SOBRE LA DISTRIBUCION PROBABLE DE CORPUSCULOS EN UN CUERPO, DEDUCIDA DE LA DISTRIBUCION EN SUS SECCIONES Y PROBLEMAS ANALOGOS

por L. A. Santaló

Supongamos N corpúsculos de forma convexa distribuídos de manera arbitraria en el interior de un cuerpo también convexo K. Si V es el volumen de este cuerpo llamaremos *densidad media* de corpúsculos en K al cociente

$$D = \frac{N}{V} \tag{1}$$

o sea al número de ellos por unidad de volumen si la repartición fuese uniforme.

Si una recta arbitraria que atraviesa el cuerpo corta a n de estos corpúsculos y la longitud de la cuerda que determina en K ès s, el cociente $\frac{n}{s}$ será la densidad media de los corpúsculos sobre la recta. Haciendo esta operación con varias rectas elegidas al azar, el objeto de esta nota consiste en ver cómo de estas distribuciones sobre las rectas se puede deducir la densidad media (1) del cuerpo entero.

En lugar de cortar por una recta se puede también cortar por varios planos y deducir de la densidad de corpúsculos en las secciones la densidad de ellos en todo el cuerpo. También consideramos los casos (§ 2, nos. 7, 9) de cortar por franjas limitadas por dos planos paralelos o bien por cilindros de sección convexa.

Como aplicación se obtiene en § 2, nº. 3 un resultado clásico de la teoría cinética de los gases.

El método de demostración consiste en utilizar algunos resultados de Probabilidades Geométricas o de Geometría Integral para los cuales remitiremos al lector principalmente a los libros de Blaschke «*Vorlesungen über Integralgeometrie, I y II*» [1] o al de Deltheil «*Probabilités géometriques*» [2] (1).

(1) Los paréntesis cuadrados se refieren a la Bibliografía citada al final.

§ 1. Caso del plano

1. *Secciones por una recta.* Supongamos primeramente una figura convexa K que contenga en su interior N corpúsculos C congruentes entre sí pero de forma cualquiera (con la sola restricción de ser también *convexos*).

Una recta cualquiera G del plano vendrá determinada por sus coordenadas polares p, ϑ o sea su distancia a un punto fijo y el ángulo de su normal con una dirección también fija. Dar una recta arbitraria en el plano significa lo mismo que dar al azar un par de números p y ϑ (p cualquier número positivo y ϑ comprendido entre 0 y 2π) y para medir un conjunto de rectas se toma la integral extendida a este conjunto de la forma diferencial [1, p. 7], [2, p. 59],

$$d\,G = d\,p \,.\, d\,\vartheta. \tag{2}$$

Con esta expresión si se considera una línea cualquiera de longitud l y llamamos n_1 al número de puntos en que es cortada en cada posición de la recta G se verifica [1, p. 11], [2, p. 60],

$$\int n_1\, d\,G = 2\,l \tag{3}$$

extendida la integración a todas las rectas que cortan a la línea considerada, únicas para las que es $n_1 \neq 0$.

Vamos a aplicar esta fórmula (3) a la línea formada por todos los contornos de los corpúsculos contenidos en K (fig. 1).

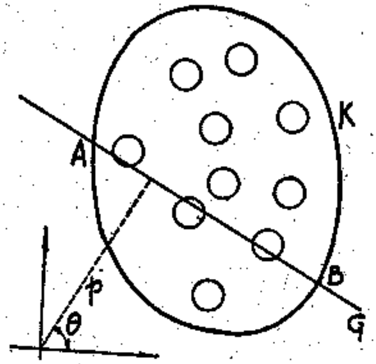

Fig. 1.

Si u es el perímetro de cada uno de ellos, la longitud total será $N u$ y si se representa por n el número de corpusculos que son cortados por la recta G, como cada uno tiene dos puntos de intersección, será

$$\int_{G,K \neq 0} n\, dG = N u \tag{4}$$

donde con el símbolo $G.K \neq 0$ entendemos que la integración debe extenderse a todas las rectas que cortan a K.

