ALGEBRA Y GEOMETRIA: SUS VINCULACIONES

Por el académico DR. LUIS A. SANTALÓ

1. INTRODUCCIÓN. En el momento actual la parte de la matemática que tradicionalmente se conoció con el nombre de Geometría está en evidente retirada. Sus dominios están siendo invadidos por el Algebra, cuyos métodos, más generales y ágiles, permiten presentar de manera unificada gran parte de la geometría clásica y, sobre todo, abren perspectivas de extensos campos donde trabajar y cosechar nuevos resultados.

En un trabajo anterior de estos Anales (*Geometría Analítica y Geometría Sintética,* Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, tomo XV, págs. 9-31) nos ocupamos de un aspecto de este problema, especialmente desde el punto de vista de la geometría diferencial, haciendo resaltar las ventajas y los inconvenientes de esta algebrización de la geometría e historiando sus orígenes. En el presente trabajo queremos abundar sobre el tema, considerándolo desde el punto de vista de los fundamentos de la geometría y de la geometría analítica. Tanto en el primer trabajo como en este segundo, el objeto principal es mostrar cómo el álgebra moderna ha permitido presentar a la geometría de una manera que es a la vez algebraica y geométrica, presentación que goza de las ventajas de ambas direcciones. En ella la geometría ha conservado su lenguaje y no ha perdido su cualidad principal de ser intrínseca y de trabajar según modelos espaciales en qué apoyar la intuición, pero la influencia del álgebra ha permitido poner al descubierto su íntima estructura, con lo cual la geometría viene a quedar en un mismo plano que otras estructuras de la matemática, ganando sobre todo en unidad, pero también en claridad y sistematización. Deberemos hacer un poco de historia para mejor comprender el estado actual y la manera cómo se ha llegado a él.

2. La geometría en la antigüedad. La geometría nació como "técnica", es decir, como un conjunto de reglas útiles para resolver problemas de la vida corriente. La misma palabra geometría significa "medir la tierra", y según Heródoto las primeras aplicaciones fueron las de los harpedonaptes egipcios al medir las tierras después de cada crecida del Nilo. Había necesidad de trazar perpendiculares y se descubrió que para ello servía muy bien una cuerda con nudos a las distancias 3, 4 y 5, hecho precursor del teorema de Pitágoras. Había que medir áreas, y para ello se descubrieron las reglas para las del cuadrado, rectángulo y trapecio. Para el área del círculo y longitud de la circunferencia bastaba un valor que fuera suficientemente aproximado para las necesidades de la práctica y por esto se tomaba para el número π a veces el valor 3 y a veces el más aproximado 256/81. En todos los casos, si las fórmulas daban resultados suficientemente precisos, ellas eran buenas, e iban formando el acervo de las geometrías pre-helénicas. El porqué de la validez de estas fórmulas, lo que después se llamó su "demostración", no interesaba, o por lo menos así se ha creído hasta fecha reciente, en que nuevos descubrimientos arqueológicos parecerían indicar que tal vez esta afirmación no fuera del todo exacta y que ya en la matemática babilonia del segundo milenio antes de Cristo hubiera principios de razonamiento deductivo. (Ver, por ejemplo, Babini (2). Por esto decimos que la geometría en sus primeros tiempos era una técnica; no era todavía ciencia, puesto que no utilizaba métodos deductivos; no era un producto de la razón sino de la experiencia. La exactitud llegaba hasta donde podían apreciarla los sentidos o exigirlo las necesidades prácticas de cada caso particular.

Pronto, sin embargo, la geometría se fue convirtiendo en ciencia, y aun en la ciencia pura por excelencia. Los problemas que planteaba la práctica tomaban a veces forma que interesaba como entretenimiento, como acertijo o como pasatiempo para ejercitar la razón o poner a prueba el ingenio o habilidad intelectual de los geómetras. Y cuando este caso llegaba, ya no bastaba que el resultado fuera suficientemente aproximado, puesto que ya no eran los sentidos o los aparatos de medida los encargados de juzgar su validez, sino que su certeza o falsedad era determinada por la razón, privilegio del hombre que llega mucho más profundo que cualquier instrumento de medida.

Llegamos así al siglo VI a.J.C., en el cual, con Pitágoras y su escuela, nace la geometría como ciencia. Se demuestra el teorema de Pitágoras y con él se descubren los números irracionales, el descubrimiento más trascendental de toda la matemática. Para una matemática técnica los números racionales son de sobra suficientes, pues con ellos se puede expresar un resultado con exactitud superior a la que cualquier aparato de medida es capaz de apreciar. En realidad la técnica usa únicamente números racionales; es únicamente a través de la razón que se llega a los números irracionales.

Durante tres siglos, de Pitágoras a Euclides, la geometría va ascendiendo en cantidad de conocimientos y en pureza de razonamiento. Se llega, con Platón, al concepto más diáfano y quintaesenciado de pureza científica. Dice en la República: "Como si se tratara de alguna finalidad práctica, los geómetras hablan siempre de cuadrar, prolongar, agregar, cuando en verdad la ciencia se cultiva con el único fin de conocer". Por primera vez se da una respuesta sublime al "para qué" de la ciencia: con el único fin de conocer.

