

GEOMETRIA INTEGRAL DE FIGURAS ILIMITADAS

POR

L. A. SANTALÓ

RESUMEN. Objeto de este trabajo es extender la parte de geometría integral derivada del concepto de *medida cinemática* al caso de ser ilimitada alguna de las figuras. Por figuras ilimitadas se entienden las bandas de plano limitadas por rectas paralelas y en general las llamadas *redes uniformes*. Este estudio se hace en I para el plano y en II para el espacio permitiendo, en ambos casos, obtener varios valores medios y problemas de probabilidades geométricas. En III se trata de una aplicación de estos conceptos a la demostración de un teorema de BLICHFELDT y otros teoremas análogos.

En trabajos anteriores [6], [13], [21] (*) hemos encontrado algunas relaciones integrales que aparecen al considerar todas las intersecciones posibles entre una figura limitada y otras ilimitadas como son las bandas de plano comprendidas entre dos rectas paralelas o bien en el espacio las franjas limitadas por dos planos paralelos o aún la parte de espacio limitada por superficies cilíndricas.

En otro trabajo reciente [37] y en vistas exclusivamente a algunos problemas de valores medios y probabilidades geométricas hemos considerado ya el caso de una figura ilimitada formada por una red uniforme que abarca todo el plano euclidiano. Por *red uniforme*, como se puntualiza en § 1, I, se entiende un sistema de figuras que cubriendo todo el plano se deducen todas ellas de la traslación de una misma figura fundamental limitada de área α . Todo punto del plano debe pertenecer a una sola figura fundamental. En § 1 se dan algunos ejemplos de redes uniformes.

La posición de toda figura limitada K viene determinada en su plano por la posición de uno de sus puntos $P(x, y)$ y una rotación φ alrededor de este punto. Como siempre, representaremos por

(*) Los paréntesis cuadrados [] se refieren a la bibliografía al final.

$$dK = dx dy d\varphi \quad (1)$$

a la *densidad cinemática* [1] que sirve para medir un conjunto de posiciones de esta figura K supuesta móvil sin deformación.

Si se supone que K se mueve en el plano sobre el cual está extendida una red uniforme y todas las posiciones de K que pueden deducirse unas de otras por una traslación del plano que superponga la red sobre sí misma las consideramos equivalentes, el conjunto de *todas las posiciones distintas* de K será limitado y valdrá

$$\int_{\alpha} dK = 2 \pi \alpha \quad (2)$$

puesto que fijado P (x, y) el ángulo φ puede variar de 0 a 2π y luego el punto P puede recorrer toda el área α .

En el presente trabajo vamos a proseguir el estudio de la geometría integral de las redes uniformes hasta ver como la mayoría de las fórmulas obtenidas para figuras limitadas tienen su análoga en este caso en que una o las dos se extienden hasta convertirse en redes infinitas, con la ventaja de que siendo ahora conocida la medida total (2) se pueden resolver más problemas que aparecen de probabilidades geométricas.

En la primera parte I hacemos este estudio para el plano y en II para el espacio.

Como apéndice incluimos en III una aplicación de estos resultados a un teorema de *Blichfeldt* [4] y a otras cuestiones análogas.

(1)

conjunto
rmación.
el cual
es de K
el plano
os equi-
e K será

(2)

de 0 a

io de la
como la
as tienen
en hasta
, siendo
ver más

el plano

de estos
uestiones

I. FIGURAS EN EL PLANO

§ 1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS

1. *Redes uniformes.* Diremos que el plano está cubierto por una *red uniforme* de líneas o figuras determinadas cuando se compone de la reproducción sucesiva de una figura fundamental *limitada*. Esta figura fundamental puede ser de forma cualquiera, pero con la condición de que por traslaciones sucesivas de la misma se llene todo el plano, es decir, todo punto del plano debe pertenecer a una y sólo a una figura fundamental.

El área de esta figura fundamental se representará siempre por α . Dentro de cada figura fundamental habrá otra figura cuya área se representará por f y el conjunto de estas figuras es lo que constituye la red uniforme ilimitada que se extiende por todo el plano (ejemplos en el número siguiente). La longitud del contorno de la figura anterior de área f contenida en cada área fundamental se representará por u .

Para abreviar llamaremos a veces a f y a u *área y longitud de la red uniforme*, entendiendo que en realidad se trata del área y longitud de la parte contenida en cada área fundamental.

El concepto de *curvatura total* (*) se extiende a las redes uniformes de la siguiente manera: se considera la figura limi-

(*) Para una *figura limitada* la definición y diversas expresiones de la curvatura total puede verse con todo detalle en el libro de BLASCHKE [1] principalmente en las págs. 41 y 43. Por ejemplo para el caso de una figura compuesta de segmentos de recta (*complejo de segmentos*), llamando v al número de ellos que concurren en cada vértice es

$$c = \sum \pi (2 - v)$$

extendida la sumación a todos los vértices. Esta expresión no cambia por una transformación topológica de la figura, es decir, sigue siendo aplicable al caso de ser los segmentos arcos de curva.

tada formada por μ áreas fundamentales en una dirección y ν en otra y se cierran, si hace falta, los bordes de la región de plano que así se obtiene. La figura formada por esta porción limitada de red tendrá una curvatura total $c(\mu, \nu)$ y se llamará por definición curvatura total de la red ilimitada al límite

$$c = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty}} \frac{c(\mu, \nu)}{\mu \cdot \nu} \quad (3)$$

Este límite puede ser infinito, pero en todo el presente trabajo consideraremos nada más los casos en que c sea finito (positivo, negativo o nulo) es decir, consideramos solamente redes con curvatura total finita.

Según esta definición de c se observa que si las figuras de la red contenidas en cada área fundamental son limitadas e independientes entre sí (ejemplo las redes de las figs. 1 y 8) la curvatura total de la red es igual a la suma de las curvaturas totales de las figuras contenidas en cada área fundamental.

2. *Redes complementarias.* Sea una red con área fundamental α . Todos los puntos del plano que no pertenecen al área f de esta red forman el área $\bar{f}$ de otra red con la misma área fundamental que llamaremos *red complementaria* de la primera. Según esta definición el área $\bar{f}$ y longitud $\bar{u}$ de esta red complementaria serán:

$$\bar{f} = \alpha - f \quad \bar{u} = u \quad (4)$$

En cuanto a la *curvatura total* teniendo en cuenta que el contorno es el mismo para las dos redes y que sólo cambia el sentido de recorrido (puesto que el sentido que para una red

Si se trata de una figura que tenga área (*complejo de triángulos*) se puede descomponer siempre en triángulos introduciendo si hace falta nuevos lados interiores al área. En este caso el valor de la curvatura total es

$$c = 2\pi(\delta - \lambda + \epsilon)$$

siendo δ el número de triángulos, λ el de lados y ϵ el de vértices. Por ejemplo la figura formada por un cuadrilátero convexo y una diagonal, considerada como complejo de segmento (sin área) por la fórmula primera es $c = -2\pi$, pero considerando como figura toda el área interior al cuadrilátero (complejo de triángulos) es $c = 2\pi$.

deja el área f a la izquierda, para la red complementaria deja f a la derecha) será

$$\bar{c} = -c \quad (5)$$

3. *Ejemplos.* I. En la fig. 1 como figura fundamental se puede tomar el cuadrado cuyos vértices son los centros de cuatro cuadrados vecinos; su área será α . El área rayada de cada cuadrado es el área f y la longitud del mismo es u . El valor de c es 2π .

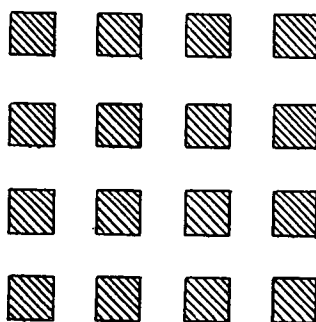


Figura 1

II. La red de la fig. 2 es la complementaria de la anterior. En ella α tiene el mismo valor y $\bar{u} = u$ también. En cambio f es el área de la parte rayada interior a un cuadrado fundamental, o sea $f = \alpha - f$ y $c = -2\pi$.

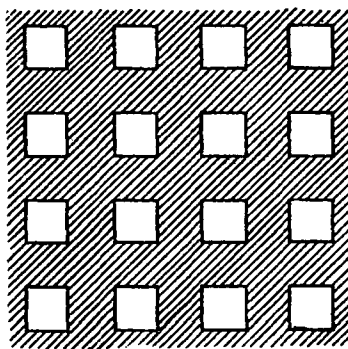


Figura 2

III. En la fig. 3 como área fundamental α tomamos la

indicada de puntos. El área f y la longitud u de la red son las de la parte rayada interior a α . En cuanto a c observamos que tomando μ áreas α en una dirección y v en la perpendicular, la curvatura total de la figura obtenida es $2\pi \cdot v$, por tanto según la definición es $c=0$.

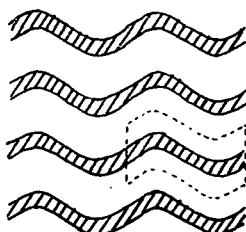


Figura 3

§ 2. TEOREMA FUNDAMENTAL

1. *Enunciado.* El teorema fundamental que permite trasladar las fórmulas de geometría integral demostradas para figuras limitadas al caso de redes uniformes ilimitadas es el siguiente:

Sea $dK = dx dy d\varphi$ la *densidad cinemática* [1] para medir conjuntos de posiciones de una figura móvil finita K y supongamos la figura $R(\mu, v)$ formada por la repetición sucesiva de $\mu \cdot v$ figuras fundamentales de área α , μ en una dirección y v en la otra, de manera que cuando μ y v tiendan a infinito $R(\mu, v)$ tiende a cubrir todo el plano formando una red uniforme. Si para estas dos figuras (las dos limitadas) se ha establecido una cierta fórmula integral

$$\int F \cdot dK = J(R) \quad (6)$$

siendo F una función de la intersección de las dos figuras y estando la integración extendida a todas las posiciones de K en que dicha intersección existe, se puede limitar el área de integración a una sola área fundamental α y extender R a todo el plano; la fórmula integral correspondiente a esta red ilimitada y a K es

$$\int_{\alpha} F \cdot dK = \lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \frac{J(R)}{\mu \cdot v} \quad (7)$$

2. *Demostración.* (*). Siendo la figura K limitada, se puede bordear la figura $R(\mu, \nu)$ de las $\mu \cdot \nu$ áreas fundamentales mediante nuevas áreas α hasta obtener una figura R' tal que en toda posición en la que K corte a R quede toda ella interior a la figura bordeada R' . Supongamos que para esto sea necesario prolongar la dirección μ en p áreas fundamentales y la dirección ν en q áreas (fig. 4). Aplicando la fórmula (6) a K y

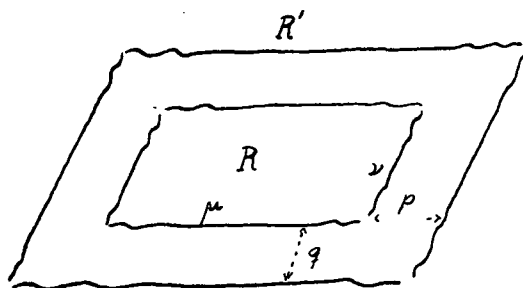


Figura 4

a la nueva figura R' bordeada compuesta de $\mu \nu + 2 p \nu + 2 q (\mu + 2 p)$ áreas α es:

$$\int F dK = J(R') \quad (8)$$

Representando por $\int_{\alpha} F dK$ la integral en la cual dK varía dentro del área α (que tendrá el mismo valor cualquiera que sea α interior a R) se tiene

$$\int F dK = \mu \nu \int_{\alpha} F dK + I_{R'-R} = J(R') \quad (9)$$

siendo $I_{R'-R}$ la parte de integral correspondiente al área que bordea R o sea a las áreas fundamentales que forman $R'-R$, cuyo número es $2 p \nu + 2 q (\mu + 2 p)$. Por consiguiente

(*) La misma demostración para un caso particular se puede ver en nuestro trabajo [37].

$$I_{R-R} = (2 p v + 2 q (\mu + 2 p)) \alpha \cdot \bar{F} \quad (10)$$

indicando por $\bar{F}$ un valor medio de F que será acotado, puesto que la integral total (8) tiene un valor finito. De (9) dividiendo por μv y haciendo tender estos dos valores hacia infinito, como p y q son siempre constantes, teniendo en cuenta (10) se tendrá (7), como se quería demostrar.