Por otra parte, si se representa por U el perímetro de la figura K, por ser convexa y por tanto n_1 constante e igual a dos, la fórmula (3) nos da como medida de todas las rectas que cortan a K:

$$\int_{G.K \neq 0} dG = U. \tag{5}$$

Dividiendo (4) por (5) se deduce, como *valor medio del número de corpúsculos que son cortados por una recta arbitraria G que atraviesa la figura K*:

$$\overline{n} = N \frac{u}{U}. \tag{6}$$

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K y F al área de esta figura, es fácil ver que [1, p. 19], [2, p. 74],

$$\int_{G.K \neq 0} s\, dG = \int s\, dp\, d\vartheta = \int_0^{\pi} F\, d\vartheta = \pi F. \tag{7}$$

Por tanto la *longitud media* de las cuerdas de K vale, dividiendo (7) por (5),

$$\overline{s} = \pi \frac{F}{U}. \tag{8}$$

3. Si se quiere ahora ver la densidad de corpúsculos sobre las rectas que atraviesan a K, bastará dividir el número medio (6) de ellos por la cuerda media (8), obteniéndose

$$\delta_G = \frac{\bar{n}}{\bar{s}} = \frac{u}{\pi} \frac{N}{F}, \tag{9}$$

pero $\dfrac{N}{F}$ es la densidad media D de corpúsculos en la figura total K o sea el número de ellos por unidad de área si la repartición fuera uniforme, luego (9) puede escribirse

$$\delta_G = \frac{u}{\pi} D, \tag{10}$$

que es la relación que liga *la densidad media de corpúsculos sobre las cuerdas de las rectas que atraviesan a K con la densidad total de ellos.*

Por ejemplo, si los corpúsculos son circulares de radio r es

$$\delta_G = 2rD. \tag{11}$$

Esta expresión representa también el número de corpúsculos que encuentra la recta G por unidad de longitud y por tanto la *distancia media* entre ellos será la inversa, o sea

$$d_G = \frac{1}{2rD} \tag{12}$$

que nos da la *distancia media entre dos corpúsculos vecinos de los N que están distribuídos al azar en el área F.*

3. Pólya en un artículo muy sugestivo [5], en el que llega al mismo resultado, aunque por camino completamente distinto, da a esta cuestión la siguiente interpretación gráfica: Si desde un punto arbitrario de un bosque rodeado de árboles con sección circular de radio r distribuídos con una densidad media D, se mira en todas direcciones hasta donde alcanza la vista (fig. 2) la *distancia visible media* está dada por (12).

Tomando la inversa de la fórmula (10) tendríamos una expresión más general de esta misma distancia media para el caso de no ser las secciones circulares. (Ver el Apéndice, § 3).

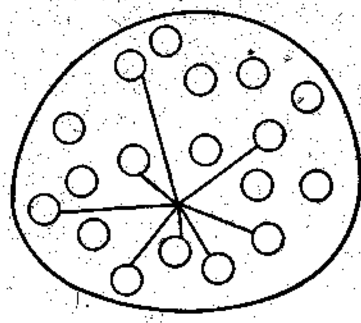

Fig. 2.

4. *Secciones por una banda paralela.* Sea el mismo problema anterior, pero ahora supongamos que se corta la figura K por una banda limitada por dos rectas paralelas a distancia Δ y de la densidad media de corpúsculos en la sección queremos deducir la densidad en la figura total (fig. 3).

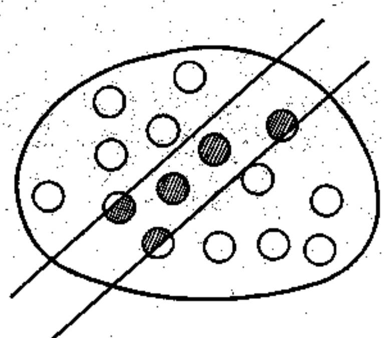

Fig. 3.