Poco después de Platón, en el siglo II a.J.C., se escribe en Alejandría el libro cumbre de la matemática griega, los *Elementos* de Euclides, libro que significó el molde según el cual se edificó toda la matemática posterior. Durante siglos fue el libro de texto obligado de todas las escuelas y universidades donde la matemática era considerada. Con Euclides llega la geometría a un máximo; prácticamente toda la matemática es geometría. Observemos, por ejemplo, cómo las relaciones algebraicas se enuncian y estudian mediante figuras geométricas. Así, el teorema 6 del Libro II que Euclides enuncia: "Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida", no es otra cosa que la simple relación $(2a + b)\, b + a^2 = (a + b)^2$, y el teorema 7 que dice: "Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha, más el cuadrado de la otra parte" es, simplemente, equivalente a la relación $(a + b)^2 + a^2 = 2\,(a + b)\, a + b^2$. En la época griega, por tanto, la geometría ayuda al álgebra, todavía sin métodos propios.

3. La geometría en la Edad Media. Después de Euclides y sus inmediatos sucesores, Arquímedes (287-212 a.J.C.) y Apolonio (190 a.J.C.) empieza la decadencia. Circunstancias atribuibles a las más diversas razones condujeron a la gran noche del primer milenio de nuestra era. No sólo no se produce científicamente, sino que se retrocede; la geometría vuelve a la época egipcia o babilonia. Un ejemplo curioso

es el publicado por P. Tannery y el abate Clerval en 1900, bajo el título: *Une correspondence d'écolatres du XI siècle,* sobre la base de manuscritos latinos encontrados por ellos en la Biblioteca Nacional de París. Se trata de una correspondencia entre dos profesores alemanes que vivieron alrededor del año 1000 de nuestra era: Reginboldus, de Colonia, y Rodulfus, de Lieja. En ella estos dos seudomatemáticos discutían el teorema de los *Elementos,* según el cual la suma de los ángulos "interiores" de un triángulo vale dos rectos, y la discusión versaba sobre el significado de la palabra "interior", que consideraban como adjetivo aplicable a cualquier ángulo, no a los de un triángulo, como salta a la vista del contenido de los *Elementos,* entreteniéndose en elucubraciones filosóficas sin sentido. Es un interesante ejemplo de lo fácil que es pasar del exceso de rigor al disparate si no hay un mínimo de sensatez matemática. En la misma correspondencia tratan de la diagonal de un cuadrado de lado unidad; el primero afirma que vale 7/5 y el segundo 17/12, apoyando ambos sus afirmaciones en textos de maestros anteriores, pero sin intentar dar lo que ya los griegos, quince siglos antes, llamaban una demostración. Al final, viendo que entre 7/5 y 17/12 la diferencia no es tan grande, consideran que no vale la pena seguir discutiendo y abandonan la discusión.

La decadencia de la matemática durante la edad media va unida a la decadencia general del método científico. Difícilmente puede atribuirse a una sola causa; más bien fue el resultado de la confluencia de muchas de ellas. Un factor importante fue sin duda el error —muy extendido en todo tiempo y lugar— de creer que los fundamentos de una ciencia constituyen su parte más fácil, por la cual la enseñanza debe principiar. Los *Elementos* de Euclides, que aparecen como culminación de una época de alto nivel matemático, fueron tomados más tarde como libro de "texto" para "aprender" geometría. Por la aparente simplicidad de sus teoremas se creyó que por ellos debía empezar el estudio de la matemática. Craso error. La comprensión de los *Elementos* exige una preparación matemática elevada. Comprender un teorema no quiere decir comprender todos sus pasos sucesivos; hay que entender el porqué de ellos y captar la visión global de la idea que los preside. Una demostración no es comprendida si no se comprende, antes que nada, la necesidad de la misma. Y comprender la necesidad de muchas demostraciones de Euclides no es cosa fácil. Baste citar, como ejemplo, su teorema 2 (por un punto dado construir un segmento igual a otro dado) o su teorema 20 (en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos). Seguir y repetir las demostraciones de estos teoremas es fácil, pero entender el porqué es necesaria tanta complicación para llegar a resultados tan evidentes es, por el contrario, sumamente difícil *.

Otro ejemplo notable es el teorema 5 ("En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí"), famoso *pons asinorum* que durante siglos torturó a los alumnos de matemáticas y posiblemente ahuyentó a muchas inteligencias matemáticas que no alcanzaron a comprender —con toda razón, dada su edad— el porqué de tanta complicación ante un hecho, para ellos, tan evidente. Mucho hubiera ganado la matemática si en vez de los *Elementos* se hubieran difundido más, adecuándolos en forma de libros de texto, partes de las obras de Apolonio o Arquímedes, más difíciles en apariencia, pero más fáciles en realidad.

4. EL RENACIMIENTO. Sin embargo, con toda su incomprensión, los Reginboldus y Rodulfus de la edad media tuvieron cierto milagroso instinto de conservación, gracias al cual no fue todo perdido. Tuvieron interés en reproducir y conservar los manuscritos antiguos, aún sin entenderlos, y gracias a ello la matemática no murió, sino que sufrió tan sólo un letargo de varios siglos. Al llegar el renacimiento y volverse a pensar con claridad, las obras clásicas volvieron a ser comprendidas. No fue necesario rehacerlo todo; se pudo partir de ellas para iniciar de nuevo la marcha ascendente.