§ 3. VALORES MEDIOS DEL ÁREA Y LA LONGITUD

1. *Area.* Recordemos [10] que, para el caso de ser ambas finitas, si f_{12} es el área de la intersección de una figura fija K_2 con otra móvil K_1 , considerando el conjunto de posiciones en que las dos figuras se cortan, es

$$\int f_{12} dK_1 = 2 \pi f_1 f_2 \quad (11)$$

siendo f_1 y f_2 las áreas respectivas de K_1 y K_2 .

En el caso de ser K_2 una red uniforme y representando como siempre por α su área fundamental y por f al área de la red, considerando primero la figura formada por μv áreas fundamentales (cuya área total será $\mu v f$), la fórmula (11) aplicada a este caso dá

$$\int f_{12} dK_1 = 2 \pi f_1 \mu v f$$

y por el teorema fundamental

$$\boxed{\int_{\alpha} f_{12} dK_1 = 2 \pi f_1 f} \quad (12)$$

El significado de esta integral es el siguiente: sea por ejemplo la red de la fig. 5 en la que el área fundamental α es la figura indicada de puntos y el área f es la parte rayada interior a cada área fundamental. Siendo $dK_1 = dx dy d\varphi$ la densidad cinemática de una figura limitada cualquiera de área

f_1 , móvil sin deformación en el plano, en cada posición habrá un área f_{12} común a K_1 y a la red (área doblemente rayada en

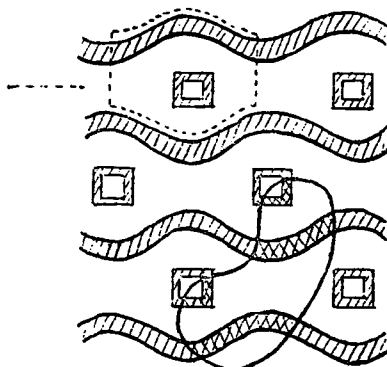


Figura 5

la figura) y la fórmula (12) nos dá el valor de la integral de esta f_{12} para todas las posiciones de K_1 que son realmente distintas, es decir, que no se deducen unas de otras por una traslación del plano que superponga la red consigo misma.

El conjunto de todas las posiciones distintas de K_1 es

$$\int_{\alpha} dK_1 = 2\pi\alpha; \quad (13)$$

luego, dividiendo (12) por (13) se tiene el valor medio de la parte de red cubierta por una figura de área f_1 situada al azar sobre el plano, que será

$$f_{12} = \frac{f f_1}{\alpha} \quad (14)$$

2. Longitud. Llamando u_{12} a la longitud de la parte de K_1 que queda interior a K_2 en cada posición, para figuras limitadas se tiene [1], [10]:

$$\int u_{12} dK_1 = 2\pi u_1 f_2$$

siendo u_1 la longitud de la figura K_1 .

Para el caso de ser K_2 una red uniforme, u_{12} será la longitud de la parte de K_1 que es interior al área f de la red, siendo, por tanto, por el teorema fundamental

$$\int_{\alpha} u_{12} dK_1 = 2\pi u_1 f \quad (15)$$

Análogamente representando por u_{21} a la longitud de la parte de red que queda interior a la figura K_1 en cada posición, vale

$$\int_{\alpha} u_{21} dK_1 = 2\pi u f_1 \quad (16)$$

De (13), (15) y (16) por cociente se obtienen los valores medios respectivos:

$$\bar{u}_{12} = \frac{u_1 f}{\alpha} \quad \bar{u}_{21} = \frac{u f_1}{\alpha} \quad (17)$$

Para el primero de estos valores medios se observa que sólo depende, para una red determinada, de u_1 , pero es independiente de la *forma* de la línea o figura K_1 . Es decir, el valor medio será el mismo si en lugar de ser K_1 una figura rígida es una línea de forma variable siempre que su longitud sea constante.

§ 4. VALOR MEDIO DE LA SUMA DE CURVATURAS DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN

1. *Caso de figuras limitadas.* Sea una curva fija K_2 y otra móvil K_1 (ambas pueden ser abiertas o cerradas). *Las supongamos formadas por un número finito de arcos de curvatura continua y finita.* La densidad cinemática $dK_1 = dx dy d\varphi$ se compone del elemento de área $dP = dx dy$ más un giro alrededor de este punto. Tomando por punto P uno de los de intersección de K_1 y K_2 se tiene (fig. 6):

$$dP = |\sin \Theta| ds_1 ds_2$$

siendo ds_1 y ds_2 los elementos de arco de K_1 y K_2 respectivamente y Θ el ángulo entre las dos curvas en P. Luego, en

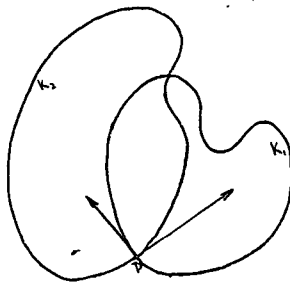


Figura 6

todas las posiciones en que haya intersecciones de K_1 y K_2 se puede poner

$$dK_1 = |\sin \Theta| ds_1 ds_2 d\Theta \quad (18)$$

Siendo por hipótesis finito en las dos líneas el número de puntos de discontinuidad de la curvatura, la medida de las posiciones en que alguno de estos puntos sea de intersección de las dos líneas es cero y por tanto podemos considerar nada más las posiciones en que las dos curvas se cortan en puntos de curvatura finita y continua.

Multiplicando ambos miembros de (18) por el valor κ_1 de la curvatura de K_1 en el punto P, el segundo miembro se puede integrar a todas las posiciones en que K_1 y K_2 se cortan, puesto que:

$$\int \kappa_1 |\sin \Theta| ds_1 ds_2 d\Theta = \int_0^{2\pi} |\sin \Theta| d\Theta \int_0^{u_2} ds_2 \int \kappa_1 ds_1 = 4 u_2 c'_1 \quad (19)$$

Aquí la $\int \kappa_1 ds_1$ la hemos representado por c'_1 y coincide con la *curvatura total* c_1 de K_1 en el caso de ser toda esta línea cerrada y de curvatura continua. Si hay puntos en que la curvatura se hace infinita (puntos angulosos) hay que considerar como valor de c'_1 la suma de las integrales $\int \kappa_1 ds_1$ extendidas a cada arco de curvatura continua. Por ejemplo para una línea

poligonal convexa y cerrada es $c_1 = 2\pi$ y en cambio $c'_1 = 0$. Se puede decir que c_1 es igual a c'_1 más la suma de los *ángulos exteriores*. Si se trata de una línea cerrada, de un solo contorno y de curvatura continua es $c'_1 = c_1 = 2\pi$.

En cuanto al primer miembro de (18) al multiplicar por κ_1 e integrar para todo ds_1 y ds_2 , como cada posición aparece tantas veces como puntos de intersección hay entre K_1 y K_2 , cada valor de dK_1 es factor común de la suma de curvaturas de K_1 en los distintos puntos de intersección, o sea teniendo en cuenta (19) queda en definitiva

$$\boxed{\int \Sigma \kappa_1 \cdot dK_1 = 4 u_2 c'_1} \quad (20)$$

Más general, si se multiplican ambos miembros de (18) por el producto $\kappa_1 \kappa_2$ de las curvaturas de las dos curvas en cada punto de intersección será, análogamente

$$\boxed{\int \Sigma \kappa_1 \kappa_2 \cdot dK_1 = 4 c'_1 c'_2} \quad (21)$$

estando la sumación bajo el signo integral extendida a todos los puntos de intersección de K_1 y K_2 en cada posición.

Por ejemplo si las dos curvas K_1 y K_2 son de curvatura continua, cerradas y de la misma conexión de la circunferencia (o sea formadas de un solo contorno) es $c'_1 = c'_2 = 2\pi$ y por tanto (20) dá

$$\int \Sigma \kappa_1 \cdot dK_1 = 8\pi u_2$$

y (21)

$$\int \Sigma \kappa_1 \kappa_2 \cdot dK_1 = 16\pi^2$$

2. *Caso de ser la figura fija una red uniforme.* Podemos aplicar a la fórmula (20) el teorema fundamental de §2. Como al tomar la figura formada por μ v áreas fundamentales la longitud total es $\mu v u$, el resultado será

$$\int_{\alpha} \Sigma x_1 \cdot dK_1 = 4 u c'_1 \quad (22)$$

Es decir: sumando para cada posición las curvaturas de K_1 en los puntos de intersección con las líneas de la red e integrando a todas las posiciones distintas de K_1 el valor es $4 u c'_1$.

3. *Valor medio.* Como la medida de todas las posiciones de K_1 viene dada por (13), el valor medio de la suma de las curvaturas de los puntos de intersección será

$$\overline{\Sigma x_1} = \frac{2 u c'_1}{\pi \alpha}$$

Por ejemplo si se trata de una curva cerrada de la conexión de la circunferencia, sin puntos angulosos, es $c'_1 = c_1 = 2 \pi$ y por tanto

$$\overline{\Sigma x_1} = \frac{4 u}{\alpha}$$

independiente de la longitud y forma de K_1 . En particular, si la red es la formada por las rectas paralelas a dos ejes coordenados rectangulares que pasan por los puntos de coordenadas enteras es $u = 2$, $\alpha = 1$ y

$$\overline{\Sigma x_1} = 8$$

§ 5. FÓRMULA FUNDAMENTAL

1. *Para figuras limitadas. Fórmula de Blaschke.* Para dos figuras limitadas K_1 y K_2 , llamando f_1 al área, u_1 a la longitud y c_1 a la curvatura total de K_1 y análogamente para K_2 , Blaschke [1] ha establecido la *fórmula fundamental* siguiente:

$$\int c_{12} dK_1 = 2 \pi (c_1 f_2 + c_2 f_1 + u_1 u_2) \quad (23)$$

siendo c_{12} la curvatura total de la intersección de K_1 y K_2 variable para cada posición de K_1 . En la nota (*) de § 1

hemos recordado lo que debe entenderse por curvatura total de una figura limitada.

