I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra

Memorias / Anais / Proceedings

Alexa Ramírez y Yuri Morales
Editores

Patrocinadores

International Commission on Mathematical Instruction, International Mathematical Union, Comité Interamericano de Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Universidad Autónoma de Santo Domingo, United States Agency for International Development, Universidad de Costa Rica.

República Dominicana, 2013.
ISBN: 978-9945-415-55-1

Por el fortalecimiento de la Educación Matemática en América Central y El Caribe

Para o fortalecimento da Educação Matemática na América Central e no Caribe
For the strengthening of Mathematics Education in Central America and the Caribbean

Presentación

El *I Congreso de América Central de Educación Matemática y El Caribe* es una iniciativa de *la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, que nació durante la realización de la *Escuela Seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática*, celebrada en Costa Rica en agosto del 2012. Ese fue el segundo evento realizado por el *Capacity and Networking Projec*t de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Este libro de *Memorias* incluye trabajos presentados en Español, Portugués e Inglés provenientes de 16 países. La pertinencia y la calidad de todos los trabajos fue asegurada por un *Comité Científico Internacional*, apoyado por un grupo de revisores especiales de muchos países de la región y de fuera de ella. El evento recibió cerca de 300 propuestas de ponencias (comunicaciones, talleres, posters), pero a través de procesos de revisión muy cuidadosos y exigentes realizados durante muchos meses se han incorporado dentro de la programación al final solamente un poco más de un centenar de ellas.

El propósito de este evento es promover el progreso de la Educación Matemática en los países de la región, crear una tradición de eventos, apoyar el desarrollo y la creación de proyectos de investigación, buscar el desarrollo profesional de docentes en todos los niveles educativos y fortalecer las líneas de contacto entre los pueblos de los países de la región.

La base científica para la organización del congreso se estableció en Costa Rica, donde un equipo de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* aseguró la administración científica y de la plataforma tecnológica que brindó el soporte imprescindible.

Deseo expresar mi agradecimiento a todos los colegas y colaboradores: al *Comité Científico Internacional*, a los revisores especiales, a los colegas en Costa Rica que asumieron la administración científica y tecnológica del evento y también la edición de estas *Memorias*, al *Comité Organizador Local* en República Dominicana, y a los autores de los diversos países que aceptaron nuestra convocatoria para este *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Apresentação

O *I Congreso de América Central de Educación Matemática y El Caribe* é uma iniciativa da *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, que nasceu durante a realização da *Escuela Seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática*, celebrado na Costa Rica em agosto de 2012. Esse foi o segundo evento realizado pelo *Capacity and Networking Projec*t de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Este livro de *Proceedings* inclui trabalhos apresentados em Espanhol, Português e Inglês provenientes de 16 países. A relevância e a qualidade do evento tem sido assegurada por um *Comitê Científico Internacional*, apoiado por um grupo de revisores especiais de muitos países da região e de fora dela. O evento recebeu cerca de 300 proposta de trabalhos (comunicações, oficinas e pôsteres), mas através de processos de revisão muito cuidadosos e exigentes realizados durante muitos meses se tem incorporado dentro da programação ao final somente um pouco mais de uma centena delas.

O propósito deste evento é promover o progresso da Educação Matemática nos países da região, criar uma tradição de eventos, apoiar o desenvolvimento e a criação de projetos de investigação, buscar o desenvolvimento profissional de docentes em todos os níveis educativos e fortalecer as linhas de contato entre os povos dos países da região.

A base científica para organização do congresso se estabeleceu em Costa Rica, onde uma equipe da *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* assegurou a administração científica e da plataforma tecnológica que forneceu o suporte imprescindível.

Gostaria de agradecer a todos os colegas e parceiros: o *Comitê Científico Internacional*, uma revisores especiais, os colegas em Costa Rica que tomaram a gestão científica e tecnológica do evento e editar essas memórias, o *Comitê Organizador Local* em República Dominicana, e os autores dos vários países que aceitaram o nosso convite para este *I Congresso de Educação Matemática na América Central e no Caribe.*

Introduction

The *1st Central American and Caribbean Congress on Mathematics Education* is an initiative of the *Central American and Caribbean Network on Mathematics Education* that was born during the *International Seminar for Capacity Building in Mathematics and Mathematics Education* held in Costa Rica in August of 2012. It was the second event carried out by the *Capacity and Networking Projec*t of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

These *Proceedings* include papers in Spanish, Portuguese and English from 16 countries. The relevance and quality of the event have been assured by an International Program

Committee supported by a group of special reviewers from many countries in the region and from outside the region. Over 300 proposals (communications, workshops, posters) were received, but through the careful and rigorous review process over many months only a few more than 100 have been incorporated into the final program.

The purpose of this event is to promote progress in Mathematics Education in the countries in the region, create a tradition of such events, support the development of research projects, stimulate the professional development of teachers, and strengthen the communication ties among the countries of the region.

The scientific base of the organization of the Congress was established in Costa Rica, where a team from the *Central American and Caribbean Network on Mathematics Education* guaranteed the scientific administration, and operated the technological platform that provided indispensable support.

I would now like to thank all of our colleagues and collaborators: the *International Program Committee*, Special Reviewers, our colleagues in Costa Rica who accepted to carry on the scientific administration of the congress and the editing of these *Proceedings*, the *Local Organization Committee* in the Dominican Republic, and all the authors from so many countries who accepted our call to attend this *First Central American and Caribbean Congress on Mathematics Education*.

Angel Ruiz

Chair of the International Program Committee of the *Ist Central American and Caribbean Congress on Mathematics Education*
President of the Interamerican Committee on Mathematics Education
Vice President of the International Commission on Mathematical Instruction

Comité científico internacional

El Comité Científico Internacional

Preside: Angel Ruiz, Costa Rica (ruizz.angel@gmail.com)

Alexa Ramírez	Costa Rica	alexarv11@gmail.com
Carlos Sánchez	Cuba	csanchez@matcom.uh.cu
Claudia Groenwald	Brasil	claudiag1959@yahoo.com.br
Edison De Faria	Costa Rica	edefaria@gmail.com
Eduardo Mancera	México	eduardo_mancera@prodigy.net.mx
Edwin Chaves	Costa Rica	echavese@gmail.com
Eliana Rojas	Chile - EEUU	eliana.rojas@uconn.edu
Hugo Barrantes	Costa Rica	habarran@gmail.com
Jhony Alexander Villa	Colombia	jhonyvilla@gmail.com
José Chamoso	España	jchamoso@usal.es
Luis Carlos Arboleda	Colombia	luis.carlos.arboleda@gmail.com
Manuel De León	España	mdeleon@icmat.es
Nelly León Gómez	Venezuela	nellyleong@hotmail.com
Patricia Camarena	México	patypoli@prodigy.net.mx
Patrick Scott	EUA	pscott@nmsu.edu
Salvador Llinares	España	sllinares@ua.es
Sarah Inés González	República Dominicana	sarahgonzalez@pucmmsti.edu.do
Walter Otto Beyer	Venezuela	nowarawb@gmail.com

El Comité Científico Internacional coordina el programa científico y la revisión de todos los trabajos del evento. Ha contado también con el apoyo de varios académicos como revisores especiales:

Ana Cristina Ferreira	Brasil	anacfer@hotmail.com
Ernesto Sánchez	México	esanchez@cinvestav.mx
Gloria Sánchez-Matamoros García	España	gsanchezmatamoros@us.es
Jesús Pinto	México	psosa@uady.mx
María José Cáceres	España	majocac@usal.es
Martha Iglesias	Venezuela	mmiglesias@gmail.com
Uldarico Malaspina	Perú	umalasp@gmail.com
Yolanda Serres	Venezuela	yolanda.serres.voisin@gmail.com
Ivonne Sandoval	México	ivonne.sandoval.c@gmail.com

Comité organizador

Comité Organizador Local

Preside: Sarah González, sarahgonzalez@pucmmsti.edu.do (Presidente)
Juana Caraballo, jcaraballo@pucmmsti.edu.do
Ivanovnna Cruz, Ivanovnnacruz@pucmm.edu.do
Leonte Ramírez, ramirez1951@hotmail.com
Evarista Matías, evaristam@gmail.com
Nurys González, nurysdelcarmengonzalez@gmail.com
Luis Henríquez, lhenriquez@pucmmsti.edu.do
Bárbara Campos, bcampos26@hotmail.com
Katty Tejada ktejada@pucmmsti.edu.do

Directora general y Administradora de plataforma OCS
Ing. Alexa Ramírez, alexarv11@gmail.com

Subdirector de plataforma OCS
M.Sc. Yuri Morales, yurimoralesl@yahoo.com

Editores de las memorias
Yuri Morales y Alexa Ramírez

Escuela Seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática, celebrada en Costa Rica en agosto del 2012.

Índice

Conferencias plenarias

Título/Autores	Página
Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros Salvador Llinares	2
La Educación Matemática en Finlandia: Un camino seguro para otros países o una anomalía. Patrick Scott	17
La formation technologique des enseignants : un défi majeur Michèle Artigue	28
La otra matemática, … la de la enseñanza, la de los maestros, … Eduardo Mancera	47
Um sentido mais amplo de ensino da matemática para a justiça social Ubiratan D’Ambrosio	61

Conferencias paralelas

Título/Autores	Página
¿Cómo contextualizar y dejar pensar la Matemática? Carlos Sánchez	79
Tecnologías Educacionais e Educação Matemática: posibilidades e perspectivas futuras Claudia Groenwald	95
El papel de la geometría en el currículo de enseñanza primaria y media. Hugo Barrantes	102
El pensamiento funcional en los Programas de Estudio de Matemática para la Educación Primaria y Secundaria: Una visión integral. Edison de Faria	119
Fracciones y los números fraccionarios en la escuela elemental cubana. Celia Rizo, Luis Campistrous Pérez.	133
La lenta introducción del Sistema Métrico Decimal en Colombia (1801-1858). Luis Carlos Arboleda	142

Los MOOC (Massive Online Open Courses) en la capacitación docente en Matemáticas. 156
Alexa Ramírez-Vega

Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿son solo problemas para el aula? 170
José Chamoso

Matemáticas, Estándares Common Core y Transdisciplinaridad: Un análisis a la investigación y práctica pedagógica centrada en la educación de Latinos/Latinas en Los Estados Unidos. 187
Eliana D. Rojas, Xae Alicia Reyes, Ruth Urbina-Lilback

Qué enseñar sobre un tema de matemática escolar y cómo enseñarlo: elementos clave en la formación del docente. 200
Nelly León

Reflexiones sobre la resolución de problemas en la escuela. 220
Luis Campistrous, Celia Rizo

Un marco para la acción en la mejora de la educación matemática en América Latina: lecciones de una investigación regional y un experimento en la República Dominicana. 231
Gilbert Valverde

Minicursos

Título/Autores **Página**

Creando, dibujando, … aprendiendo matemática a través del comic. 258
Nelly León

Los números están en todas partes. 270
José Chamoso

Paseo por el universo de los números irracionales. 276
Carlos Sánchez

Currículo de Matemática na Educação Básica: Necessidades e Perspectivas. 295
Claudia Groenwald

Situaciones de modelación matemática y sus implicaciones para el aula de clase. 302
Jhony Villa

Comunicaciones

Título/Autores	Página
A comunidade quilombola do Curiaú na perspectiva da etnomatemática José Roberto Linhares de Mattos, Elma Daniela Bezerra Lima	313
A Prática Docente E A Formação Na Licenciatura Em Matemática: Investigando Conexões Possiveis Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Sonner Arfux de figueiredo	321
Actividades de aprendizaje en matemática, mediadas por recursos de la Web 2.0 Esteban Ballestero Alfaro	333
Afectos hacia la docencia de las matemáticas en futuros maestros Ana Maroto Sáez, Santiago Hidalgo Alonso, Tomás Ortega del Rincón, Andrés Palacios Picos	345
Algunas reflexiones sobre actividades en el aula de clase que han mejorado tanto la enseñanza como el aprendizaje de la matemática Alejandro Martínez Acosta, Vivian Libeth Uzuriaga López	354
Ambiente Virtual de Aprendizagem: uma possibilidade de ressignificar o ensino de Matemática Tanise Paula Novello	364
An activity involving geometry, arithmetic and numerical representations Loïc Geeraerts, Mireille Saboya, Fabienne Venant, Denis Tanguay	376
Análisis de la trayectoria docente de tres estudiantes para profesor en el campo de la educación estadística Ángel Ricardo Vargas Peña, Angie Carolina Cruz Cáceres, Vivian Carolina Herrera Espinosa	386
Análisis del discurso oral de profesores universitarios al explicar la noción matemática de variación Waldo Antonio Torres Vázquez	399
Aprendizagem do conceito de frações frente a situações de aprendizagem sugeridas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo Raquel Gomes de Oliveira	411
Atitudes em relação à Estatística de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Júlio Henrique da Cunha Neto, Raquel Oliveira Bodart	423

Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas 435
Luis Ángel Bohórquez Arenas

Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico 447
Adriana Tiago Castro dos Santos

Características de una clase de derivada no convencional 457
Ricardo Enrique Valles Pereira, Dorenis Josefina Mota Villegas

Cartilla TIC para la enseñanza de las matemáticas. 469
Carlos Alberto González Martínez

¿Cómo participa la historia de la Aritmética en un curso de formación inicial de profesores de Matemáticas? 478
Adriana Gálvez Socarrás, Andrés Maldonado Guinea

Competencias de los docentes de Matemática según criterio estudiantil 486
Pablo José Mena Castillo

Complex adaptive systems and quantitative reasoning in an interdisciplinary STEM mathematics classroom 499
Robert Mayes, Kania Greer, Deborah Walker

Construcción del pensamiento lógico matemático, programa "CENDI PARA TODOS" 510
Iliana Roca Benítez, Damian Alejandro Clemente Olague, América del Carmen Ortiz Juárez

Contribuições de um curso online na formação de professores de Cálculo: reflexões a partir da perspectiva conhecimento da prática 520
Andriceli Richit, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Conversas entre a Filosofia da Diferença e a Etnomatemática 529
Claudia Glavam Duarte, Leonidas Roberto Taschetto

Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano 537
Osiel Ramírez Sandoval , César Fabián Romero Félix, Asuman Oktaç

Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual 548
Benjamín Martínez Navarro, Mirela Rigo Lemini

Currículum oficial de matemáticas y Cultura de Racionalidad 559
Mirela Rigo Lemini, Sergio Gonzalo Rodríguez Rubio

Cyberformação Semipresencial: uma possibilidade de formação continuada de professores de matemática 571
Maurício Rosa, Vinícius Pazuch

De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: Lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales 581
Minerva Martínez López, M. Teresa Rojano Ceballos

Demostraciones visuales de integrales complejas 592
José Saquimux

Demostrar y hacer demostraciones geométricas: algo de lo cual ocuparse en la formación de maestros de matemáticas en Puerto Rico 602
Olga Lucía Quintero Fonseca

Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas 614
Luis Córdoba, Fabiana Montenegro, Egle Elisabet Haye, María Elina Díaz Lozano

Dificultades de profesores de bachillerato en México para implementar cambios curriculares en su práctica docente 627
María de Lourdes Miranda Quintero, Ana Isabel Sacristán Rock

Dimensiones afectiva y ecológica del conocimiento didáctico-matemático del maestro 635
Hilduara Velásquez Echavarría, Walter Fernando Castro Gordillo

El Análisis Didáctico y el estudio de los cambios curriculares en la enseñanza de la aritmética: la implantación del Sistema Métrico Decimal en España 643
Miguel Picado Alfaro, Luis Rico Romero, Bernardo Gómez Alfonso

El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones 654
Claudia Margarita Acuña Soto, Sergio Damián Chalé Can

El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas 666
Ferney Tavera Acevedo, Jhony Alexander Villa-Ochoa

El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años 677
Diana Zakaryan

Em Busca da Dimensão Teórica da Etnomatemática 689
Roger Miarka

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica 697
Erilúcia Souza da Silva, José Carlos Pinto Leivas

Enseñanza de las matemáticas. Plan de Estudios 2011 709
Edith Arévalo Vázquez

Especialização a distância para professores de matemática: um projeto SEEDUC/CECIERJ/UFF 722
Sandra Maria Nascimento de Mattos, Celso José da Costa

Estrategias cognitivas para resolver problemas matemáticos en alumnos de Profesorado en Enseñanza Básica 734
Liliana Belkis Monzón, Liliana Graciela Larcher, Yesmín Nassif, María Rita Ciucci

Estrategias comunicativas en la clase de matemáticas 746
Nury Yolanda Suárez Avila

Estrategias de solución de problemas matemáticos en estudiantes preuniversitarios 757
Andrés Hernández Córdova

Etnomatemática e Discurso Performático: a construção de identidades na escola 766
Júlio César Augusto do Valle

Etnomatemática em três dimensões na educação escolar indígena 777
José Roberto Linhares de Mattos, Geraldo Aparecido Polegatti

Evaluación de docentes y estudiantes de bachillerato mediante pruebas objetivas y estandarizadas de matemáticas 785
Laura Alejandra Bonilla Ramos, Faustino Vizcarra Parra, José Vidal Jiménez Ramírez

Evaluación del cambio en la producción de numerales arábigos 796
Diego Alonso Medina Rodríguez

Evaluación del desempeño profesional de docentes de matemática 808
Pablo José Mena Castillo

Evolución de la competencia comunicativa matemática en un contexto de master de formación de profesores de matemática. La evolución de Ester 818
Claudia Vargas Diaz

Fatores que permeiam o comprometimento dos alunos na aprendizagem da Matemática 829
Lenice Mirandola da Rocha, Marlise Gueller

Generalidades de un experimento de enseñanza desarrollado en la formación inicial de maestros de educación primaria 841
Gabriela Valverde Soto

Historia del Álgebra y la Aritmética en la construcción de conocimiento pedagógico 853
Adriana Gálvez Socarrás, Jairo Triana Yaya

Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticos con un enfoque crítico 863
Maytte Lorena Fernández Arteaga

Influencia del software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria 876
Natalia Ruiz López

Intercâmbio Acadêmico entre Brasil e Estados Unidos: Leopoldo Nachbin - bolsista da Fundação Rockefeller 888
Lucieli Maria Trivizoli

Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio 899
Johan Espinoza González, Jose Luis Lupiañez Gómez, Isidoro Segovia Alex

Investigação das habilidades e competências estatísticas de estudantes recém-ingressos em uma universidade pública brasileira 912
Lidiane Santos de Freitas, Daiane Lemos de Sá, Suzi Samá Pinto, Mauren Porciúncula Moreira da Silva

Jogo de fixação de aprendizagem em Estatística no Ensino Fundamental 920
Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Amanda Aparecida Rocha Machado, Joana dos Santos Silva, Valéria Ciabotti

Jogos de linguagem matemáticos de mulheres rendeiras de Florianópolis-SC-Brasil 932
Amanda Magalhães, Claudia Glavam Duarte

La modelación matemática en ingeniería de diseño 942
Paula Andrea Rendón-Mesa

La objetivación del número racional 950
José Wilde Cisneros, Walter Fernando Castro Gordillo, Sandra Y. Cadavid

La Razón de Cambio. Niveles de Comprensión del Profesor de Educación Básica en México 961
Miguel Díaz Chávez

La respuesta al problema de la medida de figuras planas en los antiguos griegos 972
Daniel Steven Moran Pizarro

Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones 983
Leonardo Ceballos Urrego, Alexander Murillo Moreno

Los programas de formación de maestros de matemáticas y su relación con las prácticas docentes 996
María Rocío Malagón Patiño

Los usos del conocimiento matemático fuera de la escuela 1007
Plácido Hernández Sánchez, Gabriela Buendía Ábalos

Matemáticas en grupo diferenciado artes y humanidades nivel medio 1020
Dolly Magdalena Martínez Pérez, Santa Daysi Sánchez González

Mathematics Teachers' Explorations of Indigenous Mathematical Knowledge Systems through Immersion in African Cultures 1028
Iman C. Chahine

Mediación cultural con SimCalc en la adquisición del conocimiento del movimiento rectilíneo 1038
Leticia Sánchez López, Luis Enrique Moreno Armella

Medios semióticos de objetivación en estudiantes de sexto grado cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. 1051
Anderson Javier Mojica Vargas

Multiplicação nos Números Naturais para alunos com Necessidades Educativas Especiais 1060
Tania Elisa Seibert

Noción de límite basada en la tipología de Brousseau 1073
Francisco G. Herrera Armendia, Enrique Salazar Peña, Marleny Hernández Escobar, Raciel Trejo Reséndiz

O Contrato Didático Nas Aulas De Matemática 1085
Antonio Sales, José Felice, José Wilson dos Santos, Sonner Arfux de Figueiredo

Observar com sentido: um experimento com licenciandos em Matemática 1094
Lucas Gabriel Seibert, Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Salvador Llinares Ciscar

Os Números Irracionais e seu ensino
delineando a imagem conceitual de um grupo de professores 1103
Tânia Maria Mendonça Campos, Olga Corbo, Ruy César Pietropaolo

Perfil e inclinación vocacional en matemáticas de los estudiantes del Programa Ciclo de Iniciación Universitaria de la Universidad Simón Bolívar 1112
Ramón Abancín, Vladimir Strauss

Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües 1126
Luis Arturo Ávila Meléndez

Preservice Teachers Perception of their Preparation Program to Cultivate their Ability to Teach Proof 1134
Ruthmae Sears, Eva Mueller-Hill, Ilyas Karadeniz

Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el diseño de una propuesta de intervención en el aula desde un enfoque funcional. 1141
Mónica Mora Badilla, Fabián Gutiérrez Fallas, Francisco Herrera Arroyo

Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel 1153
Zaida Margot Santa Ramírez, Carlos Mario Jaramillo López

¿Qué aporta el realismo crítico a la investigación en matemática educativa? 1163
Iskra Nunez

¿Qué cambios implementan los profesores de Matemáticas en su práctica docente a partir de sus reflexiones sobre las diferentes reformas y propuestas curriculares? 1177
Sandra Evely Parada Rico, María de Lourdes Miranda Quintero

Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas 1186
Diego Garzón Castro, Octavio Pabón Ramírez, Myriam Vega Restrepo

Resolución de problemas aditivos en estudiantes sordos 1198
Diego Fernando Guerrero López, Nohemy Marcela Bedoya Ríos, Diego Alonso Medina Rodríguez

Resultados de un proyecto investigativo en Matemática para ingeniería 1210
María de Lourdes Bravo Estévez, Domingo Curbeira Hernández, Yohanna de la Caridad Morales Díaz, Migdalia de los Milagros Torres del Toro

Ser bom professor de matemática: a visão de professores iniciantes 1222
Sandra Maria Nascimento de Mattos

Tiempo para aprender matemática en escuelas públicas y privadas: comprendiendo las diferencias en aspectos del curriculum implementado en la República Dominicana 1232
Renzo Roncagliolo Jones

Transdisciplinaridade e Etnomatemática: uma reflexão acerca da formação de professores 1238
Júlio César Augusto do Valle

Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual 1247
Maricela Bonilla González, Teresa Rojano Ceballos

Um Panorama das Disciplinas de Fundamentos sobre a Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1257
Lia Corrêa da Costa, Saddo Ag Almouloudg

Um Pensamento Reflexivo na Utilização das Tecnologias no Ensino da Matemática 1266
Luiz Carlos de Souza Ramos Junior, Armando Traldi Junior

Una experiencia de formación continua con educadores matemáticos en Costa Rica 1276
Andrea Araya Chacón

Una experiencia de formación en "Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas" 1288
Edgar Alberto Guacaneme Suárez, José Leonardo Ángel Bautista, Jhon Helver Bello Chávez

Uso de software libre para el aprendizaje de la integral definida 1300
Mabel Azucena Medina, Héctor Eduardo Rubio Scola

Visualizando conjuntos en la recta real y el plano 1311
Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Leticia Sosa Guerrero, José Iván López Flores

Talleres

Título/Autores	Página
Análisis y resolución de problemas a través de una exploración digital secuenciada Eduardo Basurto Hidalgo	1318
Aprendiendo modelación matemática de sistemas físicos a través del diseño y programación de videojuegos serios Angel Pretelín-Ricárdez, Ana Isabel Sacristán Rock	1325
Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Sofware GeoGebra Andriceli Richit, Maria Margarete do Rosário Farias	1333
Conocimiento didáctico-matemático del maestroque enseña matemáticas Hilduara Velásquez Echavarría, José Wilde Cisneros	1342
Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática Ronald Arias Madriz	1351
Desarrollo del concepto de fracción en la escuela elemental:Aportes de la matemática en contexto Omar Hernández Rodríguez, Jorge M. López Fernández, Ana Helvia Quintero	1358
El origami y el doblado de papel como herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos. Orlando Monsalve Posada	1368

El pensamiento algebraico, multiplicativo y aditivo desde una perspectiva semiótica cultural 1380
John Gomez Triana, Javier Mojica Vargas, Oscar Leonardo Pantano Mogollón

“Enseñanza del concepto de número o competencia matemática temprana con TIC” 1390
Aleyda Yudit Velázquez Hernández, Jesús Enrique Ruiz Cortez

Matemática Divertida: Una Estrategia para la enseñanza de la Matemática en la Educación Básica 1403
Ivanovnna Milqueya Cruz Pichardo

Modelagem computacional para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia 1418
Maria Madalena Dullius

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra 1428
José Carlos Pinto Leivas

Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización 1437
Viviana Paola Salazar Fino, Sandra Milena Jiménez Ardila, Lyda Constanza Mora Mendieta

Taller: Concepciones en torno al infinito actual: análisis mediado por el software Cabri - Geometre 1448
Juan Carlos Vega Vega

Uso de tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales 1459
Eduardo Basurto Hidalgo

Posters

Título/Autores **Página**

Abriendo puertas 1468
Sonnia Méndez Matos, Bárbara Campos Guzmán

Al abordaje de las estructuras lógicas de la Lengua de Señas Mexicana (LSM) 1470
Elizabeth Becerra Ramos, Ricardo Quintero Zazueta

Diferencias por género en Matemáticas: La brecha continua 1473
Tulia Esther Rivera Flórez, Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, María Angélica Toscano Salas

Diseño de un aula virtual de matemática I 1477
Dorenis Josefina Mota Villegas, Ricardo Enrique Valles Pereira

Duplicação do cubo: um experimento em sala de aula 1479
Carla Alves de Souza

El efecto de utilizar la plataforma Edu 2.0 en el aprovechamiento y actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes en la escuela secundaria 1481
Yamily Colón Negrón, Josiel Rosado Tirado, Amabel Soto Guzmán

Estatística no curso tecnólogo: a pesquisa como ferramenta para a tomada de decisão 1484
Susana Beatris Oliveira Szewczyk

Guanacastequizando los nuevos programas de estudios de matemáticas 1486
Oscar Mario Castrillo Duarte, Eilyn Duarte Abarca, Gaudy Julissa Jiménez Ordoñez

Iniciación al álgebra: reporte de una experiencia de aula 1489
Ángela María González Pascagaza

Interpretação e construção de conceitos gráficos com o auxilio do software open office calc: uma experiência com alunos das series finais do ensino fundamental 1491
Bruno Grilo Honorio

La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia 1493
Sandra Milena Jiménez Ardila, Viviana Paola Salazar Fino, Lyda Constanza Mora Mendieta

Mezcla de registros de representación: un obstáculo para el aprendizaje 1496
César Fabián Romero Félix, Osiel Ramírez Sandoval , Asuman Oktaç

Resolución de problemas como medio para la construcción de aprendizajes y el logro de competencias: una experiencia en educación superior 1499
Mónica Mora Badilla, Fabián Gutiérrez Fallas, Francisco Herrera Arroyo

Trayectoria académica de los estudiantes de las licenciaturas en matemáticas de la Universidad Simón Bolívar durante la última década 1502
Ramón Abancín , Vladimir Strauss

Conferencias plenarias

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Conocimiento de matemáticas y Tareas en la formación de maestros

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

La formación matemática de los maestros es una preocupación relevante a nivel internacional. En este trabajo identificamos dos ideas que ayudan a organizar nuestras reflexiones sobre este tema. En primer lugar, la necesidad de considerar ámbitos del contenido matemático en sentido amplio y “grandes ideas” que articulan las matemáticas para pensar en la formación matemática de los maestros. En segundo lugar, se ejemplifican tres aproximaciones complementarias para el desarrollo del conocimiento de matemáticas: resolución de problemas de matemáticas, análisis de producciones de los estudiantes, aproximación que integra diferentes tareas profesionales- planificar, gestión de la interacción y análisis de las producciones de los estudiantes. Finalmente, se reconoce el carácter contextualizado que pueden adoptar estas aproximaciones y la necesaria articulación de agendas de investigación vinculadas.

Palabras clave: formación de maestros, competencia docente, aprendizaje del profesor, conocimiento de matemáticas

Introducción

El desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes como un aspecto de lo que significa ser un ciudadano formado es un objetivo de los movimientos de reforma curricular y de innovación en la enseñanza. Los mecanismos utilizados para lograr este fin son las reformas curriculares y la introducción paulatina de nuevos recursos didácticos (software, uso de TICs, etc). Sin embargo, un actor clave para la mejora de la enseñanza de las matemáticas es el profesor de matemáticas. Como consecuencia en los últimos años se han producido numerosos trabajos aportando información sobre la naturaleza y características del conocimiento que debería tener un profesor para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiante (Ball, Thames y Phelps, 2008; Pinto y González, 2008), y de formas de entender el aprendizaje del maestro. En este contexto es posible identificar tres consecuencias del interés sobre el conocimiento del maestro y su desarrollo. En primer lugar las aportaciones en relación a la identificación de lo que el futuro maestro conoce de los tópicos matemáticos (Batanero, Ruiz y Arteaga, 2010; Fortuny, Batanero y Estrada, 2004; Gozato, Godino y Neto, 2011; Ortiz, y Font,2011; Sgreccia y Massa, 2012). En segundo lugar, las características que pueden adoptar las tareas y los entornos de aprendizaje que los formadores proponen para el desarrollo del conocimiento del profesor y fomentar maneras de usarlo en la resolución de problemas profesionales generados en la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, Valls y Roig, 2008; Monchón y Flores, 2010; Prieto, y Valls, 2010). Finalmente, información sobre el aprendizaje del maestro y factores que pueden apoyarlo o limitarlo lo que permite una mejor comprensión de este proceso (Llinares, 2012-b; Penalva, Rey y Llinares, 2013).

Un tema transversal a estos tres ámbitos en la formación de maestros desde la perspectiva de las matemáticas es la manera en la que el conocimiento de matemáticas necesario para desarrollar las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas puede ser desarrollado en los programas de formación. Centrarnos en este tema genera cuestiones sobre cómo el conocimiento de matemáticas del maestro se relaciona con otros dominios del conocimiento para la enseñanza y qué formas pueden adoptar las tareas (Clarke, Grevholm, & Millman, 2009) y de qué manera se pueden articular (Llinares Valls y Roig, 2008) en los programas de formación. En este trabajo aportamos algunas ideas sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas en la resolución de problemas profesionales y qué forma pueden adoptar las tareas en los programas de formación complementando los focos sobre la resolución de problemas de matemáticas, el análisis de las producciones matemáticas de los alumnos y la realización de actividades integrando diferentes tareas profesionales relativas a la enseñanza de las matemáticas.

El conocimiento de matemáticas del maestro en la resolución de problemas profesionales

Algunas de las tareas profesionales del maestro son gestionar el aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos presentandoles tareas matemáticamente relevantes, interaccionando con ellos durante la resolución y valorando sus producciones con el objetivo de tomar decisiones de acción. Durante todo este proceso, la manera en la que el maestro comprende los contentidos matematicos desempeña un papel relevante. Junto a la comprensión matemática otras variables que intervienen en este proceso son las concepciones-creencias que los maestros tienen sobre su papel como maestros, lo que significa aprender matemáticas y cuáles son las evidencias de este aprendizaje (Lebrija, Flores, Trejos, 2010; Prieto y Valls, 2010; Sanhueza, Penalva y Friz, 2013). En este contexto, las experiencias que tengan los futuros maestros como aprendices de matemáticas en cierta medida determinarán la manera en la que pueden aprender a resolver diferentes tareas profesionales como elegir o diseñar problemas de matemáticas relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, o considerar de qué manera las producciones de sus alumnos son evidencia del aprendizaje matemático pretendido. Esta reflexión subyace a las cuestiones formuladas por los formadores de maestros al considerar qué necesita el maestro para desenvolverse en estas situaciones. Las respuestas que indican que el maestro necesita un conocimiento de matematicas “fuerte” y “solido” son demasiado generales cuando hay que tomar decisiones en relación a la formación inicial.

Intentar concretar estas respuestas ha llevado a enfatizar una perspectiva profesional de la labor del maestro considerando el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas en las diferentes tareas profesionales que debe realizar (Ball y Bass, 2000): desempaquetar las ideas y procedimientos matemáticos integrados en las tareas matemáticas, identificar diferentes representaciones para mostrar las ideas matemáticas, analizar métodos y soluciones diferentes de las de uno mismo y dotar de sentido a lo entienden sus alumnos. Estas actividades estan vinculadas a tareas profesionales como la planificación de la enseñanza, la gestión de la interacción y el discurso matemático en el aula y la valoración del aprendizaje de los estudiantes dotando de sentido a sus producciones (Llinares, 2012-a). En este sentido, el conocimiento de matemáticas que el maestro puede necesitar está determinado por los contextos de uso de este conocimiento en la resolución de las tareas profesionales. Esta perspectiva genera referencias para contestar a la cuestión sobre las matemáticas que debería conocer un maestro (Climent; Romero; Carrillo; Muñoz; Contreras, 2013; Monchon y Morales, 2010). En particular porque traslada la atención desde una perspectiva disciplinar del conocimiento de las matemáticas a una perspectiva profesional definida por la tarea que debe realizar un maestro: enseñar matemáticas (Ball; Thames, y Phelps, 2008).

Esta reflexión conlleva la necesidad de identificar las grandes ideas matemáticas que pueden articular la enseñanza de las matemáticas para definir la formación matemática del maestro. Ejemplos de estas ideas transversales pueden ser el desarrollo del sentido numérico, los procesos de generalización, el razonamiento proporcional, el pensamiento relacional que permite adoptar una visión estructural de la aritmética previo a la introducción del algebra, los procesos de simbolicación y así.Adoptar esta perspectiva transversal a los dominios matemáticos pretende que el maestro pueda establecer relaciones entre diferentes ámbitos del currículum y generar una visión más holística del contenido matemático que debe enseñar. Por ejemplo, para dar razones de por qué los procedimientos son como son y proporcionar explicaciones pertinentes. Desempaquetar las ideas matemáticas que justifican los procedimientos o hacer explícitos los significados de los conceptos cuando se usan diferentes modos de representación requiere una comprensión de las matemáticas escolares que define el conocimiento especializado de matemáticas. Especializado en el sentido de que es un conocimiento de matematicas que le permita realizar las tareas profesionales de ser maestro.

Por ejemplo, una de las ideas importantes en la educación primaria es el desarrollo del sentido numérico en los estudiantes de educación primaria. El sentido numérico permite a los alumnos tomar decisiones relativas a las relaciones entre las cantidades y los números para proporcioanr razones válidas para sus decisiones. Una de las ideas que un maestro debe gestionar en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria para el desarrollo del sentido numérico es la idea de unidad en aritmética y su representación. Esta idea es clave en diferentes ámbitos de la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles y, por tanto, subraya la importancia de la comprensión por parte del maestro del papel que desempeña. Sin embargo, esta idea adopta diferentes roles en los ambitos de la aritmética de la educación primaria en las tareas profesionales que debe realizar un maestro. En la figura 1 aparecen dos situaciones profesionales que debe manejar un maestro en las que la idea de unidad y la representación de las ideas matemáticas estan inmersas.

En la primera situación se describe la respuesta dad por una alumna de tercero de educación primaria al aplicar un procedimiento de cálculo. La segunda describe las respuestas de dos alumnos de quinto curso de educación primaria a actividades de representar fracciones. En las dos situaciones las ideas matemáticas, y en particular la idea de unidad, están representadas por modos de representación usuales en la enseñanza y estan inmersas en una red de conceptos matemáticos que el maestro debe desempaquetar para poder comprender las respuestas de los alumnos. En la primera, el maestro debe reconocer la exigencia cognitiva de la resta 703-27 para un alumno de tercero de educación primaria y puesta de manifiesto por la necesaria comprensión de las descomposiciones no canónicas de los números (asumir que 7 centenas + 3 unidades es equivalente a 6 decenas + 9 decenas + 13 unidades) y cómo interviene la comprensión de esta equivalencia para justificar los diferentes pasos del algoritmo. La manera en la que la respuesta de la alumna refleja o no las relaciones matemáticas entre las diferentes representaciones del número y como maneja los símbolos debe proporcionar información al maestro sobre cómo se comprenden o no las diferentes unidades y la representación de sus equivalencias

En la segunda situación, las respuestas de los dos alumnos deberian proporcionar al maestro información sobre la manera en la que estos están o no comprendiendo la idea de unidad y cómo es representada con diferentes magnitudes en el caso de las fracciones. El significado de la unidad y cómo se puede usar para representar diferentes cantidades debe ser desempaquetado por el maestro para dotar de sentido a las producciones de Carlos y Javier, los dos alumnos que están respondiendo a las tareas de representar fracciones utilizando magnitudes continuas (la figura de un rectángulo) o magnitudes discretas (usando fichas o chips).

La comprensión matemática que un maestro necesita para poder resolver de manera satisfactoria estas situaciones profesionales le exige usar su comprensión de las matemáticas para entender una situación de enseñanza. La característica del conocimiento de matemáticas está en que la comprensión del maestro de la idea de unidad y cómo se representa en determinados ámbitos de la aritmética le debe permitir determinar la exigencia cognitiva de la tarea propuesta a los estudiantes y comprender las respuestas de los estudiantes desde el punto de vista del significado matemático movilizado por estos. Este conocimiento es lo que se ha venido llamando "conocimiento de matemáticas para la enseñanza" (Mathematical Knowledge for Teaching, Ball y Bass, 2000). En cierta medida, de lo que estamos hablando es de conocer de manera más explícita las relaciones y significados matemáticos que en otros ámbitos fuera de la enseñanza no sería necesario. Es decir, para las matemáticas escolares los maestros deben conocer de manera explícita las relaciones entre los significados y diferentes modos de representación. Esto puede implicar un re-aprender lo que se supone ya se conoce o llegar a aprender de manera diferente las matemáticas que ya se conocen. Este aspecto de re-aprender las matemáticas que se supone ya se conoce viene determinado por el "contexto de uso" de este conocimiento, que es la resolución de las situaciones generadas en la enseñanza de las matemáticas.

Ana es una niña de tercer curso de Primaria que ha realizado la siguiente cuenta

$$\begin{array}{r} 703 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

escribiendo en su cuaderno

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7\ 0_1\ 3 \\ -\ \ 2\ 7 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \cancel{6} \\ 7_1\ 0_1\ 3 \\ -\ \ 2\ 7 \\ \hline 8\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \cancel{6} \\ 7_1\ 0_1\ 3 \\ -\ \ 2\ 7 \\ \hline 5\ 8\ 6 \end{array}$$

a) ¿Podrías decir qué ha sucedido?, ¿cuál pudo ser la razón por la que Ana respondiera de esa manera?

b) ¿Cómo podrías ayudarla?

c) ¿Cómo podrías diseñar la enseñanza para prevenir esta situación?

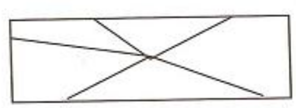
ESCENA 2. El caso de Carlos y Javier: el uso de los modos de representación en la construcción y comunicación del significado para las fracciones

Cuando he enseñado las fracciones, nunca he tenido muchas dificultades. Mis alumnos normalmente han entendido rápidamente la idea de fracción. Con las operaciones ocasionalmente he tenido más dificultades, pero proponiéndoles mucha práctica he conseguido que una mayoría de ellos superara bien los exámenes. Este año estoy dando 5° y, como el año pasado ya vimos alguna cosa de fracciones, pensé que podríamos empezar este tema recordando alguna cosa del año pasado. Para ello, coloqué la siguiente tarea en la pizarra:

¿Qué son los 5/4 de  ?

Me di cuenta de que había algún grupo de alumnos que no entendían bien la tarea.

Mientras estaban realizando este ejercicio, me acerqué a Javier, y le repetí la tarea, pidiéndole que me explicara cómo lo estaba haciendo. Él empezó a dividir en partes un rectángulo que tenía pintado en un folio, y dibujó lo siguiente:



Luego sombreó cada una de las partes para indicar que tenía cinco cuartos.

Para intentar obtener más información sobre el significado de fracción que se podía tener en ese momento, propuse a Carlos la siguiente tarea, en la que se utilizan fichas como modo de representación. En estos momentos, sabía que no se había utilizado este modo de representación en la introducción de la idea de fracción, pero intentaba ver lo que sucedía.

¿Cuántas fichas son los 2/3 de 6 fichas?

En el proceso de resolución, Carlos dibujó un círculo, lo dividió en tres partes distintas y colocó dos fichas sobre el círculo, dando como respuesta 2 fichas.

Figura 1. Situaciones profesionales en la enseñanza de las matemáticas en educación primaria que requiere del maestro una comprensión de la idea de unidad y de los modos de representación. Fuente

Llinares (2002). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp.151-176). Madrid: Síntesis; y Llinares (2003). Fracciones decimales y razón. En MC. Chamorro (ed.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp.187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

La figura 2 muestra ejemplos de tareas matemáticas para los maestros que les pueden ayudar a re-aprender el conocimiento necesario para gestionar las situaciones de enseñanza descritas en la Figura 1, relativas a la idea de unidad. Las dos primeras tareas exigen a los futuros maestros gestionar los significados de la idea de unidad en diferentes modos de representación y en diferentes contextos aritméticos como son las descomposiciones múltiples de los números usando símbolos y la representación de los números con un recurso didáctico que permita ejemplificar los cambios en las unidades para desarrollar una resta con números decimales. El conocimiento de matemáticas que deben movilizar los maestros en estas tareas forman una red de ideas matemáticas de lo que constituye el conocimiento de matemáticas para enseñar formado por la idea de valor de posición y agrupamiento que fundamentan los procesos de representación de los números, los significados de los algoritmos de cálculo y las descomposiciones múltiples de los números en el sistema de numeración decimal.

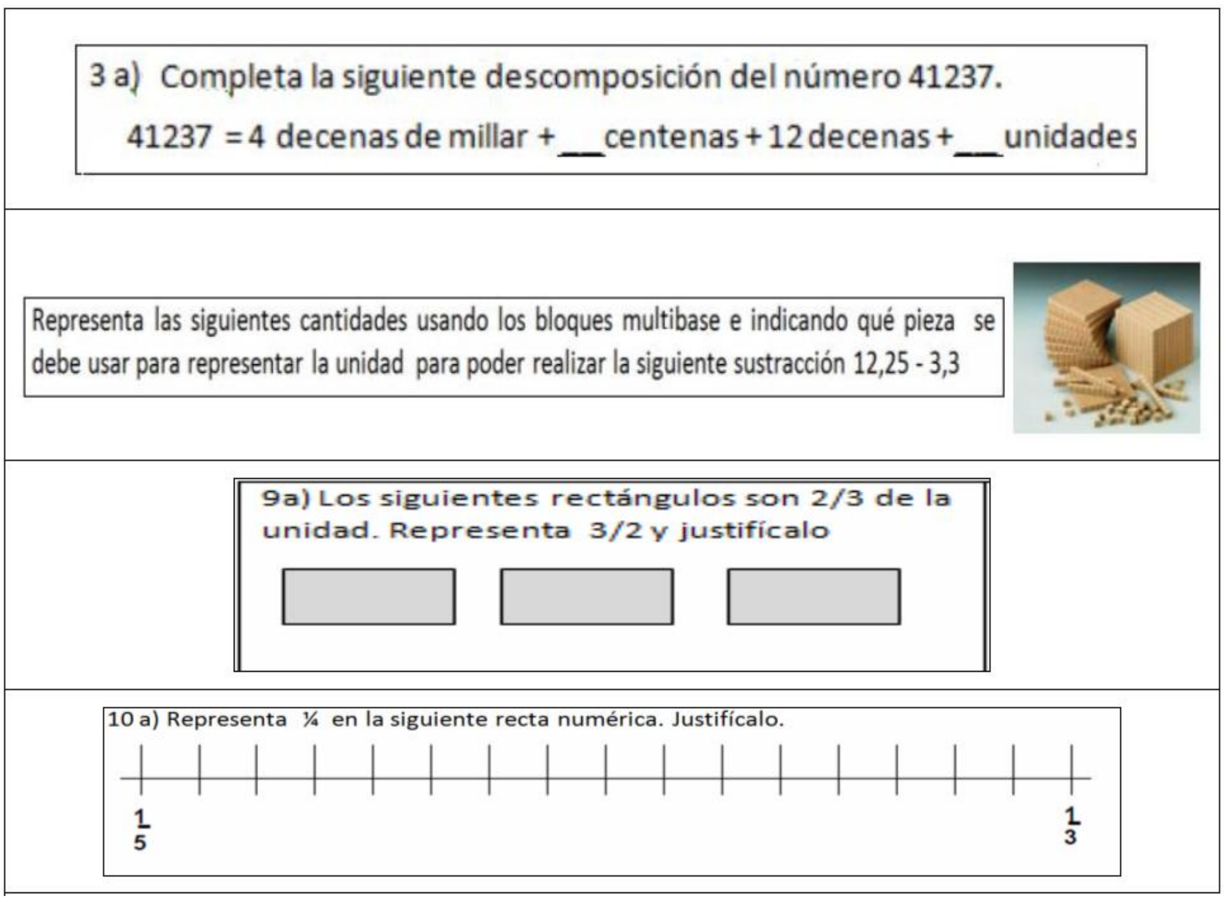


Figura 2. Ejemplos de tareas para ayudar a los futuros maestros a comprender la idea de unidad y los modos de representación en diferentes ámbitos de la aritmética.

Las tareas con fracciones en la figura 2 se centran en las ideas matemáticas que los futuros maestros deben re-aprender en relación a la idea de unidad, partes congruentes y los diferentes modos de representación que son susceptibles de ser usados en la enseñanza de las fracciones. De la misma manera que antes, estas tareas exigen a los futuros maestros explicitar los significados relativos a la idea de unidad y cómo representarla. En particular, para tratar algunas ideas implícitas que los futuros maestros suelen asociar a la representación de la idea de unidad, como el considerar la figura de polígonos como única manera de representarla. Este tipo de tareas responde al objetivo de ayudar a explicitar los diferentes elementos matemáticos que son necesarios reconocer para gestionar las situaciones de la enseñanza de las matemáticas.

Estos ejemplos de tareas, examinados conjuntamente en dos ámbitos diferentes como son la representación de los números y su contextualización en la realización de las operaciones y la representación de las fracciones usando la recta numérica y magnitudes continuas intentan poner de manifiesto la relación entre lo matemático y lo didáctico. En particular, poder ejemplificar la idea de cómo entender el conocimiento de matemáticas que un maestro necesita desde la perspectiva del "uso del conocimiento de matemáticas" en la resolución de situaciones profesionales. Es precisamente la idea del "uso del conocimiento" para resolver situaciones profesionales la que permite caracterizar algunos aspectos de la noción de competencia docente del maestro. Específicamente en lo relativo a la manera en la que se debe conocer los contenidos matemáticos para poder resolver las tareas profesionales de la enseñanza de las matemáticas.

La resolución de este tipo de tareas por parte de los futuros maestros y la discusión sobre diferentes argumentos que apoyan las resoluciones tienen como objetivo identificar y explicitar claramente las relaciones entre los conceptos y procedimientos matemáticos que constituyen la red de ideas matemáticas alrededor de las nociones que articulan las matemáticas en la educación primaria. En particular, las investigaciones centradas en el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández, Llinares, Valls, 2011, 2013; Zapatera y Callejo, 2013) han estado mostrando que el desarrollo de esta competencia se evidencia en la medida en la que los maestros son capaces de reconocer y relacionar un mayor número de elementos matemáticos relevantes en las resoluciones de los problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. Es decir, el conocimiento de matemáticas para la enseñanza como "conocimiento en uso" en las tareas de identificar e interpretar la comprensión matemática de los estudiantes se convierte en una variable que ayuda a caracterizar diferentes niveles de desarrollo de esta competencia docente. De esta manera es como la competencia docente del maestro se vincula a su capacidad de reconocer las relaciones entre los elementos matemáticos de manera explícita en los problemas y resoluciones realizadas por los alumnos.

Por ejemplo, la competencia docente del futuro maestro, en la segunda tarea en la figura 2 (representar con bloques multibase la sustracción 12,25-3,3 para justificar el algoritmo) se pone de manifiesto cuando este argumente que es necesario que el bloque elegido para representar la unidad debe permitir representar las dos cantidades con el mismo referente. De esta manera las placas pueden ser usadas como una representación de la unidad para representar los dos números con el fin de justificar mediante los bloques multibase los pasos del algoritmo: en el minuendo (12,25) la descomposición de una placa (unidad) en 10 barras (decimas) para poder compararlas-restarlas con las 3 placas-unidad y 3 barras-decimas que representan el minuendo (3,3). La justificación de la elección y uso de los recursos didácticos se apoya en el reconocimiento de la descomposición no canónica del número y las equivalencias entre las diferentes descomposiciones (admitir que 1 decena, 2 unidades, 2 decimas y 5 centésimas es equivalente a 1 decena, 1 unidad, 12 décimas y 5 centésimas). De esta manera, el conocimiento sobre la equivalencia de las descomposiciones no canónicas en la representación de los números en el sistema de numeración decimal (con la consideración de la idea de agrupamiento y valor de posición) es el conocimiento de matemáticas especializado en este tipo de situaciones. Esto es lo que marca la diferencia entre conocer las matemáticas que justifican la realización de los algoritmos y su relación con los recursos didácticos con el conocimiento únicamente de las reglas que rigen la elaboración de manera correcta del procedimiento de cálculo. De esta manera poder desempaquetar e identificar los conceptos e ideas matemáticas que fundamentan la resolución de las tareas, desglosar los procedimientos y conocer las razones que los fundamentan y encontrar maneras adecuadas de representarlos para comunicar las ideas matemáticas a los alumnos son características del conocimiento de matemáticas especializado para la enseñanza.

Las reflexiones anteriores sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas del maestro en las situaciones de enseñanza-aprendizaje plantean la necesidad de que los formadores de maestros empiecen a considerar de qué manera se puede abordar la cuestión relativa al necesario re-aprendizaje de los conceptos matemáticos que aparecen en la educación primaria. Además, lo que pone de manifiesto los resultados de algunas investigaciones sobre el conocimiento de matemáticas del maestro (Muñoz-Catalán y Carrillo, 2007; Saenz, 2007; Valdemoros, 2010) es que es necesario potenciar el re-aprendizaje matemático en determinados ámbitos para que los maestros puedan gestionar con garantias nuevos desarrollos curriculares que están dirigidos a desarrollar altas capacidades de razonamiento en los alumnos de educación primaria. Un aspecto relevante en estos momentos es el reconocimiento de la interrelacion mutua entre lo matemático y lo didáctico que se da en la resolución de las situaciones profesionales de la enseñanza de las matemáticas. Además, las reflexiones anteriores permiten identificar una característica del conocimiento de matemáticas para la enseñanza del maestro en la necesaria explicitación de las relaciones entre los conceptos y procedimientos matemáticos.

Las investigaciones sobre el conocimiento de los maestros suelen indicar que los futuros maestros tienen dificultades en proporcionar justificaciones o argumentos de las decisiones tomadas cuando resuelven los problemas. Esta dificultad puede ser considerada una evidencia del conocimiento procedimental y de la escasa consciencia de las relaciones conceptuales que apoyan los procedimientos posiblemente debido a la manera en la que estos futuros maestros han estado aprendiendo las matemáticas. Ello justifica la necesidad de un re-aprendizaje de los matemáticas que son el foco de la enseñanza en la educación primaria (Zazkis, 2011). Esta situación plantea desafíos para los formadores de profesores en el sentido de cómo plantear situaciones de resolución de problemas sobre conceptos que los futuros maestros han aprendido hace tiempo y considerar de qué manera este conocimiento anterior apoya o limita su aprendizaje actual. Esta cuestión subraya el hecho de lo que significa "aprender de nuevo lo que ya fue aprendido" (Zazkis, 2011) que a veces puede requerir aproximaciones instruccionales diferentes que cuando se intenta construir un nuevo conocimiento. En este sentido, la familiaridad de los futuros maestros con algunos contenidos matemáticos elementales situados en la educación primaria puede no ser suficiente para construir un conocimiento de matemáticas para la enseñanza que fundamente la competencia docente del maestro.

Tareas en los programas de formación de maestros para el desarrollo del conocimiento de matemáticas para enseñar

Reconocer que el conocimiento de matemáticas para la enseñanza es una manea de conocer las matemáticas necesario para la resolución competente de las situaciones de enseñanza desde el punto de vista de explicitar los elementos matemáticos y relaciones relevantes plantea desafíos para los formadores de maestros. En particular, porque los maestros deben de llegar a identificar y comprender las relaciones entre las grandes ideas que articulan el currículo de matemáticas que deben gestionar. Esto significa que deben de ser capaces de conocer estas ideas de manera transversal en los diferentes dominios matemáticos (como se ha descrito en la sección anterior) así como ser capaces de identificar las situaciones y las representaciones más adecuadas para transmitirlas a sus estudiantes. Por otra parte, entender el conocimiento de matemáticas de esta manera conlleva considerarlo una variable que interviene en el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia es la que le permite entender los posibles razonamientos de sus alumnos y generar explicaciones de las alternativas observadas en sus respuestas y en sus dificultades.

Los formadores de maestros han generado respuestas a esta situación a nivel internacional desde diferentes posicionamientos (Clarke, Grevholm y Millman, 2009; Tirosh y Wood, 2008; Zazkis, 2011). El objetivo común es que los futuros maestros comprendan los contenidos matemáticos de manera que les permita desarrollar de manera competente la enseñanza. Podemos identificar tres aproximaciones complementarias dirigidas a este fin: un foco sobre la resolución de problemas de matemática, un foco sobre el aprendizaje matemático de los estudiantes, y finalmente, un foco integrando las tareas profesionales del maestro (Llinares, Valls y Roig, 2008). La integración de estos focos en contextos reglados de formación o en talleres de formación con diferentes aproximaciones están aportando evidencias de las caracteristicas del desarrollo del conocimiento de matemáticas para enseñar según se manifiesta en las diferentes tareas profesionales del maestro (Monchón y Morales, 2010; Sowder, Philipp, Armstrong, Schappelle, 1998). En lo que sigue describiré las caracteristicas de algunos tipos de tareas que se están usando desde las diferentes aproximaciones. El objetivo aquí es subrayar la necesidad de aproximaciones complementarias para el desarrollo del conocimiento de matemáticas para la enseñanza considerando las diferentes tareas profesionales en las que se usan.

En la primera de las aproximaciones, la resolución de problemas de matemáticas, las tareas se centran en la resolución de problemas que permiten al futuro profesor tener la oportunidad de re-aprender lo que se supone le es familiar, ampliar su comprensión y enfrentarse a concepciones matemáticas erróneas que ha podido generar a lo largo del tiempo (Llinares, 2011; Zazkis, 2011). Por ejemplo, Zazkis (2011) plantea la necesidad de que los futuros maestros puedan llegar a identificar las ideas matemáticas que subyacen en la resolución de problemas en el contexto de la teoría de números. Se plantea así el objetivo adicional de que los futuros maestros entren en contacto con aspectos relevantes de la actividad matemática (búsqueda de patrones, identificación de estructuras, desarrollo de pruebas). Por tanto, la actividad matemática desencadenada y entendida en este sentido proporciona la oportunidad a los futuros maestros de aprender a identificar lo matemáticamente relevante pudiendo llegar a explicitar las relaciones que justifican lo realizado. La figura 3 incluye algunos de los tipos de problemas planteados en el ámbito de la teoría de números que Zazkis (2011) indica permiten aproximarse al objetivo de proporcionar contextos para que los futuros maestros re-aprendan las matemáticas que se supone ya conocen. En la figura 2 existen otros tipos de problemas que pueden responder a este objetivo.

Sea M= 3^3x5^2x7 .
¿Es M divisible por 7?
¿Es M divisible por 5, 2, 9, 63, 11, 15? Explícalo
Sea M =$3^3x5^2x7 + 2$. ¿Es divisible por 7?

Figura 3. Ejemplos de problemas (Zazkis, 2011)

En la segunda de las aproximaciones, la idea es desarrollar el conocimiento de matemáticas vinculado a la tarea de analizar las respuestas de los alumnos a los problemas de matemáticas. Con esta aproximación se pretende que el proceso de re-aprendizaje de las matemáticas que pueden desarrollar los futuros maestros se haga vinculado al recnocimiento de las caracteristicas del aprendizaje matemático de sus alumnos. Es decir, apoyar el re-aprendizaje de algunos contenidos matemáticos por parte del futuro maestro sobre la base del análisis de las dificultades y trayectorias de aprendizaje de los alumnos de primaria. Esta aproximación se basa en la relación existente entre el conocimiento explícito y comprensión de los maestros de las relaciones entre los elementos matemáticos en los diferentes dominios de conocimiento y la competencia "mirar de manera profesional" las producciones de los alumnos de primaria cuando resuelven problemas (Fernadez, Llinares, Valls, 2013; Oliveira, de la Roque, 2011; Zapatera y Callejo, 2013). Existe una gran variedad de tipologias de actividades que los futuros maestros pueden realizar, desde el análisis de respuestas de los estudiantes mostradas mediante video-clips y la realización de entrevistas clínicas a los estudiantes permite a los maestros (Penalva, Escudero y Barba, 2006). En este planteamiento, los futuros maestros deben superar la perspectiva de solo identificar dificultades y errores en los alumnos para aprender a reconocer caractarísticas del desarrollo del pensamiento matemático. Esto implica que las tareas deben poner al alcance de los futuros maestros respuestas de los alumnos que muestren las características del desarrollo de los significados en los diferentes dominios matemáticos.

Una estructura que pueden adoptar las tareas a realizar por los futuros maestros en esta perspectiva viene ejemplificada en la Figura 4. Estas tareas constan de problemas y respuestas de los alumnos de primaria reflejando diferentes niveles de comprensión por parte de los alumnos de primaria de las ideas matemáticas. Este tipo de tareas constituyen los contextos para que los futuros maestros puedan aprender a identificar los elementos matemáticos que caracterizan los problemas y que deben ser movilizados para su resolución por los alumnos de primaria como paso previo a reconocer diferentes características en la comprensión matemática de los alumnos puesta de manifiesto por sus respuestas. Llegar a reconocer las diferentes características que reflejan diferentes niveles de desarrollo del pensamiento matemático en términos de los elementos matemáticos que son o no movilizados por los estudiantes es una manifestación de la competencia docente. En este tipo de tareas lo que se les pide a los futuros profesores es que describan las respuestas de los estudiantes destacando lo que consideran relevante en las respuestas dadas por los alumnos considerando las caracteristicas del problema. Además, en algunas ocasiones se suele pedir que indiquen acciones que un maestro podria proponer para mejorar la comprensión de estos estudiantes. Estas indicaciones permiten explicitar de qué manera los elementos matemáticos caracteristicos del proceso de resolución son considerados por los futuros profesores. La discusión colectiva sobre estos aspectos permite a los futuros profesores indagar sobre su propia comprensión matemática.

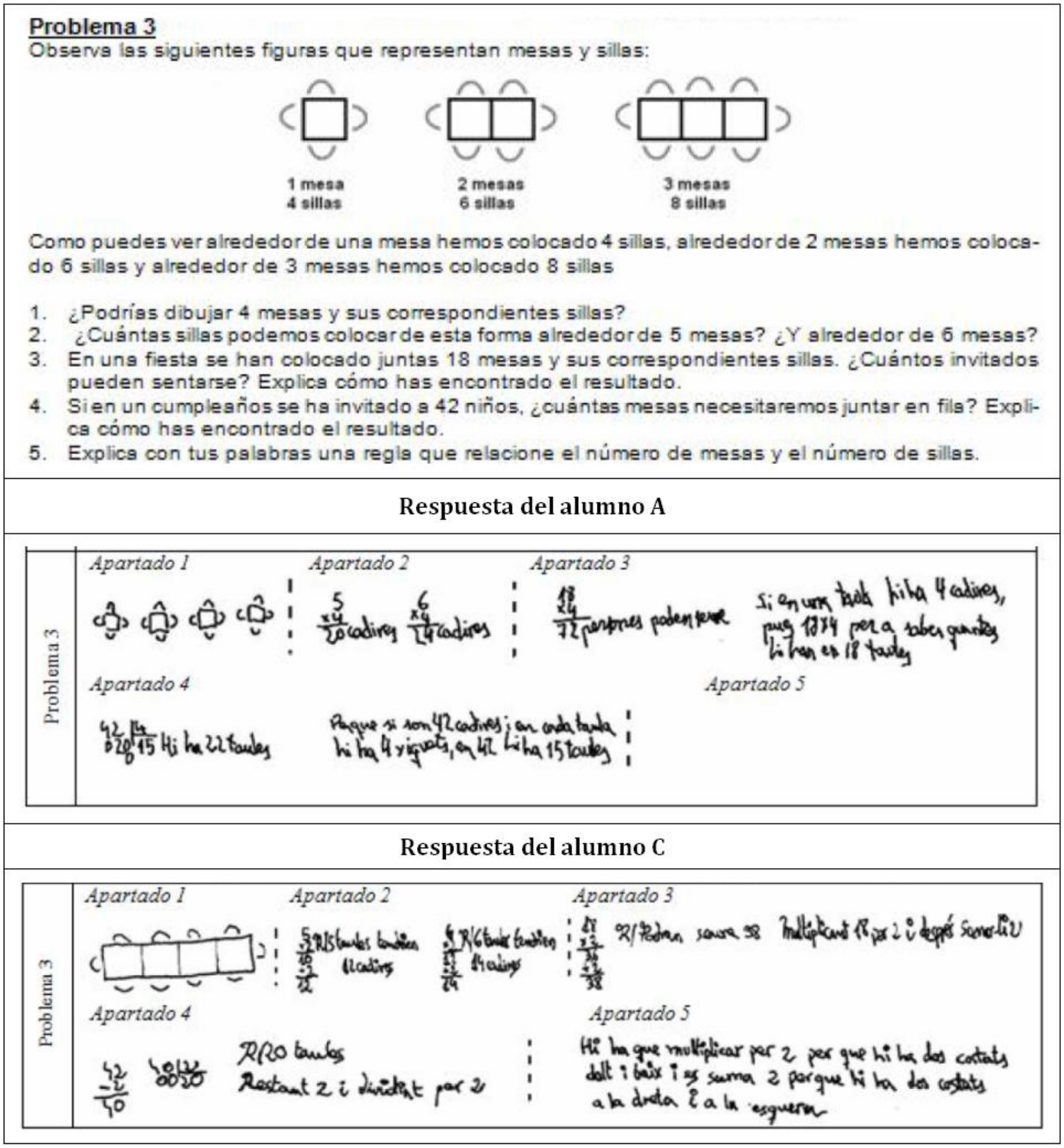
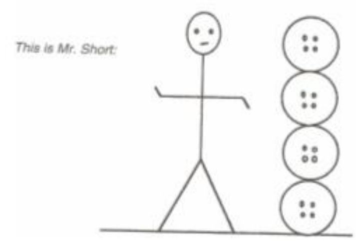


Figura 4. Ejemplos de problemas y respuestas de alumnos de primaria presentados a los futuros maestros usados en la investigación de Zapatera y Callejo (2013) para identificar cómo los futuros maestros reconocen los elementos matemáticos y sus relaciones en los procesos de generalización que intervienen en las respuestas de los estudiantes de educación primaria.

Finalmente podemos identificar una tercera aproximación complementaria a las anteriores que tiene como objetivo integrar el aprendizaje de las matemáticas en las diferentes tareas profesionales que debe desarrollar un maestro: elegir y diseñar problemas matemáticamente relevantes, gestionar la interacción con los alumnos – en este caso en un contexto clínico- y valorar la comprensión matemática de los alumnos puesta de manifiesto en la manera en la que resuelven los problemas planteados. En este tipo de tareas el conocimiento de matemáticas del futuro maestro interviene en la realización de las tareas profesionales – diseño, interacción, y análisis-. Aquí, el conocimiento de matemáticas se integra con el conocimiento de las matemáticas y los estudiantes cuando se interpretan las resoluciones de los alumnos a las tareas planteadas.

EXPLORANDO EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: Mr Tall y Mr. Short



La longitud de Mr Short es 4 botones
La longitud de Mr. Tall es 6 botones
Cuando usamos clips para medir a Mr Tall y Mr Short obtenemos
La longitud de Mr Short es 6 clips
¿Cuál es la longitud de Mr. Tall en clips? ____________________
Explica cómo has llegado a la respuesta

ACTIVIDAD: Realizar una entrevista a algún alumno de primaria (preparación)

1.a. Usando la tarea de Mr. Tall /Short diseña 4 problemas cambiando solo los números (usa solo números menores de 20) y las relaciones multiplicativas entre ellos (por ejemplo usa algunas relaciones entre números enteras y otras no enteras).
1.b. Indica lo que puedes esperar de cómo resolverán los problemas los estudiantes que entrevistes

2. Entrevista a algunos alumnos de primaria e intenta averiguar como lo hacen (pregúntales que te expliquen como lo hacen). **No intentes enseñarles nada**, el objetivo es únicamente aprender a mirar cómo piensan matemáticamente los estudiantes de primaria.

Graba las entrevistas en video y luego trascríbelas.

3. Analizando las respuestas
Compara lo que has obtenido con lo que esperabas (apartado 1.b)
¿qué hemos aprendido?
Intenta asignar a cada niño alguno de los niveles de desarrollo que aparecen en el cuadro siguiente (*).
Justifica tus decisiones.

Fuente: Khoury, H.A. (2002). Classroom Challenge. Exploring Proportional Reasoning: Mr Tall/Mr. Short. En Litwiller, B. & Bright, G. (2002). *Making Sense of Fractions, Rations and Proportions. Yearbook2002* (pp.101-103). NCTM: Reston, Va.

Figura 5. Actividad integrando conocimiento de matemática para enseñar en el desarrollo de diferentes tareas profesionales: platear problemas, interacción con los estudiantes, análisis de las producciones de los estudiantes en el contexto del desarrollo del razonamiento proporcional.

(*) La actividad incorpora información teórica sobre diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional procedente de los resultados de las investigaciones en didáctica de las matemáticas en este ámbito.

Algunas observaciones finales

La formación matemática de los maestros es una preocupación relevante a nivel internacional (Sorto, Marshall, Luschei, Carnoy, 2009; Tatto, Schille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley, 2008; Varas, Lacourly, Lopez, Giaconi, 2013). Esta preocupación se genera al reconocer que el conocimiento de matemáticas de los maestros es un elemento clave para la mejora de la enseñanza. Una consecuencia de esta situación son los intentos por clarificar que es lo que se está entendiendo por conocimiento de matemáticas para la enseñanza y cómo se puede hacer operativo y qué ha movilizado a los formadores de maestros en diferentes paises. Las aportaciones realizadas están subrayando la necesidad de considerar las tareas profesionales que el maestro debe realizar (y por tanto en las que debe ser competente) como una referencia a considerar al intentar caracterizar el conocimiento de matemáticas para la enseñanza. Pero además, el poder realizar aproximaciones considerando grandes ámbitos de los dominios matemáticos – "grandes ideas" matemáticas que articulan la enseñanza – que permitan superar en los futuros maestros un conocimiento de las matemáticas parcelado y a veces desconectado.

Estas dos ideas descritas aquí para comprender las diferentes aproximaciones a la formación matemática de los maestros, es decir, la identificación de grandes ideas y dominios matemáticos para articular la propuesta de formación, y usar las tareas profesionales del maestro como referente están permitiendo proporcionar a los formadores de maestros diferentes aproximaciones complementarias. El desarrollo específico de estas diferentes aproximaciones puede estar condicionado en cada contexto particular por las tradiciones institucionales de las propuestas de formación y por las propias limitaciones de cada país. Por lo tanto es necesario el desarrollo de una línea de investigación en paralelo a las tareas de realizar propuestas de formación que puedan aportar información contextualizada en cada ámbito sobre la manera en la que los futuros maestros aprenden y/o re-aprenden el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de didáctica de las matemáticas que es necesario para el desarrollo competente de la enseñanza de las matemáticas.

Reconocimientos. Este trabajo se ha realizado con apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D.L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of Mathematics* (pp. 83-104). Ablex Publishing: Westport, CT.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59(*5), 389-407.

Batanero, M.C., Ruiz, B. y Arteaga, P. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-151.

Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (eds.) (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. Purpose, Use and Exemplars.* London: Springer.

Climent, N., Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16*(1), 5-12.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30. Brasil.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10* (1&2), 441-468.

Fortuny, J.M.; Batanero, M.C. y Estrada, A. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática, 16*(1), 89-111.

Gozato, M., Godino, J.D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemáticas, 23*(3), 5-37.

Lebrija, A., Flores, R.C. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática, 22*(1), 31-55

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números, 78*, noviembre, 5-16.

Llinares, S. (2012-a). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática, nº 1*0, pp. 53-62. Costa Rica.

Llinares, S. (2012-b). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 2,* 53-70. España.

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82. México.

Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación matemática, 19*(1), 5-25.

Monchón, S. y Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática, 22*(1), 87-113.

Oliveira, A.T. y de la Roque, G. (2011). O potencial das actividades centradas em produçoes de alunos na formaçao de professores de matemática. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 14*(3), 335-359.

Ortiz, J.J. y Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática, 23*(2), 91-109.

Penalva, M.C., Escudero, I. y Barba, D. (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*. Granada: Editorial Grupo Proyecto Sur.

Penalva, M.C., Rey, C. y Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto B-learning. *Educación Matemática, 25*(1), 7-21.

Pinto, J.E. y González, M.T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas, ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Prieto, J.L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática, 22*(1), 57-85.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media.¿Por qué y cómo*? Educación Matemática, 17*(2), 35-58.

Saenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 355-366.

Sanhueza, S., Penalva, M.C. y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16*(1), 99-125.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática, 24*(3), 33-66.

Sorto, M.A. Marshall, J.H., Luschei, Th.F. y Carnoy, M. (2009). Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative Study in Primary and Secondary education. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 12*(2), 251-290.

Sowder, J., Philipp, R., Armstrong, B. y Schappelle, B. (1998). *Middle-Grade Teachers' Mathematical Knowledge and its Relationship to Instruction. A Research Monograph*. New a Research Monograph. New York: SUNNY press

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, Sh.L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G.(2008). *Teacher Education and Development Study in mathematics. Conccceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tirosh, D. y Wood, T. (2008). *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 2).* Sense Publishers: Rotterdam

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 13*(4, 2), 423-440.

Varas, L. , Lacourly, N., Lopez, A.D. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (1), 171-188.

Zapatera, A. & Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

Zazkis, R. (2011). *Relearning Mathematics. A Challenge for Prospective Elementary School Teachers*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

La educación matemática en Finlandia: Un camino seguro para otros países o una anomalía

Patrick **Scott**
Universidad Estatal de Nuevo México
Estados Unidos
pscott@nmsu.edu

Resumen

Finlandia últimamente ha recibido mucha fama por su éxito en la prueba de PISA. Varios libros, muchos artículos en revistas académicas y en la prensa popular han analizado dicho éxito. ¿Cuáles son algunas de las características demográficas de Finlandia y cómo se comparan con los países del Caribe? ¿Cuáles son algunos de los aspectos principales del éxito de Finlandia? ¿Cómo se comparan con los países del Caribe? ¿Qué debemos aprender de la experiencia de Finlandia?

Palabras clave: educación matemática, Finlandia, educación comparativa, reforma educativa.

Introducción

Con la publicación de los resultados de las pruebas del TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, 1995) mucha atención se enfocó en el éxito de algunos países asiáticos (sobre todo Singapur, Corea, Japón y Hong Kong). Había muchos comentarios sobre sus currículos rigorosos tradicionales e indicaciones sobre las horas de estudio y mucho esfuerzo de sus alumnos. Ahora en los últimos años Finlandia ha recibido muchos comentarios al nivel internacional por su éxito en las pruebas de PISA (Fleischman, et al., 2013) y por las diferencias en comparaciones con otros países en los cambios que ha inculcado en todo su sistema educativo para mejorar el éxito escolar de toda su población. (Nota: PISA es sigla para *Program for International Student Assessment* – Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos pero también están usando la frase *measuring student success around the world*-midiendo el éxito escolar en el mundo. PISA está patrocinado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico – OCDE.)

Tal vez el comentarista más importante en los últimos años sobre la educación en Finlandia ha sido Pasi Sahlberg (2006a, 2006b, 2007, 2009, 2010 y 2011). Su obra más completa es *Finnish lessons: What can the world learn from educational change in Finland?* - Lecciones finlandesas: ¿Qué podría aprender el mundo del cambio educativo en Finlandia? (Sahlberg, 2011). Sus padres eran maestros y él ha ejercido como profesor de matemáticas y ciencias, y formador de profesores en Finlandia. Ha trabajado por el Banco Mundial en Washington y por la Comisión Europea en Turín, Italia. Actualmente es Director General de Centro de Movilidad y Cooperación (CIMO) del Ministerio de Educación y Cultura de Finlandia y es miembro del Consejo Directivo de la ASCD (un grupo que anteriormente se conoció como la Asociación de Supervisión y Desarrollo de Currículo – www.ascd.org). Muchos de los comentarios a continuación se basan en el trabajo de Sahlberg.

Comparaciones estadísticas entre Finlandia y algunos países de las Américas

Para ofrecer un contexto para la consideración de la educación matemática en Finlandia se presentan a continuación en las Tablas 1 a 3 algunos datos de comparación con algunos países de las Américas.

Tabla 1

Territorio nacional de Finlandia y algunos países de las Américas.

País	Territorio	Comparación con Finlandia
Finlandia	338,424 km^2	
Estados Unidos	9,826,675 km^2	29 Finlandias
Brasil	8,514,877 km^2	25 Finlandias
México	1,972,550 km^2	6 Finlandias
Costa Rica	51,100 km^2	0.15 Finlandias
República Dominicana	48,422 km^2	0.14 Finlandias

Fuente: http://www.worldatlas.com/aatlas/populations/ctypopls.htm#.Ug0YDaxGa0o

Es bastante obvio que los Estados Unidos de América, los Estados Unidos Mexicanos y la República Federativa de Brasil son mucho más grandes que Finlandia, mientras Costa Rica y la República Dominicana son mucho más pequeños.

Tabla 2

Población nacional de Finlandia y algunos países de las Américas.

País	Población	Comparación con Finlandia
Finlandia	5.4 millones	
Estados Unidos	315 millones	58 Finlandias
Brasil	192 millones	36 Finlandias
México	117 millones	22 Finlandias
Costa Rica	4.7 millones	Casi 1 Finlandia
República Dominicana	9.4 millones	Casi 2 Finlandias

Fuente: http://www.worldatlas.com/aatlas/populations/ctypopls.htm#.Ug0YDaxGa0o

Aunque los Estados Unidos, Brasil y México tienen poblaciones muy superiores a Finlandia, vale la pena mencionar que esos tres países tienen varios estados con una población más o menos igual a la de Finlandia. Costa Rica y la República Dominicana, aunque tienen una densidad de población muy superior a la de Finlandia, tienen poblaciones totales más o menos equivalentes a Finlandia.

Tabla 3

Por ciento de la población nacida en el extranjero.

País	Población nacida en el extranjero
Finlandia	4%
Estados Unidos	14%
Brasil	<1%
México	<1%
Costa Rica	11%
República Dominicana	4%

*Fuente:*http://www.tradingeconomics.com/country-list/international-migrant-stock-percent-of-population-wb-data.html

Es posible pensar que Finlandia es un país con poca diversidad entre sus habitantes y que eso facilita el éxito de su sistema de educación. Si se considera solamente la diversidad debida a nacimiento en el extranjero, entre los países americanos señalados es solamente en Costa Rica y los Estados Unidos que es muy superior a la de Finlandia. Aunque no existe la diversidad étnica y lingüística que se encuentra en muchas regiones de las Américas, Finlandia tiene tres idiomas oficiales (finlandés, sueco y sami – el idioma de un grupo indígena de la región ártica) y las minorías más grandes son los rusos, los estonios y los somalíes. Aparentemente la diversidad en Finlandia sigue creciendo (Sahlberg, 2011).

Tabla 4

Desigualdad de ingresos considerando la razón entre el promedio del 10% más rico y el 10% más pobre.

País	*Razón entre el ingreso promedio del 10% más rico y el 10% más pobre*
Finlandia	5.6
Estados Unidos	15.9
Brasil	40.6
México	21.6
Costa Rica	23.4
República Dominicana	25.3

*Fuente:*http://www.tradingeconomics.com/country-list/international-migrant-stock-percent-of-population-wb-data.html http://hdr.undp.org/en/media/HDR_2009_EN_Complete.pdf

Un informe del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD, 2009) titulado *Human Development Report 2009: OvercomingBbarriers: Human Mobility and Development* (Informe sobre el Desarrollo Humano 2009: Superando Barreras: Movilidad y Desarrollo Humano) indica que en Finlandia como promedio el 10% más rico gana 5.6 veces más que el 10% más pobre. En las Américas esa desigualdad entre los ricos y los pobres es mucho más grande, llegando a más de 40 veces en Brasil (la más alta reportada en las Américas fue en Bolivia con 93.9). Si existe una correlación entre desigualdad de ingresos y desigualdad en educación, ¿dicha desigualdad es de causa y efecto?

El éxito de Finlandia con exámenes internacionales

La Tabla 5 muestra una comparación de los resultados de Finlandia en el examen de matemáticas de PISA con algunos países de las Américas. El sexto lugar de Finlandia es superado por Shanghai, Singapur, Hong Kong, Corea del Sur y Taipei. Japón logró solamente el noveno lugar. En el examen PISA de lectura Finlandia logró el tercer lugar.

Tabla 5

Comparaciones en la prueba de matemáticas de PISA de 2009 entre Finlandia y algunos países

País	Posición entre 65 países	Puntaje
Finlandia	6	541
Promedio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico		496
Estados Unidos	31	487
México	50	419
Brasil	57	386
Costa Rica	No participó	
República Dominicana	No participó	

Fuente: http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=2011004

A pesar de que… (¿o porque…?)

Muchos preguntarían qué tiene y hace Finlandia para gozar de tanto éxito en los exámenes internacionales. Al estudiar la situación tal vez lo más impactante es lo que no tiene:

- Casi no tienen evaluaciones formales.

  La excepción es en el último año de la escuela media superior si quieren ir a la universidad y en una muestra pequeña en otros niveles. Stahlberg (2011) dice que él está de acuerdo con muchos profesores de las escuelas de media superior que creen que el examen para admisión a la universidad (el Examen Nacional de Matriculación – *National Matriculation Examination*) tiene el efecto de promover una manera de enseñar que se enfoca demasiado en el examen (*teaching to the test*). Las pruebas nacionales que se dan a una muestra pequeña tienen ítems de forma abierta con un énfasis en resolución de problemas y se dan solamente en segundo y noveno grado (Darling-Hammond, 2010).

- Y otras cosas que no tienen:

  - No tiene educación "formal" hasta los siete años.

    La base del sistema educativo finlandés es la *Peruskoulu* (Nueva Escuela Básica Comprensiva). Los niños entran a la *Peruskoulu* a los siete años donde pasan seis años de primaria y tres años de secundaria inferior. La *Peruskoulu*, lanzada en 1972, fue el resultado de un proceso de consenso que incluía autoridades, políticos, maestros, investigadores, y representantes del sector privado. Sahlberg (2011) lo describe como uno de los dos íconos que más se asocia con Finlandia (el otro es la empresa Nokia). Las tres características de la *Periskoulu* que han conducido al éxito del sistema educativo de Finlandia son: 1) tener a todos los alumnos sin importar su situación socioeconómica en el mismo plantel y ofrecer la ayuda necesaria para que todos pueden tener éxito, 2) ofrecer orientación vocacional y psicopedagógica y 3) según Välijärvi et al. (2007) y Hautamäki et al. (2008) una nueva filosofía que incluye el uso de métodos alternativos de enseñanza, el diseño de ambientes de aprendizaje para ofrecer una instrucción diferenciada para enfrentar las diferencias entre sus alumnos y crear una percepción de la profesión de los maestros como algo muy importante y digno.

- ¡No tienen escuelas privadas!

  Darling-Hammond (2010) indica que el 98% del costo de la educación en Finlandia en todos los niveles viene del gobierno.

- Pago de "mérito" para los profesores más exitosos.
- Un *ranking* o calificaciones para las escuelas y los profesores.

  Una excepción indicada por Sahlberg (2011) es que algunos diarios presentan un *ranking* de las escuelas de media superior según los resultados en el Examen Nacional de Matriculación, pero que casi nadie hace mucho caso de esos *rankings*.

¿Y qué más no tienen?

- No tienen muchas horas de clase

  En los países de Asia generalmente los alumnos pasan muchas horas de clase en sus escuelas y esto a veces se sugiere como una manera de mejorar el rendimiento de los alumnos. En las escuelas de China y Corea del Sur en 2008 había más de 1000 horas anuales de clases (y en Corea del Sur muchos de los alumnos pasan muchas horas después de salir de su escuela pública en escuelas privadas de preparación para las pruebas de ingreso a la universidad), pero en ambos países hay una tendencia ahora de reducir el número de horas (Darling-Hammond, 2010). En Finlandia son apenas 700 horas. Si se considera el número de horas de las clases de matemáticas en el último año de la secundaria inferior en Finlandia en 2012 fue de 105 semejante a Japón con 108. En los Estados Unidos llegó a 157, mientras en Chile a 193 de acuerdo al Instituto Nacional de Estadísticas para la Educación - *National Center for Education Statistics* (NCES, 2012).

- No tienen muchas tareas de casa.

  Muchos creen que uno de los caminos al éxito es estudiar mucho fuera de la escuela. En Corea del Sur al salir de su día en la escuela en vez de regresar a casa para estudiar muchos van a escuelas privadas para seguir estudiando. Para ayudar a las familias que no pueden costear dichas escuelas privadas el gobierno coreano está ofreciendo programas después de clases (*afterschool programs*) (Darling-Hammond, 2010). La situación es muy diferente en Finlandia. Según el *Wall Street Journal* (Gameran, 2008) para los alumnos en Finlandia sería fuera de lo común recibir tareas de casa de más de media hora diaria. Sahlberg (2011) insiste que los maestros finlandeses creen que las tareas para casa no necesariamente conducen al aprendizaje, sobre todo cuando se tratan de ejercicios rutinarios.

- No tienen un currículo muy especificado.

  En el currículo base nacional la parte de matemáticas contiene menos de 10 páginas (Darling-Hammond, 2010). El propósito es de simplemente dar un marco de referencia del cual los maestros desarrollan sus programas.

- No tienen leyes que requieren que los todos jóvenes tienen que asistir una escuelamedia superior.

La base del sistema educativo finlandés es la *Peruskolu* de nueve años obligatorios. Seguir después es voluntario, pero un 95% continúan en la media superior general o vocacional y en 2008 la tasa de graduación de la media superior alcanzó un 93% en comparación con menos del 80% en los Estados Unidos (Sahlberg, 2011).

- No tienen mucha competencia entre ellos

  Como dijo el autor finlandés Samuli Paronen quien vivió desde 1917 hasta 1974 “Ganadores verdaderos no compiten”. Y por lo tanto colaboran. Según Gonnie van Amelsvoort y Scheerens (1996) muchos de los maestros durante su día laboral tienen tiempo para colaborar y están organizados en “grupos de resolución de problemas” para desarrollar el currículo adaptado a las características y necesidades de sus alumnos.

- No tienen una insistencia en excelencia.

  Pero sí insisten mucho en la equidad.

- No tienen una Educación Especial que es una calle sin salida.
  Sahlberg (2011) ha escrito que “La meta de la educación especial es de ayudar y apoyar a los alumnos por ofrecerles oportunidades iguales para terminar la escuela de acuerdo con sus habilidades y al lado de sus compañeros”. Por lo tanto hay más insistencia en intervención temprana y prevención para todos aquellos que tienen necesidades especiales de cualquier índole con énfasis en prevención en vez de reparación. Sahlberg (2011) presenta la siguiente Figura 1 para mostrar el efecto de la diferencia entre la Educación Especial en Finlandia y el resto del mundo.

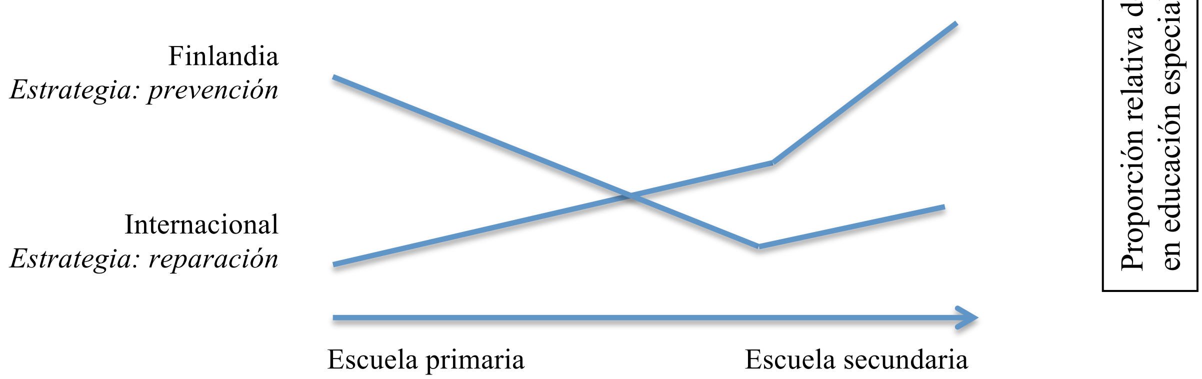


Figura 1. Número relativo estimado de alumnos en educación especial en Finlandia y otros países durante la primaria y secundaria.

Pero si tienen mucho recreo en la escuela

El dicho en este caso es que “¡Los niños no pueden aprender si no juegan!” (Abrams, 2011). Se estima que en las escuelas de Finlandia el recreo es de 75 minutos diarios y eso es a pesar de que por mucho del año hay mucho frío. En los Estados Unidos el promedio de recreo es supuestamente de solamente 27 minutos diarios. ¿Cuánto serían los minutos de recreo en las escuelas de los países de América Central y El Caribe? Además del recreo, Partanen (2011) indica que los maestros finlandeses usan mucho el juego creativo con sus alumnos.

¿Y qué más tienen?

- Comida gratis en las escuelas.

  Y no solamente para los más pobres.

- Servicio gratis de salud
- Un 66% de los egresados de la media superior va a la universidad.
- Un 43% de los alumnos que termina la *Peruskoulu* asiste a la educación media superior vocacional.
- Profesores que pasan la mitad de su tiempo en la escuela

  Planificando con colegas,

  Trabajando con padres de familia y

  Participando en capacitación profesional de alto-nivel.

- Un enfoque en matemáticas que conduce al éxito.
  Matemáticas es una parte integral del diseño curricular en las escuelas y en la formación de maestros, incluso un 15% de los futuros maestros de primaria estudian matemáticas como su disciplina de especialización. La enseñanza de las matemáticas se basa en la resolución de problemas planteados con el uso de contextos del mundo real. En la formación matemática de los futuros maestros existe mucha colaboración en las universidades entre los matemáticos y los educadores matemáticos. (Sahlberg, 2011).

Pero tal vez lo más importante que tienen

El estatus social verdadero de los profesores es altísimo. Muchos de los alumnos que han tenido mucho éxito en la media posterior se postulan a estudiar para llegar a ser maestros pero solamente un 15% reciben admisión a la universidad para estudiar y llegar a ser maestros.

¡Y no siempre fue así!

- En los años 60 como los Estado Unidos de hoy.
- En los años 70 la reforma empezó a
  - Reducir el tamaño de los grupos en las escuelas.

    Ahora los grupos varían entre 15 y 30 alumnos, con una tendencia de crecer un poco cuando la economía sufre (Sahlberg, 2011).

  - Aumentar el pago de los profesores.

    Los profesores de media superior con 15 años de experiencia ganan un 102% de lo que ganan sus colegas universitarios que seleccionaron otras carreras (Abrams, 2011). En los Estados Unidos los profesores solamente ganan un 65% de sus colegas en otras carreras. ¿Cuál sería el porcentaje en los países de América Central y el Caribe?
- Empezando en 1979 han requerido una maestría rigorosa para todos los profesores antes de empezar a ejercer en las aulas. Ya se mencionó que son los estudiantes con más éxito

en la escuela media superior los que deciden llegar a ser maestros?. El gobierno paga todos los costos de estudiar incluyendo el doctorado. Westbury y sus colegas (2005) insisten que la idea central en la formación de maestros es el enfoque en la investigación educativa. Sahlberg (2011) agrega la importancia de una profunda compresión de los contenidos y de la pedagogía correspondiente.

GERM versus la Manera Finlandesa

La sigla GERM en inglés significa *Global Educational Reform Movement* (Movimiento Global de Reforma Educativa). Uno de los sentidos de la palabra *germ* es"microbio tóxico". Sahlberg (2011), Hargreaves y sus colegas (Hargreaves, Earl, Moore y Manning, 2001; Hargreaves y Shirley, 2009) han dicho que GERM es algo que ha infectado los sistemas educativos de muchos países desde los años 80, pero no así en Finlandia. En vez de seguir GERM, Finlandia ha seguido su propio camino que Sahlberg llama la "Manera Finlandesa". En cierto sentido la "Manera Finlandesa" ha inspirado lo que Hargreaves y Shirley (2009) han llamado *The Fourth Way* (La Cuarta Manera). La Tabla 6 presenta los elementos y diferencias principales entre GERM y la Manera Finlandesa según Sahlberg (2011):

Tabla 6

Los elementos claves del Movimiento Global de Reforma Educativa (GERM) en comparación con la Manera Finlandesa desde los principios de los años de 90.

Movimiento Global de Reforma Educativa (*GERM*)	**La Manera Finlandesa**
Enseñanza y aprendizaje estandarizados Fijar expectativas claras, altas y prescritas centralmente para todas las escuelas, maestros y alumnos para mejorar la calidad y equidad de los resultados. Estandarización de la enseñanza y el aprendizaje para tener coherencia y criterios comunes para la medición y los datos.	**Enseñanza y aprendizaje hechos a la medida** Fijar un marco claro pero flexible para una planificación curricular basada en la escuela. Promover soluciones locales e individuales para las metas nacionales para encontrar las mejores maneras de crear oportunidades óptimas para el aprendizaje y enseñanza de todos. Ofrecer planes individuales para aquellos que tienen necesidades educativas especiales.
Enfoque en lectura y matemáticas Conocimientos y destrezas básicos en lecto-escritura, matemáticas, y ciencias naturales sirven como los objetivos principales de la reforma educativa. Usualmente el tiempo de instrucción se aumenta en dichas materias.	**Un enfoque en el aprendizaje creativo** La enseñanza y el aprendizaje se enfocan en un aprendizaje amplio y profundo, dando un valor igual a todos los aspectos del crecimiento de la personalidad, carácter moral, creatividad, conocimientos y destrezas del individuo.
Enseñanza de un currículo prescrito El alcance de estándares más altos como un criterio de éxito y buen rendimiento. Los resultados de la enseñanza son predecibles y prescritos de una manera uniforme. Los resultados suelen juzgarse a través de la	**Promover la toma de riesgos** Un currículo basado en la escuela y propio de los maestros facilita el hallazgo de enfoques novedosos a la enseñanza, el aprendizaje, y la toma de riesgos y la incertidumbre en el liderazgo, la enseñanza y el aprendizaje.

administración de exámenes estandarizados y externos.	
El préstamo de ideas de reforma que vienen del mercado (*market-oriented*) Las fuentes del cambio educativo son modelos de gestión y administración llevados a las escuelas del mundo empresarial a través de legislación o programas nacionales. Tales préstamos conducen a alinear las escuelas y sistemas educativos locales a la lógica operativa de las empresas privadas.	**El aprendizaje del pasado y la aceptación de innovaciones como propias** La enseñanza honra los valores pedagógicos tradicionales, tales como el rol y la relación profesional del maestro con sus alumnos. Las fuentes principales del mejoramiento de la escuela son las buenas prácticas educativas del pasado.
Obligación de dar cuenta (*accountability*) y control a través de exámenes Rendimiento escolar y el aumento del rendimiento de los alumnos se ligan estrechamente a los procesos de promoción, inspección y por último premios para las escuelas y los maestros. Los ganadores normalmente reciben premios fiscales, mientras las escuelas e individuos con dificultades se castigan. El castigo suele incluir la pérdida del empleo o de incrementos de sueldo que se basan en méritos. Nota a esta traducción: Es interesante que ni el español ni finlandés tienen una sola palabra que sirve como una traducción adecuada del término *accountability* que forma una parte tan fundamental de *GERM*.	**Responsabilidad compartida y confianza** La construcción paulatina de una cultura de responsabilidad y confianza dentro del sistema educativo que valora el profesionalismo de maestro y el director en juzgar lo que es mejor para los alumnos. Dirigir recursos y apoyo a las escuelas y los alumnos que corren el riesgo de fracasar o de quedarse atrás. Evaluación de alumnos basada en muestras.

*Fuente:*http://www.tradingeconomics.com/country-list/international-migrant-stock-percent-of-population-wb-data.html Sahlberg, 2011.

Sugerencias de Sahlberg para los otros países

Aunque Salhberg (2011) insiste que “las ideas de reforma y los principios de las políticas que se han empleado en Finlandia desde los años 70 no necesariamente van a funcionar en otras culturas o contextos sociales”, él propone tres lecciones desde Finlandia que son relevantes al tratar de mejorar la calidad y equidad de la educación.

1. Reconsiderar las políticas educativas que promueven una variedad de opciones (*choice*), la competencia y la privatización como los principales factores generadores del mejoramiento educativo sostenible
2. Reconsiderar las políticas relacionadas con maestros y ofrecerles una educación universitaria al nivel de maestría pagada por el gobierno, proveer mejor apoyo profesional para su trabajo y hacer que la profesión de ser maestro sea respetada.
3. Adaptar las mejores ideas de otros países en una mezcla inteligente con tradiciones e ideas internacionales.

Enfrentando el desafío finlandés en las Américas

De un lado los finlandeses no están retando a los educadores y los sistemas educativos de las Américas. Lo que tienen los finlandeses es únicamente suyo. Por otra parte lo que han logrado en términos de rendimiento y equidad es muy atractivo.

- ¿Cuáles son las ideas de Finlandia que nos podrían servir en las escuelas y sistemas educativos de nuestros países?
- ¿Cómo podemos combinar nuestras mejores ideas y prácticas tradicionales y tener el consenso, voluntad, responsabilidad, colaboración y confianza para asegurar mejor rendimiento y equidad para todos?
- ¿Cómo podemos evitar los excesos de *GERM*?
- ¿Podemos aceptar y realizar las promesas de un currículo con más control local?
- ¿Podemos actuar responsablemente con menos inspección, supervisión y uso de exámenes nacionales?
- ¿Es posible tener menos dependencia en las escuelas privadas en vez del mejoramiento de las escuelas públicas?
- ¿Es posible realizar las inversiones necesarias para elevar la formación de maestros a un nivel equivalente a Finlandia?
- En vez de simplemente hablar y escribir sobre un currículo matemático basado en la resolución de problemas del mundo real, ¿podemos involucrar a nuestros alumnos en una discusión creativa y juguetona de tales problemas?

Referencias y bibliografía

Abrams, S.E. (2011). The children must play. *The New Republic*. http://www.tnr.com/article/politics/82329/education-reform-Finland-US?page=0,0.

Darling-Hammond, L. (2010). The flat world and education: How America´s commitment to equity will determine our future. New York: Teachers College Press.

Flesichman, H.L., Hopstock, P.J., Pelczar, M.P. y Shelley, B.E: (2010). Highlights from PISA 2009: Performance of U.S. 15-year-old students in reading, mathematics, and science literacy in an international context. *http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=2011004*.

Gameran, E. (2008). What makes Finnish kids so smart. Wall Street Journal. http://online.wsj.com/article/SB120425355065601997.html.

Gonnie van Amelsvoort, H.W.C. y Scheerens, J. (1996). International comparative indicators on teachers. *International Journal of Educational Research, 25(3)*, 267-277.

Hargreaves, A., Earl, L., Moore, S. y Manning, M. (2001). *Learning to change: Teaching beyond subjects and standards.* San Francisco: Jossey-Bass.

Hargreaves, A. y Shirley, D. (2009). *The Fourth Way: The inspiring future of educational change.* Thousand Oaks, CA: Corwin.

Hautamäki, J., Harjunen, E., Hautamäki, A., Karjalainen, T., Kupiaien, S., Laaksonen, S. Y Jakku-Sihvonen, R. (2008). *PISA06 Finland: Analyses, reflections and explanations.* Helsinki: Ministry of Education.

NCES. (2012). Average eighth-grade scores and annual instructional time in mathematics and science, by country or other education system: 2011. *Digest of Educational Statistics*. http://nces.ed.gov/programs/digest/d12/tables/dt12_461.asp.

Partanen, A. (2011). What Americans keep ignoring about Finland´s school success. *The Atlantics Mobile*. http://m.theatlantic.com/national/archive/2011/12/what-americans-keep-ignoring-about-finlands-school-success/250564/.

Sahlberg, P. (2006a). Education reform for raising economic competiveness. *Journal of Educational Change*, 7(4), 259-287.

Sahlberg, P. (2006b). Raising the bar: How Finland responds to the twin challenge of secondary education? *Profesorado*, 10(1), 1-26.

Sahlberg, P. (2007). Education policies for raising student learning: The Finnish approach. *Journal of Education Policy*, 22(2), 173-197.

Sahlberg, P. (2009). Educational change in Finland. In A, Hargreaves, M. Fullan, A. Lieberman & D. Hopkins (Eds.), *International Handbook of Educational Change*, (pp. 1-28). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sahlberg, P. (2010). Rethinking accountability for a knowledge society. *Journal of Educational Change*, 11(1), 45-61.

Sahlberg, P. (2011). Finnish lessons: What can the world learn from educational change in Finland? New York: Teachers College Press.

UNDP. (2009). *Human development report 2009: Overcoming barriers: Human mobility and development*. http://www.tradingeconomics.com/country-list/international-migrant-stock-percent-of-population-wb-data.htmlhttp://hdr.undp.org/en/media/HDR_2009_EN_Complete.pdf.

Välijärvi, J., Kupari, P., Linnakulyä, P., Reinikainen, P., Sulkunen, S., Törnroos, J., y Arffman, I. (2007). *Finnish success in PISA and some reasons behind it II.* Jyväskylä: University of Jyväskylä.

Westbury, I., Hansen, S.E., Kansanen, P. y Björkvist, O. (2005). Teacher education for research-based practice in expanded roles. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 49(5), 475-485.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana
ICMI

La formation technologique des enseignants : un défi majeur

Michèle **Artigue**
LDAR, Université Denis Diderot – Paris 7
France
michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Ce texte concerne la question de la formation, tant initiale que continue, des enseignants de mathématiques aux technologies numériques. Après avoir introduit le problème, j'interroge la seconde étude ICMI consacrée aux technologies numériques qui en avait fait un de ses axes prioritaires, pointant les évolutions et acquis qu'elle met en évidence mais aussi les problèmes ouverts et difficultés résistantes. En m'appuyant ensuite sur différents travaux tant théoriques qu'expérimentaux, menés au sein de mon laboratoire, je m'interroge sur ce que nous connaissons des pratiques des enseignants médiées par les technologies numériques, une connaissance indispensable pour penser la formation. Dans une troisième et dernière partie, je présente le projet EdUmatics mené de 2010 à 2012 dont l'objectif était le développement collaboratif, au niveau européen, de ressources de formation pour favoriser cette intégration.

Palabras clave: éducation, mathématiques, formation des enseignants, technologies numériques, approche instrumentale, genèses d'usage

1. Introduction

Chaque jour davantage, les technologies numériques influencent les pratiques privées et professionnelles d'un nombre croissant d'habitants de cette planète, et ceci d'un nombre exponentiellement croissant de manières. L'Ecole ne saurait échapper à cette évolution, et de fait elle n'y échappe pas. L'évolution technologique modifie les attentes de la société à son égard comme elle modifie les moyens dont l'Ecole dispose pour remplir sa mission éducative, les conditions et contraintes de son action. Elle modifie aussi les caractéristiques de ses différents acteurs, leurs interactions ainsi que les relations entre l'Ecole et le monde extérieur.