Son varios los hechos que prueban que al llegar a los siglos XV y XVI la matemática vuelve por sus fueros de prestigio y buen razonar. Ejemplos característicos son las obras de Nicoló Tartaglia (1490-1557) y Gerolamo Cardano (1501-1576), a las cuales se debe, entre otras cosas, la fórmula que da la solución de la ecuación de tercer grado. Estamos de nuevo con el espíritu de la matemática griega. Una solución apro-

(*) Es muy recomendable a este respecto la lectura del libro de B. Levi *Leyendo a Euclides,* Editorial Rosario, Argentina, 1947, donde se analiza el hecho evidente de que los *Elementos* de Euclides no fueron entendidos por sus seguidores, que veían y repetían sólo la forma, sin llegar a comprender el fondo. Como la historia se repite, lo mismo sucedió cuando a principios del siglo actual se quiso enseñar geometría en la escuela secundaria en base a los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert y el error se repetirá siempre que se pretenda enseñar algo empezando por sus fundamentos, como si se quisiera empezar a ver un palacio desde el pozo donde descansan sus fundamentos. Primero hay que elevarse y mirar el conjunto, aun a costa de no poder apreciar bien los detalles, y únicamente después se estará en condiciones de entender los motivos que han obligado a una sólida fundamentación.

aproximada de esta ecuación no era buscada ni hubiera sido considerada de valor, puesto que no se trataba de resolver ningún problema práctico. Se quería una fórmula exacta. ¿Para qué? Simplemente por el único fin de "conocer", para satisfacer la curiosidad de saber hasta dónde el hombre puede comprender y cuándo aparece el finisterre de sus posibilidades intelectuales.

Los siglos XVI y XVIII son eminentemente algebristas. La geometría permanece prácticamente estancada, mientras que el álgebra, con el *Ars Magna* de Cardano, el *Algebra* de Bombelli (1530-1579) y la aparición de los logaritmos en manos de Burgi (1552-1632) y Napier (1550-1617) se eleva al primer plano de la ciencia matemática, muy por encima de los conocimientos anteriores.

La matemática, sin embargo, es sólo una y todo progreso en alguna de sus partes significa inmediatamente un progreso general. El florecimiento del álgebra forzosamente debía significar un progreso también en la geometría, y ésta fue la obra simultánea de dos grandes figuras del genio francés: Pierre Fermat (1601-1665) y René Descartes (1598-1650) al crear la geometría analítica. Las dos ramas en que la matemática se había ido diferenciando desde Euclides y Diofanto, la matemática de la figura y la del número, la del "medir" y la del "contar", quedan unidas de manera indisoluble al crearse la geometría analítica. Según ella las figuras pueden estudiarse por ecuaciones y, a su vez, éstas admiten interpretación geométrica. La geometría anterior a Fermat y Descartes estudiaba las figuras por sí mismas, sobre y en ellas mismas; era la geometría pura por excelencia, la que luego se ha llamado, para diferenciarla de la analítica, geometría sintética.

Para ver cómo las tendencias geométrica y algebraica han ido avanzando alternativamente, a veces en franca colaboración, otras en exagerado exclusivismo, conviene que tomemos un ejemplo concreto pero muy significativo: el origen y evolución de las cónicas o curvas de segundo grado.

Las cónicas aparecen por primera vez estudiadas con detalle en ocho libros famosos de Apolonio de Perga (siglo II a.J.C.). En ellos las cónicas se estudian como secciones de un cono obtenido proyectando una circunferencia desde un punto exterior; es una definición puramente geométrica, es decir, sintética. Con la geometría analítica, en cambio, las cónicas se definen como aquellas curvas del plano formadas por puntos cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de segundo grado con dos indeterminadas. ¿Cuál de las dos definiciones es preferible? Para muchas cuestiones, ello es simplemente cuestión de gusto personal. Para un espíritu geométrico la definición de Apolonio tiene la ventaja de referirse directamente al ente que se trata de definir; se tiene, de una sola vez, la visualización completa de la cónica como figura geométrica. Para encontrar sus propiedades se opera luego sobre la figura, trazando rectas o dibujando circunferencias, pero siempre actuando de modo geométrico. Para un espíritu algebrista, en cambio, la segunda definición le permite llegar a las mismas propiedades sin intuir ningún elemento espacial, tan sólo con resolver ecuaciones y operar con expresiones algebraicas según las reglas del álgebra. La geometría analítica automatiza la investigación. Se tiene —y esto es precisamente lo que quería Descartes— un método para resolver los problemas geométricos. Como toda automatización tiene, por un lado la ventaja de permitir trabajar y resolver problemas a todo aquel que conoce las reglas operatorias, por escasa que sea su inventiva. Por otro lado, en cambio, la misma generalidad de sus reglas frena o anula la iniciativa personal, cerrando las ventanas a las hermosas y fructíferas perspectivas de los razonamientos sintéticos.