2. *Para redes uniformes.* Para aplicar el teorema fundamental de § 2 a la fórmula (23) en el caso de suponer primero μ y ν áreas fundamentales de una cierta red R y suponer luego que μ y ν crecen hasta formar toda la red, el área de la figura formada por μ y ν áreas valdrá $\mu \nu f$ y la longitud $\mu \nu u$. Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de curvatura total c de la red dada en § 1, queda:

$$\int_{\alpha} c_{12} \cdot dK_1 = 2\pi (c f_1 + c_1 f + u u_1) \quad (24)$$

En forma algo distinta esta misma fórmula ha sido hallada también recientemente por *Hadwiger* [5].

3. *Casos particulares.* I. Si consideramos el caso de reducirse f a una línea o sea de quedar la red reducida a una red de líneas de longitud u y al mismo tiempo que K_1 se reduce también a una línea como límite de una cinta superficial cuya anchura tiende a cero, en la fórmula (24) c_{12} será igual a 2π multiplicado por el número de puntos de intersección entre la línea K_1 y la red R ; y para las longitudes u y u_1 (puesto que se componen de la unión de dos líneas iguales que se van acercando hasta coincidir) habrá que tomar $2u$ y $2u_1$. Siendo $f = f_1 = 0$ queda por tanto

$$\int_{\alpha} c_{12} dK_1 = 2\pi \int_{\alpha} n dK_1 = 2\pi \cdot 4 u u_1$$

o sea

$$\int_{\alpha} n dK_1 = 4 u u_1 \quad (25)$$

siendo n el número de puntos de intersección de K_1 con la red en cada posición.

El *valor medio* del número de puntos de intersección será

$$\bar{n} = \frac{2 u u_1}{\pi a} \quad (26)$$

II. Si el área f de la red se reduce a un número ρ de puntos situados en cada área fundamental a , será $f=u=0$, $c=2\pi\rho$ y como c_{12} será igual a 2π multiplicado por el número n de puntos que en cada posición de K_1 quedan en su interior, será

$$\int_a n \cdot dK_1 = 2\pi\rho f_1 \quad (27)$$

y como *valor medio* del número de puntos cubiertos por K_1 se tendrá:

$$\bar{n} = \frac{f_1 \rho}{a} \quad (28)$$

La obtención directa de estos casos particulares I y II con ejemplos y aplicaciones se puede ver en nuestro trabajo [37].

III. Si la figura K_1 se compone de una placa con agujeros se puede buscar el valor medio del número de ellos que quedarán sobre el área f de la red. Para ello se observa que $f_1=0$, $u_1=0$, $c_1=2\pi N$, siendo N el número de puntos de que se compone K_1 . Por tanto llamando n al número de éstos que quedan sobre f es

$$\int_a n \cdot dK_1 = 2\pi N f$$

y por tanto el valor medio será

$$\bar{n} = \frac{N f}{a} \quad (29)$$

§ 6. PROBLEMAS DE PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

1. *Generalización del problema de Buffon.* Vamos a aplicar la fórmula anterior (24) al caso particular de ser la red uni-

forme una sucesión de bandas paralelas como indica la fig. 7. Sea Δ_1 la anchura de estas bandas y Δ_2 la distancia entre ellas. Como figura móvil K_1 tomamos una figura convexa (con lo cual será por tanto $c_1 = 2\pi$) cuyo diámetro sea *menor o igual*

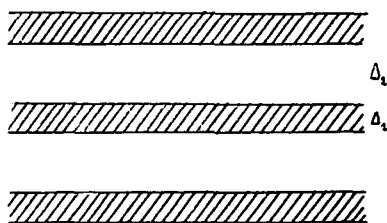


Figura 7

que Δ_2 para que no pueda cortar a dos bandas paralelas a la vez. Con estas condiciones, las características de la red de la fig. 7. (Comparar con el ej. III de § 1) son

$$f = a \Delta_1 \quad u = 2a \quad c = 0 \quad \alpha = a (\Delta_2 + \Delta_1)$$

siendo a una longitud arbitraria. El valor de c_{12} para la intersección de la red con K_1 será igual a 2π si K_1 corta a alguna franja e igual a cero si no corta a ninguna.

Luego la medida de las posiciones en que K_1 corta a alguna franja será, teniendo en cuenta (24)

$$M_1 = 2a (\pi \Delta_1 + u_1) \quad (30)$$

Como la medida total de las posiciones de K_1 vale (13)

$$\int_a dK_1 = 2\pi a (\Delta_2 + \Delta_1)$$

la probabilidad de que la figura convexa K_1 (de diámetro $\leq \Delta_2$ y longitud u_1) situada al azar sobre el plano de las bandas paralelas de la fig. 7 corte a alguna de estas bandas será

$$p = \frac{u_1 + \pi \Delta_1}{\pi (\Delta_2 + \Delta_1)} \quad (31)$$

En el caso de ser $\Delta_1 = 0$ se reduce esta fórmula a la del problema de la aguja de *Buffon* [3]. Si K_1 es un segmento de longitud l habrá que sustituir $u_1 = 2l$.

Si la figura convexa es de diámetro *mayor* que Δ_2 , entonces puede cortar a más de una banda paralela y la fórmula anterior (31) nos dá el valor medio del número de bandas que son cortadas.

2. *Probabilidad en figuras convexas.* Supongamos que la red esté formada por la reproducción de un cierto número de figuras k_i convexas, por ejemplo v en cada área fundamental (fig. 8). La curvatura total de la red es entonces $c = 2\pi v$ y

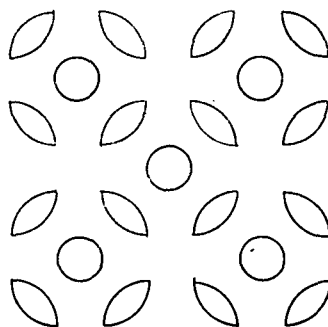


Figura 8

si la figura K_1 es también convexa la fórmula fundamental (24) dá

$$\int_{\alpha} c_{12} \cdot dK_1 = 2\pi (2\pi v f_1 + 2\pi f + u u_1)$$

o bien, como c_{12} es igual a 2π por el número de figuras k_i de la red que son cortadas por K_1 , llamando n a este número será

$$\int_{\alpha} n \cdot dK_1 = 2\pi (v f_1 + f) + u u_1 \quad (32)$$

Si K_1 sólo puede cortar a una sola de las figuras de la red (por ser su diámetro inferior a la mínima distancia entre

ellas) sólo puede ser $n=1$ o $n=0$, luego la medida de las posiciones en que K_1 corta a alguna figura k_i vendrá expresada por el segundo miembro de (32) y como la medida total de todas las posiciones es $2\pi\alpha$ la probabilidad de cortar a alguna figura de la red es

$$p = \frac{2\pi(vf_1 + f) + uu_1}{2\pi\alpha} \quad (33)$$

En el caso de poder cortar K_1 a más de una figura k_i esta expresión (32) dá el valor medio del número de figuras k_i que son cortadas por K_1 .

3. *Caso de ser cuatro el máximo número de puntos comunes.* Supongamos que la figura convexa K_1 sólo pueda tener a lo sumo cuatro puntos comunes con las figuras que forman la red (que supondremos como en el caso anterior también convexas). Supongamos además que K_1 no pueda estar contenida totalmente en alguna de las figuras k_i y que sólo pueda cortar a una de ellas.

Llamando M_j a la medida de las posiciones en que K_1 tiene j puntos comunes con alguna k_i , por (13) es

$$M_0 + M_2 + M_4 = 2\pi\alpha$$

Por (25) es también

$$2M_2 + 4M_4 = 4uu_1$$

y por (32):

$$M_2 + M_4 = 2\pi(vf_1 + f) + uu_1$$

De estas tres ecuaciones se deduce

$$\begin{aligned} M_0 &= 2\pi(\alpha - vf_1 - f) - uu_1 \\ M_2 &= 4\pi(vf_1 + f) \\ M_4 &= uu_1 - 2\pi(vf_1 + f) \end{aligned} \quad (34)$$

Estas tres medidas dividiéndolas por la medida total $2\pi\alpha$

nos dan las probabilidades respectivas de que K_1 tenga cero, dos o cuatro puntos de intersección con las figuras de la red.

Por ejemplo si K_1 es un segmento de longitud l y la red es la red de círculos de la fig. 9, con la condición de ser l mayor que el diámetro $2r$ de los círculos y menor que la distancia $a - 2r$ entre ellos es

(33)

$$\alpha = a^2 \quad v = 1 \quad f = \pi r^2 \quad u = 2\pi r$$

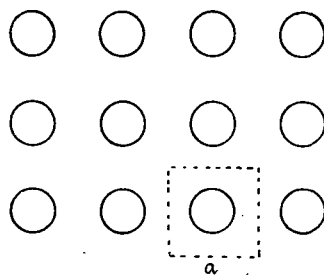


Figura 9

y además $f_1 = 0$, $u_1 = 2l$. Por tanto las probabilidades de que un segmento de longitud l arrojado al azar sobre el plano de la fig. 9 tenga dos, uno o ningún punto común con las circunferencias son, respectivamente:

$$p_2 = \frac{2lr - \pi r^2}{a^2}$$

$$p_4 = \frac{2\pi r^2}{a^2}$$

$$p_0 = \frac{a^2 - \pi r^2 - 2lr}{a^2}$$

§ 7. REDES MÓVILES EN EL PLANO

1. *Definición.* Fijados en el plano unos ejes coordenados de referencia, una figura limitada K viene determinada por las coordenadas de uno de sus puntos y una rotación alrededor de este punto. La medida de todas las posiciones distintas que esta figura limitada puede ocupar en el plano es infinita. Si se

(34)

da total $2\pi\alpha$

supone en lugar de una figura limitada, una red uniforme de área fundamental α y la suponemos también móvil en su plano, su posición vendrá determinada igualmente por la de uno de sus puntos $P(x, y)$ y un giro alrededor de este punto. La densidad para conjuntos de posiciones de una red uniforme será la misma densidad cinemática de siempre, que ahora representaremos por

$$dR = dx dy d\varphi \quad (35)$$

La diferencia está en que la medida de todas las posiciones distintas que puede ocupar la red en su plano es ahora finita y se obtendrá haciendo variar P en toda un área fundamental α y en cada posición haciendo girar φ de 0 a 2π . Es decir, la medida total de posiciones distintas vale

$$\int dR = 2\pi\alpha \quad (36)$$

Todas las fórmulas obtenidas en §3, §4, §5, suponiendo la red fija y la figura limitada K_1 móvil, son válidas naturalmente si se supone la figura K_1 fija en el plano y es la red R que se extiende sobre el mismo plano de una manera arbitraria.

2. *Fórmulas integrales.* I. Sean las redes R_1 y R_2 con las características respectivas α_i, f_i, u_i, c_i ($i = 1, 2$). Sea además K una figura de área F y forma cualquiera inmóvil en el plano. Colocando de una manera arbitraria la red R_1 y luego sobre el mismo plano la R_2 y llamando f_{12} al área de la intersección de R_1 y R_2 que es interior a K , queremos calcular

$$\int f_{12} dR_1 dR_2$$

extendida la integración a todas las posiciones distintas de R_1 y R_2 , es decir a α_1 para dR_1 y a α_2 para dR_2 .

Para ello, fijando R_1 y llamando f_{01} al área de R_1 que es interior a K , según (12) es

$$\int f_{12} dR_2 = 2\pi f_2 f_{01}$$

y por la misma (12) también

$$\int f_{01} dR_1 = 2\pi f_1 F;$$

por tanto

$$\int f_{12} dR_1 dR_2 = \int dR_1 \int f_{12} dR_2 = (2\pi)^2 f_1 f_2 F,$$

que se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\frac{1}{F} \int f_{12} dR_1 dR_2 = (2\pi)^2 f_1 f_2} \quad (37)$$

válida cualquiera que sea F (naturalmente f_{12} depende de F).