S'agissant d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, la situation peut en un sens paraître paradoxale. Informatique et mathématiques ont entretenu des liens privilégiés dès l'émergence de cette nouvelle discipline. Très tôt, s'est posée la question de savoir en quoi le développement de l'informatique allait, devrait influer sur l'organisation curriculaire en mathématiques. Très tôt aussi, on a voulu voir dans les technologies nouvelles un levier privilégié pour rénover l'enseignement des mathématiques, à la fois dans son contenu et sa forme, et le rendre à la fois plus motivant, plus accessible et plus efficace. Ce n'est pas un hasard si la première étude lancée par l'ICMI en 1985 était consacrée à l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement (Churchhouse 1986). Dans cette étude, de grands espoirs étaient formulés, des espoirs que les résultats des expérimentations et innovations déjà menées rendaient a priori légitimes. Pourtant, lorsque 20 ans plus tard l'ICMI a lancé sa deuxième étude dans ce domaine, les attentes exprimées dans la première étaient loin de s'être réalisées. Dans le même temps, le paysage technologique avait profondément changé, comme souligné dans l'introduction de cette étude :

> Since the first ICMI Study in 1992, there have been major developments in digital technologies in terms of hardware: computers of all types, calculator and handheld technologies, digital technologies widely used in society at large such as mobile phones and digital cameras, and of course the massive influence of the World Wide Web. Aligned to these hardware changes, new software have been developed with potential impact on all phases of education, and on informal contexts of education. By the time of ICMI Study 17, digital technologies were becoming ever more ubiquitous and their influence touching most, if not all, education systems. In many countries, it is hard to conceive of a world without high-speed interactivity and connectivity. (Hoyles and Lagrange 2010, p. 2)

Ce paysage a continué à changer depuis que cette seconde étude a été conduite, et ce à une vitesse qui semble même s'accélérer, donnant l'impression que, malgré les efforts consentis et les avancées indéniables observées, le décalage entre l'Ecole et la Société, s'agissant de technologies numériques, ne peut que croître. De nombreux paramètres contribuent sans aucun doute aux difficultés rencontrées à mettre efficacement les technologies numériques au service de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Une intégration réussie de ces technologies dans l'enseignement des mathématiques suppose bien sûr une volonté politique claire qui permette l'engagement dans la durée de la multiplicité d'acteurs nécessairement impliqués, des équipements adéquats et régulièrement renouvelés et des moyens de maintenance, à la fois matériels et humains, pour ces équipements. Elle suppose aussi un travail approfondi sur ce que l'on souhaite enseigner et comment, des formes d'évaluation compatibles avec les visions développées, en bref des choix curriculaires adaptés, sachant qu'ils devront être régulièrement actualisés. Mais un levier tout aussi fondamental, dans ce domaine comme dans tout autre en éducation, est celui de la formation, tant initiale que continue des enseignants. C'est à ce volet que ce texte est consacré. La seconde étude ICMI déjà mentionnée en a fait un de ses axes prioritaires et, dans la suite, je reviendrais sur les évolutions et acquis qu'elle met en évidence dans ce domaine, mais aussi les problèmes ouverts et difficultés résistantes. En m'appuyant plus particulièrement sur différents travaux tant théoriques qu'expérimentaux, menés au sein de mon laboratoire, je m'interrogerai ensuite sur ce que nous connaissons des pratiques des enseignants médiées par les technologies numériques, une connaissance indispensable pour penser la formation. Je terminerai enfin en présentant un projet européen, le projet EdUmatics, visant le développement collaboratif de ressources de formation pour favoriser cette intégration.

2. La formation des enseignants dans l'Etude ICMI 17 sur la technologie

La formation des enseignants à la technologie a été longtemps peu satisfaisante, parce que d'une part, elle était trop centrée sur des apprentissages techniques, d'autre part, elle était trop souvent portée par une vision militante peu sensible aux besoins réels des enseignants. Il s'agissait d'abord de convaincre les enseignants du potentiel offert par les « nouvelles technologies » pour l'enseignement et apprentissage des mathématiques. A ceci s'est ajouté le fait que la recherche dans ce domaine technologique a été longtemps presque exclusivement centrée sur les élèves. La méta-étude que nous avions menée au tournant des années 2000 (Lagrange et al. 2003) montrait ainsi la faible proportion de recherches concernant les pratiques des enseignants en environnement technologique et la formation dans ce domaine. La section 3 de la seconde étude ICMI intitulée « Teachers and Technology » montre qu'à la fin des années 2000, ce n'est plus le cas. La préparation des enseignants à enseigner les mathématiques à l'ère du numérique, l'analyse de leurs pratiques a fait depuis l'objet de nombreux travaux. La complexité de l'intégration des technologies numériques, les profonds changements qu'elle implique en termes de pratiques, la façon dont elle affecte tous les niveaux de la vie de la classe y est maintenant reconnue :

> Those studies that do exist indicate that modifying teaching practices to iclude new tools is no mean feat for teachers. In addition to mastering the various possibilities for doing mathematics offered by different digital tools, they also are faced with the need to rethink a number of classroom management issues, adapt their teaching styles to include new forms of interactions – with students, between students, and between students and mathematical ideas – take a more prominent role in designing learning activities for their students and confront a range of epistemic issues related to the acceptance and legitimization of unfamiliar or even completely new mathematical practices. (Healy et Lagrange 2010, p. 288)

Trois chapitres constituent cette section. Le premier (Fuglestad, Healy, Kynigos et Monaghan 2010) concerne la collaboration entre chercheurs et enseignants dans l'intégration des technologies numériques. Il est basé sur trois études de cas menées dans trois pays différents : Norvège, Grèce et Brésil. Les contextes et les cultures sont différents, les approches théoriques également, mais des régularités se dégagent. La première concerne l'accent mis sur le design collaboratif. Dans chaque cas, le dialogue entre enseignants et chercheurs s'organise autour de la conception itérative et conjointe d'artefacts technologiques et d'activités associées, et de leur expérimentation. La rupture est claire et assumée avec la vision classique de la conception et dissémination de ressources. La seconde régularité tient à ce que, si le design est central, son ambition, en particulier en ce qui concerne le design d'artefacts technologiques, n'est pas forcément de produire des objets achevés mais plutôt des objets adaptables, transformables par les utilisateurs, ce que capture l'idée de « half-baked tools ». Comme exprimé dans la conclusion du chapitre :

> Perhaps by involving teacher in all stages of the design process, the full extent of the repercussions involved in using digital tools in the classroom, their impact on not only students' learning and teachers' didactic approaches but also on classroom

> management, on teaching time, and on mathematics knowledge itself becomes more apparent. And by increasing the sense of ownership that teachers feel for the tools and tasks to be implemented, perhaps it also becomes more natural fo them to accept the challenges of becoming active agents in the process of creating new cultures of practices which capitalize on the possibilities of digital tools. (p. 309).

Le second chapitre (Goos et Soury-Lavergne 2010) concerne les cadres théoriques. Les auteurs soulignent d'abord le besoin de cadres théoriques plus élaborés que ceux qui ont accompagné les premières décennies de travaux sur la technologie, pour comprendre le rôle de l'enseignant dans les environnements technologiques, les différents facteurs qui influencent les usages de la technologie par les enseignants et leurs inter-relations, ce que sont des usages productifs et comment progresser dans cette direction. Ils se centrent ensuite sur quelques approches théoriques qui leur paraissent prometteuses dans cette perspective et notamment deux qu'ils perçoivent comme complémentaires. La première est l'approche instrumentale sur laquelle je reviendrai plus amplement dans la partie suivante. La seconde est basée sur la théorie des zones due à Valsiner qui prolonge celle de zone de développement proximal (ZPD) due à Vygotski. Pour rendre compte du développement d'un individu (enseignant ou élève) et de ses interactions avec d'autres acteurs, dans un environnement technologique, cette approche ajoute à la notion de ZDP, deux autres zones : la ZFM (zone de libre mouvement) associée à l'accès aux différents composants de l'environnement et moyens d'action sur ces derniers, et la ZPA (zone d'action favorisée associée aux activités promues dans l'environnement). Les auteurs insistent en conclusion sur la nécessité de continuer à développer des cadres théoriques qui permettent d'approcher à la fois les caractéristiques des enseignants, les contextes institutionnels, et les processus d'apprentissage et de développement professionnel.

Le troisième chapitre, enfin, (Grugeon, Lagrange et Jarvis 2010) est consacré directement à la formation des enseignants. Il s'appuie plus particulièrement sur cinq contributions présentées à la conférence associée à l'étude ICMI en 2006 (Hoyles, Lagrange, Le Hung Son et Sinclair 2006), chacune d'elle étant basée sur un programme de formation spécifique, trois de formation initiale et deux de formation continue. Les contextes de ces programmes, proposés sur trois continents, sont très divers, et c'est aussi le cas pour les programmes eux-mêmes. Pour rendre compte de cette diversité, différents critères sont introduits, concernant respectivement les visions sous-jacentes (implémentation de la technologie, changements dans le rôle de l'enseignant, adaptation des pratiques d'enseignement), le contenu et les stratégies de formation. Des graphiques comme ceux reproduits ci-après synthétisent les résultats de l'étude. On notera la diversité des positionnements sur les contenus répertoriés et les stratégies de formation, et le fait que, parmi les quatre stratégies de formation recensées dans ces cinq exemples, la seule commune est celle qualifiée « demonstration of good practices » !

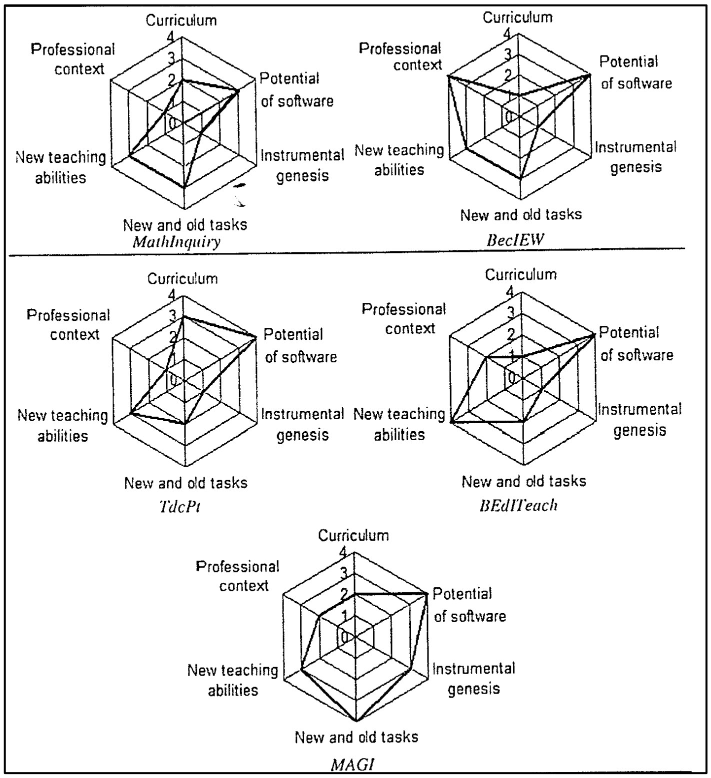


Figure 1 : Position des formations suivant les six contenus répertoriés (Figure 15.4, p.339)

Note : Ces contenus sont les suivants : *Curriculum* (impact de la technologie sur les mathématiques et évolution résultante du curriculum) ; *Potential of software* (potentiel des technologies pour l'apprentissage des mathématiques) ; *Instrumental genesis* (notion de genèse instrumentale et imbrication entre connaissances mathématiques et technologiques) ; *New and old tasks* (création de nouvelles tâches et étude de leur interaction avec les tâches existantes) ; *New teaching abilities* (nouvelles compétences requises des enseignants) ; *Professional context* (introduire la technologie dans un contexte professionnel donné).

	Demonstration	Role Playing	In practice	Communities
MathInquiry	X	X		X
BeclEW	X	X		
TdcPt	X		X	
BEdITeach	X			X
MAGI	X	X	X	X

Figure 2 : Stratégies de formation répertoriées (Figure 15.5, p. 342)

Note : Les stratégies répertoriées sont les suivantes : *Demonstration* (monstration du fonctionnement des artefacts et d'activités les utilisant) ; *Role playing* (les enseignants résolvent des tâches avec la technologie en position d'élèves) et discussion collective ; *In practice* (conception avec le formateur d'une séance d'enseignement, expérimentation dans la classe du formé et analyse réflexive avec le formateur) ; *Communities* (accent mis sur l'apprentissage entre pairs au sein d'une communauté).

Comme le soulignent les auteurs dans la conclusion du chapitre, chaque cours a sa propre cohérence, mais les raisons qui fondent les différents choix effectués ne sont pas toujours faciles à identifier dans les contributions. Et ils concluent en soulignant que :

> While it is widely acknowledged that teacher development is crucial for the successful integration of technology in the mathematics classroom, there is very little presently available to guide policy makers, researchers and teacher educators regarding the relevance of different viewpoints, content selection, or the actual effectiveness of various teaching and learning strategies involving technology. (p. 344)

Les expériences relatées dans cette seconde étude ICMI datent maintenant d'une dizaine d'années. Comme je le soulignais dans (Artigue 2013), le contexte technologique est certainement aujourd'hui différent. Les technologies numériques affectent, de plus en plus, les différents aspects de nos vies familiales et professionnelles. De nouveaux artefacts se sont imposés en l'espace de quelques années : téléphones portables et tablettes, disposant d'un nombre croissant d'applications mathématiques. On vend aujourd'hui plus de tablettes que d'ordinateurs et c'est en terme de tablettes que l'on pense désormais l'équipement des élèves, le développement de manuels électroniques. Les écrans tactiles deviennent le standard pour les interfaces graphiques, renouvelant l'idée de manipulation directe portée par l'usage des souris. Les ressources éducatives sous forme d'applets et clips vidéos se multiplient exponentiellement. Les réseaux sociaux prennent une part de plus en plus importante dans les modes de communication à tous les niveaux. Il ne fait plus aucun doute que nous vivons aujourd'hui dans l'ère du numérique.

Parallèlement, les formations en présentiel et à distance se sont multipliées, prenant de nouvelles formes comme en témoigne la percée des MOOC (Massive Open Online Courses), un sigle inconnu encore il y a quelques années. Ces formation prennent de plus en plus en compte le fait que, pour enseigner les mathématiques dans cette ère du numérique, il ne s'agit pas seulement d'apprendre à intégrer à son enseignement des technologies qui, telles les calculatrices, les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs et les systèmes de calcul formel (CAS), ont longtemps constitué l'emblème de cette intégration, et ceci même si l'intégration efficace de ces 'vieilles' technologies reste encore marginale. C'est apprendre à tirer parti des ressources multiples que fournit le monde numérique pour l'enseignement et l'apprentissage, et les nouveaux modes d'interaction sociale et de communication qu'il promeut. Ceci est bien visible par exemple, dans le cahier de charge élaboré en France pour la formation des enseignants et le certificat d'aptitude C2I2E associé concernant la technologie[1]. Plus que jamais, le besoin d'une réflexion approfondie sur les pratiques de formation aux technologies numériques est d'actualité, le besoin d'une meilleure compréhension des pratiques des enseignants en environnement technologique, de leurs déterminants, des dynamiques d'évolution possibles. Dans la partie qui suit, revenant sur l'approche instrumentale mentionnée plus haut et ses récents développements, nous essaierons de montrer son intérêt pour soutenir les réflexions et les recherches nécessaires.

---

1 Voir http://www.c2i.education.fr/spip.php?article87 Le référentiel est organisé en deux grands domaines de compétences, celles générales liées à l'exercice du métier d'enseignant et celles nécessaires à l'intégration des TICE dans la pratique d'enseignement., elles-mêmes déclinées en cinq rubriques : B1 Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif, B2 Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage, B3 Mise en œuvre pédagogique, B4 Mise en œuvre de démarches d'évaluation

3. Pratiques des enseignants en environnement technologique et formation : le filtre de l'approche instrumentale

L'approche instrumentale a émergé en France au milieu des années 90 comme expliqué dans (Artigue, 2007, 2011). Ne pouvant supposer le lecteur familier avec cette approche, je la présenterai d'abord brièvement avant d'examiner ses développements particulièrement intéressants pour étudier pratiques enseignantes et formation. Cette approche s'appuie sur deux piliers, d'une part, l'approche des outils et instruments développée en ergonomie cognitive par Vérillon et Rabardel (Rabardel 1995), d'autre part la théorie anthropologique du didactique (TAD dans la suite) initiée par Chevallard (1991, 1999). Elle a émergé dans le contexte technologique, plus particulièrement celui des recherches menées sur l'intégration des logiciels de calcul formel comme Derive et calculatrices symboliques (TI92 et TI89 notamment) au lycée. Elle retient en priorité de l'approche ergonomique la distinction effectuée entre un artefact et un instrument. Un artefact ici est un artefact technologique, calculatrice, logiciel, tableau numérique interactif, applet, plateforme interne…, ou une partie de celui-ci. L'instrument est ce que cet artefact devient pour un individu, une communauté qui l'utilise intentionnellement pour réaliser une certaine tâche ou un ensemble de tâches. Un instrument est ainsi la combinaison d'un artefact et de techniques ou de schèmes (selon le langage de Rabardel et Vérillon) que l'utilisateur a développés ou s'est appropriés. La transformation d'un artefact en instrument ne va en général pas de soi et c'est particulièrement le cas pour les artefacts numériques complexes actuels. Elle s'opère à travers un processus que Rabardel nomme *genèse instrumentale*, et qui affecte à la fois l'artefact et l'utilisateur. Elle affecte l'artefact parce que l'utilisateur le met à sa main, découvrant progressivement ses usages possibles voire détournant certains de ceux prévus par le constructeur, parce qu'il l'enrichit, y stocke des données, des programmes. C'est le *processus d'instrumentalisation*. Elle affecte l'utilisateur parce qu'il élabore ou s'approprie des techniques, développe des schèmes d'usage, qui le transforment. C'est le *processus d'instrumentation*. La recherche menée dans la dernière décennie autour des logiciels de géométrie dynamique a ainsi bien montré à quel point la genèse instrumentale du déplacement (ou dragging) était chose complexe, dépassant la seule connaissance des commandes et gestes associés. Pendant très longtemps cependant, la recherche concernant les technologies numériques a sous-estimé la complexité de ces genèses instrumentales, voire les a simplement ignorées. Elle a sous-estimé à quel point elles imbriquent connaissances mathématiques et connaissance de l'artefact, faisant que l'usage d'artefacts technologiques affecte profondément non seulement la façon d'apprendre mais aussi ce qui est réellement appris. L'approche instrumentale a rendu cette complexité visible. Elle a fourni un langage pour l'exprimer, des guides pour l'étudier. Elle a aidé à comprendre les limites de visions qui réduisaient la technologie au seul rôle d'outil de motivation et d'adjuvant pédagogique.

Mais comme c'était souligné à la fin de la partie précédente, s'agissant d'éducation et de formation, le rôle, l'influence des institutions et cultures dans lesquelles se construisent ces genèses instrumentales ne doit pas être non plus sous-estimé. C'est pourquoi dans l'approche instrumentale décrite ici, les constructions de Rabardel et Vérillon sont combinées avec celles de la TAD. La TAD nous donne à son tour un langage pour exprimer que toute connaissance émerge de pratiques qui sont institutionnellement situées. Un élément clef de ce langage est la notion de *praxéologie* qui est proposée pour modéliser les pratiques humaines de toute sorte, donc en particulier les pratiques mathématiques et didactiques. Une hypothèse forte est que toute praxéologie est constituée de deux blocs : un *bloc pratique* et un *bloc théorique* discursif. En d'autres termes, il n'existe pas de pratique humaine institutionnellement située sans une forme de discours qui la décrive, l'explique, la justifie, sous des formes plus ou moins élaborées. Au niveau le plus élémentaire, le bloc pratique d'une praxéologie est constitué d'un *type de tâches* et d'une *technique* pour résoudre ce type de tâche (non nécessairement algorithmique) ; le bloc théorique est constitué d'un *discours dit technologique* (au sens étymologique du terme) décrivant, expliquant, justifiant la technique, ce discours étant lui-même justifié par un *discours théorique* plus ou moins élaboré et explicite. Dans les travaux sur les environnements numériques, au-delà de la perspective institutionnelle qui lui est consubstantielle – les praxéologies mathématiques et didactiques sont conditionnées et fortement contraintes par les institutions où elles se développent et vivent - cette approche a été particulièrement utile pour dépasser l'opposition trompeuse souvent faite entre activité technique et conceptuelle en mathématiques. Par la vision dialectique qu'elle présente des rapports entre techniques et théories, elle a aidé a rendre claire et exprimable la double fonction des techniques (donc aussi des techniques instrumentées) : une *fonction pragmatique* car elles sont des moyens d'action sur le monde, de production de résultats, une *fonction épistémique*, car elles contribuent de façon essentielle à la compréhension des objets (notamment mathématiques) qu'elles engagent. La légitimité didactique des techniques enseignées est fondée sur des équilibres subtils obtenus entre ces deux fonctions comme le montrent les débats récurrents autour de la place à accorder dans le curriculum à l'enseignement de la technique opératoire de longue division. Il a été montré que l'introduction d'artefacts technologiques perturbe les équilibres entre ces deux fonctions, au détriment de la fonction épistémique. Ceci est dû notamment à ce que les tâches spontanément conçues par les enseignants sont le plus souvent des tâches adaptées de l'environnement papier-crayon où les artefacts technologiques sont principalement utilisés pour leur potentialité pragmatique. Il est important donc qu'au-delà de l'attention portée aux genèses instrumentales, les formations proposées aux enseignants sachent ne pas tomber dans des dichotomies sommaires qui risquent de se constituer en obstacle à une intégration productive, qu'elle rendent les enseignants sensibles à la nécessité d'établir des équilibres satisfaisants et les outillent pour exploiter le potentiel épistémique des techniques instrumentées.

Les travaux menés dans le cadre de l'approche instrumentale ont d'abord concerné les élèves, cherchant à comprendre les processus de genèse instrumentales chez ces derniers, d'abord dans le cadre d'environnements de calcul formel, puis en engageant progressivement d'autres technologies : tableurs et logiciels de géométrie dynamique notamment. Mais assez vite, ils se sont élargis à l'enseignant, à ses genèses instrumentales tant personnelles que professionnelles, et à la contribution de la connaissance de ces genèses à l'intelligibilité des pratiques et de leurs dynamiques, observées ou possibles. Cet élargissement a débuté avec l'incorporation à la théorie de la notion d'orchestration instrumentale par Trouche (2005), cette notion étant ensuite retravaillée en collaboration avec Drijvers (2011) pour aboutir à une typologie de formes d'orchestration. Une orchestration instrumentale est en fait définie comme un couple constitué :

1. d'une configuration didactique (une organisation de l'environnement artefactuel qui comprend en général plusieurs artefacts),
2. d'un mode d'exploitation de cette configuration.

Trouche par exemple a exploité dans ses travaux et décrit de façon détaillée ce qu'il a appelé le mode Sherpa. Dans ce mode, un élève vient piloter un artefact devant la classe, devenant porteur des intentions et réalisations du collectif de la classe et permettant leur visibilité et leur partage, aidant aussi à l'enseignant de recueillir des informations importantes sur l'état des genèses instrumentales au sein de la classe. Ces théorisations sont décrites et illustrées par divers exemples dans la seconde étude ICMI. L'accent y est mis sur la sous-estimation dans la plupart des formations de l'importance et la complexité de ces processus de genèses instrumentales, tant en ce qui concerne les élèves que les enseignants, ainsi que de leurs imbrications.

Ces dernières années, au sein de mon laboratoire, le LDAR, le potentiel de l'extension de l'approche instrumentale à l'enseignant a été systématiquement exploré pour mieux comprendre les pratiques des enseignants et penser les formations. Ceci s'est effectué notamment dans le cadre du projet national GUPTEN sur les genèses d'usage des technologies numériques des enseignants débutants (Lagrange 2013). Ce faisant, sur le plan théorique, son ancrage s'est modifié. En effet, les travaux de recherche ont combiné l'approche instrumentale que je viens de décrire avec la *double approche ergonomique et didactique* (DA dans la suite) des pratiques enseignantes initié au sein du LDAR par Robert et Rogalski (2002). La référence à l'ergonomie cognitive est commune aux deux approches mais la DA s'appuie sur les théories de l'activité et non sur la TAD. L'enseignement est vu comme un métier, et un métier particulièrement exigeant parce que l'enseignant travaille dans un système complexe et ouvert. Les pratiques des enseignants sont vues comme un système cohérent, complexe et stable. Elles sont définies comme l'ensemble de ce que le professeur fait, dans et en dehors de la classe, en tant que professionnel enseignant, et sont approchées via les cinq composantes suivantes : *cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle* (Vandrebouck, 2013). La dimension cognitive concerne les choix de l'enseignant relatifs au contenu mathématique : les tâches proposées aux élèves, leur organisation dans le temps. Cette dimension est directement en jeu dans le travail de préparation fait par l'enseignant en dehors de la classe. La dimension médiative, comme son nom l'indique, est associée à ce que l'enseignant fait dans la classe lorsqu'il implémente son projet, comment les tâches sont présentées, transformées, quelles aides sont données… Les trois autres dimensions concernent différents types d'assujétissement qui influencent ces deux premières composantes et agissent comme déterminants des pratiques. Ce sont les composantes sociale, institutionnelle et personnelle.

L'exploitation faite de ce cadre théorique pour analyser les pratiques des enseignants dans des environnements technologiques a conduit les chercheurs à distinguer trois contextes d'usage technologique pour des enseignants (Abboud-Blanchard and Vandebrouck 2012) (Abboud-Blanchard 2013). Le premier, *le contexte privé*, correspond aux activités technologiques développées par les enseignants dans leur sphère privée, sans relation directe avec leurs activités en classe ; le second, *le contexte professionnel privé* correspond aux activités technologiques menées en prévision d'activités en classe mais en dehors de la classe ; le troisième, *le contexte professionnel public* correspond aux activités technologiques réalisées en classe. Les technologies numériques instrumentent l'activité des enseignants dans chacun de ces trois contextes, même si c'est uniquement dans le troisième que l'activité instrumentée de l'enseignant interagit avec l'activité instrumentée de l'élève. Les genèses instrumentales des enseignants doivent donc être pensées en prenant en compte ces trois contextes. Les résultats des études menées dans le cadre du projet GUPTEN tendent à monter qu'une utilisation professionnelle efficace des technologies numériques requiert en fait une synergie entre les pratiques dans ces différents contextes, et ceci a bien sûr des implications évidentes en termes de formation.

Inspirés par de récents développements en ergonomie cognitive et didactique professionnelle (Rabardel and Pastré 2005), les chercheurs du projet GUPTEN ont également éprouvé le besoin d'étendre la notion de genèse instrumentale concernant un artefact donné à celle de genèse d'usage. Il s'agissait par là de mieux prendre en compte la multiplicité de contextes et la combinaison d'usages personnels et professionnels mentionnée ci-dessus, mais aussi d'acter « que les instruments ne sont pas isolés et que l'activité du sujet implique souvent le recours à un système d'instruments […] mobilisés au fil de l'action en fonction des buts et des besoins opérationnels du moment ». (Abboud-Blanchard 2013, p.32). Comme expliqué dans (Lagrange, 2013), l'idée de genèse d'usage transcende les artefacts et leur diversité, et elle prend en compte la cohérence des pratiques propres à un enseignant donné. Enfin, pour analyser l'évolution des pratiques des enseignants, la double approche distingue aussi trois niveaux dans leur organisation : le *niveau micro* qui est celui des automatismes et des routines, le *niveau local* qui est celui de la vie quotidienne de la classe, et le *niveau global* qui est celui des projets et scénarios, à la temporalité plus longue. L'introduction d'artefacts technologiques induit des perturbations dans cette organisation qui touchent à la fois ces trois niveaux et leurs interactions. Par exemple, les analyses menées sur les pratiques des enseignants débutant dans l'usage des technologies numériques montrent que l'absence chez ces derniers à la fois de routines spécifiques au niveau micro et d'une vision globale des usages au niveau macro induit pour eux une surcharge de travail au niveau local de la classe souvent problématique. Les analyses menées dans la durée montrent aussi que les évolutions positives observées peuvent s'exprimer en termes de mouvements entre ces différents niveaux (Abboud-Blanchard and Vandebrouck 2012), (Abboud-Blanchard 2013). Tous ces outils conceptuels, et ce sont loin d'être les seuls, nous aident aujourd'hui à mieux comprendre la complexité des processus en jeu dans les genèses d'usage et les dynamiques d'évolution possibles, donc à mieux comprendre les besoins de formation des enseignants.

L'approche instrumentale s'est enfin élargie ces dernières années à ce qui est appelé le travail documentaire des enseignants (Gueudet and Trouche, 2009), (Gueudet, Pépin and Trouche, 2012). La vision instrumentale a conduit ces auteurs à introduire à ce niveau une distinction parallèle à celle établie entre artefact et instrument. Ils distinguent donc le document (manuel ou plutôt partie de manuel, document internet, vidéo…) constituant l'analogue de l'artefact de la ressource qui est l'instrument professionnel qu'elle va devenir pour un enseignant qui en fait usage, l'adapte à ses besoins spécifiques (instrumentalisation) et se constitue ou s'approprie des schèmes d'usage. La recherche dans ce domaine est encore récente mais elle questionne la vision usuelle des ressources éducatives et de leur dissémination. Elle rejette en effet la dichotomie concepteur/utilisateur, en mettant l'accent sur le travail de transformation produit par l'enseignant et sa participation au travail de conception. Elle met aussi l'accent sur le fait que l'activité de conception dans l'usage se poursuit dans la durée, dans une succession de cycles d'usage Une telle approche nous semble particulièrement intéressante dans le contexte actuel marqué par des modifications importantes dans les systèmes de production de ressources éducatives, et dans les possibilités nouvelles offertes aux utilisateurs pour les faire évoluer en fonction de leurs besoins et styles propres. Ceci résonne avec l'idée de « half-baked tool » évoquée plus haut.

Comme je l'indiquai en introduction à cette partie, ces avancées conceptuelles appuyées sur l'analyse des pratiques effectives des enseignants, devraient nous aider à mettre en place des formations mieux adaptées aux besoins réels des enseignants que cela n'a été souvent le cas dans le passé, plus respectueuses de la complexité du travail de l'enseignant dans des environnements numériques, capables de prendre en compte la diversité croissante des impacts de ce monde numérique sur le métier d'enseignant, et sachant aussi créer les synergies et collaborations nécessaires. Ces avancées inspirent les formations d'enseignants que nous organisons au sein de l'IREM Paris 7 et dans les IUFM associés au LDAR, mais également la formation technologique au sein du Master didactique de formation de formateurs qui a été mis en place dans mon université. Car, s'il est question dans ce texte de formation d'enseignants, une formation d'enseignants de qualité ne peut exister sans formateurs eux-mêmes bien formés. Or, dans ce domaine, les travaux même récents (Abboud-Blanchard et Emprin 2010) montrent que beaucoup reste à faire. Dans la dernière partie de ce texte, élargissant la perspective, je vais utiliser ce qui précède pour présenter et discuter un projet européen dans lequel j'ai été impliquée de 2010 à 2012 et qui se propose d'aider à la fois enseignants et formateurs.

3. Le développement collaboratif de ressources pour la formation : le projet EdUmatics

Le projet EdUmatics est un projet Européen Coménius. Pendant deux années, de 2010 à 2012, il a réuni vingt partenaires (10 universités et 10 lycées associés) de sept pays qui avaient déjà pour bon nombre d'entre eux noué des contacts dans le cadre d'expérimentations de la calculatrice TI-nSpire de Texas Instrument organisées à partir de 2006, des expérimentations dans lesquelles enseignants et chercheurs avaient collaboré étroitement. C'était le cas notamment en France où les trois IREM impliqués, ceux de Lyon, Montpellier et Paris 7 avaient collaboré au sein du projet e-colab2 piloté par l'INRP, pour produire collectivement des ressources pour l'enseignement utilisant cette calculatrice, dans un processus de design itératif. Les ressources ou germes de ressources produits par un IREM y étaient testés et éventuellement adaptés par un autre IREM au moins, adaptations et résultats des expérimentations étant ensuite systématiquement analysés et comparés, soit lors de réunions présentielles, soit par l'intermédiaire de la plateforme du projet. Ce travail collaboratif avait donné lieu à la production et publication de trois livres, un par année du lycée (grades 10, 11 et 12) (Aldon, 2009, 2010, 2011) et à différents articles, articles de recherche ((Artigue et Bardini 2010) par exemple) mais aussi articles à destination des enseignants dans des revues d'interface, comme la revue *Repères IREM*, éditée par le réseau des IREM (Aldon et al. 2008).

Le but du projet EdUmatics3 était sensiblement différent puisqu'il s'agissait cette fois de développer collaborativement des modules non directement pour l'enseignement, mais pour des formations d'enseignants qui pourraient se dérouler en grande partie à distance et seraient ciblées sur l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques. Cinq modules ont été décidés, une structure commune élaborée, la réalisation de chacun d'eux étant prise en charge par deux binômes (université, lycée) de deux pays différents. Là encore la conception du design était itérative. Les situations didactiques qui serviraient de base aux modules de formation étaient choisies ou élaborées conjointement par chercheurs et enseignants des deux binômes concernés, puis testées dans les classes de ces enseignants, et diverses données recueillies à cette occasion. Ces premières expérimentations, menées dans des contextes différents, étaient ensuite analysées, comparées, discutées et, à partir d'elles, les deux binômes élaboraient un projet de module de formation. Ce projet, mis en ligne sur la plateforme du projet,

---

2 Information accessible à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/archives/partenariat-inrp-08-09/e-colab

3 voir http://www.edumatics.eu

était ensuite soumis à une évaluation externe (aux équipes de conception) par deux autres binômes d'EdUmatics, selon une grille élaborée collectivement par tous les partenaires. Cette évaluation impliquait si possible l'utilisation du module dans une formation effective avec des enseignants extérieurs au projet mais ceci fut rarement le cas. Le bilan tiré de ces évaluations était lui aussi collectivement discuté pour décider des modifications à apporter à chaque module mais aussi pour renforcer les liens et la cohérence entre les différents modules. Ils avaient en effet été développés largement indépendamment les uns des autres, après les cadrages initiaux. Dans une dernière étape, enfin, les modules une fois finalisés ont été traduits pour être accessibles sur la plateforme publique non seulement en anglais mais aussi en allemand, français, italien, solvène et tchèque4 comme nous nous y étions engagés vis à vis de la Commission Européenne. La collaboration entre les partenaires combinait des modes de communication synchrones (réunions en présentiel ou à distance, de sous-groupes ou collectives) et asynchrones via la plateforme et les échanges de courrier électronique. Comme on pouvait l'anticiper, la diversité des contextes éducatifs et des curricula a fait de ce projet un réel défi. Elle a été source d'une créativité sur laquelle je voudrais insister dans le contexte régional qui est celui de CANP. Elle s'inscrit dans la vision mentionnée plus haut des ressources comme des objets flexibles et pensés pour que leur conception puisse se poursuivre dans l'usage, de collaboration étroite entre chercheurs et enseignants, et d'attention portée à la complexité du travail de l'enseignant en environnement technologique, des genèses instrumentales et des genèses d'usage.

Cinq modules ont été développés :

1. Commencer à travailler avec les TICE
2. Des représentations statiques aux représentations dynamiques
3. Modéliser et construire des fonctions
4. Utiliser les TICE dans la classe
5. Relations entre logiciels

Excepté le quatrième qui est structuré autour de l'analyse de 13 courts clips vidéos, les différents modules sont organisés autour de quelques situations mises au point et expérimentées dans des classes dans le cadre de ce projet. Je m'appuierai ici plus particulièrement sur le module 3 dans la réalisation duquel notre équipe s'est particulièrement investie. Il est présenté sur le site selon une structure commune à tous les modules :

1. Que vais-je apprendre dans ce module ?
2. Que dois-je déjà connaître ?
3. Comment ce module se rattache-t-il aux autres modules ?
4. Quelles activités propose ce module et combien de temps faut-il pour l'effectuer en entier ?

et structuré autour de trois familles de situations. Pour cette réalisation, nous nous sommes en effet appuyés sur l'idée de « famille de situations » qui nous a paru pertinente, à la fois pour concevoir des ressources flexibles et pour faciliter le travail didactique sur ces dernières dans une perspective de formation. Penser la flexibilité de ressources, c'est en effet distinguer dans une ressource :

4 Une partie de ces traductions avait déjà été réalisée pour les besoins des expérimentations.

1. d'une part ce qui en constitue l'essence, les ressorts essentiels, ce qui faute d'être préservé risque de priver la ressource de ses raisons d'être et de son potentiel didactique,
2. d'autre part, ce qui est de nature plus contingente.

Il existe sans aucun doute différentes façons de conceptualiser cette distinction. Notre culture didactique, nourrie de la théorie des situations didactiques initiée par Guy Brousseau (Brousseau, 1997) et de la théorie anthropologique du didactique initiée par Yves Chevallard (Chevallard, 1992, 1999) a sans aucun doute dirigé la façon dont nous l'avons exprimée, à travers l'idée de famille de situations. La théorie des situations didactiques postule notamment que l'on pourrait associer à chaque savoir une situation fondamentale, objet idéal qui en exprime l'essence, l'épistémologie. Une situation fondamentale se décline en fait, à travers le choix des variables didactiques qui lui sont associées, en une famille de situations qui préservent l'essence de ce savoir et peuvent soutenir son émergence progressive. Nous nous sommes inspirés de cette idée dans le module pour concevoir notamment deux des familles de situations, la famille des enseignes et celle des intersections. Je prendrai comme exemple ici celle des enseignes, associée à une modélisation fonctionnelle interne aux mathématiques, à partir de problèmes concernant longueurs et aires. Il s'agit là d'un contexte de modélisation présent dans l'enseignement de plusieurs des pays européens impliqués dans le projet, donc a priori familier à des enseignants en formation. L'enjeu est de travailler sur ce que peut apporter son traitement dans un environnement technologique, en insistant tout particulièrement sur les connections dynamiques entre cadre algébrique et géométrique qu'elle permet, et les représentations dans chacun de ces cadres qu'elle permet. Cette famille est présentée de la façon suivante :

« La famille des Enseignes que nous utilisons comme illustration est une famille de situations qui peut être décrite de la façon suivante : on donne une forme géométrique (carré, rectangle, cercle… ou même forme 3D) et un point mobile dans cette forme (sur un côté, une diagonale, une médiane, un diamètre, une ligne particulière…) qui permet de la diviser en plusieurs parties ; à partir de cette division, une enseigne est créée dont l'aire dépend de la position du point mobile (cf. les exemples de la figure 1 où le point mobile est M et le segment sur lequel il se déplace est tracé en rouge). Plusieurs questions émergent naturellement concernant la variation de l'aire globale de l'enseigne ou celle de ses différentes parties et leurs rapports, les valeurs minimales et maximales… Pour y répondre, une modélisation fonctionnelle est particulièrement utile. Elle peut être envisagée de façon différente suivant les questions posées. Elle peut faire intervenir une diversité de fonctions, depuis des fonctions linéaires jusqu'à des fonctions complexes pour un élève du secondaire. Précisons que nous avons présenté cette famille de situations dans un contexte de modélisation interne aux mathématiques mais que cette situation géométrique peut résulter d'une modélisation d'enseignes dont les parties colorées et non colorées correspondent à des matériaux de coûts différents. »

Les deux exemples ci-après sont des représentants parmi bien d'autres possibles de cette famille :

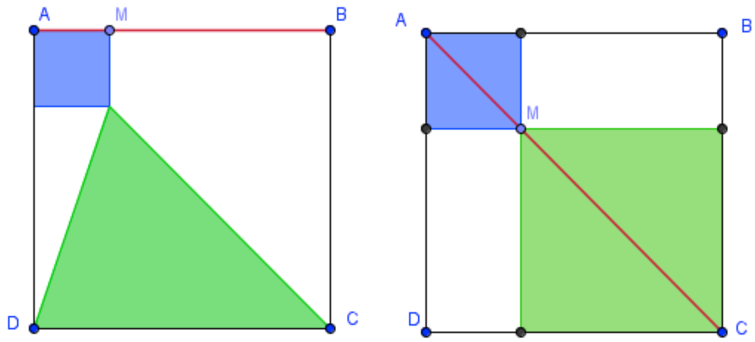


Figure 3 : Deux exemples d'enseignes

Pour construire un modèle fonctionnel, il faut choisir une variable indépendante, par exemple un nombre réel positif représentant la longueur AM pour les enseignes de la figure ci-dessus. Cette question est abordée explicitement dans la présentation de la famille, avant celle des potentialités offertes par la technologie. L'accent y est mis sur la diversité des usages possibles et notamment le fait :

1. que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet une première approche des variations avec une idée de dépendance fonctionnelle qui peut rester implicite,
2. que l'on peut explorer et conjecturer sans introduire d'expression algébrique pour les fonctions en jeu, et que grâce à la commande « lieu de points », on peut en obtenir des représentations graphiques et les explorer,
3. que des données capturées en déplaçant le point mobile peuvent aussi être transférées dans le tableur associé et les points correspondant tracés, cette technique permettan elle aussi de faire des conjectures sur les variations, les extrema, les types de fonctions en jeu avant de les exprimer sous forme algébrique, et que l'utilisation du tableur permet aussi aider à conjecturer les équations en utilisant les fonctions de régression,
4. que suivant la forme de l'enseigne et les questions posées, les valeurs particulières recherchées peuvent être plus ou moins simples et être accessibles exactement ou seulement en valeur approchée, une variable sur laquelle l'enseignant pourra jouer s'il souhaite travailler dans ce contexte technologique les rapports entre calcul exact et approché,
5. que l'intervention de questions faisant intervenir des périmètres peut conduire à des expressions complexes pour l'étude desquelles, des modules de calcul formel comme ceux offerts par les calculatrices symboliques peuvent être utiles,
6. que l'usage d'un curseur enfin n'est pas nécessaire et qu'il induit une modélisation fonctionnelle qui peut rester invisible aux élèves.

La notion de famille de situations est aussi déclinée dans le module d'une autre façon, plus en ligne avec la forme d'ingénierie didactique portée par la théorie anthropologique du didactique, en termes de programmes d'étude et de recherche (Chevallard, à paraître). Dans cette approche, ce qui est essentiel, c'est l'existence d'une question à fort pouvoir générateur autour de laquelle le travail conjoint de l'enseignant et les élèves va pouvoir s'organiser, combinant des élaborations propres et l'étude de travaux fournissant déjà des réponses partielles existant dans la culture, à comprendre, à discuter ou à adapter. Dire qu'une question a un fort pouvoir générateur, c'est dire qu'elle peut générer elle-même de multiples sous-questions et permettre la rencontre progressive d'un ensemble consistant de savoirs et pratiques, en en faisant percevoir la raison d'être. Dans le module, la famille des jeux de poursuite qui met en jeu la modélisation fonctionnelle de « réalités » extra-mathématiques, me semble davantage de ce type. Dans cette famille, le point de départ est une série de vidéos qui visualisent diverses situations de poursuites. La question de départ est : qu'est-ce qui est commun, différent entre toutes ces situations ? Il s'agit là pour les élèves, d'identifier différents types de poursuites, de les schématiser et de les caractériser. On leur propose ensuite d'en élaborer des modèles simplifiés simulables avec Géogebra ou avec un tableur, et d'exploiter ces simulations. Des modélisations fonctionnelles, implicites puis explicites, peuvent émerger à la fois dans la réalisation des simulations, et dans les questions que soulève leur usage. Autour de cette trame commune, une diversité de parcours est possible suivant les vidéos que l'on utilise, les sous-questions que l'on choisit de privilégier, la responsabilité donnée aux élèves dans la réalisation des simulations, l'extension que l'on souhaite donner à ce travail et, bien sûr, les connaissances mathématiques des élèves. On le voit bien en comparant les réalisations dans les classes françaises et tchèques réalisées à deux niveaux de scolarité différents (fin de collège, grade 9 en Tchéquie et première année du lycée, grade 10 en France), avec deux technologies différentes (tableur en Tchéquie, Geogebra en France), et dans des conditions permettant de consacrer à ces jeux de poursuite un nombre de séances différent (de 2 séances en Tchéquie à 6 séances en France dans le cadre d'un enseignement optionnel d'ouverture « Méthodes et pratiques scientifiques » introduit dans la récente réforme du lycée).

Le travail de formation proposé sur les trois familles de situation du module est organisé en plusieurs phases. Pour la famille des enseignes et celle des équations et intersections, le scénario est similaire et nous le décrivons ci-après pour la famille des enseignes. Il débute par une analyse a priori mathématique et technologique visant à identifier le potentiel de modélisation fonctionnelle et le potentiel technologique de la famille, à travers l'étude d'exemplaires de cette famille, et combinant travail en groupes sur des exemplaires différents avec des artefacts éventuellement différents, discussions et synthèses collectives. Cette phase est suivie d'une phase d'analyse pédagogique organisée autour de l'analyse de quelques épisodes vidéo issus des expérimentations menées et montrant des cas susceptibles de nourrir des discussions intéressantes concernant le comportement des élèves, les interactions entre enseignant et élèves, et l'utilisation de la technologie. Enfin, dans une troisième phase, « chaque formé est engagé à construire un scenario pour une situation d'enseigne, en considérant son propre contexte éducatif. Le scénario doit rendre clairs les objectifs didactiques précis de cette situation, les connaissances mathématiques et instrumentales supposées des élèves, les choix effectués dans la famille des enseignes et leurs raisons, la ou les outils technologiques qui sont envisagés et comment ils sont supposés aider l'apprentissage des élèves, les rôles respectifs prévus pour les élèves et l'enseignant dans les différentes phases du scénario, et les ressources fournies aux élèves ». Il est proposé que ces scénarios soient ensuite échangés, comparés et discutés collectivement avec l'aide des formateurs.

Pour la famille des jeux de poursuite, la situation est différente. Si les deux premières familles renvoient en effet à des problèmes familiers à beaucoup d'enseignants, qu'ils utilisent ou non les technologies numériques dans leur enseignement, ce n'est plus le cas pour celle-là. Elle se veut dans le module une ouverture sur des pratiques médiées par la technologie :

1. ne se bornant pas à l'usage logiciels dédiés aux mathématiques comme ceux de géométrie dynamique mais combinant l'usage de différents types de ressources,
2. mettant en jeu la réalisation de simulations et leur exploitation créative,
3. mobilisant potentiellement une grande diversité de types de fonctions connues ou inconnues des élèves.

On ne fait pas l'hypothèse que, après avoir travaillé ce module, un enseignant va pouvoir nécessairement se lancer dans de telles pratiques. Il s'agit davantage, en termes de genèses d'usage, de travailler sur contextes personnels et professionnel privé, d'ouvrir de nouvelles perspectives. Si, dans le cadre de la formation, il est proposé qu'une expérimentation au moins soit réalisée et rapportée, il est clair que ce sont les deux premières familles qui semblent les plus exploitables pour de telles réalisations.

Le scénario global de formation est décrit pour une formation en présentiel mais il est pensé pour pouvoir être adapté à une formation partiellement réalisée à distance. Divers documents sont en effet fournis pour aider le travail autonome des enseignants comme celui de formateurs souhaitant utiliser ce module : des fichiers et aplets Geogebra associés aux différentes potentialités offertes par cet artefact pour exploiter cette famille (exploration géométrique des variations, association de courbes obtenues comme lieux de points ou à partir d'une entrée algébrique, usages du tableur), des scénarios envisageables en classe et des comptes rendus d'expérimentation, les clips vidéos mentionnés plus faut montrant des épisodes de travail d'élèves, d'interaction élèves-enseignant, ou des captures d'écran d'ordinateur, des références bibliographiques. Ces documents constituent autant de briques que l'enseignant ou le formateur pourront transformer en ressources.

On voit donc clairement comment l'approche est façonnée par les visions exprimées plus haut et les acquis de la recherche didactique. Une attention particulière est ainsi portée aux genèses instrumentales et aux interactions dans ces dernières entre le développement de connaissances mathématiques et instrumentales. L'influence de la théorie des situations est, elle, visible dans l'attention portée à l'analyse a priori des situations et à leur potentiel a-didactique, à l'identification de leurs variables didactiques. Le scénario de formation proposé met l'accent sur le travail collaboratif des enseignants, les échanges, et cherche à outiller le nécessaire travail de conception des enseignants. Il contient des situations plus ou moins distantes des pratiques curriculaires existantes, y compris concernant les pratiques curriculaires instrumentées et essaie de prendre en compte les différents contextes identifiés dans les genèses d'usage. Ce module n'est pour autant en rien un modèle. Les contraintes de ce type de projet européen, notamment en termes de durée (2 ans) et de financement (couvrant essentiellement les rencontres nécessaires entre enseignants et chercheurs, et entre partenaires), l'absence de suivi une fois le projet achevé, le défi qu'a représenté la réalisation d'un objet au carrefour de différentes cultures, font que ce qui a été réalisé est très imparfait. Par exemple, nous n'avons pas réussi à construire un scénario de formation unifié sur la plus délicate famille des jeux de situation, ni à prendre en charge pour chaque famille, la diversité des artefacts technologiques susceptibles d'être utilisés, les documents fournis pour soutenir un travail autonome sont très insuffisants. Néanmoins, l'ensemble des modules s'est révélé pour nous un outil très intéressant pour monter en 2013 à l'IREM une formation de trois jours pour les enseignants dans le cadre des plans de formation des académies de la région parisienne. Cette formation qui a combiné une exploration des différents modules, un travail plus spécifique sur le module 3, la mise au point par binôme d'une expérimentation inspirée par une des activités des trois premiers modules au choix, le retour sur ces expérimentations au cours de la dernière journée, sur la base d'une grille décidée en commun, puis la mise en commun sur une plateforme de formation de toutes les ressources élaborées par les enseignants, a été très appréciée. Elle est reconduite en 2013-2014. Elle a aussi été appréciée par l'ouverture internationale qu'elle offrait. L'intense travail de coordination mené dans le projet EdUmatics n'empêche pas en effet chacun des modules de refléter la culture propre des partenaires qui l'ont conçu. Cela a soulevé de nombreuses questions lors de la formation et des discussions qui ont permis aux participants de voir leur propre culture avec un regard nouveau et d'interroger certaines certitudes.

4. Conclusion

Dans ce texte consacré à la formation des enseignants aux technologies numériques, je suis partie de la référence constituée par la seconde étude ICMI qui montrait que si des avancées avaient été obtenues depuis la première étude, menée 20 ans plus tôt, cette question cruciale de la formation des enseignants restait largement ouverte. M'appuyant ensuite sur un ensemble de travaux initiés par l'émergence et le développement d'approches instrumentales de l'intégration technologique, j'ai essayé de montrer que nous disposons aujourd'hui d'un outillage conceptuel cohérent et a priori performant pour avancer sur cette question, en la reliant à ce qui concerne plus largement les pratiques instrumentées des enseignants. J'ai enfin essayé d'illustrer comment ces outils conceptuelles et les visions qu'ils portent peuvent guider la construction collaborative de formations et de ressources, en se situant dans un contexte régional et non plus national. J'espère ainsi avoir contribué à la réflexion et au travail collectif plus que jamais nécessaire sur ces questions à l'heure où devient clair qu'une intégration efficace des technologies numériques, dans la diversité de leurs facettes, est une condition de survie pour l'Ecole.

Références bibiographiques

Abboud-Blanchard, M. (2013). Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etude des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives. Habilitation à Diriger les Recherches. Université Paris Diderot – Paris 7.

Abboud-Blanchard, M., & Vandebrouck, F. (2012). Analysing teachers' practices in technology environments from an Activity Teoretical approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19(4), 159-164.

Aldon G., Artigue M., Bardini C., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.L., Combes M.C., Guichard Y., Hérault F., Nowak M., Salles J., Trouche L., Xavier L. et Zuchi I. (2008). Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab (expérimentation Collaborative de Laboratoires mathématiques), *Repères-IREM* n° 72, 51-75.

Aldon, G. (2009). *Mathématiques dynamiques. Activités avec la TI-n**spire** pour la classe de Seconde*. Paris: Hachette Education.

Aldon, G. (2010). *Mathématiques dynamiques. Activités avec la TI-n**spire** pour la classe de Première et complements de Seconde*. Paris: Hachette Education.

Aldon, G. (2011). *Mathématiques dynamiques. Activités avec TI-n**spire** CX pour la classe de Terminale*. Paris: Hachette Education.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. In E. Mancera, C. Pérez, *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, pp. 9-21.

Mexico : Edebé Ediciones Internacionales. Reproduced in Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8, 13-33 (2011).

Artigue M., Bardini C. (2010). New didadical phenomena prompted by TI-nSpire specificities – The mathematical component of the instrumentation process. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* January 28th - February 1st 2009, Lyon (France), pp. 1171-1180. INRP www.inrp.fr/editions/cerme6.

Artigue, M. (2013). Teaching Mathematics in the Digital Era: Challenges and Perspectives. In Y. Baldin (Ed.), *Anais do VI HTEM*. Universidade Federale de San Carlos.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Klumwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 77-11.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (à paraître). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *Regular lecture at ICME-12* (Seoul, 8-15 July 2012). http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf (Accessed 28/09/2013).

Churchhouse, R.F. (Ed.) (1986). *The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series*. Cambridge: Cambridge University Press.

Drijvers, P. (2011). From 'work-and-walk-by' to 'sherpa-at-work'. *Mathematics Teaching*, 222, 22-26.

Fuglestad, A.B., Healy, L., Kynigos, C. & Monaghan, J. (2010). Working with Teachers : Context and Culture. In C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 293-310). New York : Springer.

Goos, M. & Soury-Lavergne, S. (2010). Teachers and Teaching : Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation. In C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 311-328). New York: Springer.

Grugeon, B., Lagrange, J.B., & Jarvis, D. (2010). Teacher Education Courses in Mathematics and Technology : Analzing Views and Options. In C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 329-345). New York: Springer.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009) Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 199-218.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012). *From text to 'Lived ressources': Mathematics Curriculum Material and Teacher Development*. New York: Springer

Healy, L. & Lagrange, J.B. (2010). Introduction to Section 3. In C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 287-292). New York : Springer.

Hoyles, C., Lagrange, J.B., Le Hung Son, & Sinclair, N. (Eds.) (2006). *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Education and University Paris 7.

Hoyles, C., & Lagrange J.B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. New York : Springer.

Lagrange J.B., Artigue M., Laborde C., Trouche L. (2003). Technology and Mathematics Education : a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds). Second International Handbook of Mathematics Education, 239-271. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Lagrange, J.B. (Ed.) (2013). *Les Technologies numériques pour l'enseignement. Usages, dispositifs et génèses.* Toulouse: Editions OCTARES.

Rabardel P. (1995). *L'homme et les outils contemporains.* Paris : A. Colin. English version (2002), accessible at http://ergoserv.psy.univ-Paris8.fr

Rabardel, P., & Pastré, P. (Eds.) (2005). *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement.* Toulouse: Editions OCTARES.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, des sciences et des Technologies*, 2(4), 505-528.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les aprrentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25, 91-138.

Vandebrouck F. (Ed.) (2013). *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 229-245). The Netherlands: Sense Publishers.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

La otra matemática … la de enseñanza … la de los maestros …

Eduardo Mancera Martínez
C@mpus de las Matemáticas, Instituto de Formación Docente, Virtual Educa
México
mancera.eduardo@gmail.com

Resumen

Las discusiones sobre la enseñanza de las "matemáticas" parecen compartir una misma imagen de la disciplina, no se explica lo que se entiende sobre este campo de conocimiento, ni sobre sus contenidos y métodos. Sobre esta endeble base se desarrollan las currícula, se hacen libros de texto, se llevan a cabo cursos en distintas modalidades, se forman maestros, en suma se llevan a cabo múltiples acciones y producciones académicas, incluso se definen normas educativas. Sin embargo, no hay consenso, pues la disciplina adquiere matices importantes cuando se lleva a cabo por matemáticos profesionales, ingenieros o docentes. Hay razones filosóficas, epistemológicas, históricas, comunicativas, educativas, entre otras, que obligan a establecer con precisión, eso que se llama "matemáticas" y que cobija de manera importante y persistente la formación de los futuros ciudadanos, profesionales y matemáticos. Se planteará una discusión sobre las diferencias importantes entre distintas perspectivas de las matemáticas para ilustrar el sentido que se requiere dar a la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: educación, matemática, formación, docentes.

Introducción

Los problemas sobre el rendimiento escolar en la asignatura de Matemáticas han sido tema de discusiones en distintas épocas y foros. No es un tema reciente, se ha enfatizado por siglos la importancia de una buena formación matemática, la historia ilustra el papel tan relevante que ocupó el desarrollo de métodos para tratar relaciones cuantitativas y espaciales, sin embargo, su importancia contrasta con la falta de interés y receptividad de los estudiantes en general.

Se intenta todo para mejorar el estado de la situación: cambiar las currícula, controlar y censurar la elaboración de libros de texto, prestar atención a la formación inicial y en servicio de los maestros, utilizar recursos tecnológicos o manipulativos, endurecer los procesos de selección de maestros y de evaluación, plantear promociones por resultados positivos, entre muchas medidas.

Sin embargo, no ha cambiado mucho el interés por estudiar matemáticas o se han mejorado substancialmente los resultados educativos. La matemática sigue siendo impopular y aunque se reconoce la importancia de tener una formación adecuada en la disciplina, se prefiere evitar los cursos "con aroma a matemáticas".

Al hablar de matemáticas parece haber un consenso sobre lo que es, pero basta revisar textos de uso frecuente, para darse cuenta que no hay una sola manera de interpretar a este campo del conocimiento. Mientras algunos enfatizan ciertos conceptos y procedimientos a partir de argumentaciones deductivas, otros prefieren trabajar los contenidos con una aire de inducción o analogía; los contenidos tienen un orden en algunos textos que no corresponde con el de otros, unos basan sus explicaciones en símbolos y otros en diagramas o figuras conocidas.

Hay contrastes muy importantes entre quien se dedica al desarrollo de la disciplina, a la matemática pura, quien usa resultados matemáticos para resolver problemas de la industria, el comercio, la producción, entre diferentes campos del aparato productivo o científico y lo que se trabaja en las aulas.

El tema central de esta presentación es llamar la atención en las diferencias percepciones sobre la matemática y su influencia en la enseñanza.

¿Qué es la matemática?

Vale pena entonces hablar de lo que se entiende por Matemáticas, al respecto, de acuerdo con Courant y Robins (2002, p.17): *Las Matemáticas, como una expresión de la mente humana, reflejan, la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son la lógica y la intuición, el análisis y la construcción, la generalidad y la individualidad*.

Vale la pena arriesgarse para interpretar las palabras de Curant y Robins como un reflejo de la percepción que tienen los autores sobre el desarrollo histórico de la matemática. En efecto, en sus orígenes fue fundamental la *voluntad activa*, involucrarse con distintos retos y analizar distintos elementos que influían en ellos, sin términos establecidos o procedimientos reconocidos ampliamente; posteriormente, la *razón contemplativa* tuvo un lugar privilegiado, porque ante la amplitud de saberes relacionados con relaciones cuantitativas y espaciales quedaba hacer una síntesis y tratar de ver lo logrado con un sentido de integración o mayor profundidad; finalmente, predominó la fascinación por la disciplina en un sentido de *deseo de perfección estética*, en este momento, la lógica fue quien aportó buena parte de esa estética asociada a la matemática, pues no sólo las formas caprichosas o las regularidades geométricas u numéricas llegaron a asombrar, sino que la certeza asociada al conocimiento matemático ha resultado un elemento estético relevante.

En este sentido interpretativo Imre Lakatos provoca otra perspectiva de la historia centrada en los procesos de prueba en matemáticas. En efecto, Lakatos (1981, pp. 91 - 102) elaboró una clasificación interesante sobre las pruebas matemática. Hay pruebas preformales (No tienen una estructura definida, las premisas o lo que se quiere es impreciso, no hay método de verificación, pero si de falsación), formales (se expresan en un sistema formal mediante una sucesión finita de referencias a axiomas o resultados obtenidos con anterioridad a partir de éstos) y postformales (con las pruebas formales a veces se demuestra más de lo que se desea demostrar). La matemática ha transitado por una etapa de informalidad, donde no existía jerarquía de contenidos ni de procedimientos, aunque el razonamiento deductivo ganaba fuerza, la inducción y la analogía, tenían una presencia sobresaliente; posteriormente, se pasó a una larga etapa de formalización con énfasis en las estructuras matemáticas y el rigor lógico, en esta etapa la inducción y la analogía fueron reservadas a la inspiración, pero no a la refutación o validación; sin embargo, la revisión de los fundamentos; se creía que la base de la matemática era la teoría de los conjuntos y la lógica pero al encontrar otras formas de organización como la teoría de las categorías o la teor´+ia de topos, fue necesario reconocer que el enfoque conjuntista resultó limitado y lo que se había realizado podría corresponder con estructuras más amplias que permitían probar lo que ya se conocía o se tenía como cierto y generaba nuevas formas de ver diferentes teorías como unidades o mosaicos integradores del conocimiento matemático.

Devlin (2000, pp. 16 - 27) presenta en el contexto educativo 4 caras de las matemática: La cara familir (que abarca operaciones numéricas, razonamiento formal y resolución de problemas); la matemática como una forma de saber (implica una forma de interpretar lo que sucede en el mundo en que vivimos); la matemática como un medio creativo (como analogía de lo que sucede en el arte); finalmente, aplicaciones (para enfatizar el uso de la matemática para resolver problemáticas que se presentan en la vida).

Este es sólo un espectro de las posibles perspectivas que se pueden tener respecto a lo que es la matemática, lo cual depende evidentemente de su devenir.

Tres etapas importantes en el desarrollo de las matemáticas

A pesar de parecer redundante en la exposición, a manera de síntesis de lo anterior podemos delinear tres grandes etapas en el desarrollo del conocimiento matemático, sin pretender Que es el resultado de un estudio histórico riguroso, sino como la base general de una argumentación.

Transmisión de saberes: Tipos de problemas y secuencias de pasos para resolverlos

La matemática nació en la actividad misma del ser humano, como Bishop (1999, p. 39-78) sugiere. Todo grupo humano ha realizado y realiza actividades relacionadas con contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar, todas ellas relacionadas con nociones y procesos matemáticos. Las relaciones espaciales y cuantitativas tuvieron su origen en la acción misma de los sujetos al relacionarse con el mundo.

Cabe mencionar que la geometría jugó un papel central en el desarrollo del pensamiento matemático y después vino la aritmética, el álgebra y todo lo demás, lo cual contrasta con las corrientes curriculares donde la aritmética es primero, luego el álgebra y al final, si da tiempo, la geometría. Siendo esta posición acorde con etapas posteriores.

En esta época, los personajes de la historia reconocidos como “matemáticos” no poseían un título o grado académico que los acreditara como matemáticos. Los primeros “matemáticos” reconocidos eran abogados, filósofos, astrónomos, comerciantes, entre muchas actividades, eran personas que sabían los secretos de los números, las figuras geométricas o la variación. No existían estudios profesionales para ser matemático, aunque en varias universidades se daban cursos de matemáticas, pero con una relación más fuerte con la arquitectura o las ingenierías.

La atención se centraba en la forma de resolver problemas específicos y presentar una argumentación secuencial, no necesariamente deductiva, de la solución. El énfasis se concentraba en los algoritmos, en transmitir los secretos de la manipulación de símbolos y procedimientos, pero con énfasis en el tipo de problemas que se iban a resolver. Fue época de enseñar a resolver problemas específicos, lo cual se constata en los algoritmos desarrollados aproximadamente hasta el mediados del siglo XVIII (ver Chabert, 1999). Pero como transmisión de saberes matemáticos, sin una estructura general de la cual se desprendieran las herramientas para la resolución y se dedicaba más a seguir una secuencia de pasos, lo cual era enseñado en las escuelas de la misma manera en que se aprendía.

Hacía la unidad: énfasis en las estructuras de la matemática.

En el siglo XIX tuvo auge de la matemática debido principalmente a la revolución industrial y a las conflagraciones internacionales. En efecto en la segunda guerra mundial se puso mayor atención a los científicos y la necesidad de tener más desarrollo en ciencia y tecnología en los países "avanzados". Por ello varias universidades crearon departamentos de matemáticas que aunque estuvieron anclados a carreras relacionadas con la ingeniería, poco a poco fueron independizándose posiblemente debido a las nacientes organizaciones de matemáticos en el mundo y sus intentos de fundamentar y organizar el conocimiento matemático.

En este período hubo más atención al desarrollo de la disciplina, lomque provocó que de las universidades, europeas principalmente, egresaran más matemáticos, aunque el número total seguía siendo reducido.

El gran proyecto de unificación de la matemática adquirió importancia porque fue encabezado por los matemáticos más prestigiados de la época, la mayor parte franceses. Esto se llevó a cabo por la conformación de grupo Bourbaki, el cual inicio la organización de la matemática a partir de la lógica, enfatizando el papel de los accionas y los procesos de demostración para formalizar el conocimiento matemático, la Teoría de conjuntos como base y un énfasis en las estructuras matemáticas.

Con esta corriente creció el "formalismo" y se afinaron algunas ideas sobre lógica y los sistemas axiomáticos que fueron los primeros tropiezos de la obra de Bourbaki, que debió abandonarse hacia la mitad del siglo XX por el surgimiento de la teoría de las categorías (la cual incluye a los conjuntos como una categoría "pequeña") y la teoría de topos. Sin entrar en detalles en las teorías de categorías y la de los topos, basta decir que han sido candidatos para fundamentar la matemática.

Las enormes posibilidades de la lógica y la teoría de conjuntos fascinaron a matemáticos como a responsables de sistemas educativos de muchas partes del mundo y se emprendió una cruzada a favor de estructuras los planes y programas de estudio con base en la lógica y la teoría de conjuntos y enfatizar las estructuras matemáticas ¿Cómo no hacer caso de las recomendaciones de las mentes más brillantes del siglo?

Así enseñar matemáticas implicaba enseñar algunas estructuras matemáticas y recorrer un camino paulatino para hacer énfasis en la demostración y el uso de axiomas. Nuevamente. Se repitió el enseñar por medio de repetición y memorizando, pues los contenidos resultaban confusos y demasiado abstractos.

Algunas propiedades numéricas como que $a \times 0 = 0$ debían demostrarse a partir de los "axiomas de campo", lo cual implicaba demostrar antes que: $a \times (-b) = -(a \times b)$, de esta forma aplicando la existencia de inversos aditivos y la propiedad distributiva se tenía:

$$a \times 0 = a \times (b + (-b)) = a \times b + a \times (-b) = a \times b + (-(a \times b)) = 0$$

La geometría se explicaba a modelos de la "vida real" como la "geometría de las abejas":

Términos indefinidos:

Abeja, colmena y la relación "estar en"

Axiomas

A1. Hay por lo menos 2 abejas diferentes.

A2. Dadas dos abejas distintas, pertenecen a una y solo una colmena.

A3. Dada cualquier colmena, hay por lo menos una abeja que no está en ella.

Teoremas

T1. Hay, por lo menos tres abejas.

Demostración: por A1 hay por lo menos dos abejas, Por A2 hay una y solo una que las contiene. Por A3 hay por lo menos una abeja fuera de esa colmena. Entonces, Hay por lo menos tres abejas.#

T2 Dos colmenas distintas tienen a lo más, una abeja en común.

Demostración: Supongamos que no es así, es decir que hay por lo menos dos colmenas que contienen a dos abejas. Esto contradice A2.#

T3 Hay, por lo menos, tres colmenas.

Demostración: Por T1 hay por lo menos tres abejas, digamos D, F y G, por A2 hay una sola una colmenas que contienen a las abejas D y F, otra columna contiene a las abejas F y G y otra más a las abejas D y G. Por tanto, hay por lo menos tres colmenas.#

Y así se continua, pensando en abejas y colmenas en vez de puntos y rectas, para hacer más "real" el manejo matemático del sistema axiomático.

No se tomó en cuenta el nivel de abstracción y desarrollo que se debería tener para acceder a este tipo de conocimiento. Por otro lado, se hizo polvo a consignas pedagógicas de Comenius (1592 a 1670) y Pestalozzi (1746 – 1827): "Ir de lo particular a lo general" o " Iniciar de lo sencillo para ir a lo complejo. Consignas ampliamente aceptadas y vigentes.

¿Contenidos o significados? ¿Secuencias de pasos o argumentación?

La reforma de la matemática moderna se derrumbó al poco tiempo pues matemáticos, maestros y gente común hizo causa común para derrocarla. En estas revueltas se distinguió Morris Kline, quien en la introducción de uno de sus libros (Morris Kline, 1973) presenta el caso de una maestra que le pregunta a su alumno Juanito sobre una suma de números naturales

Maestra: ¿Cuánto es 3 + 2?

Juanito: 3 + 2 = 2 + 3

Kline argumenta lo siguiente: "Lo cual es estrictamente cierto, pero casi siempre inútil si se trata de hacer el cálculo. La conclusión implícita es que Juanito conoce la ley de la conmutatividad de la suma, pero no tiene idea de cómo llegar a 5 pasando por 2 más 3".

El párrafo anterior resume uno de los argumentos principales de la contrarreforma.

Pero no se quería regresar a lo anterior a pesar de la demanda sobre regresar a los "hechos básicos" al "saber hacer". Seguramente ya existía consciencia de que lo anterior no era el camino correcto. Regresar a lo anterior sería caer en la repetición y la memoria de contenidos matemáticos sacrificando la comprensión y la profundidad.

Entonces se inició un camino para tratar de comprender lo que entendían los estudiantes, lo que hacían los maestros, el sentido que tenían las aplicaciones y se revisaron muchos aspectos más por las crecientes comunidades de educación matemática.

A pesar del frecuente rechazo a los anglosajones de América del Norte, su organización de maestros de matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) organizó una discusión y presentó un documento de gran impacto, mayor fuera de USA que al interior, en el cual se retoman algunos aspectos relevantes de las matemáticas. En efecto, Los "Principios y Estándares para la Educación Matemática" (NCTM, 2000) establecen varios aspectos de interés. Una primera versión de este esfuerzo se presentó en 1989 y el resultado de la revisión de éste es el trabajo de referencia en este documento.

Se plantearon seis principios: Igualdad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología. Con ellos se perfila el tipo de normas y prácticas educativas que son deseables en la enseñanza de la matemática, aspecto que en planes y programas de estudio frecuentemente se mencionan de manera parcial. Los principios son establecidos para influir el ámbito del diseño curricular.

Los estándares, resultan muy interesantes pues se distribuyen en cinco estándades de contenidos (números y operaciones, Álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación). Es decir la perspectiva de este planteamiento nos hace considerar a cada contenido involucrado con diferentes procesos que se van definiendo de acuerdo con el grado escolar que se trate. Así los estándares de contenidos y procesos se refieren a temas generales que deben ser cubiertos parcial o totalmente en los grados escolares acompañados de un trabajo didáctico orientado por los estándares de procesos. En este sentido los estándares de contenidos y procesos están orientados al trabajo en aula.

Es decir, como reflejo de la actividad en educación matemática a nivel mundial se estaba conformando una perspectiva diferente del currículo y el trabajo en clase, pues varios planteamientos de NCTM correspondían con recomendaciones o resultados de investigación. Pero, la organización y los ejemplos desarrollados fueron trascendentes en la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas. Esto representó un gran esfuerzo de trabajo colegiado.

Posteriormente, la NCTM promovió otro documento trascendental que define una posición para todos los aspectos relacionados con la enseñanza de la matemática, aunque está dirigido a un nivel educativo particular: Focus in high school mathematics. Reasoning and sense making (NCTM, 2009). En efecto, el poner en un lugar protagónico los significados y el razonamiento induce varios cambios en la perspectiva de la enseñanza.

Tribus matemáticas

Lo anterior ha servido para revelar dos tribus que trabajan en el contexto de la matemática: Los matemáticos profesionales y los educadores matemáticos (que incluye a los docentes), pero hay una tribu que no se ha mencionado: los matemáticos aplicados. Esta tribu tiene una fuerte relación con las dos anteriores pues siempre ha existido, desde su inicio la matemática ha estado vinculada con determinados problemas relacionados con asuntos de la ciencia o la sociedad. Cuando surgió la organización del conocimiento matemático, creció una tendencia que desdeñaba la relación de la matemática con las aplicaciones, varios matemáticos de renombre advirtieron que la Matemática, como unidad, no puede ser planteada a partir de las aplicaciones, pues el desarrollo de la matemática se resuelve desde dentro, al interior de la disciplina, por eso se hace referencia a la Matemática Pura. Una matemática libre de contaminaciones.

El matemático aplicado busca la resolución de problemas en varios campos del conocimiento, cometen pecados graves como hablar de infinitesimales, no preocuparse por condiciones que aseguren la continuidad, integrabilidad o diferenciabilidad de funciones, entre otras escandalosas omisiones fuera de los rigores de la matemática pura.

Sin embargo, ante el desdén de quienes se dedican a la matemática pura, hay una mayor conexión con los educadores matemáticos quienes se ocupan de la modelación, procesos de aproximación, tratamiento de la información y otros temas que constituyen una parte importante de la matemática aplicada.

Hay una frase que plantea la problemática entre las tribus de la matemática pura y la matemática aplicada:

"Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad" Albert Einstein (1879-1955).

La enseñanza de la matemática se aleja mucho de la Matemática pura y se acerca tenuemente a la matemática aplicada.

La formación de maestros

El triángulo didáctico (contenido, maestro y alumno) nos indica el vértice que se requiere considerar principalmente para realizar acciones tendientes a mejorar el estado del rendimiento escolar en matemáticas.

El contenido ha sido muy estable, en realidad desde la revolución industrial se enseñan los mismos contenidos de matemáticas. Han cambiado en su nivel de profundidad o del lugar en planes y programas de estudio, pero siguen presentes hasta la fecha.

Los alumnos son los usuarios del sistema educativo e independientemente, de sus nivel de responsabilidad, actitud y posición socioeconómica, son los principales afectados en el servicio educativo.

Los cambios en planes y programas de estudio no pueden ser efectivos en la medida que quien los opera no está preparado para hacerlo de manera creativa y dinámica. Es así que adquiere mucha importancia la formación inicial y la que se da en servicio, como formación continua o extensión, a quienes tendrán responsabilidades como maestros de matemáticas.

Veamos algunos tipos de planes de estudio al respecto.

Reparto curricular

Los planes de formación inicial o continua de maestros generalmente asignan un porcentaje a la preparación matemática (generalmente referida al manejo de la demostración en contextos de sistemas axiomáticos implícitos o explícitos), a la pedagógica (referida a las teorías de la evaluación, desarrollo curricular, de aprendizaje, entre otros temas), práctica docente (equivalente a dar clases en escuelas regulares durante un período de tiempo determinado) y tecnología (el uso de distintos medios, aunque la tendencia es el uso de computadoras).

Estos rubros definen la formación de profesores, así se generan distintos tipos de maestros.

Maestro matemático

Es quien se forma en un plan donde la formación matemática se lleva el 100%, sin dedicar tiempo a los asuntos pedagógicos, de práctica docente y de uso de la tecnología, aunque está ultima también puede ocupar un porcentaje de los estudios, pero por lo general no es mucho.

En general, este tipo de formación es equivalente a la de un matemático, la eligen quienes desean ser maestros de matemáticas y consideran que la mejor opción es estudiar una carrera en matemáticas, aunque de entrada la intención sea ser maestro.

En esta corriente se tienen propuestas didácticas que tienden a revisar detenidamente secuencias de pasos para realizar un proceso y relacionar la matemática trabajando las relaciones abstractas con objetos, a modo de ejemplo.

Una preparación de este tipo aleja a los futuros maestros o a los maestros en servicio de los acercamientos que deben considerar al ser maestros.

Maestro cuasi matemático y cuasi pedagogo

En esta tendencia se prepara a los maestros en un marco que considera al menos la mitad de preparación matemática, que corresponde generalmente a la mitad de la formación requerida para quien desea obtener una licenciatura en matemáticas.

La formación pedagógica se lleva el mayor porcentaje de la mitad restante, dejando algo para el uso de tecnologías y la práctica docente. Puede ser matemáticas 50%, pedagogía 30%, práctica docente 10% y uso de tecno9logías 10%. Aunque puede llegarse al caso extremo de 50% para la formación matemática y 50% dedicado a la formación pedagógica.

Lo que distingue a este tipo de planteamientos de la formación matemática es que a ésta les corresponde el 50% al menos.

Los maestros egresados de este tipo de programas no llegan a tener una perspectiva adecuada de los aspectos que requiere considerar la docencia en la asignatura de matemáticas, ni tampoco de la pedagogía o de la matemática.

Los cursos de matemáticas se desarrollan con énfasis en los sistemas axiomáticos y las demostraciones, sin vínculos con las aplicaciones. Por otro lado, los contenidos de matemáticas que se abordan en la formación de este tipo, y la anterior, suelen ser más de los que se trabajarán en el ejercicio de la docencia.

Maestro conocedor

En contraste con los tipos anteriores aquí es 0% dedicado a los cursos de la disciplina, parten del supuesto de que maestro, por haber cursado el nivel en el que se va a trabajar, conoce suficientemente los contenidos y por tanto no requieren cursos sobre ellos.

En este tipo de programas de formación inicial o continua, el énfasis está en las teorías del aprendizaje, los aspectos de didáctica y evaluación pero el tratamiento de estos temas, por lo general, tiene poca referencia al contenido.

Puede darse más peso en este tipo a la práctica docente.

En este caso, más que en los anteriores, se suele ofrecer cursos sobre habilidades, competencias o del tema que tenga relación con los requerimientos de enfoques o tendencias de moda.

En ocasiones, sin importar el tipo de maestro que se está formando, se incorporan cursos que traten sobre los temas de la educación matemática a partir de teorías reconocidas o que aborden aspectos como la construcción de significados o resolución de problemas

¿Qué matemática?

Hay diferencias entre los planes de formación de maestros sobre las matemáticas que deben enseñarse. En la preparación de docentes para preescolar se piensa que no se requieren cursos de matemáticas y se da más atención a los aspectos pedagógicos, para los planes orientados a formar maestros de primaria (siguientes 6 grados escolares) se pone mayor atención a la educación matemática y ahí se trabajan aspectos de contenidos como parte de dichos cursos.

En la formación de maestros para preescolar y primaria la atención está puesta en el desarrollo del niño, fundamentalmente.

La atención cambia para los siguientes seis grados (educación media básica y media superior) que abarcan los estudios preuniversitarios, pues la atención se pone en la disciplina y en el futuro maestro.

Recientemente, en algunas instituciones se incorporan algunos cursos de educación matemática como parte de la formación pedagógica, el problema es que los avances en investigación para este nivel atienden también fundamentalmente al contenido.

Esto refleja de alguna manera lo que sucede en la investigación en educación matemática, pues hay bastante dedicada a los niveles de preescolar y primaria, baja el desarrollo de investigación para los niveles medios y el universitario es todavía menor.

Esto coincide con el desarrollo de la pedagogía, hebegogía y andragogía.

El bajo desarrollo de investigación en los niveles medios ha producido exportación de teorías diseñadas para los niveles anteriores y para utilizarlas se "adaptan" a estos niveles.

Las tendencias en preparación en educación matemática abarca principalmente aspectos relacionados con la aritmética y después con respecto al álgebra, poca atención se da a la geometría y aún es mayor en lo que se refiere al tratamiento de datos.

Los significados asociados a los números o las literales tienen más presencia, le sigue el tratamiento de la resolución de problemas o la modelación.

Así los contenidos de matemática se van substituyendo por contenidos de educación matemática que prestan mayor atención al desarrollo conceptual y dejan de lado las técnicas, el trabajo operativo.

Este es un tema central ¿Qué matemática o qué de educación matemática debe plantearse a los maestros de los diferentes niveles educativos? ¿Los maestros deben conocer el tratamiento formal de los contenidos matemáticos? ¿se debe prestar mayor atención a los significados de los objetos matemáticos que a sus aspectos operativos? ¿se deben enfatizar los aspectos relacionados con la demostración o la argumentación?

Respecto tema hay más creencias y supuestos que investigación. Los aspectos relativos a la preparación matemática de los maestros se deciden con poco respaldo, sobre todo cuando se dice que el currículo está orientado por competencias o la resolución de problemas y al revisar los cursos siguen teniendo la misma connotación y se expresa en los programas que se cambia el enfoque, es decir hay que hacer lo mismo, pero de otra manera ¿quién puede hacer eso?

Trabajar los significados de los números pone de relieve estructuras diferentes a las que se acostumbran tratar en los cursos de matemáticas formales. Por ejemplo atender la estructura matemática de las razones se contrapone a la estructura matemática asociada a los números racionales.

Por otro lado, trabajar aspectos relacionados con la demostración sin hacer referencia a los sistemas axiomáticos es algo poco factible de hacer, aunque se puede enfatizar el razonamiento deductivo, pero en la enseñanza se procede más por inducción y analogía.

Hay contenidos importantes en matemáticas que no tienen relación con situaciones de la "vida cotidiana", nacen de las necesidades de la propia teoría como agregados necesarios para tratar problemáticas específicas, no necesariamente, con asuntos de modelación o problemáticas "reales" ¿Qué hacer con esos contenidos?

Hay mucho por aclarar y hacer respecto a este tema.

Problemáticas por enfrentar

Se piensa que los cambios en las currícula pueden ayudar a mejorar la enseñanza, pero por otro lado la investigación señala que hay cierta estabilidad en las prácticas de enseñanza. De tal modo que se debe prever un tiempo de transición antes de poder saber el efecto que producen ciertos cambios. No hay resultados inmediatos, en educación se requieren tiempos más largo que en otras actividades para poder valorar el impacto de los cambios.

No necesariamente se obtienen los mismos resultados al importar o exportar modelos de enseñanza o de prácticas docentes. Aunque ayudan mucho a la generación de ideas y procedimientos para situaciones específicas.

Los requerimientos actuales para el desarrollo de habilidades y competencias se enfrentan con problemáticas relacionadas con la estabilidad de concepciones tradicionales ¿Cómo se va a desarrollar la competencia si se debe seguir la línea del contenido, pues el desarrollo de competencias suelen requerir la intervención de contenidos diferentes? ¿Cómo se va a desarrollar una competencia si no se interactúa con los diversos medios que permiten la interacción entre distintas representaciones de objetos matemáticos?

Muchas aplicaciones están en un contexto donde se hacen de lado factores importantes o que tienen poca influencia en el resultado que se encontrará con un modelo matemático, así que se requiere considerar que no se trabaja la realidad como tal sino una versión de esta que se acomoda a cierto tipo de modelos. Además hay otros cuestionamientos sobre la relación teoría – realidad, que tanto se aplica en la enseñanza de la matemática: ¿Cómo resolver la problemática derivada del tratamiento formal del contenido con las dispensas necesarias en las aplicaciones? ¿Cómo promover aplicaciones que no reproducen la realidad sino que requieren de omisiones y adaptaciones para ser posible la aplicación de modelos matemáticos?

No todos los conceptos y procedimientos de la matemática sueles ser extraídos de la realidad, hay necesidades internas de la disciplina que inducen a incorporarlos para preservar estructuras anteriores ¿cómo enfrentar estas situaciones sin la preparación adecuada en la teoría?

En varias experiencias sobre resolución de problemas se ha observado una tendencia en los maestros a usar el álgebra para resolver cualquier problemática, incluso en problemas que requieren principalmente el uso de la geometría hay persistencia de usar métodos algebraicos, para muchos docentes matemáticas es el álgebra. Esto ha provocado que se poca atención a los momentos de los cursos donde se trabaja la geometría. ¿Cómo evitar la tendencia a usar el álgebra para todo y enfatizar la atención a la geometría?

Un intento para influir en el cambio de perspectiva sobre la matemática

Se desarrolló un proyecto con los siguientes objetivos:

1. Apoyar el rendimiento escolar de los estudiantes de educación secundaria en la asignatura de matemática.
2. Generar una perspectiva diferente del estudio y la enseñanza de la matemática.
3. Crear espacios en los que no se restrinja el uso nociones o procedimientos, sino que sirvan para generar ideas, se discutan y se valoren.
4. Propiciar la reflexión personal y grupal.
5. Favorecer la comprensión de las matemáticas a partir de la resolución de problemas.

La estrategia desarrollada se conformó de acuerdo con los siguientes propósitos:

1. Formular el proyecto general e involucrar a cuerpos directivos y de supervisión de la estructura.
2. Generar un ambiente de confianza y propositivo.
3. Analizar conjuntamente los avances
4. Retroalimentar a los participantes.

Los alcances de la operación del proyecto fueron:

1. El proyecto de desarrolló en: 14 escuelas secundarias
2. Con la participación total de profesores: 25
3. Participación de alumnos: 750

Momentos principales de la experiencia

Primer momento

El maestro inicia planteando un problema a los estudiantes pide que se resuelva en grupos dando un tiempo determinado.

Se pide a los estudiantes entregar una solución individual posteriormente.

El problema debe satisfacer las siguientes condiciones:

De preferencia que el contenido matemático implícito esté vinculado con la aplicación en la medida de lo posible

Que no inmovilice, es decir, debe entenderse y hablar de él sin dificultad. En ocasiones, el uso de términos o contextos poco conocidos puede afectar la comprensión de lo que se plantea. También es importante que no se requiera usar dispositivos especiales para resolverlo (como sensores, calculadoras especiales, software, materiales manipulativos, etc.) pues ello afectaría la realización de intentos por resolverlo y distraería la atención a los dispositivos en vez de centrarla en el problema.

Que pueda resolverse casi de inmediato, por métodos intuitivos, lo cual generalmente se consigue poniendo datos adecuados para que surjan relaciones casi inmediatamente. Esto permite atrapar la atención de los estudiantes y si pueden hacer algo para resolverlo se incrementará su autoestima.

Segundo momento

El maestro pide que se cambien los datos del problema y pide que se resuelva.

Los estudiantes podrán ver que algunos de los procedimientos que se emplearon para resolver el problema ya no son adecuados o son limitados.

Los alumnos tienen una oportunidad de valorar el uso de nociones y procedimientos, lo cual no se consigue restringiendo la atención a contenidos y procedimientos específicos.

Tercer momento

El maestro pide que se planteen "problemas similares" haciendo referencia a "otros contextos" la única condición es que se resuelvan con los mismos procedimientos que han visto.

En esta etapa del trabajo con el problema el estudiante: podrá reconocer la utilidad de los métodos matemáticos para resolver, no solamente un problema, sino una familia de problemas, que no hay solamente una forma de resolver los problemas y que es importante tener a la mano diferentes herramientas para encontrar soluciones. Tendrá la oportunidad de ver que la forma de expresar la solución puede ser diferente y algunas de esas formas pueden entenderse y expresarse con claridad y otras pueden ser confusas.

Cuarto momento

El maestro solicita que plantee un problema "similar" donde la solución sea establecida por el maestro, es decir, los estudiantes deberán encontrar los datos que se acomodan a la solución que se planteó.

El estudiante tendrá la oportunidad de valorar la importancia de conocer y manejar relaciones matemáticas, dado que tienen la posibilidad de utilizarse en diferentes situaciones. También reconocerá que basta un problema para explorar muchos aspectos de la matemática y que lo importante no es la repetición y la memorización sino darse cuenta de las relaciones que se pueden establecer en una situación dada.

Quinto momento

El maestro destaca la importancia de "jugar con los contenidos matemáticos" para aprender matemáticas

Los estudiantes tendrán la oportunidad de comprender lo que implica hacer un plan para obtener un resultado y conocer formas de relacionarse con el contenido matemático, modificándolo y adaptándolo a los recursos que tiene y no tratando de reproducir o memorizar procedimientos ajenos a su experiencia.

Entre los resultados relevantes del proyecto se considera que los siguientes puntos son relevantes:

1. Hay un primer acercamiento en la introducción de nuevas ideas y perspectivas sobre la enseñanza de la matemática que pueden adaptarse a la Escuela Secundaria.
2. La experiencia resultó de interés para la mayoría de los docentes y de los estudiantes.
3. Los docentes y los estudiantes reconocen que esta forma de resolver situaciones problemáticas dentro del aula implica mayor trabajo y esfuerzo, pero a su vez posibilita el desarrollo de competencias.
4. En muchos casos los docentes realizaron adaptaciones a la metodología propuesta sin trastocar su esencia pero tomando en cuenta las características de su centro de trabajo.
5. Los estudiantes paulatinamente adquirieron autonomía en sus estrategias y procesos de resolución y planteamiento de problemas, fortaleciendo su autoestima así como su auto-concepto respecto a su desempeño en matemáticas
6. Sin tenerlo como un objetivo inicial, se incentivó en algunos casos la participación familiar en las etapas de la metodología propuesta fortaleciendo los vínculos: familia-estudiantes, familia-escuela
7. Se inició el desarrollo, fortalecimiento o en su caso consolidación de competencias docentes necesarias para la aplicación del enfoque actual de la enseñanza de las matemáticas.
8. Los maestros reconocieron que les falta conocer más procedimientos para resolver problemas o explorar distintas maneras de resolverlos.
9. Los maestros pudieron reconocer las diferencias individuales en sus grupos y detectar estudiantes avanzados que antes pasaban desapercibidos.

Esta experiencia tenía la finalidad implícita de hacer que los maestros conocieran otras versiones del trabajo matemático y que pueden servir de método para el estudio de las matemáticas, en todo caso se trató de enfatizar lo que expresó Einstein: "Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo."

Bibliografía

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La Educación matemática desde una perspectiva cultural.* Temas de Educación. Barcelona, España: Paidós.

Bourbaki, N. (1962). La arquitectura de las matemáticas. En F. Le Lionasis, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria Buenos Aires.

Chabert, J et al (1999). *A history of algorithms, from the pebble to the microchip*. París, Francia, Editions Belín.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.

Devlin, K. (2000) The four face of mathematics. En M. Burk. y F. Curcio, *Learning mathematics for a new century.* The 2000 Yearbook. Virginia, USA, National Council of Teachers of Mathematics

Dieudonné, J. (1973). ¿Debemos enseñar las "matemáticas modernas"? En Hernández J.

M. Kline, *Why Johnny Can´t Add: The Failure of the New Math*. New, York, USA. St. Martin´s Press.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y Epistemología* Madrid, España: Alianza Editorial S.A.

NCTM (2000). *Principles and standars of Schoolo Mathematics*. Virginia USA: NCTM

NCTM (2009).. *Focus in high school mathematics . Reasoning and sense making.* Virginia USA: NCTM.

Um sentido mais amplo de ensino da matemática para a justiça social

Un sentido más amplio de
enseñanza de las matemáticas para la justicia social.

A broader sense of
teaching mathematics for social justice.

Ubiratan **D'Ambrosio**
UNIBAN/São Paulo
Brasil
ubi@usp.br

Resumen

Como matemáticos y educadores matemáticos, tenemos la responsabilidad de orientar nuestra investigación y nuestras práticas pedagógicas hacia la justicia social. Se han discutido muchas propuestas, con diferentes enfoques, como enseñar las matemáticas para la justicia social. Creo que hay, además, una nueva prioridad para los educadores matemáticos, que es mostrar las matemáticas como un instrumento importante para preparar a las futuras generaciones para vivir en un mundo de paz y dignidad humana para todos. Me parece un equivocado la ausencia, en la Educación Matemática, de referencias a la ética de los usos de las matemáticas. Aunque la matemática se enseña con la intención declarada de que será útil a la vida cotidiana, los educadores matemáticos no pueden ignorar el hecho de que los estudiantes más exitosos pueden ser ingenieros que van diseñar armas letales o refuerzar las prácticas del capitalismo brutal. Es importante reconoces las principales amenazas a la existencia sostenible de la humanidad. Crisis ecológicas que degradan irreversiblemente la Biosfera pueden ser desencadenados. Sin un claro entendimiento de cómo las matemáticas pueden contribuir a la consecución de la paz y la dignidad humana para todos, que son los grandes objetivos de justicia social, educadores matemáticos pueden fallar en su importante responsabilidad ética. Veo el proceso educativo como la combinación de aspectos socioeconómicos globales encaminadas a mejorar la calidad de vida. En esta conjunción, interviene, al igual que en el proceso tecnológico, la filosofía que la sociedad suscriba, así como consideraciones de los recursos humanos y materiales disponibles.

Palabras clave: Justicia social, Educación Matemática, dignidad humana, estado de la civilización.

Resumo

Como matemáticos e educadores matemáticos, temos a responsabilidade de orientar nossa pesquisa e nossas práticas pedagógicas para a justiça social. Tem-se discutido muitas propostas, com diferentes focos, sobre como ensinar matemática para a justiça social. Creio que há, também, uma nova prioridade para os educadores matemáticos, que é mostrar a matemática como um instrumento importante para preparar futuras gerações para viver em um mundo com paz e dignidade humana para todos. Parece-me ser um equívoco a ausencia, na Educação Matemática, de referências à ética dos usos da matemática. Embora a matemática seja ensinada com a intenção declarada de que será útil à vida cotidiana, os educadores matemáticos não podem ignorar o fato que os estudantes com mais sucesso podem ser engenheiros que vão desenhar armas letais ou reforçar as práticas do capitalismo brutal. É importante reconhecer as principais ameaças à existência sustentável da humanidade. Podem ser desencadeadas crises ecológicas que degradan irreversiblemente a Biosfera. Sem um claro entendimento de como a matemática pode contribuir a conseguir a paz e a dignidad humana para todos, que são os grandes objetivos de justiça social, educadores matemáticos podem falhar na sua importante responsabilidade ética. Vejo o processo educativo como a combinação de aspectos socioeconómicos globais encaminhados a melhorar a qualidade de vida. Nesta conjunção intervem, igualmente ao processo tecnológico, a filosofía que a sociedade adota, assim como considerações dos recursos humanos e materiais disponíveis.

Palavras-chave: justiça social, educação matemática, dignidade humana, estado de civilização.

Summary

As mathematicians and mathematics educators we have the responsibility of directing our research and our pedagogical practices toward social justice. There has been much discussions about proposals, with different foci, about how to teach mathematics for social justice. I believe that there is a new priority for mathematics educators that is to show mathematics as an important instrument to prepare future generations to live in a world in peace and with human dignity for all. It seems to me to be equivocated the absence, in Mathematics Education, of refrences to the ethics of the uses of Mathematics. Althoug the teaching of Mathematics is always done with the intention of its usefulness in every day life, mathematics eductors can not ignore the fact that the students with better achievement may become engineers to design letal weapons or to reinforce the practices of brutal capitalism. It is important to recognize the main treathes to the sustainable existence of humanity. There may be ecological crises that irreversibly ruin Biosphere. Without a clear understanding of how mathematics can contribute for peace and human dignity for all, which are great objetives of scial justice, mathematics educators may be failing in their important ethical responsibility. I see the educational process as a combination of global socioeconomic aspects focusing a better quality of life. In this combination intervenes, other than the technological process, the philosophical posture of society, as well as considerations of the availability of human and material resources.

Keywords: social justice, mathematics education, human dignity, state of civilization.

Nota introdutória: o texto abaixo é uma tradução parcial e livre, com ligeiras modificações, do meu trtabalho *A Broad Concept of Social Justice*, publicado como Chapter 14, *Teaching Mathematics for Social Justice. Conversations with Educators*, editors: David Stinson and Anita Wager, Reston VA: NCTM/National Council of Teachers of Mathematics, 2012. Agradeço à Profª Olenêva Sanchez pela versão, para o português, do original em inglês.

Um Desafio para Educadores Matemáticos e Formação de Professores.

Uma conferência notável, *Visions in Mathematics – Towards 2000*, foi realizada em Tel Aviv, Israel, de 25 de agosto a 3 de setembro de 1999. Foi uma importante reunião, liderada pelos maiores matemáticos do mundo, para discutir, às vésperas do século XXI, a matemática do passado e do futuro, sua importância e métodos. Nessa conferência, o eminente matemático Mikhail L. Gromov, professor do *Institute des Hautes Études Scientifiques* de Bûres-sur-Yvette, França e que em 2009 viria a receber o Prêmio Abel (equivalente a um Prêmio Nobel em Matemática) por "suas contribuições revolucionárias à geometria", fez uma palestra, na qual ele aponta novas direções para o desenvolvimento da matemática, resultante do contexto sociocultural, em vez das necessidades conceituais e detalhes intrínsecos às teorias matemáticas estabelecidas. Nós precisamos de outra matemática. Ele chama as novas estruturas matemáticas de *soft* (suaves), porque consistem em hipóteses bastante flexíveis. Essas ideias extraordinárias, embora muito difíceis, indicam, claramente, que a nova geração de cientistas, engenheiros e, obviamente, matemáticos, precisarão de atitudes mais amplas para a matemática.

Os desafiadores problemas desafiadores requerem, além de novas técnicas matemáticas, a formação de uma nova geração de pesquisadores das ciências matemáticas. Novamente, citando Gromov (1998):

> Para isso, vamos precisar da criação de uma nova geração de profissionais matemáticos com capacidade para mediar entre matemática pura e ciência aplicada. O enriquecimento mútuo de ideias é crucial para a saúde da ciência e da matemática. (p. 847)

Todas essas novas considerações são, principalmente, direcionadas a pesquisadores matemáticos, mas é incontestável que elas colocam um desafio ainda grande para os educadores matemáticos. É questionável se nós devemos insistir em manter, na educação, o conteúdo que está consumindo tempo escolar e energia, em vez de nos movermos, mais rapidamente, para as novas concepções de matemática, como sugerido por Gromov e outros. A mesma questão é aplicável à nova física, à nova biologia, e a outros campos científicos. É inegável que essa nova face da matemática seja mais atrativa aos estudantes. Os nativos digitais sentem que a matemática tradicional, que ainda domina o currículo, é obsoleta, enfadonha e inútil. Eu estou convencido de que essa é a principal causa dos maus resultados nos testes.

A Nova Matemática

A nova matemática depende, evidentemente, de matemática básica. Mas até que ponto devemos insistir no básico? Graças à maravilhosa tecnologia disponível, é possível acelerar a aquisição da matemática básica que é necessária – uma pequena parte do que há nos programas usuais – e caminhar, rapidamente, para a nova matemática. A matemática básica inclui, principalmente, conceitos, não técnicas. O desenvolvimento curricular deve concentrar-se em acelerar o ensino do que é, efetivamente, básico na matemática tradicional, que são os conceitos. Ao invés disso, muito do tempo e energia dos professores ainda é despendido para insistir em habilidades.

Matemática, como uma ciência, possui especificidades. Steve Kennedy (2003) escreve:

> Matemática é diferente de outras ciências. Na realidade, os problemas, motivações e verificações da matemática vêm de dentro da própria disciplina, enquanto que outras ciências olham o mundo de fenômenos por problemas e afirmação. O químico cuja experiência produz um resultado de sua previsão teórica com seis casas decimais tem uma boa razão para se sentir muito satisfeito com sua teorização. Um matemático, raramente, encontra-se num lugar empiricamente feliz, diante de suas teorias. Usualmente, um matemático tem apenas a fria reafirmação da lógica como conforto; o universo não se dignou a validar nosso trabalho, exceto indiretamente, quando o mesmo se mostra útil em outra ciência. (p. 180)

A dificuldade está em preencher a lacuna entre os avanços internos da matemática e sua utilização. Aproximar a matemática das ciências é mostrar, na educação matemática, que a matemática está, totalmente, integrada com o método científico, que é um componente essencial da pesquisa multidisciplinar e interdisciplinar. Isso é intrínseco ao propósito das práticas de laboratório em educação matemática, de Eliakim Moore, no início do século XX. Por exemplo, Moore (1903) afirma:

> O menino aprenderá a fazer uso prático, em suas investigações científicas – certamente, de forma ingênua e elementar - das melhores ferramentas matemática que os séculos inventaram; sob hábil orientação, ele aprenderá a interessar-se não apenas nos resultados das ferramentas, mas na teoria das próprias ferramentas, e que, portanto, ele, finalmente, poderá ter um sentimento em relação à sua matemática, extremamente diferente daquela que é, hoje, encontrada somente com mais frequência – um sentimento de que a matemática por natureza é, de fato, uma realidade fundamental do domínio do pensamento, e não, meramente, uma matéria de símbolos e regras e convenções arbitrárias. (p. 408)

Em vez de propor um atalho, Moore propõe restaurar a educação matemática para as raízes originais do desenvolvimento da matemática na modernidade. Os avanços propostos desde o século XVI reconhecem a matemática como o principal suporte da investigação científica.

Alguns exemplos de atalhos para apresentar matemática avançada de uma forma simples e contextual são os propósitos expostos no livro *Calculus Made Easy*, de Silvanus Thompson, 1910, que tem sido, geralmente, repudiado por matemáticos, e nas *Lectures on Physics*, baseado no curso lecionado por Richard Feynman (1988), CALTECH, de 1961 a 1963. Em ambos os livros, de autoria de cientistas distintos (não-matemáticos, mas que são usuários de matemática avançada), o conteúdo é apresentado rapidamente, com o rigor adequado para o seu propósito. Encontrar o equilíbrio entre apresentação acessível e rigor aceitável é um grande desafio para educadores matemáticos. O maior desafio é perceber essas mudanças, para entender o novo e desenvolver métodos para transmitir isso aos professores.

As crianças devem ser preparadas para um futuro que não podemos prever. Preparar crianças para serem proficientes em matemática obsoleta é prepará-las para a angústia de ser marginal no futuro, porque eles possuirão conhecimento ultrapassado. Evitar essa angústia é um recurso importante da **justiça social**. Para mim, justiça social pode ser entendida como um esforço para satisfazer as necessidades básicas de uma vida saudável: liberdade e escolha; saúde e bem-estar físico; e boas relações sociais, ancoradas em segurança, tranquilidade e respeito à experiência espiritual. Devemos evitar dar aos estudantes a ilusão de que, passando nos testes correntes e obtendo boas notas, eles estão, de alguma forma, preparados para o futuro. Essa ilusão é falaciosa e considero uma negação de justiça social. A inadequação dos testes não é nova. Évariste Galois, há mais de duzentos anos, claramente, denunciou uma dependência dos testes: "Você está muito feliz em se dar bem no teste? Você acredita que será, finalmente, nomeado como um dos duzentos geômetras que serão admitidos? Você acredita que está preparado: você está enganado, isso é o que lhe mostrarei na próxima carta." (Galois 1831). Ele morreu antes de escrever a próxima carta.

A Nova Educação

A educação, nessa era da ciência e tecnologia, desafia as abordagens estabelecidas, "validadas" pelos resultados dos testes padronizados. Os objetivos da educação vão muito além de, meramente, preparar para o sucesso profissional. A Educação tem uma responsabilidade de construir atitudes mais sensatas para si mesmo, para a sociedade, para a natureza. Estamos, principalmente, enfrentando a formação de professores para assumirem atitudes diferentes em seus ensinamentos, respondendo aos novos desafios. Educadores devem ser criativos.

Acredito que os problemas-chave, na formação de professores de matemática, estão relacionados à visão inadequada dos propósitos da educação e do papel dos professores de matemática como educadores. Futuros professores de matemática e aqueles em serviço devem estar sempre refletindo acerca das mudanças na educação, como uma consequência das profundas mudanças na sociedade, particularmente no cenário demográfico, na produção, na informação, na comunicação, e no ambiente.

Aqui, eu elaboro sobre os propósitos da educação como preliminar para discutir o papel dos professores de matemática como educadores. Eu identifico um duplo propósito para o porquê das sociedades estabelecerem sistemas educacionais:

1. Promover a cidadania (que prepara o indivíduo para estar integrado e produtivo na sociedade), obtida pela transmissão de valores e esclarecimento dos direitos e responsabilidades na sociedade.
2. Promover a criatividade (que leva ao progresso), obtida pela ajuda às pessoas a realizarem seus potenciais e ascenderem ao mais alto nível de sua capacidade.