Desde un punto de vista más profundo, la geometría analítica presenta dos características que no se vislumbraron en sus comienzos, pero que en el siglo pasado y el actual han influido en gran manera en el progreso de la geometría. Nos referimos, primero, a que las ecuaciones de la geometría analítica dependen del sistema de coordenadas, y, segundo, a que si los elementos de las ecuaciones en vez de ser números reales son elementos de otro conjunto, la misma estructura matemática puede dar lugar a diferentes geometrías. Veamos con más detalle ambos aspectos.

La geometría analítica no es intrínseca. Las ecuaciones que representan una determinada figura dependen del sistema de coordenadas elegido. Cambiando el sistema de ejes, cambian las ecuaciones; no hay correspondencia biunívoca entre las figuras y las ecuaciones que las representan. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ representa la misma figura que la $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Unicamente han variado los ejes coordenados, o bien, lo que es equivalente, ha variado la posición de la figura en el plano. Esto obliga a crear un mecanismo o conjunto de reglas para saber en cada momento si las figuras o las propiedades de las mismas representadas por ecuaciones, son efectivamente intrínsecas o si dependen del sistema de coordenadas. Ello motivó la creación de la teoría de los invariantes, que en su aspecto más elemental se estudia en la mayoría de los textos actuales de geometría analítica y que en su aspecto superior fue la obra del siglo XIX, principalmente por Carley, Sylvester, Clebsch, Gordan y otros.

Pasemos a la segunda característica. Si en la ecuación de una cónica se considera que los coeficientes y los valores de las indeterminadas deben ser números racionales, se tiene una cónica racional; si la misma condición se exige para las ecuaciones de las rectas y demás elementos del plano, se tiene la geometría racional, o, más propiamente, la geometría sobre el cuerpo de los números racionales. Si los mismos números deben ser reales, resulta la geometría real, que es la usual y clásica. Si pueden ser complejos, se tiene la geometría compleja. En general, con sólo exigir que las coordenadas y los coeficientes de las ecuaciones que las ligan sean elementos de un cuerpo K, se tiene la geometría sobre K, cuyo estudio fue iniciado por Hilbert en sus *Fundamentos de la geometría* (1899) y que ha devenido de gran importancia en las últimas décadas.

5. GEOMETRÍA ANALÍTICA Y GEOMETRÍA SINTÉTICA. La geometría analítica prevaleció, casi de manera exclusiva, durante todo el siglo XVIII. Con ello la geometría progresó en muchos aspectos. Se pudieron aclarar, por ejemplo, los problemas clásicos de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo, cuyo planteo analítico conduce a ecuaciones irreducibles de tercer grado, y, por tanto, imposibles de resolver con el sólo uso de la regla y del compás. Pero en otros aspectos la geometría se estancó. Al querer resolver todos los problemas por el método analítico se llegaba, a veces, a complicaciones innecesarias, y la complejidad de fórmulas y ecuaciones ocultaba, otras, el hilo directo a la solución. El predominio analista fue, posiblemente, la causa de que pasara desapercibida la obra de Girard Desargues (1593-1661), en cuyo *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'une cone avec un plan* se encuentran las primeras ideas de lo que más tarde constituyó la geometría proyectiva de las cónicas, ideas fáciles de comprender por vía geométrica, pero complicadas de expresar por ecuaciones.

Hubo que esperar más de un siglo y medio para que la geometría sintética recuperara su lugar de vanguardia en el pensamiento matemático. Fue en 1820, por obra de Jean Victor Poncelet (1788-1867), oficial del ejército de Napoleón, hecho prisionero durante la campaña de Rusia y que durante el cautiverio concibió la obra que al regresar a Francia publicó con el título de *Traité des proprietés projectives des figures*. La geometría proyectiva hizo con ella su entrada en el campo de la matemática. Se vuelven a estudiar las figuras de manera sintética, directamente sobre las mismas. El álgebra vuelve a sus límites naturales, mientras que la geometría avanza por medios propios. El éxito de la geometría proyectiva fue espectacular; en pocos años aumentó enormemente el caudal de conocimientos nuevos, al mismo tiempo que se ordenaban y sistematizaban los viejos. La introducción de los elementos impropios o del infinito y su uso sistemático condujo a la forma elegante y cerrada que toma la geometría proyectiva. El "principio de dualidad", obra de Poncelet y Gergonne, duplicó de un golpe toda la geometría. En nuestros días, cuando la geometría proyectiva ha pasado a ser del dominio de los estudiantes de los primeros años de las Facultades de Ciencias o de Ingeniería, cuesta trabajo comprender cómo pudieron ser necesarios casi dos siglos para pasar del famoso teorema de Pascal (1632-1662), de los exágonos inscriptos en una cónica, al teorema de Brianchon (1785-1864) de los exágonos circunscriptos. La idea de dualidad, hoy tan natural, es una idea profunda, y aunque simple una vez captada, su comprensión supone una sedimentación grande de conocimientos previos. Tan sólo en los últimos treinta años se ha visto cómo la misma idea podía aplicarse al álgebra, a través de los espacios vectoriales, con éxito comparable al que tuvo en la geometría proyectiva.