El valor medio del área f_{12} común a las dos redes y que es interior a un área F será pues

$$f_{12} = \frac{f_1 f_2}{a_1 a_2} F$$

Para $F=1$ se tiene el valor medio del área de la intersección por unidad de superficie.

II. Análogamente supuesta como antes en el plano una figura K de área F y forma cualquiera, al extender arbitrariamente sobre el mismo plano las redes R_1 y R_2 y llamando u_{12} a la longitud de la parte de red R_2 que es interior al área f_1 de R_1 y al mismo tiempo interior a K, se puede calcular

$$\int u_{12} dR_1 dR_2$$

Para ello llamando f_{01} al área de R_1 que es interior a K, según (16) vale

$$\int u_{12} dR_2 = 2\pi u_2 f_{01}$$

y según (12)

$$\int f_{01} dR_1 = 2\pi f_1 F$$

de donde

$$\boxed{\frac{1}{F} \int u_{12} dR_1 dR_2 = (2\pi)^2 f_1 u_2} \quad (38)$$

Análogamente llamando u_{21} a la longitud de la parte de R_1 que queda interior a R_2 y a K es

$$\frac{1}{F} \int u_{21} dR_1 dR_2 = (2\pi)^2 u_1 f_2$$

Los valores medios respectivos serán

$$\bar{u}_{12} = \frac{f_1 u_2}{a_1 a_2} F \quad \bar{u}_{21} = \frac{u_1 f_2}{a_1 a_2} F$$

III. Sean ahora las redes R_1 y R_2 consideradas como redes lineales y llamando n al número de puntos de intersección de las mismas que son interiores a la figura fija K queremos calcular

$$\int n dR_1 dR_2$$

Para ello, llamando u_{01} a la longitud de la parte de R_1 que queda interior a K , por (25) es

$$\int n dR_2 = 4u_{01} u_2$$

y como

$$\int u_{01} dR_1 = 2\pi u_1 F$$

queda

$$\boxed{\frac{1}{F} \int n dR_1 dR_2 = 8\pi u_1 u_2} \quad (39)$$

El número medio de puntos n de intersección de las dos redes que quedan interiores a K es por tanto

$$\bar{n} = \frac{2 u_1 u_2}{\pi \alpha_1 \alpha_2} F \quad (40)$$

Para $F=1$ tendremos el valor medio del número de puntos de intersección por unidad de superficie.

Ejemplo: El ejemplo más simple consiste en suponer que R_1 es un haz de paralelas a distancia Δ_1 y R_2 otro haz a distancia Δ_2 (fig. 10). Entonces es

$$\alpha_1 = \lambda \Delta_1 \quad u_1 = \lambda \quad \alpha_2 = \lambda \Delta_2 \quad u_2 = \lambda$$

siendo λ una longitud arbitraria.

Colocando los dos haces de paralelas arbitrariamente sobre el plano donde hay una figura K de área F , el número medio de puntos de intersección interiores a K , según (40) será

$$\bar{n} = \frac{2}{\pi \Delta_1 \Delta_2} F$$

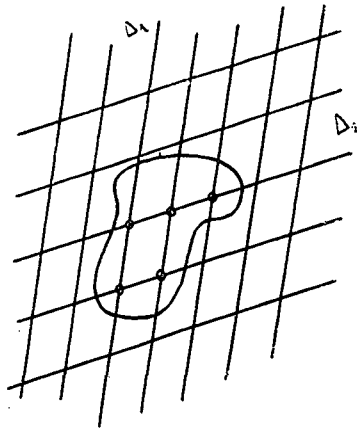


Figura 10

IV. Si la red R_2 es una red de puntos o sea un conjunto de infinitos puntos del plano distribuidos uniformemente de

manera que haya v en cada área fundamental a_2 , se puede pedir el valor de la integral

$$\int n \, dR_1 \, dR_2$$

siendo n el número de puntos de R_2 que son interiores a la parte de área f_1 de R_1 que a su vez es interior a K .

Para ello basta recordar que según (27) es

$$\int n \, dR_2 = 2\pi f_{12} v$$

siendo f_{12} el área de la red R_1 que es interior a K . Como además

$$\int f_{12} \, dR_1 = 2\pi f_1 F$$

queda

$$\boxed{\frac{1}{F} \int n \, dR_1 \, dR_2 = (2\pi)^2 v f_1} \quad (41)$$

El valor medio de puntos de R_2 interiores a R_1 para cada área F será pues

$$\bar{n} = \frac{f_1 v}{a_1 a_2} F$$

§ 8. FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA REDES MÓVILES

Sea como en el caso anterior una figura K fija en el plano, limitada y con las características F , U , C (área, longitud y curvatura total respectivamente). Sean además dos redes R_1 , R_2 y representemos por c_{12} la curvatura total de la intersección de R_1 y R_2 contenida en K , es decir, la intersección de R_1 , R_2 y K . Queremos calcular

$$\int c_{12} \, dR_1 \, dR_2$$

extendida la integración como en todas las fórmulas de § 7 a todas las posiciones distintas de R_1 y R_2 o sea a α_1 y α_2 respectivamente.

Esta integral será la generalización de la fórmula fundamental de *Blaschke* al caso de *redes uniformes*.

Llamando c_{01} a la curvatura total de la intersección de K y R_1 y f_{01} , u_{01} al área y longitud de la misma, fijando primero R_1 y según (24) será

$$\int c_{12} dR_2 = 2\pi (c_{01} f_2 + c_2 f_{01} + u_2 u_{01}) \quad (42)$$

y como según (24), (12), (15), (16) es también

$$\int c_{01} dR_1 = 2\pi (c_1 F + C f_1 + U u_1)$$

$$\int f_{01} dR_1 = 2\pi f_1 F$$

$$\int u_{01} dR_1 = 2\pi (u_1 F + U f_1)$$

(41)

multiplicando (42) por dR_1 e integrando queda

$$\int c_{12} dR_1 dR_2 = (2\pi)^2 [F(c_1 f_2 + c_2 f_1 + u_1 u_2) + U(f_1 u_2 + u_1 f_2) + C f_1 f_2]$$

Se puede ver que esta fórmula general contiene, como casos particulares, las fórmulas (39) y (41) antes obtenidas.

ILES

n el plano,
itud y cur-
s R_1 , R_2 y
ntersección
ión de R_1 .

puede pe-

riores a la
.

K. Como

para cada

II. FIGURAS EN EL ESPACIO

§ I. DEFINICIONES Y EJEMPLOS

1. *Redes uniformes en el espacio.* Diremos que el espacio está cubierto por una *red uniforme* cuando se pueda suponer subdividido en infinitas figuras fundamentales limitadas y congruentes entre sí, las cuales pueden ser superpuestas por traslación y cumplen además la condición de llenar todo el espacio, es decir, todo punto del mismo pertenece a una y sólo a una figura fundamental.

Esta figura fundamental puede ser de forma variada y a su volumen lo representaremos (análogamente al caso del plano) por α . Dentro de este volumen fundamental habrá una figura, cuya reproducción sucesiva constituye la red, y cuyo volumen representaremos por v y área por f . Si además hay alguna línea interior a cada α , su longitud la representaremos por u . Estos valores v , f , u se llamarán *volumen*, *área* y *longitud* de la red respectivamente; algunos de ellos pueden ser nulos.

Para definir el invariante m (*) (*curvatura media total* o

(*) Este invariante m cuando se trata de una superficie convexa cerrada, con curvatura media continua, es igual a la integral de dicha curvatura media, o sea

$$m = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) d\sigma$$

siendo r_1 y r_2 los radios principales de curvatura en el punto de elemento superficial $d\sigma$. Cuando la curvatura media es discontinua (hay aristas) no es fácil en general dar una expresión para m . Para los casos de ser la figura limitada compuesta de puntos aislados, segmentos de recta, áreas poligonales planas o volúmenes poliedrales se pueden ver distintas expresiones de m en BLASCHKE [2] pág. 94 y 109. Por ejemplo si se trata de un poliedro convexo es

$$m = \frac{1}{2} \sum (\pi - \omega)$$

curv
part
 μ y ρ
tes;
red
de l

que
rem
de

siend
longi

siend
(*
curva
109.
total
que i
mene
una
tes p

e =

e=2
tice

e=4
de e

e=2
de e

consi
(sólo
es e:

curvatura en las aristas) de la red, supondremos primero una parte limitada de la misma compuesta por un volumen de $\mu \nu \rho$ volúmenes fundamentales en tres direcciones independientes; cerrando, si hace falta, los bordes de esta parte limitada de red y si para ella el valor de m es $m(\mu, \nu, \rho)$ el invariante m de la red será, por definición:

$$m = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} \frac{m(\mu, \nu, \rho)}{\mu \nu \rho} \quad (I)$$

que supondremos siempre finito.

Análogamente para la *curvatura total* (**) de la red tomaremos el límite del cociente de la curvatura total de una parte de red compuesta de μ, ν, ρ volúmenes a dividida por el pro-

siendo ω el ángulo que forma entre sí las caras que se cortan en la arista de longitud l y estando la sumación extendida a todas las aristas.

Para una figura compuesta de segmentos (*complejo de segmentos*) es

$$m = \pi L$$

siendo L la longitud total de ellos.

(**) Para figuras *limitadas* las diversas expresiones, según los casos, de la curvatura total se pueden ver con todo detalle también en BLASCHKE [2], pág. 109. La curvatura total c es mucho más fácil de hallar que la curvatura media m por ser un invariante topológico, mientras que m es métrico. De aquí que basta conocer c para figuras formadas por segmentos, áreas planas o volúmenes poliedrales pues su valor subsiste si se supone que toda la figura sufre una deformación biunívoca y bicontinua. En general bastan las reglas siguientes para hallar el valor de c para figuras limitadas:

Si la figura se compone de n puntos aislados (*complejo de puntos*) es $c = 4 \pi n$.

Si la figura se compone de segmentos (*complejo de segmentos*) es $c = 2 \pi \sum (2 - \nu)$ siendo ν el número de segmentos que concurren en cada vértice y extendiendo la sumación a todos los vértices.

Si la figura está formada por superficies (*complejo de caras*) es $c = 4 \pi (n_0 - n_1 + n_2)$ siendo n_0 el número de vértices, n_1 el de aristas y n_2 el de caras.

Si la figura está formada por volúmenes (*complejos de celdas*) es $c = 2 \pi (n'_0 - n'_1 + n'_2)$ siendo n'_0 el número de vértices, n'_1 el de aristas y n'_2 el de caras de la superficie que limita la figura.

Por ejemplo un cubo (y por tanto todo volumen de la misma conexión) considerado como volumen tiene $c = 4 \pi$; considerado como complejo de caras (sólo su superficie) es $c = 8 \pi$ y considerado como complejo de sus aristas es $c = -16 \pi$.

ducto μ, v, ρ cuando estos tres números se hacen infinito o sea cuando la red tiende a llenar todo el espacio. Es decir

$$c = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \frac{c(\mu, v, \rho)}{\mu v \rho} \quad (2)$$

De esta manera si la red se compone de la reproducción de figuras limitadas y separadas contenidas en cada volumen fundamental α , lo mismo m que c serán iguales a la curvatura media total y curvatura total respectivamente de este conjunto de figuras contenidas en cada α .