A prática da educação se faz no presente. O grande desafio para os educadores é gerir, nesse processo, o encontro do passado e do futuro; isso é, a transmissão de valores enraizados no passado, o que conduz à cidadania, e a promoção do novo, para um futuro incerto, o que estimula criatividade. Mas, nesse processo, devemos ter cuidado. Nós não queremos transmitir uma cidadania submissa, na qual nossos estudantes aceitam regras e códigos que violam a dignidade humana, e tornam-se, permanentemente, amedrontados; ao invés disso, queremos que eles assumam uma atitude crítica em relação à obediência. Também não queremos promover criatividade irresponsável, na qual nossos estudantes se tornem cientistas brilhantes, criando novos instrumentos para aumentar a desigualdade, a arrogância e a intolerância; queremos que eles, em vez disso, sejam conscientes dos seus atos e das consequências de sua criação. Portanto, os objetivos que sustento como importantes, na educação, e consequentemente, na educação matemática, são

- a transmissão de valores enraizados no passado, que conduz à cidadania, mas não a cidadania submissa; e

- a promoção do novo, para um futuro incerto, que denota criatividade, mas não a criatividade irresponsável.

A transmissão de valores é intrínseca aos encontros culturais. Os encontros culturais têm uma dinâmica muito complexa. Esses encontros ocorrem entre os povos, como ocorreu nas conquistas e colonização, e entre grupos. O chamado processo civilizatório, exercido pelos colonizadores, é, essencialmente, a gestão desta dinâmica. Eu afirmo que o mesmo ocorre no processo educacional, nos encontros entre jovens, que têm sua própria cultura, e a cultura da escola, com a qual o professor se identifica. Didática e pedagogia são estratégias para gerir encontros culturais de estudantes e professores. Portanto, um componente importante da educação matemática é reafirmar e, muitas vezes, recuperar a dignidade cultural das crianças. Mas o conservadorismo em educação, que é alheio às crianças, apoia grande parte do conteúdo dos programas correntes. As crianças estão vivendo numa civilização dominada pela tecnologia baseada na matemática e por recursos inéditos de informação e comunicação, mas as escolas apresentam uma visão de mundo obsoleta.

Igualmente, é importante reconhecer que melhorar as oportunidades de emprego é uma expectativa real que estudantes e pais têm da escolar. Mas a preparação para o mercado de trabalho é, de fato, a preparação para a capacidade de lidar com novos desafios. Há muitas profissões que requerem diferentes tipos de conhecimento e experiências, mas as vagas não são preenchidas por causa da falta de candidatos capazes. Há uma necessidade de mudança. Mas o que mudar e como mudar? Como ideal, os avanços da pesquisa em educação matemática formam professores melhor qualificados, capazes de promover uma educação inovadora. Mas, lamentavelmente, o foco na aprovação nos testes domina os sistemas de ensino e é reforçado pela oferta de recompensas docentes, como um aumento salarial, se seus estudantes forem bem-sucedidos nos testes. As escolas sustentam essa prática porque elas são recompensadas com doações e outros subsídios governamentais. Esse sistema de recompensa é uma forma sutil de corrupção, que abre caminhos para a corrupção explícita, que é uma flagrante violação da justiça social.

O governo responsável deve olhar, atentamente, para o desequilíbrio entre a formação de graduados e as necessidades do mercado de trabalho. Robert Reich (1992), professor de economia na Harvard Law School e antigo Secretário do Trabalho do gabinete de Clinton, discutiu, exaustivamente, esse desequilíbrio, há alguns anos.

> A educação para todos, que é, frequentemente, ofertada como uma estratégia para a Justiça Social, apresenta muitos problemas e o fato de que mais e mais pessoas vão ficando educadas, com ênfase em ciência, tecnologia e engenharia, soa como uma coisa boa. Isso é, realmente, um progresso. Mas é uma ilusão que "educação para todos" seja a chave do crescimento econômico, e prosperidade, e bons empregos. Nós temos que analisar o contexto no qual esse progresso ocorre e sua conveniência e qualidade. Não há razão para preparar crianças para trabalhos, que, provavelmente, estarão extintos quando elas atingirem a idade adulta. (Reich 1992)

A educação para todos resulta numa extraordinária quantidade de pessoas indo para escola com a esperança de encontrar bons empregos. Mas há razões para cautela. Para uma visão dura do futuro da empregabilidade e da inadequação dos sistemas educacionais vigentes, veja o livro de Viviane Forrester (1999), *O Horror econômico*. A educação vigente, com uma expansão sem critérios, pode diluir a qualidade dos graduados, dando espaço, no sistema, a indivíduos menos capazes. Estudantes brilhantes são mal empregados e a luta impiedosa e, frequentemente, infrutífera por um emprego permanente pode logo desiludi-los. Precisamos de mais pesquisas com o objetivo de descobrir como o mercado de trabalho acomodará aqueles que emergem dos sistemas escolares. Alguns resultados estão sendo relatados, mas, ainda, muitos programas permanecem, firmemente, ligados ao currículo tradicional, desconsiderando o desequilíbrio entre a preparação de graduados e as necessidades do mercado de trabalho.

Em 2001, em um seminário do *Instituto de Tecnologia da Informação na Educação* daUNESCO, Seymour Papert denunciou a enorme quantidade de pesquisas que são desperdiçadas numa educação obsoleta:

> Usando computadores conectados à internet, estudantes podem obter um melhor e mais rápido acesso a fontes do conhecimento histórico, bem como o científico; eles podem explorar a economia, bem como a física, fazendo modelos e simulações; o rigor da matemática pode ser estendido para áreas que eram, previamente, inacessíveis. *Mas, em meio a essas explosões de mudança, a instituição da Escola tem permanecido como uma constante notável ao longo do tempo tanto quanto o é através dos países*. Então, por que estou gastando tempo chamando atenção para fatos familiares e problemas que já estão sendo abordados? A resposta é entristecedora: embora o problema seja, largamente, reconhecido, a sua profundidade é, raramente, apreciada. *A maior parte daqueles bilhões de dólares estão sendo desperdiçados*. (Papert 2001, grifos do autor)

Realmente, esse desperdício significa que grande parte do conteúdo tradicional, que são a totalidade dos programas vigentes, deve ser, drasticamente, mudada. Pode ser um grande equívoco insistir nos currículos de matemática, simplesmente, porque eles satisfazem critérios de rigor. Alguns defendem que a satisfação de tais critérios seja suficiente para justificar o conteúdo. As propostas curriculares estão, frequentemente, disfarçadas de novos métodos para ensinar o mesmo conteúdo, em sua maioria, inadequado e obsoleto. Muito custo e energia são dedicados para mostrar como fazer melhor o que é desinteressante, obsoleto e inútil, como denunciado por Papert (2001).

Essas observações podem ser interpretadas por muitos como uma sugestão à redução da importância do conteúdo matemático. Essa interpretação é um equívoco grosseiro. Precisamos de *mais e melhor* conteúdo de matemática, mas *não o mesmo conteúdo*. O que eu digo é que a inovação metodológica deve ser direcionada para tornar a matemática avançada atrativa e ensinável. Comprometer o rigor, em benefício da geração de interesse e motivação, não pode ser interpretado como relaxar a importância da matemática "séria" nas escolas.

Matemática e Educação Matemática numa Civilização em Mudança.

A matemática é um fascinante empreendimento cultural. Ela é vista como a marca da racionalidade e é, inegavelmente, a espinha dorsal da civilização moderna. Todas as realizações espetaculares da ciência e da tecnologia têm suas bases na matemática. E as instituições da civilização moderna - principalmente a economia, a política, a gestão, e a ordem social - estão enraizadas na matemática. Não é surpresa que jovens talentosos sejam dedicados à matemática. Um bom número de cidadãos bem-sucedidos, mas que não foram bem em matemática nos seus anos escolares, algumas vezes até fracassaram, são igualmente importantes para o progresso das sociedades. Infelizmente, esses mesmos insistem em dar prioridade para a matemática nos sistemas educacionais, mesmo que isso represente frustração e, muitas vezes, até a destruição da criatividade de seus filhos. Não percebem que os jovens podem ter sucesso e grande realização professional em carreiras que são distantes da matemática que está nos currículos e [é cobrada nos testes.

Administradores, professores, pais, estudantes, e a população em geral, veem a matemática como a principal disciplina escolar. A sociedade considera aqueles que fazem bem a matemática como gênios e aqueles que falham são estigmatizados. Há uma falta de reconhecimento de que há diferentes interesses, diferente criatividade, e diferentes talentos, entre diferentes indivíduos, particularmente, entre diferentes crianças. A matemática atua como um seletor nas elites intelectuais. Essas elites, muito frequentemente, buscam o mesmo padrão de sociedade, impregnado com arrogância, desigualdade, e intolerância, que é uma evidente violação da justiça social.

Ao olhar para a educação matemática, podemos identificar duas posições:

1. Usar a educação como uma estratégia para forçar o ensino da matemática (posição defendida pelos conservadores mencionados acima).
2. Ensinar matemática como uma estratégia para a boa educação.

Aqui, eu gostaria de usar uma metáfora. Eu reconheço que a grande energia que temos no planeta, tanto física como intelectual, e criativa, vem das crianças. Metaforicamente, eu vejo as crianças como o nosso Sol. A posição 1 vê a matemática apresentada como uma disciplina fria e austera. É célebre uma frase atribuída a Bertrand Russell: "Matemática… possui não só verdade, mas suprema beleza – uma beleza fria e austera como a de uma escultura." A posição 1 implica quev crianças, são cheias de energia, como o Sol, devem girar em torno do foco frio e austero da matemática, metaforicamente, frio e austero como a Terra. Então, chamo a posição 1 de "versão ptolemaica da educação matemática".

Eu, no entanto, identifico-me, plenamente, com a posição 2. O foco de nossa missão como educadores reside nos alunos – crianças e mesmo adultos jovens e velhos – que são a razão e a fonte de energia da ação educacional. Nessa "versão coperniquiana da educação", as disciplinas rígidas, frias e austeras, são as que devem girar em torno daqueles que estão sendo educados, que são a fonte de energia. As disciplinas estão, deste modo, em permanente reformulação, refletindo contextos sociais e culturais e as questões, desejos e necessidades de quem está sendo educado. Essa é uma boa estratégia para uma boa educação? Eu acredito que sim!

Temos que olhar para a história e a epistemologia com uma visão mais ampla. A negação e exclusão das culturas da periferia, tão comuns no processo colonial, ainda prevalecem, na sociedade moderna. A negação do conhecimento, que afeta populações, é da mesma natureza que a negação do conhecimento para os indivíduos, particularmente as crianças. Propor direções para contrariar práticas arraigadas é o maior desafio dos educadores, especialmente educadores matemáticos. Grandes setores da população não têm acesso à cidadania plena. Alguns não têm acesso às necessidades básicas para a sobrevivência. Essa é a situação na maior parte do mundo e ocorre mesmo na maior parte das nações desenvolvidas e mais ricas. A discussão mais profunda sobre essas questões é o objetivo do Programa Etnomatemática, que não vou considerar neste trabalho, mas que pode ser visto em D'Ambrosio 2006.

Uma nova ordem mundial é necessária, urgentemente. Nossas esperanças para o futuro dependem de aprendermos – criticamente – as lições do passado. Quando olhamos para a história da matemática desde as primeiras manifestações matemáticas da espécie humana, reconhecemos o desenvolvimento de técnicas para comparar, classificar e organizar, medir e contar, inferir e concluir, muito antes da matemática ser formalizada. Também reconhecemos ideias matemáticas na confluência de vários modelos de entendimento, como as religiões, as artes, as técnicas, as ciências.

Devemos assumir uma postura *transdisciplinar*, e também precisamos olhar para todo o desenvolvimento e modos de entendimento, em diferentes ambientes culturais, em diferentes tradições – isto é, temos que assumir uma postura *transcultural*. Isso deve restabelecer à matemática suas características de ser o *modo mais universal de pensamento* e de enfrentar o *problema mais universal que enfrenta a humanidade*, que é a sobrevivência com dignidade.

As enormes mudanças na sociedade, particularmente devidas às dinâmicas demográficas, têm aumentado a exclusão de grandes setores da população, tanto em nações desenvolvidas como subdesenvolvidas, a um nível insuportável. A exclusão de países dos benefícios do progresso e avanço é insustentável. Qualquer explicação para a atual concepção perversa de civilização pede uma reflexão profunda acerca do colonialismo. Essa reflexão não deve visar a culpar um ou outro grupo, e não deve ser uma tentativa de refazer o passado. Pelo contrário, é o momento de compreender o passado com um primeiro passo para mover-se rumo ao futuro. A matemática tem tudo a ver com o Estado do Mundo, por isso, devemos reconsiderar sua autonomia no currículo e o seu papel central como disciplina dominante e como uma esfera educacional em si mesma.

Parafraseando Gromov (1998), vamos precisar da criação de uma nova geração de professores de matemática, capazes de mediar entre a matemática e as outras disciplinas. Mas as grades currículares vigentes, em todos os níveis de educação, parecem uma coleção de disciplinas isoladas. Cada disciplina tem seu próprio domínio. Como resultado, há uma falta de percepção, entre professores, da relação da sua disciplina, principalmente em se tratando da matemática, com as demais disciplinas e com a realidade ampla.

Tenho proposto um novo conceito de currículo, como a estratégia para a ação educativa. Não podemos pensar o currículo como uma sequência de conteúdos e de métodos para ensinar esses conteúdos. A ação educativa deve oferecer os instrumentos que, juntos, proporcionam o que é essencial para a cidadania, num mundo movendo-se, rapidamente, em direção à civilização planetária. Esses instrumentos são os **instrumentos comunicativos**, os **instrumentos analíticos/simbólicos** e os **instrumentos tecnológicos**. Eles constituem o atual *trivium*, que chamei, respectivamente, de *literacy, matheracy, and technoracy* (D'Ambrosio 1999). Esse *trivium* é uma proposta para um currículo baseado no fornecimento de instrumentos necessários para lidar com a complexidade do mundo e da sociedade. Veja como responsabilidade maior da educação preparar gerações futuras para lidarem com a complexidade, sempre em transformação, da realidade no sentido amplo. Os instrumentos necessários são

Literacia, como instrumentos comunicativos, que é a capacidade crítica de processar informação, como o uso da língua escrita e falada, de signos e gestos, de códigos e números. Atualmente, a leitura deve incluir também a competência de numeracia, de interpretação de gráficos e tabelas, e de outros diversos meios de informar o indivíduo. A leitura inclui ainda entender a linguagem condensada dos códigos. Essas competências têm muito mais a ver com as telas e as teclas do que com lápis e papel.

Materacia, como instrumento analítiuco/simbólico, que é a capacidade crítica de inferir, propor hipóteses, e tirar conclusões a partir de dados. Esse é o primeiro passo em direção a uma postura intelectual, que está, quase completamente, ausente em nossos sistemas escolares. Materacia está mais próxima da maneira como a matemática esteve presente, tanto na Grécia quanto nas culturas indígenas. A preocupação vai muito além do contar e medir. A materacia propõe uma profunda reflexão acerca dos seres humanos e da sociedade e pretende explicar e compreender a realidade. É, realmente, a análise simbólica. Essa é a ideia central por trás das origens da matemática. Essa competência não deveria estar restrita a uma elite, como tem sido no passado. Ela não é o resultado da apropriação de habilidades, mas é adquirida por meio da competência para analisar.

Tecnoracia, como instrumento tecnológico, que é a familiaridade crítica com a tecnologia. Certamente, seus aspectos operacionais são, na maioria das vezes, inacessíveis ao indivíduo leigo. Mas as ideias básicas por trás dos dispositivos tecnológicos, suas possibilidades e riscos, o apoio moral ao uso da tecnologia, são questões essenciais a serem suscitadas entre crianças muito novas.

Os três instrumentos juntos, que, obviamente, incluem a leitura, a escrita e a matemática básica, constituem o que é essencial para a cidadania num mundo que se move, rapidamente, para uma civilização planetária. Como um historiador, o meu recurso é uma percepção crítica do passado e do futuro como guia para a ação no presente, e a história nos mostra que ética e valores estão intimamente relacionados ao progresso tecnológico. Proficiência em matemática significa muito mais do que contar, medir, classificar, comparar, e resolver problemas visando ao exercício. Lamentavelmente, mesmo admitindo que a resolução de problemas, a modelagem, e os projetos são praticados, em algumas salas de aula de matemática, a principal importância é dada, geralmente, para o desenvolvimento de habilidades, particularmente, na manipulação de números e operações. Mas problemas e situações presentes na vida cotidiana são novos e inesperados. Os estudantes devem ser preparados para enfrentar o novo.

Considerações gerais e finais.

A civilização, bem como a vida de todas as espécies animais, está ameaçada. Não haverá, como nos é dito em *Epopeia de Gilgamesh* ou no episódio bíblico de Noé, um grupo privilegiado de humanos que sobreviverá. Entendo que a ameaça às espécies é a maior violação da justiça social. Tentei evitar, neste trabalho, comentar ou reforçar propostas. Há inúmeros trabalhos sobre o tema, escritos com extrema competência, apresentando propostas de melhorias da educação matemática que visam justiça social, algo essencial para a cidadania. Meu objetivo ao escrever foi chamar a atenção de educadores matemáticos da necessidade de sua profunda e séria consideração em vias de uma concepção mais ampla de justiça social, com foco no Estado de Mundo e na real ameaça à civilização.

Vou resumir os pontos essenciais da minha visão de homem, que foram abordados em vários de meus trabalhos, em particular no meu livro recente sobre *Educação para uma sociedade em Transição* (D'Ambrosio 2011).

Utilizo algumas categorias básicas para minhas considerações:

- Cosmos
- Planeta
- A vida, como a resolução das relações entre:
- Sobrevivência do indivíduo e da espécie
- Homem, como uma espécie diferenciada
- Intermediações entre indivíduo, outro e natureza, criadas pelo homem
- Comportamento
- Conhecimento
- Consciência

- Transcendência
- Comunicação
- Valores
- Ética

O problema fundamental é entender a relação entre o indivíduo e o seu comportamento, isto é, entre o ser humano [como substantivo] humano e o ser humano [como verbo].

Ao longo da sua curta história, o homem tem procurado explicações sobre *quem é* – e tem-se acreditado o favorito de algum deus –, sobre *o que é* – e tem-se acreditado um sistema complexo de músculos, ossos, nervos e humores –, sobre *como é* – e tem-se acreditado uma anatomia com vontade –, e, sobretudo, *quanto pode* – e tem-se acreditado sem limitações à sua vontade e ambição. Na procura de entender quem é, o que é, como é, o homem constrói história, religião, ciência, arte. E na explicação do quanto pode, concebe o poder. Essas explicações determinam a construção de modos de comportamento e de modos de conhecimento.

Temos avançado muito no conhecimento ***do* ser humano**. Mas a grande angústia existencial, que resulta de não encontrar uma resposta satisfatória à questão maior "por que sou?", dá origem a contradições na qualidade ***de* ser humano**.

As violações da dignidade humana, que chegam até a eliminação de indivíduos, mostram o risco de inviabilidade de uma sociedade equitativa e possibilitam uma agressividade desmesurada contra a natureza. As distorções da maneira como o homem tem-se acreditado induziram poder, prepotência, ganância, inveja, avareza, arrogância, indiferença. Mas jamais se tentou encarar o busilis da questão, que é o conceito de conhecimento. O conhecimento, que tem sido fragmentado em disciplinas, com o fim de justificar nossas ações e de revestir aquilo no que se acredita de um caráter de verdade absoluta – desencorajando crítica.

O ponto de partida é entender o fenômeno vida, como algo inconcluso e complexo, em permanente transformação, sujeito a uma dinâmica que não conhecemos e, possivelmente, nunca viremos a conhecer.

Esse fenômeno tem incertezas e contradições intrínsecas. O melhor que conseguimos fazer é identificar três elementos fundamentais para que a vida se realize, e que represento no que chamo o **Triângulo Primordial**: um **indivíduo**, um **outro** indivíduo e, portanto, a sociedade, e a **natureza**. Subentende-se indivíduo e outro como sendo da mesma espécie e natureza como sendo a totalidade planetária e cósmica.

Os três componentes, o indivíduo, o outro e a natureza, são mutuamente essenciais, e a vida se realiza graças às três relações entre esses componentes. São, como num triângulo, três vértices e três lados. A eliminação de qualquer um desses três interrompe a vida, assim como a supressão de qualquer dos seis elementos faz com que a figura não seja mais triângulo.

O indivíduo é um organismo vivo, complexo na sua definição e no funcionamento de seu corpo, que age em coordenação com o cérebro, órgão responsável pela organização e execução de suas ações. O corpo e o cérebro são mutuamente essenciais, uma só entidade.

Os seis elementos de um organismo vivo interagem para manter a vida. Na verdade, a interação se dá na **tríade indivíduo↔outro↔natureza**. Particularmente fundamental é a relação indivíduo↔outro. É pura ficção a manutenção da vida com um indivíduo só.

Na busca de sobrevivência, com os objetivos de sobreviver e de dar continuidade à espécie,

o indivíduo sujeita seu comportamento, além de suas relações com a natureza, relações básicas com o outro:

- reconhece o outro,
- aprende,
- é ensinado,
- adapta-se
- e cruza, procria.

Uma questão maior, ainda não respondida, é "Quais as forças que levam os seres vivos a esses comportamentos?"

A espécie humana, complexa na sua definição e no seu funcionamento, está subordinada, como todas as espécies vivas, ao pulsão de sobrevivência. A sobrevivência, que se dá no presente, agora.

O homem, como todo organismo vivo, é e está sujeito aos mesmos comportamentos básicos de todos os seres vivos. Busca sobrevivência. Mas, diferentemente dos demais seres vivos e mesmo das espécies mais próximas, busca algo além da sobrevivência, e algumas vezes até rejeita sua sobrevivência. Embora o suicídio altruístico, com objetivo de possibilitar a vida de outro da mesma espécie, seja praticado por muitas espécies, o suicídio com o único objetivo de interromper a própria vida, é praticado apenas pela espécie humana.

Qual a explicação para essa diferença fundamental de comportamento com relação à sobrevivência individual?

A espécie humana é a única dentre todas as espécies, a ter um outro pulsão, que eu chamo o pulsão de transcendência, conceituando passado e futuro. Os seres humanos vão além da sobrevivência, que se dá no agora, reconhecendo que o presente, o agora, é o encadeamento de passado e futuro. No passado estão as experiências e as origens, portanto os mitos e os valores, e no futuro estão os objetivos, os desejos e as esperanças, motivando fanatismo e práticas apocalípticas e utópicas. Sobrevivência e transcendência guardam uma relação simbiótica e distinguem o ser humano das demais espécies. Os pulsões de sobrevivência e de transcendência, conjugados, dão origem a conhecimento e definem o comportamento.

Na satisfação dos pulsões de sobrevivência e transcendência a espécie humana, além de transcender o **agora**, transcende também o **aqui**, onde se dá o presente, e desenvolve a percepção de lá e acolá. Transcender o agora é a origem do conceito de **tempo** e transcender o aqui é a origem do conceito de **espaço**, que são a quintessência do pensamento matemático.

A busca de satisfação do pulsão de transcendência leva a espécie humana à criação de *intermediações* na tríade indivíduo↔outro↔natureza. Essas intermediações são instrumentos, cultura e produção. Dessas intermediações resultam as técnicas, a comunicação e as emoções, trabalho, economia e poder.

Na resposta à pulsão de sobrevivência, o homem define suas relações com a natureza e com o outro e desenvolve as intermediações já mencionadas acima. Na resposta à pulsão de transcendência, ao incursionar no passado e no futuro, desenvolve sistemas de explicações, dentre os quais os mitos e as artes, as religiões e as ciências.

O comportamento de cada indivíduo é aceito pelo seu próximo quando subordinado a parâmetros, que denominamos *valores,* e que determinam os acertos e equívocos na produção e na utilização das intermediações criadas pelo homem para sua sobrevivência e transcendência.

Para entender a condição humana como a busca de satisfação dos pulsões de sobrevivência e de transcendência, tento sintentizar comportamento e conhecimento como sendo gerado a partir de informações que o indivíduo recebe da realidade no sentido amplo.

Entendo realidade no sentido amplo como o conjunto de fator e fenômenos naturais, fatos e fenômenos criados pelo homem, o imaginário e as memórias de cada indivíduo, o imaginários e as memórias coletivas, os mitos. De onde vem a realidade e para onde vai a realidade?

O que é realidade talvez a maior dentre todas as questões, e levaram a humanidade a criar sistemas religiosos, artísticos, filosóficos, científicos. Todas as respostas dependem de acreditar e estão sujeitas a mudanças, algumas radicais, como mostra a história das idéias. As respostas mais gerais e notáveis são sintetizadas em três grandes vertentes: politeísmo, monoteísmo, *big-bang*.

Eu represento essa questão maior com ???.

Repetindo, entendo comportamento e conhecimento como sendo gerado a partir da realidade que informa (➢) o indivíduo que processa essa informação e que executa (➢) uma ação, que vai modificar (➢) a realidade no sentido amplo e a partir daí retoma o ciclo. Esquematicamente, expresso isso como:

??? ➢ realidade ➢ indivíduo ➢ ação ➢ realidade ➢ ???

Ao mesmo tempo, estou interessado em entender como a espiritualidade é intrínseca à condição humana.

O ser humano [como substantive, como "coisa"] procura sua sobrevivência individual e da espécie respeitando princípios fisiológicos (nutrição e procriação) e ambientais (ecologia). O ser humano [como verbo, como vontade] procura transcender o "aqui e agora" pelas intermediações, subordinando-as a misterios (mitos e religiões) e à objetividade (ciência). Essa subordinação implica valores e paradigmas.

Uma excursão pela história revela que novos meios de sobrevivência e de transcendência fazem com que valores e paradigmas mudem. Mas alguns valores devem necessariamente prevalecer:

- ***respeito* pelo outro;**
- ***solidariedade* com o outro;**
- ***cooperação* com o outro**.

Esses valores constituem uma ***ética maior***, sem a qual a qualidade de ser humano se dilui.

Ao longo da história, modelos filosóficos, religiosos, científicos propõem "verdades", baseadas em valores e paradigmas, que têm sido aceitas como absolutas e que têm guiado o comportamento humano e a busca de conhecimento, de explicações, para a realidade ampla.

A prioridade passa então a ser a defesa do sistema de valores e de paradigmas e, portanto, a busca de sobrevivência associada à transcendência passa a ser subordinada a sistemas de valores e a paradigmas. Essa subordinação são os fundamentalismos, em diferentes graus, desde a intimidadção e diferentes formas de *bullying*, até o fanatismo radical, que se manifesta como a eliminação do indivíduo e de grupos, chegando ao genocídio.

Novos comportamentos e novos conhecimentos vão surgindo, vão sendo aceitos ou recusados, alguns são marginalizados e outros refutados, algumas vezes até criminalizados. Algumas ideias, que são aceitas por se desviarem pouco das anteriores, tornam-se as novas explicações e encontram seu espaço na sociedade e na academia. Outras idéias desviam-se dos chamados paradigmas e criam novos paradigmas. Mas geralmente repousam sobre "ombros de gigante" e por isso encontram um lugar cômodo.

Os exemplos mais conhecidos de evolução/revolução estão apoiados numa mesmice evidente. São resultado de um mesmo modelo de raciocínio lógico e analítico, na mesma linguagem, nos mesmos modelos de representação, na mesma cosmovisão, nos mesmos critérios de reconhecimento.

Foi no século XVII que, com Galileo Galilei (1564-1642), Francis Bacon (1561-1626) e René Descartes (1596-1650), foram criadas as bases conceituais sobre as quais Isaac Newton (1642-1726) produziu seu trabalho monumental explicando certos fenômenos naturais, que foi rapidamente ampliado para explicar o comportamento humano. Esse sistema de explicações repousa sobre uma matemática muito elaborada, principalmente o Cálculo Diferencial, que se estabeleceu como a linguagem por excelência do paradigma científico proposto por Newton. Hoje, há uma concordância de que os métodos científicos e matemáticos são insuficientes para explicar o comportamento humano. A ponto de o matemático e cientista da cognição Keith Devlin ao propor uma "matemática mole" [*soft mathematics*] diz "duvido que haverá muito, talvez nenhum, alcance para a aplicabilidade da matemática que existe hoje" (1997). Curioso que Gromov e Devlin utilizam a mesma palavra, *soft*.

A insuficiência da matemática clássica é evidente em vista de novas possibilidades de observação e de novos instrumentos intelectuais de análise.

É importante que na busca de um conhecimento mais amplo não sejam rejeitados outros modos de pensar e outras visões da natureza do mundo mental, físico e social, que são parte de "outras" maneiras de formular e organizar conhecimento, inclusive aquelas que estamos procurando superar. Refiro-me especificamente a culturas que foram excluídas, subordinadas e marginalizadas no processo de dominação colonial.

Creio que o maior equívoco da filosofia, das religiões e das ciências tem sido considerar o ser humano como um corpo *mais* uma mente, e separar o que sentimos do que somos. O conhecimento tem focalizado *corpo* e *mente*, muitas vezes privilegiando um sobre o outro. Refletindo sobre a frase clássica e, de certo modo lapidar do pensamento vigente, que é "Penso, logo existo", devemos dizer Não. Existo porque *respiro*, *bebo*, *como*, *excreto*, *intuo*, *choro e rio*, e também porque *penso*.

Os humanos fazem tudo isso diferentemente das demais espécies vivas, porque são, ao mesmo tempo, sensorial, intuitivo, emocional e racional.

Procuro abordar essas questões maiores pela transdisciplinaridade, ou, pelas que são na sua essência equivalentes, as chamadas visão holística, teoria da complexidade ou pensamento complexo, teorias da consciência, ciências da mente, inteligência artificial e inúmeras outras propostas que vêm sendo elaboradas e se tornando conhecidas.

Acredito que com essa abordagem estou respondendo ao apelo de Bertrand Russell e Albert Einstein no Manifesto Pugwash, de 1955, para um Novo Pensar, sem o que a civilização pode chegar ao fim (http://www.pugwash.org/about/manifesto.htm).

Reconhecendo que a Matemáticos é um instrumento poderoso para alcançar a justiça social, ou seja, o equilíbrio e a segurança, num mundo ameaçado pela exaustão de recursos, que leva à guerra e ao medo, devemos concordar que os Educadores Matemáticos têm meios poderosos de desenvolvimento de novos conceitos e técnicas para lidar com as grandes ameaças de sobrevivência da civilização.

Qualquer discurso sobre conhecimento e sobre educação em geral se esvazia se não focalizar a questão maior da existência humana e da sobrevivência da civilização. Parafraseando Russell e Einstein, faço um apelo para matemáticos e educadores matemáticos para que procurem um **Novo Pensar para a Matemática e para a Educação Matemática**.

Referências

D'Ambrosio, Ubiratan (1999). Literacy, Matheracy, and Technoracy: A Trivium for Today. *Mathematical Thinking and Learning* 1, no. 2 (1999): 131–53.

D'Ambrosio, Ubiratan (2006). Ethnomathematics. *Link between Traditions and Modernity*. Rotterdam, The Netherlands: Sense, 2006.

D'Ambrosio, Ubiratan (2011). *Educação para uma sociedade em transição, 2ª edição revista e ampliada*, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

Devlin, Keith (1997). Goodbye, Descartes. *The end of logic and the search for a new cosmology of the mind.* Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1997, p. 283.

Feynman, Richard P, Robert B. Leighton, and Matthew Sands (1988). *The Feynman Lectures on Physics* (3 vols.). Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1988.

Forrester, Viviane (1966). *L'horreur économique*, Paris: Éditions Fayard, 1966.

Galois, Evariste (1831). Letter published in the *Gazette des Ecoles: Journal de l'Instruction Publique*, de l'Université, des Séminaires, numéro 110, 2e année, January 1831.

Gromov, Mikhael (1998). Possible Trends in Mathematics in the Coming Decades." *Notices of the AMS* 45, no. 7 (August 1998), pp. 846–47. Retrieved from http://www.ams.org/notices/199807/forum.pdf.

Kennedy, Steve (2003). Who Wants to Be a Millionaire? *American Scientist* 91, no. 2 (2003): 180. Retrieved from http://www.americanscientist.org/bookshelf/pub/who-wants-to-be-a-millionaire.

Moore, Eliakim Hastings (1903). On the Foundations of Mathematics. *Science XVII*, no. 428 (1903): 401–416.

Papert, Seymour (2001). Knowledge for the Knowledge Society: A Russia-Oriented Perspective on Technology and School. *IITE Newsletter* (Unesco Institute for Information Technologies in Education), January-March 2001, pp. 1–2.

Reich, Robert B. (1992). *The Work of Nations: Preparing Ourselves for 21st Century Capitalism*. New York: Vintage, 1992.

Thompson, Silvanus P. (1910). *Calculus Made Easy: Being a Very-Simplest Introduction to Those Beautiful Methods of Reckoning Which Are Generally Called by the Terrifying Names of the Differential Calculus and the Integral Calculus*. 2nd ed. New York: Macmillan, 1914.

Conferencias paralelas

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

¿Cómo Contextualizar y Dejar Pensar la Matemática?

Carlos **Sánchez** Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

En esta conferencia nos interesa motivar la reflexión sobre la importancia de imbricar en el discurso matemático no solo el contexto lógico de justificación del saber, o el importante contexto de aplicación, sino sobre todo el contexto de origen y construcción de los diferentes saberes y métodos, específicamente, la contextualización con el recurso de la Historia de la Matemática. Pero dado un programa obligatorio a cumplir en un calendario escolar rígido, ¿cómo presentar, contextualizar, dejar pensar, formalizar los contenidos del programa y cumplir los objetivos del curso, todo en un tiempo restringido?

Pretendemos compartir experiencias en la búsqueda de una respuesta a ese cuestionamiento. Desde una perspectiva histórico-cultural, ilustramos nuestras ideas a través del análisis de un asunto atractivo sobre medida de magnitudes geométricas, tema con una larga historia y muchas aplicaciones actuales, que sin embargo, es poco referido en las clases tradicionales: *el problema isoperimétrico con polígonos*.

Palabras claves: Historia de la Matemática, contextualización, pensar matemáticamente, cultura matemática, problema isoperimétrico.

A manera de introducción: ¿Pensar matemáticamente o pensar la matemática?

Posiblemente el principal objetivo que la mayor parte de los profesores quisiéramos lograr con nuestras clases es desarrollar un alto nivel de razonamiento matemático. El proceso de razonar es tan complejo, que no se puede describir en pocas y precisas palabras. Por eso se han publicado tantos artículos y libros con diferentes enfoques y detalles -p. e., entre los más recientes recomendamos: Harel, G.; Soroder, L. (2005), Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010), Devlin, K. (2012)-. Apreciamos la importancia de tales textos escritos por científicos de la cognición y otros expertos, con el objetivo de dar a los maestros ideas de qué es "pensar matemáticamente" y cómo se puede desarrollar este proceso en los alumnos. También existe otra literatura del "pensar sobre la matemática", algo que interesa sobre todo a filósofos de la Ciencia o particularmente a epistemólogos, que ven en la Matemática un campo muy fértil para sembrar sus concepciones generales -p. e. invitamos a dar una ojeada al texto del filósofo estructuralista Stewart Shapiro, (2000) o a alguno de la filósofa de la corriente naturalista Penélope Maady, como (2007).

Nuestra intención en esta conferencia es mucho más modesta. No nos consideramos expertos ni en las Ciencias de la Cognición, ni en la Filosofía de la Ciencia, y por tanto, no pretendemos conducir el discurso en la dirección del "pensar matemáticamente" ni en el de "pensar sobre la matemática", aunque, como se constatará enseguida, contemplamos asuntos muy cercanos y otros con amplia interrelación.

Desde nuestra visión como profesores de matemática nos interesa, ante todo, compartir experiencias acerca de lo que denominaremos: *pensar la matemática a través de la contextualización histórica del discurso*. El apelativo puede parecer pretencioso, pero nuestro objetivo es claro: usar la Historia de la Matemática para ayudar a que el discurso en las clases y textos sea más atractivo y eficaz. Nuestra propuesta, con cierta originalidad en la forma, en su esencia no es novedosa. En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, recomendemos, por ejemplo, las colecciones de trabajos en Calinger (1996), el estudio ICMI editado por Fauvel y Maanen (2000), la recopilación de Katz (2000) y, más recientemente, el artículo de Jankvist (2009). En Cuba, dirigimos un grupo de investigación en Historia y Metodología de la Matemática y particularmente, la Profesora Concepción Valdés y yo, en base a nuestra experiencia hemos elaborado algunas modestas ideas que hemos presentado en varios eventos científicos y publicaciones especializadas como, por ejemplo, en Sánchez (1994)**,** Sánchez y Valdés (1997), Sánchez y Valdés (1999), Sánchez y Valdés (2010), Sánchez (2011), Valdés-Sánchez (2011). Creemos que este tema, aunque pueda parecer trivial, no lo es y merita una atención desde diferentes enfoques. De ahí nuestro interés explícito en compartir experiencias y las concretamos con el análisis de un tema atractivo sobre medida de magnitudes geométricas, un asunto poco examinado en las clases tradicionales: *el problema isoperimétrico con polígonos*.

Nuestras clases deberían ser portadoras de una doble intención: presentar grandes ideas matemáticas y lograr que nuestros estudiantes no solo piensen mejor la matemática, sino que también lleven este pensamiento fuera del ámbito de la matemática con satisfacción y convencidos que esta es una forma agradable de "ganarse la vida" -aunque no sea la más lucrativa-. En fin, las clases deberían ser un vehículo para desarrollar una *cultura matemática*. Esto, en nuestra opinión, es uno de los compromisos sociales de la educación matemática. No educamos simplemente para hacer y aplicar matemática o para pasar con éxito las pruebas de ingreso a otros niveles de enseñanza o de la escala salarial. Esto no puede ser el fin de la educación, porque entonces inexcusablemente provocaría *el fin de la educación*. Junto con otras cualidades y competencias que se forman en los diferentes ciclos de enseñanza, aprender a pensar matemáticamente y también pensar toda la matemática que aprendemos, constituyen atajos expeditos en los caminos de la vida en el mundo contemporáneo.

En definitiva, queremos cambiar la relación afectiva que existe en la población, no solo joven, hacia la matemática. Hemos encontrado en la *contextualización con el recurso de la Historia de la Matemática* (HM) un medio para poner el discurso matemático al alcance de todos y lograr que sea *pensado y más apreciado*.

¿Por qué contextualizar con el recurso de la Historia de la Matemática

Es sabido que hay muchas maneras de contextualizar y que la más favorecida por los profesores de matemática ha sido a través del contexto de justificación, considerado intrínseco al saber matemático por su íntimo parentesco con la Lógica. En el siglo XX esta forma tradicional de contextualizar se hizo más socorrida por la simpatía ganada entre los matemáticos (algunos siguiendo la corriente) por los preceptos propagados por la escuela filosófica neopositivista a través de sus afluentes de logicismo, formalismo, estructuralismo y otros ismos. Pero en la década de los 70´s y los 80´s del siglo pasado aparecieron varias tendencias en los estudios filosóficos de la matemática que pusieron en relieve el contexto histórico-cultural en la construcción del conocimiento, y poco a poco fueron encontrando eco en la Educación Matemática -ver por ejemplo Kitcher (1984), Lakatos (1987) o Ruiz (1997)-. El paradigma dogmático y formalista que imperó tanto tiempo, fue dando paso a concepciones más flexibles con el uso de nuevas visiones sociológicas y metodologías empiristas que consideraban imprescindible el ingrediente histórico-cultural.

Así, se produjo una suerte de *giro cognitivo* y con él comenzaron también los intentos de establecer relaciones causales entre la experiencia matemática y las condiciones históricas de su producción. Y las razones filosóficas provocaron cuestionamientos didácticos al discurso tradicional de la matemática, tanto en clases, como en textos.

Por costumbre el discurso matemático comienza por las definiciones y continúa una trayectoria lógica que a trechos expone resultados en forma de teoremas o proposiciones, todo de forma muy ordenada, aséptica, incuestionable. Y así no es el *contexto de origen y construcción de las teorías matemáticas*. Tanto las definiciones como los teoremas comienzan con ideas y conceptos generales, producto de la reflexión sobre algún problema o asunto. Las definiciones y los teoremas surgen en algún momento avanzado de la reflexión, después de un largo tiempo madurando ideas.

¿Dónde podemos encontrar herramientas para contextualizar el origen y la construcción de las teorías matemáticas? Evidentemente en la Historia de la Matemática. ¿Qué se hace en las clases de Literatura? Se estudian los clásicos como Cervantes, Calderón de la Barca, Neruda o Carpentier. Nadie discute esta práctica, ni que en las clases de música se escuche las obras de Vivaldi, Bach o Beethoven, junto con las composiciones más contemporáneas. Entonces ¿Por qué no hacer algo similar en las clases de matemática? ¿Por qué no analizar el quehacer de Arquímedes, Newton o Euler, junto con obras más cercanas que ofrezcan modelos de cómo hacer y pensar la matemática? A través de estos paradigmas se aprende que los matemáticos desarrollan una forma de pensar singular: analítica, cuantitativa, precisa, concisa, con seso y sobre todo eficaz, porque se aplica sobre disímiles problemas del mundo a nuestro alrededor y lo más importante para los que siguen la corriente economicista, se usa una y otra vez sin que se gaste, aunque se derroche.

Después de más de 50 años de enseñanza tradicional formalista, es bastante común y muy natural, escuchar todavía a profesores de diferentes niveles de enseñanza decir que con el enfoque historicista se pierde el rigor indispensable y se desperdicia el tiempo necesario para profundizar en lo que es verdaderamente importante: *los crecientes y abstrusos contenidos de los programas vigentes*. El profesor piensa: *¡Cómo voy a conseguir hablar de la historia, si cada vez tengo más contenidos que explicar y estos nuevos asuntos son más impenetrables para mis desmotivados alumnos!* Tal pensamiento, ciertamente realista, es consecuente con la concepción tradicional del discurso escolar. Entonces, ¿por qué no cambiamos esa concepción que no ha mostrado eficacia? ¿por qué no organizar el discurso de forma que la historia quede integrada de forma coherente, intrínseca a los contenidos y procedimientos? Nuestra experiencia nos dice que usar el enfoque historicista como recurso didáctico, aplicado sin *abusos*, abre el apetito por pensar la matemática. Contextualizar con el *uso sin abusos* de la HM (Sánchez, 1994) quiere decir entre otras cosas que no debe ser solamente y sobre todo como fuente de anécdotas, de motivaciones al margen del discurso, sino principalmente como aporte metodológico, *heurístico,* sin restregarlo con explícita pedantería, sino de forma implícita y natural, como parte indispensable del discurso intencionado tanto por la búsqueda del contexto de origen como del contexto de construcción del conocimiento. Visto así, no impide el tratamiento riguroso y profundo que merita un asunto matemático, y además, su uso crítico facilita la eliminación de la nefasta y popularizada idea de que *las matemáticas son demasiado aburridas*.

Reflexionemos un instante: ¿Es realmente competente un profesional (maestro o investigador) que solo se ha formado con el rigor lógico del discurso matemático? En el versátil y competitivo escenario actual ¿Basta con actuar disciplinadamente en el marco estrecho de algoritmos, axiomas y teoremas, aprendidos y reproducidos mecánicamente? ¿Qué hacer para eliminar el desinterés generalizado por aprender la verdadera naturaleza de la heurística matemática?

Para responder a estas interrogantes busquemos apoyo en la autoridad del distinguido Maestro español Don Miguel de Guzmán que en más de una ocasión se refirió a la importancia de estos enfoques. Escogemos un artículo (Guzmán, 1997) que puede considerarse un clásico, en el que aborda las dificultades, cambios y tendencias que se dan al interior de la enseñanza de las matemáticas y con claridad expresa:

> Se trata de hacer patentes los impactos mutuos que la evolución de la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, se han proporcionado.

Continúa señalando que si no se actúa razonablemente se mantendrán los mismos nefastos niveles de reprobación y de abandono escolar, la matemática seguirá considerándose como la alevosa culpable de todos los males sociales. No queda otro remedio que adecuar el discurso matemático para que aburrir, atormentar o enajenar, no sea "el fin de la educación matemática".

Y añade cómo hacer eficaz nuestro discurso con esta intencionalidad:

> De una forma semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa. Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos, para lo cual deberíamos conocer a fondo el <u>contexto histórico</u> que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policíaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante. (Guzmán 2007)

Es decir, que a través de la Historia de la Matemática podemos *contar* mejor la "Nivola[1] Matemática". Con el recurso de la Historia el discurso *toma en cuenta*, no solo las *cuentas* -los cálculos numéricos, algebraicos o analíticos-, sino también los *cuentos* históricos, de forma que cultura matemática y cultura humanística aparezcan integradas y no contrapuestas. Y a la pregunta ¿cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? se responde simplemente siendo crítico hacia el discurso tradicional, con una mente abierta, creativa, sin ese incondicional apego al texto desestimulante y, sobre todo, tomando en serio el recurso de la Historia de la Matemática. ¿Hay que dedicarle más tiempo a la preparación de clases? ¡Sí! ¿Es fácil? ¡NO!. Por tanto, es interesante y, se lo aseguro por experiencia propia, vale la pena.

¿Quiere decir que debemos eliminar el lenguaje formal en el discurso matemático?

Puede parecer que en nuestro análisis hemos dividido la Educación Matemática, por conveniencia, en dos grandes polos: resolución de problemas y contextualización por un lado; algorítmica y lenguaje formal por otro. Pero realmente no pensamos que estos dos ámbitos de la EM sean incompatibles, creemos que la contextualización, precisamente, establece nexos entre uno y otro. Es conveniente y difícil encontrar un equilibrio, pero vale la pena intentarlo por el impacto positivo que se produce en la relación afectiva de los jóvenes con el saber matemático.

Trabajar de forma contextualizada no es prescindir de los contenidos sino combinarlos con destreza, tratar de llegar a aplicarlos, intentar comprenderlos mejor. La contextualización para que sea efectiva en el aprendizaje debe ir seguida de un proceso de formalización, esto lo enseña también la historia, si no se hace así se corre el riesgo de reducir la clase a un conjunto de anécdotas y lo que es peor, puede trasmitirse la idea de que la matemática es fácil y no precisa de esfuerzo para pensarla y aprender a resolver los problemas.

El contexto en el que queremos situar la matemática debe tomar en cuenta el grupo de alumnos concretos a los que nos dirigimos, con sus necesidades y expectativas. Poner en contexto las matemáticas permite presentar la matemática de forma más eficiente para que cada alumno aprenda de acuerdo a sus intereses culturales. Por eso, al comienzo del curso debería aplicarse una encuesta o indagar de alguna forma simple, cuáles son los gustos, entretenimientos y aficiones más comunes al grupo de alumnos.

Conocemos que en muchos países de Nuestra América se están dando pasos en esta contextualización de la matemática; hay una cierta conciencia, aunque creemos que no se ha generalizado y que a veces hay superficialidad en la toma de decisiones, de las orientaciones y en las medidas tomadas de manera unilateral. Es necesaria la coordinación, el trabajo conjunto con otras disciplinas, especialmente con la Física. Existen también experiencias que es bueno conocer y compartir con los colegas, en las cátedras, en congresos y diferentes actividades sociales de los maestros y profesores.

Aunque puede parecer más fácil, más seguro y más estable hacer lo de siempre, tanto para los alumnos como para los profesores, proponemos un cambio hacia un tipo de clase con más reflexión. No solo pensar matemáticamente o pensar sobre la matemática, sino sobre todo enseñar y aprender a *pensar la matemática*.

[1] Término introducido por Don Miguel de Unamuno al referirse a su obra "*Niebla*"(1914) en un intento de renovar las técnicas narrativas. La usamos aquí porque en esencia lo que nos preocupa y ocupa es renovar el discurso matemático, la forma de narrar la "*novela policíaca matemática*" para hacerla más encantadora, sin perder ese rigor deductivo y también heurístico que tanto atrae a muchos aficionados.

Los libros de texto son una herramienta que no siempre ayuda en estos cambios de modelo. Deberíamos conseguir que nuestras bibliotecas escolares tengan textos de matemática, adecuados y atractivos, con un enfoque histórico-cultural. En idioma español existen editoriales especializadas en este tipo de libro divulgativo, con biografías de los personajes principales de las historias que narramos, donde se presentan los mismos temas de la clase con enfoques más relajados, más amplios, con aplicaciones, curiosidades, paradojas, enigmas y misterios, tanto de los números como de las figuras.

A manera de ilustración de las ideas antes expuestas, desarrollaremos uno de los temas particulares que en los últimos años hemos experimentado en Cuba y otros escenarios académicos. Se relaciona con un asunto poco tratado en clases y que en nuestra opinión tiene múltiples posibilidades para mostrar cómo se puede contextualizar y pensar la matemática y por su interés actual debería integrarse en el tema general de medida de magnitudes geométricas.

¿Qué son y cómo se resuelven los problemas isoperimétricos con polígonos?

Los problemas de optimización que plantean la búsqueda de figuras que abarquen mayor área dentro de una cierta familia de figuras con igual perímetro, son denominados *problemas isoperimétricos*. Por su evidente importancia social y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Por ejemplo, en las tabletas de arcilla de los babilonios aparecen resueltos problemas aritméticos sobre áreas que hacen pensar tuvieran tal procedencia. Pero, según relata el comentarista de Euclides, Proclo de Alejandría (s. V), todavía en la civilización helena la mayoría de los ciudadanos creía que a áreas mayores corresponden perímetros mayores. Por lo que parece, no todos los helenos eran muy duchos en este tipo de problemas.

Una explicación plausible a las falsas creencias es que en el caso de los cuadrados y los círculos existe una relación directamente proporcional entre área y perímetro. Para los cuadrados $A = \frac{P^2}{16}$ y en el caso de los círculos $A = \frac{P^2}{4\pi}$. Igual perímetro implica igual área y viceversa. Pero con los rectángulos, p. e., es otra la situación:

Tabla 1

Datos de varios rectángulos de lados a y b con perímetro P y área A

	a	b	A	P
R_1	1	4	4	10
R_2	2	3	6	10
R_3	3	5	15	16
R_4	2	7	14	18

Observemos que los rectángulos R_1 y R_2 tienen el mismo perímetro y no obstante el área de R_1 es menor que la de R_2. Por otra parte, el rectángulo R_3 tiene mayor área que el R_4, a pesar de tener un perímetro menor. Es decir que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras poligonales del mismo género y de áreas diferentes. Es pues natural considerar el problema siguiente:

Problema Isoperimétrico con Polígonos: Entre todos los polígonos de *n* lados y con el mismo perímetro, encontrar aquel que tiene un área mayor**.**

Existe una leyenda relatada por el poeta latino Virgilio en su famosa *Eneida* (s. I n.e.), que se suele considerar como fuente original del problema isoperimétrico más antiguo de la historia. Según Virgilio, Pigmalión, rey de Tiro en el siglo IX a.C., no queriendo compartir la herencia con su hermana, la princesa Dido, la expulsó del reino y ordenó su persecución por el Mediterráneo. En la huida Dido llegó a las costas de África del Norte, donde hoy se encuentra la bahía de Túnez. Receloso, el líder de la localidad no quería dar tierras a Dido para su asentamiento. Dido, que era muy perspicaz, lo convenció diciendo que sólo necesitaba la tierra que pudiera abarcar con la piel de un toro. Entonces Dido mandó a cortar la piel en numerosas tiras largas y estrechas. Y mostrando mayor sagacidad aún, dispuso esas tiras de piel en forma de un gran semicírculo cuyo diámetro descansaba en la orilla del mar. Dentro de esta gran área se edificó la ciudad de Cartago, llamada originalmente *Birsa*, que quería decir, *piel de toro*.

La cuestión es ¿por qué Dido escogió un semicírculo y no otra figura geométrica, digamos un cuadrado o un pentágono? Trataremos de dar respuesta a esta inquietud por pasos, con una reconstrucción racional de la historia de la matemática abarcada por el problema y su solución.

Las primeras referencias documentadas las encontramos en los Elementos de Euclides (s. IV a. C.) donde se prueba que el triángulo equilátero contiene mayor área que cualquier otro triángulo del mismo perímetro y que entre los rectángulos con perímetro fijo el de área mayor es el cuadrado. Es decir, parece que Euclides intuía que entre las figuras poligonales la regular, es la óptima.

Según Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010), en el pensar matemáticamente existen cuatro procesos fundamentales, considerados en dos pares dialécticos: especialización-generalización y conjeturar-convencer. Al menos en los casos *específicos* de los triángulos y los rectángulos -que desarrollaremos más adelante- el paso hacia la *generalización* Euclides no lo consiguió dar. Quizás *conjeturó* lo mismo que nosotros, que las figuras regulares son las optimas, pero no consiguió argumentarlo de manera *convincente* y por eso no lo incluyó en los Elementos.

Las primeras referencias al problema isoperimétrico más general que se han encontrado, se remontan a la obra del matemático heleno Zenodoro de Atenas (s. II a. C.), quien vivió unos 100 años después de Euclides y también después de Arquímedes. Zenodoro enunció y demostró varios resultados generales relacionados con el problema isoperimétrico con polígonos, entre ellos el que se infiere de los resultados expuestos por Euclides en sus Elementos:

T1- Entre todos los polígonos de *n* lados e igual perímetro el regular es el que tiene un área mayor.

Zenodoro *descompuso en partes* el estudio del problema T1, esto lo condujo a analizar separadamente el problema de la igualdad de los lados y el de la igualdad de los ángulos del polígono óptimo. Veamos la forma en que resuelve la primera parte:

T1.1- Entre todos los polígonos de *n* lados e igual perímetro, el que posee un área mayor tiene todos los lados iguales.

Para resolver este problema Zenodoro primero *rebaja la dimensión del problema*, considerando los polígonos de menor número de lados, los triángulos –este proceso del pensar matemáticamente, es la *especialización* –. Para ello demuestra previamente un lema:

Lema. Dados dos triángulos con la misma base e igual perímetro, uno isósceles y el otro no, entonces el isósceles tiene un área mayor.

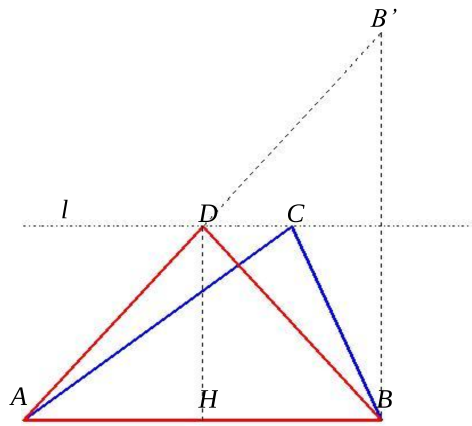


Figura1. Triángulos con igual base y perímetro

El razonamiento de Zenodoro es por *reducción al absurdo*: supone que el triángulo *ABC* de área máxima, tiene sus lados *AC* y *BC* diferentes y se llega a una contradicción. Observemos que todos los triángulos con base *AB* que tienen la misma área que *ABC* deben tener el tercer vértice situado sobre la recta *l* que pasa por *C* y es paralela a *AB* (*Fig.1*).

Seguidamente se prueba que la posición *D* sobre la recta *l*, tal que *AD* y *BD* son iguales produce un valor de |*AC*|+|*BC*| mínimo. En efecto, sea el punto *B'* simétrico de *B* respecto a *l*. Entonces, razonamientos simples de geometría elemental, prueban que los puntos *A*, *D* y *B'* están alineados y |*AD*|=|*DB'*|. Además, puede verificarse que se cumplen las igualdades |*BC*|=|*CB'*| y |*DB*|=|*DB'*|. Entonces ADB'C es un triángulo y por tanto, tiene lugar la desigualdad

$$|AD|+|DB'|<|AC|+|CB'|,$$

luego se cumple

$$|AD|+|DB|<|AC|+|CB|.$$

lo que completa la prueba de la minimalidad de |*AD*|+|*BD*|.

El razonamiento anterior puede ser realizado fijando otro de los lados del triángulo, considerándolo como base fija, p. e. *BC* y dejando libre los otros dos lados, entonces se obtiene que *AB* y *AC* son iguales. Por tanto, hemos demostrado que

R1- Entre todos los triángulos con perímetro fijo, el equilátero es el que tiene área máxima.

Ahora es natural preguntarse ¿podremos *aplicar el lema o el método utilizado en su demostración* a un polígono de mayor número de lados? -Esto es también *generalización*, ahora, después de haber comprobado el caso concreto obtenido por la *especialización*-.

Para los triángulos, la igualdad de los lados implica la de los ángulos, por lo que el problema isoperimétrico para los triángulos está completamente resuelto. Sin embargo, cuando se trata de polígonos con mayor número de lados sería necesario probar que

T1.2- Entre todos los polígonos de *n* lados e igual perímetro, el que tiene todos los ángulos iguales posee un área mayor.

La demostración que Zenodoro realiza de este resultado tiene algunas inexactitudes y es algo complicado, por lo que no se expone a este nivel. Sin embargo, podemos plantearlo como *conjetura* y buscar *convencimiento* a través de algún *caso específico* –precisamente, el otro par de procesos dialécticos en el pensar matemáticamente es *conjeturar-convencer*, según A. Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010)-, p.e. el caso de los cuadriláteros puede demostrarse sin dificultad y, después de hacer aclaraciones según el grupo de estudiantes, puede hasta dejarse de ejercicio.

Ejercicio 1. Prueba que entre todos los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

El problema resuelto en T**1** por Zenodoro es el problema isoperimétrico dentro de la clase de los polígonos con un número fijo n de lados. Pero, si *dejamos pensar* un poco a los alumnos, alguien nos puede preguntar (por supuesto no tan formal):

"Profesor, entre todos los polígonos regulares de perímetro fijo P ¿cuál será el número de lados que da mayor área?"

Si conocemos la obra de Zenodoro, sabremos que demostró el resultado siguiente:

T2- Entre los polígonos regulares de igual perímetro el que tiene mayor área es el de mayor cantidad de lados.

Pero también sabremos que la demostración realizada por Zenodoro, con el empleo solo de las herramientas de la geometría elemental, es sumamente ardua y por tanto no la podemos usar exactamente así. No obstante, podemos *convencer* al alumno de la veracidad de este resultado con el auxilio que nos brindan las herramientas computacionales.

Ante todo es preciso tener una relación entre el número de lados n, el área A_n del polígono regular de n lados y su perímetro P_n . Dejamos pensar después de plantear una interrogante:

¿Conocemos alguna fórmula que relacione área y perímetro de los polígonos regulares? Si no la conocemos ¿cómo podríamos encontrarla?

Las indicaciones dependen del grupo de alumnos, pero no es difícil encontrar una relación adecuada entre el área y el perímetro de un polígono regular, basta con hacer una triangulación uniendo los vértices al centro del polígono (*Fig. 2*). Se formarán n triángulos isósceles iguales y con un vértice situado en el centro del polígono, cada triángulo tiene la misma altura h_n y la misma base l_n, uno de los n lados iguales del polígono (*Fig.2*). Por tanto, el área total viene dada por la fórmula:

$$A_n = \frac{h_n}{2} P_n,$$

donde h_n es la *apotema* del polígono regular de n lados y P_n su perímetro. En el problema isoperimétrico $P_n = P$, es una cantidad constante que se supone conocida, así que solo es necesario encontrar una expresión adecuada para h_n. El valor común de los ángulos correspondientes a este vértice es $\alpha_n = 2\pi/n$. Si consideramos la función tangente, entonces se encuentra fácilmente que

$$h_n = \frac{l_n}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{P}{2n\tan\frac{\pi}{n}}.$$

Finalmente, para el área obtenemos la relación

$$A_n = \frac{P^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}.$$

Una forma de analizar la variación de A_n como función de n, es mediante la *experimentación* (en este momento podemos auxiliarnos de una calculadora electrónica).

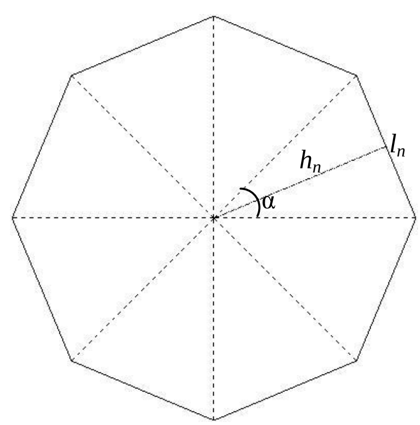


Figura 2. Triangulación de un polígono

En la Tabla 2 hemos tomado $P=2\pi$ – valor del perímetro de la circunferencia de radio unidad, y hemos calculado los valores de A_n, correspondientes a los valores de n que se indican.

Tabla 2

Valores del área A_n de los polígonos con perímetro fijo $P=2\pi$ y n lados variables

n	**A_n**	**n**	**A_n**	**n**	**A_n**
3	**1,899406252**	**50**	**3.137457394**	**1000**	**3.141582319**
7	**2.927777815**	**100**	**3.140559043**	**10000**	**3.141592550**
10	**3.037551898**	**500**	**3.141551311**	**100000**	**3.141592652**

Estos resultados corroboran el resultado de Zenodoro al menos para los valores de n escogidos. Pero ¿no podríamos evidenciar más claramente el crecimiento de las áreas A_n cuando n crece? Por supuesto esto depende del contexto de alumnos que tenemos en el aula, hay muchos grupos que nos agradecen la demostración más detallada y rigurosa y otros son felices si dejamos las ideas vírgenes. Debemos ser cuidadosos, tanto con unos como con otros, para no perder su interés, ni aburrirlos.

Teniendo en cuenta la expresión encontrada para A_n, el problema sería

Problema auxiliar: *Demostrar que, cuando $m>n\geq 3$, tiene lugar la desigualdad:*

$$n\tan\frac{\pi}{n} > m\tan\frac{\pi}{m}.$$

Se puede dejar pensar al alumno y que compruebe *por sí mismo cuán ineficaz es intentar realizar esta demostración en forma elemental, s*olo con los recursos de la geometría y trigonometría. Después de que lleguen al convencimiento, podemos tratar de *modificar la desigualdad* de manera que podamos *visualizarla* gráficamente. Por ejemplo, expresar esta desigualdad de forma que se desprenda de la propiedad de alguna curva conocida. El profesor debe dar indicaciones adecuadas. Veamos qué sucede si *modificamos la notación*. Hagamos el cambio de variable

$$v=\frac{\pi}{n} \quad \text{y} \quad u=\frac{\pi}{m},$$

Entonces el problema se convierte en justificar que, para valores de u y v tales que $0<u<v<\pi/3$ tiene lugar

$$\frac{\tan u}{u} < \frac{\tan v}{v}.$$

Esta última relación significa que la ordenada de la curva $y=\dfrac{\tan x}{x}$ debe aumentar en la medida que crecen los valores de la variable x en el intervalo $[0,\pi/3]$. El gráfico de esta curva se muestra en la *Fig.3*, pero el alumno podría obtenerlo fácilmente con la ayuda de algún programa informático adecuado o

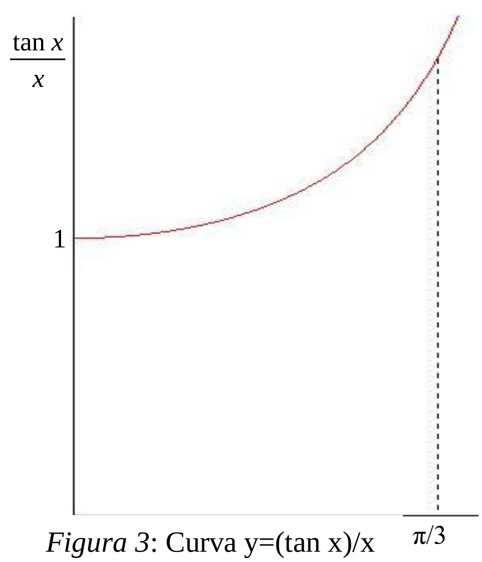


Figura 3: Curva y=(tan x)/x

incluso mediante una calculadora gráfica.

De este modo, nos hemos convencido del resultado R3 de Zenodoro, es decir, a mayor cantidad de lados el polígono regular de perímetro dado aumenta su área. Pero entonces ¿cuál será el polígono regular que tiene área máxima? La intuición nos sugiere que tal polígono debería tener infinita cantidad de lados. Por otra parte, un análisis cuidadoso de la tabla anterior, permite advertir que los valores de las áreas de los polígonos no solo crecen, sino que se aproximan cada vez más a cierta cantidad. No es difícil identificar este valor "límite" como el número π, área del círculo de radio 1, con perímetro $P=2\pi$, el cual es precisamente el perímetro común de los polígonos cuyas áreas aparecen en la tabla. Por tanto, es natural *imaginar*, como lo imaginó Zenodoro y antes que él la princesa Dido, que el *círculo es la solución al problema isoperimétrico de los polígonos*. Entonces, para concluir (siempre que el contexto del aula lo asimile) planteamos la resolución del problema concreto siguiente:

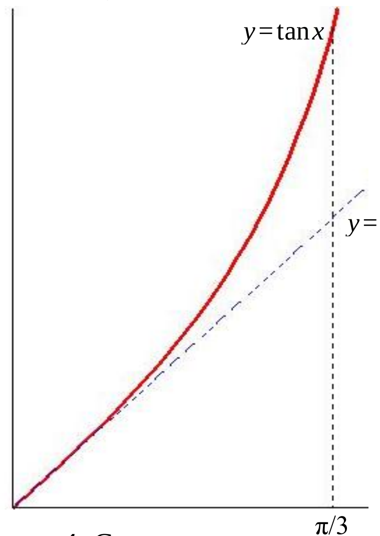


Figura 4: Curva *y= tan x*

Probar que el círculo con perímetro *P* tiene mayor área que cualquier polígono con ese mismo perímetro.

El área A_n del polígono de n lados con perímetro P, viene dada por la expresión

$$A_n = \frac{P^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}$$

y el área A del círculo del mismo perímetro cumple la relación

$$A = \frac{P^2}{4\pi}.$$

Por tanto, solo es necesario probar que $A \geq A_n$, lo que equivale a demostrar la desigualdad

$$n\tan\frac{\pi}{n} \geq \pi \quad \text{o} \quad \tan\frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n}.$$

Utilizando el mismo recurso que en el problema anterior, la podemos rescribir en la forma

$$\tan x \geq x \text{, donde } 0 < x < \pi/3.$$

En la *Fig.4* se ve claramente que el gráfico de la curva $y=\tan x$ (en rojo) permanece siempre por encima del gráfico de la recta $y=x$ (en azul), lo cual es una evidencia gráfica del cumplimiento de la desigualdad anterior.

En este caso, no obstante, la desigualdad puede probarse fácilmente con métodos elementales.

En un círculo de radio uno, construyamos el sector *MOP* de ángulo x y que, por tanto, tiene área $x/2$ (*Fig.5*). Entonces la longitud del segmento *MR* es $\tan x$ y el área del triángulo *MOR* será igual a $\frac{\tan x}{2}$. Pero, evidentemente el área del triángulo es mayor que la del sector, de donde sigue inmediatamente la desigualdad que queremos probar.

De esta forma concluimos que el círculo, considerado como polígono regular de infinitos lados, es la figura que resuelve el problema isoperimétrico para polígonos.

Esta afirmación no justifica que el círculo es mejor que cualquier otra curva cerrada, digamos una elipse. No obstante, podemos proporcionar argumentos para *convencer* que el círculo también es solución cuando se piensa en una curva "arbitraria":

A una curva cerrada cualquiera podemos asociar una poligonal con lados de longitud muy pequeña, la cual también será cerrada y por tanto limitará un polígono. Pero, de todos los polígonos, los regulares son los mejores y la curva que puede ser considerada como óptima a partir de este tipo de polígonos regulares es la circunferencia. Aunque no sea una demostración rigurosa, ¿no será esto convincente?

Y las abejas ¿cómo se habrán convencido de que los polígonos óptimos en la solución de los problemas isoperimétricos son los de mayor número de lados?

El matemático **Pappus** de Alejandría (s. IV d. C.), famoso por sus comentarios de los trabajos de sus predecesores, proporcionó una aplicación muy interesante del resultado isoperimétrico. En el prefacio a su trabajo "*Sobre la sagacidad de las abejas*" Pappus explica en forma muy atractiva esta idea y hemos decidido citar por extenso:

> Es claro que Dios le ha dado al hombre la mejor y más perfecta noción de sabiduría en general y de la ciencia matemática en particular, pero una parte de tales cosas también las compartió con algunos de los animales irracionales. Del hombre, al estar provisto de raciocinio, el espera que haga todas las cosas según la razón y la demostración, pero a los otros animales, mientras les niega esto, les garantiza que, en virtud de un cierto instinto natural, obtengan precisamente aquello que es necesario para la conservación de la vida. La existencia de este instinto puede ser observada en muchas otras especies de criaturas vivientes, pero sobre todo en las abejas… primero coleccionan el néctar de las flores más bellas que crecen en la tierra, para el almacenamiento de la miel construyen los recipientes, llamados panales, de celdas todas iguales, contiguas una a la otra y de forma hexagonal. […]Ellas necesariamente deben pensar que las figuras deben ser contiguas una a la otra, esto es tener lados comunes, para que ninguna materia extraña pueda penetrar por los intersticios y así corromper la pureza de su producción […]. Existen tres figuras capaces por sí mismas de llenar exactamente el espacio alrededor de un mismo punto. Las abejas, de acuerdo a su sabiduría instintiva, seleccionan para la construcción de los panales la figura que tiene más lados, a causa de que ellas imaginan que ésta contendría más miel que cualquiera de las otras dos. (Heath, 1981, pag.389)

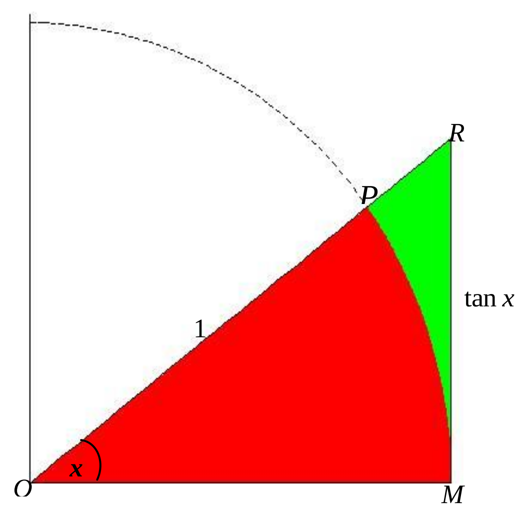


Fig.5

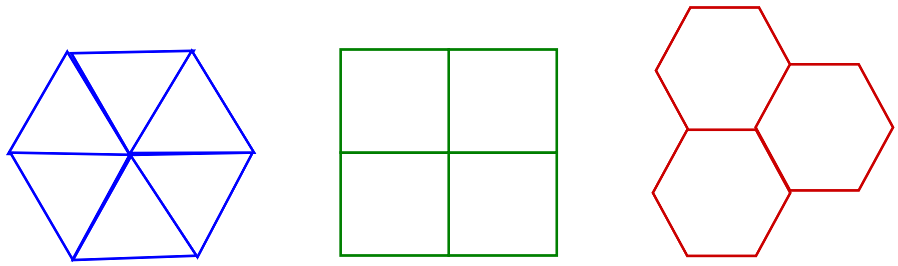


Figura 6. Únicos teselados posibles con polígonos regulares

Con los conocimientos anteriores demos una *convincente* argumentación de que las abejas no se equivocan cuando dan a las celdas de sus panales una forma hexagonal (*Fig.6*). Como comenta Pappus, el uso de polígonos como base de las celdas es la mejor forma de no dejar intersticios y usar "paredes" comunes a varias celdas para optimizar el uso de materiales. Si además, queremos que estas celdas tengan la máxima capacidad, entonces el polígono de base deberá tener la mayor área posible luego, por el resultado anterior de Zenodoro, debe ser regular. Pero ¿qué tipo de polígono regular será conveniente usar? Como no queremos que queden "agujeros", ellos deben "encajar" precisamente, esto es, deben poder acomodarse en torno a un vértice común de forma exacta (*Fig.6*).

Se sabe que los ángulos interiores de un polígono regular de *n* lados miden $(n-2)\pi/n$. Luego *n* debe ser tal que podamos disponer alrededor de un punto un número entero *k* de ángulos de esa magnitud. Como la suma de los ángulos alrededor de un punto es 2π, entonces tendrá que cumplirse la relación:

$$\frac{2\pi}{\frac{n-2}{n}\pi}=\frac{2n}{n-2}=k\,. \qquad (1)$$

De modo que necesitamos encontrar los valores enteros de *k* y *n* ($n\geq 3$) que hacen posible la relación anterior. Cálculos sencillos muestran que para $n=3,4,6$ se obtiene $k=6,4,3$ respectivamente, pero cuando $n=5,7,8$ no es posible obtener un valor entero de *k*. Probemos que los únicos polígonos a tener en cuenta son precisamente: triángulos, cuadrados y hexágonos.

La igualdad en (1) puede ser escrita en la forma: $\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{k}$,

pero *n* es positivo, luego $k\geq 3$, por tanto:

$$1=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\geq 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{n},$$

de donde se tiene que $n\leq 6$. Luego las únicas tres posibilidades es colocar en torno a un vértice 6 triángulos o 4 cuadrados o 3 hexágonos como se muestra en Fig.7.

Ahora se explica fácilmente la decisión de las abejas: *los hexágonos son los que proporcionan un área mayor*. Quién necesite una comprobación directa, sin acudir a la solución general dada para el problema isoperimétrico con polígonos, puede observar que las áreas A_3, A_4, A_6 de un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular con el mismo perímetro *P* vienen dadas por:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2 \approx 0,0481P^2, \quad A_4 = \frac{P^2}{16} \approx 0.0625P^2, \quad A_6 = \frac{\sqrt{3}}{18}P^2 \approx 0,0962P^2,$$

que evidentemente satisfacen $A_3 < A_4 < A_6$.

¡Qué sabiduría la de las abejas!

A manera de conclusiones: ¿Convencer o Vencer?

El razonamiento que desarrollamos como solución al problema isoperimétrico no constituye una justificación matemática aceptable para los cánones de rigor actual, ni tampoco brinda un argumento matemático claro a la elección de Dido. Una demostración rigurosa de que el círculo es la mejor opción entre todas las curvas cerradas, solo fue encontrada por métodos elementales en el siglo XIX por el geómetra suizo Jakob Steiner y después con el uso de la teoría de series trigonométricas por el alemán Adolf Hurwitz.-ver p. e. el excelente libroTikhomirov (1990)-. Pero para convencer a jóvenes de enseñanza preuniversitaria y educarlos en *pensar la matemática* ¿No basta usar los argumentos heurísticos asociados al contexto de origen y resolución de tales problemas y rematar con el experimento con calculadoras? Si nos empecinamos en presentar de forma tradicional la solución, entonces muchos de los alumnos se aburrirían o desconectarían la atención por no alcanzarles la motivación para seguir el discurso. Al final sentiríamos la satisfacción de haber hecho una argumentación rigurosa, pero la mayoría de los alumnos se sentirían agobiados, rendidos. ¡De seguro que *los vencemos, pero no los convencemos*!

Según el contexto de alumnos se organiza la clase. Se puede plantear la solución de una parte de los problemas y comentar los otros, utilizando la experimentación gráfica o computacional con el fin de abrir el apetito para temas más avanzados de geometría o trigonometría o incluso de cálculo. En el caso muy especial de alumnos de talento y con afición expresa por la matemática, entonces seguro desearán conocer la demostración formal realizada por Steiner y ¿por qué no mostrarles un esquema de la misma para convencerlos? –Por cierto, la demostración de Steiner no es completamente rigurosa, porque da por supuesta la existencia de una figura óptima- Si estamos trabajando con alumnos universitarios, que han pasado cursos de Cálculo Avanzado, resulta muy edificante enseñarles la solución de Hurwitz que hace uso de la llamada identidad de Parseval que cumplen los coeficientes de Fourier de toda función suficientemente regular.

El nivel de formalización y profundización depende del grupo de estudiantes, no solo del nivel de escolaridad, sino de sus competencias e intereses culturales. Queremos dejar pensar la matemática y no que nos “desconecten” la atención. Porque lo que no se puede olvidar es que para pensar la matemática, ante todo ¡tenemos que saber la matemática! y por supuesto, primero los maestros y después los alumnos. Es obvio, pero no siempre lo tenemos presente en nuestras decisiones docentes.

Como queda claro en las ideas compartidas sobre la heurística del problema isoperimétrico el conocimiento de las fórmulas es importante en la resolución de problemas. Pero la mayoría de las fórmulas y algoritmos no necesitamos memorizarla, es suficiente saber dónde buscar cuando se precisan: en un texto o a través de un software especializado o ¿por qué no? a partir de nuestra propias deducciones. Lo más importante es saber *pensar las fórmulas, pensar los algoritmos, pensar los teoremas*, aprender a usarlos creativamente para hallar nuevas relaciones no explícitas, nuevos algoritmos más eficaces y hasta otros teoremas más elegantes.

Para terminar nuestro relato demos a conocer lo que el gran maestro de la teoría moderna de la medida, el francés Henri Lebesgue decía por los años 1930's en su famosa obra *La Mesure des Grandeurs* (La Medida de las Magnitudes):

> El profesor de matemáticas, aquel de la enseñanza media en particular, no tiene que formar lógicos puros, debe contribuir a formar hombres que razonen y para esto debe ocuparse no solamente de las razonamientos rigurosos, sino sobre todo de la adquisición de las premisas de estos razonamientos y de la aplicación de sus resultados a lo concreto.

Y complementemos estas palabras con algo similar expresado por uno de los más completos matemáticos y educadores del siglo XX, que aplicó con astucia las ideas de Lebesgue a la construcción de una sólida Teoría de las Probabilidades, el ruso Andrei Nikoláyevich Kolmogórov:

> [...] A los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se les debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión, la comprenda como una ciencia viva y conozca el contexto histórico que originó sus conceptos.

Referencias y bibliografía

Calinger, R. (Ed.) (1996) *Vita Mathematica: Historical research and integration with teaching.* MAA. Washington DC.

Devlin, K. (2012) *Introduction to Mathematical Thinking*. MAA. Washington DC.

Fauvel, J.; Maanen, J. (Eds.) (2000) *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Guzmán, M. de (2007) Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* Nº43, pp. 19-58.

Harel, G.; Soroder, L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at any age. *Mathematical Thinking and Learning* Vol. 7 Nº 1, 27-50.

Heath, Th. (1981) *A History of Greek Mathematics*. Vol. II *From Aristarchus to Diphantus*. Dover Publ. N. Y.

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Math*.

Katz, V. (ed) (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective.* MAA. Washington DC.

Kitcher, Ph. (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford Univ. Press. N. Y.

Lakatos, I. (1987) ¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática? en *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, ed. Alianza. Madrid.

Maady, P. (2007) *Second Philosophy. A Naturalistic Method*. Clarendon Press. Oxford.

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*. 2nd. ed. Prentice Hall (La 1ª ed. apareció en 1982 y fue traducida al español)

Ruiz, A. (1997) *Las posibilidades de la historia en la educación matemática. Una visión filosófica*. Boletín Informativo CIAEM. Año 5, nº.2

Sánchez, C. (1994). Usos y Abusos de la Historia de la Matemática en el Proceso de Aprendizaje, en Nobre, S.(ed.) *Procc. Meeting of the HPM Group.* Blumenau.

Sánchez, C. (2011) ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife.

Sánchez, C.; Valdés, C. (1997) Ilustraciones del uso de la historia de la matemática en una enseñanza centrada en resolución de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* Vol. 9, Nº 3, 86-96

Sánchez, C.; Valdés, C. (1999) Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática, *Revista Ciencias Matemáticas* Vol.17, N.2, pp. 137-148.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2000) Proposiciones para un estudio dinámico de la medida. En Fossa, J. (ed.) *Facetas do diamante. Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática*. Editora da SBHMat. Rio Claro, pp. 31-58.

Shapiro, S. (2000) *Thinking about Mathematics. Philosophy of Mathematics*. Oxford University Press. N. Y.

Tikhomirov, V. M. (1990) *Stories about Maxima and Minima*. MAA. Washington DC

Valdés, C.; Sánchez C. (2011) *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Tecnologías Educacionais e Educação Matemática: posibilidades e perspectivas futuras

Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Canoas
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Nesta conferência serão apresentadas as pesquisas desenvolvidas no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) pelo grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) e o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna em Tenerife, Espanha. O SIENA é um sistema inteligente para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer, com as seguintes ações: grafo do conteúdo, testes adaptativos para cada conceito do grafo, sequências didáticas eletrônicas para cada conceito do grafo, permitindo o estudo e a autoavaliação do conteúdo ou a recuperação dos conceitos que o estudante apresenta dificuldades.

Palavra-chave: Tecnologias da Informação. SIENA. Sequências didáticas.

A sociedade em que se vive é altamente complexa, requer novas formas de pensar, sendo necessário desenvolver competências no indivíduo, para lidar com as tecnologias da informação e a crescente informatização em todas as áreas do conhecimento e das relações humanas (Groenwald, Zoch e Homa, 2009). Nesse contexto, é fundamental a organização do pensamento matemático, que inclui, por um lado, pensamento sobre tópicos matemáticos e, por outro, processos avançados do pensamento, como abstração, justificação, visualização, estimação ou raciocínio sobre hipóteses.

Além disso, segundo Grossi (2008), o desafio de quem educa é descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, já que os estudantes têm ritmos e históricos variados. Além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do aluno e demonstrar a utilização do mesmo em diferentes situações da vida real. Historicamente o sistema educacional sempre foi projetado igualmente para todos os estudantes, em um contexto organizacional definido, ao qual o estudante deve se adaptar. Assim, um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

O uso do computador em sala de aula pode ser uma alternativa, um dos caminhos de solução dessa situação, podendo ser utilizado como um recurso didático de sala de aula com a presença do professor e dos alunos em um ambiente colaborativo/cooperativo. A vantagem do uso das tecnologias da informação de comunicação (TIC), como o uso de plataformas de ensino, por exemplo, é a possibilidade da utilização de diferentes recursos, com padrão superior de qualidade, como vídeo-exemplos, textos com exemplos em movimento, ou seja, um conteúdo visual com maior qualidade. Assim, nesse ambiente virtual de aprendizagem, os alunos deixam de receber o mesmo conteúdo ao mesmo tempo e passam a percorrer caminhos diferenciados, de acordo com o seu perfil de estudante e com o seu desempenho.

O uso adequado e efetivo das TIC na educação requer que sua aplicação esteja fundamentado em teorias pedagógicas reconhecidas e experimentadas. Indica-se o desenvolvimento de sequências didáticas eletrônicas, disponibilizadas no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), com as seguintes características: uma proposta construtivista, ou seja, uma aprendizagem que dê importância ao contexto de aprendizagem como alternativa ao ensino por memorização; uma proposta colaborativa, que favoreça o trabalho em grupo, permitindo, também, o trabalho individual, assim como o trabalho com o professor, reforçando, dessa maneira, a dimensão social da educação; utilização das novas tecnologias como um recurso ativo de ensino e não um simples veículo de transmissão de informações; que sejam possíveis caminhos individualizados, de acordo com o ritmo e o perfil de aprendizagem do aluno.

Driver, citado por Porlán (1998), resume os princípios construtivistas da aprendizagem como: o que há no cérebro de quem vai aprender tem importância; encontrar sentido supõe estabelecer relações; quem aprende constrói significados ativamente; os estudantes são responsáveis pela própria aprendizagem. Os contextos significativos, segundo os princípios construtivistas, são situações do mundo real que ajudam ao estudante a por em prática as atividades didáticas propostas pelo professor. As situações de aprendizagem devem ser flexíveis e estarem caracterizadas para que permitam a representação do conhecimento em distintas formas, de modo que os alunos possam aprender da variedade de situações didáticas propostas.

Aliado a isso, Grossi (1993) afirma que o ensino construtivista deve considerar que: a aprendizagem é contínua em todos os momentos do dia-a-dia e a escola incorpora o que vem das experiências fora dela; a aprendizagem é essencialmente perpassada pelo outro, pelo grupo, pelo social; aprende-se resolvendo problemas; aprende-se a partir de um mergulho amplo nos elementos que interessam a um problema. O construtivismo propõe como uma alternativa a memorização e as atividades fora de contexto, dar uma maior importância ao contexto de aprendizagem que permite construir o conhecimento, realizando atividades mais próximas ao mundo real e que geralmente incluem discussões em grupo (Crok, 1998).

Nessa perspectiva, segundo Coll et al (2002) a aprendizagem deve ser considerada em um aspecto mais amplo, além da dimensão individual, observando os conteúdos da aprendizagem (como produtos sociais, culturais), do professor (como agente mediador entre indivíduo e sociedade) e do aluno (como aprendiz social).

O computador em um ambiente construtivista não deve ser usado meramente para transmitir informação, pelo contrário, deve ser uma ferramenta que apóie a experimentação e a construção do conhecimento. Martí (1992) sobre os métodos de Papert propõe a aplicação a situações instrucionais específicas do construtivismo e a mediação da aprendizagem através de computadores e das pessoas. Para o autor é possível que através da exploração individual o sujeito possa adquirir determinados esquemas gerais de conhecimento, mas muito mais difícil será que consiga alcançar aprendizagens específicas. Vê a necessidade de definir a situação didática partindo das idéias prévias dos alunos, das suas instituições e também, definindo o tipo de intervenção do professor e dos alunos.

Deve-se considerar, também, a interação social no processo de ensino e aprendizagem, como favorecedora da aprendizagem, sendo outra característica importante das atividades didáticas construtivistas. Segundo Carretero (1997), a interação social produz conflitos cognitivos mediante a discussão e o intercâmbio de opiniões, causando uma mudança conceitual. O autor afirma, também, que o intercâmbio de informações entre companheiros que têm diferentes níveis de conhecimentos provoca uma modificação dos esquemas do indivíduo e acaba produzindo aprendizagem, além de melhorar as condições motivacionais da instrução.

Quando nestes contextos há o computador como mediador, se diz que é uma “aprendizagem colaborativa assistida por computador” (CSCL: Computer Supporte Collaborative Learning). O CSCL é um método de ensino e aprendizagem por meio do qual interatuam dois ou mais sujeitos para construir aprendizagem, através da discussão, reflexão e tomada de decisão, processo no qual os recursos informáticos atuam como mediadores. Na visão construtivista o CSCL vê o estudante como um agente ativo, construtor do seu processo de aprendizagem, uma pessoa que possui e gera conhecimento.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (Groenwald e Moreno, 2006).

Kampff, Machado e Cavedini (2004), afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta conferência será apresentado o trabalho conjunto realizado entre o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil, em Canoas, Rio Grande do Sul e o Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, em Tenerife, Espanha. Este convênio de pesquisa implementou o SIENA, com vários experimentos nos dois países.

Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)

O SIENA é um sistema inteligente que conforme Groenwald e Moreno (2006, p.26) é: capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos. Ainda segundo Groenwald e Moreno

(2006), este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos, proporcionando uma recuperação individualizada das dificuldades dos alunos. O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação e recuperação dessas dificuldades.

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais (Novak e Gowin, 1988), sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O grafo não ordena os conceitos segundo relações arbitrárias, os conceitos são colocados de acordo com a ordem lógica em que devem ser apresentados ao aluno. Portanto, o grafo deve ser desenvolvido segundo relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos (conceitos no grafo) dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos.

O grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante. Cada nodo do grafo contém uma sequência didática para cada conceito avaliado no teste, conforme a figura 1.

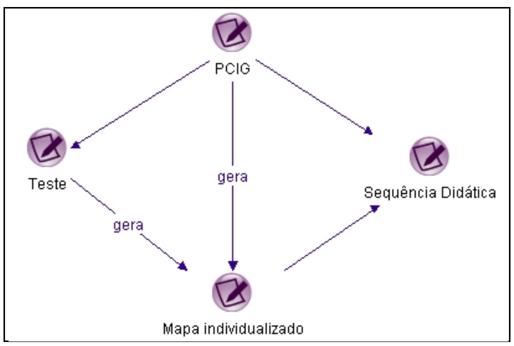


Figura 1: esquema do sistema SIENA.

Um teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade de cada examinando. Segundo Costa (2009) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequado à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (Sands e Waters, 1997). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (Wainer, 2000).

No SIENA o teste adaptativo é realizado em cada nodo do grafo, devendo ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões dos mesmos, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade; a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito; o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. O teste adaptativo estima o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante, se o aluno vai respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no grafo, e começa a avaliá-los, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo.

O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula $\frac{D \times P}{D \times P + (1-P) \times L}$, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior. O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre ao grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas no banco de questões.

O sistema mostrará, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo apresentado na figura 2.

Acabado: true

Nota: 0.281

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.200
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.238
4	false	231	Se agruparmos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no ábaco?	0.281

Atrás

Figura 2: exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo.

O sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos; a segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar.

Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades. As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (Dolz e Schneuwly, 2004). Segundo Zabala (1998) as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.

Experiências com o SIENA

As experiências já desenvolvidas no SIENA foram: Operações nos Números Naturais; Estatística e o tema transversal Meio ambiente; Multiplicação para alunos com Necessidades Educativas Especiais; Geometria Analítica; Equações do 1º grau; Frações.

Referências

Carretero, Mario. *Construtivismo e educação*. Porto Alegre: Artmed, 1997.

Coll, César; et al. *O Construtivismo na sala de aula*. São Paulo, S.P. Ática, 2002.

Costa, Denise Reis (2009). *Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados*. 107 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Crok, Ch.. *Ordenadores y aprendizaje colaborativo*. Madrid: Morata, 1998.

Flash 8.0. Disponível em: <http://www.adobe.com/> Acesso em: 10 mai. 2008.

Dolz, Joaquim. Schneuwly, Bernard. *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas/SP: Mercado das Letras, 2004.

Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; Moreno, Lorenzo Ruiz. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. *Acta Scientiae*, Canoas, v.8, n.2, jul./dez.2006.

Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH, Lisiane Neto; Homa, Agostinho Iaqchan Ryokti. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. *Bolema* Rio Claro, ano 22, n.34, p.27-56, 2009.

Grossi, Esther. Aspectos pedagógicos do construtivosmo pós-piagetiano. In: Grossi, E.P.; Bordin,J. (org). *Construtivismo Pós-Piagetiano*. Petrópolis: Vozes,1993.

Grossi, Esther. Assim não dá. *Nova Escola*. Ano XXIII, número 214, Agosto de 2008.

Kampff, Adriana Justin Cerveira; Machado, José Carlos; Cavedini, Patrícia. Novas (2008). Tecnologias e Educação Matemática. In: X Workshop de informática na escola e XXIII Congresso da Sociedade brasileira de computação, 2004, Bahia. Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf> Acesso em: 10 jun. 2008.

Martí, E.. *Aprender con ordenadores en la escuela.* Barcelona: ICE-Universitat de Barcelona/Horsori, 1992.

Novak, J. Gowin D. *Aprediendo a aprender*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A, 1988.

Porlán, Rafael. *Construtivismo y escuela*. 5.ed. Sevilha: DÍADA, 1998.

Sands, William A.;Waters, Brian K. (1997). Introduction to ASVAB and CAT. In: Sands, William A.; Waters, Brian K.; Mcbride, James R.(Eds.). *Computerized adaptive testing: from inquiry to operation*. Washington: American Psychological Association.

Wainer, H. (2000). Computerized adaptive testing: a primer. New Jersey: Lawewnce Erlbaum Associates.

Zabala, Antoni. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

El papel de la geometría en el currículo de enseñanza primaria y media

Hugo **Barrantes** Campos
Escuela de Matemática,
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
habarran@gmail.com

Resumen

En mayo de 2012 fueron aprobados en Costa Rica nuevos programas de estudio en Matemáticas para la Educación General Básica. Tales programas representan un salto cualitativo en relación con los programas anteriores, tanto en la metodología que propone como en los temas a estudiar. Los cambios en contenidos son particularmente profundos en el área de Estadística y Probabilidad, pero son importantes también, así como en el enfoque, en el área de Geometría.

Aquí se describe y analiza el papel que la Geometría desempeña en el nuevo currículo de matemáticas para la Educación Primaria y Media costarricense.

Palabras clave: educación, matemática, currículum, geometría.

Introducción

Los programas de estudio de Matemáticas para la Educación Primaria y Media vigentes en Costa Rica hasta el año 2012, eran esencialmente los redactados en 1995 con modificaciones posteriores, más que todo de forma; la última de ellas realizada en 2005.

Esos programas cumplieron un ciclo y jugaron un papel positivo, aunque según Ruiz (2013) "no lograron materializar la mayoría de sus propósitos planteados abstractamente y más aún poseían graves debilidades". (p. 17) .

Hacia finales del año 2010, a solicitud del Ministro de Educación Pública, una comisión especial inició la redacción de nuevos programas de matemáticas. Como resultado, el Consejo

Superior de Educación aprobó, en mayo de 2012, un nuevo programa de estudio de matemáticas. Este es un programa integral propuesto para toda la Enseñanza Primaria y Media costarricense.

El sistema educativo costarricense preuniversitario

La educación preuniversitaria costarricense está a cargo del Ministerio de Educación Pública. Existe además una entidad llamada Consejo Superior de Educación quien define la política educativa y promueve y aprueba cambios en los programas de estudio.

Este sistema educativo cuenta con un nivel de Educación Preescolar y luego cuatro ciclos educativos: I Ciclo, II Ciclo, III Ciclo y Ciclo Diversificado. Los ciclos I, II y III constan de tres años cada uno y conforman lo que se llama Educación General Básica, el Ciclo Diversificado tiene dos años en su modalidad académica y tres años en su modalidad técnica. Los ciclos I y II (6 años en total) constituyen la Enseñanza Primaria y los ciclos III y Diversificado corresponden a la Enseñanza Secundaria. Al final de la Enseñanza Secundaria los estudiantes presentan pruebas nacionales finales para obtener el Bachillerato, que es requisito para ingresar a la educación superior. (MEP, 2013).

Los programas vigentes hasta el año 2012

Los programas de Matemáticas que estuvieron en vigencia en Costa Rica hasta 2012, fueron puestos en operación en el año 2005, aunque se trataba de una reforma a los que habían sido redactados en 1995. Eran en realidad dos programas desarticulados entre sí, uno para la Enseñanza Primaria en dos documentos (MEP, 2005a, 2005b) y otro para la Enseñanza Secundaria, también en dos documentos (MEP, 2005c, 2005d).

Cada uno de estos documentos consta de dos partes: una fundamentación y la malla curricular. La malla curricular está estructurada por años y temas o áreas y consta de cinco columnas: objetivos, contenidos, procedimientos, valores y actitudes, aprendizajes por evaluar. La siguiente tabla ilustra esta estructura.

Tabla 1

Programa de Matemáticas, Costa Rica, 2005. Quinto año, geometría.

Objetivos	**Contenidos**	**Procedimientos**	**Valores y actitudes**	**Aprendizajes por evaluar**
1- Construir experimentalmente las fórmulas de los diferentes paralelogramos, del trapecio y del triángulo, a partir del área del rectángulo.	Concepto de área de los paralelogramos, trapecio y triángulo. Fórmulas de áreas de paralelogramos, trapecio y triángulo.	Construcción experimental del concepto de área de una figura geométrica, utilizando diferentes estrategias. Descomposición de figuras de paralelogramos, trapecios y triángulos, y composición en rectángulos. Utilización de diferentes estrategias en la elaboración de las fórmulas para el cálculo del área de	Ejercitación de habilidades de observación, análisis y síntesis. Respeto por los puntos de vista de las otras personas. Respeto por el medio ambiente, al utilizar material reciclable.	Construcción de las fórmulas para el cálculo de los diferentes paralelogramos, del trapecio y del triángulo, mediante diferentes estrategias.

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
		paralelogramos, trapecio y triángulo, a partir de la fórmula del área del rectángulo.		
2- Aplicar los conceptos de área y perímetro de triángulos y cuadriláteros, en la resolución de ejercicios y problemas.	Resolución de ejercicios y problemas en los que, para su solución, se requiera del cálculo del área de triángulos y cuadriláteros, excepto el trapezoide.	Identificación de situaciones del entorno en las que se requiere del cálculo del área de triángulos y cuadriláteros. Cálculo de áreas de objetos de su entorno, utilizando fórmulas. Interpretación de enunciados que involucran el cálculo de áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros. Resolución de problemas en los cuales se aplican las fórmulas de área de triángulo y la de cuadriláteros, excepto el trapezoide. Cálculo de áreas de figuras que se pueden descomponer en triángulos, trapecios y paralelogramos.	Compañerismo en los trabajos de aula, al compartir materiales. Perseverancia en la búsqueda de diferentes estrategias y nuevas alternativas para la solución de problemas. Seguridad en sus habilidades.	Aplicación de las fórmulas de área de triángulo y de los cuadriláteros, excepto el trapezoide, en la resolución de ejercicios y problemas.

Fuente: MEP (2005b). *Programa de estudio. Segundo Ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: Autor.

Se puede observar repeticiones e inconsistencias en lo expresado en las columnas; esto obedece a un tipo de visión básicamente conductista que lleva a cierta manera de proceder durante las lecciones y la evaluación.

Diversos estudios señalan deficiencias en los programas de 1995 y sus reformas (por ejemplo, Murillo, 2003 y Chaves, 2009). Ruiz (2013) expresa apropiadamente que:

> Exhibían una fuerte inconsistencia entre lo enunciado en los fundamentos teóricos (declaración constructivista abstracta) y lo planteado realmente en la malla curricular (un enfoque conductista). El enfoque con que se tratan los programas específicos de estudio, la malla curricular, es el de los "objetivos programados", a los que de manera individual y aislada se les asigna procedimientos, metodología y evaluación; esto empuja a un tratamiento desconectado entre sus objetivos, distorsiona la evaluación pues ésta se ve tremendamente condicionada (cada objetivo debe tener un ítem de evaluación), y no favorece trabajar el planeamiento y el desarrollo en el aula con base en problemas. Dichos programas no permitían desarrollar un enfoque integrador y constructivo de los contenidos y habilidades deseadas. (p. 17).

Los nuevos programas

El programa anterior presentaba una discontinuidad enorme entre el sexto año (final de la Enseñanza Primaria) y el sétimo año (inicio de la Enseñanza Media), lo que provocaba no pocas dificultades. Los programas aprobados en 2012 fueron concebidos de manera integral. Es decir, se tomó en cuenta el sistema educativo desde primer año hasta undécimo o duodécimo (según la modalidad) como una unidad integrada. Esto implica varias cosas, entre ellas, que la fundamentación de estos nuevos programas rige para todos los ciclos educativos, en contraposición con los anteriores que tenían una fundamentación diferenciada para primaria y para secundaria. También significa que el paso de un ciclo a otro no sea brusco; de hecho, el sétimo año es en parte propedéutico con el objetivo de suavizar el paso de la primaria a la secundaria.

Por otra parte, estos programas establecen la resolución de problemas como estrategia metodológica. Se privilegia la contextualización activa como medio para que el estudiante adquiera los conocimientos y habilidades que establece el programa. Al respecto se establece:

> Aquí se adoptan cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios y fortalecen el currículo:
>
> - La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
> - La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
> - El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
> - La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
> - El uso de la historia de las Matemáticas.
>
> Los dos primeros ejes se asumen como articuladores, con lo que se quiere decir que no sólo permean todos los programas sino que sirven para vertebrar y articular los otros ejes y las diferentes actividades que supone la implementación del mismo.
>
> La resolución de problemas corresponde a la necesidad de asumir estándares cuya conveniencia para la Educación Matemática ha sido ampliamente comprobada en la escala internacional. La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo. Se da una asociación entre estos dos ejes que obedece precisamente al enfoque principal de este currículo: la resolución de problemas en contextos reales. Y es consistente con la selección y conceptuación del proceso matemático *Plantear y resolver problemas*. (MEP, 2012, p. 17).

Estos programas contienen dos partes. En la primera se expone la fundamentación teórica y se hacen señalamientos sobre diversos elementos tales como ejes, gestión y planeamiento didáctico, metodología y evaluación. La segunda parte son los planes de estudio. Estos planes están organizados por cinco áreas matemáticas: *Números*, *Geometría*, *Medidas*, *Relaciones y Álgebra* y *Estadística y Probabilidad*, cada una con diferente peso según años y ciclos. La siguiente figura muestra el peso relativo de las áreas a través del currículum.

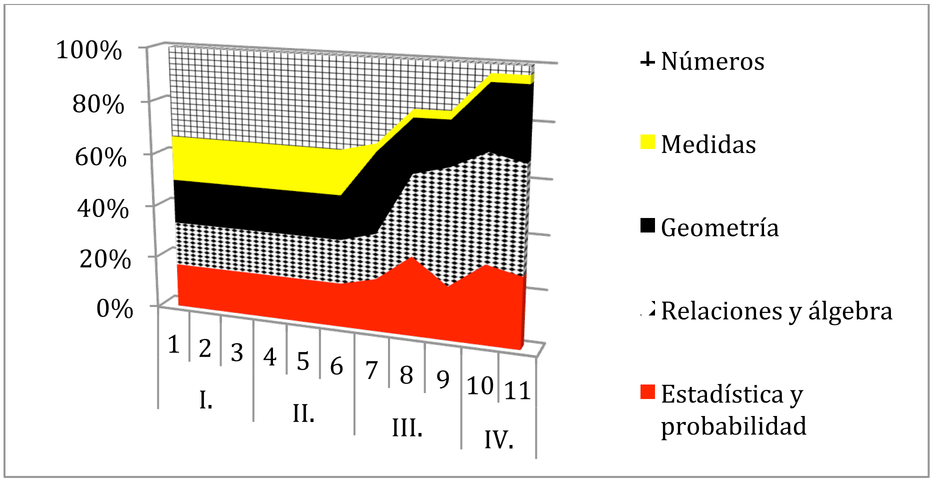


Figura 1. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos (MEP, 2012, p. 49).

Por otra parte, se establece que los conocimientos matemáticos son la base de los programas; sin embargo, se pretende el desarrollo de mayores capacidades las cuales se asumen como centrales. El programa denomina como habilidades específicas aquellas capacidades de corto plazo asociadas a las áreas matemáticas. Las habilidades generales son la generalización de las específicas a lo largo de un ciclo educativo. Finalmente, como una perspectiva general, se considera la competencia matemática. (MEP, 2012)

Los planes de estudios están estructurados en orden jerárquico por ciclos, áreas y años. Para cada ciclo se presenta una introducción al mismo y para cada área se proporciona una introducción, el propósito del área en ese ciclo, una lista de habilidades generales (las que se espera obtener al final del ciclo en esa área), una tabla con tres columnas: conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales, organizada por año y, finalmente, una lista de indicaciones metodológicas y de evaluación. Las indicaciones puntuales son de diversa índole y se refieren a cuestiones metodológicas, de enfoque, profundidad, entre otros, con los que se debe tratar los conocimientos y habilidades específicas con las que están relacionadas. Lo anterior se esquematiza en la siguiente tabla.