La posición de una de estas bandas paralelas queda determinada, en el plano, por las mismas coordenadas p, ϑ de una recta que puede ser, por ejemplo, su paralela media. Representando ahora por dB (densidad para conjuntos de bandas paralelas) la misma forma diferencial $dp\,d\vartheta$ de antes, o sea

$$dB = dp\,d\vartheta \tag{13}$$

y siendo n el número de corpúsculos que en cada posición que-dan total o parcialmente interiores a la banda B, es sabido que [2]

$$\int_{B.K \neq 0} n\, dB = \pi N \Delta + N u \tag{14}$$

estando extendida la integración a todas las bandas B que cortan a K y siendo, como antes, N el número total de corpúsculos contenidos en K y u la longitud del contorno de cada uno de ellos.

La medida total de las bandas paralelas de anchura Δ que cortan a K es [7, p. 18]

$$\int_{B.K \neq 0} dB = U + \pi\Delta \tag{15}$$

luego dividiendo (14) por (15) se deduce como *valor medio del número de corpúsculos encontrados por una banda arbitraria*

$$\bar{n} = \frac{\pi\Delta + u}{\pi\Delta + U} N. \tag{16}$$

Esta fórmula nos resuelve de paso el problema siguiente:

Supuestos n corpúsculos de forma convexa cualquiera y perímetro u interiores a una figura convexa K, el número medio de ellos que son alcanzados por una pincelada de anchura Δ dada arbitrariamente sobre esta figura, está dado por (16).

La fórmula (16) se encuentra también en E. Gaspar [3, p. 136].

---

(2) Sobre bandas paralelas móviles en el plano y para las fórmulas (15) y (17) se puede ver nuestra memoria [7].

La fórmula (14) se puede deducir de la de Blaschke [1, p. 37]

$$\int c_{01}\, dK = 2\pi\,(C_0 F_1 + C_1 F_0 + U_0 U_1) \quad (*)$$

con solo suponer que la figura K que aquí interviene, de área F_0, longitud U_0 y curvatura total C_0, se reduce a una banda de plano limitada por rectas paralelas a distancia Δ. Habrá que sustituir dK por dB, F_0 por $\frac{1}{2}\Delta$, U_0 por 1 y C_0 se anula. Como figura fija se suponen aquí los N corpúsculos, los cuales, siendo convexos, dan $C_{01} = 2\pi n$, $C_1 = 2\pi N$ y $U_1 = Nu$. Con estas sustituciones la fórmula (*) pasa a la (14) que utilizamos en el texto.

Una demostración directa de la fórmula (14) ha sido dada por E. Gaspar [3, p. 135].

5. Llamando f al área de la parte de K que queda interior a la banda B, es sabido también que [7, p. 19], [1, p. 51],

$$\int_{B.K=|=0} f\,dB = \pi\Delta F \tag{17}$$

y por tanto el valor medio de f vale

$$\bar{f} = \frac{\pi\Delta F}{U+\pi\Delta}. \tag{18}$$

Dividiendo (16) por (18) se tendrá el *valor medio de la densidad de corpúsculos en las secciones obtenidas cortando K por B,* que valdrá

$$\delta_B = \left(1 + \frac{u}{\pi\Delta}\right) D. \tag{19}$$

Esta es la relación buscada que nos liga *la densidad total D con la densidad media de las secciones.*

§ 2. Caso del espacio

1. *Secciones por una recta.* Sea en el espacio un cuerpo convexo K conteniendo en su interior N corpúsculos iguales también convexos pero de forma cualquiera y distribuídos de una manera arbitraria. Queremos obtener la relación existente entre el número de estos corpúsculos que corta una recta al azar que atraviesa el cuerpo con el número total de ellos.

Una recta en el espacio está determinada por cuatro parámetros que pueden ser: las coordenadas x, y de su punto de intersección con un plano normal y la longitud y latitud φ y ϑ que fijan su dirección. Representando por $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección de la recta, para medir conjuntos de rectas se toma [1, p. 66], [2, p. 90] la integral extendida al conjunto que sea, de la forma diferencial

$$dG = dx\,dy\,d\Omega. \tag{20}$$

Por ejemplo, llamando n_1 al número de puntos de inter-