2. *Redes complementarias.* Toda la parte de espacio exterior al volumen v de una red uniforme constituye otra red que llamaremos complementaria de la primera. El volumen fundamental α es el mismo para las dos. Las relaciones entre los invariantes de una y otra son

$$\bar{v} = \alpha - v, \quad \bar{f} = f, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{m} = m, \quad \bar{c} = -c$$

3. *Ejemplos.* I. Supongamos el espacio dividido en paralelepípedos rectángulos iguales por planos paralelos a los ejes coordenados. Sea α el volumen de estos paralelepípedos. Si dentro de cada uno se supone un cuerpo limitado, igual y ocupando la misma posición para cada paralelepípedo, el volumen v , el área f , la curvatura media total m y la curvatura total c de este cuerpo serán también las características respectivas de la red.

II. Considerando el conjunto de rectas paralelas a los ejes coordenados que pasan por los puntos de coordenadas enteras se tiene una red de líneas. Para ella será $v = f = 0$. El volumen fundamental es uno de los cubos de arista unidad en que queda dividido el espacio, o sea $\alpha = 1$. La longitud u se compondrá de las tres aristas de uno de estos cubos que concurren en un vértice, pues por repetición sucesiva de las mismas se llena toda la red, por tanto $u = 3$. Para m y c , según lo dicho en las notas de los números precedentes será $m = 3\pi$, $c = -8\pi$.

III. Sea la red formada por franjas de espacio limitadas por planos paralelos a distancia Δ_1 y distanciadas a su vez entre sí Δ_2 (la fig. 7 será una sección de esta red de planos por un plano normal). Como figura fundamental α se puede tomar

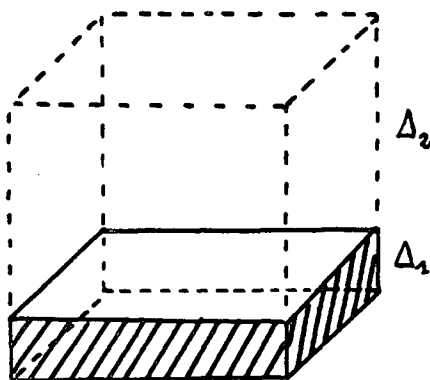


Figura 11

un paralelepípedo rectángulo cuya base sea un cuadrado cualquiera de lado a y altura $\Delta_1 + \Delta_2$ (fig. 11). En él vemos que

$$\alpha = a^2 (\Delta_1 + \Delta_2), \quad v = a^2 \cdot \Delta_1, \quad f = 2 a^2$$

En cuanto a m , para esta figura limitada, por tratarse de un paralelepípedo rectángulo será, según lo dicho en la primera nota de 1:

$$m = \frac{1}{2} \sum \frac{\pi}{2} l = \frac{\pi}{4} (8a + 4\Delta_1)$$

Al hacer crecer la altura de este paralelepípedo y la base para llenar todo el espacio, o sea tomar $\mu \nu \rho$ paralelepípedos fundamentales la suma de las aristas de los volúmenes v obtenidos pasa a $4(a\mu + a\nu)\rho + 4\Delta_1\rho$. Al dividir por $\mu \cdot \nu \cdot \rho$ y pasar al límite queda pues

$$m = 0$$

Análogamente para c , tomando $\mu \cdot \nu \cdot \rho$ paralelepípedos funda-

mentales se obtienen ρ paralelepípedos distintos o sea el valor de c es $4\pi\rho$; dividiendo por $\mu\nu\rho$ y pasando al límite será también

$$c=0$$

IV. Supongamos la red formada por un haz de cilindros congruentes paralelos cuya sección por un plano normal sea por ejemplo la fig. 9, donde en lugar de círculos como sección se pueden suponer figuras convexas iguales cualesquiera. Llamando σ al área de la sección de los cilindros y λ a su perímetro, se puede tomar por volumen fundamental un paralelepípedo rectangular como el indicado en la fig. 12, con base un cuadrado de lado a y altura arbitraria s . Sera:

$$\alpha = a^2 s \quad v = \sigma s \quad f = \lambda s$$

Para la parte de cilindro comprendido en este volumen fundamental es $m = \pi s$ y tomando μ, ν, ρ volúmenes fundamentales será $m = \pi s \mu \nu \rho$, de manera que el valor del invariante m de la red es

$$m = \pi s$$

En cuanto a c para cada α vale 4π y tomando μ, ν, ρ vo-

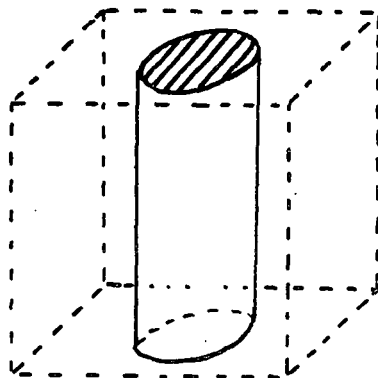


Figura 12

lúmenes fundamentales es $c = 4\pi\mu\nu$, por tanto

$$c=0$$

En este caso, como en el anterior, las características α , v , f , m , c vienen determinadas salvo un factor arbitrario (s en este caso y a^2 en el anterior) lo cual deriva del hecho de admitir estas redes desplazamientos que las dejan invariantes.

§ 2. TEOREMA FUNDAMENTAL

1. *Enunciado.* Análogamente al caso del plano, el teorema fundamental que permite trasladar todas las fórmulas de geometría integral para figuras limitadas, al caso de redes uniformes ilimitadas es el siguiente:

Sea $dK_1 = dP \, d\Omega \, d\tau$ la densidad cinemática $[11]$ (*) para medir conjuntos de posiciones de una misma figura K_1 (cuerpo, superficie o línea) móvil en el espacio. Sea una parte R_i de una cierta red R formada por μ, v, ρ volúmenes α contiguos unos a otros y en tres direcciones independientes y supongamos que para esta parte de red (que es una figura limitada) y la fig. K_1 se haya establecido una fórmula integral

$$\int F \cdot dK_1 = J(R_i) \quad (3)$$

teniendo $J(R_i)$ un valor finito y siendo F una función de la intersección de las dos figuras. En (3) la integración está extendida a todas las posiciones en que la intersección con R_i existe. Al crecer R_i hasta llenar todo el espacio las posiciones realmente *distintas* de K_1 respecto de la red son sólo las que no puedan deducirse unas de otras por una traslación que superponga la red consigo misma. Se puede pues limitar el volumen de integración a un área fundamental α y la nueva fórmula integral deducida de (3) es

$$\int_{\alpha} F \cdot dK_1 = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \frac{J(R_i)}{\mu v \rho} \quad (4)$$

(*) Recordemos que $dP = dx \, dy \, dz$ es el elemento de volumen de un punto unido a la figura, $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a una dirección por este punto y $d\tau$ el elemento de una rotación alrededor de esta dirección.

2. *Demostración.* La demostración es la misma que en el caso del plano. Como K_1 es limitada se puede bordear la parte de red R_i para la cual es válida (3) por una envoltura de volúmenes α de manera que en toda posición en la que K_1 corte a R_i quede completamente interior al volumen bordeado R'_i . Supongamos que para ello sea necesario prolongar la dirección μ en p volúmenes α y las direcciones v y ρ en q y r respectivamente. En total la nueva figura R'_i se compondrá de

$$N = \mu \cdot v \cdot \rho + 2 \mu \rho q + 2 (v + 2 q) \rho p + 2 (v + 2 q) (\mu + 2 p) r \quad (5)$$

volúmenes α y como también es finita para ella valdrá la fórmula (3) o sea

$$\int F \cdot dK_1 = J(R'_i) \quad (6)$$

Representando por $\int_{\alpha} F \cdot dK_1$ la integral extendida solamente a las posiciones en que el punto P que figura en la expresión de $dK_1 = dP \, d\Omega \, d\tau$ varía dentro del volumen α y que valdrá lo mismo cualquiera que sea la figura fundamental considerada interior a R_i , será

$$\int F \cdot dK_1 = \mu \cdot v \cdot \rho \int_{\alpha} F \cdot dK_1 + I_{R'-R} = J(R'_i) \quad (7)$$

donde $I_{R'-R}$ indica la parte de integral de (6) en que el punto P de dK_1 varía en el volumen $R'_i - R_i$. Por el teorema de la media es pues

$$I_{R'-R} = N \alpha \bar{F}$$

siendo $\bar{F}$ un valor finito y N dado por (5).

Dividiendo (7) por $\mu \cdot v \cdot \rho$ y pasando al límite queda la fórmula (4) que queríamos demostrar.

§ 3. VALOR MEDIO DEL VOLUMEN, ÁREA Y LONGITUD

1. *Volumen.* Supuesta una figura limitada K fija y de volumen v y otra móvil K_1 de volumen v_1 es sabido [11] que

llamando v_{12} al volumen de la intersección de K y K_1 en cada posición, vale

$$\int v_{12} \cdot dK_1 = 8\pi^2 v v_1 \quad (8)$$

En el caso de ser K una red uniforme R esta fórmula es también aplicable. En efecto, suponiendo una parte R' limitada de red compuesta de N volúmenes α , el volumen total será Nv , siendo v el volumen de la red (§ 1), luego aplicando el teorema fundamental anterior queda

$$\boxed{\int_{\alpha} v_{12} \cdot dK_1 = 8\pi^2 v v_1} \quad (9)$$

Si se quiere el *valor medio* del volumen común a K_1 y a la red basta observar que

$$\int_{\alpha} dK_1 = 8\pi^2 \alpha \quad (10)$$

y por tanto

$$\bar{v}_{12} = \frac{v v_1}{\alpha} \quad (11)$$

2. *Area.* De la misma manera, en el caso de figuras limitadas, llamando f_{12} a la parte de superficie de K que es interior a K_1 vale

$$\int f_{12} \cdot dK_1 = 8\pi^2 f v_1$$

Luego para el caso de ser K una red R de área f será

$$\boxed{\int_{\alpha} f_{12} \cdot dK_1 = 8\pi^2 f v_1} \quad (12)$$

Llamando f_{21} al área de la parte de superficie de K_1 que queda interior al volumen v de R es, análogamente

$$\int_a f_{21} \cdot dK_1 = 8 \pi^2 f_1 v \quad (13)$$

Los valores medios respectivos serán

$$f_{12} = \frac{f v_1}{a} \quad f_{21} = \frac{v f_1}{a} \quad (14)$$

3. *Longitud.* Supongamos que la red R contenga también líneas de longitud u . Llamando u_{12} a la longitud de la parte de ellas que queda interior a K_1 , es

$$\boxed{\int_a u_{12} \cdot dK_1 = 8 \pi^2 u v_1} \quad (15)$$

puesto que existe una fórmula análoga para figuras limitadas.