Una vez en posesión de los métodos de la geometría sintética, se ensayó de llegar con ellos hasta donde había llegado la geometría analítica. Se tropezó con una primera dificultad: las figuras con que razona la geometría son siempre reales, ¿cómo ha de ser posible con ellas estudiar los elementos imaginarios de las mismas? Analíticamente es muy fácil, pues basta admitir que las coordenadas de los puntos pueden tomar valores complejos. Se logra con ello una gran uniformidad; una recta y una cónica —por ejemplo— tienen siempre dos puntos comunes (reales o imaginarios, distintos o confundidos). En pura geometría esta uniformidad desaparece: una recta y una cónica pueden tener dos, uno o ningún punto común. En geometría analítica, al definir una cónica por su ecuación, cabe la posibilidad de "cónicas imaginarias" o cónicas sin puntos; ¿cómo incluir este caso en una teoría puramente geométrica?

Aunque ya lo intentó Poncelet con su "principio de continuidad", en realidad no se consiguieron resultados satisfactorios hasta la segunda mitad del siglo pasado, por obra de von Staudt (1798-1867), en su *Geometrie der Lage*, publicada en 1847. Los puntos imaginarios aparecen definidos por involuciones elípticas y se opera con éstas de manera análoga a como la geometría analítica lo hace con aquéllos. Casi simultáneamente, Laguerre (1853) utiliza los elementos "isótropos", ya descubiertos por Poncelet, para definir el ángulo de dos rectas y otras características métricas de las figuras en términos de razones dobles, típicas características proyectivas.

El hecho de que se consiguiera hacer una teoría geométrica de los elementos imaginarios no quiere decir que la geometría analítica quedase fuera de combate. La matemática avanza cuando cada problema se trata dentro del medio ambiente que le es propio. Querer extrapolar un método fuera de sus límites naturales es siempre una tarea artificial que no suele conducir muy lejos. Cuando la geometría analítica se enseñoreó de toda la geometría, gran parte de ella se marchitó al perder su elegancia y vida propia. Tuvo que venir la geometría proyectiva para vigorizarla con los mismos aires que la habían acunado en su infancia. Del mismo modo, cuando la geometría proyectiva intentó salirse de sus cauces para extenderse sobre terrenos típicamente algebraicos, los resultados no pasaron de virtuosismos o curiosidades más o menos atrayentes. El terreno de los elementos imaginarios, así como la más general extensión a cuerpos cualesquiera, debe hacerse por métodos analíticos que son los apropiados al caso.

Las posibilidades de la geometría sintética aparecieron así limitadas al caso real y, dentro de éste, casi exclusivamente a la llamada geometría lineal y cuadrática, es decir, a la geometría cuyos elementos esenciales son rectas, planos y cuádricas. Para variedades de orden superior a dos, los métodos analíticos son siempre más convenientes y, en muchos casos, necesarios. Con esto se llegó, a principios del siglo actual, al convencimiento de que la geometría proyectiva había dado ya de sí todo el rendimiento posible; pasaba a ser un capítulo terminado de la matemática.

Mientras tanto, ¿qué papel jugaba la geometría toda, analítica o sintética, dentro del campo total de la matemática? El estudio de los invariantes, obligado por la geometría analítica, y el de las transformaciones geométricas que aparece con la geometría proyectiva (semejanzas, afinidades, movimientos...) sirvieron para ir relacionando la geometría con una idea fundamental que apareció en la matemática a principios del siglo XIX (Galois, Gauss) y que en la actualidad se ha extendido a toda ella: la idea de grupo. En su famoso *Programa* de Erlangen (publicado en los *Mathematische Annalen*, vol. 43, 1893), Félix Klein sistematiza toda la geometría a partir de la idea de grupo; toda la geometría pasa a ser el estudio de los invariantes de un grupo de-terminado. Con ello todos los conocimientos geométricos se traducen en propiedades de ciertos grupos, precisamente de los llamados "grupos clásicos", a saber: el grupo ortogonal, el grupo lineal, el grupo simpléctico y el grupo unitario.

Recíprocamente, la geometría actual consiste en el estudio de dichos grupos. En realidad no se trata más que de un cambio de lenguaje o un cambio de punto de vista. La diferencia entre geometría analítica y sintética subsiste igualmente, según el método por el cual se estudian los grupos correspondientes. En un principio el estudio era siempre analítico (Sophus Lie); es decir, se suponía un sistema de coordenadas y las transformaciones se representaban en función del mismo. Modernamente se vuelve a la tendencia sintética, pero no en base a la intuición geométrica, sino a la elaboración sintética que el álgebra ha hecho de sus estructuras. Con ello ha sido posible estudiar los grupos globalmente, no de manera exclusivamente local, como se hacía en sus comienzos.