Tabla 2
Estructura de cada ciclo educativo.

	Estructura	**Secciones de cada área**
Ciclo educativo	Introducción.	• Introducción. • Propósito de la enseñanza. • Habilidades generales. • Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales por año. • Indicaciones metodológicas. • Indicaciones de evaluación.
	Números.	
	Medidas.	
	Geometría.	
	Relaciones y Álgebra.	
	Estadística y Probabilidad.	

Fuente: MEP (2012) Programas de estudio de Matemáticas. Costa Rica: autor.

La siguiente figura muestra la forma en que se presentan los conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales e ilustra el significado de estas últimas.

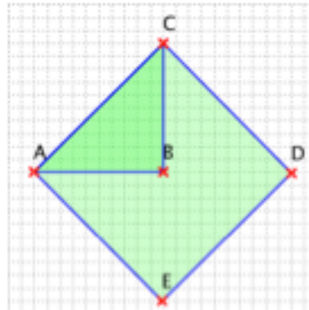
9° Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Números reales • Números irracionales • Concepto de número real • Representaciones • Comparación • Relaciones de orden • Recta numérica	1. Identificar números irracionales en diversos contextos.	▲ Para introducir los números racionales se puede comenzar con el siguiente problema. Suponga que en la siguiente figura el segmento BC mide 1 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACDE?  ▲ La discusión llevará de manera natural a concluir que el área es 2 m², viendo que el cuadrado está constituido por cuatro triángulos congruentes de área 0,5 m². Si no se conoce el teorema de Pitágoras, no se sabrá de antemano cuánto es x, la medida del lado del cuadrado, pero debido a que el área es 2 y el lado es x entonces $x^2 = 2$. A continuación se pregunta al grupo qué tipo de número es x y éste deberá concluir que no es un número entero puesto que no hay un entero que multiplicado consigo mismo dé 2. ¿Será un racional? Esta posibilidad puede descartarse realizando una demostración, que servirá además para repasar conceptos de teoría de números. Finalmente se concluye que los números como x que no son racionales se llaman irracionales, que x se denota por $\sqrt{2}$. Se indica que π es otro número irracional y que hay muchos otros. Se puede ilustrar, por medio de reseñas históricas, que el surgimiento de este tipo de números aparece en la solución de problemas en los que los números racionales no son suficientes.
	2. Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.	▲ Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales. Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001… (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de *Relaciones y Álgebra*.

Figura 2. Ilustración del formato de la malla curricular de los programas de estudio de Matemáticas, Costa Rica, 2012.

Consideraciones acerca de la geometría en el currículum preuniversitario

Tradicionalmente el término geometría en el currículum elemental estaba relacionado con el estudio de figuras planas y el de algunos sólidos. Tal estudio se hacía de manera sintética, en el caso del estudio de sólidos básicamente se reducía a fórmulas para calcular sus volúmenes y, en algunos casos, su área superficial.

En la década de los años 60 del siglo XX se introdujo en las escuelas la *Matemática Moderna* y con ella el formalismo a través de la teoría de conjuntos. La enseñanza de la matemática se vio reducida a un sistema de reglas y símbolos, esto limitó el estudio de la Geometría Elemental en su dimensión de intuición espacial en aras del rigor lógico.

En la década de los años 80 (siglo XX), la situación se revertió. Hubo un retorno hacia contenidos de tipo más tradicionales; sin embargo, el restablecimiento de la geometría euclidiana clásica ha sido difícil. Esta se presenta a los estudiantes como un producto pulido, ya elaborado. Esto no encaja con el supuesto de que los estudiantes participen activamente en el desarrollo de su conocimiento matemático. (ICMI, 2001). En general esto provoca que los conocimientos geométricos que se imparten quedan reducidos a la memorización de resultados y fórmulas.

La situación descrita, que se vivió en muchos países fue también una realidad en Costa Rica. Esto se refleja en los planes de estudio de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado que rigieron incluso hasta el año 2012.

Hacia finales de los años 80 del siglo XX, se presentaron en el mundo nuevas tendencias acerca del papel de la geometría en el currículum escolar. Estas tendencias giran en torno tanto al enfoque con que deben abordarse los conocimientos geométricos en la enseñanza aprendizaje, como en la introducción de contenidos.

Según Camacho y Morales (1994), en el Simposio La enseñanza de la Matemática a debate, celebrado en Madrid en 1984:

> Santaló propone una serie de postulados fundamentales que deben presidir los contenidos de Geometría en la Enseñanza Media, con los cuales nos identificamos:
>
> 1. La geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior.
> 2. La presentación axiomática de la geometría no es posible en la Enseñanza Media.
> 3. Hay que educar en la solución de problemas geométricos.
> 4. El aprendizaje muchas veces no es lineal, sino que opera a saltos.
> 5. Vincular la Geometría con la Aritmética y el Algebra
> 6. No olvidar la Geometría del Espacio.
> 7. Aprovechar todos los conocimientos de los alumnos. (p. 87)

En Singapur el programa incluye el estudio de conceptos no tradicionales en Geometría tales como simetría axial y teselados (en cuarto grado), representaciones planas de sólidos (sexto grado), homotecias (segundo de secundaria), resolución de problemas utilizando coordenadas (cuarto de secundaria). (Ministerio de Educación de Singapur, 2006a y 2006b).

Van de Walle (2007) enuncia algunas consideraciones relacionadas con la importancia de la geometría en el currículum escolar y proporciona algunas ideas sobre el papel que esta debe jugar. Señala que las semejanzas y diferencias de las figuras pueden determinarse mediante propiedades geométricas; las figuras pueden moverse en el plano y en el espacio y tales movimientos pueden expresarse como traslaciones, rotaciones reflexiones; también, las figuras, pueden describirse en términos de su localización y por lo tanto pueden usarse sistemas de coordenadas; pueden verse desde diferentes perspectivas y esto ayuda a comprender relaciones entre la geometría bidimensional y tridimensional. Estas observaciones tienen implicaciones importantes puesto que deberían plasmarse en el currículum de modo que se desarrolle en los estudiantes el sentido espacial, considerado como una habilidad para visualizar figuras y relaciones entre ellas. Este sentido, en particular, incluye el sentirse cómodo con descripciones geométricas de objetos y su posición; esto permite, entre otras cosas, apreciar el arte, la naturaleza y la arquitectura y facilita la descripción y análisis de lo que nos rodea.

Los estándares para Geometría que establece el *National Council of Teachers of Methematic* (NCTM) de los Estados Unidos, para los programas de enseñanza de preescolar al grado 12 son (NCTM, 2000):

- Analizar características y propiedades de las figuras geométricas en dos (y tres) dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos acerca de relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y utilizar simetrías para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar visualización, razonamiento espacial y modelación geométrica para resolver problemas.

En cuanto al primero de estos estándares, se establece que los niños están inclinados de modo natural a observar y describir figuras, en principio es importante la identificación de figuras. Posteriormente se pueden enfocar en propiedades y atributos de las figuras. En grados superiores los estudiantes podrán observar y discutir acerca de los componentes de las figuras. En la enseñanza media, los estudiantes aprenderán a utilizar el razonamiento deductivo a elaborar conjeturas y verificarlas.

Sobre el estándar relacionado con la localización y descripción de relaciones espaciales, se espera se espera que en los primeros niveles aprendan conceptos relacionados con la posición, luego pueden utilizar cuadrículas para localizar objetos. En la secundaria, el plano coordenado puede ser útil para descubrir y analizar propiedades de las figuras.

En lo que concierne al tercer estándar, los niños pueden explorar movimientos tales como deslizamientos, giros y reflexiones (mediante espejos). Posteriormente podrán investigar los efectos de las transformaciones y comenzar a describirlas matemáticamente. En los últimos niveles los estudiantes aprenderán múltiples maneras de expresar las transformaciones.

Para el último estándar, al comienzo, los niños desarrollarán habilidades de visualización mediante experiencias con objetos. Luego podrán analizar figuras, descomponerlas y ensamblarlas y describir atributos que no pueden ser vistos pero que pueden ser inferidos. Un aspecto de la visualización involucra movimientos entre figuras de dos y tres dimensiones y sus representaciones. En los últimos niveles los estudiantes podrán visualizar y trazar secciones planas en sólidos geométricos.

De los párrafos anteriores se deduce que lo que se propone es que la geometría en el currículum escolar no debe ser ya una colección de definiciones y teoremas sino más bien debe servir como una herramienta útil para interpretar nuestro entorno.

La geometría en el currículo costarricense hasta el 2012

Aunque en diversas partes del mundo ya se estaba proponiendo otro enfoque y otros contenidos para geometría en la escuela primaria y secundaria, en Costa Rica siguió prevaleciendo la manera más tradicional, tanto en el programa de 1995 como en sus sucesivas revisiones, incluida la última de 1985.

En esta versión, para la enseñanza primaria, se enuncia que:

> Se debe tomar en cuenta que el estudio de este tema se divide en dos áreas principales: La primera, se vincula con el análisis de la forma, y la segunda, se relaciona con el estudio de la medición.
>
> Se aborda el análisis de la forma y de sus características, teniendo en cuenta que si el niño y la niña inician el reconocimiento de líneas y planos, y entran en contacto con ellos de manera más objetiva, irá entendiendo sus propiedades. Esto le permitirá integrar explicaciones y reflexiones que refuercen y complementen su conocimiento matemático.
>
> Una actividad importante para el desarrollo del pensamiento del niño y la niña es la clasificación, la cual se pone en juego al observar e identificar las propiedades que tienen los objetos.
>
> Al iniciar el trabajo con figuras geométricas, el educando reconstruye en gran parte el proceso evolutivo de la historia de la matemática, desde un proceso de visualización de objetos, hasta la construcción y reconstrucción de conceptos. (MEP, 2005a, p. 71)

Luego agrega que:

> En el primer y segundo ciclos de Educación General Básica el estudio de las figuras geométricas que se propone resulta muy apropiado para ayudar a la formación del conocimiento matemático del alumno. El proceso de abstracción que se realiza a través de observar los elementos que se encuentran en su entorno (objetos) y relacionarlos con modelos (figuras), le facilitarán la aprehensión de las propiedades y características que poseen dichas figuras. (MEP, 2005a, p. 72).

Lo que no dice el programa es mediante qué procesos o metodología logrará el estudiante pasar de la observación de las figuras a la aprehensión de sus propiedades y características. Esto tampoco queda claro al observar la malla curricular (tal como se ilustra en la tabla 1, arriba) en la que se puede observar un modelo puramente conductista que no ayuda al estudiante en la adquisición de conocimientos y, mucho menos, en establecer conexiones apropiadas.

Por otra parte, no hay variación en los contenidos. Se sigue lo clásico (MEP, 2005a, 2005b):

- Diferencias y semejanzas de los cuerpos geométricos; estudio de líneas y segmentos (rectas, curvas, quebradas, mixtas, cerradas, abiertas, horizontales, verticales, inclinadas) en I, II y III año.
- Reconocimiento de las figuras básicas, estudio de sus características y aplicación en ejercicios y problemas; cálculo de perímetros y áreas, en II y III año.
- Ángulos (medición y clasificación) en III año.
- Polígonos (reconocimiento, cálculo de perímetros) en III y IV año.
- Estudio del triángulo (elementos: lado, ángulo, altura, etc., clasificación según sus ángulos y sus lados); estudio de cuadriláteros (elementos y clasificación); perímetros y áreas en IV y V año.
- Circunferencia (elementos, longitud, área); área y perímetro de polígonos; identificación de características básicas de los cuerpos geométricos en VI año.

Se observa la ausencia total de las coordenadas, las transformaciones, la simetría. Por otra parte, el estudio de sólidos aparece solamente en el I año a nivel de observación y en VI año mediante la identificación de sus características básicas. Se trata, en este último caso, de describir oralmente, identificar, comparar y clasificar objetos con formas de pirámide, prisma, cono y cilindro.

Para el III ciclo de la EGB y el Ciclo Diversificado, este programa establece que

> En los temas de Geometría se debe combinar la intuición, la experimentación y la lógica. Se usarán las construcciones para que, a partir de ellas, se caractericen las figuras y se formulen deducciones lógicas, sin que eso signifique que se hará una presentación axiomática-deductiva - rigurosa. Los aspectos experimentales o intuitivos de la geometría, requieren del uso de material concreto, con características de operatoriedad y flexibilidad para que, a través del análisis y la síntesis de situaciones, el joven logre construir conocimiento abstracto.
>
> …
>
> Las construcciones geométricas no deben verse como un fin en sí mismas, sino que su papel primordial consiste en facilitarle al estudiante la caracterización de las figuras y la identificación de sus propiedades. (MEP, 2005c, p. 51).

El tono del discurso es muy general y vago y no ayuda al docente a entender qué es lo que se propone como estrategia metodológica. Esto tampoco se evidencia en la malla curricular.

Los contenidos de geometría para la enseñanza media eran (MEP, 2005c, 2005d):

- En VII año: puntos, rectas, segmentos (colinealidad, coplanaridad, perpendicularidad, paralelismo, concurrencia); ángulos (medida, clasificación, determinados por una transversal a dos paralelas); triángulos (teoremas sobre las medidas de los ángulos, desigualdad triangular, rectas notables); cuadriláteros (suma de las medidas de sus ángulos, características y propiedades).
- En VIII: simetría axial, congruencia, semejanza, teorema de Thales.
- En IX año: Teorema de Pitágoras y sus derivados, fórmula de Herón, conceptos básicos de trigonometría.
- En X año: no hay geometría.
- En XI año: círculo y circunferencia (diversos elementos, cuerdas, relaciones métricas entre diversos ángulos, áreas y perímetros de anillos, coronas, sectores circulares); polígonos regulares inscritos y circunscritos (diversas relaciones); fórmulas para calcular áreas y volúmenes de prismas, cilindros, pirámide, como y esfera.

Sigue ausente aquí las coordenadas y transformaciones aunque se incluye la simetría axial. Los cuerpos sólidos se incluyen al final y solo se refiere al cálculo de áreas y volúmenes. Los temas son tratados de manera sintética como se ha hecho tradicionalmente.

La geometría en los nuevos programas

Con los nuevos programas, el papel de la geometría en el currículum sufre un gran cambio, tanto en el enfoque como en sus contenidos. Estos cambios obedecieron a una modernización del currículum en esa área y, más importante, a una visión del papel de la geometría más acorde con lo que los mismos programas proponen como supuestos del papel de la matemática en el currículum escolar. Al respecto, los programas enuncian:

> Se considera la Geometría como organizadora de los fenómenos del espacio y la forma, y en particular se ven los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de

> lo real. Es decir, no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos, sino más bien una que asuma la relación geométrica con los entornos espaciales. Esto busca fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas. Se apela de esta forma a la construcción de los aprendizajes geométricos en fases crecientes que van desde lo intuitivo, manipulable, pictórico y visual hacia las representaciones más generales y abstractas. Se refuerza la necesidad de ascender por medio de distintos niveles en los aprendizajes geométricos. (MEP, 2012, p. 52).

De este modo, se pretende una mayor presencia del "sentido espacial", entendido este como la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio. Por otra parte, se introduce la geometría de coordenadas y analítica de manera gradual, adecuada a los distintos niveles cognitivos. Además, se estudia la simetría axial y se introducen transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). La introducción de estos tópicos permite establecer conexiones entre la Geometría y el Álgebra. Aunque estas ideas están presentes a lo largo de la malla curricular en todos los ciclos, dadas las diferencias de los estudiantes en cada nivel educativo, el programa enfatiza algunos de los aspectos en los diversos ciclo. En la siguiente tabla se proporcionan las líneas generales de cada ciclo así como algunas indicaciones metodológicas que se sugieren.

Tabla 3

Lineamientos generales y asuntos metodológicos para el área de Geometría, por ciclo.

Ciclo	**Lineamientos**
I	• Desarrollar la visualización (ubicar y reconocer figuras geométricas en el entorno). • Manipular y describir figuras geométricas (especialmente triángulo, rectángulo, círculo, cajas, cubos, esfera). • Trazado de esas figuras a mano alzada o con ayuda de instrumentos. • Reproducción de figuras (con patrones, calcando, con papel cuadriculado, etc.) • Describir relaciones entre figuras geométricas. • El movimiento se puede introducir por medio de croquis sencillos que consignen inicio y final de un recorrido, y cambio en la posición de objetos. • Desarrollar un vocabulario geométrico elemental.
II	• Se profundiza en ubicación espacial y visualización del formas geométricas en el plano y en el espacio. • Se amplía la identificación y el estudio de propiedades de los elementos • que componen las figuras. • Dar relieve a las propiedades y relaciones que identifican las figuras (número de lados, relaciones de posición, métrica, etc.). • Aumentar el vocabulario geométrico. • Calculo de perímetros y áreas (figuras poligonales y circulares). • Introducción de simetrías, giros y traslaciones. • Conectar con el área de *Medidas* (perímetros, áreas) • Conexión especial con *Relaciones y Álgebra* en el manejo de puntos y figuras sencillas en el plano.
III	• Se busca un enfoque más formal de los conceptos y propiedades aprendidas intuitivamente en la Primaria. • Se sigue con el tratamiento del sentido espacial, mediante la visualización y

	aplicación de características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales. • El tema de semejanzas y congruencias se introduce a partir de homotecias. • Se introduce el estudio básico de la trigonometría con problemas en contextos reales. • Se profundiza la conexión entre *Geometría* y *Relaciones y Álgebra.*
Diversificado	• Estudio y representación de figuras geométricas en el plano mediante coordenadas. • Se promoverá el desarrollo de habilidades relacionadas estrechamente con el sentido espacial (visualización, ubicación y movimiento). • Se estudian transformaciones en el plano.

Fuente: MEP (2012) Programas de estudio de Matemáticas. Costa Rica: autor.

Uno de los aspectos que enfatiza el programa en general, y que se evidencia de manera especial en el área de *Geometría*, es el uso de las tecnologías digitales como herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje. Al respecto se menciona:

El tratamiento del movimiento en Geometría había sido difícil de incorporar en los programas escolares por las limitaciones para el trazado y su presentación gráfica. Con las tecnologías digitales esto cambió radicalmente. La presencia de software diverso de geometría dinámica y de representación geométrica desde hace bastantes años permite aproximarse a los fenómenos geométricos incluyendo esta propiedad esencial. Pero es más que eso: la tecnología permite replantear la lógica del plan de estudios y de muchos de sus contenidos en la Geometría y en otras áreas. Este sentido dinámico se puede introducir en congruencias, semejanzas y simetría lineal o rotacional de objetos que se transforman, lo que permite conexiones estrechas con el pensamiento funcional. Un tratamiento con coordenadas que se apoya en el uso de tecnologías permite oportunidades muy ricas para la representación múltiple de sus objetos geométricos, una de las características importantes de las Matemáticas. (MEP, 2012, p. 52).

Todos los lineamientos mencionados, tanto generales como específicos de cada ciclo, se plasman, de manera apropiada, en la malla curricular. Las habilidades específicas que enuncian el programa están relacionadas de manera coherente con lo que se propone en la fundamentación teórica, los ejes y planteamientos metodológicos.

El programa mantiene buena parte de los temas clásicos que se estudian en la geometría escolar, pero muchos de ellos se estudian bajo un enfoque diferente, dirigido a desarrollar la competencia matemática. También se reconoce que la geometría sintética sigue siendo clave en cuanto a la generación de capacidades de razonamiento y prueba; esto se puede observar en la malla curricular.

Por otra parte, toma en consideración, en buena medida, las nuevas tendencias sobre el papel de la Geometría en el currículum escolar. Esto se puede ver explícitamente en las diversas habilidades que se proponen para los ciclos educativos. A continuación se reseñan habilidades relacionadas con esta tendencias que aparecen en el programa, dejamos de lado aquellos temas clásicos que en el programa son tratados de manera sintética.

Ubicación y visualización espacial, geometría del espacio

Las habilidades específicas relacionadas con ubicación y visualización espacial y en general, geometría del espacio, están presentes en todos los años, desde el I al XI. A continuación se hace referencia, de manera resumida a las habilidades relacionadas con esto en cada uno de los años (MEP, 2012).

En I año: Distinguir el interior, el exterior y el borde referidos a líneas cerradas tanto en el entorno como en dibujos y trazos elaborados por el estudiante o por otras personas. Identificar figuras planas en cuerpos sólidos; esto se refiere a identificar, por ejemplo, un rectángulo como una cara de una caja, etc. Identificar objetos con forma de "caja" (paralelepípedo recto de base rectangular).

II año: Identificar en dibujos y en el entorno posiciones de líneas rectas: horizontal, vertical, oblicua (metodología: observar objetos en objetos de tres dimensiones como cajas y visualizar las posiciones). Componer y descomponer figuras utilizando cuadriláteros y triángulos. Identificar objetos que tengan forma de caja o forma esférica. Clasificar objetos según su forma; a este nivel solo cajas, esferas, otros (los que no son ni cajas ni esferas).

III año: Visualizar el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas y segmentos en dibujos y objetos del entorno. Ubicar personas u objetos a partir de un punto de referencia. Reconocer el radio y diámetro de esferas. Reconocer cuáles cajas corresponden a cubos. Reconocer los elementos de cajas y cubos (caras y aristas). Reconocer diferencias y semejanzas entre cajas y cubos. Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.

IV año: Reconocer en dibujos u objetos del entorno polígonos regulares e irregulares. Identificar cubos y prismas rectangulares en objetos del entorno. Identificar segmentos paralelos y perpendiculares en conexión con prismas rectangulares. Identificar planos en conexión con las caras de los prismas rectangulares. Aplicar el concepto de paralelismo y perpendicularidad de planos en conexión con prismas rectangulares. Identificar diversos cuadriláteros en conexión con cubos y prismas en general.

V año: Reconocer figuras simples dentro de una más compleja. Reconocer prismas y algunos de sus elementos y propiedades (caras, bases, altura). Reconocer cilindros y algunos de sus elementos y propiedades (bases, superficie lateral, eje, altura, radio y diámetro de la base).

VI año: Clasificar cuerpos sólidos por su forma. Calcular el volumen de los cuerpos sólidos simples: cubo, prisma, cilindro, cono, pirámide y esfera.

VII año: Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices. Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos o perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares. Utilizar software de geometría dinámica para la visualización y la verificación de propiedades geométricas.

VIII año: Identificar diversos elementos de pirámides y prismas recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

IX año: Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

X año: Identificar el radio y el diámetro de una esfera. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas. Reconocer elipses en diferentes contextos.

XI año: Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un cono circular recto y características métricas de ellas. Reconocer elipses, parábolas e hipérbolas en diferentes contextos. Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.

Geometría analítica, coordenadas

Se da un papel destacado al uso de coordenadas. Se enuncian habilidades específicas directamente relacionadas con esta temática en varios de los niveles educativos. Por otra parte, en el área de *Relaciones y Álgebra* también se consideran coordenadas extensivamente. Los años y habilidades específicas que explícitamente se refieren a geometría analítica o uso de coordenadas en el área de Geometría se resumen a continuación (MEP, 2012).

V año: Representar puntos y figuras utilizando coordenadas en el primer cuadrante.

VII año: Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos. Determinar algebraicamente el punto medio de un segmento. Ubicar puntos en el interior y en el exterior de figuras cerradas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.

VIII año: Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una *homotecia*. Reconocer pares de figuras homotéticas en el plano de coordenadas.

IX año: Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras.

X año: Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

XI año: Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter una figura a una traslación, rotación u homotecia o combinaciones de ellas. Determinar el punto imagen de puntos dados mediante una transformación.

Simetrías, transformaciones en el plano

La simetría y transformaciones en el plano aparecen en varios de los niveles educativos de manera explícita. Este es un tema en el que metodológicamente se solicita que se conecte con el uso de coordenadas y, también, con la visualización y ubicación. Los años y habilidades que se proponen se resumen en lo que sigue (MEP, 2012).

IV año: Identificar los ejes de simetría de una figura. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta. Trazar una figura simétrica a otra respecto a una recta. Estimar la distancia de un punto al eje de simetría.

V año: Reconocer figuras que se obtienen mediante traslación de otras.

VI año: Reconocer, reproducir y trazar figuras simétricas. Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.

VIII año: Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1. La idea con estas dos últimas habilidades es que se introduzca el estudio de la semejanza y la congruencia mediante las homotecias.

X año: Aplicar traslaciones a una circunferencia.

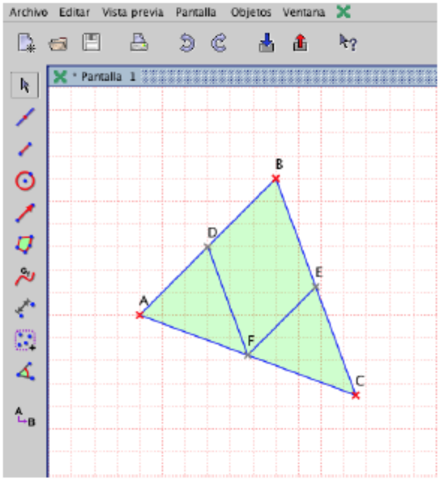
XI año: Determinar ejes de simetría y elementos homólogos en figuras simétricas. Resolver problemas relacionados con la simetría axial. Aplicar los concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación. Identificar elementos de las figuras geométricas que aparecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones. Trazar la imagen de una figura dada cuando se somete a una reflexión, rotación, homotecia o traslación. Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano. Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias, reflexiones y rotaciones. Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.

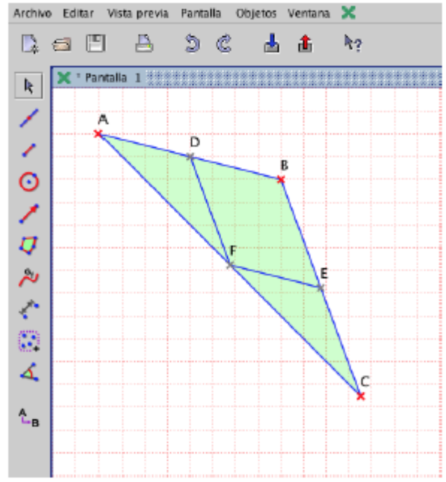
Indicaciones puntuales y metodológicas

Uno de los componentes importante de los programas son las indicaciones puntuales que aparecen como una columna en la malla curricular (vea la figura 2). Otro son las indicaciones metodológicas y de evaluación que se proporcionan por área y ciclo. Estos componentes junto con la lista de contenidos y la indicaciones puntuales forman un todo interrelacionado que deberá permitir que el programa se ejecute de manera apropiada. En estas indicaciones se establece la manera de relacionar los diferentes temas, la forma en que se puede desarrollar las habilidades propuestas, el tipo de problemas que se puede utilizar para la adquisición de los conocimientos y habilidades. En el caso de Geometría, las indicaciones mencionadas son muy importantes para que el docente comprenda qué es lo que se pretende en relación con los nuevos temas y con el nuevo tratamiento de algunos de los temas clásicos. Por otra parte, el programa promueve el uso de las tecnología digitales, algunas de habilidades específicas se refieren a eso; pero es en las indicaciones donde mejor se evidencia el papel que se le da a dicha herramienta en el aprendizaje de la geometría.

Por ejemplo, entre las indicaciones metodológicas para el tercer ciclo aparece la siguiente:

> El uso de software de geometría dinámica es muy valioso. Se sabe que al dibujar cualquier figura geométrica en la pizarra, ésta es estática. A través de este recurso se puede trazar cualquier figura y cambiarla con sólo "arrastrar" o mover uno de los elementos que la componen. Esto permite que la visualización sea enriquecedora y que se trabajen procesos como la generalización y la modelización. Las figuras siguientes fueron generadas por un software, se dibujó un triángulo arbitrario y se marcaron los puntos medios de los lados, luego se trazaron los dos segmentos interiores que ahí se observan. Arrastrando los vértices se obtiene la figura de la derecha o cualquier otra. Observando parece que los dos triángulos ADF y FEC son congruentes; esta es una conjetura que pueden hacer las y los estudiantes para luego demostrarla. (MEP, 2012, pp. 319-320).





Este ejemplo ilustra el sentido de las indicaciones metodológicas y, en este caso, el tipo de uso de la herramienta tecnológica que propone el programa.

Conclusión

La enseñanza de la geometría ha estado presente tradicionalmente en los currículos escolares, en mayor o menor medida. Hasta mediados del siglo XX ocupó un papel importante y su estudio estuvo centrado en la geometría euclidiana mediante un enfoque sintético; se hace referencia a la formas y propiedades de las figuras en dos o tres dimensiones, estas son rígidas (no cambian de forma y tamaño), por otra parte se asocia también a la medida a través de la longitud, área y volumen. Con el advenimiento de la *Matemática Moderna*, en la década de los años 60 del siglo XX, la Geometría perdió preponderancia en el currículum escolar. Tras el fracaso de esta visión de la Matemática en la escuela, hacia finales de los 80 del siglo XX, se propone nuevamente un lugar importante para la Geometría. Este lugar no solamente se refería a volver a implementar contenidos de geometría sino a darles otro enfoque y a incluir otros contenidos.

Estos vaivenes se reflejaron en los programas escolares costarricenses; sin embargo, el enfoque sintético de la geometría euclidiana siguió prevaleciendo hasta la aprobación de nuevos programas de estudio en el año 2012.

Estos nuevos programas dan a la Geometría un papel muy importante y, por otra parte, incorporan, en buena medida, las ideas novedosas en cuanto al papel de la geometría en el currículum de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Promueven la resolución de problemas como estrategia didáctica, en el área de geometría esto es importante porque permite al estudiante experimentar, conjeturar, comunicar sus ideas y utilizar lenguaje geométrico adecuado a su nivel. Fomentan el sentido de ubicación y el sentido espacial a través de problemas y actividades que desarrollan habilidades específicas relacionadas con esto. Introduce el uso de coordenadas como una manera alternativa de explorar propiedades de las figuras geométricas, así como visualizar relaciones y determinar áreas de figuras complejas. También introduce el estudio de la simetrías y las transformaciones en el plano, lo cual proporciona un sentido dinámico a la geometría. Finalmente, este sentido dinámico, así como la exploración de propiedades, relaciones geométricas y medidas, se potencia con el uso de software apropiado; el uso inteligente y visionario de las tecnologías digitales es, precisamente, uno de los cinco ejes curriculares que propone el programa.

El síntesis, en estos nuevos programas de estudio costarricenses, la geometría ocupa un lugar preponderante, se la dota de nuevos contenidos además de algunos de los contenidos clásicos y se actualiza su enfoque en aras de un aprendizaje más motivador y útil para los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Camacho, M. y Morales, A. (1994). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *21*, 83-94. Recuperado de dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117839.pdf

Chaves, E. (2009). Análisis de los fundamentos teóricos y metodológicos de los programas de estudio de matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 5*, 29-67.

ICMI (2001). *Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. Documento de discusión para un estudio ICMI PMME-UNISON.* Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005a). *Programa de estudio de Matemática, I ciclo*. San José: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005b). *Programa de estudio de Matemática, II ciclo*. San José: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005c). *Programa de estudio de Matemática, III ciclo*. San José: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005d). *Programa de estudio de Matemática, Ciclo Diversificado*. San José: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. San José: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013). Sitio web oficial. http://www.mep.go.cr/CSE/informacion.aspx

Ministerio de Educación de Singapur (2006a). *Secondary Mathematics Syllabuses*. Singapur: Autor.

Ministerio de Educación de Singapur (2006b). *Mathematics Syllabus Primary*. Singapur: Autor.

Murillo, M. (2003). Los programas de Matemática en la enseñanza secundaria: lo que los profesores opinan. *Revista Uniciencia*, *20 (1),* 19-26.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* número especial, 7-111.

Van de Walle, J. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Boston: Pearson.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

El pensamiento algebraico en los programas de estudio de matemáticas: una visión integral

Edison **De Faria** Campos
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
edison.defaria@ucr.ac.cr

Resumen

En concordancia con las tendencias internaciones actuales en Educación Matemática, los nuevos programas de estudio de matemáticas para la enseñanza elemental, media y secundaria en Costa Rica, enfatizan el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la educación primaria.

Aprovechando este espacio abierto por el Cemacyc, se presentan las principales ideas relacionadas con las habilidades y procesos que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico en los programas mencionados anteriormente, y se proporcionan ejemplos que fueron utilizados en las capacitaciones bimodales realizadas con docentes líderes de educación primaria y secundaria, como parte del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Palabras clave: Educación matemática, pedagogía, formación docente, currículo.

Introducción

Según Soccas (2011), las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas han sido, y son hoy, un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, y que el panorama investigador en la década de los noventa reflejaba por un lado una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del Álgebra, debido a las dificultades y errores que tenían los estudiantes en esta área, y por otro lado reconocían la importancia del Álgebra en las Matemáticas y en el desarrollo de habilidades y hábitos mentales en el estudiantado. Esta crítica generalizada se hace visible en el fracaso escolar reflejado en la deserción estudiantil en Matemáticas, en la ausencia de significado en el aprendizaje de los estudiantes y en la escasa conexión entre el Álgebra y otras áreas de las Matemáticas. Todo esto generó una preocupación por hacer del Álgebra un estudio accesible a todos los estudiantes, y por la búsqueda de formas más efectivas para su enseñanza y aprendizaje.

Varias investigaciones recomiendan introducir el pensamiento algebraico en los primeros años de la educación elemental (Davis, 1985, Vergnaud, 1988, Kaput, 1998, 2000, NCTM, 1989, 2000, Godino, 2003, Blanton y Kaput, 2005, Malara y Navarra, 2003, Bastable y Schifter, 2007, Carraher y Schliemann, 2007, Soccas, 2011, Carraher, Schliemann y Brizuela 2011).

Carraher y Schliemann (2007) realizaron una amplia revisión de las investigaciones acerca del razonamiento algebraico de estudiantes de 6 a 12 años y concluyeron que el álgebra tiene que ocupar un papel importante en la educación primaria. La propuesta que apoya esta postura se conoce como “Early-Algebra (Álgebra temprana)” y abarca el razonamiento algebraico y las relaciones algebraicas. Los autores señalan dos eventos que fueron decisivos en los Estados Unidos para el desarrollo de este movimiento: las publicaciones del “National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989 y 2000) y el informe sobre Álgebra en la educación primaria y secundaria del Panel de Investigación y Desarrollo de la Corporación RAND (RAND Mathematics Study Panel, 2003), y determinan algunas cuestiones problemáticas que son fundamentales: las relaciones entre la Aritmética y el Álgebra; la dualidad proceso/objeto en Álgebra; el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas, y las representaciones simbólicas del Álgebra tanto formal como no formal.

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NTCM (2000), el Álgebra es uno de los cinco bloques de contenidos y tiene la particularidad de que dicho bloque se debe desarrollar desde la enseñanza Preescolar. Conforme se menciona en los Principios y Estándares, “no se trata de impartir un curso de álgebra a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el grado K-12”. En el álgebra escolar se incluye el estudio de los patrones, las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

Soccas (2011) menciona algunas investigaciones y publicaciones que analizan distintas formas de introducir el Álgebra en el ámbito escolar. Por ejemplo, la publicación de Bednarz, Kieeran y Lee (1996) sugiere las siguientes formas: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas; la modelización de fenómenos físicos y matemáticos, y la introducción de problemas funcionales. Soccas también menciona la síntesis hecha por Kieran (2006) de los trabajos de investigación llevados a cabo por el grupo de trabajo de investigadores en Álgebra del Psychology of Mathematics Education (PME). En la síntesis Kieran organiza los trabajos realizados durante treinta años en tres grandes núcleos: transición de la Aritmética al Álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra; uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización; el pensamiento algebraico en estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

Existe otra propuesta que se conoce como Pre-Álgebra. Esta corriente surge como respuesta a investigaciones realizadas durante las décadas de los 80 y 90, centradas en el análisis de las dificultades y errores en Álgebra en los estudiantes, que tomaban en cuenta los estadios de desarrollo de los alumnos (Herscovics y Linchevski, 1980, 1994, Piaget y García, 1982, Kuchemann, 1981, Booth, 1984, Filloy y Rojano, 1989, Drijvers y Hendrikus, 2003) . Dichas investigaciones concluían que sería más pertinente dejar los estudios formales del Álgebra para los últimos cursos de la Educación Secundaria. Además, tratar el Álgebra como Aritmética generalizada es insuficiente para desarrollar el pensamiento algebraico adecuado, y la utilización de nuevas fuentes de significados, por ejemplo las nuevas tecnologías, abren espacios para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra.

Como menciona Soccas (2011), el enfoque de Pre-Álgebra se apoya en dos hechos esenciales:

- El Álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero que la noción de simbolismo algebraico es mucho más amplia y va más allá de las escrituras formales de la Aritmética generalizada, es decir, que existen cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Esto genera ciertas incapacidades en los estudiantes para operar espontáneamente con variables, como ocurrió en la evolución histórica del Álgebra.
- En la validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivo, el Álgebra ocupa el estadio de desarrollo formal, y por lo tanto está fuera de las capacidades cognitivas de los estudiantes de los primeros años de la educación primaria.

Algunas experiencias

Los estándares del NCTM (2000) incluyen estándares en Álgebra a partir los primeros años de la educación primaria. Las expectativas para la pre-primaria, primer y segundo grados, relacionadas con el pensamiento algebraico son (NCTM, 2000, p. 90):

- Patrones, relaciones y funciones: ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades; clasificar. Reconocer, describir y extender patrones tales como secuencias de sonidos y formas, o patrones numéricos simples, y traducir de una representación a otra. Analizar cómo son generados patrones que se repiten.
- Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras, utilizando símbolos algebraicos: ilustrar principios generales y propiedades de operaciones tales como conmutatividad, utilizando números específicos. Utilizar representaciones concretas, figurales y verbales para desarrollar notaciones simbólicas convencionales o inventadas por los estudiantes.
- Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas: modelar situaciones que impliquen suma y resta de números enteros, utilizando objetos, figuras y símbolos.
- Analizar cambios en varios contextos: describir cambios cualitativos (ej. el crecimiento de un estudiante). Describir cambios cualitativos (ej. un estudiante creció 5 cm en un año).

Esta introducción del pensamiento algebraico en los años iniciales de la educación matemática es bastante relevante pues no sólo se busca una generalización de la Aritmética, sino que se introduce de forma gradual la formalización de ideas matemáticas mediante el uso de símbolos.

Se aclara que aunque los conceptos discutidos en este estándar son algebraicos, no significa que los estudiantes de los primeros grados de la educación primaria tratarán con el simbolismo que, por lo general, es enseñado en un curso de álgebra tradicional en la enseñanza secundaria. Antes de ingresar en la educación formal, los niños y las niñas desarrollan conceptos relacionados con patrones, funciones y álgebra. Cuando los estudiantes perciben que ciertas operaciones presentan propiedades particulares entonces ellos están empezando a pensar algebraicamente. Cuando observan que ciertas cantidades se relacionan con otras entonces empiezan a tener experiencias con relaciones funcionales, mientras que el uso de las representaciones de situaciones matemáticas con objetos concretos, figuras y símbolos, son el inicio de la modelización matemática. Se recomienda motivar a los estudiantes para que utilicen el lenguaje y la notación que tenga significado para ellos, y que el docente los ayude a ver distintas relaciones, hacer conjeturas y generalizaciones de sus experiencias con los números.

Es importante que los estudiantes comprendan que las representaciones son herramientas para modelar e interpretar fenómenos de naturaleza matemática, que son encontrados en distintos contextos y se recomienda utilizar distintas representaciones para una misma situación matemática (NCTM, 2000, p. 141).

Los cuatro aspectos relacionados con el pensamiento algebraico y funcional: comprensión de patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras utilizando símbolos algebraicos; utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y analizar cambios en varios contextos, constituyen los estándares para la enseñanza primaria y secundaria. Las expectativas en cada uno de ellos aumentan pero, como se indicó anteriormente, el proceso es gradual.

Algunos programas de estudio utilizan las ideas principales de los estándares del NCTM para el área de Álgebra, iniciando con el pensamiento algebraico y funcional en los primeros grados de la educación primaria (por ejemplo: Corea, Portugal, Costa Rica).

El caso de Costa Rica

El 21 de mayo del 2012 el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó los nuevos programas de Matemáticas para el I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Los nuevos programas empezaron a instalarse en el 2013 en un proceso gradual que tomará de cuatro a cinco años, de tal forma que entre el 2016 y 2017 toda la educación preuniversitaria de Costa Rica estaré siguiendo este currículo. Para esto, desde el 2011 se ha invertido en procesos de capacitación y creación de recursos que apoyen su implementación (Ruiz, 2013, p. 7).

El currículo se diseñó con una integración vertical el primer grado escolar al último. La fundamentación teórica (filosófica y curricular) es la misma para todo el currículo, las áreas matemáticas son las mismas. Ésta es una diferencia en relación con los programas anteriores. Se busca con ello no sólo el desarrollo de perspectivas estratégicas de las áreas, para poder seguir su desarrollo en toda la formación escolar sino además contribuir a disminuir las brechas que han predominado entre la Primaria y la Secundaria en Costa Rica (Ruiz, 2013, p. 33).

Las cinco áreas que compone el currículo son: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, Probabilidad y Estadística. Las cinco áreas matemáticas seleccionadas participan con distinta intensidad. La siguiente figura ilustra la distribución temporal-espacial de las distintas áreas en los cuatro ciclos de la educación formal.

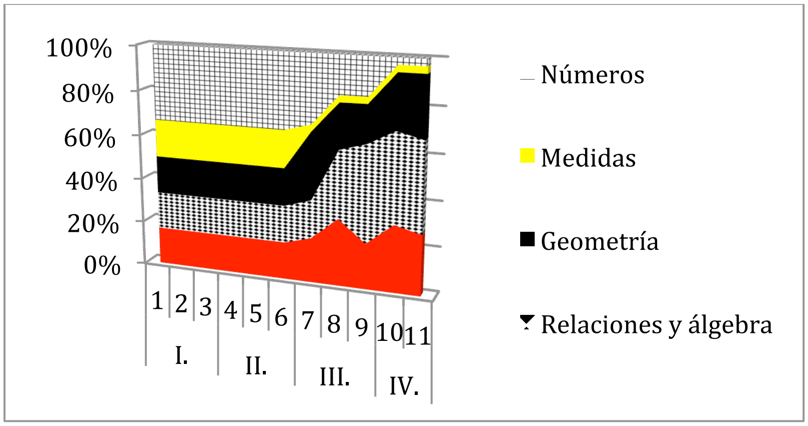


Figura 1. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos.
Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012).

Los ejes disciplinares

Se establecen cinco ejes o énfasis curriculares: resolución de problemas; contextualización activa; potenciar actitudes y creencias positivas; uso inteligente de tecnologías y uso de historia de las Matemáticas (Ruiz, 2013, pp. 37-38).

Como eje curricular, la "resolución de problemas" no pretende que solamente se entrenen estrategias o heurísticas para resolver problemas, sino especialmente darle un sentido a la participación de los problemas en la organización de las lecciones, la construcción de aprendizajes y toda la práctica de aula. La "contextualización activa" hace referencia al trabajo en contextos reales o que el estudiante asuma de esa forma. La fusión de estos dos primeros ejes constituye el enfoque principal del currículo: la resolución de problemas con un énfasis especial en contextos reales (Ruiz, 2013, p. 38).

El uso de tecnologías se plantea de una manera gradual. Las indicaciones puntuales son un medio central para ofrecer los límites y métodos para usar la tecnología. Además, el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste (Ruiz, 2013, p. 39).

Las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas que se desea promover son: perseverancia; confianza en la utilidad de las Matemáticas; participación activa y colaborativa; autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas; respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. Esta dimensión no sólo se enuncia como un tema teórico, sino como una orientación a seguir en la acción de aula.

El uso de historia de las Matemáticas procura crear una perspectiva cultural de la disciplina de las Matemáticas, dotar de rostro humano a los conceptos matemáticos, generar motivación estudiantil, contextualizar conocimientos en situaciones históricas precisas y desarrollar capacidades que el trabajo con la historia apoya (capacidad de comunicación matemática, establecimiento de conexiones con otras disciplinas o dentro de las mismas Matemáticas). También busca complementar los otros ejes curriculares (Ruiz, 2013, pp. 40, 41).

Conocimientos, habilidades y procesos

Este currículo busca el dominio de conocimientos y la generación de habilidades en torno a los mismos, pero a la vez y de manera central, la construcción de capacidades transversales matemáticas que se alcanzan en el mediano y largo plazo: de razonamiento y argumentación; de representación; de comunicación; de resolución de problemas y de conexión. Las habilidades se diferencian entre específicas y generales. Las primeras son para desarrollar en periodos cortos de tiempo mientras que las últimas en plazos mayores. La integración de habilidades se debe hacer mediante problemas cuidadosamente seleccionados, para desencadenar los aprendizajes deseados. Pero, como aclara Ruiz (2013, p. 31), “a pesar de la relevancia que se le da a las capacidades (habilidades, competencia), no se plantea la organización de sus planes de estudio específicos (malla curricular) por medio de competencias, ni tampoco la acción de aula (planeamiento, lección y evaluación) partiendo de competencias generales transversales. No es un currículo por competencias. La organización de la malla curricular se realiza mediante los conocimientos y habilidades para las cinco áreas matemáticas mencionadas anteriormente.

También se asume que las capacidades cognitivas superiores, generales y transversales se construyen en la mediación pedagógica, es decir, en la acción de aula, desarrollando ciertas acciones transversales definidas aqui como procesos (Razonar y argumentar; Plantear y resolver problemas; Comunicar; Conectar; Representar) y tareas colocadas en varios niveles de complejidad.

<table>
<tr><th colspan="3">11º Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr><td>**Geometría analítica**
• Simetría axial
• Imagen
• Preimagen</td><td>1. Determinar ejes de simetría en figuras simétricas.
2. Identificar *elementos homólogos* en figuras que presentan *simetría axial*.
3. Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano.
4. Resolver problemas relacionados con la simetría axial.</td><td>▲ Se puede introducir el tema de forma intuitiva, con diferentes estrategias. Una de ellas es llevando a la clase diferentes imágenes y realizando dobleces de papel, para observar si coinciden todos los elementos.


Imagen con derechos adquiridos por el MEP.
Otra estrategia sería utilizar un espejo para mostrar la simetría de una figura, por ejemplo con la letra mayúscula Y:</td></tr>
</table>

Figura 2: Ejemplo de la malla curricular.

Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012)

El área de Relaciones y Álgebra y el pensamiento algebraico

Por lo general, un curso tradicional de relaciones y álgebra tiende a concentrarse en la manipulación de símbolos con algunas aplicaciones artificiales con poca conexión con el mundo real. Uno de los focos de estos nuevos programas de estudio de Matemáticas, consiste en desarrollar el algebraico funcional, que potenciará a los estudiantes generalicen experiencias con números y cálculos, formalicen ideas matemáticas utilizando símbolos, exploren conceptos de patrones y de funciones, y modelen fenómenos del mundo real.

El pensamiento algebraico funcional permea toda la matemática y es fundamental para hacer matemáticas que son importantes y útiles para la vida real. Las grandes ideas contempladas en los programas, en el área de Relaciones y Álgebra, son:

- El álgebra es útil para generalizar la aritmética y representar patrones.
- Los patrones pueden ser reconocidos, extendidos y generalizados.
  Los patrones son ciertas regularidades que pueden observarse en algunas situaciones reales o no y modelar matemáticamente. Algunos matemáticos consideran que la matemática es la ciencia de patrones. Las matemáticas son el estudio de diversos tipos de patrones que incluyen números, figuras, símbolos y operaciones. Los patrones ayudan a explicar y a predecir ciertos fenómenos.
- Los métodos utilizados para calcular y las estructuras numéricas pueden ser generalizadas.
- Función es un concepto central en las matemáticas. Muchos fenómenos físicos, químicos, económicos y sociales son modelados por funciones.

En este programa, el pensamiento algebraico y funcional es introducido gradualmente a partir del primer grado de la enseñanza primaria y los cuidados pertinentes son tomados en las indicaciones puntuales y metodológicas para evitar conflictos con los cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico de los estudiantes.

Principales cambios curriculares

Los cambios más importantes en los nuevos programas de matemática, respecto al programa anterior, son los siguientes:

Primer Ciclo (grados 1, 2 y 3)

Para el primer ciclo de la enseñanza primaria, los principales cambios son:

- El reconocimiento de patrones: en sucesiones numéricas; sucesiones con objetos geométricos; manipulación con objetos matemáticos.
- La introducción temprana y paulatina de la noción de variable, empezando con un valor faltante en una expresión o en una tabla.
- El uso de distintas representaciones matemáticas para los objetos matemáticos.
- La organización de la lección (los cuatro momentos de la lección: propuesta de un problema; trabajo estudiantil independiente; discusión interactiva y comunicativa; clausura o cierre; Programas de Estudio Matemáticas (2011, pp. 51-53)).

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es desarrollar en cada estudiante la comprensión de patrones y relaciones, la capacidad para representar y analizar situaciones matemáticas dadas y la habilidad para utilizar estos conocimientos para resolver problemas en varios contextos. La introducción temprana de relaciones, patrones y manipulación simbólica posibilitará una mayor articulación con los ciclos que siguen y desarrollará una forma de pensamiento matemático necesaria para la construcción de conceptos relacionados con las funciones.

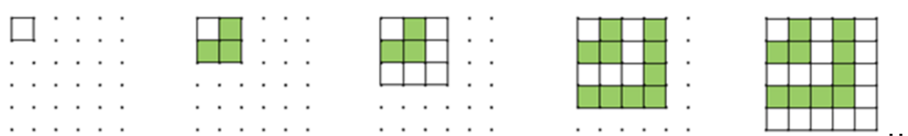
En primer grado los estudiantes pueden describir verbalmente las regularidades encontradas en los patrones. Estudiantes del primer ciclo deberían desarrollar la habilidad para predecir el siguiente elemento en una sucesión, examinando un conjunto específico de ejemplos

-  …
- *A, B, C, A, B, C, A, B, C,* ……
- 1, 5, 9, 13, 17, □

Segundo Ciclo (grados 4, 5 y 6)

Partiendo de los conocimientos y habilidades desarrolladas en el primer ciclo, principalmente las relacionadas con los patrones, la utilización de distintas representaciones para los números naturales y la identificación de expresiones matemáticas que representan relaciones entre cantidades, se introducen nuevos conceptos estrechamente relacionados con el lenguaje algebraico y el funcional, como por ejemplo la relación de proporcionalidad directa, razón y proporción. Además, aumenta el grado de abstracción al iniciar la representación simbólica de cantidades matemáticas que varían.

En el segundo ciclo, los estudiantes deberían poder analizar patrones números o geométricos y expresarlos matemáticamente en palabras o en símbolos matemáticos, investigar la estructura de un patrón, organizar la información de forma sistemática y utilizar el análisis para generalizar relaciones matemáticas en el patrón.



Agrega 3 cuadrados   Agrega 5   Agrega 7

En la actividad anterior el estudiante podría concluir que la suma de los primeros números impares es un cuadrado perfecto.

Otro ejemplo, que fue utilizado en una de las capacitaciones para maestras de educación primaria es el siguiente:

> "Abajo se presentan secuencias de dibujos y en cada secuencia existen dos fichas que se mueven, siguiendo un patrón. Cada ficha puede moverse horizontalmente, verticalmente y en forma diagonal. El objetivo consiste en "descubrir" cómo se mueve cada una de las fichas (encontrar el patrón) y determinar en qué lugar queda cada una de las ellas en el último dibujo".

Figura 3: movimiento de fichas

La solución no es única pues existen distintos patrones de movimiento que conducen a un mismo estado final de la configuración de las fichas, y esto es fundamental en matemáticas: lograr obtener una misma conclusión mediante rutas o razonamientos distintos. Un posible patrón consiste en que la rana se mueva tres casas "celdas" en el sentido del movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 a la derecha 1 hacia abajo) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 1 a la izquierda 1 hacia abajo). Otra posibilidad es que la rana se mueva cinco casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 hacia abajo 2 a la derecha 1 hacia arriba) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el mismo sentido de movimiento de la rana o bien seis casas en el sentido contrario. Existen otros posibles patrones que conducen a la solución del problema: La idea central es que existen distintas estrategias para resolver un problema matemático.

Es recomendable utilizar distintas representaciones matemáticas. Por ejemplo, considere la tabla y las preguntas que siguen:

¿Qué perímetro correspondería a un lado del cuadrado de 17 cm? ¿Qué lado correspondería a un perímetro del cuadrado de 56 cm?

Perímetro del cuadrado (cm)	8	12	20
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5

Para sexto grado podría agregar la representación simbólica: ¿Qué perímetro correspondería a un cuadrado de lado *a* cm?

Otro problema utilizado en la capacitación de las maestras, y que es adecuado para estudiantes del sexto grado es el siguiente:

Según la Organización Mundial de la Salud, la cantidad adecuada de proteínas que debemos consumir diariamente es de 0,85 gramos de proteínas por kilogramo de peso. Complete la siguiente tabla que relaciona la cantidad diaria de proteínas con el peso de la persona:

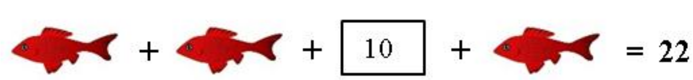
Peso de la persona (kg)	Cantidad de proteínas diarias necesarias
40	
45	
50	
60	
P	

Si en la etiqueta (declaración de nutrientes) de una caja de cereales se indica que contiene 3 gramos de proteínas, y se sabe que para David dicha cantidad corresponde a un 4% de la proteína que debe de consumir diariamente, ¿Cuántos gramos de cereal tendría que comer diariamente David para completar su cuota diaria de proteínas? Según el criterio de la OMS, ¿cuál es el peso aproximado de David?

Un concepto muy importante en la educación primaria es el de igualdad. Es importante utilizar la metáfora de una balanza para desarrollar este concepto, para que no provoque ruptura cognitiva en los estudiantes. En la página http://illuminations.nctm.org/ se encuentran varias actividades que "pesan" números, formas y hasta expresiones algebraicas. En todos los casos la igualdad se mira como un equilibrio entre los números, formas o expresiones algebraicas que se encuentran en los dos platos de la balanza.

También se recomienda utilizar la igualdad con valor faltante, como por ejemplo:

"Si los peces rojos cubren un mismo número en la figura que sigue, ¿cuál es este número?



Tercer Ciclo (años 7, 8 y 9)

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es el desarrollo de habilidades para trabajar con relaciones y funciones matemáticas básicas, profundizar su comprensión de la noción de variable y del lenguaje algebraico, la manipulación adecuada de expresiones algebraicas, reconocer y aplicar modelos matemáticos sencillos que involucren las relaciones de proporcionalidad (directa e inversa, en sétimo año), las funciones lineales (octavo año) y cuadráticas (noveno año).

También, se enfatizará el uso de múltiples representaciones matemáticas como tablas, gráficas y símbolos matemáticos. El uso de tecnologías adquiere aquí un lugar más relevante pues permitirá visualizar las gráficas de las relaciones que serán estudiadas. Por ejemplo, para obtener el modelo cuadrático para la población de Costa Rica (de 1960 al 2009) se utilizó una hoja de cálculo:

12. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Observe y analice los datos de la siguiente tabla:

Población de Costa Rica (en millones) en el periodo 1960-2009

Año	Población (millones)
1960	1,334
1965	1,583
1970	1,822
1975	2,052
1980	2.349
1985	2,699
1990	3,078
1995	3,479
2000	3,931
2005	4,396
2009	4,579

Fuente: http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des

Un modelo cuadrático para la población aproximada de Costa Rica es $P(t) = 11\ 418t^2 + 225\ 697t + 1\ 317\ 503$ donde $P(t)$ representa el tamaño de la población en el instante t, t el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año de 1960. Que cada estudiante proponga y resuelva un problema con la situación dada.

Se recomienda hablar acerca del aumento poblacional y sus consecuencias para el ser humano y el ambiente. Esto favorece la concientización acerca de una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible* y la *Educación para la salud*.

Figura 4: Indicación puntual de un problema matemático

Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012, p. 360)

Ciclo Diversificado (años 10 y 11)

Continuando con el pensamiento algebraico funcional desarrollado en los dos primeros ciclos de la educación primaria y el tercer ciclo de la educación secundaria, se procede a formalizar el concepto de función que fue trabajado en los ciclos anteriores como una relación entre variables. Se amplían las habilidades desarrolladas con las funciones y se incluyen otros tipos de funciones. Para la formalización del concepto, son introducidos algunos elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos.

Las funciones exponencial, logarítmica y la modelización constituyen el foco de 11º Año. Se estudian las funciones inversas y sus representaciones (gráfica y algebraica), así como su relación con situaciones contextualizadas. Este último aspecto es crucial: se busca que cada estudiante pueda identificar y algunos modelos que utilizan estas funciones, además de decidir cuál es el modelo más pertinente para representar una situación dada. El uso de tecnología digital, como por ejemplo software graficador, potencia la construcción de representaciones gráficas además de servir de apoyo en cálculos tediosos y complejos. Para las decisiones acerca del modelo más adecuado para una situación dada, es muy útil utilizar una hoja de cálculo para representar los datos en una tabla, graficarlos y calcular el coeficiente de determinación para el modelo. Todo esto favorece al desarrollo del pensamiento algebraico funcional y los procesos matemáticos que forman parte de este programa.

Conclusión

Los nuevos programas de matemática para la educación general básica y el ciclo diversificado en Costa Rica promueven el desarrollo del pensamiento algebraico funcional desde los primeros años de la educación primaria, en forma gradual, integrada, articulada, tomando los cuidados para evitar todo tipo de cortes didácticos o rupturas cognitivas que podrían ser producidas durante su puesta en praxis. Las indicaciones puntuales y metodológicas contenidas en la malla curricular, los complejos didácticos de apoyo a los docentes (materiales de apoyo, unidades didácticas de apoyo, unidades virtuales de aprendizaje (UVA) y las capacitaciones realizadas, coadyuvan a una transición más harmoniosa de los programas anteriores a los nuevos programas.

La estrategia de capacitación propuesta fue la realización de cursos bimodales, compuestos de sesiones presenciales y, además, trabajo por medio de una plataforma tecnológica (Moodle). El contenido de los cursos de capacitación correspondió al enfoque curricular e incluso una reproducción en su estructura de la estrategia pedagógica que propone el nuevo currículo (resolución de problemas con énfasis en contextos reales), ubicando en la plataforma situaciones problema sobre los cuales se desencadenarían las acciones didácticas para concluir con el cierre de la lección. Las capacitaciones contienen contenidos matemáticos y estrategias pedagógicas adecuadas para el trabajo del docente en el aula. El grupo de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (http://www.reformamatematica.net) seleccionó un grupo de líderes docentes, los capacitó, y estos se encargaron, juntamente con los asesores pedagógicos y nacionales, de capacitar a otros docentes, replicando la capacitación bimodal recibida. Los cursos bimodales del 2013 enfatizaron dos ejes disciplinares centrales del nuevo currículo: el uso de la tecnología y el uso de la historia de las matemáticas.

Debido a la profundidad de los cambios del nuevo currículo, que demandan ajustes de contenidos y enfoque, así como preparación docente, el proyecto elaboró un plan de transición para una implementación gradual de los nuevos programas. Durante el 2013 y 2015 el país desarrollará programas de transición para que en el 2016 se logre establecer el programa completo para los cuatro ciclos de la educación formal académica (quedando pendiente la educación técnica y la educación abierta). (Ruiz, 2013, p. 74)

El proyecto de Reforma también diseñó dos planes piloto en el 2012, para el primer ciclo educativo y para sétimo año. Su propósito fue identificar las virtudes y debilidades que veneraba la implementación curricular, para ofrecer recomendaciones a las autoridades ministeriales, asesores y docentes. Fueron elaborados y aplicados instrumentos de percepción docente en diversos momentos, instrumentos de observación de aula y entrevistas a asesores, además de utilizar la plataforma Moodle para conducir, apoyar y administrar los grupos piloto (Ruiz, 2013, p. 75).

Para finalizar, el proyecto realizará, dentro de un corto plazo, cursos enteramente virtuales, diseñados a partir de los materiales elaborados para los cursos bimodales. Su propósito es proporcionar más medios para que los docentes puedan capacitarse, para repasar lo que se estudió en los bimodales o para estudiar esos temas si no se tuvo la oportunidad de participar en aquellos, aprovechando las facilidades que ofrece la Internet.

Referencias y bibliografía

Bastable, V., Schifer, D. (2007). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. L., Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children´s Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, pp. 669-705.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic Thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.

Drijvers, P., Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Filloy, E., Rojano, R. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 2, 19-25.

Godino, J. (2003). Matemática y su Didáctica para Maestros. Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros.

Herscovics, N., Kieran (1980). Construction meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, vol. 73, pp. 572-580.

Herscovics, N., Linchevski, L., C. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 27(1), 59-78.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. En Hart, K. (Ed.): *Children´s Understanding of Mathematics*, pp. 11-16. London: Murray.

Malara, N. A., Navarra, G. (2003). *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna: Pitagora Editrice.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM. Reston, VA.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA.

Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.

RAND Mathematics Study Panel (2003). Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic reseearch and development program in Mathematics Education. Santa Mónica, CA: RAND.

Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Año 8, Número Especial.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. (2011). El Carácter Algebraico de la Aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula. Buenos Aires: Paidos.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación. *Números, 77,* pp. 5-34.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l´apprentissage de l´algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l´informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Fracciones y números fraccionarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana.

Dra. Celia Rizo Cabrera
Centro de Investigación en Matemática Educativa.
Universidad Autónoma de Guerrero.
México.
celrizo@yahoo.com.mx
Dr. Luis Campistrous Pérez.
Centro de Investigación en Matemática Educativa.
Universidad Autónoma de Guerrero.
México.
celrizo@yahoo.com.mx

Resumen

En la ponencia se discute el problema del tratamiento de las fracciones en la escuela básica y las dificultades que este concepto entraña para los alumnos. En particular se analiza el problema de la distinción entre los conceptos de igualdad y equivalencia en el trabajo con las fracciones, la posibilidad y necesidad de introducirlos a ambos y los obstáculos que puede representar.
Finalmente se discute la forma que este problema ha sido enfrentado en la escuela cubana y la solución que se dio al problema en ocasión del último perfeccionamiento de la escuela de Educación General en Cuba. En particular se insiste en cómo lograr la diferenciación de los conceptos de fracción y número fraccionario y la necesidad de introducirlos, así como los trasfondos teóricos que hay detrás de ello.

Palabras clave: Fracciones, Números fraccionarios, primaria cubana.

Introducción

Algunas preguntas que se pretende responder en esta conferencia son las siguientes:

1. ¿Qué es una fracción?
2. ¿Qué relaciones se pueden establecer entre las fracciones?
3. ¿Cuáles son los principales que errores que se introducen en la formación del concepto de fracción en la escuela elemental (quinto y sexto grado)?
4. ¿Qué papel puede jugar la inclusión de otros conceptos como es el caso del concepto de número fraccionario? ¿En qué se diferencia una fracción de un número fraccionario?
5. ¿Cuál puede ser una introducción que contemple la introducción del concepto número fraccionario?
6. ¿Qué particularidades tiene la introducción didáctica en el caso de la igualdad y la equivalencia de fracciones?
7. El caso de la escuela primaria cubana.

A modo introductorio cabe destacar que uno de los conceptos que más dificultades presenta en la escuela básica es el de fracción. Estas dificultades en el trabajo con fracciones han sido abordadas en numerosas investigaciones y trabajos realizados en diferentes países. No obstante, la experiencia en la práctica, recogidas en investigaciones recientes al menos en el caso de México, muestran que este problema sigue sin resolverse en la escuela y que los alumnos de la educación básica siguen arrastrando las dificultades que históricamente se han presentado en el tema. En relación con el mismo, una de las investigadoras que más ha profundizado en el tema en los últimos años, la Dra. Isabel Fandiño, llegó a establecer 14 significados distintos para el concepto mediante la revisión de las investigaciones en diferentes periodos (Fandiño, 2005, citado por Flores, 2010). Estos catorce significados se enuncian a continuación:

- ✓ **La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua y a veces discreta.**
- ✓ **La fracción como cociente.**
- ✓ **La fracción como relación.**
- ✓ **La fracción como operador.**
- ✓ **La fracción como probabilidad Duval.**
- ✓ **La fracción en los puntajes.**
- ✓ **La fracción como número racional.**
- ✓ **La fracción como punto de una recta orientada.**
- ✓ **La fracción como medida.**
- ✓ **La fracción como indicador de cantidad de elección.**
- ✓ **La fracción como porcentaje.**
- ✓ **La fracción en el lenguaje cotidiano.**
- ✓ **La conceptualización de las fracciones y la teoría de Vergnaud.**
- ✓ **La conceptualización de la fracción: signo-objeto de Duval.**

No obstante lo que se ha trabajado en diferentes partes del mundo acerca del concepto de fracción, indudablemente es uno de los conceptos que más dificultades presenta para ser comprendido y bien utilizado en la práctica por los alumnos. Algunas manifestaciones de esas dificultades, tomadas en este caso en el Estado de Guerrero en México, en investigaciones realizadas por los autores de este trabajo, bajo el concurso de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, se ilustran a continuación.

En la escuela cubana se ha tratado de resolver esta situación, a partir del hecho de que en realidad en el tratamiento de las fracciones se presentan dos conceptos fundamentales: el de f**racción como un simple par de números naturales que expresan partes de una unidad que ha sido dividida en partes iguales** y la cual se le atribuyen diferentes significados, y el de **la fracción como clase** (posteriormente haremos una resignificación de esta denominación) de fracciones "equivalentes a una dada" que ya solo no representa una división de un todo en partes iguales, sino todas aquellas que pueden representar esa misma situación.

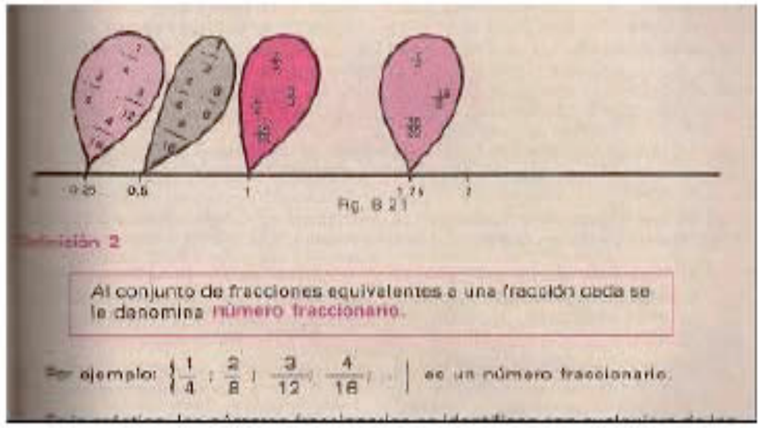
En el caso de la escuela cubana, el tratamiento este nuevo dominio numérico al que se denomina **conjunto de los números fraccionarios**, para diferenciarlo del de las fracciones, se inicia formalmente en el quinto grado de la escuela primaria El mismo se continúa en sexto grado y en séptimo se sistematiza lo de sexto grado y se concluye. Se caracteriza por el intento de hacer una implementación didáctica, acorde a las edades (12 años en adelante) sin perder el carácter científico de la enseñanza que es un principio de la escuela cubana.

La vía utilizada para la elaboración de este concepto es partir de problemas de la práctica que ilustren la necesidad de tener otros números, además de los naturales y para ello se sigue una vía didáctica con una fundamentación matemática muy clara:

- ✓ Se **introducen las fracciones como partes de un todo**, significado que está muy relacionado con la necesidad práctica de dividir en partes iguales cantidades enteras (lo que se le denomina el todo).
- ✓ Aparece la situación de que **hay fracciones diferentes que representan la misma parte de un todo**. Eso es un inconveniente para el significado del concepto y para su uso porque, aunque nos posibilita operar con fracciones que no sean de igual denominador, también constituye un problema muy importante para la práctica. Precisando la idea anterior se tiene que si uno quiere dividir algo en partes iguales no siempre lo puede hacer directamente: es más fácil dividir a la mitad un pastel, después en la mitad de las mitades (en cuartos) y así sucesivamente, hasta llegar a la cantidad de partes iguales que aproximadamente satisfaga el número de posibles comensales. Al final se tendrán en n veces, 1/n partes iguales.
- ✓ Se introduce el concepto de fracciones equivalentes para aquellas que se obtienen unas de otras por ampliación o simplificación y se precisa que **dos fracciones son equivalentes si y solo si sus productos cruzados son iguales**.
- ✓ Se destaca el hecho de que las fracciones equivalentes representan la misma parte de un todo y se introduce la notación decimal para representar las clases de equivalencia.
- ✓ Se denomina «número fraccionario» al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Matemáticamente hablando, este paso significa introducir en el conjunto de las fracciones la relación de «ser equivalentes» para el caso en que sus productos cruzados sean iguales. Se tiene así el concepto de «números fraccionarios» que es asignado al conjunto de las «clases de equivalencia» de las fracciones que son equivalentes entre sí (sus productos cruzados son iguales).

- ✓ Se introduce la notación decimal que es la que se corresponde exactamente con el concepto introducido, para el caso de fracciones de denominadores expresados como potencias de 10.

Esta idea de **clase de equivalencia** se materializa en el gráfico siguiente, que aparece en la página 55 del libro Matemática sexto grado (1990) de la escuela cubana, y que en la actualidad sigue vigente.



Como se puede apreciar en el referido gráfico, a continuación del mismo aparece de inmediato un recuadro con la siguiente definición:

Definición 2:

Al conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada se le denomina <u>número fraccionario.</u>

Se da a continuación un ejemplo de un **número fraccionario**, que copiado textualmente lo expresan, en la página 55 del libro de texto, tal como aparece en el gráfico anterior:

Por ejemplo: $\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{8},\frac{3}{12},\frac{4}{16},\ldots\right\}$ **es un número fraccionario.**

A continuación, en esa misma página se acompaña el ejemplo anterior con la siguiente indicación que es la que posibilita su utilización en la práctica:
"En la práctica, **los números fraccionarios se identifican con cualquiera de las fracciones que lo forman, por ello estos números también se representan por fracciones, escritas como fracciones comunes o en notación decimal".**

A partir de ese momento, se establece que al conjunto de los números fraccionarios se le denomina por Q y se precisa que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de Q."

Se puede observar en el referido ejemplo que sobre un «rayo numérico» se han representado fracciones equivalentes a 0,25 (1/4), a 0,5 (1/2), y así sucesivamente, que se agrupan en una especie de globo que **representa la clase de equivalencia respectiva.**

$$\frac{1}{4}\ \left(\frac{1}{4},\frac{2}{8},\frac{3}{12},\ldots\right)$$

A cada una de estas clases de equivalencia se hace corresponder un único punto del rayo numérico. En este grado de la escuela cubana ya se introducen las definiciones y la de este concepto es la segunda definición de este capítulo de geometría. Como se aprecia, se representa un número fraccionario en forma conjunta para hacer visible que el número en cuestión no es más que «el conjunto de las fracciones equivalentes a… ».

Esta introducción permite atender al principio del carácter científico de la enseñanza, rector en la educación cubana, y evitar obstáculos didácticos que se deben fundamentalmente a la forma en que históricamente se ha tratado el tema en la escuela básica. No obstante, reiteramos que esto requiere una implementación didáctica adecuada para favorecer la comprensión de los alumnos de una manera coherente y significativa para ellos porque es obvio que esta concepción tiene detrás un componente matemático fuerte que está algo oculto para los alumnos.

No obstante, así se pueden dar significados correctos desde el punto de vista científico a las operaciones con números fraccionarios y evitar el excesivo formalismo que genera el aprender reglas que carecen de un significado fundamentado en definiciones adecuadas y correctas desde el punto de vista de la Matemática como en el ejemplo antes dado de la definición 2. Por ejemplo es bien conocido el hecho de que en la escuela elemental lo normal es introducir la adición de fracciones mediante la "regla de los productos cruzados": $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ab+cd}{bd}$ pero no siempre se explica por qué debe hacerse así y por tanto se convierte en una regla que alumnos y maestros repiten sin una fundamentación adecuada y que, por tanto, se olvida con facilidad al punto que algo después los alumnos la han olvidado y ya no pueden calcular. Este hecho impacta la práctica escolar.

La utilización del concepto número fraccionario como clase de equivalencia permite explicar el proceso de adición y fundamentar su definición sin necesidad de recurrir a reglas que es preciso memorizar, en efecto basta escoger en cada número fraccionario (en cada clase) dos fracciones que tengan el mismo denominador y sumar en la forma natural que se infiere a partir del significado como parte todo, que es el que se prioriza en la presentación que se hace en la escuela cubana. De igual manera se procede con la sustracción.

Obviamente esta forma de introducir, desde edades tempranas, conceptos matemáticos que se sustentan en relaciones de equivalencia, que están por detrás de muchos de otros conceptos tales como la igualdad, el paralelismo, la semejanza, contribuye a la formación matemática de los alumnos y le da un carácter verdaderamente científico al proceso educativo. Con respecto a lo antes planteado, en muchas concepciones de lo que se hace en la escuela se refieren a este carácter científico, pero que no siempre se puede estructurar para hacer una implementación didáctica y comprensible para los alumnos.

Para finalizar es imprescindible destacar que la escuela cubana de educación general, de primero a decimosegundo grado, tiene un plan de estudios único y los libros son igualmente únicos elaborados, a partir de ese plan, por equipos de investigadores y maestros destacados que fueron seleccionados para ese trabajo, estos planes y su concepción fueron discutidos con maestros a lo largo de todo el país. Esta forma de implementación facilita la atención especializada que requiere la introducción de nuevos planes y programas, en el caso de Cuba en la que la educación es totalmente masiva y está estructurada de igual forma en todo el país.

Hay que tener en cuenta que, además, el **sistema** de atención metodológica a todos los maestros del país está organizado en función de estas nuevas concepciones y preparado previamente para poder ejercer esa atención con toda responsabilidad y cientificidad. En el caso del contenido escolar, los diferentes programas y textos se introdujeron paulatinamente a partir del año 1989 en forma escalonada: el primer grado se introdujo previamente; en 1989, 2°, 5°, 7° y 10°. Este esquema se mantuvo, finalmente el 4° quedó para ser introducido solo y cerró el ciclo. De este modo se garantizó la unidad de enfoque y contenido de 1° a 12° grados. Paralelamente se fue preparando a todo el personal involucrado en su implementación, desde la nación, las provincias y los municipios correspondientes.

Bibliografía

Campistrous, L. (1973). *Números fraccionarios, folleto para maestros.* Editorial del Ministerio de Educación de la República de Cuba.

Campistrous, L. Rizo, C. (2011). Algunas implicaciones de la filosofía marxista para la enseñanza de la matemática: el caso de Cuba. *Revista Iberoamericana de Educación*. N.º 56, pp. 179-199 (1022-6508)

Fandiño, I. (2009). *Las Fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos Cooperativa.* Editorial Magisterio Bogotá, Colombia.

Flores R. (2011). *Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. ALME 24 2011.

Quintana A. y Gort M. (2008). Los números racionales. Consultar en http://matematica.cubaeduca.cu/index.php?option=com_content&view=article&id=10878:8vou1tema1-sistematizacion-sobre-el-orden-y-las-operaciones-con-los-numeros-fraccionarios&catid=312&Itemid=73

Rizo, C. y otros (1991). *Matemática 5° grado Editorial Pueblo y Educación*. Cuba.

Rizo, C. y otros (1992). *Matemática 6° grado Editorial Pueblo y Educación*. Cuba.

Anexo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICA

Proyecto de Evaluación del Aprendizaje de las Matemátic

como Producto Final de la Escuela Primaria

M6

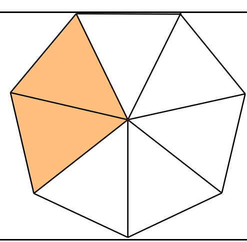
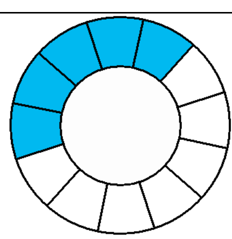
MATEMÁTICAS SEXTO GRADO

Curso 2010-2011

Querido alumno: Necesitamos saber lo que has aprendido sobre fracciones hasta el momento. Por esta razón te pedimos que realices las actividades que se indican. ¡Esfuérzate y trabaja lo mejor que puedas! ¡GRACIAS POR PARTICIPAR!

Nombre del alumno (a):		**Número de lista:**
Edad:	**Sexo: Masculino**	**Femenino:**
Nombre de la escuela:		**Clave:**
Fecha:		

1. Completa la siguiente tabla. **Ten en cuenta lo que has aprendido sobre fracciones.**

SE REPRESENTA	SE ESCRIBE	SE LEE
	$\frac{3}{5}$	
		
		Cuatro décimos
		

2. De un pastel dividido en **12 porciones iguales**, David se come **dos de esas porciones** y Amparo se come **una porción** del mismo.
   a) ¿Qué fracción del pastel se comió cada uno?
   b) ¿Qué fracción del pastel se comieron entre los dos?
   c) ¿Quién comió más pastel? ¿Por qué?
   d) ¿Qué fracción del pastel sobra?

3. Calcula lo que se te indica en cada inciso:

a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$

4. En una pizzería cortaron tres pizzas **en partes iguales** y de cada una de ellas queda lo que se indica en el gráfico. Si todo lo que queda de las tres pizzas estuviera dividido en octavos, ¿cuántos pedazos de 1/8 de pizza quedan en total?

$^1/_2$ (Una mitad) **$^1/_4$ (Un cuarto)** **$^3/_8$ (Tres octavos)**

5. En Chichihualco, Guerrero, los habitantes acostumbran a comprar leche en los establos. María todos los días compra 1.75 litros de leche para su familia, pero debe elegir las botellas donde el lechero se la entregará. En el establo sólo hay botellas vacías de 1 litro, ½ litro y ¼ de litro. Ayúdale a María a elegir, **de 2 formas distintas**, las botellas en donde se llevará la leche. Ten en cuenta que siempre las llevará completamente llenas de leche.

Primera forma:

Segunda forma:

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Introducción del Sistema Métrico Decimal en Colombia a mediados del siglo XIX

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

El propósito de esta comunicación es estudiar las dificultades de introducir el sistema métrico decimal (SMD) en Colombia hasta su adopción oficial a mediados del siglo XIX. Después de considerar las primeras metrizaciones en la exploración del territorio de la Nueva Granada se señalan la aparición de iniciativas de reconocimiento del nuevo sistema de medida en el marco de discursos patrióticos de las élites letradas, en el periodo de la independencia del régimen colonial. Enseguida se muestran las características de los sistemas híbridos de pesas y medidas que se instauraron en las primeras legislaciones republicanas. Se observará que este dualismo de la ley se encuentra presente incluso en el momento de adopción oficial del SMD en 1853. Luego se estudia la aparición de los primeros textos autóctonos en matemáticas escritos bajo la influencia del modelo de educación francesa, en los cuales el SMD se deduce lógicamente de los principios de la aritmética decimal. Finalmente se muestra que en esta producción intelectual de la élite, los conceptos de rigor conceptual y sentimiento patriótico aparecen indisolublemente ligados.

Palabras clave: historia de la aritmética, sistema métrico, elites, estado, Colombia.

Introducción

Este artículo es parte de un ensayo más amplio sobre las iniciativas de metrización emprendidas por las elites letradas y los dirigentes políticos en la Nueva Granada a lo largo de la primera mitad del siglo XIX. (Arboleda, 2013). En esta introducción vamos a resumir los principales antecedentes intelectuales, sociales y políticos de este periodo considerados en tal ensayo.

Empecemos por anotar que antes de que se introdujera la enseñanza y aprendizaje de la aritmética decimal en los colegios y universidades, a partir de los años 1830, el medio más corriente para la difusión informal del sistema métrico decimal (SMD) en Colombia fueron las prácticas empíricas de medición de exploradores y naturalistas. Humboldt fue tal vez el primero en utilizar el metro en su viajes por la Nueva Granada entre 1799 y 1803. No solo lo hizo utilizó personalmente sino que aconsejó a los criollos que importaran copias del patrón del metro, para lo cual les ofreció asesoría e intermediación con sus amistades científicas en Francia. Esta iniciativa temprana de apropiación y uso del metro fracasó, como posteriormente ocurriría con otras en el mismo sentido. Las circunstancias históricas de estos fracasos están relacionadas *grosso modo* con las vicisitudes de la empresa de organizar un estado republicano, dotado de los medios técnicos y políticos para introducir e imponer un nuevo orden de medida en un entorno social regido por los órdenes tradicionales de medición, fueran estos prehispánicos o monárquicos, de signo francés o español.

A Caldas y a otros criollos ilustrados de la elite no les era desde luego ajena la importancia de las metrizaciones. Lo sabían por su relación con exploradores europeos como Humboldt y por la lectura de obras científicas dentro del nuevo paradigma como la aritmética de Lacroix o la física de Haüy. Pero el sello característico de su oficio de ingenieros y naturalistas, su *habitus*, y el entorno en el que lo ejercían habían sido moldeados para reproducir la tradición de las medidas francesas (toesas y pies). Más recientemente, en la segunda mitad del siglo XVIII, habían adoptado el sistema unificado de medidas castellanas (vara de Burgos) siguiendo el mandato de la Corona, pero sobre todo por las evidencias técnicas de su aplicación en nuestro territorio que encontraron en observaciones científicas y relaciones de viajes como las de Jorge Juan. El cambio cultural en dirección de las nuevas medidas francesas empezará a manifestarse en la generación siguiente de letrados que estaban destinados a fungir como ingenieros, políticos y dirigentes de la república a partir de los años 1830.

El caso más notable es la ardorosa defensa que hizo el joven Lino de Pombo de la importancia del metro como patrón de medida universal en una sociedad que empezaba a considerar la manera de organizarse como república independiente. Este punto de vista aparece en sus conclusiones de geografía y astronomía del Colegio del Rosario en un momento en que la Suprema Junta de Santafé de 1810 se planteaba la organización del estado naciente de Cundinamarca. No obstante esta idea de unificación de medidas alrededor del metro una vez más se reveló prematura. El orden de medida que resultó viable para la república, según la ley de 1821, no fue el SMD, sino un sistema hibrido de medidas antiguas y medidas castellanas que preservaban las prácticas de la población en las regiones.

Esta determinación política no obedeció a un prurito meramente conservador de los dirigentes políticos o a su desconocimiento de lo que representaba para el nuevo régimen metrizar la nación. Existen evidencias de que por entonces el tema era objeto de estudio a distintos niveles y que las prácticas itinerantes de ingeniería y de reconocimiento del territorio, como la célebre misión Boussingault, hacían un uso cada vez más frecuente del SMD. Más bien primó el criterio de que el sistema unificado "debía responder a las circunstancias del momento", en el sentido de atenuar el tremendo gasto económico, social y político que conllevaba introducir este tipo de homologación en la diversidad de prácticas consuetudinarias de medida. Pensemos solamente en lo que significaba importar del extranjero prototipos de las nuevas pesas y medidas, distribuirlos en un número suficiente en las provincias y garantizar el monopolio de su uso en las principales prácticas públicas y privadas.

La ley de 1836 representó un nuevo giro en la tuerca de la unificación. La hibridización resultó entonces de adoptar indirectamente el SMD como equivalente para el establecimiento de un sistema de pesos y medidas nacionales basado en la vara y la libra granadinas. La ley permaneció como letra muerta a lo largo de diez años hasta que la primera administración de Tomás Cipriano de Mosquera (1844-1849) comisionó a su ministro Lino de Pombo para hacerla entrar en vigor, precisamente en el aspecto más crítico de su aplicación, la construcción y apropiación regional de patrones. Pombo también se encargó de introducir la decimalización en la reforma monetaria con el fin de corregir el desorden imperante en las transacciones del mercado interno y en las exportaciones. El antiguo colegial del Rosario se enfrentaba ahora no a la invención intelectual del metro sino a hacerlo realidad en las prácticas de la sociedad. Para ello tuvo que aprender a enfrentar desde el gobierno las luchas de resistencia a su universalización por parte de agricultores, comerciantes, mineros y líderes políticos regionales.

En este trabajo se empezará por examinar la aparición de un nuevo estilo de hibridización de medidas en la ley de 1853. Esta modalidad de adopción restringida del SMD era lo viable dentro de las condiciones sociales y políticas de organización del Estado durante esos años. Se limitó su aplicación a los trámites oficiales de pesos y medidas y se autorizó el uso de los sistemas anteriores de pesos y medidas en todo lo relacionado con las actividades privadas. Aunque ello será objeto de un estudio posterior, cabe recordar que todavía a finales del siglo XIX la unificación centrada en el metro era todavía una asignatura pendiente en Colombia. El enfoque de hibridación de la ley de 1853 no había logrado garantizarle al Estado la universalización del SMD en el territorio de la república, pues en distintos lugares predominaba el uso de unidades de medida prehispánicas y españolas con sus diversas variantes nacionales.

Además de los recursos de ley, el SMD contó con otros instrumentos de difusión. A partir de mediados del siglo se asistió en el país al florecimiento de una gran variedad de discursos sobre el SMD como sistema teórico conceptual y en sus aplicaciones a las prácticas públicas y privadas de medición. En este trabajo se analizarán estos discursos nacionales y extranjeros para constatar la formación de una cultura de la élite sobre el SMD con dos componentes: como sistema de conceptos que se deducen lógicamente de la aritmética decimal, y como orden racional de medida con una instrumentación social específica en el contexto del nuevo régimen. Esta doble cultura se formó en la lectura de autores franceses y se encarnó en la escritura de los primeros textos autóctonos de aritmética y álgebra a cargo de los profesores y primeros egresados del Colegio Militar (1848-1851). Se mostrará que en esta producción intelectual de la élite, rigor conceptual y sentimiento patriótico aparecen indisolublemente ligados. Esta será la tendencia dominante incluso cuando el discurso parece encerrarse herméticamente alrededor de una novedad epistemológica, como fue el caso de la construcción de los irracionales en la aritmética de Liévano. Por último, se interpretará esta propiedad dual como expresión del propósito de la élite de ascenso social a través de las matemáticas y de afirmación de autonomía corporativa con respecto al Estado.

La metrización fragmentada: el carácter dual de la ley de 1853 para la adopción oficial del SMD

A veces se da por hecho que la ruptura definitiva con el sistema español de pesos y medidas, por lo menos de manera formal, se dio con la ley del 8 de junio de 1853. (Kalmanovitz, 2008; p. 37). Sin embargo, el texto de adopción oficial del SMD todavía autoriza que en las transacciones no oficiales se puedan continuar realizando prácticas de intermediación y reinterpretación de las nuevas unidades de medida con las antiguas medidas españolas. En virtud del primer artículo se adopta "el sistema métrico decimal francés para todos los actos y efectos oficiales". En el articulo tercero se determina que "(desde) el día primero de enero de 1854 no se usará en los actos oficiales de otros pesos, pesas y medidas que los que se establezcan conforme al sistema decimal indicado". El ejecutivo se fijaba este plazo para fabricar los patrones de pesas y medidas que debían distribuirse a las provincias y localidades para hacer efectiva la implementación de la ley. En el artículo 4º se aclara el por qué de la insistencia en que la adopción del sistema métrico valía únicamente para los actos oficiales: "Los particulares pueden emplear en sus transacciones los pesos y medidas que a bien tengan." [1]

Como se mencionó antes, la implementación de la decimalización monetaria y el SMD en la administración de Mosquera se enfrentó a incomprensiones prácticas y luchas de resistencia en las provincias por parte de mineros, comerciantes y agricultores. De manera que en las condiciones precarias en que todavía se hallaba el Estado a comienzos de los años 1850 para ejercer el monopolio del poder frente a las provincias, parece que el legislador prefirió proceder con cautela atendiendo los reclamos de los jefes políticos por un manejo dual de los órdenes antiguo y nuevo de medida. La ley concede entonces que los ciudadanos pueden continuar utilizando libremente las unidades de medida tradicionales con tal de someterse al orden de la metrización cuando las transacciones privadas requieran de formalización oficial sea en asuntos de gobierno, en la gestión del comercio o en la economía exportadora. Para implementar el orden dual de medidas, como en la administración de Mosquera, los ciudadanos dispondrán de cuadros de conversión de "medidas granadinas" en "medidas francesas" con sus aplicaciones pertinentes a las actividades sociales y económicas. Estos cuadros hacían parte de la circular dirigida a los gobernadores de las provincias remitiéndoles la ley y el decreto orgánico.

El tono de la circular es persuasivo y busca ostensiblemente granjearse el apoyo de los jefes políticos en tres asuntos que eran motivo de discordia desde la vigencia de la ley de 1836. Frente a las quejas de que el nuevo sistema era artificial e incomprensible con respecto al antiguo, todavía vigente, la circular muestra que tanto la vara como el metro se definen como partes alícuotas del meridiano terrestre. Es decir, que ambas unidades de medida son invariantes, objetivas y comparables. Frente a la objeción de que se estaba imponiendo en el país un orden de medida de origen francés, la circular argumenta que la ventaja principal del sistema métrico, su claridad y sencillez, consistía en su fundamento en las fracciones decimales, una teoría clara, simple y uniforme, a nivel de su nomenclatura y de su estructura. Si Francia lo adoptó desde

[1] Ley del 8 de junio de 1853. *Gaceta Oficial*, No. 1548 del 16 de junio de 1853, p. 501. Ver el folleto (*Sistema Métrico Decimal de la Nueva Granada*, 1853) que contiene la ley, el Decreto orgánico del sistema métrico decimal del 1º de julio de 1853, la circular relativa al decreto anterior de la misma fecha, un par de "Cuadros métricos" con las equivalencias de pesos y medidas granadinas en el SMD francés y una sección con ejemplos de aplicación de estas conversiones a situaciones prácticas.

1791 fue precisamente porque por años "había experimentado todos los inconvenientes de un régimen complicado y arbitrario" como el que derogó la ley de 1853 y su decreto orgánico.

La circular explica mediante una tabla que la escala de múltiplos y submúltiplos y la nomenclatura de la metrización decimal eran más armónicas y uniformes que las medidas anteriores. En fin, frente a la crítica de las provincias de que el gobierno no estaba preparado para hacer operativa la ley al no poder garantizar la distribución oportuna de copias de los nuevos prototipos sin costos excesivos para los usuarios, la circular del 1º de julio firmada por el Secretario de gobierno Rafael Núñez concluía con una promesa de dudoso cumplimiento:

> El poder ejecutivo dispondrá cuanto antes la fabricación de las correspondientes pesas y medidas; y tan luego como esto se verifique esta Secretaría hará de ellas la conveniente distribución, a fin de que desde el día 1º de enero próximo comience a regir, en todas sus partes, el decreto orgánico del sistema métrico nacional.

Con todo y ello, esta argumentación en pro del nuevo sistema no pasaba de ser un discurso probablemente razonable pero nada práctico, pues la ley abría la puerta para que se mantuvieran las costumbres de aplicar las medidas vigentes y para que el SMD no fuera adoptado como un imperativo en todos los actos públicos y privados de la república. Es cierto que la circular hablaba en términos del "sistema métrico nacional", pero el artículo 4º de la ley relativizaba el alcance de la metrización de medidas como política de Estado, y permitía que el metro fuera tenido en cuenta solo como referente para las equivalencias con las medidas granadinas de uso consuetudinario. La ley no se proponía crear condiciones para garantizar la "nacionalización" del sistema francés, propiciando por ejemplo la búsqueda de un estado de equilibrio en la uniformidad y universalidad del uso de la nueva unidad en las prácticas de medida en los territorios y comunidades. Por ello tal vez era más apropiado el concepto de "sistema métrico oficial de la República" empleado en el artículo 1º del Decreto orgánico.

No hay nada en este proceder que resulte extraño. La historia de la difusión y apropiación de teorías científicas en los siglos XVIII y XIX muestra que la nueva opción teórica representada por ejemplo en un texto de física de newtoniana (o el SMD basado en la aritmética decimal) tuvo que interactuar con condiciones específicas del medio local (intermediaciones con otros sistemas teóricos o reinterpretaciones), para poder conquistar un mínimo consenso favorable. Luego tuvo que recorrer un largo trecho para convertirse en opinión paradigmática estable y consistente, capaz de funcionar como pensamiento vivo en la sociedad. Es por ello que la explicación histórica de la manera como un discurso científico o un texto se localizan en la periferia se convierte en una metodología privilegiada para reconstruir nuestra historia cultural y científica en un período determinado. (Arboleda, 1987).

A pesar de su alcance restringido, la ley de 1853 es un discurso prescriptivo sobre la metrización del estado en la sociedad colombiana. Pero este discurso no fue el único vehículo de difusión del SMD en Colombia. Al lado suyo es necesario considerar otros discursos académicos originados en sectores ilustrados de la sociedad con autonomía relativa frente a las políticas de estado. Hay que recordar que por la misma época en que se estableció esta normativa oficial ya existía un acumulado de casi medio siglo de prácticas discursivas sobre el SMD como sistema teórico conceptual y aplicaciones a prácticas públicas y privadas de medición.

Los discursos de la élite sobre el orden racional de las medidas francesas

Antes hemos mencionado la importancia de textos de física y ciencias naturales como el de Haüy en la introducción de una cultura temprana de la metrización en el país. En efecto, estos textos contenían exposiciones parciales del SMD que, además de despertar el interés en nuestras élites sobre la conveniencia de introducir el sistema francés, favorecieron la elaboración de las primeras valoraciones sobre su importancia social y política. En este mismo sentido hay que destacar las lecturas privadas de obras extranjeras y nacionales que fueron vectores de transmisión y de creación de una opinión favorable al SMD en el país. La más importante fue (Lacroix, 1797)[2], un texto de aritmética que llegó en forma temprana a España y a sus antiguas colonias en América, en particular a la Nueva Granada, precedido de la fama de servir en la enseñanza en las instituciones educativas de Francia. Dado el número de ejemplares que aún se conservan en nuestras bibliotecas en distintas ediciones (sean del original o de su traducción al español por Rebolledo), esta obra fue sin duda estudiada por nuestros letrados a nivel particular y muy seguramente expuesta de alguna forma en sus actividades de enseñanza de la aritmética en los establecimientos de Bogotá y las provincias.[3]

Algunos de estos letrados bien pudieron ser Lino de Pombo y Aimé Bergeron en sus cursos de aritmética en el Colegio Militar (1847-1854) que dieron lugar a la primera cohorte de textos modernos de aritmética publicados en Colombia. (Bergeron, 1848). (Pombo, 1858). Recordemos que el Colegio Militar fue una de las joyas de la corona de la administración Mosquera. El Colegio fue creado en 1847 mediante una ley concebida y tramitada por el mismo Pombo con el propósito de formar "la élite de oficiales científicamente preparados para el escalafón general, para el cuerpo de ingenieros, la artillería, la caballería, la infantería y los ingenieros civiles." (Helguera, 1993). Así mismo, además de liderar proyectos de exploración científica del territorio y desarrollo de la infraestructura nacional, estos hijos distinguidos de las familias neogranadinas ocuparían poco después posiciones destacadas en la administración pública y serían responsables de reproducir el ciclo de la formación de ingenieros matemáticos en las instituciones republicanas[4].

A comienzos de los años 1850 el texto de Bergeron era de obligada referencia en los estudios de "aritmética razonada" en establecimientos educativos como el *Liceo de Familia* en donde se formaba lo más destacado de la élite bogotana bajo la orientación de profesores que a su vez habían sido ex presidentes, próceres o hijos de próceres de la República. El responsable de esta enseñanza era el director del plantel, Antonio B. Cuervo, hijo Rufino Cuervo,

---

[2] Hasta 1848 se reportan al menos veinte ediciones revisadas y corregidas en francés. Es el primer volumen del *Cours élémentaire de Mathématiques pures*, que incluyó otros volúmenes en Álgebra (1800), Geometría (1799), Trigonometría rectilínea y esférica, y aplicaciones del Álgebra a la Geometría (1798). El análisis de cada uno de estos volúmenes se encuentra en (Lacroix, 1805).

[3] El más reciente de los autores que comentan la divulgación de Lacroix en Colombia a lo largo del siglo XIX y hasta el primer tercio del siglo XX es (Poveda Ramos, 2012; pp. 31-42, 281-283).

[4] El capítulo seis de (Helguera, 1993) sigue siendo una referencia obligada sobre el periodo fundacional del Colegio Militar (1848-1854). Entre los estudios históricos más recientes con información actualizada sobre esta primera etapa del colegio, la formación de Pombo y su función en la enseñanza de las matemáticas, se destacan (Poveda Ramos, 2012), (Sánchez, 2007) y (Sánchez y Albis, 2012).

Vicepresidente de la República en la primera administración de Mosquera. Se sabe por el folleto de invitación al certamen, que los alumnos de Cuervo que se presentaron al examen de final de curso de 1856 debieron dar cuenta de los contenidos de la aritmética de Bergeron. También se sabe que el panel de examinadores estaba presidido por Lino de Pombo y que de él hacían parte dos ingenieros graduados del Colegio Militar, Ramón Guerra Azuola y Indalecio Liévano.[5]

Como ocurrió en otros países de Iberoamérica los primeros textos autóctonos de aritmética siguieron el enfoque del libro de Lacroix en lo concerniente a sustituir las complicadas operaciones con fracciones de denominadores diferentes por la exposición de la teoría de la aritmética decimal, para luego deducir de esta teoría las reglas y aplicaciones del SMD. Tanto Bergeron como Pombo adoptan en sus obras la siguiente presentación de Lacroix que era corriente en los círculos matemáticos de los letrados a finales de los años 1840: "Una vez que se hayan desarrollado suficientemente los procedimientos del cálculo con fracciones decimales, corresponde mostrar su aplicación a las cuestiones más corrientes en las relaciones sociales, cuyos elementos se encuentran en las diversas partes del sistema métrico". (Lacroix, 1816; pp. 236-237).

Así mismo, los criollos compartían sin duda la confianza que expresaban los *Essais* en que el poder ineluctable del orden racional, característico de las nuevas medidas, terminaría por imponerse a los prejuicios arraigados en las malas costumbres debidas al uso de las antiguas medidas. (Lacroix, 1805). Esta idea tenía mucha fuerza desde el mismo momento de adopción del SMD por la república. Ya hemos visto que Lalande se había manifestado en los mismos términos en su lección de 1795 de la *École Normale Supérieure*. Tal vez estos mismos criollos letrados, dado su papel social de "patricios" republicanos (Helguera, 1958; p. 71),[6] no estarían lejos de compartir la siguiente manera de interpretar Lacroix las luchas de resistencia interpuestas en Francia por los sectores no letrados de campesinos, mineros y comerciantes a la implantación del SMD (Lacroix, 1816; p. 240):

> Jamás podría creer que no sea una notoria mala voluntad respaldada en asociaciones de ideas tan extrañas y perjudiciales a los progresos de la razón, lo que ha ocasionado todas las resistencias que ha enfrentado el establecimiento de las nuevas medidas. (…) Ignoro cual será la suerte definitiva de esta institución (SMD) basada en los progresos de la Astronomía y de la Física, y que muchas gentes se obstinan en clasificar entre los revolucionarios con los cuales no tiene no obstante ninguna relación ni por las cosas ni por los hombres, pero considero un deber de todos quienes confían en el avance de las ciencias y de la razón, combatir hasta donde sea posible por la conservación y propagación de una reforma vivamente deseada y finalmente alcanzada."

[5] Ver el impreso: Índice de exámenes de los alumnos del "Liceo de Familia, en *Helguera Collection of Colombiana.* Otro documento a consultar en esta colección son los *Certámenes de la Universidad del Magdalena y del Istmo.* En el certamen del 13 de diciembre de 1838 los alumnos de aritmética del profesor José Dionisio Araujo expusieron conclusiones sobre el sistema decimal y sus aplicaciones al nuevo sistema de medidas o métrico.

[6] Según Helguera el número de "ciudadanos" en todo el país (la designación corresponde a la Constitución de 1843 elaborada por Mosquera) no habría sido mayor de diez mil si se tiene en cuenta la participación política anual en la década 1843-1853. De manera que un término tal vez más apropiado para referirse a los miembros de la élite no monárquica neogranadina era el de "patricios", en un sentido parecido a la ciudadanía en la república romana.

Como quiera que sea, el libro de Bergeron implementa el enfoque aritmético de Lacroix con un tratamiento teórico incluso más avanzado cercano a la presentación de los textos actuales. Después de las cuatro primeras lecciones consagradas básicamente a la aritmética de los enteros seguida por la aritmética de los quebrados o fracciones, Bergeron explica en la lección quinta los llamados "números complejos" que define como "aquellos que tienen varias especies de unidades dependientes las unas de las otras, según una ley diferente a la decimal. Por ejemplo 15 pesos 7 reales 18 maravedizes, o 11 toesas 5 pies 9 pulgadas 11 líneas 7 puntos". (Bergeron, 1848; p. 42). Aclara que estas subdivisiones pertenecen al sistema unificado de pesos, pesas y medidas granadinas de la ley del 25 de mayo de 1836 con la tabla correspondiente de equivalencias en medidas españolas. "Pero como la tendencia es hacia el sistema adoptado en Francia no expondremos aquí sino este sistema." (p. 43).

Sin embargo, antes de pasar a exponer la aritmética decimal con base en la cual explicará el sistema francés en la lección siguiente, Bergeron cree conveniente presentar las cuatro operaciones aplicadas a los números complejos, tal vez con el ánimo de resaltar la economía de pensamiento y la conveniencia en las aplicaciones que representan las fracciones decimales con respecto a las fracciones comunes, y lo adecuado del SMD comparado con las medidas granadinas y españolas. En ello Bergeron parece seguir a Lacroix quien a su vez retomaba las ideas de Laplace sobre la uniformidad y aplicabilidad del sistema decimal comparado con la complejidad y artificialidad de los anteriores, en su lección de 1795.

La racionalidad de este sistema unificado y su naturaleza invariante serían resaltadas años después por Pombo al explicar el SMD en sus *Lecciones de Aritmética y Álgebra* (Pombo, 1858):

> (N)ada deja que desear un sistema de pesas y medidas sencillo y elegante, en que todo está relacionado armoniosamente con una base bien definida, invariante y única; en que las subdivisiones o aglomeraciones sucesivas son uniformes y adaptadas al cálculo decimal aritmético, y cuya nomenclatura se limita a la fácil combinación de unas pocas palabras.