Si es la figura K_1 que contiene líneas de longitud u_1 y u_{21} indica la longitud de la parte de las mismas que en cada posición queda interior al volumen v de R es

$$\boxed{\int_a u_{21} \cdot dK_1 = 8 \pi^2 v u_1} \quad (16)$$

Con estas notaciones los valores medios respectivos serán

$$\bar{u}_{12} = \frac{u v_1}{a} \quad \bar{u}_{21} = \frac{v u_1}{a} \quad (17)$$

4. *Longitud de la intersección.* Llamando l_{12} a la longitud de la línea de intersección de dos superficies limitadas, una fija de área f y otra K_1 móvil de área f_1 es sabido [11] que vale

$$\int l_{12} \cdot dK_1 = 2 \pi^3 f f_1$$

Si la figura fija se transforma en una red y se llama también f a su área, el teorema fundamental del número anterior dá inmediatamente

(13)

$$\int_{\alpha} l_{12} \cdot dK_1 = 2 \pi^3 f f_1 \quad (18)$$

siendo l_{12} la longitud de la intersección de las superficies de la red con la superficie móvil K_1 .

El valor medio de esta longitud de la intersección será pues

(14)

$$l_{12} = \frac{\pi f f_1}{4 \alpha} \quad (19)$$

§ 4. VALOR MEDIO DEL NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

Si una figura limitada K tiene un área f y se representa por n el número de puntos de intersección de la misma con una línea K_1 de longitud u_1 móvil sin deformación con densidad cinemática dK_1 es sabido [11] que vale

(15)

$$\int n dK_1 = 4 \pi^2 f u_1$$

Esta fórmula se puede extender de dos maneras al caso de ser una de las figuras una red uniforme. Si K_1 es una línea móvil y n es el número de sus puntos de intersección con las superficies que forman la red se tiene

(16)

$$\int_{\alpha} n dK_1 = 4 \pi^2 f u_1 \quad (20)$$

y si la red está formada por líneas de longitud u y la figura K_1 es una superficie de área f_1 móvil

$$\int_{\alpha} n dK_1 = 4 \pi^2 u f_1 \quad (21)$$

Los valores medios respectivos serán

$$\bar{n}_{12} = \frac{f u_1}{2 \alpha} \quad \bar{n}_{21} = \frac{u f_1}{2 \alpha} \quad (22)$$

En III, 4 damos algunos casos particulares de estas fórmulas.

§ 5. VALOR MEDIO DE LA SUMA DE CURVATURAS DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN

1. *Figuras limitadas.* Sea una superficie K_1 móvil con densidad cinemática $dK_1 = dP \, d\Omega \, d\tau$. Supondremos que K_1 está formada por un número finito de casquetes con curvatura continua y además que las aristas o líneas de unión entre estos casquetes tienen una longitud finita. Sea una línea fija K de longitud u . En todas las posiciones en que K_1 corta a K se puede tomar como punto P que figura en la expresión de dK uno de los de intersección. El elemento de volumen dP se expresará entonces en función del elemento de superficie $d\sigma_1$ de K_1 y del elemento de arco ds de K por (fig. 13)

$$dP = \cos \Theta \cdot d\sigma_1 \cdot ds \quad (23)$$

siendo Θ el ángulo entre la normal a la superficie K_1 y la

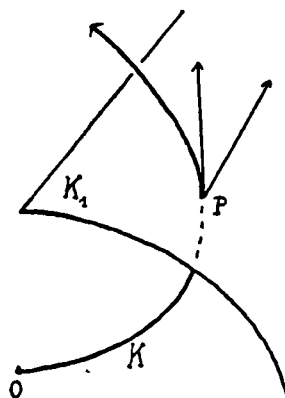


Figura 13

tangente a la línea K en P . Por tanto se puede poner

$$dK = \cos \Theta \cdot d\sigma_1 \cdot ds \cdot d\Omega \cdot d\tau \quad (24)$$

Multiplicando ambos miembros por la curvatura $\kappa = \frac{1}{r_1 r_2}$

de K_1 en el punto P (r_1, r_2 son los radios principales de curvatura), el segundo miembro se puede integrar, dando

$$\int \cos \Theta \, d\Omega \int d\tau \int ds \int \kappa \, d\sigma_1 = 4\pi^2 u c'_1 \quad (25)$$

puesto que es $\int d\tau = 2\pi$, $\int ds = u$, $\int \cos \Theta \, d\Omega = 2\pi$ (por ser igual a la proyección del área de la esfera unidad sobre un plano diametral) e indicando por c'_1 la suma de las integrales $\int \kappa \, d\sigma_1$ extendidas a los diferentes casquetes que hemos supuesto constituían a K_1 . El conjunto de posiciones en que alguna intersección de K con K_1 es un punto de las aristas de K_1 es de medida nula y se puede prescindir. Por otra parte, al multiplicar el primer miembro de (24) por κ e integrar a todos los valores de $d\sigma_1$ y ds como se ha hecho, cada posición vendrá contada tantas veces como puntos de intersección haya entre K y K_1 ; por tanto aparecerá una suma $\Sigma \kappa$ extendida a los distintos puntos de intersección en cada posición. Queda pues en definitiva

$$\int \Sigma \kappa \cdot dK_1 = 4\pi^2 u c'_1 \quad (26)$$

Por ejemplo en el caso particular de ser K_1 una superficie cerrada con curvatura continua y de la conexión de la esfera, es $c'_1 = c_1 = 4\pi$ y por tanto

$$\int \Sigma \kappa \cdot dK_1 = 16\pi^3 u \quad (27)$$

2. *Caso de ser la figura fija una red uniforme.* La fórmula (26) se extiende inmediatamente al caso de ser K una red uniforme. Basta aplicar el teorema fundamental (§ 2). Por tanto: representando por $\Sigma \kappa$ la suma de las curvaturas de una superficie K_1 en los puntos de intersección de la misma con las líneas de una red uniforme es

$$\int_a \Sigma \kappa \cdot dK_1 = 4\pi^2 u c'_1 \quad (28)$$

(24)

$$= \frac{1}{r_1 r_2}$$

El valor medio de la suma de las curvaturas será

$$\overline{\Sigma \kappa} = \frac{u c'_1}{2 \alpha}$$

Por ejemplo, si se trata de una superficie cerrada de la conexión de la esfera y curvatura continua, es $c'_1 = c_1 = 4 \pi$ y por tanto

$$\overline{\Sigma \kappa} = \frac{2 \pi u}{\alpha}$$

independiente de la forma y tamaño de K_1 . En particular si la red dentro de la cual se supone que se mueve esta superficie es la red de rectas formada por las paralelas a los ejes coordenados que pasan por los puntos de coordenadas enteras es $u = 3$, $\alpha = 1$ y por tanto

$$\overline{\Sigma \kappa} = 6 \pi$$

§ 6. FÓRMULA FUNDAMENTAL

1. *Caso de figuras limitadas. Fórmula de Blaschke.* Para el caso de dos figuras limitadas K_1 y K_2 con las características v_i , f_i , m_i , c_i ($i = 1, 2$) de volumen, área, curvatura media total (o curvatura en las aristas) y curvatura total, llamando c_{12} a la curvatura total de la intersección de K_1 y K_2 , Blaschke [2] ha establecido la siguiente fórmula fundamental:

$$\int c_{12} \cdot dK_1 = 8 \pi^2 [c_1 v_2 + c_2 v_1 + m_1 f_2 + m_2 f_1] \quad (29)$$

2. *Caso de redes uniformes.* Teniendo en cuenta las definiciones de curvatura media total m y curvatura total c de una red uniforme (§ 1) el paso de la fórmula anterior al caso de transformarse K_2 en una red ilimitada R es inmediato según § 2, obteniéndose:

$$\boxed{\int_a c_{12} dK_1 = 8 \pi^2 [c v_1 + v c_1 + m f_1 + f m_1]} \quad (30)$$

3. *Caso particular.* Si la red R es una red de puntos, o sea se compone de infinitos puntos distribuidos uniformemente en el espacio de manera que haya ρ en cada volumen fundamental α , será $v=f=m=0$, $c=4\pi\rho$. Si K_1 es un volumen v_1 de forma cualquiera, llamando n al número de puntos de R que contiene en su interior en cada posición será

$$\int_{\alpha} n dK_1 = 8\pi^2 v_1 \rho \quad (31)$$

Como *valor medio* de los puntos que contendrá el volumen v_1 en su interior, se tiene por tanto

$$\bar{n} = \frac{v_1}{\alpha} \rho \quad (32)$$

§ 7. PROBLEMAS DE PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

1. *Probabilidad de que un cuerpo convexo corte a una red de franjas limitadas por planos paralelos.* Sea la red uniforme formada simplemente por franjas limitadas por planos paralelos de anchura Δ_1 y distantes entre sí Δ_2 . La sección por un plano perpendicular será la indicada en la fig. 7 del caso análogo en el plano. Para esta red, siendo a un número arbitrario hemos visto (§ 1) que

$$= a^2 (\Delta_1 + \Delta_2), \quad v = a^2 \cdot \Delta_1 \quad f = 2a^2, \quad m = 0, \quad c = 0 \quad (33)$$

Supongamos un cuerpo convexo K_1 de diámetro *menor* que Δ_2 para que sólo pueda cortar a lo sumo una sola franja de la red. Supuesto colocado K_1 al azar en el espacio, al aplicar la fórmula (30) se observa que si corta a alguna franja es $c_{12} = 4\pi$ y si no corta a ninguna es $c_{12} = 0$, luego, la medida de las posiciones en que corta a alguna franja, es

$$M_1 = 4\pi a^2 (m_1 + 2\pi \Delta_1) \quad (34)$$

y como la medida total es

$$\int_a dK_1 = 8\pi^2 \alpha = 8\pi^2 a^2 (\Delta_1 + \Delta_2) \quad (35)$$

resulta como probabilidad de que K_1 , colocado al azar en el espacio, corte a alguna franja de la red

$$p = \frac{m_1 + 2\pi\Delta_1}{2\pi(\Delta_2 + \Delta_1)} \quad (36)$$

Si se trata de una red de planos paralelos a distancia Δ_2 es $\Delta_1 = 0$ y queda

$$p = \frac{m_1}{2\pi\Delta_2}$$

y si además K_1 es un segmento de longitud l hay que sustituir $m_1 = \pi l$.

2. Probabilidad de que un cuerpo convexo corte a una red de cilindros paralelos. Consideremos la red formada por cilindros convexos paralelos situados uniformemente, es decir, de manera tal que la sección por un plano normal sea una red plana uniforme de área fundamental a^2 como por ejemplo la indicada en la fig. 9 (pudiendo ser en lugar de círculos figuras convexas cualesquiera). En § 1 hemos visto que las características de esta red son

$$\alpha = a^2 s, \quad v = \sigma s, \quad f = \lambda s, \quad m = \pi s, \quad c = 0 \quad (37)$$

siendo s una longitud arbitraria, σ el área de la sección recta de los cilindros y λ el perímetro de esta sección.