Para mejor comprender y valorizar los métodos actuales es útil volver al ejemplo anterior de las cuádricas. Como ya dijimos, Apolonio define las cónicas como secciones planas de un cono de base circular. Es la definición geométrica por excelencia. Es una definición estática; las cónicas aparecen dadas por entero de una sola vez, no generadas por cierta ley. Prevalece esta definición hasta Descartes, cuya geometría analítica, al permitirle clasificar las curvas planas algebraicas por su grado, le proporciona la siguiente definición: "Podría indicar otros varios medios para trazar y concebir líneas curvas, que serían cada vez más complicadas; pero para abarcar todas las naturales y ordenarlas en ciertos géneros, no sabría nada mejor que decir que todos los puntos de las que se pueden llamar geométricas, es decir, que pueden medirse de manera precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una recta que puede expresarse por una ecuación, la misma para todos los puntos; y que, cuando esta ecuación no sube más allá del rectángulo de dos cantidades indeterminadas, o bien del cuadrado de una sola, la línea curva es del género más simple, en el cual no hay más que el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse" (*La Géométrie,* Libro II).

En lenguaje moderno, según Descartes, "cónica es toda curva imagen de una aplicación de la recta real en el plano real que se exprese por una relación algebraica de segundo grado". Obsérvese que, muy sutilmente, Descartes no dice que cónica sea la imagen de toda relación algebraica de segundo grado, pues puede haber relaciones, como las

$x^2 + y^2 + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ que no representen ningún punto o tan sólo un único punto. La inclusión de estos casos como "cónicas imaginarias" o "cónicas degeneradas" es posterior. Considerar a estas expresiones como representativas de cónicas obliga a ampliar los puntos del plano real con los puntos de coordenadas complejas.

La definición de Apolonio no es generalizable a las cuádricas y menos a las hipercuádricas. En cambio, la definición de Descartes vale para cualquier número de dimensiones con sólo aumentar el número de indeterminadas. En un espacio de n dimensiones, se llama hipercuádrica a toda variedad de dimensión $n - 1$ tal que las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de sus puntos satisfacen a una ecuación de segundo grado con coeficientes reales en las indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La definición analítica, como ya dijimos antes, tiene también la ventaja de extenderse a las cuádricas complejas o imaginarias con la simple substitución de la palabra "real" por "complejo" y de la misma manera vale para cuádricas sobre un cuerpo K cualquiera. Tiene, sin embargo, un inconveniente. Ella presupone un sistema particular de coordenadas respecto del cual la cuádrica se define. Se presenta el problema de volver a una definición intrínseca sin perder las ventajas de su inmediata generalización a n dimensiones y a un cuerpo general que presenta la definición analítica.

En el siglo pasado, la geometría proyectiva ayudó a este respecto, pero no resolvió completamente el problema. Las cónicas se definieron con Steiner (1832) y Chasles (1837) como "lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas de dos haces proyectivos distintos de un mismo plano", definición puramente geométrica, pero no intrínseca, pues depende de los haces proyectivos que generan la cónica. Es de carácter dinámico, pues los puntos de la cónica se van generando según cierta ley. Una definición análoga para las cuádricas ya no es tan inmediata, pero puede hacerse sustituyendo "haces proyectivos" por "radiaciones correlativas". Más difícil es dar una definición geométrica que comprenda a las cuádricas imaginarias. En este sentido presenta ventajas la definición de von Staudt (1847): "cónica es el conjunto de puntos autoconjugados en una polaridad del plano". Si la polaridad es uniforme, la cónica es imaginaria. Para las cuádricas de cualquier número de dimensiones o hipercuádricas, la definición es la misma. Por este camino se pueden estudiar las cuádricas imaginarias del espacio real, pero quedan a un lado las cuádricas sobre el cuerpo de los números complejos, o sea, de las cuádricas cuya definición analítica corresponde a ecuaciones con coeficientes complejos. Algo puede hacerse en este sentido, pero siempre de manera artificial y no simple y si se quiere pasar al estudio geométrico sobre un cuerpo cualquiera, el objetivo parece prácticamente inalcanzable.

6. El algebra geométrica. Se trata, por consiguiente, de buscar nuevos métodos que permitan hacer el estudio de las cuádricas en cualquier número de dimensiones y sobre cualquier cuerpo de manera intrínseca sin la utilización de sistemas de coordenadas. El método que actualmente se sigue es característico de toda la matemática moderna. Aunque nos referimos al ejemplo particular de las cuádricas, para fijar las ideas, es un método que empezó con el álgebra y ha invadido toda la matemática. Ver, por ejemplo, N. Bourbaki [4].

Se empieza por definir las formas cuadráticas sobre un espacio vectorial E definido sobre un cuerpo conmutativo K. Si K no es conmutativo también puede hacerse el estudio, pero es más complicado (Ver B. Segre [9]).

Definición de forma cuadrática. Una forma cuadrática sobre un espacio vectorial E definido sobre un cuerpo K es una aplicación Q de E en K tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$ para todo α de K y todo vector x de E;
2. La aplicación $F: (x, y) \rightarrow Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ de $E \times E$ en K es una forma bilineal (es decir, lineal tanto respecto de x como de y; x, y son vectores de E).