Rigor conceptual y sentimiento patriótico en los primeros textos autóctonos de aritmética

El SMD y sus aplicaciones conforman los capítulos 7º y 8º de la primera parte de las *Lecciones*. La presentación se deduce claramente de la teoría de representación de los números (racionales) mediante fracciones decimales. Según el prólogo, se trataba de disponer de un texto autóctono de referencia en la enseñanza de unos contenidos básicos en aritmética y álgebra que, de acuerdo con la tradición formativa del Colegio Militar, permitiera superar la enseñanza empírica, rutinaria y memorística prevaleciente en el país. En la divulgación de la aritmética decimal con sus aplicaciones al SMD, se debía utilizar un esquema que articulara lógica y método con contenidos útiles. Este esquema era necesario para la "regeneración constitutiva de la República y el desarrollo de su industria". En consecuencia, una tarea de la mayor importancia era contribuir a la elaboración de textos con este enfoque de enseñanza aplicado a las condiciones del contexto colombiano.

Es interesante tener en cuenta que a diferencia de la aritmética de Bergeron que trata de manera marginal la legislación granadina sobre unificación de pesos y medidas, el capítulo que las *Lecciones* de Pombo consagran al SMD francés está precedido de una noticia sobre la legislación de pesos, medidas y monedas en Colombia entre 1836 y 1857. Como ingeniero, profesor de matemáticas, estadista y autor de la primera recopilación de leyes de la República, Pombo comprendía bien la conveniencia de integrar en un mismo texto la explicación de los contenidos aritméticos del SMD, y las condiciones normativas que legitimaban su aplicación en los asuntos de la administración pública y de las prácticas sociales y económicas. Por lo demás, éste estilo de presentación del SMD en cierta medida era compartido por otros textos de aritmética como el de Fray Tomás Mora Sánchez que tuvo una gran difusión en el país y el extranjero. (Mora Sánchez, 1834). Según parece la obra se publicó originalmente en La Habana en 1818 pero solo se conoció en el país a partir de 1826.[7]

Este texto es un caso particularmente interesante de la disposición manifiesta del autor y de los editores responsables de las sucesivas reimpresiones, de adecuar la producción intelectual a los nuevos requerimientos de la política de metrización del Estado, para convertirla en un dispositivo más eficiente en la formación de opinión favorable a tal política. Anotemos de paso que esta actitud representa un cambio de pensamiento en la representación de la élite sobre la introducción del SMD en el país, pues contrariamente a los discursos retóricos de los años 1810 que proclamaban adoptar el nuevo sistema sustituyendo a toda costa las tradiciones culturales iletradas en el uso de las medidas antiguas, los textos autóctonos se preocupan por las condiciones que hagan posible la instalación del primero en interacción con las segundas. Esto es lo que, en particular, parece explicar las reimpresiones de la aritmética de Mora Sánchez.

La primera reimpresión fue publicada por José A. Cualla en Bogotá en 1834, bajo el seudónimo de "un amigo de su educación". La segunda se debe también a Cualla, y fue publicada en 1939 sin variaciones aparentes con respecto a la anterior. La cuarta de Vicente Lozada apareció en Bogotá en 1847 dos años después de la muerte Mora Sánchez, y a partir de entonces éste aparecerá identificado como autor del texto. Hasta la quinta reimpresión de 1852 no hay diferencias sustanciales en la presentación de los contenidos aritméticos, al menos en cuanto a la aritmética decimal. Tampoco en el método: se empieza por enunciar la regla aritmética, luego se consideran uno o varios problema relacionados con la regla, a continuación se hace evidente el enunciado a través de la "resolución" y se pasa por último a la "demostración". Las diferencias en las reimpresiones tienen que ver con la necesidad de insertar los sucesivos cambios en las disposiciones nacionales en materia de unificación de pesos y medidas hasta la adopción oficial del SDM. Los ajustes se advierten igualmente en las aplicaciones de las reglas aritméticas a situaciones concretas y en los anexos con las tablas de las correspondientes equivalencias de la "metrología granadina" con las medidas internacionales.

Sin embargo, existe una cuarta reimpresión por N. Gómez en 1857 en la cual se introducen "correcciones de un inteligente" que están hechas con la evidente intención de hacer más clara y simple la presentación de los contenidos aritméticos en el nuevo contexto de adopción oficial del

[7] Estos datos se encuentran sin mayor soporte documental en la noticia biográfica de Mora Sánchez en: (Mesanza y Ariza, 1981). En la p. 96 los autores afirman: "No sabemos su lugar de nacimiento. Era conventual de Cartagena en 1816, donde fue procesado por Morillo como patriota. En 1828 vivía en casa particular en Santa Fe, y allí ocultó a (Pedro) Carujo después de la nefanda noche septembrina (25 de septiembre de 1828). En 1829 estaba en Cartagena. Al tomar el Convento (1832) el obispo para su curia, el P. Mora continuó viviendo en Corozal, donde fundó y regentó un Colegio, hasta su muerte (27 de noviembre de 1845)."

sistema métrico decimal. Así por ejemplo, se integra al cuerpo de la exposición teórica de la aritmética decimal un aparte sobre fracciones periódicas y fracciones continuas que en las ediciones anteriores aparecía en un apéndice al final. También se actualiza el aparte de la edición de 1852, subsiguiente a la "metrología granadina", cuyo titulo de "sistema decimal" se reemplaza por el más preciso de "sistema métrico decimal".

La presentación del SMD en la edición de 1857 se acompaña de tres cuadros y una tabla tomados de autores franceses. A semejanza de los cuadros de la circular de la ley de 1853, están elaborados para explicarle al lector de manera concisa las propiedades del SDM, contribuir a su mejor aceptación y favorecer su aplicación al menos en los usos oficiales. Al presentar la correspondencia del SMD con las medidas granadinas en ambos sentidos, los cuadros destacan la sencillez y claridad del SMD en su conjunto, y visualizan las ventajas del nuevo sistema con respecto a los antiguos en materia de nomenclatura y uniformidad de múltiplos y submúltiplos. El apéndice recuerda que en 1857 la enseñanza del SMD ya "es obligatoria en todas las escuelas de la provincia de Bogotá en virtud de lo dispuesto por la ordenanza 15, (por lo cual) su estudio ha venido a ser una necesidad indispensable." (Apéndice, p. V).

Para concluir con esta presentación de las modalidades de introducción de la teoría y práctica del SMD en los textos colombianos de aritmética en la década de 1850, falta reseñar el más célebre de ellos, el *Tratado de Aritmética* (Liévano, 1856). Liévano fue el primero de los egresados del Colegio Militar en continuar la empresa de escritura de textos iniciada por sus maestros Bergeron y Pombo. Esta era su respuesta al reto planteado por Pombo en 1850 en sus *Lecciones de geometría*, de comenzar a "escribir textos adecuados para la enseñanza o solitario aprendizaje de varios ramos de las matemáticas puras en su estado actual de adelanto, (…en una) época en que principia a estar en boga en el país el estudio reflexivo de las ciencias exactas". (Pombo, 1850). El *Tratado* de Liévano resume su experiencia docente en el Colegio de San Bartolomé, y desarrolla el plan de la obra que había concebido en sus años de alumno del Colegio Militar.

En el prefacio de (Liévano, 1856) se reconocen las nuevas circunstancias del contexto educativo republicano en las que se sitúa el texto. La dedicatoria a Pombo, el ingeniero matemático entonces mejor situado en el campo del Estado, trata de emular con el "patriota filósofo" en sus designios de formar a la juventud en aritmética y coadyuvar a su "celo patriótico y filantrópicos deseos". Pero también refleja su búsqueda de legitimidad social y de ascenso social en la élite a través del conocimiento. De ahí que la retórica de gratitud al maestro se combine con su manifestación de lealtad a la República. En sus *Lecciones de aritmética y álgebra* publicadas poco después, Pombo otorgará la sanción esperada por su alumno. (Pombo, 1858). Al trazar el perfil del matemático de la república, Pombo presenta a Liévano como el joven instruido autor del ingenioso tratado de aritmética que le presta un meritorio servicio al país. Como muestra de la originalidad del pensamiento aritmético de Liévano, las *Lecciones* incluyen en anexo dos proposiciones de Liévano sobre propiedades de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de la clase de fracciones irreductibles. (Pombo, 1858).

Liévano hace igualmente evidentes en el *Tratado* los ideales y motivaciones matemáticos que, de acuerdo con el nuevo espíritu de la época, fundamentan el entramado discursivo de la aritmética. Ideal de rigor en la exposición de las propiedades de los números y operaciones mediante el razonamiento deductivo. Ideal de simplicidad en la explicación y en la estrategia comunicativa: "He sido algo lacónico en algunos puntos; pero esto ha sido precisamente porque creo que así conviene en los tratados elementales que han de servir de guía en la enseñanza." Ideal de originalidad en el enfoque "enteramente diferente al rumbo ordinario seguido por todos los autores". Esta originalidad se aclara en el aparte que se refiere a las "notabilidades" de la obra: 1º Una presentación exhaustiva de la teoría de número y cantidad, 2º La simplificación de la división de enteros, 3º La generalización de las cuatro operaciones, y 4º La teoría de las cantidades inconmensurables.

Es necesario aclarar que en la presentación *grosso modo* deductiva de los contenidos de la aritmética, el *Tratado* contiene un procedimiento para construir los números irracionales a partir de los racionales que sin duda resultó ser original en su momento. Es la "notabilidad" número cuatro de la "teoría de las cantidades inconmensurables". Liévano precede esta exposición con las otras tres "notabilidades" que se expresan en una reflexión conceptual sobre los objetos y técnicas constructivas involucrados en su teoría (número, cantidad, variación, magnitud, conjunto, continuo, infinito). Pero el pensamiento de Liévano oscila entre un razonamiento positivo dirigido a caracterizar las propiedades matemáticas nuevas del objeto que se propone construir (los números inconmensurables), y un discurso escolástico que trata de conducir ese razonamiento a las especulaciones ontológicas y sustancialistas. En todo caso, la propuesta de Liévano rompe con la tradición aritmética consistente en restringir el número a una relación entre magnitudes homogéneas.

Igualmente hay que reconocer que Liévano introduce un nuevo estilo de enseñanza del SMD. En la lección VII del tratado, formula una especie de criterio epistemológico para justificar la escogencia de un sistema de medidas entre otros posibles: el nuevo SMD debe poder deducirse lógicamente, ya no tan solo de la aritmética decimal, sino de una aritmética del continuo. Con este criterio Liévano quiere distinguir su presentación del SMD de otras publicaciones con sello oficial para la difusión empírica de los saberes y técnicas de medición del SMD en el campo de organización del Estado.[8] Pero también lo diferencia del propio enfoque del SMD empleado por Pombo en las *Lecciones* de 1858. Dentro de un estilo "lacónico" y simple, la presentación de Liévano expresa un pensamiento dual caracterizado, en primer lugar, por el rigor conceptual: El sistema debe derivarse lógicamente de su teoría de los números.

Pero también por un pensamiento operatorio: El saber conceptual del SMD debe en todo caso sintetizarse en una regla o algoritmo que permita su aplicación en situaciones significativas del mundo de la cantidad. Esta escogencia epistemológica de Liévano comporta la afirmación en un principio de autonomía corporativa como miembro de la élite de ingenieros matemáticos: el Estado es advertido que a partir de ese momento la enseñanza de saberes útiles para garantizar el monopolio de su régimen de poder, tenía además que ajustarse a ciertas exigencias intelectuales y académicas.

---

[8] Entre los numerosos folletos y manuales de este tipo se distingue Obregón (1856). El carácter oficial de la edición ordenada por el Poder Ejecutivo queda manifiesto en la siguiente autorización que lleva la firma del secretario de hacienda Rafael Núñez: "Siendo, como es, dicha obra de indudable utilidad para las Oficinas de Hacienda, y muy particularmente para las Aduanas, publíquese y circúlese oficialmente."

La afirmación de autonomía corporativa de la élite que expresa Liévano en su aritmética parece alinearse medio siglo después con las declaraciones de los primeros científicos republicanos en pro de la universalización del metro. Recordemos los argumentos de Haüy para convencer a sus lectores del tratado de física sobre las ventajas del nuevo sistema: su naturaleza objetiva y uniforme, su aplicabilidad en los más variados contextos y, en materia política, el rasgo que permitía distinguir al SMD del orden de medida monárquico: el hecho de haber sido adoptado en el marco de una alianza de nuevo tipo del Estado con los científicos en tanto comunidad. Metrizar la sociedad, contribuir a su manejo en la organización del Estado republicano, implicaba en buena medida para estos científicos avanzar en la profesionalización de su estatus en un sentido diferente al del *savant* de la corte del rey.

Bibliografía

Arboleda, L. C. (1987). Acerca del problema de la difusión científica en la periferia: el caso de la física newtoniana en la Nueva Granada (1740-1820). *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, vol. 4, pp. 7-30.

Arboleda, L. C. (2013). *Aproximación histórica al concepto de nación*. *Colombia 1810-1910*. Informe final de Investigación. Grupo Nación, Cultura y Memoria. Universidad del Valle.

Bergeron, A. (1848). *Lecciones de Matemáticas. Parte primera: Aritmética.* Bogotá, Imprenta de Ancízar.

Certámenes de la Universidad del Magdalena y del Istmo del día 13 de diciembre de 1838. En: *Helguera Collection of Colombiana.*

Cuerpo de Leyes de la República de Colombia (1821-1827). 3 volúmenes. Imprenta de Valentín Espinal, Caracas, 1840.

Gaceta de Colombia (Nueva Granada) (1821-1861). Hemeroteca, Prensa Microfilms, Biblioteca Luis Ángel Arango, Bogotá.

Haüy, R. J. (1803-1806). *Traité élémentaire de physique*. 2 vols. Courcier, Paris. Consultado el 31 de agosto de 2013 en: http://archive.org/stream/traitlmentaired02hagoog#page/n77/mode/2up

Helguera, L. J. (1958). *The First Mosquera Administration in Nueva Granada (1845-1849)*. PhD Thesis. University of North Carolina, Chapell Hill. Ver la traducción al castellano del capítulo 6, "Educational Progress", en: (Helguera, 1993).

Helguera, L. J. (1993). La educación durante el primer gobierno de Mosquera: 1845-1849. *Revista Colombiana de Educación,* nº 26, Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 7- 30. Traducido del original en inglés por Enrique Hoyos Olier.

(The J. León) *Helguera Collection of Colombiana*. Jean and Alexander Heard Library. Vanderbildt University. Consultado el 1º de septiembre de 2013 en: http://helguera.library.vanderbilt.edu/

Índice de exámenes de los alumnos del "Liceo de Familia". Imprenta del Neogranadino. Bogotá, 12 de noviembre de 1856. En: *Helguera Collection of Colombiana*.

Kalmanovitz, S. (2008). Constituciones y crecimiento económico en la Colombia del siglo XIX. *Revista de Historia Económica*, vol. 26, nº 2, pp. 205-242.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité élémentaire d'Arithmétique*. Courcier, Paris.

Lacroix, S. F. (1805): *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*. Courvier, Paris.

Lacroix (1816). *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*. Bachelier, Paris; cuarta edición revisada de Lacroix (1805). Consultado el 1º de septiembre de 2013 en el sitio web de Gallica - BNF.

Liévano, I. (1856). *Tratado Elemental de Aritmética.* Bogotá, Imprenta de Echeverría.

Meisel Roca, A. (1990). El patrón metálico. En: (Meisel Roca, 1900).

Meisel Roca, A. (et al) (1990). *El Banco de la República. Antecedentes, evolución y estructura*. Editorial Banco de la República, Bogotá. Consultado el 1º de septiembre de 2013 en el sitio web de BLAA.

Mesanza, A. y A. Ariza (1981). *Bibliografía de la Provincia Dominicana de Colombia.* Universidad Católica Andrés Bello, Caracas.

Mora Sánchez, T. (1834). *Elementos de Aritmética integral, decimal y comercial escritos según el método matemático para el uso de la juventud granadina. Con noticia y tablas de todas las medidas de Francia, Inglaterra y España*. José A. Cualla, Bogotá. Reimpreso con variaciones en 1839, 1847, 1852, 1857, 1863, 1865, etc.

Mora Sánchez, T. (1859). *Elementos de Aritmética integral, decimal y comercial escritos según el método matemático. Con noticia y tablas de todas las medidas de Francia, Inglaterra y España.* Arbieu, librería de Rosa y Bouret, París.

Pombo, L. de (1850). *Lecciones de geometría analítica*. Bogotá, Imprenta de El Día.

Pombo, L. de (1858). *Lecciones de Aritmética y Álgebra*. Bogotá, Imprenta de la Nación.

Poveda Ramos, G. (2012). *Historia de las Matemáticas en Colombia*. Ediciones Uniaula, Medellín.

Sánchez, C. H. (2007). *Los ingenieros-matemáticos colombianos del siglo XIX y comienzos del XX. Las tesis para ser Profesor en Ciencias Matemáticas. Facultad de Matemáticas e Ingeniería 1891-1903.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Sánchez, C. H. y V. Albis (2012). Historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y de la Tecnología*, vol. 14; pp. 109-157.

Sistema Métrico Decimal de la Nueva Granada. 1853. Imprenta del Neo-granadino, Bogotá. Consultado el 1º de septiembre de 2013 en el sitio web de BLAA.

Torres Sánchez, J. y L. A. Salazar Hurtado (2002). *Introducción a la historia de la ingeniería y de la educación en Colombia*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Vera, H. (2011). *The Social Life of Measures. Metrication in the Unites States and Mexico, 1789-2004.* PhD Dissertation. The New School for Social Research. New York.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

MOOCs para capacitación docente en matemáticas

Alexa **Ramírez-Vega**
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
alexarv11@gmail.com / alramirez@itcr.ac.cr

Resumen

Dadas las nuevas perspectivas a nivel mundial para la formación en línea, las experiencias en e-learning logradas en Costa Rica y las necesidades de capacitación de los profesores en servicio sobre los nuevos programas de estudio de matemática recién aprobados en 2012; se plantea la utilización del modelo de cursos masivos abiertos en línea (más conocidos como MOOCs) para solventar la necesidad de capacitación de docentes de matemáticas en Costa Rica. Este modelo de cursos está basado en lecciones semanales dictadas por expertos en el tema y apoyadas con videos explicativos, foros y actividades de aprendizaje centradas en los estudiantes y las teorías del conectivismo, esto permite implementar cursos de forma ágil, escalable y acorde a las necesidades de la población destino.

Palabras clave: MOOC, educación, matemática, capacitación docente, formación continua.

Introducción

El creciente desarrollo de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en la mayoría de los ámbitos educativos ha permitido el surgimiento de nuevos modelos y estrategias de aprendizaje basadas en las "innovaciones pedagógicas" más sobresalientes, las cuales se basan en los aprendizajes virtuales o estrategias de e-learning.

Estas nuevas estrategias de aprendizaje, soportadas por las posibilidades que brinda la Web 2.0, han creado entornos donde los estudiantes y profesores pueden interactuar y aprender en forma virtual, gracias a lo que varios autores (Downes, 2007; Siemens, 2005) han definido como conectivismo (o conectismo), el cual consiste en el aprendizaje mediante redes y conexiones a través del flujo de información abierto, en tiempo real y bidireccional producido por los aprendices.

Dada esta nueva perspectiva, se debe hacer énfasis en el cambio, no solo del medio, sino de las estrategias pedagógicas y metodológicas, las cuales deben adaptarse al nuevo entorno o medio. En este sentido, Sangrá (2001) afirma que los modelos virtuales no tendrán éxito si se basan en intentar replicar los modelos presenciales, para esto es necesario hacer una adaptación de todos los elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los entornos virtuales.

Las posibilidades brindadas por la inclusión de las TIC en el ámbito educativo han implicado diversos cambios en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos cambios van desde el rol del profesor (facilitador), el rol del estudiante, hasta el ambiente y la evaluación. Estos cambios han dado cabida a lo que conocemos como e-learning, el cual consiste en el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de Internet. En concreto, varios investigadores del eLearn Center (eLC) de la Universidad Oberta de Cataluña (UOC) se dieron a la tarea de construir una definición de e-learning inclusiva, la cual fuera aceptada por la comunidad científica y que abarcara de una manera integral la esencia del e-learning, el que definen como:

> Una modalidad de enseñanza y aprendizaje, que puede representar todo o una parte del modelo educativo en el que se aplica, que explota los medios y dispositivos electrónicos para facilitar el acceso, la evolución y la mejora de la calidad de la educación y la formación. (Sangrà, Vlachopoulos, Cabrera Lanzo, & Bravo, 2011, p. 36)

El e-learning se caracteriza por el uso de tecnologías Web en el proceso educativo, dejando de lado la forma tradicional de educación, eliminando las barreras de espacio y tiempo. Permite el desarrollo de competencias tecnológicas en los estudiantes, al mismo tiempo que motiva el aprendizaje, ya que utiliza herramientas y estrategias a los cuales los estudiantes en la actualidad (generación Y) conocen y esperan del proceso educativo de este siglo.

Por otro lado, aunque el e-learning genera posibilidades y ventajas en educación, posee ciertas limitaciones que se deben tomar en cuenta para su implementación. Entre ellas están la carencia de infraestructura, limitaciones de acceso a Internet, las barreras del uso de tecnologías, entre otras. Dadas algunas de estas limitaciones, han surgido diversas modificaciones o variaciones del e-learning que vienen a solventar las nuevas necesidades y a reducir algunas de las limitaciones mencionadas anteriormente.

Asimismo, las variaciones, nuevas tendencias y necesidades de aprendizaje de muchas personas alrededor del mundo ha hecho que surjan nuevos paradigmas de la educación en línea. En este panorama, nacen los cursos masivos abiertos en línea o MOOCs (por sus siglas en inglés).

En esta trabajo se describe el diseño e implementación de un conjunto de cursos de capacitación para docentes de matemáticas bajo la modalidad de MOOC, utilizando la plataforma *Class2go* desarrollada por la Universidad de Stanford, la cual sería una primer experiencia de cursos MOOC a nivel centroamericano diseñados exclusivamente para la capacitación de docentes de matemáticas.

Massive Open Online Courses

El término MOOC hace referencia al acrónimo de *Massive Open Online Courses*, el cual consiste en cursos gratuitos especializados en línea, dirigidos a un público masivo e impartidos por expertos en diversas áreas del conocimiento, principalmente orientados a educación superior. Para (McAuley, Stewart, Siemens, & Cormier, 2010) los MOOC se definen como un fenómeno en línea que ha tomado fuerza en los últimos dos años, un MOOC integra la conectividad de las redes sociales, la facilitación de un experto reconocido en el campo de estudio, y una colección de recursos en línea de libre acceso. Un MOOC se basa en la participación activa de varios cientos o miles de estudiantes que auto-organizan su participación de acuerdo con los objetivos de aprendizaje, el conocimiento y las habilidades de intereses comunes. Un MOOC no requiere de pago de cuotas de inscripción, ni requisitos previos que el acceso al curso, además los estudiantes no requieren de expectativas predefinidas para la participación, y no proporciona un modelos formal de acreditación.

El primer MOOC consistió en un curso impartido por George Siemens[1] y Steven Downes[2] en 2008 mientras desarrollaban la tesis del conectivismo, esto resultó en un esfuerzo que posteriormente fue denominado, por Dave Cormier y Brian Alexander, como MOOC (Downes, 2012).

En 2010 dos profesores de la Universidad de Stanford abrieron un curso en esta modalidad sobre el tema de Inteligencia Artificial, el cual resultó un éxito, con más de 100 mil estudiantes de 200 países alrededor del mundo; posteriormente esta iniciativa ofreció otros cursos universitarios bajo el nombre de *Udacity*.

Udacity es una fundación con ánimo de lucro que provee cursos masivos abiertos en línea sobre temas variados y orientados a la educación superior, actualmente cuenta con 28 cursos activos, para los cuales se espera una matrícula de más de medio millón de estudiantes. El acceso a los cursos, el material y una certificación emitida por *Udacity* es totalmente gratuito, pero los estudiantes pueden optar por una certificación oficial de reconocimiento de créditos universitarios emitidos por *San Jose State Univerity* del estado de California, Estados Unidos (Udacity, Inc., 2013).

Por su parte, en octubre de 2011otros profesores de la Universidad de Stanford crearon la plataforma denominada *Coursera*, iniciando con dos cursos del área de computación, hasta lograr expandirse a 120 cursos a finales del 2012 y con más de 1.2 millones de estudiantes matriculados en estos cursos (Herman, 2012). *Coursera* es una compañía de educación que se

[1] Teórico, investigador y conferencista canadiense en la enseñanza para la era digital. Introdujo el concepto de “conectivismo” con su publicación “Connectivism: Learning as Network Creation”.

[2] Académico e investigador en el área de aprendizaje virtual y Web 2.0. Junto a Siemens introdujo el “conectivismo” con su publicación “An Introduction to Connective Knowledge”.

asocia con las principales universidades y organizaciones en el mundo que ofrecen cursos en línea para que cualquiera pueda tomar, de forma gratuita. Las clases se ofrecen en *Coursera* están diseñadas para ayudarle a dominar el material. Cuando usted toma una de nuestras clases, se podrán ver las conferencias impartidas por profesores de clase mundial, aprender a su propio ritmo, prueba tus conocimientos y reforzar los conceptos a través de ejercicios interactivos (Coursera, Inc., 2013). Actualmente cuenta con más de 400 cursos, principalmente en inglés, pero para inicios del 2012 incorporó cursos en español, portugués, francés, chino, italiano, etc. Impartidos por más 60 universidades de todo el mundo.

Paralelo a estas iniciativas han surgido otras que han permitido satisfacer la demanda de este tipo de cursos a nivel mundial, aunque *Coursera* sigue liderando y marcando la pauta en cursos de este tipo; destacando con su modelo de sustentabilidad, sistema de evaluación y acreditación de los cursos que imparten (Daniel, 2012; Dellarocas & Van Alstyne, 2013).

Al igual que *Udacity* y *Coursera*, otras instancias de educación superior se dieron a la tarea de incursionar en la formación virtual basada en cursos MOOC. Entre estas se destaca edX, entidad sin fines de lucro creada por los socios fundadores de Harvard y MIT, con el objetivo de brindar educación superior de calidad a los estudiantes de todo el mundo de forma abierta. EDX ofrece MOOCs y clases interactivas en línea en temas como derecho, historia, ciencia, ingeniería, negocios, ciencias de la computación, entre otros (edX, 2013).

De esta manera, comenzaron a surgir nuevas y mejores ofertas de formación en línea bajo la modalidad de MOOCs, incluyendo cursos en español, francés y portugués para finales del 2012, el cual fue denominado el año de los MOOCs según un artículo publicado en New York Times a finales de ese año (Pappano, 2012). Sumado a la proliferación de nuevos MOOC a nivel mundial, Google implementó un curso de este tipo sobre cómo hacer búsquedas en Internet, lo cual evolucionó a finales del 2012 en una plataforma de código abierto denominada *CourseBuilder*, la cual brinda el soporte tecnológico necesario para desarrollar e impartir cursos MOOC (De Waard, 2013).

Por su parte, para febrero del 2013 instituciones como la UNED de España y la Universidad de Alicante iniciaron la oferta de cursos en esta modalidad para la población de habla hispana. También, existen iniciativas conjuntas de universidades que trabajan en la producción y puesta en marcha de cursos MOOC, entre estas se destacan *Miríada X* cuyos cursos son ofrecidos por universidades españolas asociadas a la red *Universia*. Por su parte, el Reino Unido (UK) cuenta con *Future Learn*, iniciativa respaldada por las universidades líderes de UK (Bergmann & Grané, 2013).

Por su parte, *Miríada X* pone a disposición de cualquier interesado Cursos Online Masivos en Abierto de forma gratuita a través de una plataforma abierta sin restricciones, sin condiciones, sin horarios, sin coste y con contenido principalmente en español. Esta iniciativa la promueve la *Telefónica Learning Services* (compañía especializada en ofrecer soluciones integrales de aprendizaje online para la Educación y Formación) y *Universia* (la mayor red de universidades de habla hispana y portuguesa) desde enero de 2013, con el fin de fomentar la difusión del conocimiento en abierto en el espacio iberoamericano de Educación Superior (Miríada X, 2013).

En el área de matemáticas se destacan algunos cursos introductorios como cálculo, álgebra y estadística impartidos por *Coursera*, *Udacity*, entre otros. También, ya para finales del 2013 se espera el lanzamiento de cursos de educación para profesores en varias áreas, incluyendo matemática (http://www.mooc-ed.org).

Otra entidad considera (Herman, 2012; Pappano, 2012) precursora en modelo de MOOCs es *Khan Academy*, organización sin fines de lucro creada en 2006 por Salman Khan, quien inicialmente comenzó con lecciones cortas grabadas en video, donde explicaba los procedimientos de ejercicios o problemas principalmente en el área de matemática. Los videos realizados por Khan y disponibles para cualquier persona en su sitio web de *Youtube*, permitió a miles de estudiantes repasar en repetidas ocasiones las lecciones sobre problemas matemáticos específicos. De esta manera, para el 2010 la organización *Khan Academy* recibió financiamiento de la fundación Gates y de Google (Herman, 2012). Actualmente *Khan Academy* cuenta con más de 4000 videos de diversas áreas (ciencias, finanzas, humanidades, etc.), todos disponibles en acceso abierto y bajo licencia *Creative Commons*. De esta manera, los estudiantes pueden hacer uso de la amplia biblioteca de contenido, incluyendo los retos interactivos, evaluaciones y videos desde cualquier computadora con acceso a la Internet (Khan Academy, 2013).

Todos estos modelos e iniciativas basadas en MOOCs sobre temas de educación superior gratis y accesibles para miles de estudiantes alrededor del mundo, han generado lo que varios autores han llamado, una innovación disruptiva de la educación de superior (Bujak, Baker, & DeMillo, 2012; Stepan, 2013; Yuan & Powell, 2013). Una innovación es considerada disruptiva cuando crea un nuevo mercado a través de la introducción de un nuevo tipo de producto o servicio, tienden a ser más simple, más barato y más fiable y conveniente que los productos establecidos, además son productos de punta sin valor en los mercados convencionales, pero que normalmente se convierten en puntos de venta más fuertes en los mercados emergentes; los dos elementos que la caracterizan son: la tecnología y la innovación del modelo del negocio (Stepan, 2013). De esta manera, los MOOC han marcado una pauta en cómo se adquiere el conocimiento especializado, directo de instituciones líderes a nivel mundial, lo cual ha generado una nueva era en la formación superior y continua.

En este sentido, aunque los MOOC son cursos especializados gratuitos que involucran cientos o miles de estudiantes, no es fácil garantizar el aprendizaje exitoso de quienes se matriculan en estos cursos, además, al ser cursos de educación no formales muchas instituciones no los consideraban válidos para formar profesionales en algún área específica.

Lo anterior, sumado a la necesidad de los proveedores de MOOCs de establecer un modelo de negocio apropiado que permitiera seguir manteniendo cursos abiertos masivos sin costo y sostener la demanda de estudiantes y cursos que ha generado la proliferación de los MOOC, hizo que iniciativas como *Coursera*, *edX* y *Udacity* crearan estrategias para captar divisas (además de las donaciones de universidades y fundaciones) que logren mantener un modelo sustentable de MOOCs. Entre estas estrategias del modelo de negocio (Dellarocas & Van Alstyne, 2013) destacan las siguientes:

Certificaciones. Es la forma más común que los proveedores de MOOCs encontraron para monetizar estos cursos. De esta manera, un estudiante puede matricular un curso y completarlo con éxito sin ningún costo, pero para obtener una certificación oficial emitida por alguna universidad reconocida el estudiante debe pagar una cuota, la cual varía según el curso. *Coursera*, *Udacity*, *Miríada X* y otros emplean este sistema de certificaciones de bajo costo para obtener ingresos con los cursos que imparten.

Créditos universitarios. La Universidad de Washington, un socio *Coursera*, está poniendo a prueba un modelo híbrido de un MOOC gratuito ofrecido al mismo tiempo la versión con más rigor académico, con la cual se puede optar por créditos a cambio de una tarifa. Por su parte, *Udacity* se ha asociado con la red de centros de pruebas de Pearson, para ofrecer servicios similares de certificación basados en honorarios.

Empleadores. Otro mecanismo para captar divisas por medio de MOOCs es el análisis de la base de datos de los miles de estudiantes que cursaron con éxito algún curso. Esto permite ayudar a las empresas a identificar nuevos talentos, ya que el análisis de los resultados de un MOOC puede proporcionar información sobre las acreditaciones de los estudiantes y así mejorar el proceso de reclutamiento y contratación. Por ejemplo *Udacity* ha estado ejecutando un programa de reclutamiento utilizando su base de datos de los estudiantes para identificar a los mejores candidatos para las empresas asociadas, como Google, Amazon y Facebook, entre otras.

Patrocinadores. Universidades asociadas, fundaciones, entidades interesadas en educación virtual apoyan económicamente para la creación y mantenimiento de MOOCs. También, compañías con necesidades de capacitación pagan a los proveedores de MOOCs por cursos a la medida.

De esta manera, una innovación educativa disruptiva como los MOOC permite el acceso a certificaciones y hasta créditos universitarios para cualquier persona con acceso a Internet, esto implica la posibilidad de educación superior de calidad a bajo o ningún costo; interacción con estudiantes y profesionales en diversas áreas alrededor del mundo; creación de conocimiento y contenido de forma colaborativa; formación en áreas específicas del conocimiento sin necesidad de cursar una carrera universitaria completa; además de romper con el esquema tradicional y lineal educativo, promueve el auto-aprendizaje y especialización para personas que no puede acceder a educación de calidad debido a sus altos costos (Carr, 2012).

Por otra parte, como varios autores mencionan los MOOC no son la panacea de la educación en línea (Creed-Dikeogu & Clark, 2013), entre las limitaciones de los MOOC se destacan: la variabilidad dentro de los cursos; la baja tasa de terminación, con deserción de hasta un 90% de los estudiantes matriculados en los cursos; la diversidad de estudiantes en un mismo curso, miles de estudiantes. Muchas de estas limitaciones se debe a que los MOOC no son para todos los estudiantes (Skiba, 2012).

En este sentido, hay que tomar los beneficios que aportan los MOOC y potenciarlos, tratando de minimizar al máximo las limitaciones o problemas que la base de este modelo de educación virtual implica. Así, promover los cursos MOOC para temas específicos (no es viable tratar de abarcar todas las áreas del conocimiento) y dirigidos a un público meta establecido que permita adecuar los cursos a sus necesidades y particularidades, y así los tutores podrán dar mejor seguimiento que permita garantizar la terminación exitosa de los programas que se matriculan.

Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Desde hace varios años la realidad nacional del sistema educativo costarricense venía dando tropiezos, esencialmente en el área de matemática. Esto sumando al bajo rendimiento escolar en esta asignatura y los resultados poco alentadores de las pruebas internacionales como PISA 2003, exigían un cambio profundo, que hasta el año 2010 empezó a gestionarse. Como menciona Ruiz (2013) un elemento fundamental que motivó la búsqueda de una reforma fue la actitud social persistente de rechazo y temor hacia las matemáticas, lo que este mismo autor denomina como “Matefobia”. Los programas de estudio vigentes entre el año 1995 y el 2012 exhibían problemas que ya habían sido fuertemente criticados por varios autores (Ruiz & Barrantes, 2009); éstos eran inconsistentes entre sus fundamentos teóricos que proclaman ser constructivistas, y lo planteado realmente en la malla curricular y las aulas donde predominaba un enfoque conductista.

Dadas las dificultades e inconsitencias de los programas de estudio previos, la dominante actitud negativa hacia las matemáticas y los deficientes resultados detectados en pruebas nacionales e internacionales, se propuso la redacción de Nuevos Programas de Estudio de Matemáticas a un grupo de expertos en el área liderado por catedrático e investigador Angel Ruiz; el nuevo currículo propuesto logró la aprobación en mayo del 2012, para entrar en vigencia para el curso lectivo del 2013 (Ruiz, 2013).

El enfoque principal, como se expone en el documento de los nuevos programas de estudio (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012) es la resolución de problemas con especial énfasis en contextos reales. Esto consiste en iniciar la clase con un problema, contextualizado o no, el cual los estudiantes trabajarán en lo que se denominó “trabajo estudiantil independiente”, luego los estudiantes deberán comunicar, discutir y contrastar las respuestas al problema planteado en el resto de la clase, para finalmente realizar la clausura o cierre por parte del docente, donde se enfatice en la construcción de conocimiento con una intervención docente inteligente, estimulante y apropiada.

Además del enfoque principal, el programa se organiza por cinco áreas matemáticas: Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad. Para cada una de ellas se busca desarrollar capacidades matemáticas de mayor nivel, es decir, promover el dominio en profundidad de algunos tópicos, lo cual permite generar capacidades para poder aprender otros temas con mayor facilidad (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012). También, estos programas de estudio fueron diseñados con estándares internacionales, pero adecuados a la realidad nacional costarricense (Ruiz, 2013). De esta manera, los programas se enfocan en cinco ejes disciplinares: (1) la resolución de problemas como estrategia metodológica principal; (2) la contextualización activa como un componente pedagógico especial; (3) el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales; (4) la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las matemáticas; y (5) el uso de la historia de las matemáticas.

Con este panorama de los nuevos programas y los cambios significativos que éstos implican, se identificó la necesidad de capacitación de los docentes de primaria y secundaria de matemáticas. Para esto se ideó un modelo de capacitación para los nuevos programas dirigido a los docentes en servicio, como menciona Ruiz:

> La estrategia propuesta fue la realización de cursos bimodales, compuestos de sesiones presenciales y además trabajo por medio de una plataforma tecnológica (se escogió Moodle por ser una plataforma muy robusta y por ser más conocida en los medios locales). El contenido de los cursos correspondía al enfoque curricular e incluso una reproducción en su estructura de la estrategia pedagógica que propone el nuevo currículo (la resolución de problemas con énfasis en contextos reales: con colocación inicial de situaciones de interés o problemas sobre los cuales desencadenar las acciones didácticas para concluir con la institucionalización de resultados). (Ruiz, 2013, p. 68).

Cabe resaltar que este modelo, además de llegar a miles de docentes, permitió la implantación paulatina de los nuevos programas a inicios del 2013. Además, se puso a disposición de los docentes en matemáticas, asesores nacionales, estudiantes, etc. una Comunidad Virtual de Educación Matemática donde los usuarios pueden realizar consultas a la comisión redactora de los programas, subir materiales, descargar documentos de apoyo, problemas de aula, plan de transición, entre otros. Pero, aún con las capacitaciones bimodales y la comunidad virtual no se ha podido cubrir las necesidades de capacitación de los más de 23 mil docentes de matemática en Costa Rica.

De esta manera, dadas las nuevas perspectivas a nivel mundial para la formación en línea, las experiencias en e-learning logradas en Costa Rica y las necesidades de capacitación de los profesores en servicio sobre los nuevos programas de matemática recién aprobados en 2012; se planteó la utilización del modelo de cursos masivos abiertos en línea (MOOC) para solventar la necesidad de capacitación de docentes de matemáticas en Costa Rica. Además, este modelo de cursos basado en lecciones semanales dictadas por expertos en el tema y apoyadas con videos explicativos, foros y actividades de aprendizaje centradas en los estudiantes y las teorías del conectivismo. Esto permite implementar cursos de forma ágil, escalable y acorde a las necesidades de la población destino.

Las ventajas de capacitar docentes en matemática con cursos MOOC, permite tomar las virtudes de esta modalidad (antes mencionadas) y poder solventar las limitaciones expuestas. La creación de cursos escalables, basados en videos cortos dictados por expertos (comisión redactora de los nuevos programas), junto al aprendizaje en el conectivismo, permite llegar a un número masivo de profesores de matemática, y a la vez proponer una estrategia para capacitación ágil y de calidad para el público meta definido. Esta es la primera experiencia de capacitación docente en el área de matemáticas con cursos MOOC en Costa Rica y probablemente la primera en América Latina.

Implementación de MOOCs

Para la implementación de cursos masivos abiertos en línea se debe seguir una metodología bien definida que permita guiar todos los procesos, desde su diseño hasta su implementación.

Para este propósito se utilizó la metodología ADDIE, siguiendo la definición propuesta por Ramírez-Vega (2013), aquí la autora establece los pasos a seguir en cada una de las cinco etapas: análisis, diseño, desarrollo, implementación y evaluación. Para efectos de este proyecto se adecuaron y aplicaron las etapas para cada uno de los cursos de capacitación.

Análisis: esta primer etapa consiste en hacer el primer acercamiento con los datos básicos del curso respectivo, grupo destino, metodología, contenidos y objetivos generales de éste. En esta etapa se define la modalidad de los cursos, la cual es en este caso basada en cursos masivos abiertos en línea, cuya fundamentación se sustenta en videos explicativos cortos sobre la temática del curso, apoyada con recursos de aprendizaje como: materiales interactivos, foros, documentos, etc. Además, en esta etapa se identificaron los cursos que serían virtualizados en este primer año bajo la modalidad de MOOCs. Estos cursos fueron: Geometría, Relaciones y Álgebra, Números para primer y tercer ciclo; y Probabilidades para tercer ciclo.

Diseño: en esta etapa se diseñaron todos los materiales, instrumentos y estrategias que se utilizaron en el desarrollo del curso. El diseño es la etapa más importante, ya que aquí se realiza la planeación del curso. En esta etapa se realiza el diseño instruccional (DI) de cada curso, el cual consiste en realizar una planeación semanal de los contenidos del curso, donde se definan los objetivos de aprendizaje para esos contenidos por semana, las actividades de aprendizaje que permitirán alcanzar esos objetivos, los materiales o medios a utilizar y las estrategias de evaluación de los aprendizajes a utilizar para los contenidos y objetivos propuestos. Además del DI en esta etapa se diseñan todas las actividades de enseñanza y aprendizaje que se implementarán en cada curso, adecuado a sus contenidos particulares, lo cual a su vez permite definir los elementos gráficos y de diseño que serán requeridos para cada curso. Adicionalmente, en este etapa se diseñan los instrumentos de medición que serán utilizados para obtener retroalimentación de los estudiantes y validar la implementación de los cursos.

Desarrollo: en esta fase se deberá desarrollar lo planteado en las dos etapas anteriores. Se deben desarrollar los instrumentos planteados, los materiales diseñados, las actividades de aprendizaje propuestas, etc. Este desarrollo debe orientarse según el análisis y diseño previos, de forma que se utilicen las herramientas propuestas en el análisis para realizar todos los materiales (imágenes, videos, animaciones, documentos, etc.) necesarios para la implementación del curso. Por el tipo de cursos (MOOCs) un elemento fundamental en esta etapa es la elaboración de los guiones y materiales didácticos que permitan la creación de los mini-videos correspondientes para cada curso.

Implementación: en esta fase se debe tomar en cuenta lo planteado en el diseño instruccional, ya que es aquí donde se pone en acción lo planeado utilizando los materiales desarrollados en la etapa anterior. Así mismo, al iniciar la implementación del curso es fundamental dar a conocer los lineamientos más importantes como lo son: cronograma de trabajo, evaluación, contenidos del curso, metodología, etc. Además, se debe informar a los estudiantes los medios de comunicación (chat, email, etc.) que se utilizarán durante el curso y la periodicidad de las unidades. En esta fase es fundamental establecer el "cronograma de implementación", el cual contempla el lanzamiento de los cursos, el periodo de pre-inscripción (que puede durar varios meses), las estrategias de mercadeo de los cursos, su puesta en marcha y finalización.

Evaluación: consiste en la autovaloración de los cursos de forma que se determine el logro de los objetivos y se validen los materiales con estudiantes y profesores, con el fin de tomar acciones correctivas que permitan la mejora continua de cada curso. Aquí se utilizan los instrumentos de medición desarrollados en las etapas anteriores.

Cada una de estas etapas o fases son fundamentales en la realización de los cursos; además, en ellas hay que considerar las estrategias metodológicas y técnicas necesarias acorde a las particularidades de los cursos. En este sentido, se debe definir la plataforma que servirá como soporte tecnológico para los cursos de capacitación virtuales tipo MOOCs. Para esto, se realizó un análisis de los sistemas disponibles en el mercado para estos fines, encontrando cuatro plataformas que cumplen con los requerimientos necesarios, a saber: *CourseBuilder*, *Class2go*, *OpenMOOC* (Alario-Hoyos et al., 2013) y *LearnDash*.

CourseBuilder es un proyecto de código abierto de Google destinado a la creación y publicación de cursos masivos abiertos. En su primer versión se requería de ciertos conocimientos en programación para crear los cursos MOOC en la plataforma de Google, pero en la última versión disponible en marzo del 2013 es posible hacer cursos de forma sencilla desde la misma interfaz del sistema, sin la necesidad de conocimientos avanzados en programación o informática (Google Project Hosting, 2013).

OpenMOOC es una plataforma de código abierto desarrollada con el apoyo de la UNED de España y el CSEV (Centro Superior para la Enseñanza Virtual). Se encuentra aún en etapa de desarrollo y mejora, aunque existen recientes iniciativas que utilizan este sistema como soporte tecnológico para la creación e implementación de MOOCs. Uno de ellos es el proyecto llamado *UNED-COMA*, (https://unedcoma.es), el cual inicio en febrero del 2013 con dos cursos disponibles uno relacionado con el comercio electrónico y el otro relacionado con datos abiertos (Martín García & Gil-Sánchez, 2013).

Class2go es la plataforma de código abierto creada por la Universidad de Stanford para dar soporte a cursos MOOCs, inicialmente impartidos por esta universidad. Desde setiembre del 2012, se liberó su código bajo licencia GNU/GPL[3], de esta manera, diversas instituciones utilizan este sistema como soporte a sus cursos masivos. La instalación es sencilla y cuenta con una documentación completa con la posibilidad de ser utilizada en diversas plataformas Mac, Windows o Linux. Además, permite albergar los videos y actividades en plataformas libres alternas, fuera del servidor donde se tiene alojada la plataforma Class2go (Glance, 2012).

LearnDash es una extensión del gestor de contenidos *WordPress*, la cual se puede utilizar fácilmente para implementar un curso MOOC. Uno de los beneficios es la cantidad de personalización que se puede dar en cuanto a la apariencia de su sitio debido a la gran variedad de plantillas de *WordPress* disponible. Su desventaja es que no es una extensión gratuita, aunque el gestor si lo es, hay que pagar un precio (bastante bajo) para su uso (LearnDash, 2013).

Las cuatro plataformas antes mencionadas son soluciones de código abierto que pueden ser implementadas libremente para la creación de cursos masivos en línea. En primer lugar,

[3] General Public License (GNU GPL or GPL).

CourseBuilder posee el respaldo y garantía de Google, es fácil de instalar, en su última versión la creación de cursos se realiza mediante la interfaz intuitiva de la plataforma, sin necesidad de conocimientos en HTML o Javascript; sin embargo, su mayor inconveniente es que para publicar los cursos en Internet se debe subir el código a través de una cuenta de Google, la cual tiene límites en cuanto al tamaño de los archivos y el tráfico web que reciba el curso; como solución Google brinda la opción de adquirir una cuenta de pago, en la cual se pagaría una cuota de aproximadamente $8 diarios por curso, de tal forma se debería incurrir en gasto adicional para cursos con alta demanda.

Por otra parte, la plataforma *OpenMOOC*, surge como una alternativa reciente para albergar cursos MOOC, provee una interfaz sencilla e intuitiva para la administración y gestión de cursos, mecanismos de seguimiento del progreso de los estudiantes y la posibilidad de incorporar videos publicados en *Youtube*; pero, al ser una alternativa muy reciente su código aún se encuentra en desarrollo y mejora, además carece de una documentación suficientemente completa que permita su instalación y puesta en producción de forma adecuada.

La tercer alternativa es *Class2go*, la cual presenta muchas de las ventajas de las plataformas antes mencionadas como soporte de videos alojados en *Youtube*, interfaz sencilla para creación de cursos, progreso de los estudiantes, asignación de actividades, etc. Además, esta plataforma posee una documentación completa sobre su instalación, funcionamiento de módulos y directrices para los instructores de los cursos. Recientemente, los desarrolladores de esta plataforma en conjunto con el grupo de *edX*, se encuentran trabajando en la mejora de *Class2go*, la cual esperan lanzar ara finales del 2013.

Adicionalmente, existen empresas que brindan el soporte tecnológico para alojar cursos MOOC, que luego pueden ser comercializados en estas mismas plataformas a precios muy bajos. Entre estas se destaca el sitio http://wedubox.com/, el cual utiliza la filosofía de cursos masivos en línea con bajo costo. Se puede anotar que este sitio no contiene cursos MOOC exactamente, pues no todos los cursos son abiertos y gratuitos, hay cursos desde USD0,99 hasta USD99.

Dada la oferta de plataformas se decidió utilizar *Class2go*, la cual es una solución de código abierto y que se adecua a las particularidades de capacitación virtual de los cursos MOOC para docentes de matemáticas, ya que es de fácil manejo y su interfaz es muy sencilla, además permite la incorporación de texto matemático en formato *LaTex*. De esta manera, se siguió la metodología antes descrita para elaborar los cursos, los cuales se encuentran disponibles en http://cursos.reformamatematica.net/.

Conclusiones y trabajo futuro

La creación de cursos de capacitación virtual para docentes de matemáticas mediante MOOC constituye una primera experiencia en América Latina. La realización de estos cursos a la par de otras iniciativas que acompañan la reforma educativa en Costa Rica, posicionan a ésta como un ejemplo de reforma curricular para la región. Se trata de una integración sinérgica entre programas de estudio de gran calidad y pertinencia, cursos bimodales de vanguardia, cursos virtuales, plan gradual de implementación de los programas, documentos múltiples de apoyo curricular, planes piloto cada año, así como una comunidad virtual de educación matemática.

Por otra parte, desde un principio se identificó a la tecnología web como aliado para hacer frente a los cambios que implicarían la implantación y puesta en marcha de nuevos programas de estudio.

La utilización de una modalidad de cursos virtuales basados en las tendencias internacionales más recientes (no más de 2 años) para capacitación docente permite proponer una nueva orientación para los MOOC, que en un principio han sido utilizados para impartir cursos universitarios especializados y dirigidos a un público masivo y heterogéneo.

Este tipo de cursos orientados a la capacitación docente es una vía que brinda opciones para abordar algunos de los problemas que han tenido los MOOC hasta ahora., Uno de los mayores problemas encontrados con los MOOC ha sido la alta tasa de deserción, para lo cual se logró identificar una posible causa: miles de estudiantes con formación heterogénea y sin un fin claro en común. En Costa Rica, se ha seleccionado un segmento específico de población, y con una necesidad precisa. Los docentes que deben implementar un nuevo currículo con estándares internacionales demandan capacitación en los mismos pues es indispensable para su labor diaria. En un contexto nacional de subdesarrollo no es posible pensar en capacitaciones presenciales a realizar en el corto plazo; resulta aquí crucial acudir a la tecnología de comunicación para poderle llegar a la mayor cantidad de docentes en el plazo más reducido para no perder el ritmo apropiado de una reforma siempre expuesta a posibles retrocesos (debidos a resistencia docente o sindical o a cambios de gobiernos). MOOC asociados a otras acciones y dentro de una estrategia global de implementación es un estrategia que ofrece oportunidades que no pueden tener los cursos virtuales abiertos a cualquiera.

Se espera tener un número no mayor a 100 o 150 inscritos por convocatoria en los cursos y concentrados en primera instancia en profesores costarricenses (pues no se descarta la posibilidad de tener estudiantes de otras latitudes). Esto además de disminuir la deserción permite especializar los cursos, pues se tiene un público meta bien definido.

La expectativa es el diseño de MOOC para todos los ciclos educativos que componen el sistema educativo preuniversitario costarricense. En cuanto al contenido: los cursos no son de matemáticas, ni tampoco de pedagogía general: son cursos de pedagogía específica de las matemáticas donde hay matemáticas y pedagogía pero orientadas hacia la acción de aula.

Finalmente, se espera ofrecer mediante estos cursos la posibilidad de capacitación a la totalidad de los docentes en servicio de matemáticas del país. Además, siguiendo los modelos de sustentabilidad y manejo de certificaciones se espera llegar a un acuerdo con el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica para emitir certificados oficiales de aprobación de los cursos virtuales MOOC.

Agradecimientos

Estos cursos MOOC para la capacitación docente en matemáticas son parte del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (www.reformamatematica.net), desarrollado con el concurso del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica , el apoyo financiero de Fundación para la colaboración Costa Rica Estados Unidos (CRUSA), administrado por la

Fundación Omar Dengo, y cuyo director general es el catedrático de la Universidad de Costa Rica Angel Ruiz.

Referencias y bibliografía

Alario-Hoyos, C., Bote-Lorenzo, M. L., Gómez-Sánchez, E., Asensio-Pérez, J., Vega-Gorgojo, G., & Ruiz-Calleja, A. (2013). Enhancing Learning Environments by Integrating External

Applications. *Bulletin of the IEEE Technical Committee on Learning Technology*, *15*(1), 21.

Bergmann, J. C., & Grané, M. (2013). La universidad en la nube. Recuperado desde http://www.e-uaem.mx:8080/handle/123456789/151

Bujak, K. R., Baker, P. M., & DeMillo, R. A. (2012). The Evolving University: Disruptive Change and Institutional Innovation. Recuperado desde http://c21u.gatech.edu/sites/default/files/u21/C21U_22012_Evolving_University.pdf

Carr, N. (2012). The Crisis in Higher Education | MIT Technology Review. Recuperado desde http://www.technologyreview.com/featuredstory/429376/the-crisis-in-higher-education/

Coursera, Inc. (2013). Coursera. Retrieved October 21, 2013, from https://www.coursera.org/

Creed-Dikeogu, G., & Clark, C. (2013). Are You MOOC-ing Yet? A Review for Academic Libraries. *Kansas Library Association College and University Libraries Section Proceedings*, *3*(0), 9–13. doi:10.4148/culs.v1i0.1830

Daniel, J. (2012). Making sense of MOOCs: Musings in a maze of myth, paradox and possibility. *Journal of Interactive Media in Education*, *3*. Recuperado desde http://www-jime.open.ac.uk/jime/article/viewArticle/2012-18/html

De Waard, I. (2013). *MOOC YourSelf* (1st ed.). Ignatia de Waard. Kindle edition.

Dellarocas, C., & Van Alstyne, M. (2013). Money models for MOOCs. *Communications of the ACM*, *56*(8), 25–28.

Downes, S. (2007, February 3). Half an Hour: What Connectivism Is. *Half an Hour*. R Recuperado desde http://halfanhour.blogspot.com/2007/02/what-connectivism-is.html

Downes, S. (2012). Connectivism and Connective Knowledge: essays on meaning and learning networks. *National Research Council Canada, http://www. downes. ca/files/books/Connective_Knowledge-19May2012. pdf*.

edX. (2013). edX. Take great courses from the world's best universities. Recuperado desde https://www.edx.org/

Glance, D. (2012). Stanford's Class2Go will enable the free online university of the future. Recuperado desde http://theconversation.com/stanfords-class2go-will-enable-the-free-online-university-of-the-future-9696

Google Project Hosting. (2013). Course Builder. Recuperado desde https://code.google.com/p/course-builder/

Herman, R. L. (2012). The MOOCs Are Coming. *The Journal of Effective Teaching*, *12*(2), 1–3.

Khan Academy. (2013). About-Khan Academy. Recuperado desde https://www.khanacademy.org/

LearnDash. (2013). WordPress LMS Plugin by LearnDash®. Recuperado desde http://www.learndash.com/

Martín García, S. P., & Gil-Sánchez, L. (2013). The OpenMOOC project. Platform based on free software for an open education. Presented at the TERENA Networking Conference, Países Bajos.

McAuley, A., Stewart, B., Siemens, G., & Cormier, D. (2010). The MOOC model for digital practice. *SSHRC Knowledge Synthesis Grant on the Digital Economy*. Recuperado desde http://www.edukwest.com/wp-content/uploads/2011/07/MOOC_Final.pdf

Miríada X. (2013). Miríada X. Recuperado desde https://www.miriadax.net/

Pappano, L. (2012). The Year of the MOOC. *The New York Times*, *4*. Recuperado desde http://www.edina.k12.mn.us/sites/edina.k12.mn.us/files/attachments/954/downloads/The%20Year%20of%20the%20MOOC%20(NY%20Times).pdf

Ramírez Vega, A. (2013). *Diseño, desarrollo e implementación del curso MA-1404 Cálculo para estudiantes del TEC mediante estrategias de e-learning* (Licenciatura). Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (10), pág–1.

Ruiz, A., & Barrantes, H. (2009). *Encrucijada en al enseñanza de la matemática: la formación de educadores* (Primera edición.). Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Sangrá, A. (2001). Enseñar y aprender en la virtualidad. *Educar*, (28), 117–131.

Sangrà, A., Vlachopoulos, D., Cabrera Lanzo, N., & Bravo, S. (2011). *Hacia una definición inclusiva del e-learning* (External research report). España: e-Learn Center UOC.

Siemens, G. (2005). Connectivism: A learning theory for the digital age. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, *2*(1), 3–10.

Skiba, D. J. (2012). Disruption in higher education: Massively open online courses (MOOCs). *Nursing education perspectives*, *33*(6), 416–417.

Stepan, A. (2013). Massive Open Online Courses (MOOC) Disruptive Impact on Higher Education. Recuperado desde http://summit.sfu.ca/item/13085

Udacity, Inc. (2013). Advance Your Education With Free College Courses Online - Udacity. Recuperado desde https://www.udacity.com/

Yuan, L., & Powell, S. (2013). MOOCs and Open Education: Implications for Higher Education. *JISC CETIS*, *21*, 2013.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Los Problemas de Matemáticas Escolares de Primaria, ¿Son solo Problemas para el aula?[1]

J. M. Chamoso
Departamento Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
S. Vicente
sanvicente@usal.es
E. Manchado
manchado@usal.es
D. Múñez
davidm@usal.es
Departamento Psicología Evolutiva y de la Educación.
Universidad de Salamanca
España

Resumen

Resolver problemas de matemáticas es una tarea cognitivamente compleja que se realiza en las aulas de primaria de la mayor parte de los países del mundo, uno de cuyos objetivos es conectar las matemáticas escolares con la vida real. Por otro lado, los libros de texto se utilizan como material fundamental de aprendizaje en primaria en la mayor parte de los países del mundo. En este trabajo se pretende caracterizar el grado de autenticidad de los problemas presentes en los libros de texto y cuadernillos complementarios de los seis cursos de primaria de una de las editoriales más utilizadas

[1] Este trabajo, realizado por los autores, fue coordinado por J. Rosales (jrosales@usal.es) y J. Orrantia (orrantia@usal.es), de la Facultad de Educación, Universidad de Salamanca (España).

en España y Latinoamérica, adaptando el sistema de análisis creado por Palm y depurado por Depaepe. Los resultados muestran una escasez de problemas auténticos en los diversos cursos, decreciendo según se aumenta del nivel de escolaridad.

Palabras clave: Resolución de problemas, Primaria, problemas auténticos y realistas, libros de texto de Primaria

1. Introducción

Resolver un problema de matemáticas es una tarea cognitivamente compleja ya que requiere tener en cuenta diversos procesos para comprender la situación en la que el problema está inmerso y proyectar esa comprensión en la estructura matemática adecuada que permita elegir, al que intenta resolverlo, entre todos los procedimientos que conoce, cuál o cuáles son los apropiados para responder la pregunta del problema.

La resolución de problemas es una actividad fundamental en las clases de matemáticas de todos los países del mundo pues ayuda a que el alumno conecte las matemáticas con el mundo real y generalice lo que aprendió a su vida cotidiana. Sin embargo, cada vez hay más evidencias de que esta transferencia no siempre se produce como se espera y que no todos los alumnos generan las comprensiones deseadas cuando resuelven problemas.

En este trabajo presentamos un análisis de los problemas de matemáticas de primaria propuestos por una editorial conocida y utilizada en España y Latinoamérica, para intentar comprender hasta qué punto reflejan situaciones que los alumnos encuentran fuera del aula y, por tanto, valorar el salto que han de dar desde los problemas escolares para aplicar lo que aprenden a la vida real. Para ello, en primer lugar, describiremos brevemente las razones por las que la tarea de resolver un problema es una tarea compleja y qué niveles de comprensión implica; en segundo lugar, sintetizaremos los resultados de las evaluaciones que indican que los alumnos muestran dificultades para resolver problemas de matemáticas cercanos a la vida real; en tercer lugar, describiremos cómo los alumnos suelen resolver los problemas en clase de matemáticas y, finalmente, presentaremos nuestro estudio, sus resultados y las conclusiones que de él se desprenden.

2. Marco teórico

2.1. Niveles de comprensión y resolución de problemas

De acuerdo con los modelos más aceptados de resolución de problemas (por ejemplo, Verschaffel, Greer & De Corte, 2000), para resolver un problema es necesario comprenderlo antes de elegir la operación matemática necesaria para responder a la pregunta planteada. Es decir, el resolutor debe comprender la situación que se describe en términos de personajes, acciones e intenciones antes de proyectar esa situación a una estructura matemática en la que se representen los conjuntos del problema y las relaciones entre ellos, para lo cual debe utilizar sus conocimientos previos. Posteriormente, ya tiene que seleccionar la operación que, de acuerdo con la estructura matemática del problema, permite resolverlo. A continuación, ejecuta las operaciones aritméticas necesarias para obtener el resultado, y una vez obtenido, debe interpretarlo con relación al modelo matemático y la situación real descrita en el problema.

Este planteamiento teórico no siempre coincide con el desarrollo real pues, en ocasiones, los alumnos prefieren seguir un proceso simplificado y superficial de resolución pasando de los datos directamente a la operación, y de ésta al resultado, sin que exista razonamiento ni valoración de la plausibilidad del resultado obtenido. Este procesamiento superficial ha sido ampliamente documentado, por ejemplo, a través del uso para la resolución de la "estrategia de la palabra clave" mediante la cual los alumnos, a partir de los datos, buscan una palabra clave que indique qué operación han de realizar con ellos ("ganar" para sumar, "perder" para restar; e.g., Hegarty, Mayer & Monk, 1995; Nesher & Teubal, 1975; Verschaffel, De Corte & Pauwels, 1992). Una vez obtenido el resultado de la operación, ésta se ofrece como solución sin constatación de que, efectivamente, ese resultado es plausible. Este modo de resolver problemas únicamente funciona con aquellos denominados consistentes (Lewis y Mayer, 1987), en los cuales la palabra clave coincide con la operación que hay que realizar (p.e., "Juan tiene 6 cromos, pierde algunos y al final le quedan 2. ¿Cuántos cromos ha perdido?", o "Juan tiene 6 cromos. Pedro tiene 8 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan menos que Pedro?"), mientras que esta estrategia no es aplicable a los inconsistentes, de mayor grado de dificultad porque la palabra clave no coincide con la operación que hay que realizar (p.e., "Juan tiene 6 cromos, gana algunos y al final tiene 8. ¿Cuántos cromos ha ganado?" o "Juan tiene 6 cromos. Pedro tiene 8 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Pedro más que Juan?").

La resolución superficial de problemas se ilustra con comportamientos tan llamativos como cuando se pidió a 97 alumnos de Primaria que resolvieran el siguiente problema (IREM de Grenoble, 1980): "En un barco hay 20 cabras y 15 vacas. ¿Cuál es la edad del capitán?". La respuesta "35" fue dada por alrededor de un 75% de estudiantes, que ejecutaron una operación con los números proporcionados sin tener en cuenta la situación planteada. También se manifiesta en la resolución de problemas realistas, aquellos que necesitan de un razonamiento que debe considerar aspectos reales como, por ejemplo, "Juan corre los 100 metros en 17 segundos. ¿Cuánto tardará en correr 1 kilómetro? ".

Finalmente, este procesamiento superficial de los alumnos cuando resuelven problemas podría tener importancia en su rendimiento en las pruebas de evaluación de la competencia matemática como TIMMS o el Informe PISA ya que la resolución de problemas es una de las habilidades fundamentales que se valoran en esas evaluaciones. De hecho, el propio currículo español sostiene que la competencia matemática "cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella" (*ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria,* p. 31494).

2.2. Problemas con los problemas: qué aprenden los niños.

Como acabamos de señalar, la resolución de problemas aritméticos que se realiza en clase de matemáticas no siempre contribuye a que los alumnos aprendan a aplicar los procedimientos matemáticos en situaciones de su vida diaria. Algunos autores, incluso, han comprobado que favorecen que los alumnos desarrollen una visión peculiar de qué supone resolver un problema en clase de matemáticas (De Corte y Verschaffel, 1985; Gerofsky, 1996; Lave, 1992; Reusser y

Stebler, 1997a; Schoenfeld, 1991): a) todo problema puede resolverse y tiene sentido en sí mismo; b) la respuesta correcta a cada problema es única, precisa y numérica; c) la solución puede y debe obtenerse ejecutando una o varias operaciones aritméticas con los datos y, casi con toda seguridad, con todos ellos; d) el problema ha de resolverse aplicando los conceptos, fórmulas y algoritmos matemáticos tratados en las últimas clases; e) el problema contiene toda la información necesaria para interpretarlo y llegar a la solución, de manera que no debe buscarse información ajena al mismo; y f) las personas, objetos, lugares y razonamientos difieren en los problemas de matemáticas y las situaciones del mundo real, de manera que no es importante si la situación propuesta viola los conocimientos previos o las intuiciones basadas en experiencias cotidianas.

Esta chocante imagen puede estar influenciada por el papel que juegan los libros de texto en el aprendizaje de las matemáticas en primaria, al ser ampliamente utilizados por los docentes de la mayor parte de los países del mundo, lo que puede influir en los conocimientos y creencias de los profesores (Nathan y Koedinger, 2000). La proporción en su uso no parece marcar la diferencia en el rendimiento de los alumnos en matemáticas (ver Hiebert et al., 2003) pero, su contenido, puede marcar diferencias en la forma de enseñar matemáticas en los diferentes países.

Analizando ese contenido en libros de matemáticas de Primaria de conocidas y utilizadas editoriales españolas, algunos estudios mostraron que los problemas presentados, con referencia al tipo de estructuras matemáticas posibles, principalmente incluían problemas consistentes y una escasa presencia tanto de los de un contexto situacional pertinente como de problemas realistas o que requirieran un cierto grado de desafío (Orrantia, González y Vicente, 2005). Estos resultados chocan con los objetivos propuestos en el currículo oficial en matemáticas. Para que los alumnos comprendan cuál es el valor de la resolución de problemas más allá de las clases de matemáticas sería necesario plantear problemas diferentes, que permitieran establecer conexiones entre las matemáticas que aprende en la escuela y las situaciones a las que se enfrenta en su vida diaria. Una posibilidad sería utilizar problemas realistas y auténticos.

2.3. Introduciendo la vida real en el aula: problemas realistas y auténticos

Dos características que comparten la mayor parte de los problemas a los que se enfrentan los alumnos en primaria son, por un lado, que son resolubles utilizando procedimientos y conocimientos matemáticos, y por otro, que no necesitan razonamientos adicionales no cuantitativos para su resolución. Estas dos premisas no son válidas en los problemas realistas, aquellos que reproducen situaciones del mundo real y que necesitan un razonamiento basado en conocimientos más allá de los estrictamente matemáticos. En estos problemas la utilización de procedimientos aritméticos puede llevar a un alumno a asumir como correctas soluciones que, siendo válidas desde el punto de vista matemático, carecen realmente de sentido. Por ejemplo, en el problema "Juan corre los 100 metros en 17 segundos. ¿Cuánto tardará en correr 1 kilómetro?" los alumnos suelen realizar la multiplicación 17 x 10, asumiendo que Juan va a ser capaz de correr durante 1 kilómetro al mismo ritmo que los primeros 100 metros, lo cual va en contra del sentido común. De esta manera, en los problemas realistas se han de utilizar conocimientos no matemáticos, relacionados con el mundo real y el sentido común, lo que acerca a situaciones que aparecen en la vida cotidiana (Verschaffel y De Corte, 1997) .

Algunos autores, como Palm y Nystrom (2009), intentaron avanzar más y elaboraron versiones más auténticas de los problemas del estudio de Verschaffel y De Corte (1997). Para estos autores un problema auténtico es aquel que "representa alguna situación de la vida real de manera que aspectos importantes de esa situación se simulan en un grado razonable" (Palm, 2008, p. 40). Concretamente, consideran tres aspectos fundamentales que deben aparecer en un problema para que sea considerado auténtico:

1. Evento: si ha tenido lugar, o tiene una alta probabilidad de tener lugar, fuera de la escuela.
2. Pregunta: si hay concordancia con una situación equivalente fuera de la escuela.
3. Información y datos: si hay coincidencia con los de la vida real.

Estos autores, además, proponen otros aspectos adicionales, aunque secundarios, que contribuyen a que un problema pueda considerarse una tarea auténtica:

a) Especificidad de los datos: si los detalles de la situación descrita pueden modificar las estrategias de resolución de los alumnos.
b) Propósito en el contexto figurativo: si hay coincidencia o no del propósito de la resolución de la tarea en el contexto escolar y en la vida real, teniendo en cuenta que ese propósito sea tan claro en la escuela como lo es fuera de ella.

Un ejemplo de problema auténtico sería: Todos los alumnos de tu colegio van a hacer un viaje el 15 de mayo. Tu tutor te ha pedido que le ayudes con el transporte. Crees que lo mejor sería que todos vayan en autobús, por lo que tienes que encargarte de solicitar los necesarios. Has visto que en la lista de alumnos hay 360 nombres. Tu profesor te ha dicho que puedes pedir autobuses a Autocares Tomás y que en cada uno pueden viajar 48 alumnos. Rellena la siguiente solicitud, que vas a enviar a Autocares Tomás.

AUTOCARES TOMÁS

Nombre………………………………………………………………

Escuela………………………………………………………………

Día del viaje……………………………………………………

Número de autobuses solicitados…………………………

Observaciones…………………………………………………

Una vez elaboradas las versiones auténticas de los problemas, los autores compararon la proporción de respuestas correctas de los alumnos a los problemas utilizados por Verschaffel et al. con la de las versiones auténticas de los mismos problemas y los resultados mostraron que aportaban más soluciones situacionalmente correctas a los problemas reescritos de manera auténtica.

De esta manera, los problemas aritméticos verbales más cercanos a la vida real parecen ser las versiones auténticas de los problemas realistas. Sin embargo, los parámetros descritos por Palm y Burman (2004) para caracterizar los problemas como auténticos también se pueden aplicar a otros, como los problemas aritméticos. De esa forma, Palm and Burman (2009) analizaron el grado de autenticidad de los ítems de los tests nacionales de evaluación de la competencia matemática utilizados en Finlandia y Suecia en cada uno de los aspectos señalados anteriormente. Los resultados mostraron que sólo el aspecto "evento" estaba simulado en más del 90% de los ítems, mientras que el resto de los aspectos sólo podría considerarse simulados en menos del 50% de los ítems. En un estudio similar Depaepe, De Corte y Verschaffel (2010) analizaron los problemas resueltos por dos profesores de 6º de Primaria en una escuela de Flandes a lo largo de 7 meses y los resultados mostraron que, además del "evento", algunos aspectos como existencia, especificidad y realismo de los datos, estrategias y requerimientos de resolución estaban bien simulados en los problemas.

En resumen, resolver un problema de matemáticas es una competencia compleja ya que implica la comprensión del problema en diversos sentidos, aunque en muchas ocasiones los alumnos los resuelven de manera superficial yendo directamente de los datos a la operación sin razonamiento. Esta forma superficial de resolver problemas encaja con las reglas del contrato didáctico que prevalece en el desarrollo de muchas clases de matemáticas ya que algunos alumnos aprenden a resolver problemas verbales sin movilizar razonamientos, algo que contradice el concepto de competencia matemática tanto de organismos internacionales como la OCDE o el propio currículo de matemáticas en España. Asimismo, algunas de las características de los problemas incluidos en los libros de texto de matemáticas de primaria contribuyen a que este modo superficial de resolver los problemas baste para resolver con éxito la mayor parte de ellos, aunque eso signifique desvincular las matemáticas escolares de la vida real. Por otro lado los problemas realistas y auténticos, que requieren una comprensión más allá de lo estrictamente matemático y permiten al alumno comprender la situación pueden favorecer un proceso de resolución más vinculado con la vida real.

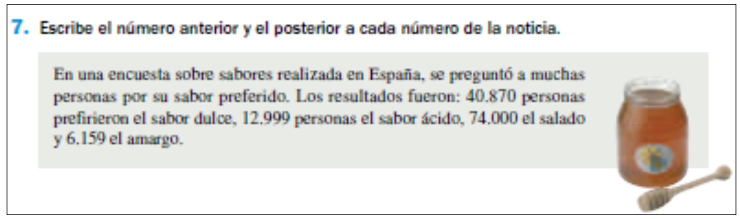
En España no se conocen análisis de problemas de los libros de texto relacionando las situaciones propuestas con las situaciones auténticas, según la caracterización de Palm para los ítems de evaluación de la competencia matemática en Suecia y Finlandia, y por Depaepe et al. en escuelas de Flandes. El objetivo del presente estudio es caracterizar el grado de autenticidad de los problemas de los libros de texto y cuadernillos complementarios de una de las editoriales más utilizadas en nuestro país, adaptando el sistema de análisis creado por Palm y depurado por Depaepe. Al analizar los problemas de todos los cursos académicos de primaria, podremos describir la evolución del nivel de autenticidad a lo largo de ellos. También se analizarán algunas de las medidas ya descritas en el artículo de Orrantia, González y Vicente (2005) para comprobar si los problemas propuestos han variado.

3. Método

Procedimiento

La muestra de problemas considerada se tomó de los libros de texto y los cuadernillos trimestrales de los seis cursos de Educación Primaria de una editorial conocida y utilizada en España y Latinoamérica. Únicamente se consideraron aquellos problemas que cumplían los dos criterios: a) tener tanto un enunciado verbal como una pregunta que aludiera a la situación descrita; y b) que requiriera al menos una operación aritmética para ser resuelto. De esta manera no se consideraron aquellos problemas que realizaban una pregunta sobre una situación figurativa (por ejemplo, un dibujo) al no permitir una adecuada categorización de los datos ni el evento, que faltara la pregunta, que pidiesen inventar el enunciado a partir de cálculos dados, que comparasen magnitudes ni los que no requerían realizar ningún cálculo. En concreto, el problema 1 se consideraría para el análisis mientras que los problemas 2 y 3 no.

"Elena quiere comprar un chicle y una gominola. El chicle cuesta 60 céntimos y la gominola 35. ¿Cuánto dinero necesita Elena para comprar las dos cosas?" Ejemplo 1. 3º Primaria, p. 17


7. Escribe el número anterior y el posterior a cada número de la noticia.

En una encuesta sobre sabores realizada en España, se preguntó a muchas personas por su sabor preferido. Los resultados fueron: 40.870 personas prefirieron el sabor dulce, 12.999 personas el sabor ácido, 74.000 el salado y 6.159 el amargo.

Ejemplo 3. 3º Primaria, p. 23

Ejemplo 2. 3º Primaria, p. 174

Categorías de análisis

Los problemas se categorizaron a partir de algunas de las categorías propuestas por Palm (2008), adaptadas de las Depaepe et al. (2010) (ver Tabla I) en los siguientes sentidos:

1. Auténtico: El evento es próximo al alumno fuera de la escuela, la pregunta formulada tiene sentido, los datos proporcionados son adecuados, existe un propósito y los datos son específicos. Un ejemplo sería:

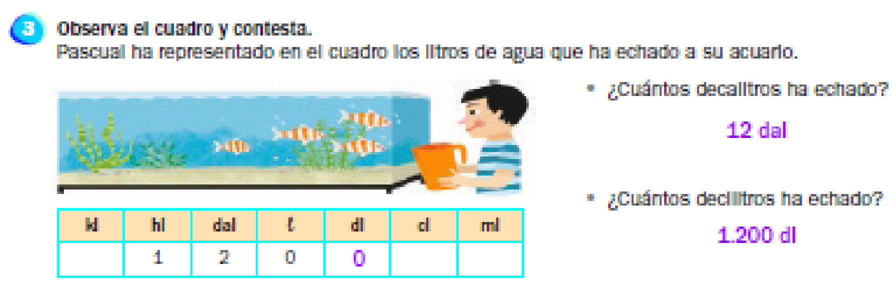
Félix quiere pesar a su perro, pero no consigue que esté quieto encima de la báscula. Explica lo que ha hecho para calcular cuánto pesa el perro y halla tú ese peso.

3º Primaria, p. 159

2. Estándar ajustado: Describen situaciones cercanas al alumno, con cantidades razonables, pero sin un propósito concreto. Serían similares a los auténticos pero sin un propósito evidente. Ejemplo: "Carmen salió de casa con 50 € para hacer la compra. Primero, gastó 27 € en la pescadería y, después, 14 € en la frutería. ¿Cuánto dinero le sobró?" (4º Primaria, p. 35)
3. Estándar: Describen situaciones que el alumno podría encontrar en la vida real, con datos adecuados pero no específicos, o bien con datos específicos pero en situaciones no próximas al alumno por la forma que se plantean. Es decir, situaciones más alejadas que

los estándar ajustados. Ejemplo: "A un lago han llegado 5 autocares con 50 personas en cada uno. ¿Cuántas personas han llegado?" (4º Primaria, p. 29)

4. Contenedor: Describen situaciones que, aun siendo conocidas por el alumno, no son cercanas ni por evento ni por especificidad de los datos y en las que cabe casi cualquier situación con cualquier magnitud de los conjuntos y cualquier acción sobre ellos. Los datos pueden ser ridículamente exactos y poco específicos. Ejemplo: "En un almacén se envasaron 42 cajas de cerezas. En cada caja pusieron 3 kilos. ¿Cuántos kilos se envasaron?" (4º Primaria, p. 17)
5. Ejercicio camuflado: Proponen situaciones, generalmente extrañas, en las que es evidente que lo importante es ejercitar la operación objeto de estudio. Se diferencian del estándar en que la pregunta tiene poco sentido. Ejemplo: "Un sello mide 6 cm y 4 mm de largo y 3 cm y 7 mm de ancho. ¿Cuántos milímetros mide de largo más que de ancho?" (4º Primaria, p. 95)
6. Problema absurdo: Describen situaciones ajenas a la vida cotidiana del alumno, los datos se presentan de manera grotesca o se plantea una pregunta con escaso sentido con relación a la situación propuesta. Ejemplos:
   - Por evento: "En un hormiguero hay 4 millones de hormigas. Cada una mide 3 mm de largo. Si se colocasen todas en fila, sin dejar ningún espacio entre ellas, ¿la longitud de la fila sería mayor o menor de 10 km?" (6º Primaria, p. 167)
   - Por pregunta:



3 **Observa el cuadro y contesta.**
Pascual ha representado en el cuadro los litros de agua que ha echado a su acuario.

kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
	1	2	0	0		

- ¿Cuántos decalitros ha echado?
  12 dal
- ¿Cuántos decilitros ha echado?
  1.200 dl

5º Primaria, Cuadernillo 3, p. 14

   - Por existencia de datos: "Leonor compra doce cuartos de kilo de garbanzos y Concha compra seis medios kilos. ¿Cuántos kilos compra cada una? ¿Quién compra más?" (5º Primaria, p.71)

Codificación de los datos

Tres autores realizaron una primera codificación exploratoria conjunta del 20% de los problemas, concretamente referidos a los de los cursos 3º y 4º. Durante esa primera codificación se realizaron las especificaciones en los criterios suficientes para alcanzar un nivel aceptable de fiabilidad y se descartaron dos categorías –uso del lenguaje y herramientas externas- que apenas discriminaban. Posteriormente se realizó una segunda codificación del 20% de problemas diferentes de una muestra representativa en función tanto del curso como del tema tratado, de manera independiente, por parte de los tres autores.

En los resultados obtenidos se calculó el índice de acuerdo inter-jueces con el coeficiente alfa de Cronbach para cada una de las categorías de análisis, con los siguientes resultados: Evento, $\alpha = .97$; pregunta, $\alpha = .99$; existencia de información, $\alpha = .98$; propósito, $\alpha = .97$; especificidad de los datos, $\alpha = .99$, todos altamente significativos ($p > .001$)

El 80% restante de los problemas (incluido el 20% de los problemas analizados en la primera codificación exploratoria) fue categorizado únicamente por uno de los investigadores, discutiendo entre los 3 en aquellos que la codificación presentaba dificultades en algún aspecto que se resolvió mediante discusión y acuerdo.

Tabla I

Marco teórico para el análisis de los problemas de matemáticas

Aspecto	**Puntuación**		
	1	**0.5**	**0**
Evento*	a) El alumno podría encontrarlo en la vida real, fuera de la escuela. b) El alumno, sin ser protagonista, puede compartirlo con personas cercanas de manera frecuente o relativamente frecuente (p.e.: irse de vacaciones y calcular los gastos).	a) El alumno podría encontrarlo fuera de la escuela aunque con escasa probabilidad. b) El alumno, sin ser protagonista, puede compartirlo con personas cercanas de manera poco frecuente (p.e.: comprar una nevera o un coche). c) El alumno puede haberlo conocido pero el papel que se le exige no coincide con el suyo (p.e.: personas que hay dentro de un museo).	a) Es imaginario. b) Aunque incluya objetos del mundo real, es ficticio (p.e.: hormigas que se ponen en fila india, meros que calculan profundidades de algas). c) No existe evento porque el problema es puramente matemático.
Pregunta*	a) Podría ser formulada de manera habitual para el evento descrito. La respuesta tiene un valor práctico o es interesante incluso para los no interesados en matemáticas. b) Incluye las de tipos de problemas de comparación 1 y 2, cambio 5 y 6, cuya validez podría merecer una puntuación menor pero que no podrían formularse de otra manera. c) Pide el resultado en una unidad concreta y habitual, incluso si implica un cambio de unidades (km, m, cm, mm; Tm, kg, mg; l, cl, ml)	a) Podría formularse en el contexto real pero su interés es limitado para el alumno. b) Aunque podría tener sentido, alude a una cantidad o período de tiempo que no se corresponde con lo que cabría esperarse en una situación real (p.e.: teléfonos empaquetados en 7 o en 17 horas, y no en 8 -jornada laboral-, o 24 -día completo) c) Incluye los tipos de problemas de comparación 1 y 2, cambio 5 y 6 de utilidad escasa (¿cuántas gallinas menos que conejos hay? 2º Primaria d) Pide el resultado en una unidad diferente a la habitual.	a) No podría formularse en el mundo real. b) Solicita el resultado en una medida no habitual en la vida real.
Existencia de datos*	a) Los datos relevantes en la situación simulada coinciden con los datos accesibles en la escuela	a) Los datos podrían existir en la realidad pero no en la forma habitual en la que se presentarían, y no se justifica la causa de esta presentación; la presentación de los datos es	a) Los datos relevantes que son importantes para la solución de la situación simulada no son los mismos que los accesibles en la escuela o esta información

		compleja pero la situación no justifica esa complejidad en la presentación (p.e.: algunos problemas de comparación 3 y 4, problemas de fracciones o porcentajes en los que se conoce el porcentaje pero no la cantidad); b) Se mezclan datos expresados con entidades diferentes, siendo al menos uno de ellos de uso común (p.e.: fracciones: ¼, ½, 1/3, 1/5, 1/8 para pizzas, 1/10); unidades: las comunes, como km, m, cm, mm; Tm, kg, mg; l, cl, ml)	sólo es accesible aplicando competencias diferentes a las requeridas en la situación simulada (p.e.: medias o desviaciones típicas) b) La precisión en la cantidad de los datos sería imposible en la vida real (p.e.: un pez que pone 236 huevos en una pecera) c) Se mezclan datos expresados con entidades diferentes o poco comunes. d) Cada cantidad del problema, incluida por la que se pregunta, es diferente de las demás, al menos una de ellas poco habitual.
Propósito en el contexto figurativo	a) Se menciona explícitamente en la tarea escolar y está en concordancia con el de resolver la situación simulada	a) A pesar de no ser explícito, podría deducirse con sentido común (p.e.: saber cuánto te tienen que dar de vuelta, saber la diferencia de altura entre dos niños) o forman parte de lo un alumno querría saber por curiosidad, sin propósito concreto.	a) No es claro. El contexto escolar podría describirse de manera general, sin aludir a ninguna situación concreta, de manera que podría ajustarse a muchas situaciones y propósitos para resolver la tarea.
Especificidad de los datos	a) Los personajes tienen nombre propio, los objetos están definidos y los lugares son específicos. b) El problema está formulado en 1ª o 2ª persona. c) El problema se refiere a un objeto o situación cercana al alumno y se refiere a ella con un artículo determinado (p.e.: “la clase”) d) Si se utilizan gráficos, se menciona su procedencia o se aporta un contexto que permita deducirla (p.e.: se adjunta un dibujo representando el escaparate de una tienda con precios)	a) La situación en la tarea escolar no es específica pero al menos lo son los objetos que son objeto de tratamiento matemático. b) No se aporta el nombre de los personajes pero sí su papel. c) Se aporta el nombre de los personajes pero no su papel, lo cual hace que no puedan valorarse otros aspectos como el realismo de los datos (no es lo mismo que Ángel recoja 100 kg de patatas si es un agricultor que si no lo es pero tiene un huerto a la vuelta de su casa) d) El problema se refiere a un objeto o situación no necesariamente cercana al alumno y se refiere a ella con un artículo determinado (p.e.: “el lago”)	a) La situación en el contexto escolar es general en la que los objetos y los sujetos no están especificados

Fuente: Adaptado de Palm & Burman, 2004, citado en De Paepe, De Corte & Verschaffel, 2010**.**

Por otro lado, se analizó el tipo de problema al que pertenecía cada uno de ellos en función de su estructura conceptual. En primer lugar, se clasificaron en función de si su estructura era aditiva o multiplicativa. En el primer caso, los de estructura aditiva fueron categorizados a partir de la clasificación de Heller y Greeno (1978): cambio, comparación y combinación. Cada uno de estas categorías se dividió en varios subtipos en función de los términos en que estén formulados y de la operación que requiera su resolución (sumas o restas), para poder, finalmente, determinar si eran problemas consistentes o inconsistentes, en función de si la operación que se requiere coincide o no con la palabra clave contenida en el problema (p.e.: "ganar" para sumar) o no. En el segundo, los de estructura multiplicativa, se categorizaron en función de la operación necesaria para resolverse: los que se resolvían con una multiplicación se clasificaron en multiplicación razón, multiplicación comparación y producto cartesiano y los que se resolvían con una división en división razón, cuotición o comparación.

Predicciones

Estudios previos permiten suponer que una gran parte de los problemas sean consistentes, especialmente de combinación y cambio, y fundamentalmente, problemas estándar y contenedor, aunque con una proporción significativa de problemas absurdos especialmente en los cursos superiores.

4. Resultados

Las actividades analizadas fueron 8373, de las cuales 2399 eran aritméticos (un 28,75%). En cuanto a la estructura de los problemas, un 37,14% la tenían aditiva, un 39,52% multiplicativa y un 23,34 mixta aditiva y multiplicativa. De los problemas que tenían una estructura aditiva, la mayor parte eran de combinación, seguidos de comparación y cambio (Tabla II):

Tabla II

Porcentajes de problemas de estructura aditiva por subtipos.

TIPO	Cambio	Comparación	Combinación	Igualación
	%	%	%	%
1	6,22%	7,57%	38,12%	1,17%
2	16,89%	3,70%	17,18%	
3	1,17%	3,64%		
4	1,17%	2,17%		
5	0,29%	0,06%		
6	0,53%	0,12%		

Referido a la consistencia de los problemas, la mayoría fueron consistentes (un 73%), mientras que el resto fueron inconsistentes (27%), de los cuales la mayor parte eran de Combinación 2, la más fácil de los problemas inconsistentes (Figura 1):

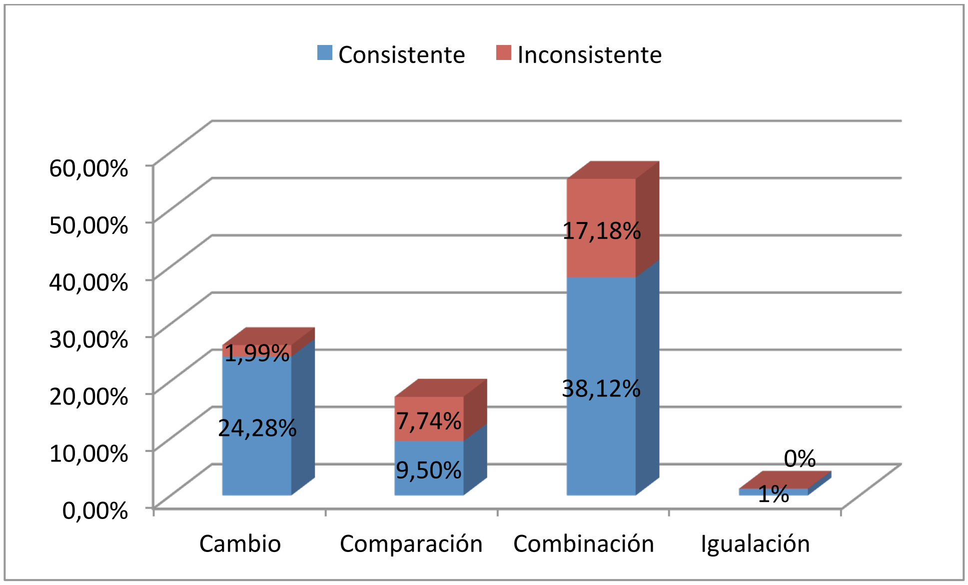


Figura 1: Resultados por tipo de problema de estructura aditiva

En cuanto a los problemas de estructura multiplicativa, los que se resolvían con una multiplicación era similar a los que se resolvían con una división (Tabla III). Sin embargo, la variedad de este tipo de problemas era muy diferente pues, casi todos los que se resolvían con una multiplicación, pertenecían a un único tipo (Multiplicación razón) mientras que la mayor parte de los de división se distribuyeron entre las categorías "partición" y "cuotición".

Tabla III

Resultados por tipo de problema de estructura multiplicativa

Multiplicación			División		
Razón	Comparación	Producto cartesiano	Partición	Cuotición	Comparación
57,19%	2,46%	0,07%	20,18%	16,38%	3,75%
59,72%			40,28%		

Referido al nivel de autenticidad de los problemas, los resultados globales indican que más del 75% se distribuyó entre las categorías "Estándar ajustado", "Estándar" y "Contenedor", mientras que "Absurdos" supusieron un 8,5% del total y los "Auténticos" el 2,3 % (Figura 2):

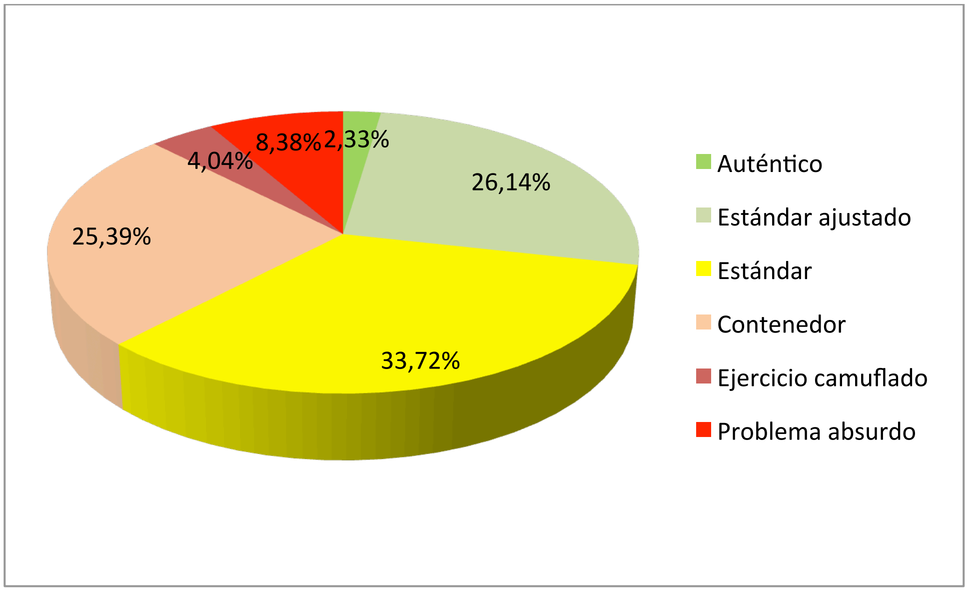


Figura 2: Proporciones de problemas por nivel de autenticidad

Estos resultados varían notablemente considerando el curso en el que se presentaron: en los inferiores, la proporción de absurdos o ejercicios camuflados es mínima, mientras que los auténticos y estándar ajustados suman en torno al 50% (48% en 1º y 2º). Por el contrario, en los cursos superiores el porcentaje de los problemas absurdos y ejercicios camuflados es notablemente superior que en los cursos inferiores (un 16% en 5º y un 20% en 6º) (Figura 3):

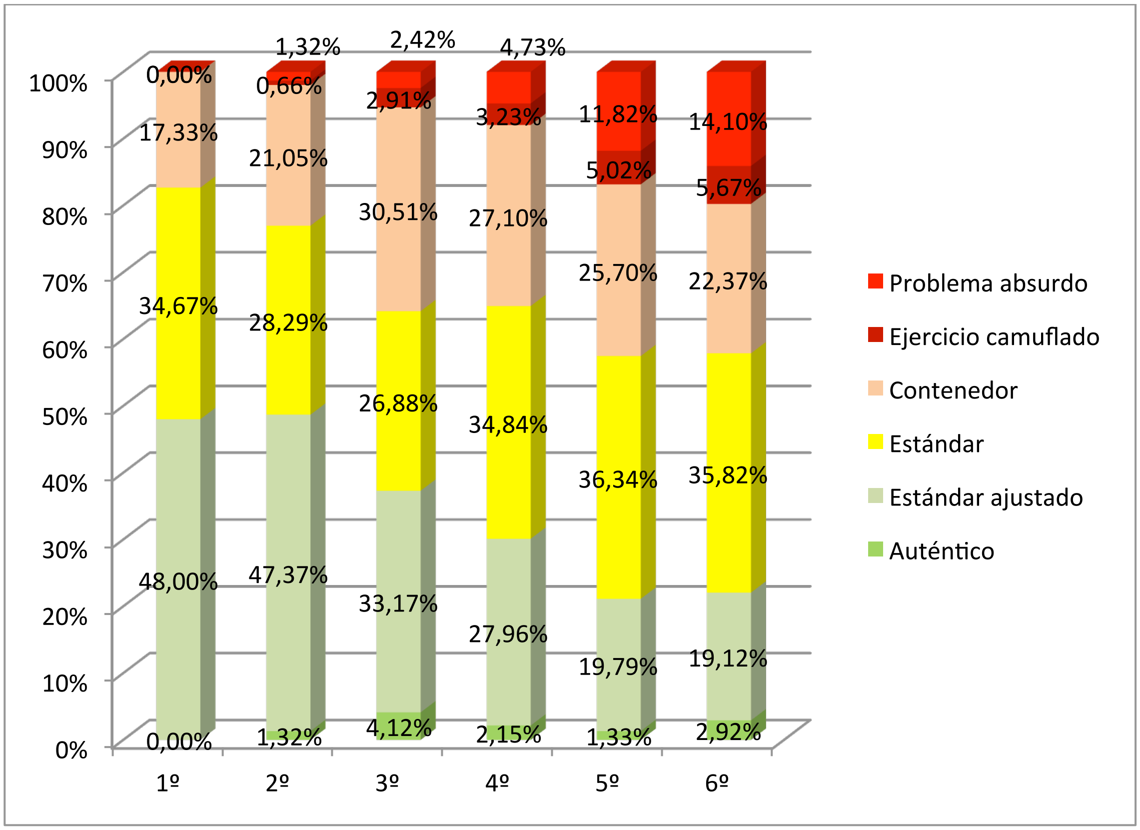


Figura 3: Proporciones de problemas por nivel de autenticidad y curso.

5. Discusión

La primera conclusión que puede extraerse del presente estudio es que la variedad de estructuras matemáticas de los problemas utilizados en la muestra de libros de texto de los 6 cursos de Primaria analizados no difiere esencialmente desde el estudio de Orrantia et al. (2005). En concreto, de los subtipos de problemas aritméticos posibles, la proporción de problemas inconsistentes, aquellos que requieren realizar un cierto razonamiento matemático para su resolución, es muy inferior al de problemas consistentes. Ello puede significar que, como los alumnos en Primaria se suelen enfrentar a resolver problemas de manera sistemática a través de estrategias superficiales como la elección de la operación a través de la palabra clave, terminan por automatizar la forma de resolver los lo que puede que no ayude lo suficiente cuando tengan que enfrentarse a otro tipo de problemas no tan sistemáticos. Ese planteamiento de los libros de texto puede favorecer que los maestros se ajusten a él, a plantear procesos de resolución basados en la selección de los datos y selección y ejecución de operaciones, sin incidir en el razonamiento (Rosales et al, 2008a y b, 2012). Ello dejaría fuera de las clases de matemáticas aquellos problemas en los que es necesario el razonamiento matemático o que pueden aparecer en la vida cotidiana. Es razonable pensar que, cuando los alumnos tengan que enfrentarse, por ejemplo, a una situación real de comparación 5 (que no aparece ni una sola vez en los libros de texto), utilicen estrategias informales en vez de las matemáticas aprendidas en la escuela (el alumno no puede aplicar lo que no ha aprendido), lo cual no hará sino reforzar la dicotomía entre matemáticas escolares y matemática informal y reforzar la disociación entre escuela y mundo real.

Por otra parte, respecto a los tres tipos de problemas de estructura multiplicativa, mostraban un significado muy limitado del significado del concepto de multiplicación ya que, de los tres tipos posibles, los de razón eran prácticamente los únicos que aparecían en los libros de texto. Al igual que en los problemas de estructura aditiva, esto conlleva una visión limitada de las situaciones de estructura multiplicativa de manera que, previsiblemente, los alumnos mostrarán dificultades en reconocer situaciones en las que la multiplicación resulta útil como multiplicación comparativa y, especialmente, de producto cartesiano. Parece conveniente enriquecer la dieta instruccional de los problemas para que incluyan más significados en ese sentido.

Respecto al grado de autenticidad de los problemas, la proporción de auténticos es muy pequeña lo cual, unida a la de absurdos y camuflados (en total en torno al 12%), muestra que los problemas matemáticos planteados por los libros de texto se plantean distantes a la vida real de los alumnos. Este aspecto se acentúa porque la resolución de esa escasez de problemas absurdos no requieren desafío por el resolutor sino, más bien, favorecen el desarrollo de estrategias superficiales de resolución en detrimento del proceso genuino propuesto por Verschaffel et al (2000).

Desde otro punto de vista, una cuarta parte de los problemas analizados se encontrarían a un solo paso de plantearse como auténticos. En concreto, los problemas estándar ajustados podrían convertirse en auténticos sin más que añadir un propósito a la situación propuesta. Este tipo de reescritura intencional ya ha demostrado su utilidad en el trabajo de Orrantia et al (2011), quienes añadieron intenciones y metas a problemas de cambio de dos operaciones. Esas metas, vinculadas al modelo matemático del problema, facilitaban la proyección de la información situacional del enunciado al modelo matemático, por lo cual cumplía una doble función: proporcionaba un propósito a la situación y favorecía el razonamiento situacional y matemático. El resto de los problemas, estándar y contenedor, que suman aproximadamente la mitad de los existentes en los libros de texto, las situaciones son relativamente lejanas e inespecíficas para los alumnos, lo cual no favorece que éstos comprendan el fin último de la resolución de problemas pero al menos, probablemente, serán percibidas como meros ejercicios al servicio de la automatización de los procedimientos aritméticos que, por otra parte, consumen una parte considerable del espacio de los libros de texto (ver Vicente, Orrantia y Manchado, 2011). En cualquier caso, parece necesario que en estos problemas se presentaran situaciones más cercanas a los alumnos y se aludiera a situaciones más concretas, en términos de objetos, lugares y personajes, para que pudieran ser entendidas por los alumnos como situaciones más auténticas.

Por otra parte, el aumento de problemas absurdos y camuflados en los cursos superiores hace pensar que la separación entre las matemáticas escolares y las situaciones de la vida real se incrementa con el nivel académico. Una explicación posible a este hecho es que, a medida que el alumno avanza en los cursos de primaria, los conceptos y procedimientos que ha de aprender son progresivamente más complejos, lo que dificulta la elaboración de problemas que reproduzcan situaciones reales. Es decir, mientras que en los cursos inferiores los alumnos aprenden a sumar y restar, para lo que elaborar situaciones cercanas resulta asequible, en los cursos superiores, en los que se aprenden conceptos más complicados, resulta más dificultoso elaborar situaciones en las que el alumno pueda verse inmerso en la vida real.

Ante esto cabría preguntarse si, para el desarrollo de la competencia matemática del alumno, es más conveniente reducir los problemas aritméticos en los temas en los que encontrar situaciones auténticas es más difícil, previniendo así el efecto que estos problemas tienen en el establecimiento del contrato didáctico en clase de matemáticas, o bien seguir sacrificando la utilidad que pudieran tener los problemas para generar sentido para las operaciones aritméticas a favor del mero ejercicio de esas operaciones. No obstante, un análisis del nivel de autenticidad de los problemas en función del contenido matemático sería necesario para comprobar en cuales se plantean de forma más o menos auténticas.

Referencias

De Corte, E. & Verschaffel, L., (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior 4*, 3–21.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers’ approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education, 26*, 152-160

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 16* (2), 36-45.

Heller, J.I. & Greeno, J.G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving*. Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87* (1), 18-32.

Hiebert, J., Gallimore, R., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M. y otros (2003). *Teaching mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washintong, D.C.: National Center for Education Statistics (NCES).

Institut De Recherche Sur L’enseignement Des Mathématiques (IREM) de Grenoble (1980). *Bulletin de l’ Association desprofesseurs de Mathématique de l’ Enseignement Public, 323,* 235-243

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. En P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). Nueva York: Harvester Wheatsheaf.

Lewis, A. B. & Mayer, R.E. (1987). Students’s miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology,* 79 (4), 363-371.

Nathan, M. & Koedinger, K. (2000). An Investigation of Teachers’ Beliefs of Students’ Algebra Development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209–237

Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 41 - 51.