Supuesto un cuerpo convexo K_1 de diámetro tal que no pueda cortar a dos cilindros a la vez, en la fórmula (30) será $c_{12} = 4\pi$ en los casos en que K_1 corte a algún cilindro y $c_{13} = 0$ en los que no corte a ninguno. Luego la medida de las posiciones en que corta a algún cilindro será

$$M_1 = 2\pi s [4\pi\sigma + \pi f_1 + \lambda m_1] \quad (38)$$

y como la medida total es

$$M = 8\pi^2 \alpha = 8\pi^2 a^2 s$$

queda,
 K_1 col
que co

Ca
longitu
alguno

II
por ta
corte a
rales

siendo
ponde
Record
cortar
fórmul
que so

3.
cuerpo
genera
pongar
mental
cuerpo
mando
la sum
las cur
c será
curvati

queda, como valor de la probabilidad de que el cuerpo convexo K_1 colocado al azar en el espacio corte a alguno de los cilindros que constituyen la red

$$p = \frac{4\pi\sigma + \pi f_1 + \lambda m_1}{4\pi a^2} \quad (39)$$

Casos particulares. I. Si K_1 se reduce a un segmento de longitud l es $f_1 = 0$, $m_1 = \pi l$ y la probabilidad de cortar a alguno de los cilindros será

$$p = \frac{4\sigma + \lambda l}{4a^2} \quad (40)$$

II. Si los cilindros se reducen a rectas será $\sigma = \lambda = 0$ y por tanto queda, como probabilidad de que un cuerpo convexo corte a alguna de las rectas de un haz uniforme de rectas paralelas

$$p = \frac{f_1}{4a^2} \quad (41)$$

siendo f_1 el área del cuerpo convexo y a^2 el área que corresponde a cada paralela al cortar el haz por un plano normal. Recordemos que el cuerpo convexo debe ser tal que no pueda cortar a dos rectas paralelas a la vez. En caso contrario, la fórmula (41) nos dará el valor medio del número de paralelas que son cortadas.

3. Probabilidad de que un cuerpo convexo corte a otros cuerpos convexos de una red que cubre el espacio. Vamos a generalizar al espacio el problema 2 de § 6, I del plano. Supongamos para fijar ideas el espacio dividido en celdas fundamentales congruentes de volumen α y en cada una de ellas v cuerpos convexos igualmente colocados en cada celda y formando en total una red de características v, f, m, c siendo v la suma de los volúmenes, f la suma de las áreas y m la de las curvaturas medias de estos v cuerpos convexos. En cuanto a c será igual a $4\pi v$ puesto que para cada cuerpo convexo la curvatura total es 4π .

Sea otro cuerpo convexo K_1 de características V, F, M y $C=4\pi$ tal que sólo pueda cortar a lo sumo a uno solo de los cuerpos anteriores que forman la red. En la fórmula (30) c_{12} valdrá 4π en los casos en que K_1 corta a alguno de estos cuerpos y cero en el caso contrario. Por lo tanto la medida de las posiciones en las que corta a alguno de los cuerpos convexos será

$$M_1 = 2\pi [4\pi (vV + v) + mF + fM] \quad (42)$$

Con esto y siendo la medida total igual a $8\pi^2\alpha$ se deduce que la probabilidad de cortar a alguno de los cuerpos convexos es

$$p = \frac{4\pi (vV + v) + mF + fM}{4\pi\alpha} \quad (43)$$

Por ejemplo si K_1 es un segmento de longitud l menor que la mínima distancia entre los cuerpos de la red es $V=F=0$, $M=\pi l$ y la probabilidad de que corte a algún cuerpo convexo será

$$p = \frac{4v + lf}{4\alpha} \quad (44)$$

Si K_1 puede cortar a varios cuerpos a la vez, la fórmula (43) dá el valor medio del número de ellos que son cortados.

§ 8. REDES MÓVILES EN EL ESPACIO

1. *Definición.* Supongamos en el espacio unos ejes fijos de referencia y una red R_1 con volumen fundamental α_1 . Si esta red se considera móvil, su posición vendrá determinada, como la posición de otro cuerpo cualquiera, por seis parámetros que pueden ser las tres coordenadas de uno de sus puntos $P(x, y, z)$, las dos coordenadas que fijan la dirección de una recta por este punto (la cual determinará sobre la esfera unidad un punto cuyo elemento superficial correspondiente representaremos por $d\Omega$) y un giro τ alrededor de esta recta. Para medir conjuntos de posiciones de una misma red se puede por

tanto tomar la misma densidad cinemática que para cuerpos limitados [11], es decir:

$$dR_1 = dP \cdot d\Omega \cdot d\tau \quad (45)$$

La medida de todas las posiciones distintas de la red se obtendrá haciendo variar P dentro un volumen fundamental α_1 y en cada posición integrando $d\Omega$ sobre toda la esfera unidad y $d\tau$ de 0 a 2π . Luego esta medida total vale

$$\int_{\alpha_1} dR_1 = 8\pi^2 \alpha_1 \quad (46)$$

Con esta definición las fórmulas de §3, §4, §5 se pueden considerar también como obtenidas considerando el cuerpo K_1 fijo y móvil en cambio la red R a todas sus posiciones realmente distintas.

Veamos cómo se generalizan dichas fórmulas de §3 y §4 al caso de ser las dos figuras redes uniformes R_1 y R_2 .

2. *Fórmulas integrales y valores medios.* I. Sean las redes R_1 y R_2 con las características respectivas α_i , v_i , f_i , m_i , c_i ($i=1, 2$). Sea K una figura de volumen V y área F inmóvil en el espacio. Siendo R_1 y R_2 móviles y llamando v_{12} al volumen de su intersección que en cada posición es interior a K , deseamos calcular

$$\int v_{12} dR_1 dR_2$$

extendida la integración a todas las posiciones distintas de R_1 y R_2 , o sea, a α_1 para la primera red y a α_2 para la segunda.

Para ello basta recordar que llamando v_{01} al volumen de la parte de R_1 que es interior a K para una posición fija de R_1 , según (9) es

$$\int_{\alpha_2} v_{12} dR_2 = 8\pi^2 v_{01} v_2$$

y también

$$\int_{\alpha_1} v_{01} dR_1 = 8 \pi^2 v_1 V$$

De estas dos fórmulas se deduce

$$\boxed{\frac{1}{V} \int v_{12} dR_1 dR_2 = (8 \pi^2)^2 v_1 v_2} \quad (47)$$

El *valor medio* del volumen de la intersección de R_1 y R_2 que es interior a K , teniendo en cuenta (46) será

$$\bar{v}_{12} = \frac{v_1 v_2}{\alpha_1 \alpha_2} V$$

que para $V = 1$ nos dá el *valor medio del volumen de la intersección contenido en la unidad de volumen del espacio*.

II. Llamando f_{12} al área de la parte de R_2 que en cada posición es interior a la parte de R_1 que a su vez es interior a un cuerpo fijo K , de la misma manera, teniendo en cuenta (9) y (12) se deduce

$$\boxed{\frac{1}{V} \int f_{12} dR_1 dR_2 = (8 \pi^2)^2 v_1 f_2} \quad (48)$$

y como *valor medio*

$$f_{12} = \frac{v_1 f_2}{\alpha_1 \alpha_2} V$$

III. Sea ahora l_{12} la longitud de la parte de intersección de las superficies de R_1 y R_2 que es interior a K . Queremos calcular

$$\int l_{12} dR_1 dR_2$$

Para ello fijando primero R_1 y llamando f_{01} a la parte de su superficie que es interior a K , la fórmula (18) dá

$$\int l_{12} dR_2 = 2 \pi^3 f_{01} f_2$$

y como también (12):

$$\int f_{01} dR_1 = 8 \pi^2 f_1 V$$

queda

$$\boxed{\frac{1}{V} \int l_{12} dR_1 dR_2 = 16 \pi^5 f_1 f_2} \quad (49)$$

Luego, el valor medio de la longitud de la intersección de las superficies de las redes R_1 y R_2 contenida por unidad de volumen del espacio es

$$l_{12} = \frac{\pi f_1 f_2}{4 \alpha_1 \alpha_2}$$

IV. Si R_2 es una red de líneas de longitud u_2 y se representa por n_{12} el número de puntos de intersección de esta red con R_1 que son interiores a un cuerpo K , se puede calcular

$$\int n_{12} dR_1 dR_2$$

Para lo cual basta recordar que, teniendo f_{01} el mismo significado que antes, según (20) es

$$\int n_{12} dR_2 = 4 \pi^2 f_{01} u_2$$

y teniendo en cuenta (12) queda

$$\boxed{\frac{1}{V} \int n_{12} dR_1 dR_2 = 32 \pi^4 f_1 u_2} \quad (50)$$

El valor medio de puntos de intersección de R_1 con R_2 por unidad de volumen del espacio será pues

$$\bar{n}_{12} = \frac{f_1 u_2}{2 \alpha_1 \alpha_2}$$

V. Sean finalmente tres redes R_1 , R_2 , R_3 y representemos por n_{123} al número de puntos de intersección de sus superficies que en cada posición de las mismas quedan interiores a un cuerpo fijo K de volumen V . Queremos calcular

$$\int n_{123} dR_1 dR_2 dR_3$$

extendida, como siempre, a todas las posiciones distintas de R_1 , R_2 y R_3 . Para ello teniendo en cuenta (20) y llamando l_{12} a la longitud de la intersección de R_1 y R_2 que es interior a K es

$$\int n_{123} dR_3 = 4 \pi^2 f_3 l_{12}$$

y aplicando (49) se puede acabar la integración obteniéndose

$$\boxed{\frac{1}{V} \int n_{123} dR_1 dR_2 dR_3 = 64 \pi^7 f_1 f_2 f_3} \quad (51)$$

El valor medio de los puntos de intersección de las tres redes será pues, por unidad de volumen

$$n_{123} = \frac{\pi f_1 f_2 f_3}{8 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$$

Por ejemplo, si las redes están formadas simplemente por haces de planos paralelos a distancias Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 es $f_i = a$, $\alpha_i = a \Delta_i$ siendo a arbitrario, por tanto

$$n_{123} = \frac{\pi}{8 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}$$

III. APENDICE

DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA DE BLICHFELDT.

TEOREMAS ANÁLOGOS

1. *Enunciado del problema.* H. Hadwiger en un trabajo reciente [5] obtiene por otro camino y para redes particulares la misma fórmula (24) de § 5. I, generalización de la fórmula fundamental de Blaschke de la geometría integral plana, y hace de ella una aplicación a la demostración de un teorema de Blichfeldt [4] el cual puede enunciarse así:

«Si el espacio está dividido en paralelepípedos congruentes de volumen α y en cada uno de ellos hay v puntos situados de manera arbitraria pero la misma en todos ellos, todo volumen V puede, por traslación, colocarse de manera que contenga en su interior o en su contorno un número de puntos mayor que $v \frac{V}{\alpha}$ ».

En el trabajo citado Hadwiger no demuestra completamente el teorema, pues se limita al caso del plano y a demostrar que V puede colocarse de manera que contenga un número de puntos no menor que $v \frac{V}{\alpha}$, lo cual es menos que el teorema de Blichfeldt.

Nos proponemos en 2 dar una demostración completa del teorema de Blichfeldt para un espacio de m dimensiones y en 4 dar algunos teoremas análogos para el plano y espacio ordinarios.