Sentada esta primera definición, recordemos que de todo espacio vectorial E se deduce el espacio proyectivo asociado $P(E, K)$ como cociente del complementario $E - \{O\}$ del vector nulo O de E por la relación de equivalencia "y es equivalente a x si existe un elemento a no nulo de K tal que $y = a x$". Con esto, toda forma cuadrática es también una aplicación de $P(E, K)$ en K y la primera idea natural es la de definir cuádrica como el núcleo de una forma cuadrática, o sea, como el conjunto de puntos de $P(E, K)$ cuya imagen por una forma cuadrática es el cero de K. Sin embargo esta definición, parecida pero no igual a la de Descartes, no es útil. Según ella, por ejemplo, en el caso de ser K el cuerpo de los reales, las cónicas $x^2 + y^2 = 0$ y $x^2 + 3y^2 = 0$ serían una misma, pues ambas tienen como único punto real el origen. Sin embargo, conviene considerarlas como cónicas distintas. Para evitar este inconveniente hay que tomar otra definición, menos natural pero más útil. Junto con el espacio vectorial E sobre K se puede suponer el espacio vectorial E^* que resulta al tomar en vez de K un cuerpo ampliado K^*. Sea $P(E^*, K^*)$ el espacio proyectivo asociado. Se toma la siguiente:

Definición de cuádrica. Dada una forma cuadrática $Q(x)$ sobre E, se llama cuádrica del espacio proyectivo asociado $P(E, K)$ al conjunto de los puntos de este espacio o de cualquier ampliación $P(E^*, K^*)$ del mismo, tales que $Q(x) = 0$.

Se tiene así una definición analítica, pero sin que aparezcan las coordenadas. Naturalmente que eligiendo una base en E las coordenadas pueden introducirse cuando se crea conveniente, pero gran parte del estudio puede hacerse sin necesidad de ellas. Es interesante hacer el estudio elemental de las cónicas y de las cuádricas a partir de la definición anterior, utilizando el simbolismo que de ella deriva, analítico en la forma pero sintético en el fondo. Por ejemplo, dado un punto y_0, el núcleo de la aplicación lineal $F(x, y_0)$ del espacio proyectivo en K es el plano polar de y_0 y de aquí es fácil deducir todas las propiedades de la polaridad clásica respecto de la cuádrica.

7. Los fundamentos de la geometría. Los anillos ternarios de Hall. El álgebra ha ayudado mucho a la geometría, pero también ésta ha sido muy útil como guía para poner de manifiesto nuevas estructuras algebraicas, e interpretar muchas propiedades de las mismas. Veamos algunos ejemplos.

Ya hemos definido el espacio proyectivo $P(E, K)$. Como todos los espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos entre sí, también lo serán los espacios proyectivos asociados, de manera que en vez de $P(E, K)$ se suele indicar $P_n(K)$ para poner de manifiesto la dimensión n y el cuerpo K que son las características esenciales del espacio proyectivo. Los subespacios lineales de E dan lugar a los subespacios lineales del mismo. Entre la geometría de $P_n(K)$ y el cuerpo base K hay las siguientes relaciones; que pueden verse, por ejemplo, en los libros de B. Segre [9] y R. Baer [3].

1. El teorema de Pappus (si un exágono del plano proyectivo tiene las dos ternas de vértices no consecutivos respectivamente alineados, los pares de lados opuestos se cortan sobre una misma recta), es equivalente a la conmutatividad de K. De aquí se deduce, por ejemplo, que en toda geometría finita (K finito y por tanto conmutativo según el teorema de Wedderburn) vale el teorema de Pappus. No se conoce una demostración geométrica directa de este teorema, pero interesantes

resultados al respecto han sido obtenidos por B. Segre ([9], pág. 331 y siguientes).

2. El teorema de Fano (en el plano proyectivo real los tres puntos diagonales de un cuadrivértice no están en línea recta) es equivalente a suponer que la característica de K es diferente de 2.

3. La identidad es la única colineación de $P_n(K)$ en sí mismo que deja invariantes $n+2$ puntos independientes (no hay $n+1$ de ellos en un mismo hiperplano) si y solamente si K es conmutativo.

4. En $P_n(K)$ existen sistemas nulos si y solamente si n es impar y K es conmutativo.

5. En toda cuaterna armónica, los dos segundos puntos son coincidentes o distintos según que K tenga característica 2 o no.

6. Permutando arbitrariamente entre sí los 4 puntos de una cuaterna armónica, el resultado es siempre otra cuaterna armónica si y solamente si la característica de K es 3.

Todos estos resultados y otros análogos que pueden verse en Baer [3] son ejemplos de las relaciones mutuas entre la geometría y el álgebra y de cómo cada una de estas disciplinas saca provecho de la otra: la geometría para aclarar sus fundamentos y el álgebra para tener una guía para la ordenación y disección de sus estructuras.

Pero no solamente la geometría ayuda a interpretar ciertas propiedades de los cuerpos, sino que ha dado lugar a la introducción de nuevas estructuras algebraicas. Veamos cual ha sido el camino.

