significados a favor de una aplicación rápida y eficiente de un procedimiento, pero también, cuando sea necesario o cuando uno lo desee, proceder a:
  - La interrupción de una rutina automática con el objeto de cuestionar, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados; o como lo expresaría Freudenthal, «desatascar un automatismo», para descubrir su origen, su significado y su propósito (Freudenthal, 1983, p.469).

Las transiciones significativas y flexibles entre acciones caracterizadas como pobres en significados, así como aquellas en que los significados juegan un papel central (y viceversa), constituyen la componente central de la competencia en el álgebra escolar. Esto no es de ninguna manera una respuesta a las preguntas anteriores, pero, en mi opinión, nos señala un camino no necesariamente simple. ¿Cómo desarrolla y aplica uno ese tipo de flexibilidad? Sfard (2000), buscando explicar por qué las matemáticas son tan difíciles para tantos, describe la siguiente circularidad: si el significado es función del uso, uno debe manipular un concepto para entenderlo (en nuestro caso, manipular símbolos para «sentirlos» y sentir qué pueden hacer por nosotros), pero, por otro lado, ¿cómo podemos usar algo sin entenderlo (o sin sentirlo)? Sfard afirma que es precisamente esa circularidad la que constituye una seria trampa para los alumnos, aunque es al mismo tiempo el combustible del proceso de aprendizaje. Sfard dice que, en este proceso, las formas y los significados, tal como son practicados y vivenciados por los alumnos, serían como dos piernas que hacen posible el caminar hacia adelante debido a que no están nunca en el mismo lugar, y, en cada momento, una de ellas está por delante de la otra.

Si adoptamos esta bonita metáfora, entonces es muy posible que el desarrollo del sentido de los símbolos, en lugar de estar mayormente ligado a capacidades cognitivas, esté también ligado a las actitudes que tengamos hacia el conocimiento y el aprendizaje. Lo que se desprende, por encima de todo, es que uno debe desarrollar la suficiente paciencia como para convivir en armonía con la comprensión parcial y con la idea de que, a veces, los significados emergerán de lo que no tiene significado para nosotros (por ejemplo, como resultado de una práctica repetitiva, pero dentro de una cultura que apoya ocuparse de los significados). Otras veces, lo que carece de significado puede ser un subproducto, o una condensación de una acción enriquecida de significados, que aspiramos a automatizar para su efectivo uso futuro, aliviando así la carga de nuestras memorias activas.

Esta idea se corresponde con resultados de otros investigadores. Por ejemplo, Tobias (1990) investigó por qué reconocidos eruditos en el campo de las humanidades no eligieron el campo de las ciencias. Entre otras cosas, ella descubrió que parte de la respuesta puede estar relacionada con la capacidad, o su ausencia, de convivir con la comprensión parcial durante largos períodos de tiempo, hasta que los significados se conectan haciendo posible el surgimiento de una visión global. Parece que este es un ingrediente esencial del aprendizaje exitoso de las ciencias.

Esto nos lleva a incluir, dentro de la competencia matemática, a la paciencia intelectual con la comprensión parcial y la confianza de que acciones futuras (no sabiendo necesariamente de antemano cuáles y cuándo ocurrirán) avanzarán nuestro conocimiento. Esto implica tener una imagen muy distinta de aquella que considera al aprendizaje, y quizá también lo populariza, como una empresa sin esfuerzos. Considerar el estado de la comprensión como algo dicotómico (o se posee o no se posee), y considerar el aprendizaje como un camino rápido para obtenerla, son aspectos que pueden obstaculizar nuestro progreso. Convicciones como estas no dan lugar al espacio y al tiempo necesarios para vivenciar y desarrollar el sentido de los símbolos, o cualquier otra construcción de significados.

¿Qué podemos hacer?