2. *Demostración del teorema de Blichfeldt.* Supongamos primero un número finito N de puntos en el espacio m -dimensional. La posición de un volumen V , si sólo se consideran traslaciones como movimientos posibles, viene determinada por uno de sus puntos $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$. Sea Q_i uno de los

N puntos. Poniendo $dP = dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, la integral $\int dP$ extendida a todas las posiciones en que el volumen V contiene a Q_i vale V . Haciendo esto para todos los N puntos y observando que cada posición viene contada tantas veces como puntos Q_i contiene en su interior, llamando n a este número es

$$\int n dP = NV \quad (1)$$

Supongamos ahora el espacio dividido en figuras fundamentales de volumen α y en cada una de ellas v puntos en orden arbitrario pero el mismo en todas ellas. Por un procedimiento exactamente igual al seguido en el plano (§ 2. I) y en el espacio ordinario (§ 2. II) para demostrar el teorema fundamental, se puede ver que en este caso la fórmula (1) se transforma, limitando la integración a un volumen fundamental, en

$$\int_{\alpha} n dP = Vv \quad (2)$$

y por tanto el *valor medio* de n es

$$\bar{n} = v \frac{V}{\alpha} \quad (3)$$

Hay que demostrar que en alguna posición del volumen V este valor medio es sobrepasado. Para ello observemos que si hay posiciones (de medida no nula) con un número de puntos interiores *menor* que $\bar{n}$, habrá también, en compensación, posiciones en que este número sea *mayor* que $\bar{n}$, quedando demostrado el teorema. Queda pues el caso de que en *todas* las posiciones (excepto tal vez un conjunto de medida nula) el número de puntos contenidos en V o en su contorno sea exactamente $\bar{n}$. Veamos que aún en este caso hay alguna posición en que el número de puntos que contiene V (o están en su contorno) es *igual o mayor* que $\bar{n} + 1$. Para ello sea una posición en que contiene exactamente $\bar{n}$ puntos. Traslademos el volumen V en una dirección ω hasta lograr, o bien que se intro-

duzca
el prin
desde
hasta
a ser
e. Este
tender
estaría
puntos
de un
espeso
valor
sumo
de pos
sumo
que ha
 $n + 1$

3
una d
l y co
 $n = 1$.
do lo
 $n = 2$.
es nu
por lo

tos d
drado
mism
de la
de di
la fig
caso l

(*)
tales
perten

duzca un nuevo punto o bien que uno de los $\bar{n}$ salga fuera. En el primer caso está demostrado el teorema. En el segundo caso, desde que sale el primer punto (quedando en V sólo $\bar{n} - 1$) hasta que el número de puntos interiores o en el contorno vuelve a ser n se habrá recorrido en la dirección ω un cierto intervalo e . Este intervalo está acotado inferiormente, es decir, no puede tender a cero, pues en tal caso el punto que entra y el que sale estarían al mismo tiempo en el contorno (*) y habría ya $\bar{n} + 1$ puntos. Haciendo lo mismo en todas las direcciones ω a partir de una posición origen, quedará determinado un volumen de espesor e variable con la dirección pero que tendría un cierto valor finito. En este volumen la integral (2) toma para n a lo sumo el valor $\bar{n} - 1$, lo que quiere decir que hay un conjunto de posiciones (de medida no nula) para las cuales n vale a lo sumo $\bar{n} - 1$. En compensación, siendo el valor medio $\bar{n}$, tendrá que haber otras posiciones en las que V contenga por lo menos $\bar{n} + 1$ puntos.

Queda así demostrado el teorema.

3. *Una cuestión a resolver.* Obsérvese que en el caso de una dimensión, supuestos sobre una recta los puntos a distancia l y como volumen V un segmento de la misma longitud l , es $n=1$. Sin embargo hay efectivamente algunas posiciones (cuando los extremos de l son puntos de los señalados) en que $n=2$. En este caso la medida de las posiciones en que $\bar{n}=2$ es nula, o lo que es lo mismo, *siempre* el segmento contiene por lo menos un número de puntos *igual* al valor medio.

Análogamente, en el plano, si se considera la red de puntos de coordenadas enteras y únicamente *traslaciones*, el cuadrado de lado unidad y lados paralelos a los ejes cumple la misma propiedad de contener *siempre* por lo menos un punto de la red. Esto es general para un espacio de cualquier número de dimensiones.

La cuestión cambia si además de traslaciones se supone que la figura V puede tomar un movimiento cualquiera. Para este caso hemos visto que para el plano y espacio ordinarios ((28). I,

(*) El contorno de V se define como el conjunto de puntos del espacio tales que en todo entorno esférico de ellos hay puntos de V y otros que no pertenecen a V .

(32). II) el valor medio de puntos que contiene en su interior una figura de volumen V viene dado por la misma fórmula (3) la cual es general para cualquier número de dimensiones. Pero, habrá también en este caso figuras de cierta forma tal que en toda posición (salvo a lo sumo un conjunto de medida nula) contengan un número de puntos igual al valor medio $\bar{n}$?

Puntualizando y limitándonos al caso particular más simple, el problema se enunciaría así:

Dada la red de los infinitos puntos de coordenadas enteras en un espacio m -dimensional ($m \geq 2$), existe alguna figura de volumen $V=1$ de forma tal que en toda posición de la misma contenga en su interior o en su contorno por lo menos un punto de la red?

Si la respuesta, como parece, es negativa, cabe buscar el volumen mínimo necesario para que esto ocurra. Para figuras convexas parece que es el círculo (o en general si $m > 2$ la esfera o hiperesfera) de diámetro igual a la diagonal del cubo de arista unidad.

4. *Unas consecuencias de fórmulas anteriores. I. Caso del plano.* Limitándonos para fijar las ideas al caso particularísimo de una red de cuadrados de lado a y suponiendo que sobre ella se puede mover una línea de forma cualquiera y longitud u , la fórmula (26) de § 5. I dá, como valor medio del número de puntos de intersección

$$\bar{n} = \frac{4u}{\pi a}$$

luego: por un movimiento (traslación + rotación) siempre será posible llevar cualquier línea de longitud u a una posición tal que corte a la red por lo menos en $\frac{4u}{\pi a}$ puntos. Si este cociente no es entero se puede sustituir por el inmediato superior.

II. *Caso del espacio.* Supongamos también el caso particular de la red formada por todas las rectas paralelas a tres ejes coordenados formando cubos de arista a . Sea además una superficie de área f_1 móvil sin deformación. Para aplicar la fórmula (22) de § 4. II observamos que $u = 3a$, $\alpha = a^3$, por tanto

$$\bar{n}_{21} = \frac{3f_1}{2a^2}$$

es decir: por un movimiento (traslación + rotación) siempre será posible llevar toda superficie de área f_1 a una posición en que corte a la red por lo menos en $\frac{3f_1}{2a^2}$ puntos. Si este cociente no es entero puede sustituirse por el entero superior más próximo.

Si en lugar de la red de rectas anterior se supone la red formada por los planos paralelos a los de un sistema de coordenadas rectangulares a distancia a y como figura móvil una línea indeformable de forma cualquiera y longitud u_1 la fórmula (22) de § 4. II da

$$n_{12} = \frac{3u_1}{2a}$$

es decir: por un movimiento (traslación + rotación) es siempre posible llevar cualquier línea de longitud u_1 a una posición en que corte a los planos de la red por lo menos en $\frac{3u_1}{2a}$ puntos. Si este número no es entero, como siempre, puede sustituirse por el entero superior más próximo.

Rosario, Instituto de Matemáticas, noviembre de 1939.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Erstes Heft. Hamburger Mathematische Einzelschriften, 1936.
- [2] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Zweites Heft Hamburger Mathematische Einzelschriften, 1937.
- [3] E. CZUBER, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*, Leipzig, 1884.
- [4] BLICHFELDT, *A new principle in the geometry of numbers with some applications*. Transactions Am. Math. Soc. 15, 1914.
- [5] H. HADWIGER, *Über Mittelwerte im Figurengitter*. Commentari Mathem. Helvetici. Vol. 11, 1939.
- [6] L. A. SANTALÓ, *Unos problemas referentes a probabilidades geométricas*. Revista Mat. Hispano-Americana. T. XI, 1936.
Bajo el título de "Geometría Integral" han aparecido:
- [7] W. BLASCHKE *Integralgeometrie* 1. *Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n* . Actualités scientifiques et Industrielles 252. París 1935. Hermann y Cie.
- [8] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 2. *Zu Ergebnissen von M. W. Crofton*, Bulletin de la Soc. Roumaine des Sciences, 37, 1935.
- [9] O. VARGA, *Integralgeometrie* 3. *Croftons Formeln für den Raum*. Math. Zeits. 40, 1935.
- [10] L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral* 4. *Sobre la medida cinemática en el plano*. Hamburg Abhandlungen 11, 1936.
- [11] L. A. SANTALÓ, *Integralgeometrie* 5. *Über das kinematische Mass im Raum*. Actualités Scientifiques et Industrielles 357. París, 1936. Hermann & Cie.
- [12] B. PETKANTSCHIN, *Integralgeometrie* 6. *Zusammenhänge zwischen den Dichten linearen Unterräume im n -dimensionalen Raum*. Hamburg Abh. 11, 1936.
- [13] L. A. SANTALÓ, *Geometría integral* 7. *Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio*. Revista de la Academia Ciencias de Madrid, 1936.
- [14] O. VARGA, *Integralgeometrie* 8. *Über Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum*. Revista Matemática Hisp. Americana 10, 1935.
- [15] W. BLASCHKE und O. VARGA, *Integralgeometrie* 9. *Über Mittelwerte an Eikörpern*. Mathematica 12. Bucarest, 1936.
- [16] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 10. *Eine isoperimetrische Eigenschaft der Kugel*. Bull. Math. Soc. Roumaine des Sciences, 37, 1936.

- [17] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 11. *Zur Variationsrechnung*. Hamburg Abhandlungen 11, 1936.
- [18] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 12. *Vollkommene optische Instrumente*. Hamburg Abh. 11, 1936.
- [19] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 13. *Zur Kinematik*. Mathem. Zeits. 41, 1936.
- [20] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 14. *Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik*. Math. Ann. 113, 1936.
- [21] L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral* 15. *Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles*. Hamburg Abhandlungen 12, 1936.
- [22] A. MÜLLER, *Integralgeometrie* 16. *Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n* . Math. Zeits, 1936.
- [23] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 17. *Über Kinematik*. Delthion, Atenas 1936.
- [24] W. MAAK, *Integralgeometrie* 18. *Grundlagen der ebenen Integralgeometrie*. Hamburg Abh. 12, 1937.
- [25] O. VARGA, *Integralgeometrie* 19. *Über Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen*. Math. Zeits. 41, 1936.
- [26] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 20. *Zur Elliptischen Geometrie*. Math. Zeits. 41, 1936.
- [27] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 21. *Über Schiebungen*. Math. Zeits. 42, 1937.
- [28] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 22. *Geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie*. Hamb. Abh. 12, 1937.
- [29] H. GERICKE, *Integralgeometrie* 23. *Über eine Ungleichung für gemischte Volumina*. Deutsche Math. 2, 1937.
- [30] L. BERWALD und O. VARGA, *Integralgeometrie* 24. *Über Schiebungen im Raum*. Math. Zeits. 1937.
- [31] L. BERWALD, *Integralgeometrie* 25. *Über die Körper konstanter Helligkeit*. Math. Zeits. 1937.
- [32] TA-JEN WU, *Integralgeometrie* 26. *Über die kinematische Hauptformel*. Math. Zeits. 43, 1937.
- [33] W. MAAK, *Integralgeometrie* 27. *Über stetige Kurven*. Hamburg Abhandlungen 12, 1938.
- [34] TA-JEN WU, *Integralgeometrie* 28. *Über elliptische Geometrie*. Math. Zeits. 43, 1938.
- [35] W. MAAK, *Integralgeometrie* 29. *Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume*. Math. Annalen 116, 1939.
- [36] W. BLASCHKE, *Geometria Integrals* 30. *Densità negli spazi di Hermite*. Rendiconti Accad. Lincei Vol. 29, 1939.
- [37] L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral* 31. *Sobre valores medios y probabilidades geométricas*. Hamburg Abh. 1939.