Orrantia, J., González, L.B. & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia & Aprendizaje, 28* (4), 429-451

Orrantia, J. Tarín, J. & Vicente, S. (2011). El uso de la información situacional en la resolución de problemas aritméticos. *Infancia & Aprendizaje, 34*(1), 81-94

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 37–58

Palm, T. & Burman, L. (2004). Reality in mathematics assessment. An analysis of task-reality concordance in Finnish and Swedish national assessments. *Nordic Studies in Mathematics Education, 3*, 1-34

Palm, T. & Nyström, P. (2009). Gender Aspects of Sense Making in Word Problem Solving. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 59-76

Reusser, K. & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7*, 309-328.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. & Chamoso, J. (2008a). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los maestros cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos? *Cultura & Educación, 20*(4), 423-439.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. & Chamoso, J. (2008b). Studying mathematics problem-solving classrooms. A comparison between the discourse of in-service teachers and student teachers. *European Journal of Psychology of Education, 23*(3), 275-294

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. Múñez, D. & Orrantia, J. (2012). Teacher student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*,

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: a teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (5), 577-601.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*, 85-94.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Vicente, S., Orrantia, J. & Manchado, E. (2011, September). *Authenticity level of mathematic word problems solved by Spanish Primary education students.* Poster session presented at the 14th Biennal Conference Earli 2011, Exeter, U.K.

Matemáticas, Estándares *Common Core y Transdisciplinaridad*: Un análisis a la investigación y práctica pedagógica centrada en la educación de Latinos/Latinas en Los Estados Unidos

Eliana D. Rojas,
eliana.rojas@uconn.edu
Xae Alicia Reyes,
xae.alicia.reyes@uconn.edu
Ruth Urbina-Lilback,
ruth.urbina-lilback@uconn.edu
University of Connecticut
Estados Unidos

Resumen

En esta ponencia se analiza el contexto socio-histórico de la educación norteamericana y su desarrollo hacia el modelo educativo actual. Identificamos los objetivos de la educación considerando que los movimientos migratorios masivos en los últimos años crean circunstancias particulares que obligan a cuestionar las decisiones y normativas curriculares tradicionales. Reflexionamos acerca de las implicaciones que la validación de estos contextos generarían, considerando las metas competitivas que imponen una preocupación enfocada en el desarrollo de destrezas matemáticas como parte del concepto *STEM(Science Technology, Engineering, Engineering)*. Planteamos las problemáticas que emergen ante estas directrices curriculares guiadas por el concepto identificado como "*Common Core*" que intentaría transformar los estándares curriculares tradicionales, particularmente de las matemáticas, desconociendo los desafíos que emergen en el contexto de un país con un crecimiento demográfico inusitado en su población hispanohablante. Proponemos la utilización de la trans-disciplinaridad del currículo matemático como una herramienta conciliadora y transformativa frente a estos desafíos.

Palabras Clave: Matemáticas contextualizadas, transdisciplinaridad, formación docente, estándares, diversidad,

Trasfondo socio-histórico de la educación en los Estados Unidos

En el siglo 18 las escuelas de EEUU se caracterizaban por su énfasis en desarrollar una identidad y alta autoestima nacional. Según Butts (1973) se buscaba el bien de la nación por encima del bien individual. En 1929, cuando los EEUU se encontraban entre 2 guerras mundiales, el propósito fundamental del sistema educativo norteamericano era promover los ideales de libertad de Hamilton, Madison y Jay, y los de igualdad de Jefferson. Fass (2007) habla de 3 etapas en los objetivos del sistema escolar norteamericano: 1) crear una sociedad homogénea para enfrentar la heterogeneidad lingüística, religiosa y de orígenes nacionales de los siglos 18 y 19; 2) a principios del siglo 20, se comienza a enfatizar la educación intermedia y secundaria y en especial los conocimientos en ciencias, matemáticas, lenguas y lectura—el éxito individual y los estándares de aprovechamiento; 3) en la tercera etapa, en nuestros tiempos, dominan la participación en educación post-secundaria –estudios universitarios—donde la obligación principal de las escuelas es preparar alumnos para ser adultos competitivos y exitosos, no solo a nivel de sus distritos sino a nivel nacional

A raíz de los cambios de enfoque en la política nacional estadounidense, emergen políticas educativas nacionales tales como *Nation at Risk (1983), No Child Left Behind (2002),* y en la actualidad *Race to the Top (2008).* Aunque existe mayor intensidad en los énfasis en ciencias y matemáticas, reflejado en la proliferación de proyectos que enfatizan carreras afines a STEM (siglas en inglés para ciencias-tecnología-ingeniería y matemáticas), se ha perdido de vista la necesidad de preparar a los estudiantes para experiencias transnacionales. Este es el tema que nos ocupa en esta discusión.

La escolaridad trasnacional e intercultural nos preocupa al examinar la capacitación de profesores. Según Fass, en el siglo 20 se consideró a los hijos de inmigrantes como problemas y se les percibía como inadaptados académicamente, ineptos para el progreso académico, y carentes de motivación. Entendemos que las brechas lingüísticas y carencia de puentes culturales entre los alumnos inmigrantes en Estados Unidos en su mayoría sin manejo del idioma dominante (ELs) y sus profesores, han creado situaciones perjudiciales que obstruyen sus posibilidades de éxito académico. Como consecuencia las estadísticas de fracaso y deserción escolar entre inmigrantes 'latinos' y en comunidades donde hay varias generaciones de latinos – son alarmantes. Ver Apéndice con la distribución poblacional de hispanos en EEUU. De acuerdo con la Oficina de Censo de los Estados Unidos (2010), la población hispana aumento en un 43% entre el 2000 y el 2010, convirtiéndose en el grupo minoritario más grande de los EEUU. Parte de esta población son estudiantes en las escuelas norteamericanas. Dado que su idioma materno no es el inglés, los alumnos están en el proceso de adquirir fluidez en el idioma y por ello se les considera ELs.En un artículo del 2011 publicado por la Asociación Nacional de Educación (NEA), Lance Fuller reportó que en los Estados Unidos, 20 % de los varones hispanos abandonaron la escuela secundaria en el 2008. A largo plazo, Luis Ponjuan de la Universidad de Florida considera que la deserción escolar de hombres latinos constituye lo que él llama una "crisis silenciosa"' que lleva a una falta de acceso y por ende participación en educación post secundaria. Fuller señala que aunque son variadas las causas, una de las más drásticas es la falta de preparación entre los profesores para trabajar con esta población, así como el énfasis en la pruebas de rendimiento. Según Ponjuan, una creciente población hispana con poca educación no es compatible con la agenda económica de los EEUU. Las proyecciones de crecimiento de la población escolar en los Estados Unidos estiman que en el año 2030 el 40% de la población escolar será representada por los/las jóvenes afroamericanos y/o Latino/Hispanos. En su mayoría, esta población vive en condiciones de alta vulnerabilidad y pobreza *(Pew Hispanic Center, 2011)*.

La organización *Excelencia Educativa* y otras organizaciones exhortan a las autoridades estatales a recabar colaboraciones de diferentes entidades para incentivar a los alumnos latinos y cultivar sus talentos. Anthony Carnevale del Centro de Educación y Fuerza Laboral dela Universidad de Georgetown afirma: "Un título universitario es un paso esencial para el éxito económico personal pero también está íntimamente ligado al éxito económico de los EEUU."

Sabemos que el acceso a la universidad está relacionado con el desempeño en las matemáticas pues estas son según Rojas (2010) niveladoras de condiciones socioeconómicas y participación efectiva en la sociedad. El acceso a las matemáticas avanzadas facilita el camino a la universidad. Lamentablemente, muchos jóvenes latinos no participan en los cursos avanzados por diversas razones.

Hemos podido comprobar, a través de estudios realizados por profesores y profesionales de la educación que participan en un proyecto de investigación y práctica docente en el estado de Connecticut, que cuando los jóvenes latinos pasan de escuela intermedia a secundaria con frecuencia se les ubica en clases de matemáticas de nivel básico y remedial. Esto limita sus posibilidades de lograr una experiencia matemática sólida y rigurosa requerida para admisión a las universidades. La investigación nos reporta además que un gran porcentaje de estos estudiantes son calificados como con necesidades especiales crónicas y son ubicados en salas de clase diseñadas para niños con desordenes de aprendizaje detectadas profesionalmente. Muchas de estas disposiciones y decisiones son tomadas a partir del desconocimiento y desentendimiento respecto de las características, conocimientos y necesidades de nuestras comunidades Hispano/Latinas. Insistimos entonces en la urgencia de incorporar colaboraciones directas con la familia y comunidades inmediatas incluyendo consejeros académicos y profesionales de la educación que están en directa relación con estos jóvenes. Nuestra propuesta respalda estas acciones desde una postura científica en la que proponemos un discurso de gestiones dirigidas desde la integración deliberada de estos conocimientos y experiencias, tradicionalmente ignorados por la comunidad dominante, en el discurso curricular y pedagógico, con especial atención a la trans-disciplinaridad de conceptos y acciones que promueven el avance progresivo de nuestros jóvenes y sus familias no solo en lo valórico y lo social sino en lo académico, dándole especial atención al desarrollo de su lenguaje, su cultura en combinación con sus competencias científico matemáticas. Emerge entonces, la noción de *transdisciplinaridad curricular de la matemática*, como facilitador de esta comunicación intencionada de ideas, acciones y conceptos propios de las diferentes experiencias y conocimiento de estos jóvenes y sus familias al través de las aplicaciones conceptuales del currículo matemático y su integración deliberada en las diferentes disciplinas. Utilizamos diferentes vías de aplicación e integración del lenguaje matemático en las áreas curriculares de las ciencias sociales, geográficas, físicas, históricas y lenguajes para alertarles, incentivarles y ayudarles a gestionar sus propias acciones de respuestas responsables a los desafíos que enfrentan. Simultáneamente los docentes participantes crean conciencia de las varias inconsistencias e incongruencias existentes en el sistema educativo y social que invariablemente continúan limitando las posibilidades de los/las jóvenes latinos.

Retomamos entonces el tema de los objetivos de la educación en los Estados Unidos y entendemos que existe un conflicto entre las metas de preparar adultos competitivos y exitosos tanto a nivel de distritos como a nivel nacional, si un número significativo de estudiantes jóvenes no tiene acceso a una educación de calidad. Hemos visto sus efectos en las estadísticas alarmantes de deserción en la etapa secundaria y de escasa participación en educación post-secundaria. Aplicamos los análisis de teoría crítica (Freire) y exhortamos a nuestros educadores y comunidades a tomar conciencia de estas carencias y exigir equidad y justicia para nuestros jóvenes. La toma de conciencia les corresponde a todos, incluyendo a los que formulan y fiscalizan la política educativa del país.

La misión, justificación y limitaciones del "Common Core"

Hasta la fecha cuarenta y cinco estados en los Estados Unidos han adoptado los "*Common Core State Standars* (CCSS). Al mismo tiempo, el Distrito de Columbia y cuatro otros territorios de los EEUU se han unido a la iniciativa que establece estándares curriculares y contenidos comunes tanto para la enseñanza del inglés (*English Language Arts*) como para la enseñanza de las Matemáticas.

Aunque técnicamente, esta iniciativa no "nacionaliza" la educación, o sea, no se plantea como un esquema curricular nacional, la magnitud del alcance y apoyo que ha tenido la adopción de estos estándares *CORE*, representan un esfuerzo sin precedentes por establecer estándares educacionales a nivel nacional. Estos esfuerzos son dirigidos por la *National Governors Association* (NGA) y el *Council of Chief State School Officers* (CCSSO) con el objetivo de "robustecer y darle relevancia al contenido curricular matemático, reflejando el conocimiento y competencias a las que los jóvenes norteamericanos necesitarían estar expuestos y así tener éxito en la educación superior y futuras carreras profesionales" (NGA and CCSSO, 2012, *Mission Statement*) particularmente en carreras STEM (Science, Technology, Engienering and Mathematics). De acuerdo al NGA and CCSSO (2012), los estándares se desarrollaron y fueron anunciados en Junio de 2010, postulando dos categorías de objetivos; preparación eficaz para la universidad y carrera profesional y estándares normativos para la enseñanza preparatoria y secundaria (K-12) (NGA and CCSSO, 2012, *Process).*

Con la instauración de estos estándares, que constituye un esfuerzo nacional con el fin de estandarizar una "*preparación para el éxito en la universidad y futura carrera profesional* "*college and career readiness standards*" se pretende crear esquemas normalizados que establezcan niveles de rigurosidad y exigencias universales *"essential, rigorous, clear and specific, coherent, and internationally benchmarked"* (NGA and CCSSO, 2012, *Common Core State Standards Initiative Standards-Setting Criteria*). Con respecto al contenido matemático este objetivo se traduce a una reducción en las cantidades de tópicos que se espera cubrir en la experiencia preparatoria-segundaria (K-12). El enfoque central de esta nueva concepción de estándares curriculares y normativos, se concentra en otorgar experiencias que ayuden en el desarrollo y entendimiento profundo de los conceptos matemáticos, "*developing deeper mathematical conceptual understanding*". Conocimiento y entendimiento que les permita, a los alumnos/as, aplicar el conocimiento matemático adquirido a nuevas situaciones, desafíos y buscar soluciones. Se articula también, un alineamiento minucioso de los tópicos, asegurando que el contenido progresivamente establezca los fundamentos requeridos en futuros cursos y experiencias disciplinarias matemáticas. El contenido en sí mismo, está diseñado para ser riguroso, estableciendo al mismo tiempo un estándar común y al nivel requerido**.**

Los *benchmarking* internacionales, de alguna manera, guiaron estos procesos. En su respuesta a preguntas frecuentemente planteadas, el NGA y CCSSO (2012) incluyeron el siguiente comentario en la página web informativa del proyecto "*common core*":

> En Matemáticas, los Estándares nos llevaron a concluir a partir de TIMMS y otros estudios de países de alto rendimiento en exámenes internacionales, que el currículo matemático tradicional de los Estados Unidos debe ofrecerse substancialmente más coherente y enfocado para poder mejorar el rendimiento de sus alumnos y abordar así el problema de un currículo que se muestra como de "*una milla de ancho y una pulgada de profundidad*" , "*a mile wide and an inch deep*." (NGA and CCSSO, 2012, *Frequently Asked Questions*)

De acuerdo a Schmidt (2012), TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study)* uno de los dos más importantes proyectos internacionales de evaluación de las competencias matemáticas y ciencias, se acerca más en su contexto y alcance evaluativo al enfoque del instrumento evaluativo NAEP, (*National Assessment of Educational Progress*) norteamericano.

> Aun con NAEP, incluso los mejores estudiantes norteamericanos no rinden particularmente bien. El porcentaje de estudiantes norteamericanos de nivel avanzado en el TIMSS, está muy por debajo de los estudiantes de los países que lideran el TIMMS". (Schmidt, 2012, p. 135).

Esta observación provoca e incita el propósito central del proyecto "*Core Standards*" de liderar un cambio curricular que promueva y fortifique el desarrollo de habilidades matemáticas sólidas en todos los jóvenes norteamericanos. Los comentarios de Schmidt's (2012) no están limitados a los resultados deficientes de los estudiantes norteamericanos en las pruebas internacionales. Schmidt ofrece un análisis a las tendencias generadas de resultados basados en evaluaciones al nivel de un grado escolar particular (*trends based on assessed grades*), tanto como de los resultados de la población de estudiantes de comunidades Negras, Hispanas, y de bajos ingresos. Su evaluación y análisis le lleva a la siguiente conclusión.

> Toda la data precedente demuestra que cuando comparamos a nuestros estudiantes con los de otros países, las capacidades (skills) matemáticas de los estudiantes norteamericanos decrecen al tiempo que ellos/as se desarrollan, cayendo de una paridad irregular en los grados primarios, a un estatus muy por detrás de sus pares internacionales una vez alcanzan el nivel de graduación secundaria. De esos alumnos que ingresan a la universidad, un porcentaje desproporcionado requiere remediación en matemáticas, y por lo consiguiente evitan cursos y concentraciones de especialidades relacionados con las matemáticas. (Schmidt 2012, p. 136)

No podemos negar que haya una necesidad drástica de cambio y de un cambio radical, y con el cambio esperar mejorar los resultados. El "*Common Core State Standards"* tiene el potencial de promover expectativas equitativas e igualitarias así como que se generalice una oferta de contenido matemático sólido y riguroso a toda la población escolar. En los Estados Unidos, los estándares curriculares matemáticos han permanecido restringidos y limitados a las decisiones de las diferentes entidades regionales y locales. Su distribución, ejecución e instrucción se manifiesta restringida y fragmentada, respondiendo a necesidades locales y obedeciendo a estándares delimitados por los estados, regiones y distritos escolares. Los *Common Core State Standards* o estándares comunes de mandato y aplicación nacional, permitirán y promoverán mayor cooperación entre los distritos, estados y nación; focalizando los recursos, promoviendo y ofreciendo un currículo y actividades curriculares que respondan a necesidades comunes dentro de los estados, pero conservando el rigor de la propuesta nacional. Supone además promover el acceso de los/as jóvenes inmigrantes, de minorías pobres y transientes a un currículo matemático sólido, riguroso, de una oferta curricular análoga y transparente a través de los estados, que facilitaría la trasferencia de créditos y acomodamiento de conocimientos generados de experiencias educativas internacionales no reconocidas y que impactan hasta ahora negativamente el progreso matemático de jóvenes de comunidades migratorias.

Common Core Mathematics Standards

Los "Estándares Matemáticos**"** especifican claramente los estándares de contenido para cada nivel y grado desde Kindergarten a Enseñanza Media. Los Estándares "definen lo que los estudiantes deben entender y ser capaces de hacer" (NGA and CCSSO, 2012, *Mathematics Introduction –How to read the grade level standards*). Además, mucho de estos estándares, se cruzan entre niveles y grados de cursos, y son parte de un dominio más amplio. Por ejemplo, si miramos el campo de "*conteo y cardinalidad*", a nivel de kindergarten, en el que se espera que los estudiantes reconozcan el concepto de número, los números, contar y comparar; estos concentran estándares múltiples. Conocimiento derivado de este dominio, establece los fundamentos necesarios para alcanzar los estándares correspondientes al dominio del "Sistema Númerico" "Number System". Complementario los conceptos de "*contar (conteo) y cardinalidad*", este dominio es logrado a través del reconocimiento a los múltiples estándares que guian los discursos matemáticos al nivel y al través de los grados en discusión. Ejemplo: desde y a través de los grados sexto, séptimo, y octavo se requiere la comprensión - el *entender* - de las fracciones, de las operaciones con fracciones y de las aproximaciones de números irracionales.

En el contexto de la "Geometría" el dominio "Geométrico", por comparación, es apoyado por los estándares delineados en cada uno de los *cursos* o *grados* desde los grados Kindergarten a Octavo. Este campo académico curricular debe proveer a los estudiantes con los fundamentos necesarios para responder, más adelante, a las demandas de los estándares del contenido de Geometría al nivel de su educación Secundaria.

Independiente del estándar del nivel del contenido y/o dominio, se espera que todos los estándares sean instruidos en conexión con ocho "Practicas Matemáticas" (*Mathematics Practices)* definidas y exigidas explícitamente dentro de los dominios de ejecución comprensiva de las acciones de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas guiadas por *el Common Core* . Estas prácticas que definen las competencias matemáticas requeridas, trazan y definen las formas en las que se espera que los estudiantes sean guiados a "*relacionarse* " con el contenido. Al mismo tiempo se espera que esta relación le permita descubrir y apreciar su crecimiento y madurez así como incrementa su madurez y pericia matemática a través de toda su experiencia escolar (k – 12). (NGA and CCSSO, 2012). (Retrieved from www.corestandards.org/Math/Practice).

Estas ocho "*Prácticas Matemáticas*" son definidas en términos de:

- *Hacer sentido de los "problemas matemáticos" e insistir en resolverlos.*

- *Razonar a niveles abstractos y cuantitativos.*
- *Construir argumentos viables, y criticar y analizar otros razonamientos.*
- *Modelar con las Matemáticas.*
- *Usar herramientas apropiadas y estratégicamente.*
- *Darle atención a lo Preciso. Desde el entendimiento y apreciación del concepto de precisión matemática -*
- *Observar y hacer uso de las estructura*s *matemáticas* .
- *Buscar y darle uniformidad a razonamientos repetitivos*

Implicaciones en la Implementación, Enseñanza y Evaluación del

"*Common Core*" matemático

> "Los estándares establecen lo que los estudiantes necesitan aprender, pero no dictan como los profesores deberían enseñar. Los profesores continuarán diseñando sus lecciones y acomodando la instrucción a las necesidades individuales de los estudiantes en el aula escolar" (NGA and CCSSO, 2012, Frequently Asked Questions).

Los estándares CCSSO no prescriben necesariamente cómo el contenido debe enseñarse o cómo debería ser apoyado por el currículo. Esta disposición permite flexibilidad con respecto a toma de decisiones referentes a cómo un y en qué orden un tópico o tema será enseñado. Esta misma flexibilidad puede presentar una preocupación dependiendo de la habilidad y nivel de preparación del profesor para implementar las prácticas pedagógicas, didácticas y matemáticas que le permitan desarrollar el entendimiento matemático conceptual en los estudiantes.

Entendemos que el primer paso en nuestra búsqueda por ofrecer un currículo riguroso en contenido y a la vez flexible en su aplicación a una comunidad de estudiantes i.-provenientes de una multiplicidad de ambientes y de experiencias y ii.- que nos permita la oportunidad de igualar las condiciones de desventajas en su aplicación y adquisición exitosa, es el diseño de un conjunto de estándares claramente convenidos, planteados y de alcance obligatorio a toda la población estudiantil. Al mismo tiempo, debemos reconocer que el alcanzar estos logros depende de la calidad de la actividad didáctica y de comunicación pedagógica relacionada con la formación profesional de los maestros.

Formación Profesional Docente

En los Estados Unidos el/a maestro/a de hoy se enfrenta al gran desafío de salas de clases heterogéneas, metalingüísticas, transnacionales, multiculturales y socialmente diferenciadas. Estos desafíos muchas veces irreconciliables, nos exige una pregunta y respuesta categórica y contundente: ¿Están nuestros profesores preparados para comunicar los principios fundamentales de este *Common Core?* ¿Qué competencias curriculares, didácticas, pedagógicas necesitamos para responder a estas demandas multidisciplinarias?

"Más de Cuarenta de los 51 estados en los Estados Unidos exigirán pronto a los profesores de la escuela media que instruyan contenidos matemáticos para los cuales no están necesariamente preparados. Su incapacidad de enseñar estos tópicos efectivamente tiene menos que ver con su motivación y capacidad de trabajo intenso, sino más con el hecho de que no están adecuadamente preparados para enseñar temas matemáticos y en particular en condiciones de diferenciación cultural lingüística y social. Esta incapacidad se manifiesta en parte dado a los requisitos y a capacidades mínimas requeridas a futuros profesores que postulan y egresan con títulos profesionales en el sistema norteamericano. Al comparar los programas de formación de profesores de USA con los de otras naciones, Schmidt 2012 no encontró diferencia en cuanto a los requisitos con otras naciones con respecto a los cursos especializados. “La diferencia se refleja en el tipo de estudiante que ingresa a la carrera de profesor de escuela elemental en los Estados Unidos y en particular en el nivel de profundidad que desarrollan con respecto al conocimiento de la especialidad matemática (Schmidt, 2012, p. 149). Esta es una preocupación que como consecuencia afecta a todos los estudiantes, pero que tiene la potencialidad de impactar más agresivamente a estudiantes vulnerables, muchos en pobreza extrema, minorías hijos e hijas de inmigrantes, de diversidad cultural y lingüística disimiles a la dominante

La postura del *National Council of Techers of Mathemaatics* (NCTM 2008), acerca de los métodos de enseñanza con respecto a estos estudiantes manifiesta que “Los profesores de matemáticas deben tener conocimientos del contenido y la pedagogía que apoya el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes de diversidad cultural y lingüística o English Learners (ELs), incluyendo el entendimiento del rol que el primer lenguaje – o lenguaje natural juega en estos procesos. La comunicación natural (las maneras en que las personas se interesan en las ideas que se discuten, más que en si es correcta la manera en que se discuten) es un punto esencial en el desarrollo de fluidez en el segundo idioma (Dulay, Burt & Krashen,1982). La literatura actual recomienda enérgicamente la necesidad de que todo profesor desarrolle competencias de conocimiento acerca del impacto y/o beneficios en el alumno/a del uso de un lenguaje disímil al del discurso académico, particularmente en el aprendizaje de las matemáticas, y de las varias dinámicas pedagógicas utilizables para fortificar estos aprendizajes.

Si los profesores no se consideran preparados para enseñar el contenido, tendrán conocimiento del contenido y la pedagogía que apoya estudiantes de diversidad y vulnerabilidad social y económica y/o EL’s? Los *Common Core Standards* han sido implementados con el propósito explícito de elevar las expectativas formativas matemáticas de todos los estudiantes y proveer una experiencia educacional matemática siguiendo e implementado los mismos estándares para todos. Asumimos entonces que la instrucción será sensible a las necesidades individuales de todos los estudiantes, de tal manera que los objetivos de capacitar y facilitar los aprendizajes matemáticos de todos los estudiantes sean alcanzados.

Hasta la fecha se han dado algunas áreas focalizadas de trabajo en el *Common Core* que sostienen un potencial promisorio para la instrucción de estudiantes en condiciones de desventaja y diferenciación cultural lingüística y social. En principio los procesos de *evaluación* constituyen una de ellas. Las evaluaciones del *Common Core Standards* han sido desarrolladas por dos consorcios de estados: el *Partnership for Assessment of Readiness for College and Career* y el *Smarter Balanced Assessment Consortium (SBAC)* con proyecciones de implementación en el año académico 2014-2015. Otros proyectos de Evaluación están siendo desarrollados para apoyar y transformar los procesos de enseñanza así como se manifieste necesaria su transformación. Un ejemplo es el proyecto *Mathematics Assessment* de la Fundación Bill y Melinda Gates. Un equipo de investigación del *Shell Center* de la Universidad de Nothingham están desarrollando herramientas *sumativas* y *formativas* que apoyarían a los profesores y estudiantes en los procesos de monitoreo de su progreso. Este trabajo incluye también módulos de desarrollo profesional que ayudarían a los profesores en su preparación y desarrollo de las competencias requeridas. La evaluación formativa tiene beneficios potenciales para la enseñanza de estudiantes de diversidad lingüística, cultural y social o EL’s. Por diseño los procesos de instrucción podrán ser modificados así como sea necesario satisfaciendo las necesidades individuales inmediatas basadas en esta retroalimentación. Las páginas Web de los estados están incorporando masivamente ejemplos de material curricular para el uso de sus profesores y personal especializado.

Este nuevo concepto reformativo aparece como evidencia de un esfuerzo concertado que apoyaría las necesidades instruccionales y formativas requeridas a nivel de los estados, un esfuerzo que requerirá amplio apoyo particularmente en áreas de formación y preparación de los profesores, de aplicación del contenido matemático a las exigencias del *Common Core* y de desarrollo de capacidades discursivas y pedagógicas esenciales en el discurso didáctico que considera la creciente masa estudiantil crítica en los Estados Unidos y otros países en el mundo , estudiantes reconocidos por su multilingüismo, interculturalidad, y transnacionalidad.

Competencias y Métodos

Los términos "*Accoutability*" y "*advocacy*" toman gran fuerza, en nuestra investigación, al mismo tiempo reflexionamos acerca de definir "*competencias esenciales*" en el profesor responsable y comprometido con los temas de equidad y justicia social. Incluimos en nuestros diálogos a profesores, estudiantes y sus familias. Asociado a esto, en el lenguaje de los "*Common Core Standard*" se debate si el desarrollo del "*pensamiento*" (*students' thinking*) de los estudiantes debería estar integrado a los estándares como una disciplina, curso o seminario formal o integrarlo como indicador de competencia desarrollarse en el estudiante en cada unidad disciplinaria.

Desarrollar capacidades de *Thinking* (pensar), *higher order thinking* (pensar a un nivel superior) y *critical thinking* (pensamiento crítico) son competencias disimiles y complejas , que requieren no solo tiempo y espacios de deliberación en y a través de las disciplinas, pero el liderazgo de adultos (profesores) con experiencias y conocimientos solidos respecto de los temas en los discurso de las deliberaciones incluyendo las complejidades de las emociones, experiencias y sentires de la audiencia.

La universalidad del contenido curricular matemático y la unilateralidad de su interpretación nos ofrecen una oportunidad única de utilizarle, como el ente curricular conciliador entre la comunidad y el salón escolar. En dos proyectos NPD[1] que se concentra en la formación y seguimiento de la carrera docente de profesores y profesionales de la educación en un estado del Norte de los Estados Unidos, utilizamos el contenido matemático para comunicar sentimientos, costumbres, desafíos y sus acciones a través de lecciones e intervenciones social y culturalmente relevantes.

Recomendamos, cultivamos, manipulamos y reforzamos la trans-disciplinaridad de las matemáticas, que nos permite desarrollar un lenguaje de comunicación entre las diferentes unidades disciplinarias en las escuelas y distritos participantes. Invitamos a nuestros becarios, quienes representan las varias disciplinas y liderazgos en los distritos participantes, a reflexionar y desarrollar preguntas inquisitivas con respecto de su rol y el rol de las matemáticas en el avance o retención de sus estudiantes en la carrera social y académica a la que se aspira en una sociedad intercultural e igualitaria, pero en particular para interpretar y participar exitosamente en el desarrollo de una sociedad transnacional.

Los proyectos de investigación y desarrollo profesional docente que guían nuestros discursos, observaciones y recomendaciones están intencionalmente diseñados considerando

[1] NPD: National Professional Grants. Department of Education Washington D.C.

tanto el contexto social del proceso de enseñanza y aprendizaje, así como de las condiciones sociales e históricas del entorno local e internacional reflejado en las aulas en cuestión. A tales efectos, el currículo de los proyectos discutidos contempla la práctica del profesor como proceso de recapacitación y reconstrucción continua utilizando sus prácticas, cursos o grados avanzados que estos obtienen, mientras ejercen la profesión. De manera tal que en los proyectos de investigación, asignados dentro de su trabajo académico, como de trabajo final de tesis, "*Capstone Project",* se discuten y cuestionan conceptos teóricos tanto como de sus aplicaciones en la práctica. A la vez los profesores son guiados a examinar e implementar sus resultados y recomendaciones en sus acciones de aula. Constantemente, y por primera vez, afirman, son invitados a posesionarse de sus propias experiencias reflexionando y racionalizando, empoderándose con un conocimiento tácito, implícito acerca de sus implicaciones a su propia práctica.

Conclusiones

Variedad de factores convergen en las dinámicas en las que se evidencian nuestras conclusiones, diversidad de experiencias, culturas, y pedagogías constructivistas basadas en teorías socioculturales (Vygotsky 1978). Vygotsky planteaba que el aprendizaje se facilita conforme a los procesos sociales, culturales e institucionales y que por ende la interacción con recursos culturales son necesarias tanto para el desarrollo intelectual como para contribuir efectivamente a una sociedad justa, pluralista y democrática. Incitamos a los profesores y profesoras a apropiarse de su quehacer educativo, de sus experiencias y las de sus alumnos, a desarrollar el análisis crítico desde la perspectiva de la reflexión - acción (Schön, D., 1983), pero desde la acción de un cuestionamiento que concibe una transformación radical, una metamorfosis, del currículo y sus estándares; no remediando pero informándolo, reconstruyendo, evolucionándolo.

La interacción de profesores se promueve más allá de la sala universitaria, trasciende a las escuelas y comunidades en los trabajos con estudiantes, colegas, padres y otros participantes del quehacer educativo. El mérito del modelo programático consiste precisamente en propiciar diálogos continuos, transversales, que permanezcan en el quehacer del docente, asimilando su importancia a la vez que vayan reconociendo como estos diálogos van fortaleciendo sus prácticas y que se nutran de las investigaciones realizadas como parte de los seminarios y en los conocimientos que adquieren en institutos y talleres especializados.

Cultivar (*nurturing)* el desarrollo integral de la persona, construyendo su carácter, su "*punto de vista*", además de su "*posición y respuesta ante los desafíos de la vida"* sigue siendo un descriptor de misión en el discurso de las varias responsabilidades asumidas por los sistemas educacionales en general. Sin embargo, en las últimas décadas la comunidad académica educativa se ve enfrentada al desafío de buscar soluciones y responder a las demandas de una sociedad y comunidad estudiantil, cuya representatividad lingüística, de género, cultural y social se diversifica, así como se intensifica el incremento de políticas de asimilación como por ejemplo, prohibición al uso de lenguajes distintos al dominante como lenguaje de instrucción y/o comunicación espontánea en los espacios escolares. En los Estados Unidos de Norteamérica, miles de jóvenes Latinos/as, se ven afectados por medidas restrictivas y poco conciliadoras con los esfuerzos de la comunidad académica educativa, particularmente matemática, *(*NCTM, *TODOS-Mathematics for ALL*), que no dan acceso a instituir proyectos de desarrollo profesional docente que inviertan en programas guiados por las recomendaciones de estas organizaciones y sus investigaciones.

Los resultados de las actividades de indagación critica de nuestros educadores participantes proponen el desarrollo de competencias alternativas, metodológicas y didácticas que faciliten la formación de un profesional crítico, que cuestione los procesos tradicionales, que transforme el aula escolar en un centro de búsqueda permanente de desafíos y respuestas con metodologías y didácticas renovadoras. Se transforma y transforma a sus colegas en líderes inquisidores que se sumergen en diálogos didácticos de lo humano y cotidiano con sus alumnos y alumnas a través de la creación y formulación de problemas representativos de sus realidades y desafíos y para transformarlos en problemas científicos y rigurosos estimulando y desafiando a un sistema altamente normativo y clásico. Promueve además propuestas alternativas con posibilidades de elaborarlas e implementarlas sobre la base de las tendencias actuales en Educación Matemática a la vez que establece una plataforma de creatividad e investigación para los jóvenes quienes se cuestionan la razón de su quehacer individual en la sociedad en que vive antes que la razón del quehacer de la matemática.

Nota: En este documento alternamos los términos Hispanos/Latinos para capturatr la flexibilidad en el uso de ambos términos en el contexto de los Estados Unidos. Para unos "Hispanos" se refiere a los descendientes de españoles o de países hispanohablantes. "Latinos" se utiliza más a menudo para referirse a poblaciones arraigadas por generaciones en los Estados Unidos.

Referencias

Butts, R.F. (1973). Reconstruction in Foundations Studies. *Educational Theory*. 23(1) 27-41. Ennis, S., Rios-Vargas, M. & Albert, N. (May 2011). The Hispanic population: 2010. Retrieved, 2013, http://www.census.gov/prod/cen2010/briefs/c2010br-04.pdf

Dulay, H., Burt, M. and Krashen.S.(1982). *Language Two*. New York: Oxford University Press.

Mathematics Assessment Project (2013). Retrieved from http://map.mathshell.org/materials/index.php

National Council of Teachers of Mathematics (2008). Teaching Mathematics to English Language Learners. Retrieved from http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6330

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2013, September 23). Frequently Asked Questions, Retrieved from http://www.corestandards.org/resources/frequently-asked-questions

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2013, September 23). Mission Statement, Retrieved from http://www.corestandards.org/

Pew Hispanic Center Research Report, October 5, 2011.Rojas, E. (2010). Mathematics as an Equalizer for Latino Diverse Gifted Learners. In Castellano, Jaime *A Kaleidoscope of Special Populations in Gifted Education: Considerations, Connections, and Meeting the Needs of Our Most Able Students.* Prufrock Press.

Sáenz, V. B., & L. Ponjuan. (2009). The Vanishing Latino male in higher Education. *Journal of Hispanic Higher Education*, 8(1), 54–89.

Schmidt, W. (2012), At the Precipice: The Story of Mathematics Education in the United States. *Peabody Journal of Education*, 87(1), 133 – 156. doi:10.1080/0161956X.2012.642280

Smarter Balance Assessment Consortium. (2012). Support for Under-Represented Students. Retrieved from http://www.smarterbalanced.org/parents-students/support-for-under-represented-students/

Schön, D. (1983) *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Vygotsky, L. (1978) Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes, Harvard University Press, Cambridge, MA.

USDE (2007 – 2012) REALL: *Raising Expectations for All Language Learners*. Project Founded by the United State Department of Education. Washington DC.U.S.AUSDE (2007 – 2012) LEAD: *Literacy in English Across Disciplines*. Project Founded by the United State Department of Education. Washington DC.U.S.A

Table 1.

Hispanic or Latino Origin Population by Type: 2000 and 2010

(For information on confidentiality protection, nonsampling error, and definitions, see *www.census.gov/prod/cen2010/doc/sf1.pdf*)

Origin and type	2000		2010		Change, 2000 to 2010[1]	
	Number	Percent of total	Number	Percent of total	Number	Percent
HISPANIC OR LATINO ORIGIN						
Total	**281,421,906**	**100.0**	**308,745,538**	**100.0**	**27,323,632**	**9.7**
Hispanic or Latino	35,305,818	12.5	50,477,594	16.3	15,171,776	43.0
Not Hispanic or Latino	246,116,088	87.5	258,267,944	83.7	12,151,856	4.9
HISPANIC OR LATINO BY TYPE						
Total	**35,305,818**	**100.0**	**50,477,594**	**100.0**	**15,171,776**	**43.0**
Mexican	20,640,711	58.5	31,798,258	63.0	11,157,547	54.1
Puerto Rican	3,406,178	9.6	4,623,716	9.2	1,217,538	35.7
Cuban	1,241,685	3.5	1,785,547	3.5	543,862	43.8
Other Hispanic or Latino	10,017,244	28.4	12,270,073	24.3	2,252,829	22.5
Dominican (Dominican Republic)	764,945	2.2	1,414,703	2.8	649,758	84.9
Central American (excludes Mexican)	1,686,937	4.8	3,998,280	7.9	2,311,343	137.0
Costa Rican	68,588	0.2	126,418	0.3	57,830	84.3
Guatemalan	372,487	1.1	1,044,209	2.1	671,722	180.3
Honduran	217,569	0.6	633,401	1.3	415,832	191.1
Nicaraguan	177,684	0.5	348,202	0.7	170,518	96.0
Panamanian	91,723	0.3	165,456	0.3	73,733	80.4
Salvadoran	655,165	1.9	1,648,968	3.3	993,803	151.7
Other Central American[2]	103,721	0.3	31,626	0.1	–72,095	–69.5
South American	1,353,562	3.8	2,769,434	5.5	1,415,872	104.6
Argentinean	100,864	0.3	224,952	0.4	124,088	123.0
Bolivian	42,068	0.1	99,210	0.2	57,142	135.8
Chilean	68,849	0.2	126,810	0.3	57,961	84.2
Colombian	470,684	1.3	908,734	1.8	438,050	93.1
Ecuadorian	260,559	0.7	564,631	1.1	304,072	116.7
Paraguayan	8,769	–	20,023	–	11,254	128.3
Peruvian	233,926	0.7	531,358	1.1	297,432	127.1
Uruguayan	18,804	0.1	56,884	0.1	38,080	202.5
Venezuelan	91,507	0.3	215,023	0.4	123,516	135.0
Other South American[3]	57,532	0.2	21,809	–	–35,723	–62.1
Spaniard	100,135	0.3	635,253	1.3	535,118	534.4
All other Hispanic or Latino[4]	6,111,665	17.3	3,452,403	6.8	–2,659,262	–43.5

– Percentage rounds to 0.0.

[1] The observed changes in Hispanic origin counts between Census 2000 and the 2010 Census could be attributed to a number of factors. Demographic change since 2000, which includes births and deaths in a geographic area and migration in and out of a geographic area, will have an impact on the resulting 2010 Census counts. Some changes in the Hispanic origin question's wording and format since Census 2000 could have influenced reporting patterns in the 2010 Census. Additionally, changes to the Hispanic origin edit and coding procedures could have impacted the 2010 counts. These factors should especially be considered when observing changes for detailed Hispanic groups.

[2] This category includes people who reported Central American Indian groups, "Canal Zone," and "Central American."

[3] This category includes people who reported South American Indian groups and "South American."

[4] This category includes people who reported "Hispanic" or "Latino" and other general terms.

Sources: U.S. Census Bureau, *Census 2000 Summary File 1* and *2010 Census Summary File 1*.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Qué enseñar sobre un tema de matemática escolar y cómo enseñarlo: elementos clave en la formación docente

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

La principal competencia profesional que debe desarrollar el profesor de Matemática es la de ser capaz de realizar eficientemente la tarea de enseñar la disciplina. Para ello no es suficiente tener un conocimiento matemático a nivel superior, además requiere habilidades para planificar, gestionar y evaluar el contenido matemático escolar. Esta presentación se centra en algunos abordajes teóricos que plantean opciones para decidir qué enseñar sobre un tópico matemático específico y como enseñarlo, entre ellos el Mapa de Enseñanza-Aprendizaje (Orellana, 2002) y el Análisis Didáctico (Gómez, 2002), mostrando ejemplos de su utilización en temas de Cálculo y de Estadística, respectivamente.

Palabras clave: Formación docente, matemática escolar, conocimiento pedagógico del contenido, mapas de enseñanza y aprendizaje, análisis didáctico

Algunas consideraciones en torno a la formación del docente de Matemática

Qué enseñar sobre un tema matemático escolar y cómo enseñarlo son referentes característicos del quehacer cotidiano del profesor que prefiguran su accionar en el aula. Ser capaces de buscar respuestas a estas interrogantes se constituye en una de las capacidades a desarrollar por el futuro docente en su proceso de formación, tanto inicial como permanente. Como parece obvio señalar, no es suficiente saber mucha matemática para ser un buen profesor de esta materia. Esta tarea requiere mucho, mucho más.

En los currículos de formación de profesores de Matemática, en los países que integran la Red de Educación Matemática y del Centro América y el Caribe, según se desprende de los informes nacionales presentados en el CANP-2012, además de los contenidos disciplinares se incluyen otros de naturaleza didáctica y pedagógica, tanto general como específica, y de formación para la práctica, en procura de desarrollar las competencias generales y específicas de la profesión docente en Matemática. No obstante, la concepción y administración curricular en muchos casos interfiere en la consecución de estos propósitos, como en el caso de Venezuela donde se evidencia una separación del currículo en tres componentes disjuntos: especializado, pedagógico y práctica profesional, que incide en una formación fragmentada y desvinculada con la práctica real. (León, Beyer, Serres e Iglesias, 2012), percibiéndose la escasez de oportunidades formativas con base en la discusión del contenido matemático escolar y en la reflexión sobre lo que significa aprender a enseñar matemática desde la perspectiva de aprender una práctica (Llinares, 2008a).

Esto lleva a pensar en la conveniencia de dar un giro a esta situación y ubicar en el centro de la formación docente la reflexión sobre el contenido que es objeto de enseñanza y aprendizaje en los niveles educativos correspondientes y sobre los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales para su debida enseñanza, comprendiendo en esta de manera global tres momentos de la acción didáctica: la planificación, la gestión y la evaluación, y dentro de la planificación, las etapas de: selección y secuenciación de contenidos, el análisis de los aspectos cognitivos inherentes al aprendizaje de los estudiantes, el diseño de tareas, experiencias de aulas y la selección de estrategias y recursos de enseñanza en función del logro de aprendizajes y el desarrollo de habilidades que configuran las competencias esperadas.

La formación teórica, se espera que vaya acompañada de experiencias de naturaleza práctica o vivencial que permitan al futuro docente apropiarse de ese conocimiento que luego deberá poner en acción en su labor del día a día. Diferentes investigaciones siguen esta línea de indagación, tanto en contextos de formación inicial de profesores de Matemática como de formación continuada, entre ellos los trabajos de Gómez (2002 y 2007), Gómez, Lupiañez, Rico y Marín (2007), Rico (2004), González y Gallardo (2006), Lupiañez y Rico (2006), con énfasis en la competencia de planificación a través del análisis didáctico; Llinares, con su línea de trabajo sobre enseñar matemáticas como una práctica (Llinares, 2000, 2008a, 2008b); los trabajos de Ball (1991), Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps et. al.(2007) y Blanco Nieto y Contreras(2012) sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, y los desarrollos de Orellana (2002) y Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) sobre el diseño de actividades didácticas con el uso de mapas de enseñanza y aprendizaje.

Sustentándonos en estas investigaciones nos detenemos a continuación en tres categorías fundamentales en el desarrollo ulterior de este trabajo: el *conocimiento matemático escolar*, el *conocimiento profesional* y las *competencias profesionales del profesor de Matemática*.

El conocimiento matemático escolar

El profesor de Matemática ha de ser un profesional matemáticamente culto con una formación disciplinar robusta (González, 2000 y 2010). Es decir, debe lograr un conocimiento matemático a un nivel superior (Rico, 2004; Moreno, 2007); pero ese saber que él adquiere es de una naturaleza diferente al de los profesionales de otras carreras como los matemáticos, ingenieros o economistas. Este es un conocimiento proyectivo, en el sentido de que no es para su uso exclusivo, sino para hacerlo llegar a otros a través de la enseñanza.

En el contexto de la didáctica francesa, el proceso de transformación del conocimiento matemático superior en un conocimiento a enseñar es lo que se denomina transposición didáctica

(Chevalard, 1998). Pero, más allá del conocimiento requerido para llevar a cabo de manera exitosa tal transposición, el docente debe manejar adecuadamente las matemáticas escolares, entendiendo por éstas las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008), y en consecuencia, durante su formación inicial éste debe lograr un conocimiento versátil de los temas incluidos en los programas de Matemática del nivel educativo en el cual ejercerá su labor docente (primaria, secundaria, superior) que incluya las interrelaciones internas entre los diversos tópicos matemáticos y externas con otras áreas de estudio.

Los contenidos escolares oficiales en cada país se encuentran en los programas de la asignatura, generalmente como un listado organizado por áreas o componentes, sin mucho nivel de especificidad en cuanto a su alcance, el cual vendrá determinado por los objetivos que se persiguen y las competencias a desarrollar. Por ejemplo, en Venezuela los contenidos de Matemática de secundaria están organizados en tres componentes dentro del área "El ser humano y su interacción con otros componentes del ambiente", siendo éstos: estudios de tendencias y situaciones; estudios de patrones, formas y diseños ambientales y estudios de modelos y estructuras matemáticas aplicadas al entorno. Las otras áreas son: Lenguaje, comunicación y cultura; ciencias sociales y ciudadanía; filosofía, ética y sociedad; educación física, deporte y recreación; y desarrollo endógeno en, por y para el trabajo liberador (MPPE, 2007).

El profesor de matemática, aun dominando los contenidos disciplinares desde un punto de vista conceptual y técnico, en muchos casos muestra limitaciones en su comprensión cuando se trata de enseñarlos en un nivel inferior para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, es decir, cuando forma parte de las matemáticas escolares. Es por ello que Moreno (2007) sugiere que los profesores en formación deberían reflexionar sobre estas matemáticas pues ellas se constituirán en el eje central de su labor académica, por lo que, a la par que enriquece su dominio del conocimiento matemático debe brindársele la oportunidad de "ampliar su conocimiento desde el punto de vista que debe ser enseñado y aprendido" (Moreno, 2007, p. 101), explorando la variedad de significados que los conceptos matemáticos adquieren en el ámbito de la matemática escolar.

Estos múltiples significados que se asocian a un mismo concepto vienen dados por una relación ternaria: estructuras conceptuales que los sustentan – sistemas de símbolos que los representan – objetos y fenómenos de los que surgen (Rico, 1997).

Un estudio de los significados de un concepto matemático es tarea indispensable en la planificación escolar con miras a su enseñanza y aprendizaje, constituyéndose en elemento de la formación del docente en cuanto a la adquisición del conocimiento profesional para su desempeño académico, tema que abordamos a continuación.

Conocimiento profesional del profesor de matemática

La tarea específica del profesor de Matemática es enseñar Matemática, para lo cual debe poseer un conocimiento matemático, no sólo con el alcance de las matemáticas superiores, sino, y fundamentalmente, con el de las matemáticas escolares y su connotación didáctica. En pocas palabras, saber cómo enseñarlo. Por ello cabe preguntarse si los docentes en formación adquieren el conocimiento profesional que caracteriza a la docencia en Matemática, cuya principal dimensión es la de aprender a enseñar la disciplina y ser capaces de continuar aprendiendo para mejorar y actualizar constantemente el desempeño de su labor. Pero, ¿Cuál es ese conocimiento?.

Shulman (1996) inició el debate acerca de cuáles deben ser los conocimientos y capacidades de un profesor para realizar la tarea de enseñar de manera eficaz y eficiente, al proponer la noción de *conocimiento pedagógico del contenido matemático*, a través de la cual refuta la idea de que para enseñar un tema matemático es suficiente tener un dominio del mismo y algunas nociones sobre didáctica y pedagogía; por el contrario, argumenta que en lugar de comprender el contenido para sí mismo el profesor debe ser capaz de descifrar el contenido matemático en nuevas formas, reorganizarlo, secuenciarlo y presentarlo a través de actividades y ejemplos que despierten la atención del estudiante y le faciliten su aprendizaje.

El conocimiento pedagógico del contenido se refiere, entonces, al conocimiento especializado que es propio del docente y que lo distingue de otro que posee el conocimiento matemático pero que no pretende enseñarlo. Según Shulman, este incluye conocimiento del contenido, contenido pedagógico y conocimiento pedagógico del contenido, siendo este último una forma de conocimiento práctico que es empleado por los docentes para guiar sus acciones en situaciones de clase altamente contextualizadas.

Pero, ¿qué aprendizajes debe lograr el profesor de Matemática en formación para lograr esa comprensión del conocimiento matemático?, ¿qué capacidades y conocimientos debe lograr para ejecutar exitosamente las acciones de planificar, gestionar y evaluar la acción docente? y ¿cómo se logra ese aprendizaje?. Gómez (2007, p.110) apunta que la formación del docente "debería pasar de preocuparse por desarrollar en los futuros profesores estrategias para convertir en pedagógico un contenido que supuestamente no lo es, a reconocer el carácter eminentemente pedagógico de ese contenido".

Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps, et al (2007), en su teoría *Matemática para la enseñanza,* sugieren cuatro categorías para el conocimiento del profesor que surgen del análisis de la práctica: Conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contendio, conocimiento del contenido y del estudiante y conocimiento del contenido y de la enseñanza

Según se observa en el cuadro 1, en las dos últimas categorías se manifiesta claramente la interrelación entre el contenido y la enseñanza y el aprendizaje; es decir, el conocimiento del aprendizaje y de la enseñanza en función del contenido.

En esta misma línea de pensamiento Gómez (2007), más allá de concebir el conocimiento pedagógico del contenido como aquel que permite la transformación de un contenido para ser transmitido, desde una posición constructivista y una visión funcional, lo toma como los conocimientos y habilidades necesarios para diseñar y gestionar actividades de enseñanza y aprendizaje y se refiere al conocimiento didáctico como aquel necesario para realizar el *análisis didáctico* de un tema matemático -al cual nos referiremos más adelante- como proceso dentro de la planificación local de una unidad didáctica o una clase de Matemática.

Precisamente, la planificación es una de las competencias profesionales del profesor. Ahora bien, ¿cuáles son esas competencias que el futuro docente debe desarrollar durante su formación inicial y posteriormente a lo largo de su desarrollo profesional?.

Cuadro 1

Categorías para el conocimiento del profesor dentro de la teoría Matemática para la Enseñanza

Categoría	Conceptualización	Capacidades del profesor
Conocimiento común del contenido	Conocimientos y habilidades matemáticos que se espera en cualquier adulto educado	-Reconocer respuestas erradas -Identificar definiciones no exactas en libros de texto -Utilizar correctamente la notación -Realizar las tareas que asignan a los estudiantes
Conocimiento especializado del contenido	Conocimientos y habilidades que requiere el profesor en su trabajo, más allá del conocimiento común	-Analizar los errores de los estudiantes -Argumentar matemáticamente -Usar representaciones matemáticas -Comunicarse correctamente con el lenguaje matemático.
Conocimiento del contenido y de los estudiantes	Conocimientos sobre el aprendizaje y las dificultades de los estudiantes en función del contenido	-Anticipar errores y concepciones erradas comunes en los estudiantes -Interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes -Predecir la actuación de los estudiantes ante las tareas matemáticas.
Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Conocimiento de la enseñanza en función de los contenidos	-Diseñar recursos didácticos -Reconocer las ventajas y desventajas de las diferentes representaciones de los conceptos -Enfatizar cuestiones relevantes en las actuaciones de los estudiantes.

Competencias profesionales del profesor de Matemática

La noción de competencia involucra la realización de una tarea o actividad y la puesta en juego de unas capacidades que involucran conocimientos, habilidades y actitudes. Dentro de las competencias del profesor de Matemática hay algunas de carácter general y otras de naturaleza específica.

En los lineamientos curriculares en Colombia, al referirse a estas competencias profesionales se alude al reconocimiento de los estudiantes en sus diferentes dimensiones, el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje, la gestión de proyectos institucionales, entre otros asuntos. (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa-Ochoa, 2012).

En la propuesta de modificación curricular que actualmente se lleva a cabo en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) en Venezuela, entre las competencias específicas del profesor de Matemática se señala que el docente al egresar de su formación inicial:

- Asume proyectos de investigación utilizando diferentes enfoques teóricos y metodológicos propios de la Educación Matemática.
- Valora los antecedentes históricos de la producción científica especialmente aquellos vinculados al desarrollo de la Matemática y de la Educación Matemática con el fin de orientar sus dimensiones filosóficas, históricas, humanas, sociales, didácticas y científicas.
- Diseña, aplica y evalúa unidades didácticas con contenido matemático.
- Crea nuevos escenarios para la enseñanza de la Matemática apoyados en recursos diversos de TIC mediante la planificación, diseño y evaluación de estrategias que combinen la presencialidad y la virtualidad.
- Comunica, en forma efectiva, ideas y resultados de la investigación en Educación Matemática, en forma oral o escrita, haciendo uso del lenguaje tanto natural como matemático.
- Domina conceptual, procedimental y actitudinalmente los saberes que le son propios a la Matemática y que permiten su desarrollo como disciplina, indispensable para el ejercicio óptimo de su profesión.
- Desarrolla el pensamiento lógico, crítico y creativo a través del planteamiento y resolución de problemas matemáticos mediante estrategias cognitivas y metacognitivas. (UPEL-Comisión de Currículum de Pregrado,s/f).

Por su parte, Llinares (2008b), enfatiza la necesidad de orientar la formación hacia la preparación para hacer algo (enseñar matemática) de manera competente, lo cual propone lograr a través de lo que él denomina sistemas de actividad:

-Analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas de los estudiantes y compararlas con lo esperado.

- Planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo.

-Determinar planes de acción (situaciones didácticas, ingeniería didáctica, transposición didáctica, organizadores curriculares)

- Gestionar el contenido matemático en el aula.

En el ámbito de la comunidad europea se han establecido algunas competencias generales como:

-Dominio de los contenidos matemáticos desde una perspectiva superior y su conocimiento como objeto de enseñanza y aprendizaje.

-Dominio de la organización curricular y planificación de los contenidos para la enseñanza.

-Capacidad para el análisis, interpretación y evaluación de los alumnos a partir de sus actuaciones.

-Capacidad de gestión del conocimiento matemático en el aula. (Gómez, Lupiañez, Rico, Marín, 2007).

Como vemos, algunas de las competencias planteadas desde diferentes ámbitos son coincidentes, entre ellas la de planificación a través de la cual se puede buscar alternativas de respuestas a las interrogantes planteadas en el título de este trabajo: ¿Qué enseñar de un tema matemático? y ¿Cómo enseñarlo?. Entre ellas revisaremos el Mapa de Enseñanza y Aprendizaje propuesto por Orellana (2002) y el Análisis Didáctico de Gómez (2002).

Mapa de Enseñanza y Aprendizaje de un tópico o tema Matemático

Orellana (2002) ha concebido un recurso para la planificación de una unidad didáctica correspondiente a un tema matemático específico al cual denomina Mapa de Enseñanza-Aprendizaje (MEA). Éste se construye a partir de un análisis de dicho tema en correspondencia con el nivel educativo en que se desarrollará, el conocimiento del docente sobre dicho contenido, el conocimiento previo de los estudiantes, el tiempo disponible y los intereses tanto de estudiantes como del profesor.

Los elementos que Orellana incluye en el MEA son:

.Fundamentos matemáticos (Definiciones, conceptos, teoremas, corolarios, ejercicios)

-Interrelación con otros temas matemáticos (Problemas integrales), y con el mundo real (modelación).

-Exploración analítica y gráfica, tanto en forma manual como con el uso de la tecnología, previa a la formalización de conceptos.

-Desarrollo histórico del tópico y su utilización para recrear el proceso seguido por los matemáticos en el contexto que le dio origen y a manera de motivación hacia su estudio

-Generalización de los conceptos estudiados.

Además prevé la inclusión de otros elementos de naturaleza didáctica como las estrategias y recursos para la enseñanza y el aprendizaje del tema tratado (Ver gráfico 1).

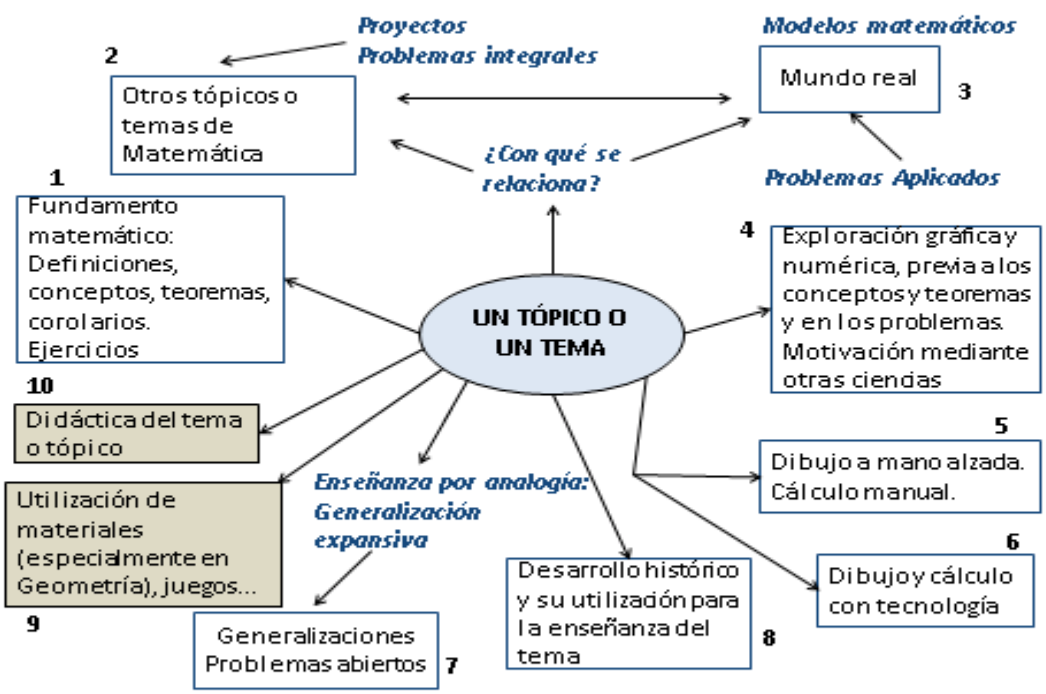


Gráfico 1: Mapa Enseñanza-Aprendizaje (Orellana, 2002)

Según se puede observar, la enseñanza tradicional se reduce al cuadro 1 que hace referencia a una concepción netamente deductiva lineal de la presentación de los temas matemáticos:

"definición → teoremas (enunciado) → demostración → consecuencias → ejercicios"(p. 26).

Aclara el autor que este esquema no corresponde necesariamente al orden histórico de creación de dicho conocimiento, ni es en todo caso recomendable como organización didáctica a seguir, sobre todo en los niveles de educación primaria y secundaria.

En el resto de los cuadros el autor incorpora elementos que concuerdan con las diversas tendencias que en la actualidad orientan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Font, s/f). Igualmente se vinculan con los organizadores curriculares establecidos por Rico(1997) y entendidos como conocimientos que se convierten en componentes fundamentales en el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) han establecido esta última relación como queda reflejado en el gráfico 2

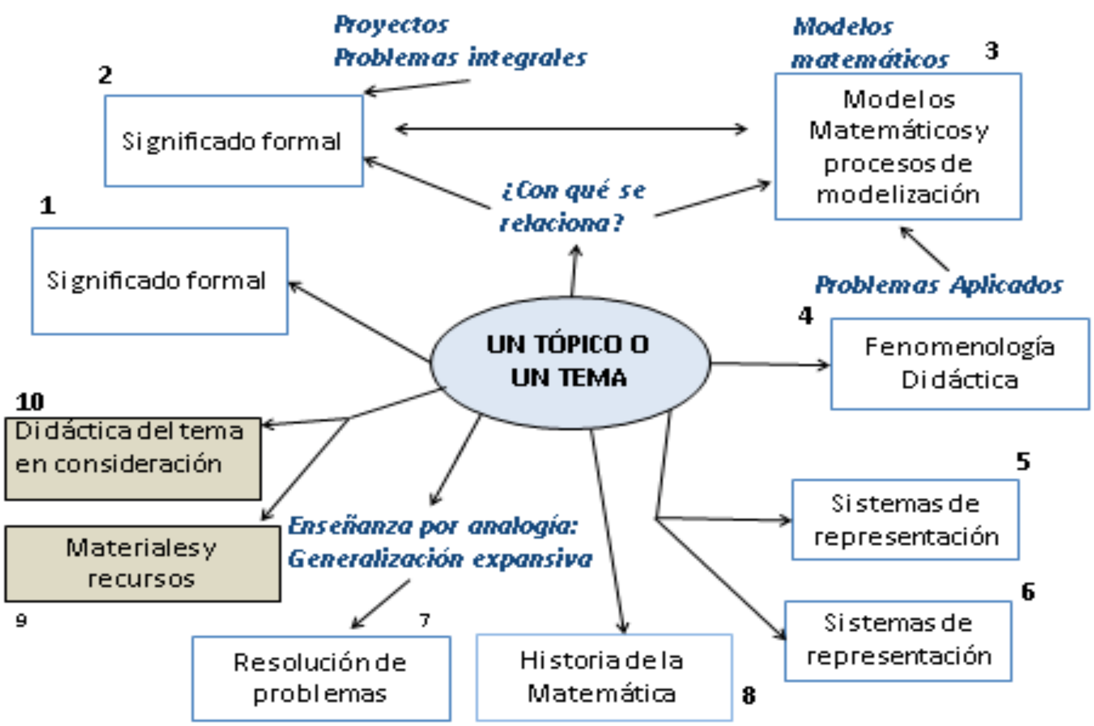


Gráfico 2: Relación entre los organizadores curriculares y el MEA

Siguiendo la línea de indagación sobre la organización del contenido a enseñar a través de mapas de enseñanza y aprendizaje, hemos dirigido algunas investigaciones realizadas en el marco de la maestría en Enseñanza de la Matemática que ofrece la UPEL en el Instituto Pedagógico de Maturín, dos de las cuales reseñamos a continuación.

Situándose en el curso de Cálculo Diferencial del programa de formación de profesores de

Matemática para la educación secundaria, se ensayó el uso de un MEA sobre el tópico de la derivada de una función. Bara (2012), autor de la investigación, partiendo de un diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes y de las dificultades que con más frecuencia se les presentan a éstos en la comprensión del tema, elaboró el MEA que se muestra en la figura 3.

Figura 3: Mapa de Enseñanza y Aprendizaje sobre la derivada de una función
Tomado de Bara (2012, p. 38)

El autor explica los componentes de este MEA en los siguientes términos: el cuadro 1 representa la parte teórica que se incluye comúnmente en los cursos donde se enseña la derivada. Sugiere que el estudio de este tema se inicie a partir del cuadro 8 con el uso de la historia para la comprensión de las primeras ideas del concepto de recta tangente, "ya que los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal comenzaron a plantearse en el siglo III a.c. encontrándose métodos sistemáticos de resolución veinte siglos más tarde gracias a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del Cálculo Diferencial (p. 39).

El cuadro 2 evidencia la interconexión de la derivada con otros temas matemáticos que sirven para facilitar la comprensión de este concepto. Señala el autor que se puede introducir el estudio de recta tangente a una circunferencia en un punto, previo al de recta tangente a una función en un punto, "porque esta idea ya se ha manejado en bachillerato y les resulta mucho más familiar a los estudiantes" (p. 40), luego se pasa al estudio de las rectas secante, tangente y normal al gráfico de una curva, como antesala de la definición de derivada.

El cuadro 3 del MEA propone otra forma de aproximarse al concepto de derivada a través del estudio de la velocidad instantánea, noción fundamental a la Física, donde a través de la velocidad promedio y el uso del límite se llega a la fórmula de velocidad instantánea. En este apartado se puede aprovechar el concepto recién estudiado para hablar sobre la paradoja de la flecha que fue resuelta gracias al Cálculo Diferencial. (p. 43)

Según Bara, cualquier estudio de las derivadas estaría incompleto si no se consideran los problemas de optimización, pues estos atienden a una inmensa gama de aplicaciones que rodean al Cálculo Diferencial. "Problemas clásicos como el de la caja sin tapa, que consiste en recortar cuadrados congruentes en las esquinas de una hoja rectangular para formar una caja (paralelepípedo) sin tapa de mayor volumen, puede realizarse utilizando materiales concretos para que los estudiantes puedan "palpar" la situación y comprender mejor el problema para así resolverlo" (p. 43).

Por último, es conveniente apoyar la enseñanza y el aprendizaje del tema de la derivada de una función con el uso de algún software como el DERIVE que facilita el cálculo de derivadas y la graficación de curvas, sin obviar los cálculos manuales y gráficos a mano alzada, entre otros tareas inherentes al tópico estudiado. Igualmente se utilizaron otros medios tecnológicos como Internet para la búsqueda de información y la creación de un blog donde se colgaron videos relacionados con la historia del cálculo diferencial, el estudio de la derivada y algunas tareas propuestas por el docente.

La enseñanza del tema, siguiendo la planificación recogida en el MEA, se realizó en un lapso de 6 semanas en el horario regular, con algunas clases extra según la disponibilidad del laboratorio de computación. "Lograr concatenar en el aula todos los cuadros que conforman el MEA, se tradujo en una clase evidentemente muy rica en contenidos y con una diversidad de estrategias metodológicas que causaron un impacto positivo en los estudiantes, al desligarse de ese paradigma tradicional de enseñanza que en muchos casos genera reacciones adversas en los alumnos" (p.44).

Producto del registro de las situaciones ocurridas en clase y de las opiniones de los estudiantes respecto a esta propuesta de organización temática y su ejecución, se arribó a las siguientes categorías positivas: Innovación en la enseñanza; creatividad de los estudiantes y capacidad para relacionar el tema con contenidos intra y extra matemáticos; motivación por el uso de la tecnología y el conocimiento de algunos elementos de la historia del cálculo infinitesimal; clase participativa; y como rasgo negativo, la intención de los estudiantes de usar sólo el programa Derive para la resolución de ejercicios y problemas, tratando de obviar el trabajo manual básico en la comprensión del tema.(Bara, 2012)

Es de hacer notar que, como el mismo Orellana (2002) lo señala, el mapa de enseñanza y aprendizaje no es único para un tema determinado. En el año 2011, bajo nuestra tutoría, la profesora Amelia Malavé realizó un estudio con el propósito de conocer la actitud hacia la Matemática de los estudiantes de la universidad politécnica donde se desempeña, encontrando una actitud negativa, de rechazo hacia esta disciplina y su aprendizaje. (Malavé, 2011). En busca de acciones para tratar de modificar tales actitudes, se decidió el uso de MEAs también en el curso de Cálculo Diferencial. Entre ellos la investigadora organizó uno para el tema de la derivada, el cual quedó diseñado como se muestra en el gráfico 4.

Gráfico 4: Mapa de enseñanza y aprendizaje para la derivada de una función. Tomado de Malavé (2011)

La investigación arrojó conclusiones similares a las del caso anterior: interés de los alumnospor el tema estudiado, percepción de sus aplicaciones especialmente en situaciones vinculadas a las carreras de ingeniería, motivación a través de los aspectos históricos tratados y con el uso de las herramientas tecnológicas y captación de que los conceptos matemáticos no son entes aislados dentro de la disciplina sino que guardan mucha relación con otros ya estudiados o por estudiar.

En cada una de estos reportes se ha tratado de dar respuestas a las interrogantes sobre qué enseñar y cómo hacerlo en relación a un tópico matemático (la derivada de una función) a través de los mapas de enseñanza y aprendizaje como herramienta para la planificación de unidades didácticas. Una segunda opción que abordamos ante tales interrogantes es el análisis didáctico en los términos en que lo presenta Gómez (2002)

Análisis didáctico

El análisis didáctico, tal como lo plantea Gómez (2002), es un procedimiento para abordar la planificación local de un tema matemático específico; es decir, la planificación de una unidad didáctica o de una clase sobre una estructura matemática determinada o uno o más aspectos de ella (p. 252), concibiéndolo como una conceptualización del modo en que el profesor "debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares" (p. 251).

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que cubre cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación; atiende a las condicionantes del contexto e identifica las actividades que el docente debería realizar para organizar la enseñanza de un tema específico (Gómez, Lupiañez, Rico y Marín, 2007).

El ciclo inicia con el análisis de contenido, siendo éste un análisis de las matemáticas escolares, es decir, de un tópico matemático para su enseñanza y aprendizaje en el aula de clase. A través de él se determina el contenido que se va a desarrollar, los objetivos y competencias que se espera lograr, teniendo en cuenta tres tipos de significados matemáticos: "la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico)" (Gómez, 2002, p. 263). En el análisis de contenido es fundamental considerar los organizadores curriculares para la comprensión de los diversos significados del concepto.

En el análisis cognitivo el profesor anticipa la actuación de sus estudiantes ante las tareas matemáticas que se les asignan, los errores más frecuentes y las dificultades en la comprensión del tema. El análisis de instrucción es el momento del diseño de la acción didáctica del profesor, se escogen las tareas y las correspondientes actividades y las estrategias y recursos para su ejecución en el ambiente escolar. Luego de la puesta en práctica de este diseño, el docente realiza el análisis de actuación con el fin de determinar sus alcances en términos de las capacidades desarrolladas, los objetivos logrados y las dificultades manifestadas por los estudiantes. Para continuar con el ciclo, los resultados del análisis de actuación serán el punto de partida para el análisis didáctico del tema o tópico subsiguiente, evidenciando este proceso similitudes con el de la investigación acción cuyo ciclo es: diagnóstico-planificación-ejecución-reflexión.

Bajo estos planteamientos, el análisis didáctico ha venido siendo utilizado por varios investigadores en el desarrollo de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación, sobre todo en el nivel local, en contextos de formación de profesores de Matemática. Entre ellos, los trabajos de Gómez (2002, 2007); Gómez, Lupiañez, Rico y Marín (2007); Lupiañez y Rico (2006) y en la planificación de unidades didácticas sobre temas específicos reportados en artículos en publicaciones especializadas como los de Rico, Marín, Lupianez, Gómez (2008); Gallardo y González (2006), Lupiañez, (2010) y Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), entre otros.

A continuación detallamos una experiencia de planificación que se aproxima a este modelo, centrado en un tema de estadística a nivel de tercer año de bachillerato, haciendo énfasis en el diseño de contenido.

El ensayo lo llevó a cabo la Prof. Karlecia Azocar como investigación de grado en la Maestría de Enseñanza de la Matemática en la UPEL-IPM, bajo nuestra tutoría.

Como ya se indicó con anterioridad, en Venezuela los contenidos de Matemática en educación secundaria están incluidos en el área "El ser humano y su interacción con otros componentes del ambiente" y dentro de ésta, los tópicos de estadística aparecen en el componente denominado "Estudio de situaciones y tendencias". Para el tercer año de bachillerato los contenidos incluidos en este componente son: "Uso de la estadística descriptiva para el análisis de situaciones y problemas sociales locales, regionales y/o nacionales. Uso y definición de medidas de individualización (cuartiles, deciles y percentiles).Medidas de dispersión: desviación estándar, varianza" (MPPE, 2007, p. 57).

En años anteriores se estudian los conceptos de población muestra, variable, métodos estadísticos, agrupación de datos en intervalos de clase, distribución de frecuencia, diagramas de barra, de sectores, histogramas y ojivas; aplicación al análisis de procesos estadísticos y medidas de tendencia central (media, mediana y moda).

El estudio se realizó durante el 3° lapso del período escolar 2012-2013, iniciándose con un diagnóstico de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a los prerrequisitos del tema y de los contenidos previos de estadística. Éste reveló dificultades en el manejo de porcentajes, sectores angulares de un círculo a partir de su amplitud en grados y en sumatorias, y un desconocimiento casi total de los temas estadísticos de años anteriores, lo cual no causó sorpresa pues es usual que los docentes no los incluyen en su programación (Azócar, 2013).

Tomando en cuenta este diagnóstico, los contenidos programáticos de 3° año de bachillerato, las competencias a desarrollar, los recursos y el tiempo disponible se decidió el contenido a desarrollar en el lapso académico. Esto se muestra en el Gráfico 5.

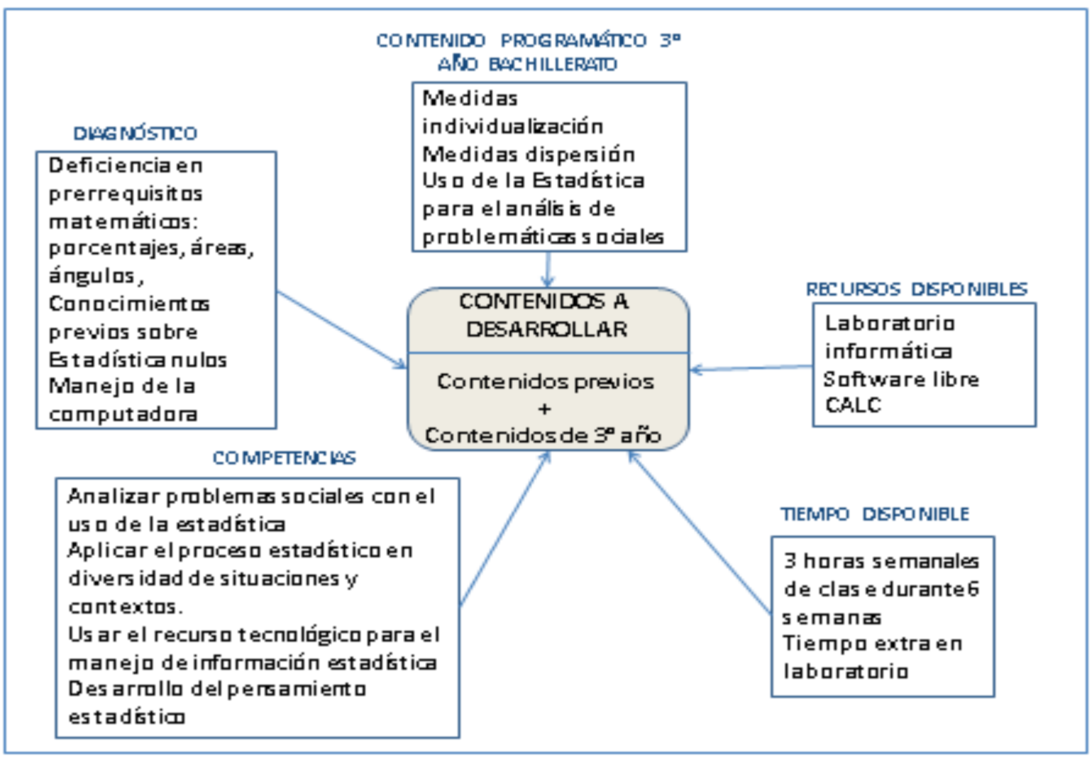


Gráfico 5: Elementos considerados en la selección del contenido a desarrollar

Como objetivo se propuso incentivar el pensamiento y el razonamiento estadístico y como competencias que los estudiantes fueran capaces de utilizar el análisis estadístico en el estudio y comprensión de problemas sociales locales a través del ciclo completo del análisis estadístico, desde el diseño del estudio, la recolección de datos, su organización, presentación y análisis, hasta la comunicación en informe escrito de los resultados y conclusiones, con el uso de la tecnología.

Tomada la decisión de incluir tanto los contenidos previos de Estadística como los propios del año escolar, se elaboró un mapa conceptual del tópico de Estadística Descriptiva que muestra una secuenciación de los aspectos más relevantes a estudiar, (Ver gráfico 6).

Este mapa delimita el contenido, incluyendo tanto lo conceptual como lo procedimental. Entre los conceptuales se deberán tomar en cuenta: términos, notaciones, convenciones, definiciones, propiedades, y dentro de los procedimentales: fórmulas de aplicación, modos de hacer y resolver, destrezas, estrategias, razonamientos.

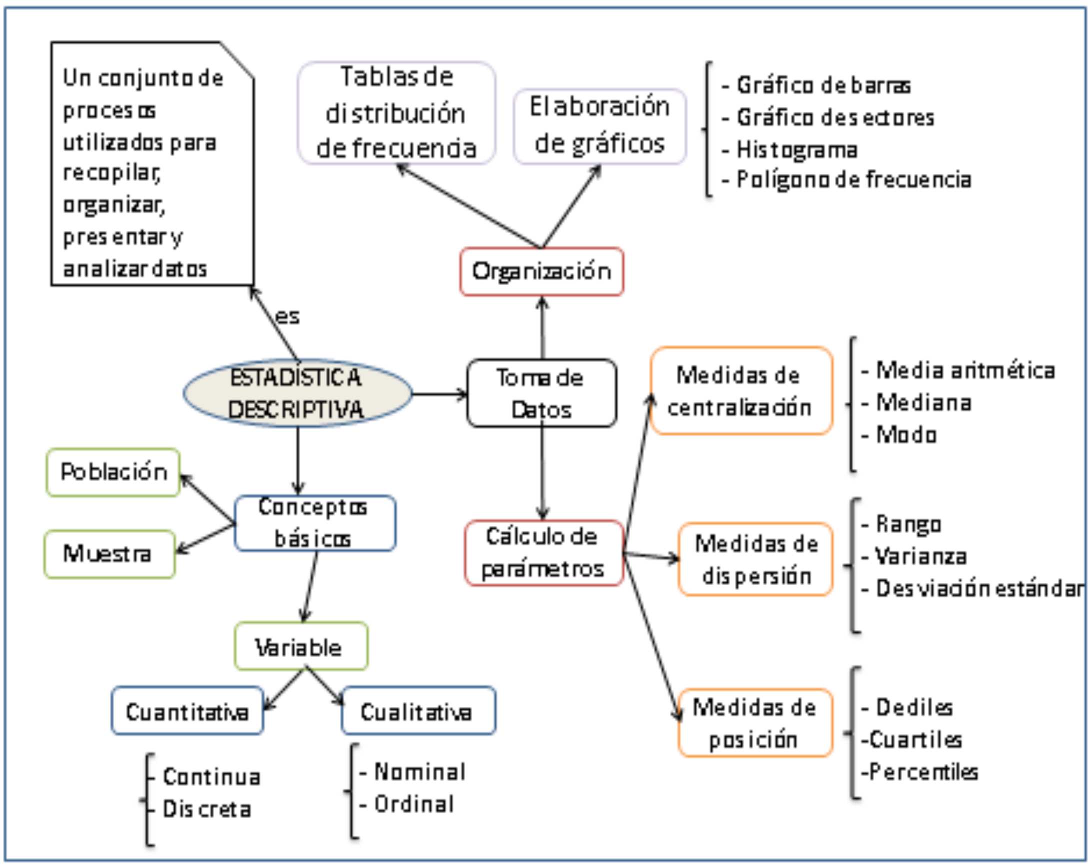


Gráfico 6: Mapa conceptual de Estadística Descriptiva. Tomado de Azocar (2013)

Luego se procedió a ubicar el tema en sus conexiones con otros tópicos matemáticos y otras temáticas del currículo. Con este fin se revisó el contenido programático de cada una de las áreas del currículo para ese año y los subsiguientes y se elaboró el cuadro 2 que muestra esta relación resumiendo la fenomenología didáctica del tema.

Cuadro 2

Fenomenología didáctica para el tema de Estadística Descriptiva

Área	Temas
Lengua, comunicación Y cultura	Redacción de encuestas y cuestionarios Redacción de informes Análisis de información Uso de Internet como medio de comunicación
Ciencias sociales y ciudadanía	Censos. Crecimiento poblacional. Densidad poblacional. Índices de inflación, desempleo. Interpretación crítica de estadísticas sociales. Estadísticas sobre violencia e inseguridad.
Desarrollo endógeno para El trabajo liberador	Diagnóstico participativo Elaboración y ejecución de proyectos productivos a través de la investigación. Redacción de informes de proyectos. Conocimiento y comprensión de la realidad Estadísticas sobre producción, importación, exportación, etc.
Educación física, deporte y recreación	Estadísticas deportivas Valores promedios Records deportivos Tiempos máximos y mínimos El pulso como medio para establecer la frecuencia cardíaca.
El ser humano y su interacción con otros elementos del ambiente	
El ser humano consigo mismo	Desarrollo del pensamiento crítico. Alfabetización Estadística
El ser humano con sus semejantes y otros seres vivos	Índices de mortalidad y natalidad. Estadísticas de salud e higiene Alimentación, desnutrición Estudio de la genética. Clasificación de seres vivos
El ser humano en el ecosistema	Interpretación de gráficos y cuadros para la comprensión de los fenómenos naturales Variabilidad genética y la preservación del ambiente. Consumo energético Lluvias, desbordamientos, deslaves. Calentamiento global
Procesos matemáticos y su importancia en la comprensión del entorno	Geometría (Círculos, ángulos, área) Aritmética: Porcentajes, decimales, fracciones, razones, proporciones, sumatorias Probabilidad Estudio de variables Funciones y gráficas

El siguiente y último paso en el estudio de contenido fue el análisis y concreción de los organizadores curriculares. En el cuadro 3 se muestran estos organizadores y se incluye un elemento extra que se refiere a la formación de valores que como eje transversal se debe contemplar como conocimiento actitudinal en toda unidad didáctica.

Cuadro 3

Organizadores curriculares del tema Estadística Descriptiva

Organizador	Descriptores
Significado formal	Ver mapa conceptual (Gráfico 6)
Fenomenología didáctica	Ver cuadro 1
Sistemas de representación	Datos en bruto Representación tabular: Tablas simples, de doble entrada, de distribución de frecuencia. Representación gráfica: tanto manual como con el uso de software: gráficos de barra, dé sectores, histogramas, ojivas
Historia de la Estadística	Video sobre el desarrollo de la Estadística donde se destacan tres etapas: -Censos (aportes de los babilonios, egipcios, chinos, hindúes, romanos, griegos). -La aritmética política (con aportes a la demografía, ciencias sociales, economía) -Estadística y cálculo de probabilidades (Aportes de Euler, Lagrange, Gauss, Laplace, Fermat , Pascal), Fisher)
Resolución de problemas	Problemas abiertos y de construcción que impliquen identificación de variables, organización de datos, cálculo de medidas estadísticas, toma de decisiones.
Recursos didácticos y materiales	Guía didáctica: Investigación didáctica Materiales geométricos y colores Guía de problemas contextualizados en la cotidianidad del estudiante. Actividades de aprendizaje computarizado Recortes de prensa. Software libre CALC Centro Bolivariano de Información Y Comunicación (CEBIT)
Didáctica del tema	Análisis crítico de noticias Elaboración de proyectos grupales para el análisis de problemas sociales locales (*) Uso del programa CALC Asesorías grupales durante elaboración de proyectos Exposición de proyectos Cartelera alusiva
Valores	Participación Integración cooperativa Responsabilidad Sensibilidad ante problemas sociales

(*) Los proyectos ejecutados fueron:

- Educación sexual de los adolescentes
- Hábitos alimenticios de los adolescentes
- Los adolescentes y las redes sociales
- Tecnologías de la información y comunicación
- Violencia estudiantil.

Cada uno de los ellos vinculado con alguno de los elementos destacados en la fenomenología del tema.

El análisis cognitivo, centrado en el estudiante, se realizó en función de la prueba diagnóstica y el historial de los alumnos durante los lapsos precedentes. Conociendo las debilidades de los estudiantes en el manejo de porcentajes, raices, razones y áreas, se decidió reforzar estos conocimientos cada vez que tuviesen que ser utilizados en los nuevos temas. Además, el hecho de no haber tenido la ocasión de estudiar conceptos estadísticos previamente hacía suponer un escaso desarrollo del razonamiento estadístico, por lo que este aspecto se tocó desde todas las actividades propuestas. Se previó que las tareas que implican largos cálculos serían tediosas para los estudiantes y pondrían más énfasis en lo algorítmico en detrimento de la comprensión de conceptos y el razonamiento estadístico. Se decidió trabajar con series cortas de datos contextualizados para los cálculos manuales y los dibujos a mano alzada que acompañan la introducción de los conceptos y el uso del software libre CALC para reforzar los conocimientos y realizar los cálculos y gráficos a partir de series más numerosas.

Luego se procedió al diseño de la instrucción en un total de 9 sesiones de clase, algunas de 45 y otras de 90 minutos. Éstas se organizaron en tres fases: inicio, desarrollo y cierre, especificando en cada una de ellas: contenidos, objetivos, estrategias, actividades, materiales didácticos, indicadores e instrumentos de evaluación. Las orientaciones didácticas seguidas y los materiales y recursos utilizados ya aperecen indicados junto con los organizadores curriculares.

El análisis de la actuación se llevó a cabo en primer lugar a través de los logros y dificultades de los estudiantes, contrastando los objetivos propuestos con las anotaciones sobre el desarrollo de las tareas llevadas en los registros diarios, la revisión de las actividades realizadas en la guia didáctica, los alcances de las actividades de aprendizaje computarizado, el chequeo de los avances de las investigaciones, revisión de las tareas realizadas con el programa CALC, la ejecución de los proyectos y la cartela alusiva a los mismos; y en segundo lugar mediante la percepción del propio docente en cuanto a su desempeño y a los alcances de la planificación una vez puesta en acción.

El análisis de actuación arrojó, entre otras, las siguientees conclusiones: a) el estado inicial de los estudiantes incide enormemente en su aprendizaje; b) el contenido de estadística sí se puede cubrir en el tiempo disponible y vincularse con otros tópicos matemáticos y temas de otras áreas para darle sentido a los procesos estadísticos; c)el número elevado de estudiantes (35) no es un obstáculo para la realización de las actividades planificadas, incluídas las asesorías grupales; d) el trabajo en equipo favorece el desarrollo de valores; e) a través de la investigación estadística se incrementa en los estudiantes la capacidad de reflexionar críticamente sobre problemáticas que ocurren a su alrededor y sustentar sus opiniones con base en un razonamiento estadístico; f) el uso de la computadora motivó a los estudiantes, facilitó el trabajo; permitió la exploración de datos y el manejo de términos y conceptos, h) el profesor debe dedicar mucho tiempo al diseño de materiales y a la atención individualizada y grupal de los estudiantes.

A manera de cierre

Hemos iniciado con dos interrogantes que están presentes en la mente de cualquier docente al momento de organizar los contenidos programáticos que exige el currículo oficial y hemos abordado dos alternativas que pueden ser utilizadas con éxito para la planificación de las correspondientes unidades didácticas o las clases de matemática: el análisis didáctico y el MEA. Aun cuando los hemos ejemplificado en situaciones diferenciadas, es de hacer notar que éstos no son procedimientos mutuamente excluyentes, muy por el contrario pueden utilizarse conjuntamente, como lo hacen Ortiz, Iglesias y Paredes (2013) quienes emplean mapas de enseñanza-aprendizaje como herramienta para el análisis de contenido en un análisis didáctico para la planificación de unidades didácticas de geometría.

Existen otros procedimientos que guardan estrecha relación con los anteriores como es la Ingeniería Didáctica, que ya había sido citada a través de Llinares (2008 b) como una de las opciones para determinar planes de acción como sistemas de actividades y cuyas fases son bastantes coincidentes con las del análisis didáctico. Todas estas alternativas brindan al docente la opción de hacer de su tarea profesional una actividad investigativa (Flores, 1998), que en similitud con la investigación acción, conciba de manera cíclica momentos de diagnóstico, de planificación, de acción y de reflexión sobre la práctica y el logro de objetivos y metas de aprendizaje en los estudiantes. Por todo lo expuesto, concluimos diciendo que los dos procedimientos aquí reseñados contribuyen al desarrollo de las capacidades que configuran la competencia de planificación al poner en contacto a los estudiantes con este aspecto de la problemática profesional del docente de Matemática, propiciando de esta manera la formación de profesionales reflexivos.

Referencias y bibliografía

Azocar, K. (2013). Análisis de problemáticas sociales localas con el uso del programa informático CALC en el estudio de la estadística descriptiva, Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.

Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. In *J. Brophy (Ed.) Advances in research on teaching* (1-48). JAI Press: Greenwich

Ball, D., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, ,J., Phelps, G., et al (2007). Knowing your subject well enough to teach it: what more does it take?. Presentation made at the Network Connections Conference, Pittsburgh.

Bara, M. (2012). Mapa de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática en el estudio de la derivada de funciones reales de una variable real. Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.

Blanco Nieto, L. y Contreras, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 30, 101-123.*

Chevalard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor: Buenos Aires.

Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de Matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 17, 37-48.

Font, V. (s/f). Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Disponible en www.slideshare.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-de-la-matematica

Gallardo J. y González, L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. Ponencia en X Simposio de la SEIEM: Huesca.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. *Revista EMA*. 7(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, P., Lupiañez, J.L., Rico, L. y Marín, A. (2007). Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. Documento en línea. Disponible: cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP07-2908-PDF.

González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de Matemática: retos de la formación del docente para el siglo XXI. *Paradigma*.XXX(1), 139-172.

González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de Matemática. *Sapiens.*11(1), 17-32.

González J.L. y Gallardo, J. (2006). Análisis didáctico curricular. Un procedimiento para fundamentar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de Matemáticas. Documento en línea. Disponible: www.gonzalezmari.es/AD_CURRICULAR.pdf.

Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D. y Villa-Ochoa, J. 2012. Informe sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemáticas: Colombia. Disponible em www.cimm.ucr.ac.cr/redregional/

León, N., Beyer, W., Serres, Y. e Iglesias, M. (2012). Informe sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática: Venezuela. Disponible em www.cimm.ucr.ac.cr/redregional/

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. de Ponte & L. Serrasina (Org.) Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Itália. Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao, Lisboa.

Llinares, S. (2008a). Construir el conocimiento necesario para enseñar. *Evaluación e Investigación.* 1(3), 7-30.

Llinares, S. (2008b). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. Conferencia invitada en III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional Santa Fe de Bogotá.

Lupiañez, J.L. (2010. Competencias del profesor de Educación Primaria. Documento en línea. Disponible: funes.uniandes.edu.co/800/

Lupiañez, J.L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de las matemáticas escolares. En *P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 454). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.

Malavé, A.(201). Las actitudes hacia las matemáticas, su aprendizaje y la incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes del Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño. Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín, Venezuela.

Moreno, M.F. (2007). De la Matemática formal a la Matemática escolar. *PNA*. 1(3), 99-111.

MPPE (2007). Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana. Liceos Bolivarianos: Currículo. Caracas: Autor.

Orellana, M. (2002). Qué enseñar de un tópico o de un tema. *Enseñanza de la Matemática*. 11, 21-42.

Ortiz, J. Iglesias, M. y Paredes, P. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en Matemáticas.En J. L. Lupiañez (Ed.). Análisis didáctico en Educación Matemática (pp293-308). Granada:Comares.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas. En *Rico L. (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria.*(39-59). Horsari: Barcelona.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 8(1),1-15.

Rico, L., Marín,A., Lupiañez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*. 58, 7-23.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knoeñedge growth in teaching. *Educational Research*. 15(2), 4-14.

UPEL – Comisión de Currículo de Pregrado (s/f). Competencias específicas del profesor de Matemática. Caracas: Autor.

La resolución de problemas en la escuela

Dr. Luis Campistrous Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero México
celrizo@yahoo.com.mx
Dra. Celia RizoCabrera
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
México
celrizo@yahoo.com.mx

Resumen

El curso está dirigido a profesores y maestros de Matemática y en él se pretende discutir cómo puede lograrse el trabajo con verdaderos problemas en las condiciones de trabajo del aula. Se hace una breve referencia a la historia de los problemas en la escuela, se discute brevemente el concepto de problema y de problema escolar. Se exponen estrategias espontáneas que utilizan los alumnos al resolver problemas y se discuten algunas técnicas que pueden ser de utilidad para resolver problemas. En este contexto se incluye una breve referencia a lo que se considera pensar matemáticamente según los autores del trabajo.
Se incluyen problemas de diferentes tipos que serán resueltos y propuestos en el curso se pretende que los problemas sean resueltos utilizando las técnicas expuestas y mediante trabajo conjunto con los asistentes al curso.

Palabras clave: Problemas, resolución de problemas, estrategias, técnicas de resolución de problemas, pensar matemáticamente.

Introducción

En este curso queremos presentar algunas ideas que motiven la discusión acerca de un problema tan importante como la resolución de problemas, no queremos sentar cátedra sino motivarlos para que intercambiemos ideas y conceptos.

Resolución de problemas en la escuela

La Enseñanza de la Matemática posee una larga historia, desde tiempos remotos se le considera como una asignatura necesaria para la preparación de las nuevas generaciones, básicamente para contribuir al desarrollo del pensamiento. Así es como Platón exigía el conocimiento de la Geometría como requisito para ingresar en la Academia, no porque fueran a utilizar los conocimientos geométricos, sino porque consideraba que la geometría era indispensable para la formación del pensamiento de un filósofo.

En el mismo sentido, algunos historiadores han señalado que los Elementos de Euclides estaban destinados a servir de texto en la preparación de filósofos y que esa es la razón por la cual su organización destaca básicamente la estructura deductiva de la Geometría; según estos autores la elaboración durante cientos de años de manuales escolares al estilo de los Elementos constituye un error no sólo pedagógico sino histórico.

Esta situación se mantuvo cuando las disciplinas matemáticas formaron parte de las siete artes liberales en la época medieval y continúa en la escuela moderna en la que entre los objetivos de la Matemática aparece en primer lugar el desarrollo del pensamiento lógico.

Dado este objetivo central, se entiende el papel especial que han desempeñado los problemas en la clase de Matemática ya que se comprende la resolución de problemas como una de las actividades básicas del pensamiento. Este peso de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática puede seguirse hasta los primeros documentos matemáticos que se conservan, ya que algunos autores consideran que los problemas contenidos en las tablillas mesopotámicas y los papiros egipcios son problemas escolares. Esta conclusión se avala a partir del análisis de algunos de esos problemas; en efecto, en ellos aparecen características que difícilmente aparecen en problemas reales, características que lamentablemente perduran aún en los manuales escolares. (Anexo)

En todo este período histórico las razones para considerar los problemas dentro de la enseñanza han sido muy semejantes:

- **Desarrollar el pensamiento, en particular la capacidad de resolución de problemas.**
- **Justificar la importancia de la Matemática y del tema que se desarrolla mostrando su aplicación a diferentes situaciones de la vida o de la técnica.**
- **Motivar el estudio de un tema sobre la base de presentar problemas que sean capaces de atraer la atención de los alumnos.**
- **Introducir nuevos contenidos, en particular aquellos que pueden ilustrarse con ciertos "problemas tipo".**
- **Fijar algunos procedimientos matemáticos que han sido explicados en el aula, preferentemente procedimientos de cálculo.**

Como puede apreciarse, el aprender a resolver problemas no ha figurado como una de las razones para tratarlos en clase. Realmente hay que decir que la creencia predominante durante siglos fue el que se aprende a resolver problemas por imitación, es decir, viendo resolver problemas e imitando las actitudes y el proceder del que resuelve; no puede negarse que esta vía y también la de ensayo y error puede servir a algunas personas para aprender, pero la escuela no está hecha para que algunos aprendan, sino para que todos aprendan y, obviamente, con estos procedimientos no puede lograrse que todos aprendan.

¿Qué consideramos problema?

Para precisar mejor lo que queremos significar es necesario que aclaremos que entendemos por problema:

Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.

Desde el punto de vista didáctico, la anterior definición es muy importante, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de alumnos hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que la persona requiere para su solución y las motivaciones para realizarla. En ambos casos, lo antes planteado significa que lo que puede ser un problema para una persona puede no serlo para otra o bien porque ya conozca la vía de solución o porque no esté interesado en resolverlo.

Los rasgos generales del concepto de problema, en realidad no se hacen muy visibles en los materiales y libros para alumnos y docentes, pues en ellos se utiliza más el concepto clásico de problemas escolares y no al de problema en su acepción más amplia.

Estos problemas escolares tienen características específicas en cuanto a que por lo general son situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para su solución se desarrollan procedimientos más o menos rutinarios. (Anexo)

Estrategias espontáneas de resolución de problemas

Para la resolución de los problemas rutinarios se pueden desarrollar algoritmos que conducen a su resolución o en su lugar desarrollar rutinas que de una manera directa conducen a la solución sin un proceso de búsqueda que vaya más allá de la simple identificación de un algoritmo o rutina que conduce a la solución.

Para la resolución de problemas de una u otra forma se ponen en juego estrategias de pensamiento aunque la estrategia se reduzca a la identificación del algoritmo o de la rutina a utilizar, utilizamos el termino estrategia basándonos en las ideas de la escuela histórico-cultural en la que las acciones humanas se conciben basadas en procedimientos de diferentes tipos, uno de estos tipos son los procedimientos específicos encaminados a realizar tareas muy concretas cuyas acciones y operaciones están muy determinadas y se realizan siempre de la misma forma (por ejemplo el procedimiento algorítmico de resolución de una ecuación de segundo grado); en el otro extremo aparecen los procedimientos generalizados cuyas acciones no tienen un contenido concreto, sino que constituyen esquemas de acciones aplicables en muchas situaciones de diferente contenido (un ejemplo puede ser un procedimiento generalizado de resolución de ecuaciones en el que se incluyen procedimientos específicos de resolución de ecuaciones especiales, pero también los principios básicos que permiten reaccionar frente a ecuaciones que no son conocidas). Se sostiene por los representantes de esta escuela (Talizina, 1992) que tales procedimientos generalizados deben ser objeto de enseñanza pues reducen el volumen de contenido a aprender y preparan al hombre para enfrentarse a verdaderas situaciones problema.

Para nosotros entonces una **estrategia (de resolución de problemas) es un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es especifico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento "ad hoc" y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución.**

De la teoría de la escuela histórico-cultural se concluye que el hombre para actuar organiza sus procedimientos para la acción desde los específicos hasta los generalizados; esto significa que si no dispone de procedimientos aprendidos para una situación dada, el sujeto formará sus propios procedimientos, que pueden resultar eficientes en algún caso pero que en la mayoría serán ineficientes. Esto quiere decir que si nos conformamos con el solo hecho de que los alumnos más aptos desarrollen formas de actuación eficaces, entonces es suficiente el trabajo que se realiza en la actualidad en este sentido; pero si queremos que la escuela desarrolle por igual a todos los alumnos, entonces es necesario dedicar atención a la formación de dichos procedimientos.

En el caso de la resolución de problemas, diferentes autores han reportado estudios sobre las estrategias espontáneas que los alumnos desarrollan para resolver problemas y han puesto de manifiesto que en muchos casos aparecen impulsadas por las acciones docentes y que las acciones evaluativas y las prácticas tradicionales de enseñanza contribuyen a su fijación.

Las investigaciones realizadas por un grupo de investigadores del que forman parte los autores han permitido comprobar que en efecto los alumnos conforman sus propias estrategias y también aislar y analizar un numeroso grupo de dichas estrategias (en diferentes lugares de América Latina); independientemente de las diferencias locales, la mayor parte de las estrategias aisladas resultan ineficientes para la resolución de problemas y, además, son irreflexivas, es decir, no parten de una reflexión sobre la situación planteada y no se basan en una actividad de pensamiento creador.

Pensar matematicamente

Todo lo anterior significa que la resolución de problemas es una forma básica del pensamiento. Trabajar por lograr que los alumnos aprendan a resolver problemas es comprender que hay que modificar el contenido de la enseñanza de la Matemática, pasar de la comprensión del saber matemático como un sistema de hechos a su comprensión como una forma de pensamiento: el pensar matemáticamente.

Concluimos este aspecto señalando que pensar matemáticamente se puede caracterizar como:

- **Interpretar los datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esta interpretación.**

- **Usar la Matemática en forma práctica desde simples sumas algorítmicas hasta análisis complejos (incluyendo estadísticos) y usar la modelación.**
- **Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.**
- **Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos y argumentos de otros.**

M. de Guzmán (1984) comenta que «lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del **enfrentamiento con problemas adecuados** es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas».

Una primera idea a tener en cuenta entonces es el problema de la selección de los "problemas". Por lo general, quizás por una tendencia a sobreproteger a los alumnos considerando que ellos no pueden hacer "esto" o "lo otro" los subestimamos y las actividades que les proponemos en las clases o en las tareas son totalmente reproductivas o muy pobres en cuanto a exigencias de pensamiento propiamente dicho. (Anexo) Tratando de darle una respuesta a la pregunta que dio origen a este tema se podría decir que le falta, en primer lugar **"conocimientos básicos"** que le permitan afrontar la resolución de un problema como:

- **Conocimientos matemáticos** adecuados a los problemas con los que se hayan de enfrentar. Incluye los conocimientos operativos pues en la solución de problemas matemáticos por lo general, no siempre, el sujeto necesita saber hacer las operaciones matemáticas o conocer sus significados.
- **Conocimientos lingüísticos:** habilidad lectora y dominio gramatical. La estructura lingüística es sólo el vehículo que transmite el mensaje o contenido.
- **Conocimientos semánticos y contextuales:** contenido matemático y extra matemático. Los conocimientos contextuales se evidencian en los problemas con mayor o menor grado de proximidad a los intereses de los estudiantes (problemas reales y realistas).
- **Conocimientos del esquema o estructura**: especialmente el esquema semántico de las relaciones matemáticas. Por ejemplo la relación parte-todo.
- **Conocimiento de estrategias:** estrategias generales y estrategias o recursos heurísticos específicos.