Ciertamente, al tomar conciencia de los dos puntos elaborados anteriormente, hemos avanzado algo. ¿Cómo traducir todo esto a prácticas de enseñanza que promuevan y estimulen el desarrollo de sentido de los símbolos? ¿Qué podemos hacer con los principiantes y con aquellos que no tienen orientación hacia las matemáticas? ¿Y cómo apoyar la paciencia intelectual que se requiere?

En un estudio piloto que hemos hecho en estudiantes de 13-14 años de edad, en una escuela que enseña matemáticas en distintos niveles, diseñamos una actividad especial para introducir la idea de inecuación simple y su notación simbólica. El plan de la lección se inspiró en la filosofía de la escuela holandesa de las «matemáticas realistas». La lección comenzó con una fotografía de un vehículo entrando en un túnel, en el que había un cartel indicando «2,90». Se les preguntó a los alumnos el significado que le atribuían a ese número. Ellos propusieron que el número se refería al peso de los vehículos que pasaban, a su anchura, a su altura, y también intercambiaron ideas sobre las unidades de medida. Cuando los alumnos se pusieron de acuerdo en que el número indicaba la altura máxima que podía tener un vehículo para poder entrar en el túnel, algunos de ellos comenzaron a estimar alturas de diferentes camiones que conocían para saber si pasarían por ese túnel. La maestra les pidió ejemplos de alturas de vehículos que podrían pasar y alturas de aquellos que no, con el objetivo de enfatizar la idea de que se trata de un dominio de números. La discusión fue muy animada, y en parte se centró en aquellos vehículos con alturas muy próximas a 2,90 metros. En cierto momento, un alumno dijo «todas las alturas por debajo de 2,90». La maestra aprovechó la oportunidad y preguntó: «¿puedes escribirlo de una manera matemática?»

Como los alumnos estaban familiarizados de alguna manera con las notaciones algebraicas, uno de ellos sugirió x<2,90. La maestra preguntó: «¿qué representa la x?» y los alumnos respondieron: «la altura». La maestra preguntó si había otra forma matemática para expresar esta idea. Ella tenía en mente la línea numérica, que sabía que los alumnos conocían. Sin embargo, un alumno propuso y<2,90. Para un experto, y<2,90 y x<2,90 es la misma representación, y es irrelevante que la letra sea diferente. Para estos alumnos, estas constituían dos maneras diferentes de expresar la misma idea, y no hay ninguna razón para que aquellos que recién se inician en la «cultura» simbólica y los correspondientes hábitos de representación piensen distinto.

Se puede debatir cuál sería la intervención más apropiada de un maestro en estas circunstancias, posiblemente nada más que una expresión de conformidad y un pedido subsiguiente de encontrar aún otras formas de representación. Una «mini-conferencia» por parte del maestro, enseñando que, al hacer uso de una u otra letra, estamos usando la misma representación puede resultar inefectiva en este contexto. Aún así, este tipo de «conferencia» suele ser frecuente, y de esta manera, quizá se contribuya involuntariamente a estimular la impaciencia de los estudiantes. Conversando con muchos maestros buenos y responsables, se percibe una necesidad imperiosa de «cerrar» lo que se trata en una clase, y hay quienes consideran hasta inmoral dejar asuntos no resueltos «suspendidos en el aire». Ellos sienten que se debe aclarar lo que piensan que son incertidumbres. Esta «falta de resuello», o mejor dicho, esta necesidad de «cierre» inmediato (aún con las mejores intenciones pedagógicas) puede alimentar la impaciencia de los estudiantes, fortaleciendo subrepticiamente la convicción de que sin las aclaraciones «de rescate» proporcionadas por el maestro en el momento, uno no podrá nunca arreglárselas por sí mismo.

Volvamos a nuestra clase. Como los alumnos no produjeron otra representación, pero la maestra sabía que ellos estaban familiarizados con la línea numérica, la propuso ella. Cuando lo hizo, los alumnos señalaron el origen y 2,90 y remarcaron el segmento entre ambos. La maestra les preguntó si ellos pensaban que x<2,90 y lo marcado en la línea numérica «decían lo mismo». En nuestra opinión, esta pregunta es una intervención apropiada: por un lado, por considerar a las matemáticas como una manera de expresar una idea o proposición y discutir esas maneras explícitamente, y por el otro, por aportar a los alumnos una oportunidad para expresar libremente cómo perciben los símbolos en comparación con otras representaciones.