Al querer fundamentar de manera axiomática la geometría intuitiva, como hicieron Euclides de manera incompleta e Hilbert de manera completa, son imprescindibles ciertos axiomas de orden y de continuidad que son un poco ajenos a la geometría basada tan sólo en "unir" puntos por rectas y a "cortar" rectas por otras. Limitándonos al caso del plano ($n = 2$) se puede ensayar de edificar una geometría a partir únicamente de los axiomas siguientes:

I. Dos puntos distintos determinan una y una sola recta que los contiene;

II. Dos rectas distintas tienen un punto común y solo uno;

III. Existen por lo menos cuatro puntos, de los cuales no hay tres sobre una misma recta.

El axioma II prueba que se trata del plano proyectivo, en el cual no hay rectas sin punto común. Se presenta el problema: ¿se podrán introducir en este plano coordenadas, o sea, se podrán representar los puntos por elementos o pares de elementos de cierto conjunto y las rectas por ciertas relaciones entre estos elementos? Ya Hilbert notó que si se cumple e lteorema de Desargues de los triángulos homológicos, se podrían introducir coordenadas mediante los elementos de un cuerpo, conmutativo o no (ver, por ejemplo, la elegante exposición de E. Artin [1]). Más tarde R. Moufang [7] observó que sino se cumplía el teorema de Desargues en todos los casos, pero sí cuando el centro de homología está sobre el eje (elación), todavía se podían introducir coordenadas, pero ellas ya no eran elementos de un cuerpo sino de un "cuerpo alternado", estructura algebraica que difiere de la de cuerpo por no cumplirse de manera general la asociatividad del producto, sino únicamente en los casos $x(xy) = (xx)y$, $(yx)x = y(xx)$.

Si no se supone ningún teorema previo, al estilo del de Desargues, el problema de la posible introducción de coordenadas ha sido estudiado y resuelto en toda su generalidad por M. Hall en 1943 [6]. El conjunto de las coordenadas ya no puede ser un cuerpo ni un cuerpo alternado, sino que aparece una nueva estructura algebraica: la de los "anillos ternarios". A cada plano proyectivo definido por los tres axiomas anteriores corresponde un anillo ternario y, recíprocamente, a cada anillo ternario correponde un plano proyectivo. La geometría enriquece al algebra con esta nueva estructura, que puede definirse de manera abstracta y que da lugar a numerosos problemas, algunos puramente algebraicos, otros de inmediata aplicación para aclarar los fundamentos de la geometría.

¿Qué es un anillo ternario? Es un conjunto C de elementos con dos operaciones de composición, indicadas respectivamente por un punto . y un circulito $_\circ$, tales que cada tres elementos x, m, b, de C, dados en un cierto orden, determinan el nuevo elemento $y = x.m_\circ b$ de manera que se satisfacen los siguientes axiomas:

1. Existe el elemento 0 (cero) tal que
$$0.m_\circ b = x.0_\circ b = b\,.$$
2. Existe el elemento 1 (unidad) tal que
$$1.m_\circ 0 = m.1_\circ 0 = m\,.$$
3. La ecuación $a.m_\circ z = c$ admite una y una sola solución en z.
4. Si $m_1 \neq m_2$, existe un único x tal que
$$x\,.\,m_1{}_\circ b = x\,.\,m_2{}_\circ b_2\,.$$

5. Si $a_1 \neq a_2$, existe un único par (m, b) tal que
$$a_1 \, . \, {}_o b = c_1 \ , \ a_2 \, . \, m \, {}_o b = c_2 \, .$$

Dado un anillo ternario C, se construye un plano afín, y luego por adjunción de una recta un plano proyectivo, tomando como puntos los pares (a, b) de elementos de C y como rectas las ecuaciones $y = m \, . \, x \, {}_o \, c$, $y = d$; el punto (a, b) pertenece a la recta $y = m \, . \, x \, {}_o \, c$ si $b = m \, . \, a \, {}_o \, c$ y a la recta $y = d$ si $b = d$. Si se cumple el teorema de Desargues el anillo ternario pasa a cuerpo, siendo el punto la operación producto y el circulito la operación suma del mismo.

No entramos en más detalles, remitiendo al lector interesado a los libros de Pickert [8] o de Hall [5] o a las memorias originales que en ellos se mencionan. Nuestro objeto era señalar cómo en esta penetración del álgebra en la geometría también la primera ha resultado beneficiada al ponerse de manifiesto nuevas estructuras que a su vez han permitido ir clarificando la confusa red de relaciones que están en la base de toda geometría.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ARTIN, *Geometric Algebra,* Interscience Publishers, New York, 1957.

[2] BABINI, J., *La Matemática Babilonia,* Ciencia e Investigación, Buenos Aires, vol, 19, 1963, págs. 318-322.

[3] R. BAER, *Linear Algebra and Projective Geometry,* Academic Press, New York, 1952.

[4] N. BOURBAKI, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques,* Elements de Mathématiques, Livre II, Chap. 9, Hermann, Paris, 1959.

[5] M. HALL, *Projective planes and relates topics,* California Institute of Technology, 1954.

[6] M. HALL, *Projective planes,* Transactions American Math. Soc. 54, 1943, 229-277.

[7] MOUFANG, R., *Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit.* Abhandlungen Hamburgische Universität, 9, 1933, 207-222.

[8] PICKERT, G., *Projektive Ebenen,* Berlín, Springer, 1955.

[9] SEGRE, B., *Lectures on Modern Geometry,* Ed. Cremonese, Roma, 1960.