Sin conocimientos no se puede avanzar en ningún campo, pero la escuela lamentablemente no siempre cubre estas necesidades cognitivas y se limita a plantear problemas al alumno sin que este tenga los conocimientos previos requeridos para ello. En pocas palabras, "en la escuela se ponen problemas pero no se enseña a resolver problemas" pues no programa esa enseñanza ni se programa cubrir las necesidades cognitivas que esa actividad exige.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que parte importante de los errores en la resolución de problemas son las **dificultades de comprensión lectora**. La tendencia de operar con todos los datos presentados, que ya ha sido aislada antes en investigaciones realizadas por Rizo, C. y Campistrous, L. (1999), aparece como una de las estrategias más utilizadas por los alumnos para resolver problemas, lo que certifica esta falta de comprensión global.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996), han identificado técnicas para la solución de problemas aritméticos que pueden ser utilizadas en general, entre las que se encuentran las técnicas de la modelación, la lectura analítica y la reformulación, la determinación de problemas auxiliares, la del tanteo inteligente y la de la comprobación, que unidas a un procedimiento generalizado para la solución de problemas han brindado resultados alentadores en la búsqueda de soluciones a la ingente tarea de enseñar a resolver problemas.

No obstante, hay un aspecto que no ha sido analizado todavía y es lo relacionado a cuál debe ser el papel del docente en la clase para favorecer el aprendizaje real de los alumnos. Es decir, como antes ya planteamos, en qué medida le damos la oportunidad de que ese pensamiento se desarrolle a través de la actividad y la comunicación de modo de que pueda pensar o razonar por sí mismo o con la ayuda de los otros si fuera necesario.

Conclusiones

En este trabajo asumimos que **TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMÁTICAMENTE,** tal como se plantea en la Agenda para la Acción. Dentro de este planteamiento se asume también que "la resolución de problemas debe ser el eje de la enseñanza de las matemáticas". Esta fue la primera recomendación hecha por el NCTM en abril de 1980 y ha sido asumida como objetivo prioritario de la educación matemática por la mayoría de los países.

Con respecto a la resolución de problemas la misma abarca muchas funciones rutinarias y triviales, así como otras poco corrientes que se consideran esenciales en la vida diaria de los ciudadanos. Es considerada una capacidad específica de la inteligencia, por tanto, si la educación debe contribuir al desarrollo de ésta, es fundamental incidir en su desarrollo a través la educación.

El papel del docente en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en general, y en particular en la solución de problemas debe dar paso a otras formas de organización del aula, complementarias y alternativas a las existentes que permitan que el alumno sea un ente activo, reflexivo y que su aprendizaje tenga significado para él. Estas características antes planteadas son esenciales para el desarrollo de ese alumno y sus posibilidades de razonar matemáticamente.

Bibliografia.

Bazán, Z., (1995). Estrategias empleadas por los estudiantes egresados de Secundaria para resolver problemas matemáticos. *Revista especializada en investigación pedagógica*. Tercera época, Vol.10, pág. 48-57. México

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ed. Pueblo y Educación, La Habana 103p.

Castellanos, D. (1999). La comprensión de los procesos del aprendizaje: apuntes para un marco conceptual. Centro de Estudios Educacionales, ISPEJV, La Habana.

Cervera Márquez, Pablo. (1999). *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado*. Tesis de Maestría. Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". Facultad de Matemática Física. Santiago de Cuba.

De Guzmán, M. Gil, P.D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: tendencias e innovaciones*. Madrid Popular.

González, Fredy E. El decálogo del resolver exitoso de problemas. *Investigación y Postgrado*, abr. 2002, vol.17, no.1, p.11-45. ISSN 1316-0087.

Labarrere, A. (1987). *Bases sicológicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. Ed. Pueblo y Educación.. La Habana.

Labarrere, A. (1988). Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas / Alberto Labarrere Ed. Pueblo y Educación. La Habana. 52 p.

Mónaco, Bárbara S., María I. Aguirre. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: un estudio de caso*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

NCTM, (1980). *Agenda para la acción*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Polya, G.. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Rizo, C. y Campistrous. L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. , **ISSN** 1665-2436, Vol. 2, Nº. 3, 1999 , pags. 31-46

Talizina, N. (1992). *Conferencias sobre didáctica de la Educación superior.* Editora de la Universidad de La Habana. La Habana.

Valenzuela, G. (1992). Resolución de problemas matemáticos: Un enfoque psicológico. *Educación Matemáticas.* México D.F.4 (3), 19-29.

Anexo

Ejemplo problemas antiguos. Un ejemplo de ello lo encontramos en los Papiros del Rhind y de Moscú en los que aparecen problemas como el siguiente:

En una casa hay 7 cuartos, en cada cuarto 7 gatos, cada gato come 7 ratones, cada ratón come 7 espigas de trigo y cada espiga tiene 7 granos. ¿Cuántos hay entre casas, cuartos, gatos, ratones, espigas y granos?

La solución de este problema conduce a una suma de potencias de 7, pero como se puede apreciar no tiene ningún sentido práctico la situación que ahí se plantea, y obviamente solo tiene como función ejercitar el cálculo, en este caso de esa suma de potencias:

¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.

Como ejemplo de este proceder rutinario podemos señalar un problema que aparece en un prestigioso libro francés de algebra escolar:

Un número de 3 cifras es divisible por 9 y si se invierte el nuevo número es ¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. **del número original. ¿Cuál es el número?**

En este caso en ese libro se presenta como solución la que resulta del sistema indeterminado de ecuaciones lineales:

¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. en el que x representa la cifra de las unidades, y la de las decenas, z la de las centenas y k es el factor que determina cuál múltiplo de 9 es el número.

De ahí, tras un penoso trabajo de resolución de este sistema (4 páginas en el libro) resulta la solución siguiente: **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.**

Como se puede apreciar utiliza todo una serie de recursos algebraicos que son muy reconocidos por su potencia pero que su uso indiscriminado ha propiciado procederes completamente rutinarios. En este caso el problema tiene una solución aritmética trivial:

El número de tres cifras invertido tiene que ser divisible por 9 (la suma de las cifras es la misma si el número se invierte) y divisible por 47. El primer número posible es **47 • 9 =423,** el segundo **423•2= 846,** y ya no hay más porque el próximo múltiplo sería **423•3= 1269** y ese ya es de cuatro cifras. Ambos números son soluciones del problema y no hay más.

Se puede comprobar fácilmente esa solución.

Otro ejemplo es el siguiente que fue utilizado durante una investigación sobre las estrategias de los alumnos al resolver problemas.

La gasolina subió un 10%. El Sr. Álvarez decidió reducir su kilometraje al 90% para equilibrar sus gastos. ¿Gasta más, menos o lo mismo en gasolina?

Al resolver este problema los alumnos, en su inmensa mayoría y en todos los grados en que utilizó trataron de utilizar un procedimiento rutinario asociado al indicador textual representado por el símbolo %.

Ilustramos con una alumna que dio como respuesta 4 y lo justificó diciendo que supuso que en cada alcancía había $200, preguntada que por qué $200 contestó que era el número que se ocurrió. Obsérvese que, además, no responde la pregunta del problema y lo que responde es, aparentemente, cuantos billetes de $50 hay en la alcancía.

Estas investigaciones muestran que cada sujeto desarrolla "estrategias", que para nosotros constituyen **procedimientos generalizados en los que las acciones que los integran no tienen contenido concreto, sino que pueden ser realizadas con cualquier contenido, son de carácter general y cada sujeto las realiza de diferente forma según lo exijan las circunstancias.**

Por ejemplo, ¿quiénes de nosotros nos atreveríamos a ponerles a nuestros alumnos de primero a tercer grado un problema como el siguiente?:

Para conservar su forma física, el gato Félix salta hasta lo alto de una escalera que tiene 11 escalones. Con cada salto, Félix sube simultáneamente 2 o 3 escalones a la vez.

¿Con qué secuencia de saltos puede Félix llegar al undécimo escalón?

Escribe todas las soluciones diferentes que halles.

Si este alumno sólo ha resuelto problemas a partir de un modelo previo difícilmente podrá resolverlo. Sin embargo, las operaciones que precisa el problema son de muy fácil manejo: sumar y restar, multiplicar por 2 y por 3.

Además las cantidades que se manejan son inferiores a 12.
Si embargo sólo algunos de nuestros alumnos más despabilados, ¡que siempre los hay, afortunadamente y a pesar de nosotros!, podrán iniciar una búsqueda a través de un tanteo totalmente carente de sistematización. Y, a veces, hasta encuentran una solución, pero de ahí no pasan y lo peor, tienen la creencia de que si encuentran una solución, ya terminaron porque “los problemas solo tienen una solución”.

Entre las estrategias propuestas por Polya podemos mencionar:

1°. **Analogía** (recordar un problema similar)

- Problema similar resuelto anteriormente.

- Resolver antes un problema similar más sencillo (con números más pequeños, transformado en una situación familiar conocida, con menos variables, etc.

-

2º. **Organización de la información** (representación de datos)

- Hacer una figura o un diagrama.
- Construir tabla.
- Precisar los datos usando variables o numéricamente.

3º. **Conjeturar y comprobar** (ensayo y error). **Tanteo inteligente**.

4º. **Simplificar** el problema original y buscar ideas de la posible vía de solución en el problema más simple.

5º. **Buscar regularidades**, encontrar una ley o patrón (generalizar).

6º. Construir **modelos** (analogía).

7º. **Empezar** un problema **desde atrás**.

8º. Generalizar.

¿Qué hace falta?

No obstante, **con conocimientos no basta** para abordar la resolución de un problema matemático se precisa, además:

- La utilización de un **pensamiento lógico** no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.
- La **sistematicidad** de su pensamiento y la cualidad de la **perseverancia** que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.
- El **gusto de la exploración matemática**, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.
- **Apertura de pensamiento** para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución, sin que por ello sea más o menos valioso.
- Las **estrategias o recursos heurísticos** específicos más significativos que pueden ser empleados en la solución de problemas y que deben ser enseñados como un contenido más son, entre otros, los siguientes:

En relación con lo antes planteado, González, F. (2002) plantea, en lo que el autor llama el **"decálogo del resolvedor exitoso de problemas",** 10 acciones que denomina "mandamientos" que es necesario que el alumno realice y que por supuesto el profesor las propicie. Estas son:

Mandamientos del Decálogo del Resolvedor Exitoso de Problemas
DECÁLOGO DEL RESOLVEDOR EXITOSO DE PROBLEMAS
Para tener éxito como resolvedor de problemas se debe:
1. Conocer las metodologías y técnicas de resolución de problemas.
2. Poseer un esquema organizado en secuencias que pueda orientar la obtención de la solución.
3. Comprender el problema.
4. Conocer los diferentes pasos que se deben poner en acción para buscar una solución.
5. Tener en cuenta las condiciones que contextualizan el problema.
6. Hacer una revisión minuciosa de los datos presentados en el problema.
7. Estimar la dificultad del problema.
8. Realizar un seguimiento riguroso y minucioso de los diversos factores que intervienen en el problema.
9. Trazar un plan, una estrategia bien definida, que lleve a la solución.
10. Tener en cuenta que no todos los problemas tienen la misma estructura.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Un Marco para la Acción en la Mejora de la Educación Matemática en América Latina: Lecciones de una Investigación Regional y un Experimento en La Republica Dominicana.

Gilbert A. **Valverde**, Ph.D.
Instituto para Estudios Globales en Política Educativa
Departamento de Políticas Educativas y Liderazgo
University at Albany, State University of New York
Estados Unidos
gvalverde@albany.edu

Resumen

La investigación sobre oportunidades disponibles para aprender matemática escolar en la región de América Latina y el Caribe (ALC) presenta un panorama catastrófico. Los jóvenes no están siendo preparados adecuadamente en herramientas matemáticas necesarias para realizar exitosamente decisiones personales y participar en asuntos cívicos, sociales, culturales y económicos. Esto se debe a programas débiles, materiales de aprendizaje inadecuados y falta de destreza matemática de los docentes. En las aulas predominan aun la memorización de operaciones y la reproducción mecánica de conceptos, algoritmos e información escasa o errónea dada por los docentes. En las evaluaciones internacionales, el desempeño de los estudiantes está constantemente por debajo de la mayoría de sus pares internacionales. Partiendo una revisión de la situación en ALC, y lecciones derivadas de una intervención en la Republica Dominicana, se propone un marco de trabajo para esfuerzos futuros con el fin de mejorar la educación matemática en la región.

Palabras claves: educación matemática, evaluación, América Latina, República Dominicana, ciencias naturales, reforma educativa, cooperación internacional

Introducción[1]

Tradicionalmente, las habilidades y destrezas en las matemáticas y ciencias naturales en toda la región de ALC han recibido mucho menos atención que las destrezas en la alfabetización en los niveles de preescolar, primaria y secundaria. Es evidente que los gobiernos, educadores, padres de familia e investigadores se han preocupado menos por las capacidades cuantitativas y científicas de los niños y niñas que por sus destrezas de lectura. Sin embargo, en años recientes tres grupos de factores interrelacionados han comenzado a atraer la atención hacia este vacío. Primero, las pruebas internacionales estandarizadas han arrojado evidencia concreta del déficit, ya antes sospechado pero sin verificar, en el rendimiento de los estudiantes en las matemáticas y ciencias naturales[2]. Segundo, los estudios indican que la fuerza laboral de la región carece de investigadores adecuados[3] —tanto en términos de cantidad como de calidad—, aun cuando los gobiernos reconocen que se requieren las mejores destrezas en las matemáticas y ciencias naturales en las carreras fundamentales para la competitividad y productividad regional. Tercero, los formuladores de políticas y profesionales reconocen que la instrucción en las matemáticas y ciencias naturales no se debe enfocar solamente en los futuros científicos, sino fomentar el interés necesario en la matemática y las ciencias para asegurar que todos los estudiantes desarrollen las destrezas generales en ese campo que son importantes para cada ciudadano.

Aunque la voluntad por mejorar la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales comienza a fortalecerse en los niveles de preprimaria, primaria y secundaria, los formuladores de políticas, educadores y donantes de ALC carecen de información sobre las características de la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales en la región y sobre los insumos y las prácticas pedagógicas más eficaces. Este es un vacío que se debe llenar: si no se entiende la condición de la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales en la región, la oportunidad de mejorarla es muy limitada.

Se presenta en este trabajo, el resultado combinado de una revisión al estado actual de la educación matemática en ALC y de una intervención de modelo experimental en la Republica Dominicana, con el fin de proponer un marco de acción para orientar el importante trabajo de reformar y mejorar la calidad de la educación matemática en la región.

I. ¿Qué es la enseñanza de las matemáticas y las ciencias naturales?

El término inglés numeracy (la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales) es un término relativamente nuevo y difícil de traducir en algunos idiomas de la región de ALC. Lo que no es nuevo, sin embargo, es el diálogo alrededor de la importancia y el impacto en las destrezas de las matemáticas y ciencias naturales adquiridas durante la niñez temprana y la

[1] Este es un resumen de un conjunto de investigaciones realizadas a lo largo de más de una década. Se han resumido para cumplir con el formato reglamentario de la Memoria del Congreso. Favor comunicarse con el autor en gvalverde@albany.edu para citas y reportes completos.

[2]Los países de ALC constantemente tienen un bajo desempeño en evaluaciones internacionales: aun después de controlar el Producto Interno Bruto (PIB) per cápita, el desempeño de los estudiantes de la región está por debajo de los estudiantes en los países de la OCDE y Asia oriental.

[3] En el 2007 el número de investigadores por cada 1000 personas en la fuerza laboral de ALC fue de 1.96 (RICYT 2007), muy por debajo del promedio de la OCDE de 7.3 (OCDE 2009).

educación básica y secundaria, un diálogo que por mucho tiempo ha ocupado a los educadores y los formuladores de políticas en la región.

Basándonos en una variedad de fuentes, presentamos la siguiente definición de trabajo: *La educación en las matemáticas y ciencias naturales incluye tanto los aspectos de la enseñanza de las Matemáticas como de las Ciencias. Representa una educación que pretende desarrollar las capacidades de los estudiantes para utilizar destrezas cuantitativas, espaciales, de probabilidades, de relaciones, empíricas y de lógica experimental. Denota el conocimiento y la comprensión de los conceptos matemáticos y científicos y los procesos de investigación (se enfoca especialmente en la evidencia y el uso de ella para corroborar afirmaciones y para diferenciar explicaciones comprobables de otro tipo de explicaciones) para llevar a cabo exitosamente tareas de decisión personal y participar en asuntos cívicos, sociales, culturales y económicos.*

Utilizamos evidencias de ALC para determinar la condición actual de los esfuerzos educativos concernientes a nuestra definición.

II. Metodología

En la investigación regional, tomamos la información de tres fuentes. Primero, intentamos identificar y recuperar los principales estudios de las matemáticas y ciencias naturales que se han realizado en la región desde preescolar hasta educación secundaria[4], incluyendo tanto estudios publicados como los no publicados[5]. Segundo, obtuvimos la información sobre proyectos de matemáticas y ciencias naturales de revisiones de documentos y entrevistas con formuladores de políticas y educadores. Inicialmente nuestro objetivo fue enfocarnos en proyectos evaluados a través de estudios experimentales o cuasi-experimentales que compararan a estudiantes expuestos a una o más intervenciones con otros en un grupo de control. Pero debido a que el número de intervenciones que cumplen con estos criterios es muy restringido, escogimos incluir otras iniciativas, medidas de políticas o enfoques de políticas prometedores que se proponen apoyar el mejoramiento de las destrezas en las matemáticas y ciencias naturales. Sin embargo, en esta presentación nos limitamos a compartir el estudio de un caso de intervención, con modelo experimental, en la Republica Dominicana. Finalmente, analizamos bases de datos procedentes de pruebas internacionales estandarizadas, incluyendo el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), TIMSS, y PISA, así como los resultados de los exámenes para el certificado CSEC (Certificado Caribeño de Educación Secundaria).

---

4 Existe un problema con la falta de información sobre iniciativas de las matemáticas y ciencias naturales en la educación preprimaria, pero parece que los esfuerzos regionales en este nivel resaltan tanto la lectura que casi excluyen las matemáticas y ciencias naturales.

5 Para identificar publicaciones pertinentes, condujimos búsquedas de temas específicos a través de diferentes motores de búsqueda como JSTOR y el Centro de Información sobre Recursos Educativos (ERIC). También revisamos las bibliografías de publicaciones recuperadas para identificar estudios de investigaciones adicionales.

III. Evidencia de investigación internacional

Esta sección presenta algunas de las teorías e investigaciones principales con respecto a la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales enfocada en resaltar prácticas educacionales que los formuladores de políticas en ALC pueden considerar replicar.

Docentes y enfoques pedagógicos

Un creciente conjunto de evidencia internacional apoya la afirmación, a menudo cuestionada en el pasado, de que el aprendizaje de calidad ocurre al menos en parte como un resultado de la enseñanza de calidad (véase, por ejemplo, Schmidt y otros 2001; Schneider 1985; Slavin 1994). Muchas investigaciones han buscado explicar el impacto de diversos factores relacionados con los docentes, incluyendo años de experiencia, formación académica, incentivos monetarios y no monetarios, capacitación en servicio y prácticas de clase. Los hallazgos de la investigación son variados, pero sobre todo, las prácticas pedagógicas y las capacitaciones en servicio de docentes destacan como factores particularmente importantes. Por ejemplo, con base en las calificaciones de las pruebas de matemática y ciencias naturales en los Estados Unidos y una base de datos exhaustiva sobre factores asociados, Wengslinsky (2000) encuentra que "en tanto que los aportes de docentes, el desarrollo profesional y las prácticas de clase influyen en los logros de los estudiantes, el mayor rol lo juegan las prácticas de clase, seguidas por el desarrollo profesional".

En términos de enfoques pedagógicos, el debate sobre procedimientos versus razonamiento numérico conceptual se ha dado por décadas. Skemp (1987) acuñó los términos comprensión instrumental y comprensión relacional. La comprensión relacional ocurre cuando un estudiante resuelve un problema y a la vez comprende por qué el proceso utilizado funciona. La comprensión instrumental es cuando un estudiante sabe cómo obtener una respuesta correcta sin comprender el método utilizado. Por medio de una evaluación experimental del razonamiento del estudiante en la medición de áreas, Zacharos (2006) concluyó que los niños y niñas que utilizan una fórmula tuvieron dificultades para interpretar el significado físico de área. Pesek y Kirshner (2000) encontraron que la enseñanza temprana de memorización de fórmulas y el aprendizaje rutinario interferían con el aprendizaje significativo posterior.

Muy relacionada con el debate sobre el razonamiento numérico conceptual y de procedimiento, está la discusión sobre el ejemplo del docente versus los enfoques pedagógicos centrados en los estudiantes. Existe ahora una gran cantidad de investigaciones que apoyan el uso de algún grado de prácticas de clase basadas en la indagación como un medio para maximizar el aprendizaje (véase, por ejemplo, Lowery 1998; Healy 1990). Sin embargo, se requiere de mayor investigación para definir qué grado de indagación es más efectiva para enseñar temas y conceptos diferentes, y en qué contextos. En general, el uso de la indagación es más aceptado en la enseñanza de disciplinas de ciencias naturales que en la matemática[6].

[6] Colburn (2000) distingue entre cuatro categorías diferentes de enfoques basados en la indagación según los diferentes niveles de involucramiento del docente. Primero, en un extremo del contínuum, la indagación estructurada abarca métodos donde se les da a los estudiantes las preguntas y procedimientos paso a paso, con base en los cuales ellos generan explicaciones. Segundo, la indagación guiada es cuando el docente da el problema que deben resolver así como los materiales, y se espera que los estudiantes elaboren sus propios procedimientos para resolver el problema y registren los hallazgos.

Metas y contenidos del currículo.

La investigación educativa y la experiencia política indican que el cumplir la meta de una educación de calidad en matemática o ciencias naturales está asociado con la articulación de una visión clara. Esta visión debe especificar, en términos operativos, un conjunto desafiante, riguroso y disciplinariamente sólido de expectativas para el aprendizaje de los estudiantes (Benavot 1992; Kamens, Meyer, y Benavot 1996; Valverde 2003, 2005; Valverde y McKnight 1997; Valverde y Schmidt 2000; Westbury y Hsu 1996).

Un programa riguroso de matemática, como se ha demostrado en una variedad de investigaciones[7], es el que va desde el contenido básico en los años de primaria hasta las herramientas matemáticas más complejas cognitivamente en la secundaria, por ejemplo[8]:

- En números: desde un conocimiento básico de los números naturales, su Significado, operaciones y propiedades, incluyendo estimación y sentido del número (a menudo ausente de los programas de ALC debido al énfasis tradicional sobre "la respuesta exacta") hasta números enteros, racionales y reales, exponentes, raíces y radicales.
- En geometría: desde el conocimiento y las destrezas básicas en posición, visualización y forma, hasta la geometría de coordenadas y vectores (los últimos dos temas, así como las funciones, que se mencionan abajo, son herramientas fundamentales para aprender en la educación secundaria para que los estudiantes puedan tener una educación significativa en las ciencias físicas).
- En proporcionalidad: desde conceptos y problemas sencillos hasta Pendiente y gradiente y trigonometría, interpolación y extrapolación lineal.
- En álgebra: desde el estudio de patrones simples, frases numéricas y oraciones hasta un estudio profundo de relaciones, funciones, ecuaciones e inecuaciones y fórmulas.
- En cálculo: desde el estudio del análisis elemental en los años superiores de secundaria hasta procesos infinitos y cambio.
- En estadística y probabilidad: desde el estudio de simples tablas, gráficos y nociones de tendencia central y varianza en escuela primaria, hasta estudios más profundos de representación de información, análisis de datos, incertidumbre, y probabilidad en la secundaria.

Tercero, a través del enfoque del ciclo de aprendizaje, los estudiantes aplican los procedimientos de indagación guiada, y luego el docente dirige una conversación sobre los resultados de los estudiantes. Durante la conversación, el docente presenta los nombres formales de los conceptos, después de lo cual los estudiantes aplican los conceptos a una situación nueva. Cuarto, en el otro extremo del contínuum, a través del enfoque de indagación abierta, se les da a los estudiantes diferentes materiales y se les pide que desarrollen sus propias preguntas y procedimientos de investigación, que realicen la investigación y que comuniquen los resultados.

[7]Tales estudios, enfocados en las matemáticas, se han beneficiado enormemente del uso de comparaciones internacionales (Callingham y Watson 2004; Cogan, Wang, y Schmidt 2001; Conley 2003; Ertl 2006; McKnight y otros 1987; McKnight y Valverde 1999; Resnick y Nolan 1995; Schmidt y otros 1997a, 1997b, 2001; Schoenfeld 1994; Stevenson y Baker 1991; Tuijnman y Postlethwaite 1994; Valverde 2003, 2005; Valverde y McKnight 1997; Valverde y Schmidt 2000).

[8]Es importante subrayar que nos referimos aquí al programa general de Matemáticas, no al programa de Matemáticas especializado que se propone preparar a los estudiantes para carreras en ciencias, tecnología, ingeniería o matemáticas (STEM).

La educación en ciencias naturales es diferente de la educación matemática; está compuesta de varias disciplinas específicas, y en muchos países hay una distinción entre las ciencias que se espera que todos los estudiantes manejen en la primaria y los primeros años de escuela secundaria, y los cursos de ciencias específicos (por ejemplo, biología, química y física) en nuestra investigación tratamos extensamente la educación científica, dada nuestra definición de "numeracy" como la integración de matemática y ciencias naturales. Sin embargo, para esta exposición, enfocaremos principalmente el aspecto de matemática. Una política curricular de alta calidad en matemáticas y ciencias naturales combina estas metas de contenido y procesos con un conjunto de expectativas de desempeño estudiantil que crece en complejidad cognitiva a través de los años, desde la preprimaria hasta el final de la educación secundaria.

IV. Hallazgos

Las investigaciones sobre las oportunidades para aprender que están disponibles para los estudiantes en la región ALC presentan un panorama perturbador. Los jóvenes no están quedando preparados apropiadamente para cumplir los requisitos de matemáticas y ciencias naturales que exige una economía mundial que está cada vez más interconectada. Entre los causantes de esta situación se hallan los currículos débiles, materiales de aprendizaje inadecuados y la falta de dominio por parte de los docentes en matemáticas y en las ciencias naturales. Las aulas se caracterizan por la memorización mecánica de operaciones rutinarias de cómputo y la repetición de datos, y los docentes les dan a sus alumnos poca retroalimentación evaluativa, o la que les dan es incluso errónea. A pesar del hecho de que los docentes suelen estar bastante conscientes de sus limitaciones en los conocimientos y destrezas matemáticas y científicas, muchos no reconocen el probable impacto que tiene este déficit sobre los estudiantes en sus aulas; con más frecuencia atribuyen el bajo rendimiento a factores institucionales o contextuales. En esta sección repasamos las características y la calidad de los currículos de matemáticas y ciencias naturales de la región, los docentes, los enfoques pedagógicos, los libros de texto de matemáticas y ciencias naturales y otros insumos, y los logros de los estudiantes.

Los currículos de matemáticas y ciencias naturales en América Latina y el Caribe

El término "calidad" está presente en todo el debate sobre la política curricular en los países de ALC,[9] tendencia que se halla en los debates sobre estos temas en todo el mundo. La diferencia principal en ALC, sin embargo, es la medida en que ese debate se ha quedado en los niveles filosóficos e ideológicos. Los debates están casi totalmente carentes de referencia alguna a evidencias empíricas. Además, con frecuencia no logran hacer referencia al rigor académico o siquiera a una conceptualización operacional de las destrezas y conocimientos que se requieren para la superación personal, la vida ciudadana y la participación en la economía.

---

[9] Las fuentes primarias de evidencias para esta sección, a menos que se señale de otro modo, son dos obras sobre el currículo y los estándares: una es una evaluación de las tendencias regionales en la política curricular y evaluativa en ALC, realizada recientemente por Gilbert Valverde, coautor de esta reseña (2009), y la otra es un análisis de un archivo comprensivo, recientemente compilado, de estándares, currículos, programas de estudio y libros de texto de Matemáticas, recolectados con el propósito de efectuar un estudio de la iniciativa de "La Calidad Cuenta (Quality Counts)" de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la cual es excepcionalmente fuerte a la hora de representar a los países de la región ALC (Benavot 2010).

En el caso del rigor académico, el término está casi totalmente ausente de, al menos, las justificaciones o fundamentaciones escritas de las metas citadas en currículos nacionales y programas de estudios. Esas discusiones, en su mayor parte, esquivan la referencia al rigor disciplinario o la evidencia en las investigaciones, y dan precedencia a las opciones filosóficas e/o ideológicas tomadas por los que trazan las políticas, que en su mayoría son variantes de teorías psicológicas de la construcción del conocimiento. Se centran principalmente en ofrecer una fundamentación del pedigrí teórico de las nuevas políticas. Lo curioso es que también es escaso el debate —más allá de enunciados imprecisos y vagos— sobre el conjunto de destrezas y conocimientos de matemáticas y ciencias naturales que se necesitan para llevar adelante la vida personal, social y económica.

Tal como se describió en la sección anterior, el currículo de matemáticas y ciencias naturales debe ser dinámico: debe proceder en el entendido de que los estudiantes deben dominar algunos conocimientos y destrezas y luego pasar a dominar nuevos contenidos y destrezas. Pero las metas de aprendizaje en muchos currículos de ALC son estáticas (Schmidt y otros 1997a; Valverde 2004, 2009).

En general, los sistemas educativos en ALC usan currículos que no cumplen con las normas internacionales de claridad, alineamiento y rigor. La ambigüedad, la contradicción y la dispersión se pueden observar en los términos vagos e imprecisos en que se suelen formular en la región las metas de aprendizaje. Frecuentemente, el lenguaje en que se presentan esas metas de aprendizaje no le permite al lector discernir cómo es que alguien (un docente, un administrador, un padre o madre de familia, etc.) puede verificar si la meta se ha alcanzado o no. Parece que a veces los ministerios de educación (MDE) reconocen este asunto, y luego se ponen a diseñar nuevos documentos, dirigidos con una enorme variedad de actores y entidades diferentes en el sistema educativo. Estos documentos —a menudo con títulos como "indicadores de aprendizaje", "áreas de competencia", "criterios de evaluación" y así por el estilo— casi invariablemente son escritos por equipos (con frecuencia consultores externos) que generalmente no escriben ese tipo de instrumentos de política curricular. Lo típico es que carezcan de mecanismos eficaces para garantizar que estén alineados entre sí, y por eso se vuelven parte de una especie de efecto "torre de Babel" en el cual los currículos, los programas de estudios, los indicadores de aprendizaje, los marcos de exámenes y otros instrumentos, en vez de conformar una arquitectura sólida y cohesionada de políticas complementarias, constituyen una cacofonía de directrices confusas y contradictorias.[10]

El rigor, como antes se señaló, es una noción que rara vez aparece como inquietud específica en ninguna política curricular en ALC. Lo que es más importante, las metas planteadas por muchos países para las matemáticas muestran poca evidencia de él. Además de ser de baja calidad, la evidencia anecdótica de muchos países e informes de los MDE (por ejemplo, un reciente trabajo en la unidad curricular del MDE de la República Dominicana) indica que a menudo los currículos no se están implementando a cabalidad. En particular, en los niveles de preprimaria y primaria, los estudiantes parecen estar recibiendo menos horas de educación de lo estipulado en matemáticas y ciencias naturales, y se pierden áreas importantes de las matemáticas y de las ciencias que, si bien figuran en el currículo, no son enseñadas por sus maestros.

[10] En Valverde (2009) se halla documentación extensa de esas características, con ilustraciones.

En resumen, una mirada crítica a la política curricular de ALC sugiere que las políticas requieren un refinamiento sustancial para corregir problemas de ambigüedad, contradicción, dispersión y falta de rigor. En la sección cinco que sigue vamos a examinar los esfuerzos en toda la región que se proponen abordar esas condiciones y superar los desafíos asociados con ellas.

Los docentes y los enfoques pedagógicos

En aquellos países de ALC donde los sistemas nacionales de evaluación publican resultados en forma periódica, el público en general parece estar consciente de los bajos niveles de rendimiento en matemáticas y ciencias naturales que en general tienen los estudiantes, pero menos consciente de la baja calidad de instrucción que reciben esos estudiantes. Aquí, una vez más, las señales son preocupantes. Aunque una mayoría de los docentes de la región tienen el nivel de capacitación requerido por los sistemas nacionales de educación —por lo general un título de un instituto de formación docente o una universidad (LLECE 2010) —, las evidencias sugieren que muchos docentes no están adecuadamente preparados y ofrecen muy pocas oportunidades para que sus alumnos aprendan las destrezas de matemáticas y ciencias naturales. El énfasis se pone de forma abrumadora en el desarrollo de una comprensión de las matemáticas y ciencias naturales que es instrumental o de procedimiento, en vez de ser conceptual o relacional:

- En Perú, un estudio reciente de estudiantes de sexto grado en 22 escuelas públicas en Lima mostró que menos de la mitad de los ejercicios de matemáticas que los estudiantes copiaron en sus cuadernos habían sido resueltos. La evidencia de los cuadernos también indicaba que los docentes ponen excesivo énfasis en los temas del currículo nacional que son menos exigentes en el aspecto cognitivo. El estudio descubrió también que es común encontrar errores en los libros de ejercicios de los estudiantes que no han recibido ninguna retroalimentación de parte de los docentes, o lo que es peor, retroalimentación errónea (Cueto, Ramírez y León, 2006).
- Una investigación internacional efectuada en aulas de matemáticas de sexto grado en Argentina, Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Perú, México y Uruguay encontró que las prácticas de evaluación que los docentes hacen durante la clase son extremadamente débiles. A los estudiantes y a sus familias se les da muy poca retroalimentación formativa en esas evaluaciones, y las calificaciones asignadas a los estudiantes son arbitrarias y, en su mayor parte, carentes de sentido (Ravela 2009).
- En Panamá y Costa Rica, un estudio comparativo de docentes de tercero y séptimo grados, que incluía el grabar en videocinta lecciones de matemáticas y la administración de un instrumento de evaluación que medía el dominio de las matemáticas que tenían los docentes y su conocimiento de la pedagogía de las matemáticas, puso al descubierto que los docentes tienen deficiencias preocupantes en ambas áreas (Sorto y otros, 2008).
- En Chile, un estudio internacional marcó puntos de referencia de oportunidades para los estudiantes de aprender matemáticas y el impacto de estas oportunidades sobre el desempeño de los estudiantes en el TIMSS 1998/1999 frente a jurisdicciones con características económicas similares pero con un rendimiento académico superior: Corea del Sur, Malasia, Eslovaquia y las Escuelas Públicas del Condado de Miami/Dade (EEUU). un estudio estadístico multinivel (HLM) muestra que la calidad de la enseñanza tuvo un impacto positivo sobre el rendimiento en matemáticas en todos esos países. Pero

los estudiantes en Chile se centraron más en el aprendizaje de memoria y tuvieron menos oportunidades para aprender unas matemáticas más exigentes en lo cognitivo que sus pares en otros sistemas educativos (Ramírez 2006).

- En la República Dominicana, una evaluación reciente del dominio matemático de los docentes y los rendimientos en matemáticas de sus alumnos no solo reveló que los maestros de escuela exhiben debilidades extraordinarias en su conocimiento del contenido (solo cerca de la mitad de los docentes de cuarto grado en las provincias de Santiago y Santo Domingo reconocieron que la fracción común 1/2 es mayor que 1/3), sino que también mostraron debilidades comparativamente mayores en aquellas áreas de las matemáticas que también resultaban difíciles para sus alumnos: por ejemplo la proporcionalidad, las fracciones comunes y decimales, elementos de estadística y probabilidades (Valverde y otros, 2009).
- Estudios de caso en Colombia sugieren que los docentes no tienen una conciencia crítica de sus carencias en matemáticas o del efecto que esas carencias tienen sobre los estudiantes en sus aulas. En el caso de los profesores de álgebra de secundaria en Colombia, la evidencia indica que cierto número de ellos tienen concepciones erróneas y faltantes de conocimientos que demuestran ser obstáculos de gran dimensión en su labor docente, pero que de modo abrumador ellos culpan a factores institucionales y/o contextuales por los bajos niveles de rendimiento de sus alumnos (Agudelo-Valderrama, Clarke y Bishop, 2007).

Libros de texto y materiales didácticos en matemáticas y ciencias naturales

Las evidencias disponibles sugieren que muchas escuelas en la región se caracterizan por una falta de insumos en matemáticas y ciencias naturales, incluyendo libros de texto sobre matemáticas y ciencias naturales, suministros y laboratorios:

- El estudio SERCE de factores asociados[11] indicó que, en Paraguay, solo una cuarta parte de los estudiantes de sexto grado tienen su propio libro de texto de matemáticas. La mitad de los estudiantes indicaron que compartían su libro de texto con otros compañeros. En la República Dominicana el 43% de los estudiantes tienen su propio libro de texto de matemáticas, y el 37% comparten un libro con sus compañeros. (SERCE 2008).
- Un estudio de 56 escuelas primarias en dos provincias de Argentina indicó que la disponibilidad de materiales didácticos y equipos de matemáticas se limita a 4 estudiantes por libro, 162 estudiantes por computadora y 379 estudiantes por televisor. (Näslund-Hadley, Cabrol e Ibarrarán, 2009).

En la región es limitada la investigación sobre el impacto del acceso a los materiales de matemáticas, incluyendo libros de texto, kits de material manipulable y suministros. Los pocos estudios disponibles muestran que puede ser importante, aunque hay que explorar más a fondo las causas:

- En Nicaragua, el Banco Mundial halló que la mayor disponibilidad de libros de texto de matemáticas en primer grado incrementaba sustancialmente las notas de los estudiantes en

[11] El estudio SERCE de factores asociados abarca un amplio espectro de características de las escuelas, los docentes y los estudiantes, incluyendo, por ejemplo, la infraestructura y el equipo, el clima de la escuela, el desempeño de los docentes y el estatus socioeconómico.

los exámenes. Este impacto era más pronunciado en las escuelas rurales, y parecía ser independiente del nivel inicial de rendimiento del grupo en matemáticas (Baker 2002).

- En Nuevo León, el número de respuestas a la encuesta de factores asociados (SERCE 2008) fue suficiente para analizar la relación entre libros de texto y aprendizaje. El estudio no encontró una diferencia significativa en las notas de los exámenes entre estudiantes que no tenían libro de texto de matemáticas y los que tenían que compartir su libro de texto de matemáticas con otros estudiantes. En cambio, los estudiantes que tenían su propio libro de texto excedían a sus pares en rendimiento por 43 puntos (8,3%).

El Logro Estudiantil

A pesar de algunos esfuerzos por priorizar la educación en matemáticas y ciencias naturales —y en particular las matemáticas—, hay un creciente cúmulo de evidencias que sugiere que los sistemas educativos de la región se caracterizan por una falta de calidad que es crítica. Las pruebas y estudios nacionales e internacionales —y un examen de las metas nacionales expresadas en la política curricular— sugieren unánimemente que los desafíos por afrontar son enormes.

Las pruebas nacionales en la región ALC (con pocas excepciones) son un fenómeno que data de mediados de la década de 1990. Desde las primeras pruebas, los resultados en matemáticas y ciencias naturales han demostrado ser decepcionantes una y otra vez. A pesar de numerosos problemas técnicos que muchos sistemas nacionales de pruebas en la región apenas recientemente han comenzado a superar (Ravela 2001; Ravela y otros 2001), es clara la evidencia de que, en promedio, los estudiantes están quedando por debajo de las metas para el dominio de las matemáticas y ciencias naturales fijadas por las políticas educativas de sus países. Hay muchos casos de estos hallazgos preocupantes; los siguientes son solo unos cuantos ejemplos:

- En Perú, las pruebas nacionales realizadas en 2009 encontraron que solo el 13,5% de los estudiantes de segundo grado cumplían las expectativas nacionales de dominio de las matemáticas a nivel de su grado. Las pruebas nacionales realizadas en 2004 indicaron que solo el 2,9% de los niños de quinto grado habían alcanzado plenamente las expectativas para su nivel de grado (Unidad de Medición de la Calidad Educativa 2010; GRADE 2006).
- En Guatemala, las pruebas nacionales de rendimiento en escuela primaria realizadas en 2004 encontraron que un escaso 28% de los estudiantes podían, al final del primer grado, reconocer la opción correcta en exámenes de escogencia múltiple de simples sumas y restas (CIEN y PREAL 2009).
- En México, una evaluación nacional hecha en 2008 de estudiantes de secundaria de noveno grado encontró que menos de la mitad (48%) habían alcanzado el nivel de dominio más básico en matemáticas para su grado (Aguilar, Miguel y Vázquez, 2009).
- En Haití, una evaluación del desempeño de estudiantes de primaria en el año lectivo 2004-2005 encontró que solo el 44% de los estudiantes de quinto grado cumplían las expectativas para su grado en matemáticas (EFA 2008).

Estos resultados son típicos de la región, y han conducido a su caracterización como un área que “casi no ha avanzado nada en el mejoramiento del aprendizaje” (Junta Asesora de PREAL 2006: 6), condición que comparte con gran parte del mundo en desarrollo (EFA 2008).

Las pruebas nacionales, sin embargo, presentan algunas limitaciones importantes a la hora de tratar de evaluar el estado actual de los logros de los estudiantes en las matemáticas y ciencias naturales. La creciente participación de los países de ALC en evaluaciones internacionales a gran escala provee evidencias suplementarias importantes. La importancia de estas pruebas radica en la oportunidad que proveen para referenciar el rendimiento promedio de los estudiantes en diversos países y regiones. Especialmente importantes a este respecto son las pruebas regionales periódicas aplicadas por la Oficina Regional para la Educación en América Latina y el Caribe (OREALC) de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), basada en el Laboratorio Latinoamericano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE); PISA de la OCDE; los CSEC, organizados por el Consejo Caribeño de Exámenes (CXC); y las TIMSS, organizadas por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educacional (IEA).

La más reciente evaluación del LLECE, el SERCE, evaluó las destrezas matemáticas de estudiantes de tercero y sexto grados en 16 países y en el estado mexicano de Nuevo León, y las destrezas en ciencias naturales de estudiantes de sexto grado en 9 países y en el estado de Nuevo León. El estudio reveló algunos puntos importantes de señalar:

- Las destrezas en matemáticas y ciencias naturales varían ampliamente. En general, Cuba representa el nivel más alto de rendimiento y la República Dominicana el más bajo.
- La calidad de los resultados en matemáticas de tercer grado es, por lo general, baja: en siete países (Ecuador, El Salvador, Guatemala, Nicaragua, Panamá, Perú y República Dominicana), el 50% o más de esos estudiantes han alcanzado apenas el nivel más abajo de rendimiento.
- Muchos países también tienen resultados débiles en matemáticas de sexto grado. Ecuador, El Salvador, Guatemala, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú y República Dominicana están muy atrás de sus pares regionales.
- Los datos de SERCE revelaron importantes inequidades de aprendizaje entre estudiantes de diferentes grupos socioeconómicos. La probabilidad de que un estudiante de tercer grado del quintil más pobre alcance un resultado satisfactorio en matemáticas es de 10%, en comparación con el 48% en el quintil de más riqueza. En sexto grado, la probabilidad de obtener un resultado satisfactorio mejoraba levemente (27% entre estudiantes en el quintil más pobre, en comparación con el 67% en el quintil más rico), pero la desigualdad en el aprendizaje por grupo socioeconómico seguía siendo pronunciada (Duarte, Bos y Moreno 2009).
- Los datos de SERCE 2008 también muestran importantes lagunas de aprendizaje por grupo étnico. Los estudiantes que hablan en casa una lengua indígena tienen menor rendimiento en todas las asignaturas, incluyendo ciencias naturales y matemáticas. Por ejemplo, en Paraguay, las notas de matemáticas de los niños que recibían las lecciones en guaraní son más bajas, en promedio, por 32 puntos, o por un 7%. Después de controlar otras variables como sexo, características de sus padres, estatus socioeconómico y trabajo infantil, permanece una diferencia de 17 puntos.

La participación de ALC en evaluaciones extrarregionales y transnacionales a gran escala, tales como el PISA y TIMSS, sigue siendo modesta; pero los resultados son alarmantes. Sea cual sea su ubicación en el SERCE, todos los países de ALC que han participado en alguna de las administraciones de PISA o TIMSS han quedado en forma constante en el fondo de la distribución del rendimiento estudiantil promedio. Por ejemplo:

- En Colombia, el 69% de los alumnos de cuarto grado y el 61% de los de octavo no habían alcanzado el nivel mínimo de dominio de las matemáticas fijado para el TIMSS del 2007, y casi la mitad de los estudiantes de 15 años de edad no alcanzaron el nivel mínimo de dominio de las matemáticas del PISA en 2006. (ICFES 2008).
- En Uruguay —país que participó en la primera evaluación extrarregional internacional a gran escala en el PISA 2003— los resultados también fueron decepcionantes. Mientras que los alumnos de 15 años en Uruguay aventajaban con mucho a los otros países de ALC que participaron en ese estudio —Chile, Argentina, México, Brasil y Perú— tanto en matemáticas como en ciencias, sus notas medias estaban 100 puntos por detrás de las del país promedio de OCDE en matemáticas y 60 puntos en ciencias (PISA 2003).
    - Las diferencias de género en el desempeño son considerables. Esto resultó evidente, por ejemplo, en El Salvador y Colombia, los dos países de la región que participaron en el TIMSS 2007. En matemáticas, los varones de octavo grado en ambos países rindieron significativamente mejor que las mujeres. En cuarto grado esta diferencia solo fue significativa en el caso de Colombia. En ambos países, los varones tuvieron un rendimiento más alto que las muchachas en ciencias naturales, tanto en cuarto como en octavo grado (IEA 2007).
    - Un repaso del PISA 2006 pone de manifiesto diferencias de género grandes y estadísticamente significativas en matemáticas en todos los países participantes de ALC (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Uruguay). Las diferencias de género fueron un poco menos pronunciadas en el área de las ciencias. En promedio, los varones se desempeñaron significativamente mejor en cuatro de los seis países participantes de la región (in Argentina las mujeres se desempeñaron significativamente mejor que los varones, y en Uruguay no hubo diferencia significativa). (OCDE 2006).

Como lo ha mostrado la evidencia en esta sección, los países de ALC afrontan retos importantes en la educación en matemáticas y ciencias naturales. Frecuentemente los estudiantes no cumplen las expectativas para la educación en matemáticas y ciencias naturales que sus propios sistemas educativos han fijado, y de forma constante se desempeñan a un nivel más bajo que sus pares internacionales en exámenes globales.

V. Nuevos rumbos

Si bien los problemas de ALC en la educación en matemáticas y ciencias naturales son considerables, los sistemas educativos de la región tienen también otras dificultades, entre ellas la evidencia de bajos niveles de desempeño en las destrezas básicas de lectura y escritura y otras áreas de los currículos nacionales, bajos niveles de financiación para la educación pública, y agendas incoherentes para el desarrollo del sector (Carlson 2000; Junta Asesora de PREAL 2006). Tal vez por eso no sea de extrañar, entonces, que nuestros esfuerzos por ubicar y revisar nuevas iniciativas de políticas o programas en la educación en matemáticas y ciencias naturales no hayan tenido mucho éxito. Quizás el hallazgo más importante de este repaso sea el descubrimiento de la escasez de esfuerzos en esta área clave de la educación. A nivel regional, la importancia de la educación en matemáticas y ciencias naturales se reconoce ampliamente de palabra, pero esas palabras rara vez han conducido a metas que se pongan en acción. Los MDE a veces emprenden esfuerzos por reformar los currículos o refinar los instrumentos de política, pero, como se mencionó en la sección anterior, esos esfuerzos se justifican casi exclusivamente sobre bases filosóficas o ideológicas, se realizan típicamente sin referencia alguna a hallazgos de investigaciones, y rara vez tienen éxito en sus intentos de hacer que las metas sean suficientemente operativas como para proveer orientación eficaz a docentes, estudiantes, autores de libros de texto, desarrolladores de exámenes y demás (Ferrer 2004, 2006a). Prácticamente no hay esfuerzos de reforma curricular en ALC que se empeñen en fundamentar decisiones educacionales con evidencias de investigaciones que muestren qué es lo que funciona en las aulas y qué no. Paradójicamente, esto sucede incluso en el gran número de países que tienen programas nacionales de evaluación del rendimiento, los cuales en algunos casos han estado en funcionamiento durante décadas.[12]

Asimismo, muy pocas de las intervenciones, medidas, programas o proyectos pilotos que actualmente están en marcha en la región —ya sea bajo los auspicios de los MDE, de organizaciones no gubernamentales (ONG) u otras entidades— se basan en investigaciones. Pudimos ubicar pocos proyectos que sigan un diseño puramente experimental (uno de los criterios en el alcance de trabajo para la presente reseña). Este resultado no es especialmente sorprendente: en la mayoría de los sistemas educativos, la asignación aleatoria de estudiantes y/o docentes a grupos experimentales y de control enfrenta dificultades prácticas y legales. Estas dificultades se complican por los dilemas éticos planteados por el negar servicios a los grupos vulnerables que muchos de los proyectos se proponen beneficiar, y también por la falta de políticas claras que involucren el consentimiento informado de los niños y sus familias para la participación en estudios investigativos.

Hay, sin embargo, unos cuantos proyectos que, aunque se quedan cortos en cuanto a la meta del diseño experimental, tenían otras características que servían para ilustrar formas notables en que los países de ALC están tratando de abordar los desafíos clave en la educación en matemáticas y ciencias naturales. En nuestro estudio completo, se reseñan se examinan una variedad de casos para entresacar lecciones que, en conjunción con nuestra evaluación de la condición de la educación en matemáticas y ciencias naturales en la sección anterior, pueden conducir a formular un marco para acciones futuras. Este marco será presentado en la sección final de esta reseña. En esta sección, enfocamos un solo caso del conjunto total examinado en el estudio completo: un caso en la Republica Dominicana

Una intervención en matemáticas en la República Dominicana, basada en evidencias y que recoge evidencias

En 2009, la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM), con apoyo de la Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional (USAID), inició una intervención en la enseñanza de las matemáticas (y de lectura y escritura) en la escuela primaria, en varios distritos escolares de la República Dominicana. El componente de

[12] Esta no es la práctica común fuera de ALC, donde en muchos países se da primacía a las metas basadas en evidencias en el campo de las matemáticas y ciencias naturales. Por ejemplo, en los Estados Unidos, extensas reseñas de investigaciones recientes constituyen la base de los influyentes estándares del Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas (NCTM) (NCTM 2000), y la importancia de la fundamentación empírica de cada uno de los estándares está cuidadosamente documentada y se publica por separado como apoyo esencial para esos estándares (Kilpatrick, Martin y Schifter, 2003).

matemáticas en este proyecto, llamado el Programa de Escuelas Eficaces, representó un alejamiento, en algunas áreas claves, de las prácticas comunes en gran parte de la región ALC.

Como con muchas otras intervenciones, el proyecto se centró en capacitar a los docentes en la enseñanza de las matemáticas, usando un modelo que incluía capacitación en las aulas, tutoría a los docentes en sus aulas, el uso de libros de texto recién diseñados, el ofrecer a los docentes libros y estrategias de planificación, el proveer sugerencias metodológicas, el modelar respuestas que proveen a los estudiantes una retroalimentación constructiva y precisa, y el desarrollo de comunidades para el aprendizaje de los docentes. Pero había dos rasgos que colocaban al proyecto por aparte de otras intervenciones. Primero, los libros de texto de los estudiantes y los materiales de capacitación de docentes se basaban en evidencias del rendimiento en las matemáticas y oportunidades de aprender, recogidas en un estudio longitudinal de cuatro años de la educación en matemáticas en una muestra nacional de escuelas primarias dominicanas. La investigación se usó como fundamento principal de todas las perspectivas pedagógicas y didácticas propuestas en el modelo para la capacitación y apoyo a los docentes, el diseño de libros de texto y los planes de evaluación y monitoreo.

Segundo, el monitoreo y evaluación del diseño tenía lugar desde antes de la implementación del proyecto, el cual podría entonces incorporar los resultados de esas evaluaciones: por ejemplo, en cada uno de los distritos en que se estaba efectuando el proyecto, las escuelas fueron asignadas aleatoriamente a los grupos de "intervención" y "control" – un modelo experimental -- para posibilitar evaluaciones más sólidas del impacto del programa. Además, se usó la evidencia empírica para determinar y monitorear los indicadores de calidad; para corregir, ampliar y refinar las acciones pedagógicas; y para juzgar rigurosamente las fortalezas y debilidades del programa. Era un modelo que se proponía superar las perspectivas educacionales basadas en ideologías, modas, eslóganes o folclor.

El componente de monitoreo y evaluación estaba integrado en todo el programa, proveyendo información y retroalimentación oportunas, válidas y confiables en cuanto a su impacto y ayudando en el refinamiento y ampliación de su capacitación, recursos educativos y otros componentes.

Durante recientes repasos de prioridades se ha echado mano de estos recursos de información para observar los impactos de estas iniciativas educacionales en la región (Navarro y otros 2000; Comité de Asistencia al Desarrollo 1999; Valverde 1997). Más aún, el desarrollo de estos tipos de indicadores es uno de los objetivos estratégicos de la oficina regional de USAID en ALC (USAID 2002).

El diseño de evaluación presentado aquí se basó sobre la experiencia del Consorcio para la Investigación sobre la Evaluación Educacional (EERC), que recibió apoyo previo de la USAID (Valverde y otros 2007) en forma de instrumentos de prueba, encuestas, muestreo y procedimientos de campo. En una reciente revisión de las políticas educativas en la República Dominicana, realizada por la OCDE, se citó el EERC como una fuente primaria de información de calidad sobre los resultados de la educación primaria en matemáticas y comprensión de lectura (OCDE 2008). El componente de evaluación en este programa comprende tres líneas primarias de trabajo: pruebas a los estudiantes, pruebas a los docentes, y encuestas a los administradores escolares.[13]

La evaluación del aprendizaje estudiantil en matemáticas usa pruebas calibradas y escaladas q para hacer su comparación con instrumentos de evaluación anteriores usados en tercero y cuarto grados, lo cual hace posible que el proyecto monitoree el crecimiento estudiantil desde primero hasta cuarto grado usando una escala vertical común. El uso de procedimientos modernos en la equiparación de pruebas, y el establecimiento de una escala vertical común para reportar el aprendizaje a través de un contínuum desde primero hasta cuarto grado, representan alejamientos de la práctica común en ALC en las pruebas, el monitoreo y la evaluación.

Lo que es incluso más notable trascendente, el proyecto evalúa anualmente a los docentes así como a los estudiantes. Se lleva un rastreo de los docentes a lo largo del tiempo, y la información sobre sus conocimientos y destrezas matemáticas se vinculan con otros datos, especialmente los resultados de los exámenes hechos a los alumnos de sus aulas (pero también observaciones de clase, notas de supervisores, etcétera). El componente de evaluación de los docentes en el plan de monitoreo y evaluación rastrea el impacto que tiene sobre los estudiantes el crecimiento de los docentes; provee información continua sobre las fortalezas y debilidades de los docentes, lo cual contribuye al refinamiento y ampliación del programa de capacitación docente; y ayuda a los supervisores a desarrollar estrategias individualizadas para ayudar a superar las debilidades de los docentes.

Los dos métodos arriba esbozados (evaluación de docentes y estudiantes) comparten varias características técnicas que no se observan con frecuencia en la educación en matemáticas y ciencias naturales en la región. Lo que quizás sea lo más importante es que su diseño longitudinal le posibilita al proyecto monitorear el crecimiento, el cambio y el aprendizaje a lo largo de los años. Todos los estudiantes, docentes y administradores escolares son rastreados, y además los estudiantes son vinculados con sus docentes y administradores escolares. El modelo permite una cohorte sintética anual de evaluaciones en la cual los resultados desde primero hasta cuarto grado son reportados en la misma escala.

Estos esfuerzos por usar la evidencia como punto de partido para el diseño, y por integrar esta recolección y análisis de evidencias para refinar todos los componentes del programa (por ejemplo los libros de texto, los módulos de capacitación docente, el desarrollo de materiales didácticos), están dando fruto. Las evaluaciones recientes (Luna, Valverde y Roncagliolo 2009) han demostrado el impacto positivo de este programa sobre el aprendizaje estudiantil de las matemáticas. Las inferencias referentes al impacto son sólidas, gracias a la asignación aleatoria de las escuelas a los grupos de tratamiento y comparación, y a las cualidades psicométricas superiores de estas pruebas.

[13] En aras de una plena transparencia, Gilbert Valverde, autor de la presente reseña, fue investigador principal y director del EERC. Pero es el líder del equipo externo de evaluación que está evaluando el impacto de este programa en la intervención de educación en matemáticas que aquí se describe. Esta sección es un resumen breve para cumplir con requisitos del formato oficial de la Memoria del congreso. En la presentación pública se compartirán datos y análisis recientes.

VI. Discusión y recomendaciones

Esta reseña y los demás estudios de caso no incluidos en esta presentación, indica que la calidad de la educación en matemáticas y ciencias naturales en la región de ALC merece seria atención. Aunque las razones específicas de inquietud difieren de un país a otro, en muchos casos las evidencias disponibles indican que los niveles promedio de conocimiento y destreza en matemáticas y en las áreas clave de las ciencias naturales están por debajo de las aspiraciones de las políticas educativas locales, y sustancialmente por debajo de los niveles promedio obtenidos en los sistemas educacionales de socios económicos importantes fuera de la región.

Si bien existe la evidencia de la baja calidad de la educación en matemáticas y ciencias, en ALC se han realizado pocas evaluaciones rigurosas que sirvan de base para cómo se podría remediar este problema. Aprovechando algunos nuevos enfoques prometedores, así como evidencias de investigaciones de otras regiones, esta sección comenta las implicaciones de política de nuestros hallazgos y presenta un marco para la acción. El marco está organizado en torno a cuatro prioridades para futuros esfuerzos en la educación en matemáticas y ciencias naturales en ALC: (i) metas educativas y estándares de contenido; (ii) políticas curriculares y materiales; (iii) los docentes y las prácticas pedagógicas; e (iv) intervenciones basadas en evidencias. Estas prioridades tienen la intención de avanzar una conversación referente a futuros rumbos, estrategias y programas en matemáticas y ciencias naturales. Para estimular esta conversación, el marco de acción propone 14 principios para la acción.

Metas educativas y estándares de contenido

Las metas y estándares de contenido en matemáticas y ciencias naturales en ALC frecuentemente son discordantes con respecto a la creciente necesidad global de destrezas y conocimientos para el siglo veintiuno. Esto limita las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, y pone un techo innecesario a su posible logro. A medida que crece la exigencia de una sociedad con más conocimientos matemáticos, resulta crucial lo siguiente:

- *Abandonar el uso de las metas y estándares en la educación en matemáticas y ciencias que se limitan al desarrollo de la siguiente generación de matemáticos y científicos naturales*. La educación en matemáticas y ciencias naturales debería servir al doble objetivo de proveerles a todos los estudiantes una base en el conocimiento numérico científico, y al mismo tiempo suscitar interés por las carreras que involucran las matemáticas y las ciencias naturales.
- *Apoyar el rigor disciplinario en las metas de matemáticas y ciencias naturales en las intervenciones, demostrando la significación del contenido y las destrezas que se van a enseñar.* ¿Cuánta importancia tiene los conocimientos y destrezas en matemáticas y ciencias? ¿Cuál es la evidencia para esta calificación? Estas son preguntas clave a las cuales cualquier estrategia de matemáticas y ciencias debería proveer respuestas explícitas.
- *Juzgar las metas en la educación en ciencias naturales frente a un estándar de verificabilidad*. Los docentes, estudiantes, oficiales de programas y otros actores deberían entender claramente cómo confirmar (o no confirmar) que se ha alcanzado un objetivo en matemáticas y ciencias naturales. Además, unas metas claras y realizables deberían guiar

a los docentes, a los estudiantes, a los autores de libros de texto y de materiales didácticos, a los evaluadores y a otros actores y agencias claves. El uso de esas metas para alinear los esfuerzos puede fortalecer los vínculos entre la intención, la implementación y los resultados.

- *Promover a nivel internacional la fijación de referentes en cuanto a metas, estrategias y técnicas*. Los esfuerzos de ALC por superar las limitaciones de visiones estrictamente localistas de lo que es posible en la educación en matemáticas y ciencias naturales deberían ser apoyados y ampliados. Los proyectos que fijan referentes para sí mismos frente a estrategias, metas o datos de otros países van a fortalecer la educación en matemáticas y ciencias naturales en la región.

Política curricular y material

Los currículos y materiales en matemáticas y ciencias naturales frecuentemente no incluyen todo el contenido especificado en las metas y estándares nacionales de matemáticas y ciencias naturales. Después de examinar las metas y estándares, también es necesario revisar los currículos y materiales de matemáticas y ciencias naturales para asegurar que provean a los docentes un mapa de cómo traducir las metas y estándares en actividades concretas en el aula. Para alcanzar este fin, los que trazan las políticas deberían:

- *Propiciar una perspectiva de las matemáticas y ciencias naturales (numeracy perspective), favoreciendo intervenciones y políticas que exploten las complementariedades entre la educación en matemáticas y las ciencias*. Esas complementariedades, por otro lado, rara vez reciben atención en los currículos tradicionales de ALC, que tienden a apegarse a la historia de las distintas asignaturas o materias; se considera que las matemáticas, las ciencias naturales y otras asignaturas son en gran medida separadas y autocontenidas. Relacionada con eso, una falta de atención a varias áreas de las matemáticas —incluyendo la geometría, las mediciones y la representación y análisis de datos elementales— suele impedir la comprensión de las ciencias naturales a nivel de primaria. Si bien la lectura, la escritura y algunos elementos de matemáticas y ciencias han sido incluidos entre los contenidos y destrezas transversales (llamados frecuentemente "ejes transversales" en los currículos de ALC), hay una falta de propuestas operacionales sobre cómo trabajar con ellos. Las iniciativas que aborden este punto ayudarán a impulsar las nacientes tendencias en el currículo de matemáticas y ciencias naturales en la región.
- *Apoyar los programas que se centran en progresiones de aprendizaje o trayectorias en matemáticas y ciencias naturales*. Una perspectiva de progresión de aprendizaje, trayectoria o mapa de avance es extremadamente útil para los docentes, los estudiantes y otros actores claves en el sistema educativo. La mayoría de las metas programáticas existentes son estáticas y no hacen ningún intento por alentar la filosofía del crecimiento, que es el fundamento del concepto de aprendizaje. El encontrar los programas que incorporen esta perspectiva, y que tengan otras fortalezas técnicas, puede ayudar a impulsar una educación eficaz en matemáticas y ciencias naturales.
- *Complementar la actual confianza excesiva en los libros de texto* apoyando el uso incrementado de otros materiales curriculares cuidadosamente seleccionados, incluyendo guías para el docente, libros de recursos, libros de trabajo, videocintas y discos, software y kits de equipo. La indagación práctica se puede introducir en el aula de ciencias

naturales y matemáticas por medio de un amplio espectro de diferentes materiales curriculares. La técnica más prometedora parece ser estructurar el currículo en torno a módulos que se centren en diferentes áreas de la educación en matemáticas y ciencias naturales.

- *Promover políticas curriculares que procuren explícitamente atraer el interés de las mujeres y otros grupos tradicionalmente subrepresentados en la educación en matemáticas y ciencias naturales*. Hay que abordar de modo similar las oportunidades de aquellos estudiantes que no hablan los idiomas nacionales principales o que están fuera de las etnias nacionales más privilegiadas.
- *Proveerles a los docentes todos los suministros necesarios para implementar currículos de matemáticas y ciencias naturales*. Para asegurar que los currículos se implementen en su totalidad, los docentes no deben ser considerados responsables por recolectar y financiar los suministros. Los distritos escolares o las escuelas individuales deben asegurar la disponibilidad de todos los suministros y materiales impresos.

Los docentes y las prácticas pedagógicas

Incluso a nivel de secundaria, las clases de matemáticas y ciencias naturales en la región suelen ser impartidas por docentes que carecen de especialización en esas disciplinas. Los modelos pedagógicos generalmente se centran en la transmisión de contenidos y tienden a hacer caso omiso del desarrollo del razonamiento científico y matemático. Los gobiernos en toda la región necesitan reconocer que la enseñanza es importante, apoyando los esfuerzos por fortalecer en los docentes las destrezas y conocimientos para la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales. Los docentes han adquirido sus conocimientos de matemáticas y ciencias naturales en los mismísimos sistemas educativos que afrontan problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y ciencias naturales. Los déficits de aprendizaje resultantes no se superan eficazmente en la mayoría de los programas de capacitación docente. Se requieren inversiones de gran escala en la capacitación docente para asegurar que los docentes en toda la región sean capacitados apropiadamente. Las iniciativas para abordar las necesidades de aprendizaje de los docentes deberían:

- *Promover el pensamiento divergente en el aula.* La práctica de la memorización de fórmulas es una parte bien establecida de la enseñanza de matemáticas y ciencias naturales en la región. Si bien esa computación automática es necesaria para que los estudiantes se concentren en el razonamiento numérico y la solución de problemas complejos, los docentes también deben saber cómo ir más allá de los aspectos de mero procedimiento de las matemáticas y ciencias naturales para abordar conceptos más significativos. Los docentes necesitan aprender cómo animar a los estudiantes a buscar soluciones alternas para resolver el mismo problema y analizar la idoneidad de diferentes estrategias. Esto se puede hacer en los grados inferiores por medio del uso de imágenes, explicaciones y gestos.
- *Enfatizar la necesidad de integrar en el proceso de enseñanza la evaluación de los estudiantes*. Los docentes que continuamente evalúan a los estudiantes pueden aprender a ajustar su estilo de enseñanza para abordar las discrepancias entre los ciclos de enseñanza y aprendizaje. También puede ayudar a los estudiantes a usar las evaluaciones como una herramienta para entender sus estilos individuales de aprendizaje, sus fortalezas y lagunas de aprendizaje.

▪ *Proveer evidencias de que el modelo de capacitación docente es eficaz para involucrar a los adultos como aprendices activos*. Para que esto suceda es necesario superar la reticencia regional a llevar a cabo pruebas cognitivas de los docentes: Las pruebas escritas son tan importantes para los docentes como lo son para los estudiantes. De cara a la escasez de docentes con capacitación avanzada en matemáticas y ciencias naturales, a plazo inmediato los sistemas educativos necesitan hacer un mejor uso del conjunto limitado de los docentes especializados en matemáticas y ciencias naturales, usándolos como líderes y mentores para otros docentes.

Intervenciones basadas en evidencias

La falta de un enfoque basado en evidencias para el diseño educacional es una de las debilidades más profundas de la educación en matemáticas y ciencias naturales en ALC, y es una que requiere un esfuerzo concertado para ser superada. También hay razón para cuestionar las intervenciones o iniciativas que esquivan un enfoque basado en evidencias, porque su compromiso con el uso de evidencias en la evaluación y el monitoreo también tiene probabilidad de ser débil. Para asegurar que los programas, intervenciones y políticas de matemáticas y ciencias naturales estén bien fundamentados, es esencial lo siguiente:

▪ *Exigir que los instrumentos de política especifiquen cómo es que se va a recoger, analizar y usar la evidencia empírica para refinar y mejorar las intervenciones.* ¿Cómo es que el programa va a aprender de sus fortalezas y debilidades? Esto debe estar claramente estipulado en el diseño de cualquier intervención. Las iniciativas que claramente priorizan el aprender de las evidencias tienen también mucho mayor probabilidad de tener un fuerte compromiso con estándares rigurosos de evaluación y monitoreo.

▪ *Cerciorarse de que todas las intervenciones en matemáticas y ciencias naturales sean evaluadas con métodos rigurosos y de que la evaluación forme parte del diseño de intervención.* La evaluación no puede ser ni algo que se piensa a posteriori ni un ejercicio mecánico que se hace por cumplir, si se quiere que sea útil. Hay criterios pedagógicos y disciplinarios que rigen naturalmente las metas de contenido y destrezas en matemáticas y ciencias naturales que una iniciativa se propone buscar. Asimismo, hay estándares profesionales que deben regir las prácticas de evaluación y monitoreo; nada se puede aprender de una iniciativa que no es evaluada. Aunque el diseño experimental es el estándar idóneo, se podrían usar otros diseños rigurosos basados en evidencias, incluyendo por ejemplo los diseños cuasi-experimentales.

Bibliografía y referencias

Academia Mexicana de Ciencias. (2010). La ciencia en tu escuela: http://www.lacienciaentuescuela.amc.edu.mx/.

Achieve, Inc. (2010). Taking the Lead in Science Education: Forging Next-Generation Science Standards. International Benchmarking Report. Washington, DC: Achieve, Inc.

Aedo-Richmond, Ruth y Mark Richmond. (1996). “Recent Curriculum Change in Post- Pinochet Chile.” Compare: A Journal of Comparative Education 26 (2): 197–215.

Agudelo-Valderrama, Cecilia, Barbara Clarken y Alan J. Bishop. (2007). "Explanations of Attitutdes to Change: Colombian Mathematics Teachers' Conceptions of the Crucial Determinants to their

Teaching Practices of Beginning Algebra." Journal of Mathematics Teacher Education 10: 69–93.

Aguilar, R., Á. Miguel y Diana Flores Vázquez, eds. (2009). El aprendizaje en tercero de secundaria en México: Informe sobre los resultados del Excale 09, aplicación 2008 Español, áticas, Biología y Formación cívica y ética. México, DF: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.American Association for the Advancement of Science. 1993. Benchmarks for Science Literacy. New York: Oxford University Press.

Anderson, Norman D. (1993). "SCI-LINK: An Innovative Project Linking Research Scientists and Science Teachers." Journal of Science Teacher Education 4 (2): 44–50.

Arrellano Marín, José Pablo. (2000). Reforma Educacional: Prioridad que se consolida. Santiago de Chile: Editorial Los Andes.

Baker, Judy. (2002). Evaluating the Impact of Development Projects on Poverty: A Handbook for Practitioners. Washington, DC: Banco Mundial.

Benavot, Aaron. (1992). "Curricular Content, Educational Expansion and Economic Growth." Comparative Education Review 36 (2): 150–74.

———. (2010). Cross-National Commonalities and Differences in the Intended Curriculum in Primary School Reading and Mathematics: Informe encomendado por el Instituto de Estadística de la UNESCO de Montreal, Canadá. Albany, NY: Universidad de Albany, Instituto para Estudios Globales en Política Educativa, Departamento de Administración Educativa y Estudios Políticos.

Callingham, Rosemary, y Jane Watson. 2004. "A Developmental Scale of Mental Computation with Part-Whole Numbers." Mathematics Education Research Journal 16 (2): 69–86.

Carlson, Beverly A. (2000). "Achieving Educational Quality: What Schools Teach Us Learning from Chile's P900 Primary Schools." En Desarrollo Productivo. Santiago, Chile: División de Producción, Productividad y Manejo, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL).

CIEN y PREAL (Centro de Investigación Económica Nacional y el Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina). (2009). Educación: Un desafío de urgencia nacional. Guatemala: Informe de Progreso Educativo.

Cogan, Leland S., Hsingchi A. Wang y William H. Schmidt. (2001). "Culturally Specific Patterns in the Conceptualization of the School Science Curriculum: Insights from TIMSS." Studies in Science Education 36: 105–33.

Colburn, Alan. (2000). "An Inquiry Primer." Science Scope 23 (6): 42-44.

Conley, David T. (2003). Understanding University Success: A Report from Standards for Success. Eugene, OR: Center for Educational Policy Research.

Cox, Cristián. (1999). "La Reforma del Currículum." En La Reforma Educacional Chilena, ed. J.E. García-Huidobro. Madrid: Editorial Popular.

Cox, Cristián y María José Lemaitre. (1999). "Market and State Principles of Reform in Chilean Education: Policies and Results." En Chile: Recent Policy Lessons and Emerging Challenges, ed. G. E. Perry y D. M. Leipziger. Washington, DC: World Bank Institute.

Cueto, Santiago, Cecilia Ramírez y Juan León. 2006. "Opportunities to Learn and Achievement in Mathematics in a Sample of Sixth Grade Students in Lima, Perú." Educational Studies in Mathematics 62 (1): 25–55.

D'Ambrosio, Ubiratán. (1985). "Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of

Mathematics." For the Learning of Mathematics 4: 44–58.

———. (1999). "Literacy, Matheracy, and Technoracy: A Trivium for Today." Mathematical Thinking and Learning 1 (2): 131–51.

Delannoy, Françoise. (2000). Education Reforms in Chile, 1980–98: A Lesson in Pragmatism. Washington, DC: Banco Mundial.

Development Assistance Committee. (1999). Criteria for Donor Agencies' Self-Assessment in Capacity Development. Paris: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Duarte, Jesús, María Soledad Bos y Martín Moreno. (2009). "Inequidad en los Aprendizajes Escolares en América Latina."Nota Técnica del BID No. 4. Banco Interamericano de Desarrollo, Washington, DC.

EFA (Education for All), Global Monitoring Report Team. (2008). Education for All by 2015. Will We Make It? EFA Global Monitoring Reports. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO).

Ertl, Hubert. (2006). "Educational Standards and the Changing Discourse on Education: The Reception and Consequences of the PISA Study in Germany." Oxford Review of Education 32 (5): 619–34.

Ferrer, Guillermo. (2004). Las Reformas Curriculares de Perú, Colombia, Chile y Argentina: ¿Quién Responde por los Resultados? Lima: Grupo de Análisis para el Desarrollo.

———. (2006ª). Estándares de currículo: algunas tendencias internacionales e implicancias para su implementación en América Latina. Lima: PREAL Grupo de Trabajo sobre Estándares y Evaluación (GTEE).

———. (2006b). Sistemas de Evaluación de los Aprendizajes en América Latina: Balance y Desafíos. Santiago, Chile: Grupo de Trabajo sobre Evaluación y Estándares, PREAL.

Ferrer, Guillermo y Patricia Arregui. (2003). International Comparative Achievement Tests: Their Impact on Educational Quality and Criteria to Guide Future Administrations. En PREAL Policy Series Document. Lima, Perú: PREAL.

Forster, Margaret, and Gilbert A. Valverde. (2003). La Experiencia Internacional en Sistemas de Medición: Estudio de Casos. Santiago de Chile: Comisión para el Desarrollo y Uso del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación.

GRADE (Development Analysis Group). (2006). La educación peruana sigue enfrentando desafíos: Informe de Progreso Educativo. Lima, Peru: PREAL.

Gravemeijer, Koeno P. E. (1994). Developing Realistic Mathematics Education. Utrecht: Freudenthal Institute.

Healy, Jane M. (1990). Endangered Minds: Why Our Children Don't Think and What We Can Do About It. New York: Simon & Schuster.

ICFES (Colombian Institute for Higher Education Promotion). (2008). Resultados de Colombia en TIMSS 2007: Resumen Ejecutivo. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional República de Colombia.

INNOVEC (Innovación en la Enseñanza de la Ciencia). 2010. SEVIC—Sistemas de enseñanza vivencial e inquisitiva de la ciencia. http://www.innovec.org.mx/sevic.htm.

Johnson, Eugene, Jon Cohen, Wen-Hung Chen, Tao Jiang y Yu Zhang. 2005. 2000 NAEP- 1999 TIMSS Linking Report. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Kamens, David H., John W. Meyer y Aaron Benavot. 1996. "Worldwide Patterns in Academic Secondary Education Curricula." Comparative Education Review 40 (2): 116–38.

Kilpatrick, Jeremy W., Gary Martin y Deborah Schifter, Eds. 2003. A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. Washington, DC: Conseco National de Docents de Matemáticas.

Lowery, Lawrence F. (1998). The Biological Basis of Thinking and Learning. Berkeley: Universidad de California.

USAID (United States Agency for International Development), Oficina Regional de ALC. (2002). LAC Regional Education and Training Improvement Program Data Sheet. Washington, DC: USAID.

Linn, Robert L. (2001). The Influence of External Evaluations on the National Assessment of Educational Progress. Center for the Study of Evaluation at the National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing Universidad de California, Los Angeles, CA.

LLECE (The Latin American Laboratory for Assessment of the Quality of Education). (2008). Student Achievement in Latin America and the Caribbean: Results of the Second Regional Comparative and Explanatory Study (SERCE). Santiago, Chile: UNESCO, Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (OREALC).

———. (2010). SERCE: Factores Asociados al Logro Cognitivo de los Estudiantes de América Latina y el Caribe. Santiago, Chile: UNESCO, OREALC.

Loucks-Horsley, Susan, Nancy Love, Katherine E. Stiles, Susan Mundry y Peter W. Hewson. (2003). Designing Professional Development for Teachers of Science and Mathematics. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Luna, Eduardo A., Gilbert A. Valverde y Renzo Roncagliolo Jones. (2009). Informe de evaluación externa. Reporte TEF-Matemática 2009. Santiago de los Caballeros. República Dominicana: Pontificia Universidad Madre y Maestra.

Masters, Geoff y Margaret Forster. (1996). Progress Maps. Assessment Resource Kit (ARK). Victoria, Australia: Australian Council for Education Research.

McKnight, Curtis C. y Gilbert A. Valverde. (1999). "Explaining TIMSS Mathematics Achievement: A Preliminary Survey." In International Comparisons in Mathematics Education, ed. G. Kaiser, E. Luna, and I. Huntley. London: Falmer Press.

McKnight, Curtis C., F. Joe Crosswhite, John A. Dossey, Edward Kifer, Jane O. Swafford, Kenneth J. Travers y Thomas Cooney.(1987). The Underachieving Curriculum: Assessing U.S. School Mathematics from an International Perspective. Champaign, IL: Stipes Publishing Company.

Näslund-Hadley, Emma, Marcelo Cabrol y Pablo Ibarraran. (2009). Beyond Chalk and Talk: Experimental Math and Science Education in Argentina. Washington, DC: BID.

Navarro, Juan Carlos, Catherine Taylor, Andrés Bernasconi y Lewis Tyler, eds. (2000). Perspectivas sobre la reforma educativa: América Central en el contexto de políticas de educación en las Américas. Washington, DC: USAID.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ed. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Washington, DC: NCTM.

OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). (2006). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006. Paris: OCDE, Centre for

Educational Research and Innovation.

———. (2008). Reviews of National Policies for Education: Dominican Republic. Paris: OCDE.

———. (2009). Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA. Paris: OCDE, Centre for Educational Research and Innovation.

———. (2009). OCDE Factbook. (2009): Economic, Environmental and Social Statistics. Paris: OCDE.

Pesek, Dolores y David Kirshner. (2000). "Interference of Instrumental Instruction in Subsequent Relational Learning." Journal for Research in Mathematics Education 31 (5): 524–40.PREAL Advisory Board. (2006). Quantity without Quality: A Report Card on Education in LatinAmerica. Washington, DC: PREAL.

PISA (Programa Internacional de Evaluación de Alumnos). (2004). Primer Informe Nacional PISA 2003 Uruguay. Montevideo: Administración Nacional de Educación Pública República Oriental del Uruguay.

Ramírez, María José. (2006). "Understanding the Low Mathematics Achievement of Chilean Students: A Cross-National Analysis Using TIMSS Data." International Journal of Educational Research and Evaluation 45: 102–16.

Ravela, Pedro. (2001). Cómo Presentan sus Resultados los Sistemas Nacionales de Evaluación Educativa en América Latina? PREAL. Santiago, Chile.

———. (2009). "Consignas, devoluciones y calificaciones: los problemas de la evaluación en las aulas de educación primaria en América Latina." Páginas de Educación 2: 49–89.

———. (2010). "Programa de Mejora de la Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática." Presentación de Powerpoint, Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación y la Universidad Católica de Uruguay. Documento sin publicar.

Ravela, Pedro, Richard Wolfe, Gilbert Valverde y Juan Manuel Esquivel. (2001). Los Próximos Pasos: ¿Hacia Dónde y Cómo Avanzar en la Evaluación de Aprendizajes en América Latina? Santiago, Chile: Grupo de Trabajo sobre Evaluación y Estándares, PREAL.

Resnick, Lauren B., and Katherine J. Nolan. (1995). "Where in the World are World-ClassStandards?" Educational Leadership (March): 6–10.

Rodrigues Mendes, Jackeline. (2001). "Ler, Escrever e Contar: Práticas de numeramento- letramento dos Kaiabi no contexto de formacão de professores índios do Parque Indígena do Xinguí." Department of Applied Linguistics, Unicamp, Campinas, Brasil.

———. (2005). "Numeracy and Literacy in a Bilingual Context: Indigenous Teachers Education in Brazil." Educational Studies in Mathematics 64: 217–30.

Schmidt, William H., Curtis C. McKnight, Gilbert A. Valverde, Richard T. Houang y David E. Wiley. (1997a). Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Vol. 1. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, William H., Senta A. Raizen, Edward D. Britton, Leonard J. Bianchi y Richard G. Wolfe. (1997b). Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Science. Vol. 2. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, William H., Curtis C. McKnight, Richard T. Houang, HsingChi Wang, David E. Wiley, Leland S. Cogan y Richard G. Wolfe. (2001). Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Schneider, B. L. (1985). "Further Evidence of Schools Effects." Journal of Educational Research 78: 357–63.

Schoenfeld, Alan H. (1994. "What Do We Know About Mathematics Curricula?" Journal of Mathematical Behavior 13: 55–80.

Skemp, Richard. (1987). The Psychology of Learning Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Slaving, Robert L. (1994). "Effective Classroom, Effective Schools: A Research Base for Reform in Latin American Education." In Education, Equity and Economic Competitiveness in the Americas, ed. J. M. Puryear y J. J. Brunner. Washington, DC: Organización de los Estados Americanos.

Sorto, M. Alejandra, Jeffrey H. Marshall, Thomas F. Luschei y Martin Carnoy. (2008). "Teacher Knowledge and Teaching in Panama and Costa Rica: A Comparative Study in Primary and Secondary Education." Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12 (2): 251–90.

Stevenson, David Lee y David P. Baker. (1991). "State Control of the Curriculum and Classroom Instruction." Sociology of Education 64 (1): 1–10.

Tuijnman, Albert C. y T. Neville Postlethwaite, eds. (1994). Monitoring the Standards of Education. London: Pergamon.

Unidad de Curriculum y Evaluación. (2004). Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS: Resultados de los estudiantes chilenos de 8o básico en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias 2003. Santiago, Chile.

———.(2010).Mapas de Progreso de Aprendizaje. http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-de-progreso/.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2010). Resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes 2009—ECE 2009: Segundo grado de Primaria. Ministerio de Educación. http://www2.minedu.gob.pe/umc/index2.php?v_codigo=234&v_plantilla=R.

Valverde, Gilbert A. (1997). "Evaluation and Curriculum Standards in an Era of Educational Reforms." In Evaluation and Education Reform: Policy Options, ed. B. Álvarez y M. Ruiz-Casares. Washington, DC: USAID.

———. (1998). Memoria de labores: Examen de propuesta curricular para la enseñanza media en la República de Chile. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

———. (2003). "La Política en Evaluación y Currículo Ante el Desafío de la Calidad." En La Experiencia Internacional en Sistemas De Medición: Estudio De Casos, ed. Comisión para el Desarrollo y Uso del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE). Santiago, Chile: SIMCE.

———. (2004). "Curriculum Convergence in Chile: The Global and the Local Contexts of Reforms in Curriculum Policy." Comparative Education Review 48 (2): 174–201.

———. (2005). "Curriculum Policy Seen through High-Stakes Examinations: Mathematics and Biology in a Selection of School-Leaving Examinations from the Middle East and North Africa." Peabody Journal of Education 80 (1): 29–55.

———. (2009). "Estándares y evaluación." En Políticas Educativas y Cohesión Social en América Latina, ed. S. Schwartzman and C. Cox. Santiago, Chile: Colección Cieplan.

Valverde, Gilbert A., and Curtis C. McKnight. (1997). "Importancia del Currículo y Algunos Temas

Comunes en la Reforma Educativa de la Educación Matemática y Científica a Nivel Internacional." Formas y Reformas de la Educación 3: 31–37.

Valverde, Gilbert A. y William H. Schmidt. (2000). "Greater Expectations: Learning from Other Nations in the Quest for World-Class Standards in US School Mathematics and Science." Journal of Curriculum Studies 32 (5): 651–87.

Valverde, Gilbert A., Eduardo Luna, Renzo Roncagliolo y Sarah González de Lora. 2009. Preliminary Analysis of Teacher Assessments in the Teacher Effectiveness Project: Santo Domingo and Santiago. Santiago de los Caballeros, República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

Valverde, Gilbert, Sarah González, J. Leonardo Valeirón, Luis Domínguez y Sandra González. (2007). How are Mathematics and Reading Comprehension Learned in the Primary Schools of the Dominican Republic? A Final Report of Highlights from the Educational Evaluation Research Consortium Study of Third through Seventh Grade. Albany, NY: Educational Evaluation Research Consortium and USAID.

Vidal, Rafael y María Antonieta Díaz. (2004). Resultados de las Pruebas PISA 2000 y 2003 en México: Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, Ciudad de México, Distrito Federal.

Wenglinsky, Harold. (2000). How Teaching Matters: Bringing the Classroom Back into Discussions of Teacher Quality. Princeton, NJ: Policy Information Center.

Westbury, Ian y Chao-Hseng Hsu. (1996). "Structures of Curriculum Governance and Classroom Practice in Mathematics." Educational Evaluation and Policy Analysis 18 (2): 123–40.

Xu, Yunmei. (2009). "Measuring Change in Jurisdiction Achievement over Time: Equating Issues in Current International Assessment Programs." Department of Human Development and Applied Psychology, Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto, Toronto.

Zacharos, Konstantinos. (2006). "Prevailing Educational Practices for Area Measurement and Students' Failure in Measuring Areas." Journal of Mathematical Behaviour 25: 224–39.

Fuentes estadísticas

CSEC (Certificado Caribeño de Educación Secundaria).Base de datos subregional 2009.

IEA (International Association for Evaluation of Educational Achievement). 2007. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS.) http://timss.bc.edu/TIMSS2007/idb_ug.html.

LLECE (Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación). 2008.

Segundo estudio regional comparativo sobre lenguaje, matemática y factores asociados para alumnos del tercer y cuarto grado de la educación básica (SERCE). Base de datos regional 2008.

OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). 2003. Programa Internacional de Evaluación de Alumnos (PISA). 2003. http://pisa2003.acer.edu.au/index.php.

———.(2006).Programa Internacional de Evaluación de Alumnos

(PISA). (2006). http://pisa2006.acer.edu.au/.

RICYT (Red de Indicadores de Ciencia y Tecnología). http://www.ricyt.edu.ar/.

Entrevistas (personal, teléfono y correo electrónico)

Luna, Eduardo; Universidad de Barry University, Miami, Estados Unidos

Benavot, Aaron; Universidad de Albany, State University of New York

Esquivel, Juan Manuel; Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana

Forster, Margaret; Australian Council for Educational Research

González, Sarah; Vice-Rectora de Investigación, Innovación y Relaciones Inter-institucionales; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM), República Dominicana.

Gvirtz, Silvina; Universidad de San Andrés, Argentina

Manzi, Jorge; Centro de Medición y Evaluación, Universidad Católica (MIDE-UC), Chile

Mariño, Julián; Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación

Ramírez, María José; Banco Mundial

Ravela, Pedro; Universidad Católica del Uruguay

Slattery, Jean; Achieve Inc, Washington, DC

Sorto, María Alejandra; Universidad del Estado de Texas, San Marcos

Talavera, Marisa; Directora de Innovación, Secretaría de las Ciencias, Tecnología e Innovación (SENACYT)

Wolfe, Richard; Universidad de Toronto, Canadá

Zorrilla, Margarita; Directora, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE),, México DF.

Minicursos

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Creando, dibujando….aprendiendo matemática a través del comic

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

El comic es un recurso visual para transmitir un mensaje de manera entretenida y agradable; por tanto, puede ser usado con fines educativos para alejar la matemática de su fama de aburrida y difícil. En este taller se discutirán las potencialidades del comic como recurso pedagógico para promover la creatividad, la lecto-escritura y la capacidad analítica de los estudiantes a la vez que aprenden o refuerzan conocimientos matemáticos. La metodología se centrará en: análisis de comics ya elaborados, presentación de sus elementos y proceso de construcción, y elaboración de una historieta sobre la resolución de un problema matemático.

Palabras clave: comics o historietas, matemática afectiva, creatividad, aprendizaje de la matemática, lecto-escritura.

Introducción

Mi interés por el uso del comic con fines didácticos en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática surgió durante la realización del CANP-2012, en agosto de 2012 en Costa Rica, cuando el Dr. Manuel de León en una de sus intervenciones se refirió al libro titulado *Logicomix. Una búsqueda épica de la verdad*, escrito por Apostolos Doxiadis y Christos Papadimetriou (2012), novela gráfica que relata fragmentos de la vida de Beltran Russell y su búsqueda de la verdad a través de la lógica y la filosofía.

Así motivada adquirí el libro y lo leí de un tirón, adentrándome con placer en ideas matemáticas, lógicas y filosóficas difíciles de digerir en un escrito normal, pero que en este caso, a través de la versatilidad de la imagen con algunas notas de humor, sin perder su rigurosidad, se hicieron de más fácil comprensión. Fernando Savater, en el prólogo de este libro, no pudo expresarlo en mejores términos: "pocas veces como aquí se ha dado una adecuación tan lograda entre el rigor del argumento y la alegría del dibujo. A muchos la expresión consagrada de 'instruir deleitando' nos produce un cierto sobresalto preventivo pero *logicomix* nos demuestra que, a veces, esa promesa sabe cumplirse de forma cabal"

Luego compartí esta interesante novela con algunos de mis colegas quienes al leerla sintieron emoción y motivación para profundizar en algunos de los temas allí abordados. Nos reunimos de manera informal y discutimos sobre las posibilidades de su utilización con fines didácticos en el estudio de la historia y los fundamentos de la Matemática. En efecto, uno de los colegas lo empleó en el curso Historia de la Matemática que se ofrece en la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la institución donde trabajamos: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL-IPM), en Venezuela. Como producción de este curso, los participantes elaboraron comics, por supuesto más cortos y elementales sobre temas o personajes históricos.

Otro colega facilitó un taller a estudiantes para profesores de Educación Integral, cuyo objetivo fue destacar el uso del comic para potenciar las habilidades de lecto-escritura conjuntamente con el estudio de temas de la matemática escolar. Así se fue generando una línea de investigación sobre esta temática y al momento se realizan dos trabajos de grado de maestría que tienen como propósito la recuperación del sentido humano, social y afectivo de la matemática a través del comic como herramienta de aprendizaje.

Como proyecto del curso Probabilidad y Estadística que me correspondió dirigir durante el recién concluido período escolar (1° semestre año 2013), se trabajó con la elaboración de comics referidos a temas de estas áreas incluidos en los programas de Educación Secundaria en Venezuela. La metodología y los alcances del proyecto se presentarán más adelante, luego de abordar algunas teorías que fundamentan el uso didáctico del comic y sus elementos y proceso de elaboración.

Propósitos del taller

Con el desarrollo de este taller se pretende:

- Reflexionar sobre la utilidad del comic como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática con énfasis en lo humano y lo afectivo.

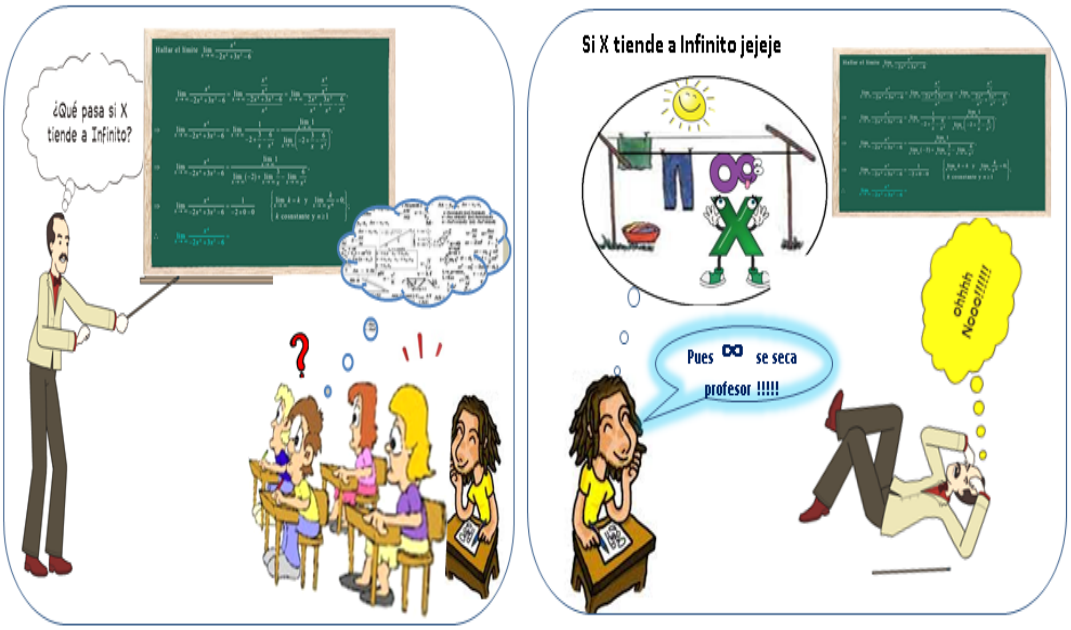
- Discutir acerca de la pertinencia de la utilización del comic en la formación didáctica del estudiante para profesor de Matemática.

- Involucrar a los participantes en la construcción de comics donde puedan evidenciar sus potencialidades para el desarrollo de habilidades de lecto-escritura y de la capacidad analítica de los estudiantes a la vez que aprenden contenidos matemáticos.

Metodología

El taller tendrá un carácter teórico práctico y se desarrollará siguiendo una metodología centrada en el participante a partir de las siguientes estrategias:

- Presentación de un chiste matemático en forma de historieta para motivar la discusión sobre su utilidad tanto en la formación del futuro docente de Matemática como en el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas matemáticos.(Elaborado por la Br. Ines Velásquez)



- Descripción de los elementos del comic a través de una presentación en Power Point elaborada a partir del libro: *"Dados y datos: cómic hacia la estadística con probabilidad 0,95 de serlo"*(Cuvero, 2000)

- Exposición del proyecto "Un comic para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística", con la intención de mostrar las etapas de la construcción de comics como actividad de aprendizaje de la Matemática.

- Elaboración grupal y exposición de comics sobre problemas matemáticos y su solución.

El comic y sus elementos constitutivos

El comic es una manera visual y entretenida de comunicar un mensaje. Es una expresión figurativa, una narración en imágenes que, a través de una relación estrecha entre el dibujo y el texto va hilvanando las ideas que completan una historia, distinguiendo su ordenación en tiempo y espacio (Arizmendi, 1975)

El comic data de 1985, cuando en las páginas dominicales del periódico estadounidense

World apareció Yellow Kid, de Richard Felton Outcault, un personaje de rasgos mongoloides que resaltaba circunstancias diarias en las cuales los lectores se veían reflejados (Arizmendi, 1975). A partir de allí comenzaron a aparecer otras tiras cómicas que de una manera entretenida, y algunas veces satíricas, abordan situaciones de las más diversas naturalezas, algunas de las cuales sólo pretenden entretener, mientras que otras son un reflejo de la sociedad y sus problemáticas.

El comic, como género literario, tiene como códigos: lo figurativo, lo lingüístico, lo cromático y lo cinésico y los elementos que lo caracterizan son:

- El cuadro o viñeta
- El dibujo
- El texto (Si lo hubiere)
- La página y su puesta

En el comic se cuenta una historia; ésta se divide en fragmentos visuales que pueden complementarse con apoyo del texto. Cada uno de ellos se enmarca en una viñeta y éstas se organizan en la página para darle secuencia a la narración.

La *viñeta* o *cuadro* es la unidad gráfica del comic, casi siempre de forma cuadrada o rectangular, engloba el mensaje icónico y el lingüístico que, a través de la imagen y el texto, respectivamente, hacen una distinción témporo-espacial que lleva al lector a la captación gradual del mensaje que se quiere transmitir. Dentro de la viñeta se encuentra el bocadillo o globo, la imagen y la didascalia.

El *bocadillo*, *globo* o *balloon* integra gráficamente el texto de los diálogos o el pensamiento de los personajes. Se vale del rabillo o delta para apuntar al personaje que habla o piensa. Colocado de arriba hacia abajo va señalando el orden de la lectura, marcando una distinción temporal. El trazado de la línea que delimita el globo indica las peculiaridades de la expresión hablada: si la línea está perfectamente definida indica que se habla en un tono normal, si su continuidad se espacia se quiere señalar que el personaje está hablando en voz baja y si se rompe bruscamente quiere subrayar que el personaje está gritando y esto usualmente va acompañado de textos en letras mayúsculas (Arizmendi, 1975).

La *didascalia* o *cartela* es una especie de bocadillo de forma rectangular, de color distinto al del globo, que se ubica en la parte superior de la viñeta y cuya función es servir de apoyo a la narración para, entre otras cosas, señalar cambio de espacio o de tiempo.

Otro recurso gráfico que se utiliza frecuentemente y de manera muy eficaz en el comic es la *onomatopeya*, que no es más que un "artificio de reproducción visual de elementos fónicos que han perdido su exacto significado integrándose en el código convencional del comic" (Arizmendi, 1975, p. 26), que contribuye a la sonorización de la historieta.

El último código a considerar en el comic es el cinésico. El autor dispone de una variedad de recursos de dibujo para imprimir movimiento a la imagen, mostrar desplazamientos, gestos, expresiones de frio o calor, miedo o terror.

En síntesis, el autor se vale de la viñeta, el globo, la didascalia, la onomatopeya, el gesto…para crear el comic que narra la historia, pero en definitiva los elementos que debe poner en juego en su elaboración son su imaginación, creatividad y originalidad para impactar y atraer al lector.

Uso didáctico del comic

El dibujo, apoyado en la palabra escrita, que da forma al comic es en una manera de visualizar el comportamiento del ser humano en una variedad de contextos (Rodriguez, 2013).

En el campo educativo se ha convertido en un recurso que, además de favorecer las habilidades de lecto-escritura, promueve la formación de valores y actitudes. El impacto de la imagen visual, por sí sola, transmite un mundo de sensaciones, sentimientos y emociones favorables para la motivación hacia el estudio en cada una de las áreas académicas, a la vez que se convierte en sí mismo en una fuente de aprendizaje (Baduet, 2001; Mejias, 2001).

El comic es una de las expresiones literarias de mayor aceptación por parte del estudiantado, por lo que puede ser usado desde edades tempranas para despertar en el niño el interés por la lectura y la escritura. No en vano grandes escritores como Gabriel García Márquez ubican sus motivaciones iniciales por la literatura en la lectura de las historietas que aparecían en los suplementos dominicales de muchos periódicos y en libros de tiras cómicas.

El comic es un medio para inducir al niño hacia la reflexión, el pensamiento crítico y divergente, la argumentación, el fijar posición, entre otros aspectos que van moldeando su personalidad. Por ejemplo, Mafalda, del humorista gráfico José Salvador Lavado, alias Quino, es una niña contestaria proveniente de la clase media argentina, que se preocupa por el mundo, por la paz y junto con sus amigos se rebela contra el legado de los mayores (El mundo de Mafalda,

s/f))

Al poseer un gran número de elementos diferentes como los bocadillos, figuras cinéticas, onomatopeyas, etc, el comic permite que el estudiante desarrolle procesos de pensamiento como la observación, comparación, clasificación, análisis y síntesis; además de incrementar su capacidad de visualización de una imagen determinada para discernir todos sus elementos y prestar cuidado al todo y a los detalles (Rodríguez Diéguez, 1991).

El comic relata una historia en un contexto témporo-espacial específico convirtiéndose en una excelente posibilidad para la comprensión de procesos evolutivos como la germinación de una planta; de carácter histórico como la gesta independentista de una nación, o la vida de un personaje relevante para nuestra civilización como Simón Bolívar o Albert Einsten.

La construcción de historietas por los estudiantes contribuye además a orientar el trabajo colaborativo, la discusión e intercambio de ideas, poniendo en juego su autonomía y destacando el papel del docente con facilitador de los aprendizajes.

En el caso específico de la Matemática, el uso del comic en su enseñanza permite revertir actitudes y creencias negativas en torno a la misma y su aprendizaje y a comprender su utilidad en situaciones reales del día a día.

El sólo hecho de contribuir a enriquecer la capacidad lectora ya le agrega puntos a favor de la comprensión de la Matemática, toda vez que uno de las cuestiones que más negativamente inciden en ella es, precisamente, el manejo inadecuado del lenguaje natural y el propio de la disciplina. Si un estudiante no comprende el enunciado de un problema, difícilmente podrá siquiera intentar resolverlo.

En Matemática, además de servir como fuente de motivación por su carácter lúdico y sus posibilidades para despertar el interés, la alegría y la sorpresa, las historietas pueden usarse para:

Representar problemas matemáticos y su resolución

Mostrar elementos de la historia de la Matemática y la vida y aportes de grandes matemáticos.

Presentar actividades lúdicas como juegos de ingenio y de lógica.

Mostrar lo importante que son las matemáticas para la vida cotidiana.

Destacar errores que comúnmente cometen los estudiantes.

Representar chistes matemáticos que pueden usarse como motivación o como punto de partida para la reflexión sobre temas específicos.

Construcción de comics en el aula

Para la construcción de comics en el aula se recomienda la distribución de los estudiantes en grupos pequeños. El trabajo inicia con la búsqueda de información que conduzca a la escogencia del tema a desarrollar y los aspectos relevantes del mismo que se van a plasmar en la historieta. Luego se procede a la elaboración del guion que incluye los personajes y sus características, el entorno y los diálogos. Cada uno de estos pasos debe ser monitoreados por el docente para ir haciendo las reorientaciones pertinentes (Miravalles, 1999)

Con esos elementos ya aclarados, se procede al diseño de las viñetas y su posicionamiento en la página para dar la secuencia correspondiente. Luego se realizan los dibujos y se rellenan los globos con los diálogos o expresiones correspondientes. Todo esto se puede hacer manualmente o con el uso de la computadora. Existen programas como el *Pintox* que facilitan la construcción del comic, pero si se busca desarrollar las habilidades para el dibujo y para la escritura manual, entonces no se recomienda su uso.

Finalmente, al estar concluidos los comics de los diversos grupos, se realiza una puesta en escena para su debida discusión en el grupo total.

Fundamentación pedagógica del uso didáctico del comic

Desde el punto de vista pedagógico el uso del comic se fundamenta en diversas teorías como el humanismo, el constructivismo y la enseñanza afectiva.