Este tipo de conversación y reflexión meta-matemática puede llevarse a cabo muy temprano (incluso antes de embarcarse en procedimientos), y, si es repetida juiciosamente, puede ser un apoyo para el desarrollo de ciertos aspectos del sentido de los símbolos. Uno de los asuntos que la maestra tenía en mente cuando hizo la pregunta era que, en la línea, los alumnos remarcaron el lugar del cero, señalando el segmento entre cero y 2,90, mientras que en $x<2{,}90$, se omitió involuntariamente el hecho de que x debe representar, en este caso, un número positivo. La siguiente respuesta fue totalmente inesperada. Una alumna, dijo, con mucha convicción:«$x<2{,}90$ muestra algo, un algo menos que 2,90, pero la línea muestra todos los números al mismo tiempo[1]». Esto constituye una verbalización explícita de la forma en que esta alumna percibía los símbolos en este caso.

El comentario surgió porque a los alumnos se les dio lugar para expresar sus percepciones, incluyendo sus preferencias por una u otra representación. Posiblemente, este incidente (si es seguido de otros similares) le daría a esta alumna buenas oportunidades de desarrollar aspectos del sentido de los símbolos y de dialogar acerca de ellos. Como esta actividad le permitió hacer uso de otra representación para expresar una generalización, ella (y ciertamente nosotros como maestros) podemos coexistir con la visión parcial de lo que x<... significa para ella. Dada la conversación precedente en el aula y sus actividades previas en la clase, la alumna sabía que, en este caso, hay más de un número que uno puede sustituir en lugar de x, no obstante ella dijo que en esta forma no «podía ver» más de un número de una vez.

Quizá no debamos atribuirle demasiadas moralejas a este ejemplo, pero creo que nos ilustra que la enseñanza puede:

- Reconocer el potencial de las situaciones relacionadas con el sentido de los símbolos,
- Hacerles un lugar en la conversación de aula,
- Estimular la expresión de percepciones subjetivas acerca de los símbolos,
- Respetar y estimular ideas parcialmente desarrolladas,
- No siempre darse prisa para obtener «cierre».

El sentido de propósito de los símbolos

Recientemente, el Proyecto 2061[2] ha evaluado textos actuales de álgebra en los Estados Unidos, pertenecientes a proyectos curriculares (especialmente aquellos que allí se consideran orientados a la reforma de la enseñanza). Entre los criterios que ellos establecieron para la evaluación, uno de los primeros es «identificar un sentido del propósito». La mayoría de los textos fue evaluada como pobre en relación a este criterio.

Una manera de interpretar este criterio es evaluar cómo los materiales de estudio embarcan a los alumnos en actividades en las cuales ellos pueden identificar el propósito de los utensilios que están aprendiendo a usar. En particular, ¿cuál es el propósito del uso de los símbolos? Una manera de compartir con los alumnos ese propósito es a través de actividades en las que los símbolos hagan sentir a los alumnos que están ganado comprensión de una situación y adquiriendo poder sobre ella.

El siguiente ejemplo (véase Arcavi, 2002) puede ser ilustrativo. Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra de matemáticas estaba desconforme con las calificaciones de los alumnos en un examen sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas habían sido un tanto difíciles. Por lo tanto, la maestra decidió «ajustar» esas calificaciones usando un factor de corrección: si la calificación original era x (en una escala de 0-100), ésta devendría $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es común entre los maestros en Israel. Esta situación presenta una multitud de cuestiones interesantes a explorar (usando como herramientas precisamente la noción de función y sus representaciones simbólicas y gráficas). Por ejemplo:

- ¿Hay alumnos a quienes no afecta la corrección, es decir, reciben la misma calificación antes y después de aplicar el factor?
- Aplicando el factor, ¿todas las calificaciones reciben un incremento? ¿Por qué?
- ¿Qué calificación recibe el incremento mayor?
- ¿Es este factor de corrección equitativo, o hay quien se favorece más que el resto?
- ¿Cómo se compara este factor con otros, por ejemplo, incrementar cada calificación en 10 puntos, o en un 20%?
- ¿Puedes construir un factor de corrección que te parezca justo y explicar las razones de tu elección?

Lamentablemente, en la clase que nos sugirió esta idea, estas cuestiones no se discutieron. Consideramos que esta hubiera sido una excelente oportunidad no solamente para aplicar los conocimientos sobre función (nótese que ese era precisamente el tema del examen), sino principalmente para vivenciar cómo las herramientas matemáticas nos permiten ganar comprensión y poder sobre una situación-decisión que afecta a nuestras vidas y que es muy difícil explorar sin usar los símbolos y los gráficos.

Se pueden diseñar muchas actividades destinadas a desarrollar el sentido de propósito de los símbolos. El diseño y su implementación en el aula constituyen un desafío interesante y no trivial para los que desarrollamos currículo, aún en los comienzos del álgebra, si no antes (véase, por ejemplo, el estudio descrito en Arcavi, 1995).

A modo de breve (y ciertamente parcial) conclusión

Este artículo es sólo un modesto intento de comenzar a responder a la pregunta de cómo podríamos apoyar el desarrollo del sentido de los símbolos en nuestros alumnos, tratando de describir las cuestiones más importantes que están en juego. Una de ellas, por ejemplo, se refiere a materiales de estudio y prácticas de aula que se centren en cultivar:

- La búsqueda de los significados de los símbolos, en paralelo y a continuación de la solución de problemas (rutinarios o no), y también antes de proceder a la aplicación automática de reglas.
- La paciencia necesaria para el aprendizaje en general, y más concretamente, la capacidad de aceptar comprensiones parciales.
- El sentido de propósito del uso de las símbolos y el poder que su uso y comprensión nos confiere sobre una multitud de situaciones.

Notas

1. Sugiero, aunque no tengo datos para confirmarlo, que la expresión matemática más completa no hubiera ayudado mucho en este caso.

2. El informe completo puede localizarse en <http://www.project2061.org/publications/articles/textbook/hsalg/criteria.htm>

Referencias bibliográficas

ARCAVI, A. (1994): «Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics» en *For the Learning of Mathematics*. 14(3), pp. 24-35.

ARCAVI, A. (1995): «Teaching and learning algebra: past, present and future» en *Journal of Mathematical Behavior*. 14, pp. 145-162.

ARCAVI, A. (2002): «The Everyday and the Academic in Mathematics" en BRENNER, M.; MOSCHKOVICH, J. (Eds.) *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom.* A Monograph of the Journal for Research in Mathematics Education, pp. 12-29.

BRUNER, J. (1990): *Acts of meaning.* Harvard University Press.

FEY, J. (1990): «Quantity» en STEEN, L.A. (Ed.), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy.* National Academy Press, Washington, D.C., pp. 61-94

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel Publishing Company.

NAFTALIS, I. (2003): *Extremum Problems in High School.* Unpublished Master's Degree Thesis (in Hebrew). Deaprtment of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.

SFARD, A. (2000): «Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other» en COBB, P.; YACKEL, K.E.; McCLAIN, K. (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design.* Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 37-98.

SFARD, A. (2003): «Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics» en KILPATRICK, J.; MARTIN, G.; SCHIFTER, D. (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematic*. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics (NCTM), pp. 353-392.

TOBIAS, S. (1990): *They're Not Dumb, They're Different. Stalking the Second Tier*. Research Corporation. Arizona.

Referencia del autor

Abraham Arcavi

Instituto Weizmann de Ciencias. Israel

abraham.arcavi@weizmann.ac.il

Línea de trabajo: didáctica de las matemáticas.