La educación humanista es aquella que centra el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante como ser humano en su totalidad con libertad para la toma consciente de decisiones, participando activamente en la construcción de su propia vida como ser social dentro de una comunidad a la que pertenece. (Santaló, 1977; citado por Rodriguez, 2013)

Para Campos (2001), el paradigma humanista se sustenta en una concepción del estudiante como ser humano integral, cuya visión de sí mismo y de la sociedad va a incidir en sus actitudes, creencias y comportamiento.

Una enseñanza bajo este paradigma invoca a fomentar el espíritu crítico y participativo del estudiante, a evitar posturas autoritarias, a interesarse por el aprendiz y mantener una mente abierta hacia métodos novedosos de enseñanza que despierten el interés por las tareas de aprendizaje.

Al utilizar el comic como medio educativo, se ubica al alumno en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, brindándole la posibilidad de expresar libremente sus ideas, desarrollar su creatividad, templar su personalidad a través de un trabajo plenamente satisfactorio.

Consecuentemente, el estudiante participa activamente en la construcción de su conocimiento. Con el comic, el acto pedagógico no se reduce a la explicación del profesor y al copiado y posterior reproducción por los alumnos. Por el contrario, participa en cada una de las fases de la elaboración del comic, investigando, reflexionando, discutiendo y asistiendo a una reconstrucción del conocimiento guiada por el docente.

El constructivismo, sustentado en las teorías de Piaget, Ausubel y Vigotsky, se fundamenta en el principio de flexibilidad y participación activa del estudiante, respetando su ritmo evolutivo (Piaget, 1973) e involucrando la relación entre el sistema sensorial del aprendiz y las redes que éste emplea para aprender del entorno social (Vigotsky, 1979), en procura de un aprendizaje significativo

Las teorías constructivistas reivindican el papel activo del estudiante en la construcción de su conocimiento, buscando que éste sea perdurable en el tiempo y que esté lleno de significado para él (Ausubel, 2002). Por estas intencionalidades, el comic se muestra como un recurso promisorio para un aprendizaje con sentido y no efímero.

El otro elemento teórico que avala el uso del comic es el de la afectividad. Como señala Goleman (1996) en toda persona, además de la mente que piensa hay otra que siente. El hombre es un ser emocional y las emociones condicionan su comprensión de las cosas y la reflexión sobre lo que acontece.

En el estudio de la Matemática, donde hasta hace poco se pensaba que sólo intervenía el factor racional de la mente, cada día cobra mayor certeza la importancia de la afectividad, llegando a tener tanta relevancia que se le considera como una clave para la descripción, el análisis la comprensión y la explicación de lo que ocurre en el aula de Matemática (Vicent, 2010; Martínez, 2005; Steen, 2004).

Para Gómez-Chacón (2000), los factores del dominio afectivo (actitudes, creencias, apreciaciones, gustos y preferencias, emociones, sentimientos y valores) condicionan el aprendizaje de la Matemática y por lo tanto el docente debe siempre tenerlas presentes en su acción pedagógica cotidiana.

Con la enseñanza tradicional de la Matemática se despierta en el estudiantado más emociones negativas que positivas, generando en rechazo hacia la misma. Estas emociones negativas, como son: ira, tristeza, miedo, aversión, ansiedad, pesimismo, han de ser combatidas y en su lugar promover las positivas como: amor, alegría, sorpresa, felicidad, diversión, satisfacción, confianza.

Alsina (s/f) en su artículo “La Matemática hermosa se enseña con el corazón” sugiere diferentes alternativas para producir alegría, sorpresa y diversión en el estudiante a la vez que aprenden Matemática, entre ellas una dinámica de clase participativa, el carácter lúdico de los materiales y las presentaciones novedosas. Flores (s/f), por su parte, resalta la importancia del humor en la creación de un ambiente propicio para la enseñanza y el aprendizaje, que índice en lo cognitivo al liberar la mente del estrés que generalmente se asocia a la clase de matemática. Este autor afirma que si los niños adquieren vocabulario, gramática y ortografía mientras leen historietas también pueden aprender esta disciplina.

Más aun, involucrarse en la construcción de un comic llega a despertar en ellos esas emociones y sentimientos positivos a los que hace referencia Alsina. Qué alegría poder abstraerse de los tediosos para dedicarse a dibujar, a inventar diálogos, a contar algo interesante y divertido; Qué felicidad poder compartir con sus compañeros en un ambiente lúdico; qué satisfacción ver como progresa la elaboración del comic; qué confianza al presentarlo y observar los gestos de aprobación de compañeros y maestros; todo esto a la vez que va internalizando conceptos o reforzando aprendizajes previos.

Proyecto "Un comic para enseñar y aprender Estadística"

Este proyecto se inspira en una concepción de la formación del estudiante para profesor en la cual el docente, además de saber Matemática, debe poseer un conocimiento didáctico del mismo (Shulman, 1987). Blanco Nieto y Contreras (2012) se refieren a éste como el conocimiento de la disciplina para la enseñanza, y señalan que lo que el profesor debe conocer "va más allá de la propia Matemática, es de diferente naturaleza del conocimiento matemático que utilizan otros profesionales" (p. 102).

El propósito del proyecto fue brindar a los futuros profesores experiencias de formación pedagógica a través del uso del comic con fines didácticos. Se desarrolló en el marco del curso de Probabilidad y Estadística en el programa de formación de profesores de Matemática en la UPEL-IPM, durante el semestre Abril-Julio 2013.

Entre los objetivos específicos están: a) Fomentar el trabajo cooperativo; b) Discutir las posibilidades y alcances del comic en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en Educación Secundaria y c) Entrenarse en la construcción de comics.

La metodología seguida consistió en:

-Presentación de los libros de comics: *Dados y datos. Un comic hacia la Estadística con probabilidad 0,5 de serlo* (Cuvero, 2000) y *Dados y Datos II. Comic discreto de Estadística para un aprendizaje continuo* (Cuvero, 2005), como base para la discusión sobre su uso pedagógico.

-Organización de los estudiantes en grupos de máximo tres personas.

-Análisis de los programas de Matemática de Educación Secundaria y selección del tema a desarrollar

-Exposición sobre los elementos del comic a través de una presentación elaborada a partir de las imágenes del libro *Logicomix*. (Vicent, 2013)

-Elaboración de la primera versión del guion. Revisión y retroalimentación del docente.

-Presentación sobre el software Pintox, por la profesora Eliseth Rodríguez y la Br. Eucaris Quiñones, ambas de la especialidad de Informática.

-Monitoreo constante del proceso de construcción del comic por la docente.

-Entrega de la versión definitiva y presentación pública de los comics.

Ejecución del proyecto

El primer día de clases del semestre se trabajó con los libros de comics "*Dados y Datos. Un comic hacia la Estadística con probabilidad 095 de serlo"* y "*Dados y Datos II. Comic discreto de Estadística para un aprendizaje continuo"* con la finalidad de familiarizar al grupo con este recurso y generar una discusión sobre su uso como un recurso en el estudio del área en cuestión.

Luego se les asignó la revisión de los programas de Matemática para la selección del tema del comic a desarrollar. Entre los temas escogidos están:

- Experimentos aleatorios,

- Diagrama de árbol,

- Probabilidad de un evento y

- Probabilidad condicional.

Estos debían orientarse en torno a tres organizadores temáticos:

- Historia de las ideas en Estadística y Probabilidad

- Aplicabilidad a la cotidianidad y las diversas disciplinas científicas

- Uso de la tecnología en el manejo de los procesos estadísticos y probabilísticos.

Es decir, cada comic debía mencionar la historia, bien a través de personajes que hayan contribuido al desarrollo de la Probabilidad y la Estadística en general o del mismo tema en particular; presentar situaciones cotidianas donde los conceptos tengan aplicabilidad; y mostrar el eso de elementos de la tecnología de la información y la comunicación como Internet, software, blogs, por parte de los personajes durante el desarrollo de la trama.

En la versión preliminar del guion se observó una tendencia a tratar de reproducir mediante caricaturas lo que sería una clase tradicional, por ejemplo, un grupo de estudiantes que se reúne para hacer la tarea de Estadística y al no comprender lo que tenían que hacer acuden a la mamá de uno de ellos que por casualidad es profesora y ésta les explica siguiendo los patrones de un texto clásico.

Se aconsejó entonces a los estudiantes:

-Colocar títulos atractivos al cómic pero haciendo alusión al tema tratado.

-Evitar reproducir escenas de clase poniendo en juego la creatividad para recrear situaciones divertidas y llamativas que capturen la atención del lector y promuevan el aprendizaje.

- Evitar extender los diálogos superfluos, eliminar los no necesarios. Darle mayor peso a la imagen.

- Involucrar a personajes históricos como Fermat o Pascal entre los personajes del comic.

- Utilizar situaciones de interés para los estudiantes de bachillerato.

Siguiendo estas recomendaciones, los grupos redimensionaron sus proyectos particulares y procedieron a la estructuración del comic. Algunos decidieron hacerlo digitalmente con el programa Pintox y en esto tuvieron asesoría permanente de las especialistas, mientras que otros prefirieron el trabajo manual recurriendo a sus habilidades como dibujantes o buscando ayuda para lograr imágenes atractivas.

Al final del curso se realizó una exposición pública de los comics elaborados, señalando la motivación en la escogencia del tema, la historia que cuenta el comic, los personajes y sus características, el tema de probabilidad o de Estadística tratado y el uso pedagógico que harían en el futuro de ese recurso construido por ellos mismos. A la exposición fue invitado un grupo de profesores de la especialidad de Matemática en la UPEL-IPM quienes hicieron una valoración de cada uno de los comics e hicieron observaciones para mejorarlos en cuanto a forma y contenido.

Conclusiones

El comic, bien empleado, es indiscutiblemente un recurso efectivo para el aprendizaje del estudiante y para la innovación en el aula por parte del profesor. Para su uso pedagógico se recomienda ofrecer con frecuencia comics cortos durante la fase de inicio de la clase de Matemática con el fin de crear un ambiente de distensión que permita superar estados de ánimo negativos, romper el hielo y llevar a los estudiantes a interesarse por el tema a estudiar y a participar activamente en su aprendizaje. Además, si esta actividad se desarrolla cotidianamente se va propiciando una mejora de la capacidad de análisis y de comprensión lectora.

Luego se podría asignar la elaboración de comics más completos por lapso académico (En Venezuela se dan tres lapsos, cada uno con un corte de evaluación). Uno de ellos puede referirse a un personaje de la historia de la Matemática, otro a una persona que cuente como las matemáticas están presentes en la vida cotidiana y otro sobre un contenido específico.

La elaboración del comic debe abordarse desde una perspectiva interdisciplinar, involucrando a los cursos y los profesores de: Educación Artística, Dibujo Técnico, Castellano, Computación y otras áreas de aplicación de la Matemática.

Para finalizar, es importante destacar la formación de valores a través de la construcción de comics, como: cooperación, respeto, responsabilidad, compromiso, y la oportunidad de fomentarlos desde el contenido mismo de la historieta.

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (S/F). La matemática hermosa se enseña con el corazón. [Documento en línea] Disponible en: www.iberciencia oei.org/alsina1.php

Arizmendi, M. (1975). *El comic*. Editorial Planeta. Barcelona, España

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Ed. Paidós, Barcelona.

Baduet, J. (2001). La historia como medio para la enseñanza. [Documento en línea] Disponible: http://biblioteca2.ucab.edu.ve/anexos/biblioteca/marc/texto/AAP4190.pdf

Campos,Y. (2001).Enfoque humanista de la Educación Matemática y elementos efectivos de su enseñanza. [Documento en línea]. Disponible: http://exa.unne.edu.ar/matematica/metodos/8-sitios-material-interes/Chevallard-cultua_matematica.pdf.

Cuvero, J. (2000). *Dados y datos. Comic hacia la Estadística con probabilidad 0,95 de serlo*. Direcció General d'Economia. Consellería d'Economia i innovació del Bover De les Illes Balears.

Cuvero, J. (2005). *Dados y datos II. Comic discreto de estadística para un aprendizaje continuo*. Direcció General d'Economia. Consellería d'Economia i innovació del Bover De les Illes Balears.

Doxiadis, A. y Papadimitriou, Ch. (2012). *Logicomix Una búsqueda épica de la verdad*. Ediciones Sinsentido, Madrid.

El mundo de Mafalda. Disponible: www.todohistorias.com.ar/mafalda.htm

Flores, P. (s/f). ¿Chistes para *contar*?. Utilización del humor en el aula de matemáticas. [Documento en línea]. Disponible: www.urg.es/~flores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Conteo.pdg.

Goleman, D. (1996. *La inteligencia emocional*. Editorial Kairós. Barcelona, España.

Gómez-Chacón, I. (2000).*Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje de la Matemática.*Ediciones Narcea, S.A., España.

Martínez, O. (2005). Dominio Afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*. 26(2). Disponible: http://scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttex=S1011-11512005000020000002&Ing=es&nrm=iso.

Mejias, P. (2001). *Semiótica del comic*. Ediciones Bellas Artes. Santiago de Cali, Colombia.

Miravalles, L.(1999). La utilización del comic en la enseñanza. *Revista Comunicar*, N° 13. http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=229987&orden=76777)

Piaget, J. (1973). *Psicología y Epistemología.* Editorial Ariel. Barcelona, España.

Rodriguez, E. (2013). Aprender Matemática a través del comic: un accionar hacia el recuperar su sentido humano-social. Proyecto de Grado de Maestría no publicado. UPEL-IPM

Rodriguez Dieguez, J. (1991). *El comic y su utilización didáctica*. Colección Medios de comunicación en la enseñanza. Editorial Gustavo Gil, Barcelona.

Steen, L. (2004). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* Limusa, México.

Vicent, R. (2010). Vinculación entre lo afectivo y lo cognitivo en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática. Trabajado de Grado no publicada para optar al título de Magister en Enseñanza de la

Matemática.UPEL-IPM.

Vicent, R. (2013). El comic: estructura didáctica en la enseñanza de la Matemática. Presentación en Power Point.

Vigotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Editorial Crítica. Barcelona, España.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Los números están en todas partes

José Mª **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

Resumen

Los números usualmente se han trabajado, tanto en los cursos de Primaria como en Secundaria, como instrumentos para realizar actividades en el aula sin tener en cuenta, en muchos casos, que se encuentran en el entorno y se utilizan usualmente en la vida cotidiana. Por ello se presentarán actividades extraídas de situaciones reales en que los números estén en contextos cotidianos que potencien la discusión, la toma de decisiones y que establezcan un enlace entre los centros educativos y el entorno. De esa manera se pretende reflexionar sobre el concepto de número en la práctica educativa diaria con la esperanza de que se considere un instrumento que facilite a los estudiantes vivir en su propio entorno y les ayude a desarrollarse como ciudadanos.

Palabras clave: Educación Matemática, Primaria, Secundaria, números en el entorno, experimentación en las aulas, innovación.

Números en todas partes[1]

Esta semana José ha ido de compras. Necesitaba unas cuantas cosas y quería aprovechar la época en que los precios estaban rebajados. Entre otros artículos, había comprado una bufanda. Bill enseguida se dio cuenta de ello.

Bill: Bonita bufanda. Es nueva, ¿no?

José: Sí. La compré ayer. Necesitaba una y la he conseguido a muy buen precio.

Bill: Es muy bonita y parece que abriga. ¿Cuánto te ha costado, si no te importa decirlo?

José: 19,99 euros. ¿Qué te parece?

[1] Basado en el libro de Chamoso y Rawson (2003). *A vueltas con los números.* Madrid: Nivola.

Bill: Me parece una buena compra y, además, por sólo 20 euros.

José: 19,99 exactamente. Sí, realmente 20. Es curioso que, especialmente en época de rebajas, los precios suelen ser 19,99, 29,99, 59,99. Quizás en algún caso 19,95 ó 29,95. ¿Por qué es así? ¿Por qué 19,99, y no 20, cuando el valor es prácticamente el mismo?

Bill: Tienes razón. También me he fijado en ello. Es por el efecto psicológico del primer dígito.

José: También lo creo así. Observemos, por ejemplo, 2999 y 3000, y comparemos sus cifras, unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas y unidades de millar con unidades de millar. Fíjate. Los tres nueves del 2999 superan en valor a los tres ceros del 3000. Únicamente el 3 del 3000 supera en valor al 2 del 2999. Es decir, dígito a dígito, 2999 supera a 3000 en 3 de los 4 dígitos y, únicamente en uno de ellos, es inferior. Sin embargo, se prefiere usar 2999 a 3000 para dar la impresión de que el precio es más bajo.

Bill: Normalmente decimos "la bufanda costaba diecinueve y pico". Con la primera cifra nos situamos en un valor aproximado para poder catalogar si nos podemos permitir su compra o si el precio nos parece justo y nos interesa. En cambio, si se dice que "la bufanda costaba 20 y pico", aunque sea 20 ó 20 y poco, parece un precio superior.

José: Ello me recuerda a un material que utilizábamos en clase para comprender el valor posicional de las cifras. Consistía en que dos personas, o dos grupos de personas, tiraban un dado de diez caras en cada una de las cuales estaban los números del 0 al 9 (aunque un dado de seis caras era suficiente para el objetivo que se perseguía). Cada uno de los jugadores lanzaba el dado en su turno y escribía los números que iban saliendo en su cuadro, de derecha a izquierda. Mira, así:

José cogió un palo y dibujó en el suelo lo siguiente:

U.M.	Cent.	Dec.	Unid.

U.M.	Cent.	Dec.	Unid.

José: Ganaba el jugador que obtenía el número más alto. Se observaban circunstancias llamativas como que un jugador conseguía superar a otro en tres de sus tiradas y no lo había hecho en la otra y, sin embargo, perdía la partida. Por ejemplo, con los números 3456 y 7132. O los mismos 2999 y 3000.

Bill: Parece un material interesante porque facilita que los jóvenes, en cuanto se den cuenta del objetivo, centren especialmente su atención en el último lanzamiento de los dados, es decir, en las cifras de las unidades de millar. Todo ello se debe al valor de las cifras dependiendo de la posición que ocupan.

José: Por tanto, se trata realmente de un hecho psicológico. Desde luego, es increíble las posibilidades del sistema posicional de las cifras. Desde mi punto de vista, ha sido uno de los grandes inventos de la humanidad, casi tan importante como el descubrimiento del fuego o la invención de la rueda.

Bill: Quizás no sea tan destacado como los que mencionas, pero fue un descubrimiento fundamental. Esto no es así con otros sistemas numéricos. Por ejemplo, el sistema de numeración romano está regido por el principio aditivo. Tiene símbolos independientes como 1 (I), 5 (V), 10 (X), 50 (L), 100 (C), 500 (D) y 1000 (M). Aunque también tiene convenios para que el sistema se pueda desarrollar, como que los símbolos se puedan repetir: 3 = III, 30 = XXX.

José: Sin embargo, ese valor repetitivo de las cifras es diferente al valor posicional del sistema actual: indica adición (6 = VI, 7 = VII) o sustracción (4 = IV). La posición señala su significado: en estos casos V es el valor importante al cual los demás se enlazan a su derecha o a su izquierda.

Bill: Imagina cómo se podría comprar en el supermercado si tuviésemos que utilizar el sistema de numeración que utilizaban los romanos:

Un paquete de arroz	II euros y XXXVIII céntimos de euro
Una barra de pan	LXXXV céntimos de euro
Naranjas	III euros y LIV céntimos de euro
Total	??????? euros

No se podría hacer como lo hacemos en la actualidad. Ponemos un número debajo de otro y no es posible operar. Sus cifras son independientes unas de otras.

José: Los romanos lo hacían con piedrecitas. Observa el ejemplo anterior: ponían un montón de piedrecitas cuya cantidad se correspondía con lo que valía el paquete de arroz, otro montón con el valor de una barra de pan y otro con el de las naranjas. Se juntaban todas las piedrecitas, se contaba cuantas había y ese valor se escribía debajo como resultado final. Terrible, ¿verdad? Ahora no podemos entenderlo con nuestros conocimientos actuales. Y eso, como tú dices, les llevaba mucho tiempo a los pocos que sabían hacerlo. Por eso los calculistas tenían a la puerta de su casa un montón enorme de piedrecitas para poder efectuar cálculos cuando alguien les encargaba uno.

Bill: Desde luego, ¡qué exagerado eres! En esa época ya sabes que se utilizaban los ábacos.

José: Es una broma, pero ¡tenía que ser así! Si no, ¿cómo podría ser? No había otro remedio. Se hiciese como se hiciese, ésa tenía que ser la filosofía. Si efectuamos la operación según el sistema de numeración decimal que utilizamos hoy, no tendríamos ninguna dificultad. El actual economiza símbolos porque todos los números se pueden representar utilizando únicamente los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Pero con números romanos es imposible.

Bill: Es curioso que ese pueblo, que alcanzó un nivel técnico tan elevado, conservara un sistema numérico tan complicado y poco operativo durante toda su existencia. Deja entrever un pensamiento primitivo. Eso hace suponer que, aunque el sistema posicional nos parezca algo natural y evidente, no es realmente así.

José: Hace sospechar que, desde que se empezaron a utilizar los números o se empezó a contar de alguna forma, hasta que se llegó a utilizar el sistema posicional tuvo que pasar mucho tiempo.

Bill: Nuestro sistema hindú-arábigo proviene de un antiguo sistema hindú que desarrollaron y adoptaron los mercaderes árabes, y que llegó a Europa en los siglos IX y X de nuestra era.

José: Pero con los dos procedimientos podemos representar el precio de la barra de pan que se compra en el supermercado de formas diferentes: 75 céntimos de euro (hindú-arábigo) o LXXV céntimos de euro (romano). Sin embargo, aunque se utilicen diferentes números, el valor sigue siendo el mismo.

Bill: Éste es uno de los problemas cuando aprendemos Matemáticas. Se pueden utilizar diferentes términos para tratar una misma cosa. Ahora, por ejemplo, nos hemos referido al símbolo que utilizamos para representar un número. Pero los números son conceptos abstractos. No se puede escribir el número 2.

José: Lo que se puede escribir es el símbolo hindú-arábigo del número 2, es decir, la representación del concepto abstracto de 2. No podemos tener en el bolsillo el número 2, aunque si podemos tener algo que valga 2.

Bill: Pero, aunque el concepto sea abstracto, su utilización se hace de forma natural ya que es necesario para cualquier cosa que se haga. Los números surgen en todas partes. Se dice que si dejamos a un ser humano en una isla desierta desde que nace, sin que haya tenido ningún contacto con números, es seguro que llegará a diseñar algún método para contar de una forma u otra. Por eso se llaman naturales, porque aparecen de forma natural sin necesidad de que los explique nadie.

José: Desde luego, los números están por todas partes. Hay una actividad que solemos hacer en clase respecto a ello. Leí una sugerencia similar de Claudi Alsina, ese matemático que te llama tanto la atención. Consideramos, al azar, una persona cualquiera, un ciudadano medio, e intentamos imaginar todas las veces en que tiene relación con números a lo largo de todo un día, desde que abre los ojos por la mañana.

Bill: ¿Desde que se levanta? Supongo que empieza cuando suena el despertador, que lo hace a una hora en la que figuran números. Cierra el libro que había quedado abierto por la página 134 mientras dormía. En ese momento encenderá la luz, con lo que empieza a funcionar el contador de electricidad por medio de números. Cogerá el paquete de café de 200 gramos y echará 2 cucharadas para preparar 1 taza de humeante café. La leche la calentará en el microondas durante 30 segundos. Le echará 2 terrones de azúcar. Para desayunar, también tomará 5 galletas de chocolate y 1 vaso de zumo de 3 naranjas. Según toma el café observa que tiene 5 llamadas en el contestador. Las escucha y decide contestar 2 de ellas. Para ello busca los números de teléfono correspondientes.

José: Mientras marca el número de la primera persona que había telefoneado observa su televisor de 25 pulgadas, donde las noticias recuerdan que ayer hubo 5 grados de mínima y que llovió 15 litros por metro cuadrado; que la subida del I.P.C. del mes pasado fue del 0,2 %, una décima más que el mismo mes del año anterior; que el paro descendió en 54.000 personas...

Bill: En ese momento contesta la persona al otro lado del teléfono, con la que queda a las 2:00 en la parada del autobús número 54. Vuelve a marcar otro número de teléfono, precisamente el de la sucursal 6 de su banco, donde le indican que tiene 1430 euros en números rojos, lo cual le va a costar un 30 % de interés. Aprovechan para decirle que su hipoteca va a subir 2 puntos el próximo mes y que tiene impagado un recibo de la luz por valor de 85 euros desde el día 25 del mes pasado.

José: Termina la conversación y, aunque la tercera llamada era del laboratorio en que se le recordaba que sus triglicéridos estaban a 400, decide colgar el teléfono. Mientras termina el desayuno y se prepara para la ducha organiza la ropa que se va a poner: Camisa de talla 43, zapatos del 44, gafas graduadas con 0,5 de miopía en cada ojo...

Bill: Mientras se viste observa su cama, de la que siempre se alegra que tenga un ancho de 150 centímetros. Retira sus 2 almohadas y abre el 4º cajón para...

José: Ya se va y baja los 14 escalones que tiene hasta el garaje. Arranca su coche de 1900 centímetros cúbicos y 90 caballos, y observa que todavía le queda ½ depósito de gasoil. Coloca su contador kilométrico a 0 y se pone en marcha hasta el siguiente semáforo. Tiene cuidado de que la aguja de su cuentakilómetros no supere la señal de 50 kilómetros por hora.

Bill: Y no digamos si consideramos la profesión de ese ciudadano, sea ésta la que sea.

José: En ese momento suelo preguntar a cada estudiante que hable de los números que aparecen en la vida de su padre, según la dedicación que tenga. ¡Imagínate!

Bill: Desde luego los números están en todas partes. A las personas les gustan las cifras.

José: Eso me recuerda a Saint-Exupéry. ¿Has leído *El principito*? Dice, en relación con las cifras, algo así: "Las personas mayores aman las cifras. Cuando les habláis de un nuevo amigo, no os interrogan jamás sobre lo esencial. Jamás os dicen: '¿Cuál es el timbre de su voz? ¿Cuáles son los juegos que prefiere? ¿Colecciona mariposas?'. En cambio, os preguntan: '¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos tiene? ¿Cuánto pesa? ¿Cuánto gana su padre?'. Sólo entonces creen conocerlo. Sí decís a las personas mayores: 'He visto una hermosa casa de ladrillos rojos con geranios en las ventanas y palomas en el techo...', no acertarán a imaginarse la casa. Es necesario decirles: 'He visto una casa de cien mil francos'. Entonces exclaman: '¡Qué hermosa es!'".

Bill: Es bonito. Pero, ¿lo sabes de memoria?

José: Lo leo a mis alumnos en clase todos los años. Me gusta mucho ese libro. Lo leí en francés en mi época juvenil y, actualmente, lo releo de vez en cuando. Ahora ya lo hago en español porque el francés lo tengo casi olvidado. Por cierto, el otro día estuve recordando unas palabras en ese idioma... Quizás me puedas ayudar. ¿Es cierto que en francés las palabras *trois* (tres), *très* (muy) y *trans* (más allá) tienen la misma raíz?

Bill: Creo que sí. En inglés ocurre algo similar. A las palabras *three* (tres), *throng* (multitud) y *through* (más allá, a través de) les ocurre lo mismo. De hecho la palabra *thrice* tiene dos significados: tres veces y varios. ¿Por qué lo preguntas?

José: Todo esto que estamos hablando me ha recordado algo que me contaron en una ocasión. En la historia de la humanidad el número 3 siempre fue sinónimo de pluralidad, un límite de algo imposible de precisar. Prueba de ello son las reminiscencias que quedan en las distintas lenguas. Eso era porque se utilizaba uno, dos y muchos. No necesitaban más, usualmente, para la vida diaria.

Bill: Qué distinto de ahora, ¿verdad? Pero hay algo que me llama la atención. Es curioso cómo se asocian los números con las Matemáticas y no entiendo por qué es así. Las Matemáticas y los números son cosas absolutamente distintas. De hecho, cuando varios amigos van a cenar y reciben la nota para pagar la cuenta, enseguida se la entregan al matemático para que haga la división diciendo: "La división, para el matemático".

José: Estoy de acuerdo. ¡Como si lo que se aprendiese para ser matemático fuese hacer divisiones! Lo ejercitan durante su instrucción primaria, al igual que todos los ciudadanos. No recuerdo haber hecho operaciones de ese tipo en mis estudios de Matemáticas. Es como si, por ejemplo, tuviéramos que dejar una nota a alguien indicándole alguna noticia y decimos: "Escríbela tú, que eres de Lengua".

Bill: O si vamos en el coche y aparece un cartel kilométrico señalando la distancia que queda a la capital más próxima y decimos: "Mira los kilómetros que faltan, que eres de Geografía".

José: O si necesitamos dinero y le decimos a nuestro amigo, que es economista: "Acompáñame al banco, por favor, que esta semana necesito más dinero y tengo que ir a sacarlo".

Bill: O si suena el teléfono y le decimos a nuestro compañero, que es de Telecomunicaciones. "¡Cógelo tú, por favor, que es lo tuyo!"

José y Bill se quedan unos momentos pensativos. José se queda mirando a Bill y le dice:

José: Una sugerencia Bill. Si los números y las Matemáticas no son la misma cosa, y creo que entiendo qué son los números, quizás deberíamos hablar un día en serio acerca de qué son las Matemáticas.

Bill: ¿No te parece que ya hemos hablado suficientes veces de ellas? Y te recuerdo que siempre lo hago en serio.

José: En serio o en broma, creo que nunca conseguiré saber que son.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Paseo por el universo de las irracionalidades aritméticas

Carlos **Sánchez** Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

En este brevísimo paseo por el universo de los números irracionales se pretende mostrar cómo un tema tan elemental como la aritmética presenta numerosas curiosidades que pueden ofrecerse de forma atractiva a estudiantes del nivel preuniversitario y de los primeros años de las universidades.

Nuestro objetivo no es profundizar en temas esotéricos, enrevesados; ni nos pondremos a "vagabundear" entre fórmulas y ecuaciones. No pretendemos mostrar cómo se hacen cuentas con los números, nos interesa más hacer cuentos sobre los números, sobre sus propiedades maravillosas y las desafiantes conjeturas aún sin solución. Pasearemos entre irracionalidades enteras, algebraicas y trascendentes; observaremos de cerca a los números metálicos y a sus vecinos los números plásticos. Siempre con la guía de la Historia de la Matemática. Nos gustaría que participaran reflexivamente y que con las ideas extraídas que consideren adecuadas después condimenten sus clases para que sus alumnos piensen y amen la matemática.

Palabras claves: Historia de los números irracionales, números metálicos y plásticos, números algebraicos y trascendentes.

Introducción

Los números enteros positivos aparecieron muy temprano por las necesidades naturales de contar y medir. Poco después, sobre todo por la repartición de tierras, herencias y mercancías, aparecieron las fracciones, cocientes entre enteros positivos no nulos, que los helenos llamaron "números racionales", con la convicción que eran los números suficientes para satisfacer todas las necesidades razonables y no solo contar o medir. Pasaron miles de años antes de que los seres humanos comprendieran que no todas las "*magnitudes razonables*" se podían medir de manera exacta con números racionales. Por supuesto que desde épocas remotas se sabía que algunas magnitudes geométricas asociadas a figuras simples como triángulos, rectángulos o círculos no se podían *medir fácilmente* a través de enteros y fracciones. Pero resolvían el problema práctico con una medida aproximada y se quedaban harto satisfechos. Es decir, que la consideración de números no racionales era innecesaria para las primeras civilizaciones que basaban la matemática en premisas empíricas, no especulativas. La necesidad de tomar en cuenta números que no son racionales, apareció junto con las civilizaciones cuya base económica les permitió el desarrollo de clases sociales con suficiente tiempo para especular sobre asuntos esotéricos como la existencia de números *no racionales,* mientras otras clases "inferiores" hacían el trabajo racionalmente necesario para vivir.

Pero, ¿en qué problemas matemáticos concretos aparecieron las irracionalidades aritméticas? ¿Existen varios grados de irracionalidad aritmética? y ¿Cuántos tipos de irracionalidades hay? ¿Son acaso mejores unos números irracionales que otros? ¿Cuáles son los números irracionales más famosos? ¿Son muchos los números irracionales comparados con los racionales? ¿Existen números con naturaleza enigmática, que no sabemos hoy si son o no son irracionales? Para intentar responder a esas preguntas y otros cuestionamientos naturales que puedan aparecer en el estudio de las irracionalidades, lo mejor, en nuestra opinión, es hacer un paseo en el tiempo, con la guía de la Historia de la Matemática.

Magnitudes inconmensurables y números inexpresables

No se sabe exactamente cuándo surgieron los números irracionales, pero su origen se achaca al supuesto descubrimiento de las magnitudes inconmensurables por los antiguos pitagóricos. Recordemos que ellos basaban su filosofía en la sentencia "*Todo es número*". Los pitagóricos estaban convencidos de que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual resumían con el planteamiento de que "*todos los segmentos son conmensurables*". Es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo éstas múltiplos de dicha unidad.

La idea es la siguiente: Supongamos que tenemos dos segmentos de longitudes diferentes A y B. Si consideramos que A es el número mayor, podemos sin dudas colocar al segundo segmento sobre el de longitud A una cantidad finita de veces sin que llegue a sobrepasarlo. En lenguaje matemático, lo que hemos hecho es multiplicar B por un entero n, de modo que $nB<A<(n+1)B$. Al hacerlo resta un segmento de longitud R_1 y se observa fácilmente que $R_1=A-nB$ es un número positivo menor que B o $R_1=0$. En éste último caso A es un múltiplo entero de B, por lo que la unidad de medida común es precisamente B. En el primer caso ($R_1=A-nB>0$) repetimos el procedimiento considerando ahora los segmentos $B>R_1$. Nuevamente queda un resto R_2, que, si es cero, nos indica que el resto anterior (R_1) constituye la unidad de medida común y si no es cero, nos obliga a repetir el procedimiento. Pero los restos que van quedando son todos positivos y cada vez menores. Es así que los pitagóricos suponían que en algún momento se debía llegar a un resto $R_n=0$, siendo así R_{n-1} la buscada unidad de medida común. Pero ¿qué nos garantiza que realmente lleguemos alguna vez a obtener cero? Por ejemplo pudiera ser que cada resto fuera la mitad del anterior y, en ese caso, nunca se obtendría el valor 0, de modo que ¿cuál es la unidad común?

Irónicamente, se supone que son los propios pitagóricos (y al parecer un tal Hipaso de Metaponte), que negando su propia filosofía, descubren los inconmensurables (entre 450 a.n.e. y 375 a.n.e.), y con ellos los números irracionales, que eran unos *números inexpresables* en el

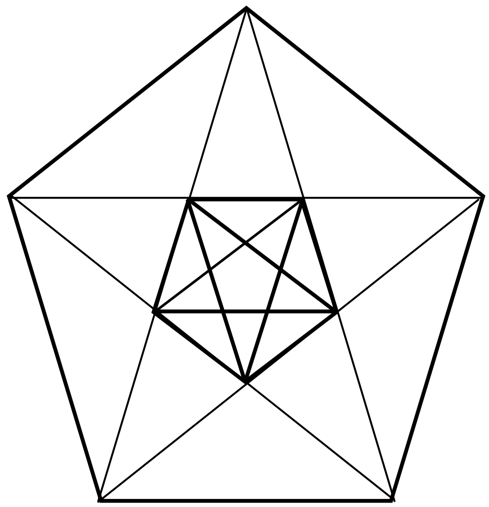


Figura 1. Pentagrama pitagórico

lenguaje de los números pitagóricos racionales. Cuenta la leyenda que Hipaso fue lanzado al mar por los disgustados pitagóricos, no sólo castigado por haber hecho público su descubrimiento, lo cual violaba las estrictas leyes de los pitagóricos, sino también por la forma en que lo descubrió a partir del pentagrama, que era uno de los símbolos sagrados de esa secta. (Fig.1).

En este caso la inconmensurabilidad está asociada al número inexpresable cuyo cuadrado es 5. Este número en notación actual es $\sqrt{5}$, no es representable como cociente de dos números enteros, aunque hoy usamos la aproximación racional que nos ofrece rápidamente cualquier calculadora electrónica en el sistema decimal hasta con 20 cifras exactas,

$$\sqrt{5} \approx 2,2360679774997896964\,1.$$

Es decir, podemos confiar en este valor decimal en todos los problemas que no precisen de un error menor de $\frac{1}{10^{20}}$, pero si queremos deducir resultados exactos que dependen de su valor irracional, entonces usamos el símbolo $\sqrt{5}$ y en los cálculos aritméticos lo consideramos como un número tal que al elevarlo al cuadrado obtenemos el valor entero 5.

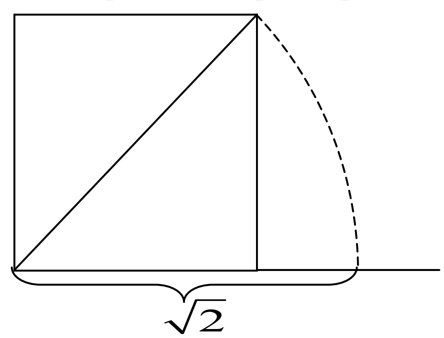


Figura 2. Diagonal inconmensurable

La mayoría de los textos actuales coloca como primer ejemplo de inconmensurabilidad la de la diagonal del cuadrado con relación a su lado. (Ver Fig 2) que posee la misma complejidad de la hallada por Hipaso en el pentagrama, pero es más fácil de argumentar con el uso de la propiedad pitagórica.

La historia que exponemos a continuación es la que induce la afirmación de que Pitágoras es el padre de la teoría de los irracionales. Recordemos que el teorema de Pitágoras plantea que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. Una de sus aplicaciones constituye una de las primeras demostraciones conocidas de la existencia de irracionalidades y que aparece en el libro X de “Los Elementos” de Euclides. Dicha demostración –con un razonamiento por reducción al absurdo- se basa también en el hecho trivial de que el producto de un número par por cualquier número es también un número par.

Los tríos pitagóricos (ternas de números enteros positivos que constituyen las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, es decir, que cumplen la relación $a^2+b^2=c^2$) y los ya conocidos números figurados o poligonales parecen haber abierto el camino al descubrimiento de los números irracionales, al asociar los números y las figuras, a través de la acción de medir magnitudes geométricas. No fue hasta el siglo XIX que se comprendió cabalmente la diferencia esencial entre los números y las magnitudes, al aparecer teorías rigurosas de los números reales, unión de los números racionales e irracionales, teorías "puras" sin hacer mención a consideraciones geométricas ni físicas. Pero, repetimos, el uso de los irracionales se hizo necesario en la resolución de problemas vitales antes de definirlos con rigor y mucho antes de sumergirlos en cuerpos algebraicos, no geométricos.

Ya en la Matemática prehelénica, en Egipto y Babilonia surgen dos problemas cuya solución es reconocida hoy en día entre los números irracionales notables. Ellos son el problema de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, a partir del cual conocemos hoy a la constante "pi" π, y la referida relación pitagórica en los triángulos rectángulos con la que se introdujeron inconscientemente infinidad de irracionalidades cuadráticas como $\sqrt{2}$. De hecho los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas pueden considerarse pasos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla que se conserva en la Universidad de Yale aparece una buena aproximación en sistema sexagesimal (muy parecida al valor que hoy conocemos en sistema decimal):

$$\sqrt{2} \approx 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \text{ (=1,414213).}$$

Teodoro de Cirene (siglo V a.n.e.), uno de los maestros de Platón, es de los primeros en plantear una teoría de números irracionales que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular demostró que los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad. También fue el autor de la conocida espiral que representa longitudes irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, .., \sqrt{17}$ como hipotenusa de triángulos rectángulos de lados 1 y 1, 1 y $\sqrt{2}$; 1 y $\sqrt{4}=2$, y así hasta llegar a representar $\sqrt{17}$. (Fig. 3).

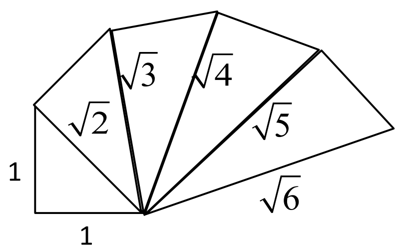


Figura. 3. Espiral de Teodoro

Ejercicio 1: ¿Por qué Teodoro no continuó con la representación geométrica de $\sqrt{18}, \sqrt{19}$, y otras raíces sucesivas?

El alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.n.e.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de uno de cuarto grado y no menos, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio de sexto grado como mínimo. De tal forma hoy se clasifican las irracionalidades algebraicas (porque están asociadas a un polinomio de grado mínimo). Así $\sqrt{17}$ es algebraico de grado 2, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es de grado 4 y $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ es una irracionalidad algebraica de sexto grado.

Ejercicio 2: Encuentre los polinomios mínimos referidos arriba y compruebe la certeza de las aseveraciones formuladas.

Eudoxo de Cnido (siglo IV a.n.e.) que aprendió tanto de las especulaciones platónicas en la escuela de Atenas, como de los cálculos aproximados de los astrónomos egipcios, introduce una teoría de la proporcionalidad y no tiene reparos para manipular los inconmensurables en su "*Método de exhausción*", que constituye una de las primeras teorías sobre cálculo de magnitudes geométricas por aproximación.

Todas estas ideas fueron recogidas por Euclides en sus Elementos. Por ejemplo, la teoría de Eudoxo aparece entre los Libros V y X. Por mucho tiempo el libro X fue considerado el más complicado de todos. Aún en el siglo XVI, el talentoso ingeniero flamenco Simón Stevin se refería a él como "La cruz de los matemáticos". Precisamente fue Stevin quién hizo popular el uso de la representación decimal para facilitar la manipulación en los cálculos de los números irracionales.

Curiosidad 1: **¿Quién fue el autor intelectual de la representación decimal?**

En Occidente se consideró por mucho tiempo que Simón Stevin era el creador del método de representación decimal de los números fraccionarios hasta que en 1948 se hicieron públicas las obras de Al Kashi, un famoso astrónomo musulmán, que trabajó en Samarcanda bajo la protección del gran kan turco mongol Ulug Beg, también aficionado a las matemáticas y la astronomía. Este asombroso musulmán escribió varios tratados sobre astronomía y otros muchos temas, pero su obra más impresionante es "*La llave de la Aritmética*" que completó en marzo de 1427. En el Libro IV "*Sobre las mediciones*", en su último capítulo "*Midiendo estructuras y edificaciones*" Al Kashi usa su talento aritmético para la optimización de los cálculos de salarios y materiales de construcción para un determinado proyecto arquitectónico y para estimar el precio de la edificación terminada. Son muchas las operaciones numéricas y el sistema sexagesimal que ha sido tan útil en los cálculos astronómicos no ayuda a simplificar el trabajo. Entonces Al Kashi decide introducir las *fracciones decimales* sobre todo para realizar aproximaciones más precisas de magnitudes geométricas como la superficie y el volumen de la cúpula de diferentes mausoleos y mezquitas musulmanas.

Debemos agregar que hoy es sabido que tampoco Al Kashi es el creador de las fracciones decimales, puesto que se han encontrado también en monografías de otros sabios islámicos como Al Uqlidisi (s. X) y Al Samawal (s. XII), pero ninguno como Al Kashi realizó aplicaciones tan valiosas y precisas.

Por supuesto que la obra de Simón Stevin fue definitiva para el establecimiento en Occidente de la representación decimal ya que durante mucho tiempo no se justipreció el magnífico legado de las culturas orientales en una época cuándo los occidentales no se preocuparon por ampliar el bagaje teórico del legado helénico. Y no fueron solo los musulmanes árabes los orientales interesados en las irracionalidades aritméticas.

Curiosidad 2. ¿Cómo sumar irracionalidades numéricas expresadas por radicales?

El célebre sabio indio Bashkará que vivió en el siglo XII planteó unas reglas perspicaces para operar con números irracionales. Por ejemplo, da dos formas de sumar irracionales que en nuestra notación actual serían equivalentes a:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad (\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8+2\sqrt{16}}=\sqrt{18})$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)^2}\text{, siendo } a<b\text{. } (\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{8}{2}}+1\right)^2}=\sqrt{18}).$$

Ejercicio 3: Comprueba que los dos algoritmos de Bashkará son equivalentes

Curiosidad 3: ¿Qué irracionalidades aritméticas son construibles geométricamente?

. Una forma de clasificar las irracionalidades es considerando las que son "construibles" y las que no lo son. Precisemos la idea. Fijado un segmento de longitud unidad, entendemos por construir una irracionalidad a usar sucesivamente la regla y el compás para llegar a un segmento inconmensurable con el segmento unidad original. No es difícil darse cuenta que con estas herramientas podemos construir segmentos de longitudes irracionales cuadráticas como $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$ o también $\sqrt{1+\sqrt{17}}$ y $\sqrt[8]{5}$. Un poco más difícil es comprobar que las de un orden diferente a $m = 2^{\mathrm{n}}$ no son construibles, por ejemplo, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[5]{3}$ no son construibles. Pero, aún más difícil resulta demostrar cuáles son las únicas irracionalidades construibles con regla y compás. Al parecer la primera "demostración" se debe al filósofo francés René Descartes a mediados del siglo XVII. No obstante no es hasta el siglo XIX que se logra encontrar una demostración aceptable por la comunidad matemática. Esta demostración se consiguió al traducir el problema al lenguaje del álgebra. El talentoso Karl Gauss (1777-1855) en sus *Disquisitiones Arithmeticae* ya señalaba que los problemas clásicos de construcción: duplicación de un cubo, trisección de un ángulo, cuadratura del círculo y construcción de polígonos regulares se podían plantear en lenguaje algebraico y de tal forma encontrar los criterios de construcción con las herramientas clásicas. Así encontró la famosa fórmula para determinar que un polígono regular podía ser construido con regla y compás. Según demostró Gauss, si N es el número de lados de un polígono cualquiera regular, entonces dicho polígono puede ser construido con regla y compás solamente en el caso en que sea $N=2^k p_1 p_2 \ldots p_m$, siendo $p_i = 2^{2^n}+1$ un número primo de Fermat para i=1,…,m y k, m enteros positivos. Los únicos primos de Fermat conocidos hasta ahora (agosto de 2013) son 3, 5, 17, 257 y 65537, no se ha podido encontrar otro. Por tanto, los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13 y 15 lados, no se pueden construir con regla y compás. Mientras, los de 4•257=1028 lados y 3•5•65537=983055 lados son construibles.

El joven Gauss escribió que su brillante idea de ligar el álgebra con la geometría para la resolución de este clásico problema apareció cuando tenía solo 19 años:

> "*Fue el día 29 de marzo de 1796, durante unas vacaciones en Braunschweig, y la casualidad no tuvo la menor participación en ello ya que fue fruto de esforzadas meditaciones; en la mañana del citado día, antes de levantarme de la cama, tuve la suerte de ver con la mayor claridad toda esta serie de construcciones…*".

Aunque en el siglo XIX se hallaron procedimientos más simplificados, la tarea constructiva tal como la abordó el matemático alemán tiene un mérito enorme. Pero Gauss no dio una caracterización general de los números construibles. Fue el francés Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) quién primero, en 1837, precisó las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea construible. Particularmente probó que una condición necesaria para que un número sea construible es que el grado del polinomio minimal asociado al número sea una potencia de 2, es decir el orden del número irracional algebraico debe ser 2^{k}. Esta condición permite demostrar fácilmente que la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo no son realizables con el uso exclusive de regla y compás. Pero, atención, esta condición necesaria no es suficiente.

Ejercicio 4: Probar que el polinomio x^4+2x-2 es irreducible de grado 4 y sin embargo sus raíces no son construibles.

Es curioso subrayar que el conjunto K de los números construibles forma un cuerpo, es decir, la suma y el producto son operaciones internas, con elementos neutros y opuestos cada una. Además K contiene al cuerpo de los números racionales y a la vez es un subcuerpo propio del cuerpo de los números algebraicos. Este cuerpo numérico posee muchas propiedades interesantes, por ejemplo, K es cerrado bajo la extracción de raíces cuadradas y para la conjugación compleja.

La clasificación entre irracionalidades algebraicas y trascendentes

Las investigaciones sobre números construibles aumentaron el interés por el estudio de los números irracionales algebraicos, es decir, aquellos irracionales que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros. Por otra parte, también agudizaron la búsqueda de una demostración de que el número irracional π, asociado a la construcción de un cuadrado de área igual al área de un círculo de radio unidad, no es algebraico, es decir, no es raíz de *ningún polinomio* con coeficientes enteros. A tales números se les llama *números trascendentes* y π aunque fue de los primeros en aparecer por las necesidades prácticas en la antigüedad prehelénica, no fue hasta finales del siglo XIX que se consiguió demostrar su trascendencia. En general, encontrar números irracionales no algebraicos es sumamente difícil, se debe probar la *no existencia* de polinomios que se anulen en ese número.

Es interesante comprobar con el uso de la representación decimal que entre dos racionales hay siempre un irracional y también que entre dos irracionales encontramos un racional. Este resultado se traduce diciendo que los números racionales son densos en el conjunto de los números irracionales. No es intuitivo imaginar que existen muchos más números irracionales que racionales, sobre todo porque ambos conjuntos son evidentemente infinitos. Menos intuitivo es que los números irracionales algebraicos son muchísimo menos que los irracionales trascendentes, porque los algebraicos son tantos como polinomios existen y son contados con los dedos de la mano los trascendentes conocidos en la enseñanza básica. Por supuesto, los grandes matemáticos intuían que deberían existir muchas irracionalidades no algebraicas. Por ejemplo, Leibniz suponía correctamente que la mayoría de los valores de las funciones trigonométricas eran irracionalidades no algebraicas. Euler extendió la sospecha a los valores de otras funciones elementales como la exponencial y la función logaritmo. Pero aún a principios del siglo XIX no existían demostraciones claras y rigurosas de la existencia de irracionalidades no algebraicas.

Se considera que el geómetra francés Joseph Liouville en 1844 dio el primer criterio útil para determinar si un irracional es algebraico o no y con el uso de la representación en serie probó la existencia de infinidad de números no algebraicos. Por ejemplo, Liouville probó que es un irracional no algebraico el número:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0{,}110010000000000000000010000\ \ldots$$

donde los unos aparecen en los lugares 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, …, es decir, en las cifras decimales de orden $n!$, símbolo que significa el producto de todos los naturales hasta el propio n y es llamado *factorial de n*: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$

Entonces, a partir de cualquier número decimal infinito puede construirse un número de Liouville, por ejemplo, es trascendente el número 3.14(3 ceros)1(17 ceros)5(95 ceros)9(599 ceros)..., donde los dígitos son cero excepto en las posiciones n! y los dígitos no nulos siguen la formación de los dígitos en la representación decimal de π. Se puede probar que los números de Liouville forman un subconjunto denso del conjunto de todos los números reales y son tantos como sucesiones de dígitos no nulos existen. en otras palabras hay muchísimo números irracionales no algebraicos.

Aún cuando se hizo posible demostrar que existían infinitos números irracionales trascendentes, probar que un número irracional concreto no es algebraico es sumamente difícil. Por ejemplo, la trascendencia de números ubicuos como π y la llamada *constante de Neper e*, base de los logaritmos naturales, se mantuvo como conjetura hasta que a finales del siglo XIX dos matemáticos, uno francés- Hermite, en 1873- y otro alemán- Lindemann, en 1882- encontraron respectivamente las ansiadas demostraciones. Después de estas demostraciones no fue difícil probar que la constante de Neper e no era un número de Liouville, en cambio, hubo de esperarse hasta 1953 para que el alemán Kurt Mahler demostrara que π tampoco era un número de Liouville.

Curiosidad 4: ¿Existen más irracionales algebraicos que irracionales trascendentes?

El resultado de Liouville aunque útil en la aceptación de nuevos tipos de irracionalidades numéricas, no servía para comparar la magnitud de los conjuntos de números atendiendo a su naturaleza aritmética. La manera más rigurosa de comparar conjuntos numéricos infinitos la introdujo George Cantor (1845-1908) a finales del siglo XIX. La forma más natural de comparar conjuntos es contar sus elementos, la cuestión se complica cuando tenemos que comparar conjuntos infinitos. A Cantor se le ocurrió la genial idea de decir que dos conjuntos eran equipotentes (forma rigurosa de decir que tienen la misma cantidad infinita de elementos) si existía una correspondencia 1-1 entre los dos conjuntos. Los conjuntos equipotentes con el conjunto de los números naturales, los conjuntos *numerables*, determinan el primer número transfinito que denotó por la primera letra del alfabeto hebreo $\aleph_0$ (alef sub cero). Ahora había que clasificar los otros conjuntos numéricos. Asombrosamente, Cantor demostró, con mucha lógica, la fantástica propiedad de que entre $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{N}$ existe una correspondencia 1-1 y por tanto que el cardinal transfinito asociado a $\boldsymbol{Q}$ era también $\aleph_0$. Realmente existen muchas formas simples de enumerar a los racionales y una de las más conocidas se puede visualizar fácilmente con un diagrama:

1	2	3	4	…
0	−1	−2	−3	…
1/2	3/2	5/2	7/2	…
−1/2	−3/2	−5/2	−7/2	…
…	…	…	…	…

Los números positivos se colocan en las filas impares y los negativos en las pares, además el denominador determina cuál es la fila correspondiente. No es difícil convencerse de que en el diagrama están todos los infinitos números racionales. Entonces se ordena el conjunto de todos los números racionales diagonalmente, como lo muestran las flechas de la tabla, esto es

$$\boldsymbol{Q} = \left\{1, 2, 0, 3, -1, \frac{1}{2}, 4, -2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 5, -3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 6, ...\right\}$$

De este modo es evidente la correspondencia entre los números racionales y los naturales y hemos probado que ambos tienen la misma cantidad de elementos. Después de este sorprendente resultado muchos volvieron a pensar que todos los números transfinitos en fin de cuentas eran iguales y no valía la pena definirlos como entes aparte.

Pero en 1874 Cantor volvió a asombrar a la comunidad matemática probando que todo intervalo compacto $[a,b]$ por pequeña que fuera su longitud $b-a$, tenía un *tamaño* mayor que el *tamaño* de $\boldsymbol{N}$. La demostración sin embargo era algo sofisticada y no muchos se convencieron de la validez de este extraño resultado. Cantor que era muy altanero, se sintió ofendido por estos escépticos y buscó con denuedo una demostración simple y asequible que los subyugara totalmente. La encontró al fin 17 años después y se encuentra en los principales textos de Análisis o de Teoría de Conjuntos -también aparece en el penúltimo capítulo de Sánchez-Valdés (2010)-.

Ejercicio 5 Probar que todos los intervalos no triviales -que contienen al menos dos puntos- de la recta real, sean abiertos o cerrados, acotados o no acotados, son equipotentes, es decir determinan el mismo número transfinito diferente al número transfinito $\aleph_0$ y que es denotado por la letra $\mathfrak{c}$ inicial de continuum.

Como dijimos anteriormente en la época en que Cantor publicó sus razonamientos transfinitos, los números trascendentes eran sin dudas, muchísimo más raros que los algebraicos, pero la “fantasía” de Cantor no se contenía con tales argumentos y lanzó una exótica provocación contraria a la intuición de la mayoría:

La parte algebraica del continuo es tan pequeña como el conjunto de los números naturales, mientras que la parte trascendente es tan grande como todo el continuo. Concretamente, el número transfinito del conjunto de los números algebraicos es $\aleph_0$ y el del conjunto de los números trascendentes es $\mathfrak{c}$.

En una serie de cartas que intercambió Cantor entre 1873 y 1874 con el talentoso “arquitecto de los números” Richard Dedekind (1831-1916), estos dos matemáticos alemanes probaron que la mayoría de las irracionalidades trascienden las operaciones aritméticas, son *números trascendentes* (ver, p. e. Sánchez-González, 2013).

Primeramente Cantor probó que el conjunto de los números algebraicos era numerable y una propiedad auxiliar relativamente simple y muy útil:

La unión finita o numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.

Enseguida Cantor toma un intervalo cualquiera (a,b). Supone que el conjunto de los trascendentes contenidos en (a,b) sea numerable, como el subconjunto de los algebraicos es numerable, entonces su unión (a,b) sería también numerable, lo que es absurdo. Por tanto, en todo intervalo hay muchísimos más números trascendentes que números algebraicos, aunque la imaginación no nos alcance para entenderlo.

Cantor afirmó esto sin mostrar ni un ejemplo concreto, sólo “contó” los números algebraicos y constató que eran una parte despreciable ante el gran tamaño de $\boldsymbol{R}$. Era una demostración indirecta, no constructiva, de llegar a la existencia de infinitos trascendentes que mostraba la potencialidad de la teoría de conjuntos infinitos de Cantor. Muchos matemáticos admiraron este aporte metodológico de Cantor, pero también fueron muchos los escépticos. No serían pocos los que sospecharan de la lucidez de Cantor que afirmaba que algo era infinitamente grande y no presentaba ningún ejemplo; les sonaba aquello como algo místico, sobrenatural, metafísico.

Pero la comprensión con todo el rigor de estas ideas de comparación de conjuntos numéricos infinitos y de prueba de tipo de irracionalidad también trasciende los objetivos de los cursos básicos de matemática. Detengámonos finalmente en una constelación aritmética de irracionalidades algebraicas que ha sido visitada en diferentes épocas con resultados muy atractivos y elegantes, que pueden incluirse en cualquier curso preuniversitario.

La familia de los números metálicos

El número de oro

El número de oro es un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "*unidad de medida*" sino como una relación o proporción entre magnitudes, que ahora se conoce como *razón áurea*. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracoles, flores, hojas y tallos de algunas plantas, el cuerpo humano, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea y algunos pueblos hasta le han otorgado una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido objetados por su subjetivismo.

Desde el punto de vista puramente matemático es notable por estar entre los números que se expresan por proporciones entre magnitudes geométricas y a la vez son raíces de ecuaciones algebraicas, en cambio no es posible representarlos como cociente de dos números enteros. Por tanto, no obstante estar tan ligado a la razón, se clasifican como irracionales. Pero para diferenciarlos de otros aun más irracionales se les llama *irracionales algebraicos*.

Decimos que dos números positivos a y b están en proporción o *razón áurea* si se cumple que: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Esto es, el todo es a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor. Al valor numérico de esta razón se le llama *número de oro* y desde principios del siglo XX se denota con la letra griega Φ (Fi mayúscula) o φ (fi minúscula) en homenaje al escultor griego **Fidias** (siglo V a.n.e.) que la usó sistemáticamente en sus obras.

Consideremos un segmento AB y dividámoslo en dos segmentos tales que la razón entre el segmento total AB y el segmento mayor sea igual a la razón del segmento mayor sobre el segmento menor. Para abreviar los cálculos tomemos como unidad al segmento menor y denotemos por x la longitud del mayor. Tenemos que $\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$. Fácilmente podemos despejar nuestra incógnita x y obtenemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que nos da la expresión aritmética del número de oro Φ. Dado que depende de la raíz cuadrada del número primo 5, sabemos que es un número irracional, es decir, que no puede representarse como el cociente de dos números enteros y su valor aproximado con 20 cifras decimales exactas es:

$$\Phi = 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204\ldots$$

Es posible que civilizaciones antiguas anteriores a la helena, como la mesopotámica y la egipcia, conocieran de este número y lo utilizaran en la construcción de sus monumentos, ya que se han encontrado relaciones cuantitativas entre las dimensiones de templos y pirámides que se aproximan al valor de Φ. Aunque siempre queda la duda que el interés por encontrar a Φ, haya

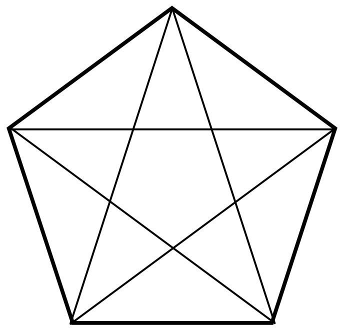


Figura 4. Pentagrama pitagórico

comprometido la precisión de los cálculos. Asimismo, se cree que los pitagóricos lo encontraron en la figura del pentágono estrellado o pentagrama que usaban como emblema. En efecto, si trazamos las cinco diagonales de un pentágono regular convexo (Fig. 4) se forman segmentos de cuatro longitudes distintas y cada uno está en proporción áurea con el inmediato inferior en longitud. Los griegos del periodo clásico conocían de sus propiedades principales y las utilizaban en sus construcciones buscando la perfección estética. En particular, el principal monumento de la antigua Grecia, el Partenón, obra majestuosa ideada y supervisada por el escultor Fidias, posee elementos con dimensiones relacionadas por la proporción áurea.

Ejercicio 6. Comprueba que en el pentagrama pitagórico los cuatro segmentos principales están en proporción áurea con el segmento inmediato de longitud inferior

Aparentemente, el primer estudio formal sobre el número áureo se recogió en los *Elementos* de Euclides (siglo III a.n.e.). Euclides prueba que no puede expresarse como cociente de dos números enteros y en una de las proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides aparece el *rectángulo áureo*. Es decir, un rectángulo tal que la longitud del lado largo sobre la longitud del lado corto sea Φ. Este rectángulo tiene la propiedad de que si cortamos el mayor cuadrado posible, entonces el rectángulo restante es semejante al original, también sus lados están en proporción áurea Φ. El frente del Partenón es casi un rectángulo áureo. Muchas construcciones no sólo antiguas, sino modernas siguen cánones áureos considerados de equilibrio y valor estético máximo. En Montpellier, al sur de Francia, el arquitecto español posmodernista Ricardo Bofill diseñó ***La Plaza del Número Áureo*** que terminó de construirse en 1984.

Se conoce una sucesión de números enteros que posee asombrosas propiedades aritméticas y que tiene lazos familiares con el número de oro. Se trata de la *sucesión de Fibonacci*, introducida en el siglo XIII por el matemático Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonacci (de ahí el sobrenombre de *figlio de Bonacci,* o más breve, *Fibonacci*). La sucesión apareció en un problema de conejos muy singular:

Una pareja de conejos puede procrear otra pareja a los dos meses de nacida y a su vez esta cría otra a los dos meses y así sucesivamente. Si en enero solo tenemos una pareja recién nacida y cada vez que nace una pareja la aislamos de las demás, ¿cuántas parejas de conejos tendremos para la Nochevieja del primer año? (Por supuesto, se supone que no muere ninguna en su primer año de vida).

Denotemos por F_n la cantidad de parejas en el mes n, entonces $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, porque nació la primera pareja, $F_4=3$, $F_5=5$, puesto que nacen dos parejas más de F_3; $F_6=8$, tres parejas (F_4) fueron fértiles, $F_7=13$, cinco parejas (F_5) paren, y aquí nos damos cuenta que se cumple: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, relación de recurrencia que nos permite encontrar cualquier término en función de los dos términos anteriores, por ejemplo:

$$F_8=F_7+F_6= 21;\ F_9=F_8+F_7= 34,\ F_{10}=F_9+F_8= 55,\ F_{11}=F_{10}+F_9= 89,\ F_{12}=F_{11}+F_{10}=144$$

Luego, al final del año tendremos 144 parejas de conejos, que seguirán pariendo y pariendo, según la ley de Fibonacci, hasta que la muerte los separe.

Lo asombroso es que si formamos el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, su valor numérico oscila siendo alternativamente menor y mayor que la razón áurea y cada vez más cerca de Φ. Veamos la tabla a continuación:

Tabla 1

Cocientes entre los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci

	n	$n+1$	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\Phi-\frac{F_{n+1}}{F_n}$		F_n	F_{n+1}	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\Phi-\frac{F_{n+1}}{F_n}$
			1	+0,6 1803		1 3	2 1	1,61 5384	+0,00 2649
			2	−0,3 8196		2 1	3 4	1,61 9047	−0,00 1014
			1, 5	+0,1 1803		3 4	5 5	1,61 7647	+0,00 0387
			1, 6666	−0,0 4863	0	5 5	8 9	1,61 8181	−0,00 0148
			1, 60	+0,0 1803	1	8 9	1 44	1,61 7977	+0,00 0056
		3	1, 625	−0,0 0696	2	1 44	2 33	1,61 8055	−0,00 0022

Cómo se observa ya para n=12 tenemos cuatro cifras decimales del número de oro y de esta forma, aumentando el índice de los términos, podemos aproximarnos tanto como queramos al valor de Φ. Digamos que para n=25 ya obtenemos 10 cifras decimales y para n=40, 15 cifras exactas. Suficientes para convencer a cualquiera de la convergencia de la sucesión de los cocientes $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ hacia Φ, aunque no sea una demostración matemática rigurosa del hecho. Este resultado fue descubierto empíricamente por el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler en el siglo XVII y pasaron más de 100 años hasta que pudiera demostrarse rigurosamente.

Figura 5. Polimita cubana

Curiosidad 5: El número de oro ¿aparece también en la Naturaleza?

Algunos biólogos amantes de la matemática creen haber encontrado el número de oro en varios elementos de la naturaleza:

• La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.

• La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de *Ley de Ludwig*).

• La distribución de las hojas en un tallo.

• La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).

• La distancia entre las espirales de una piña.

• La relación entre la distancia entre las espiras del interior en forma de espiral de la mayoría de los caracoles (no sólo del nautilus). En particular, las conchas del Fusus antiquus, del Murex, de Scalaria pretiosa, de Facelaria y de Solarium trochleare, entre otras, siguen este tipo de espiral de crecimiento. La polímita, caracol endémico de Cuba (Fig. 5.) también presenta esta propiedad.

Curiosidad 6: ¿Aparece el número de oro asociado a la belleza humana?

El grabado titulado *Las proporciones del hombre* [Fig. 6], procede de un cuaderno de apuntes de Leonardo da Vinci. Está basado en las teorías del arquitecto romano Marco Vitrubio (siglo I a.n.e.) sobre la aplicación de la sección áurea al cuerpo humano: la proporción entre la distancia desde la cabeza hasta el ombligo y desde éste hasta los pies, debe ser la misma que la proporción entre la distancia desde el ombligo hasta los pies y desde la cabeza hasta los pies. El hecho de que este sistema de relaciones armónicas, también conocido como la proporción divina, pudiera trasladarse a la figura humana, tuvo una gran importancia durante el renacimiento, en particular el pintor alemán Alberto Durero dedicó los últimos años de su vida a estudiar este tema y el mismo año de su muerte sus apuntes fueron recopilados en el tratado *Cuatro Libros sobre las Proporciones Humanas* (1528) que tuvo mucha influencia ulteriormente. Especialmente en el siglo XX varios cirujanos estéticos escribieron libros sobre la búsqueda de la perfección en rostros femeninos usando proporciones áureas. En los últimos años del siglo pasado aparecieron artículos sobre el tema de la medida de la belleza del cuerpo humano y no fueron pocos los que afirmaron que la proporción entre las medidas de la cintura y el ancho de caderas que era más atractiva para el hombre era aproximadamente la dada por la razón áurea.

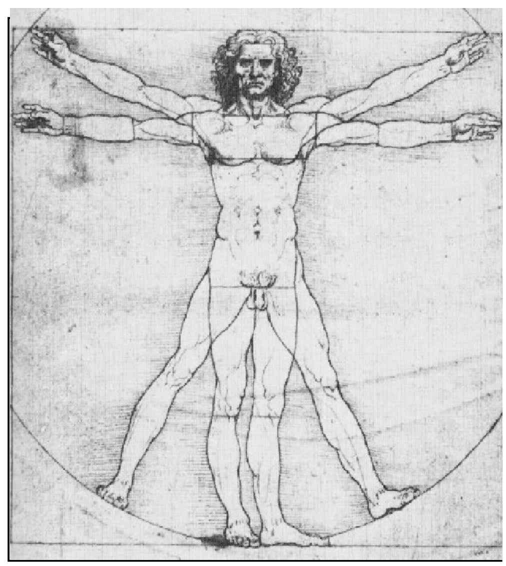


Figura 6. Las proporciones del hombre

La familia de los números metálicos y el bastardo número plástico

Una de las formas de desarrollar la matemática es con la investigación de la generalización de las relaciones cuantitativas y sus propiedades. En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales que por la forma como se definen constituyen una generalización del número de oro. Son los llamados *números metálicos* que son determinados por la fórmula:

$$\delta_N = \frac{N+\sqrt{N^2+4}}{2};$$

Se prueba fácilmente que δ_N es la raíz positiva de la ecuación $x^2-Nx-1=0$ y los tres números metálicos principales son:

Para N=1, la ecuación es $x^2-x-1=0$, $\delta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$ *número de oro*.

Cuando N=2, la ecuación es $x^2-2x-1=0$, $\delta_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2,4142135624$ *número de plata*.

Para N=3, la ecuación es $x^2-3x-1=0$, $\delta_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 2,36602540378$ *número de bronce*.

Otra generalización del número de oro se hace cambiando la ecuación cuadrática que lo define por la ecuación cúbica similar, es decir, $x^3-x-1=0$. La única raíz real (irracional) de esta ecuación es denominada *número plástico*. Se comprueba que el valor del número plástico *pl* es

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje holandés Hans van der Laan (1904-1991) en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Posteriormente fue estudiado más profundamente por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935). Van der Laan consideraba las dos razones 3:4 y 1:7 como expresión de los límites inferior y superior en la normal habilidad para la percepción de diferencias de tamaño y forma en objetos tridimensionales y a *pl,* que tiene un valor intermedio, como la proporción óptima en este sentido estético.

El número plástico aparece como el límite de la razón de los elementos contiguos de la *sucesión de Padovan* definida de forma recurrente como se determina la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro, pero con una ligera diferencia:

$$P_{(n+1)} = P_{(n-1)} + P_{(n-2)},\ P_{(0)} = P_{(1)} = P_{(2)} = 1$$

sus miembros son llamados *números de Padovan:*

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 48, …

Esta sucesión crece mucho más lentamente que la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro. Algunos números son comunes en ambas sucesiones, como 3, 5 y 21, sin embargo, no se sabe si existen infinitas concurrencias o son solo una cantidad finita de coincidencias.

Los números metálicos y el número plástico son ejemplos significativos de números irracionales algebraicos. Rematamos este breve paseo atravesando rápidamente por la constelación de las irracionalidades trascendentes.

Curiosidad 8: ¿Cuáles son las estrellas más brillantes de la constelación de las irracionalidades trascendentes?

Por supuesto que toda respuesta a esta curiosidad es muy subjetiva y depende de la visión del autor de la respuesta. Basándonos en lo expuesto arriba, y complementándolo con otros números que aparecen en Wells (1986) y cuya demostración de trascendencia pueden encontrar en el magnífico libro de Niven (2005) o en el más reciente de Burger (2008), elaboramos una relación siguiendo el orden creciente según su magnitud.

- 0, 110 001 000 000 000 000 000 010 …$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}$ - Número de Liouville. Se considera que fue el primer número en demostrarse su trascendencia. Es el más simple de una familia de números introducida por el francés Joseph Liouville en 1844
- 0, 123 456 789 101 112 131 415 161 … Número de Chapernowne, es trascendente y normal, esto quiere decir que sus cifras aparecen con la misma frecuencia. Se conocen pocos números trascendentes que sean normales.
- 0, 207 879 576 350 761 908 546 955 … El valor de $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. También es llamada constante de Gelfond, puesto que es del tipo a^b donde a es algebraico diferente de 0 y de 1, y b es irracional algebraico. El ruso Alexandre Gelfond en 1934 demostró este resultado general de trascendencia y dio solución al 7º problema planteado por Hilbert como uno de los principales problemas de la matemática del siglo XX. De este resultado se infiere que el logaritmo en base 10 de cualquier número natural $N \neq 10^k$ (k entero) es trascendente, resultado que Euler había conjeturado en el siglo XVIII.
- 0, 301 029 995 663 981 … Logaritmo en base 2 de 10
- 0, 318 309 886 183 790 671 537 767 … El inverso del número π
- 0, 367 879 441 171 442 321 595 523 … El inverso del número e
- 0, 434 294 481 903 251 827 651 128 … Logaritmo de e en base 10
- 0, 607 927 101 854 026 628 663 277… $= \frac{6}{\pi^2}$. Inverso de ζ(2)= $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Es la probabilidad que un número escogido al azar no sea divisible por un cuadrado.
- 0, 693 147 180 559 945 309 417 232 … = ln (2)-logaritmo natural de 2
- 1, 082 323 233 711 138 191 516 003… -Valor de ζ(4)=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Suma infinita calculada por Euler, junto con la suma de los inversos de todas las potencias pares (2n) de los números naturales. Esta suma es de la forma $\frac{p\pi^{2n}}{q}$. El caso de las potencias impares se mantiene sin respuesta completa, aunque se ha logrado mejorar los resultados obtenidos por Euler.
- 1, 202 056 … Valor de ζ(3)= $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} -$ Roger Apery en 1976 probó que era irracional, pero no se ha demostrado su trascendencia, aunque Euler conjeturó que era igual a $\frac{p\pi^3}{q}$ para p y q enteros positivos y por tanto, un valor trascendente.
- 1, 644 934 066 848 226 436 472 415 …$= \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Solución dada por Euler al famoso problema de Basilea.
- 1, 772 453 850 905 516 027 298 167 … $= \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) -$función gamma de Euler evaluada en 0,5 y que generaliza a los racionales el factorial de enteros n!

- 2, 302 585 092 994 045 684 017 991 …= ln (10)
- 2, 665 144 142 690 225 188 650 297 …= $2^{\sqrt{2}}$- número de Hilbert; conjeturada su trascendencia en el séptimo problema de Hilbert propuesto en 1900 y demostrada su irracionalidad por el ruso Rodion Kuzmin en 1930. A veces se le llama constante de Gelfond-Schneider, en honor a los dos matemáticos que publicaron en 1934 y 1935 independientemente, que a^b es trascendente para a algebraico diferente de 0 y 1, y b algebraico irracional. De esta forma se incluyeron muchas estrellas a la constelación.
- 2, 718 281 828 459 045 235 360 471 …= e- base de los logaritmos naturales. Se reconoce a Euler como el primero que usó la letra e para designarlo en 1731, en una carta dirigida a Goldbach. Más tarde probó que e era un irracional, aunque se atribuye al académico alemán Lambert esta prueba. No fue hasta 1873 que el francés Hermite probó que e no es raíz de ninguna ecuación con coeficientes enteros, es decir que el número e es trascendente. Se considera que fue el primer número irracional clásico que se probó era trascendente.
- 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 …= π-el más famoso y significativo de todos los número irracionales. Es el valor de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. También es la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su radio. Euler fue el primero en usar la letra griega π inicial de la palabra perímetro. En 1761 Johann Heinrich Lambert probó que era irracional, en 1880 Carl von Lindemann probó su trascendencia y en 1953 Kurt Mahler probó que no es un número de Liouville.
- 7, 389 056 098 930 650 227 231 425 … $= e^2 -$Euler probó que era irracional y Hermite su trascendencia.
- 9, 869 604 401 089 358 618 834 490 … $= \pi^2 -$ Legendre probó en 1794 que era irracional y Lindemann en 1880 que era trascendente.
- 23, 140 692 632 779 269 005 729 086 …= e^{π}- Se prueba que es trascendente por el teorema de Gelfond-Schneider.

Los siguientes valores se mantienen en el “limbo” por no tener definida su naturaleza aritmética, pero todos se consideran merecedores de ser estrellas brillantes en la constelación de los trascendentes:

- 0, 423 310 825 130 748 003 102 172 …= $\pi - e$
- 0, 865 255 979 432 265 087 217 833 … $= \frac{e}{\pi}$
- 5; 859 874 482 048 838 473 822 930 …= $e + \pi$
- 8, 539 734 222 673 567 065 464 127 ... $= \pi e$
- 15, 154 262 241 479 264 189 751 717 … $= e^e$
- 22, 459 157 718 361 045 473 427 152 …= π^e
- 36, 462 159 607 207 911 770 990 826 … $= \pi^{\pi}$

A manera de resumen: Breve “paseíto” por la historia de las irracionalidades

- S. XVIII a.C. Evidencias de cálculos apro
- ximados de $\sqrt{2}$ en Mesopotamia.
- S. V. a.C. Aceptación pitagórica de los “números inexpresables” o “magnitudes inconmensurables”. Cuatro posibles primeros encuentros:

$$\sqrt{2} = \frac{\text{diagonal cuadrado}}{\text{lado cuadrado}}; \qquad \sqrt{3} = \frac{\text{diagonal cubo}}{\text{lado cubo}};$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\text{diagonal pentágono}}{\text{lado pentágono}}; \qquad \sqrt{5} = \frac{\text{diagonal rectágulo "doble"}}{\text{lado simple rectángulo "doble"}}$$

- S. V a.C. Teodoro de Cirene muestra su conocimiento de la inconmensurabilidad de los segmentos con longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …$\sqrt{17}$
- S. IV . C. Teeteto de Atenas, alumno de Teodoro y de Sócrates, según relata Platón y subraya Pappus, es quién establece distinción clara entre magnitudes racionales e irracionales, es decir, entre magnitudes conmensurables e inconmensurables.
- S. III. a.C. Euclides en el Libro X de los *Elementos* clasifica los números "inexpresables".
- S. III a. C. Arquímedes en su tratado *"Sobre la medida del círculo"* usa la logística o aritmética práctica helena para dar una aproximación de $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153} \approx 1{,}7320261438$ que tiene 4 cifras exactas. Más adelante usa $\frac{1351}{780}$ que da 5 cifras exactas. Además halla la famosa relación entre la medida de la circunferencia y la medida del círculo a través de la constante de Arquímedes, desconocida su naturaleza aritmética.
- S. I d. C. Herón de Alejandría en su "Métrica" utiliza algoritmos para calcular valores aproximados de raíces cuadradas y cúbicas sin decir la deducción de ellas. Da varios ejemplos ilustrativos entre ellos $\sqrt[3]{100}$. Influye en Europa sobre todo en el Medioevo tardío, seguramente en Stevin.
- S. IX Al Guarizmi o Al Mahani clasifican a los irracionales en cuadráticos y cúbicos en términos geométricos en su interpretación de Euclides. El traductor al árabe del libro X de los Elementos traslada "retos" (racional) por "muntaq" (hecho para hablar) y el giego "alogos" de irracional por "asamm" que en latín fue "surdus" (sordo).
- S. X. d. C. Varios matemáticos árabes usan números irracionales o "sordos": Abu Kamil, Abu-Wafa, Al Uqlidisi, Al Karaji
- S. XI Al parecer fue Gerardo de Cremona quien por primera vez asume en su traducción y edición de Euclides la terminología de números "surdus" para los irracionales. Después es usado por Fibonacci (s. XIII).
- S. XII Al Hassar (Maghreb) notación de fracción con numerador y denominador separados por barra horizontal. Después es usado por Fibonacci (s. XIII).
- S. XIV-XVI Escuela de Kerala de astronomía y matemática. Uso de series infinitas para varios números trascendentes como π y valores trigonométricos. Uno de los pioneros es Madhava de Sangamagrama (1350-1425) quién se conoce como impulsor del paso de lo finito al infinito. Entre otros cálculos halló un valor de π con 11 cifras decimales correctas y la serie alternada de Leibniz-Gregory.
- S. XV Jamshid al Kashi (Samarcanda, 1380-1429) "La llave de la aritmética" (1427) Cálculo con fracciones decimales, raíces enésimas, irracionalidades
- 1525 Christoph Rudolff (Viena, 1499-1545) En su libro "Coss" (1525) usa polinomios con coeficientes irracionales, introduce símbolo para la raíz cuadrada abreviatura de la letra r minúscula inicial de radix.
- 1544 Michael Stifel (Jena, 1487-1567) "Arithmetica Integra" con un estudio de las irracionalidades y notaciones +, -, $\sqrt{\cdot}$
- 1585 Simón Stevin (Brujas, 1548-Leyden, 1620) "De Thiende" (La Décima) Teoría general de las fracciones decimales que habían sido usadas mucho antes por árabes y cosistas germanos, pero ninguno pretendió sustituir las fracciones ordinarias ni elaboró un sistema de notación coherentes. También publica "L'Arithmétique" donde introduce métodos para encontrar valores aprox. de las raíces de polinomios de cualquier grado y acepta cualquier tipo de número real (no acepta los imaginarios)

- 1591 François Viète (Fontenay, 1540-París, 1603) “In artem anlyticem isagoge” (Introducción al arte analítico) introduce la notación y el álgebra de los polinomios. No acepta ni números irracionales, ni negativos ni imaginarios.
- 1592 Jöst Bürgi (Suiza, 1552-1632) Usa la coma para separar la parte entera de la decimal y elimina la mención del orden decimal. Kepler y otros comienzan a usar la notación decimal con los logaritmos en la astronomía.
- 1613 Pietro Cataldi (Bologna, 1548-1626) “Trattato del modo brevissimo di trovar la radice quadra delli numeri” introduce la operatoria con las fracciones continuas (sin denominarlas).
- 1656-57 John Wallis (Kent, 1616-1703) “Aritmética del Infinito” extiende las notaciones exponenciales de Descartes (1637) a exponentes negativos y fraccionarios. Introduce símbolo del infinito. En “Matemática General o Curso Completo de Aritmética” (1657) trabaja con diferentes representaciones de los números.
- 1707 Isaac Newton (1643-1727) *Arithmetica Universalis* (ed. Latín 1707, 22, 32, 52, 61; en inglés 1720, 1728, 1769; en francés 1802) escrita entre 1673 y 1683 destinada a texto de los cursos en Cambridge. Fórmulas para las potencias de las raíces de una ecuación algebraica, extendiendo los resultados de Cardano, Viète y Girard (1629); generaliza regla de Descartes para determinar el número de raíces reales y una regla para determinar una cota superior para raíces positivas. Posición conservadora: “Las ecuaciones son expresiones del cálculo aritmético y no tiene propiamente su lugar en la Geometría”
- 1737 Euler (Basilea, 1707-San Petersburgo, 1783) demuestra la irracionalidad de los números e y e^2. Sospecha que las potencias de e son todas irracionales y que son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, al parecer tiene la idea de la clasificación de los irracionales.
- 1760 Lambert (Alsace, 1728-Berlín, 1777) demuestra la irracionalidad de π.
- 1826-30 Abel (1802-1829) y Galois (1811-1832) descubren la clasificación de los irracionales
- 1844 Liouville (1809-1882) encuentra los primeros números trascendentes y da criterio de trascendencia a través de condición de aproximación.
- 1857-1872 Dedekind (Braunschweig, 1831-1916) da su definición rigurosa de número irracional y de número real. Más tarde prueba que el conjunto de irracionales algebraicos es numerable en carta a Cantor que finalmente lo publica como suyo en 1874 con el título “*Sobre una propiedad del conjunto de todos los números algebraicos*”.
- 1873 Hermite (Lotaringia, 1822-1901) demuestra la trascendencia de e.
- 1882 Lindemann (Hannover, 1852-1939) demuestra la trascendencia de π.
- S. XX se estudia la topología inducida por R en el conjunto no numerable de los irracionales: la métrica usual no es compatible, pero se prueba que esta topología en el conjunto de los irracionales es metrizable (por ser un G_δ) y disconexa.
- 1934 Gelfond (Petersburgo, 1906-68) y Schneider (Frankfurt, 1911-88) prueban, independientemente, que a^b es trascendente para a algebraico diferente de 0 y 1, y b algebraico irracional. De esta forma se incluyeron muchas estrellas a la constelación.

Referencias y bibliografía

Burger, E. B. (2008). *An Introduction to Number Theory*. Partes I y II The Teaching Company. Virginia.

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Ed. Pirámide. Madrid.

Ifrah, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Editorial Espasa Calpe. Madrid.

Niven, I. (2005). *Irrational Numbers*. MAA. Washington DC. (1ª ed. de 1961)

Sánchez, C. y González, L. G. (2013). *Dedekind. El Arquitecto de los Números*. Editorial Nivola. Madrid

Sánchez, C. y Roldán, R. (2012) *Paseo por el universo de los números*. Editorial Academia. La Habana.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2010) *El entrañable encanto de las matemáticas.* Editorial Félix Varela. La Habana.

Swetz, F. J. (ed.) (1994). *From five fingers to infinity: a journey through the history of mathematics*. Open Court Publishing Company. Chicago.

Wells, D. (1986). *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*. Penguin Books Ltd. Middlesex.

Currículo de matemática: necessidades e alternativas

Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
claudiag1959@yahoo.com.br

Resumo

O conhecimento matemático pode ser entendido como uma forma de pensamento a ser desenvolvido nos indivíduos, constituindo-se em um sistema de expressão através do qual podemos organizar, interpretar e dar significado a certos aspectos da realidade. A sociedade complexa em que vivemos exige, cada vez mais, tomada de decisões e opções feitas responsavelmente, sendo necessário organizar o pensamento, estruturar dados e informações, fazer previsões para decidir, avaliar riscos quantitativamente, relacionar os conhecimentos e aplicá-los em situações novas. Assim, torna-se evidente a utilidade social da Matemática para fornecer instrumentos para viver no mundo de modo eficaz, formando gerações constituídas de homens e mulheres preparados. Essa conferência vai tratar do currículo de Matemática para a escola dos dias atuais. Esse Minicurso abordará o currículo de Matemática no Ensino Básico nos aspectos: o que ensinar, quando ensinar, como ensinar e o que avaliar. Abordará, também, atividades que levam ao desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que chamamos de pensamento matemático de alto nível.

Palavras chave: Educação Matemática. Currículo de Matemática. Ensino Básico.

Introdução

O conhecimento matemático pode ser entendido como uma forma de pensamento a ser desenvolvido nos indivíduos. Constitui-se em um sistema de expressão através do qual podemos organizar, interpretar e dar significado a certos aspectos da realidade que nos rodeiam.

A sociedade complexa em que vivemos exige, cada vez mais, tomada de decisões e opções feitas responsavelmente. Por isso a Matemática, no mundo das calculadoras sofisticadas, da automação, da informatização, passa a exercer funções mais importantes do que simples técnica de efetuar operações e medidas. É necessário organizar o pensamento, estruturar dados e informações, fazer previsões para decidir, avaliar riscos quantitativamente, relacionar os conhecimentos e aplicá-los em situações novas.

Segundo D'Ambrósio (1990), a matemática se justifica, nas escolas, por ser útil como instrumentador para a vida, para o trabalho, parte integrante de nossas raízes culturais, porque ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor. Também por sua universalidade, sua beleza intrínseca como construção lógica, formal, etc. Afirma, ainda, D'Ambrósio (1985), que "a Educação Matemática tem como fundamental objetivo desenvolver estratégias intelectuais que permitam a construção de uma Matemática como corpo de conhecimentos, de técnicas e procedimentos úteis para satisfazer as necessidades sociais" (D'Ambrósio citado por Azcárate, 1997, p.80).

Assim, torna-se evidente a utilidade social da Matemática para fornecer instrumentos para o homem/mulher atuarem no mundo de modo mais eficaz, formando gerações constituídas de homens e mulheres preparados. Segundo D'Ambrósio (1990, p.16) "Isso significa desenvolver a capacidade do aluno para manejar situações reais, que se apresentam a cada momento, de maneira distinta."

É evidente que a vida moderna exige, cada vez mais, o desenvolvimento de habilidades como: lógica de raciocínio; saber transferir conhecimentos de uma área para outra; saber comunicar-se e entender o que lhe é comunicado; trabalhar em equipe; interpretar a realidade; buscar, analisar, tratar e organizar a informação; adotar uma postura crítica, sendo consciente de que o conhecimento não é algo terminado e deve ser construído constantemente; tomar decisões, ganhando em autonomia e criatividade. Logo, aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, perceber problemas, preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender, imaginar e extrapolar.

Baseados nesses princípios, a escola e os professores devem refletir sobre a necessidade de um planejamento curricular em Matemática que esteja em sintonia com o progresso científico e tecnológico da sociedade atual.

Logo, há necessidade de estruturar o currículo de Matemática onde o eixo central não seja a repetição de exercícios, mas "aprender a interpretar problemas, desenvolver sistemas de ações, comparar idéias, métodos e soluções, saber comunicar idéias através da Matemática e concluir processos de forma clara, rigorosa e precisa, entre outras estratégias" (Azcárate, 1997, p. 82).

Currículo de Matemática: necessidades e perspectivas

A palavra currículo se origina do latim *curriculum* e significa o curso, a rota, o caminho da vida ou das atividades de uma pessoa ou grupo de pessoas. O currículo educacional representa a síntese dos conhecimentos e valores que caracterizam um processo social, expresso pelo trabalho pedagógico, desenvolvido nas escolas.

Coll (1996) afirma que o currículo é a explicação do projeto educacional necessário para o crescimento pessoal, como ajuda específica quando esse crescimento não é satisfatório somente com a participação, imitação ou observação dos adultos dentro da cultura de um grupo, servindo, assim, como um manual para aqueles que irão desenvolver esse projeto; levando-se em consideração a situação real de onde ele será aplicado. Em outras palavras

[...] entendemos o currículo como sendo o projeto que preside as atividades educativas escolares, define suas intenções e proporciona guias de ação adequadas e úteis para os professores, que são diretamente responsáveis pela sua execução. Para isso, o currículo proporciona informações concretas sobre que ensinar, quando ensinar, como ensinar e que, como e quando avaliar (Coll, 1996, p.45).

O currículo escolar é toda ação pedagógica refletida, que se realiza na escola e a partir dela, para que se concretize a aprendizagem. São as atividades dentro ou fora da sala de aula que contribuem para o desenvolvimento dos alunos. Portanto, é mais que uma simples grade de matérias ou uma lista de conteúdos. Contempla um conjunto de conhecimentos relacionados e interdependentes, com diversos níveis de complexidade e ampliação de conceitos. Através do currículo escolar, realiza-se a difusão do conhecimento científico, adquirido pela sociedade. Em seu funcionamento deve estar presente a realidade sócio-histórico-cultural da comunidade a que se destina, atribuindo, dessa forma, significado aos conhecimentos e saberes trabalhados na escola.

Nas discussões cotidianas, quando refletimos sobre currículo, é comum pensarmos apenas em conhecimento neutro, escrito para ser seguido teoricamente, esquecendo-nos de que o conhecimento que o constitui está diretamente ligado à formação do indivíduo que será construído dentro da escola. Portanto o currículo escolar tem uma importância fundamental na construção da escola que queremos ter.

Direcionando o estudo para área de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) visam [...] à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda a criança e jovem brasileiro tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (Brasil, PCNs, 1998, p.15).

Encontramos nos PCNs a discussão das metodologias para resolução de problemas, história da Matemática, jogos e uso das tecnologias de comunicação, como forma de melhorar o ensino da Matemática, incluindo, também, temas transversais como: ética, pluralidade cultural, orientação sexual, meio ambiente, saúde, trabalho e consumo. Esses temas são necessários para que o aluno assuma uma posição crítica e consiga proteger-se, através do conhecimento, quando se deparar com certas situações durante a vida.

Finalmente, incluem discussões sobre a melhor forma de trabalhar os conteúdos que desenvolvem a estrutura cognitiva do aluno: [...] o estudo dos números e das operações (no campo da aritmética e da álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da aritmética, da álgebra, da geometria e de outros campos do conhecimento) (Brasil, PCN, 1998, p.49). O objetivo é trabalhar esses conteúdos de uma forma que permita ao aluno, posteriormente, usar esse conhecimento para entender a Matemática que o rodeia, compreendendo a utilização de gráficos, dados estatísticos, probabilidade etc.

A Matemática, segundo os PCNs do Ensino Médio (Brasil, 1999), permite o desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico, o que é claramente expresso nos objetivos educacionais da Resolução do CNE[1]/98.

[1] Resolução do Conselho Nacional de Educação do ano de 1998.

A ideia básica do enfoque construtivista de ensino é a de que aprender e ensinar é mais do que um mero processo de repetição e acumulação de conhecimentos; implica transformar a mente de quem aprende, que deve reconstruir, em nível pessoal, os processos e produtos culturais com o fim de apropriar-se deles (Pozo e Crespo, 1998).

Atualmente, no Brasil, a escola possui, muito arraigada em seus pressupostos, a transmissão de conhecimentos, com aulas teóricas e exercícios repetitivos, como forma de aprender a fazer, não privilegiando a compreensão e o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Logo, um novo currículo se faz necessário nas escolas, a fim de mudar essa concepção dominante de educação e considerar a formação de atitudes, valores e competências, permitindo ao aluno a aplicação dos conhecimentos aprendidos em situações novas. Esse currículo deve privilegiar o agir do aluno e o professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Porém, os conteúdos matemáticos devem possuir um valor importante na construção do saber. As metodologias aplicadas em sala de aula também são fundamentais para um ensino significativo, no qual os alunos possam construir significados e atribuir sentido àquilo que aprendem. Para Coll et al. (1998), somente na medida em que produzimos esse processo de construção de significados e de atribuição de sentido, conseguimos que a aprendizagem de conteúdos específicos cumpra a função que lhe é determinada e que justifica a sua importância: contribuir para o crescimento pessoal dos alunos, favorecendo e promovendo o seu desenvolvimento e socialização.

É necessário salientar que não pretendemos que os conteúdos (fatos e conceitos) tenham um peso excessivo, mas que sejam desenvolvidos, na escola, todos os tipos de conteúdos, que são: os fatos e conceitos; os procedimentos e as atitudes. Coll et al. (1998) sugerem o planejamento e o desenvolvimento de atividades que permitam trabalhar, de forma interrelacionada, os três tipos de conteúdos.

A aprendizagem matemática, segundo D’Amore (2005), não se constitui apenas da construção de conceitos, mas envolve três tipologias de aprendizagens distintas, possuindo alguma intersecção: aprendizagem conceitual, aprendizagem de estratégias (resolver, demonstrar,...), aprendizagem algorítmica (calcular, operar,...). Considera, ainda, que a operacionalização (o saber fazer) engloba tanto o uso dos conceitos quanto das estratégias (o saber demonstrar, saber resolver), bem como as atividades algorítmicas (saber calcular, saber operar).

Segundo os PCNs do Ensino Médio (Brasil, 1999) a Matemática, com seus processos de construção e validação de conceitos, argumentações, procedimentos de generalizar, relacionar e concluir, que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações, possibilitando ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos.

Necessitamos nas escolas do desenvolvimento de conteúdos, que sejam desenvolvidos procedimentos adequados, proporcionando aos alunos a construção de raciocínios de alto nível.

A importância do desenvolvimento de pensamentos matemáticos de alto nível

A matemática, como ciência, é um exemplo de abstração, uma vez que, como regra, não estuda o mundo real, e sim modelos, que são abstrações do mundo real. Logo, entendemos que, ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, devemos ter em mente a criação de atividades que permitam o desenvolvimento do pensamento abstrato, possibilitando raciocínios de alto nível.

Raciocínio de alto nível, segundo Resnick citado por Lins e Gimenez (1997), é aquele que estabelece relações. Não é imediato, e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos. Exige um nível de abstração mais elevado, o qual permite relações entre os conhecimentos já adquiridos, exigindo mais que a aplicação de algoritmos e regras. Normalmente, a resolução de problemas, em Matemática, exige do resolvente raciocínios de alto nível, ou seja, é necessário relacionar os conhecimentos prévios e aplicá-los em uma situação nova.

Para melhor entender o pensamento abstrato, é importante conceituar "pensamento" e "abstrato". Pensamento, segundo o Dicionário Aurélio, "é um processo mental que se concentra nas idéias" e "o poder de formular conceitos". Conforme Oxford Desk Dictionary and Thesaurus, "é a faculdade da razão".

Para Oliveira e Amaral (2001), "pensamento é a capacidade que tem o ser de, através de três operações mentais distintas: a formação de idéias, o juízo sobre as relações de conveniência entre essas idéias e o raciocínio, que estabelece relações entre os juízos, compreender o significado das coisas concretas e das abstrações, bem como das relações que elas guardam entre si".

No Dicionário Aurélio, "abstrato é o que expressa uma qualidade ou característica separada do objeto a que pertence ou a que está ligada". No Oxford Desk Dictionary and Thesaurus "abstrato é o que existe no pensamento ou na teoria e não na matéria ou na prática".

Ainda, citando Oliveira e Amaral (2001), a abstração é um conceito no qual não levamos em conta um valor específico determinado e sim qualquer entre todos os valores possíveis daquilo com que estamos lidando ou ao que estamos nos referindo. Por exemplo, em álgebra, quando dizemos que x é uma variável, desconsideramos o seu valor atual, mas consideramos todos os possíveis valores de x como sendo números, os quais não são objetos físicos e sim objetos lingüísticos, formados pela abstração durante o ato de contar.

Os pensamentos abstratos representam idéias ou sentimentos, não dimensionáveis, desprovidos de forma, tamanho ou cor, como amor, paixão, ódio ou tristeza (abstrações límbicas), ou algo assim como sentido ético e moral, música ou matemática (abstrações neocorticais). Também consiste na habilidade que tem a mente de selecionar novas rotas ou novos meios para alcançar um determinado objetivo, algo que, certamente, tem a ver com o pensamento abstrato (Oliveira e Amaral 2001).

Para os mesmos autores, o pensamento abstrato proporciona algo mais: quando envolvido num processo de criatividade, adquire tal magnitude, que acaba por se constituir em forte estímulo, capaz de promover a proliferação dendrito-axonial[2], criando novas sinapses, tornando-se um poderoso estimulador do aprendizado, do conhecimento e da potencialidade de memorização.

Quando nos referimos às operações de pensamento, falamos na busca de suposições, classificação, codificação, comparação, planejamento de projetos (traçar um plano de ação para

---

[2] Os nervos são estruturas especializadas em conduzir impulsos para o sistema nervoso central e para o sistema nervoso periférico. São formados por células altamente especializadas, os neurônios, possuindo um corpo celular com projeções denominadas dendritos e um prolongamento principal, o axônio. O impulso nervoso propaga-se no sentido dendrito-axônio.

solucionar uma situação conflitiva), formulação de críticas, formulação de hipóteses, imaginação, interpretação, resumo, reunião e organização de dados, tomada de decisões.

O que nos preocupa é que a escola não está desenvolvendo esse tipo de pensamento nos alunos, fato o qual nos leva a questionar a necessidade de um ensino dentro da nossa realidade, com situações problemas que desencadeiem raciocínios lógicos matemáticos, que os motivem e interessem.

O trabalho matemático desenvolvido nas escolas deve ser útil para a vida e o currículo é fundamental para um ensino significativo, capaz de formar competências que permitam atuar na sociedade. Assim, uma conclusão lógica e importante é que o currículo de Matemática desenvolvido nas escolas do Ensino Básico necessita de uma reformulação urgente, que permita desenvolver o pensamento matemático, não se limitando, apenas, a repassar conteúdos matemáticos.

Ensinar Matemática pode e deve ser compatível com formar pessoas. Os professores devem ser capazes de selecionar e organizar atividades adequadas, a fim de contribuir para o desenvolvimento dos alunos e de um currículo de Matemática acessível a todos.

Referências Bibliográficas

Azcárate, Pilar Goded. (1997). Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, 32, 77-85.

Brasil. (1999) *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília, MEC.

Buarque de holanda Ferreira A. (1998).Novo Dicionário da Língua Portuguesa. Ed. Nova Fronteira.

Coll, César. (1996). *Psicología e Currículo*. São Paulo: Ática.

Coll, César et al. (1998). *Os conteúdos na reforma*. São Paulo: ARTMED.

D`Ambrósio, Ubiratan. (1985). *Environmental Influences. Etudies im Mathematical Education*. Vol. 4, 22-46. Paris: Unesco.

D'ambrósio, Ubiratan. (1990). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* São Paulo: Ática.

D'amore, Bruno. (2005). *Epistemologia e didática da Matemática.* São Paulo: Escrituras.

Groenwald, Claudia L. Oliveira. (1999). A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. *Educação Matemática em Revista – RS*. SBEM do Rio Grande do Sul, 1, Ano I, 23-30.

Groenwald, Claudia Lisete de Oliveira; SAUER, Lisandra de Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber. (2005). Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números. *Acta Scientiae*, Canoas, v.7, n.1, p. 93-101, jan./jun.

Lins, Rômulo Campos e GIMENEZ, Joaquim.(1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* São Paulo: PAPIRUS.

Oliveira. Jorge Martins e Amaral, Júlio Rocha. (2001). O Pensamento Abstrato. *Cérebro & Mente. Revista eletrônica.* São Paulo, Universidade Estadual de Campinas, 12.

Pozo, Juan Ignácio Municio e Crespo, Miguel Angel Gomes. (1998). *Aprender y ensenar ciência: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Morata.

Rico, L. (1997). *Reflexiones Sobre los Fines de a Educación Matemática*. Suma, 24, 5-20.

Secretária de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

The Oxford Desk *Dictionary and Thesaurus. American Edition. Berkley Books*. (1997). Oxford University Press.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Situaciones de modelación matemática. Algunas reflexiones para el aula de clase

Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Universidad de Antioquia
Colombia
jhonyvilla@gmail.com

Resumen

En este documento me propongo analizar la experiencia con futuros profesores de matemática cuando se enfrentaron a dos situaciones[1] en las cuales los modelos y la modelación tiene presencia. A través de la experiencia vivida por los futuros profesores se han podido construir algunas reflexiones sobre las posibilidades que este tipo de situaciones ofrece frente la apropiación de significados de los tópicos matemáticos asociados a los contextos tanto en alumnos que han estudiado previamente estas nociones, como en aquellas que no lo han hecho. Finalmente, algunas implicaciones reconocidas por los futuros profesores, también se harán explícitas.

Palabras clave: Modelación matemática, modelos matemáticos, ventajas y limitaciones de situaciones de modelación.

Introducción

La formación matemática de futuros profesores para esta área debe posibilitar la consolidación de visiones de las matemática como una manera de estudiar e interpretar las diferentes situaciones del mundo que los rodea; este tipo de propósitos parece sustentarse en una mirada a las matemáticas como una producción humana y, en cierto modo, como una ciencia que ha estado en relación con las necesidades históricas de la sociedad y la cultura (Radford, 2002). En consonancia con dicha mirada, el aprendizaje de las matemáticas no puede ser ajeno a las diferentes prácticas en las cuales las matemáticas adquieren sentido en la sociedad, al

[1] Las situaciones analizadas en este articulo, servirán como

respecto Masingila et al. (1996) apoyados en los trabajos de Saxe (1988) han señalado que el aprendizaje de las matemáticas no se limita a la adquisición de procedimientos algorítmicos formales transferidos de los matemáticos a los individuos a través de la escuela, sino que más bien, el aprendizaje de las mismas tiene lugar a través de la participación en prácticas culturales y en el intento de alcanzar las metas pragmáticas que en ellas se implican.

El reconocimiento de las prácticas culturales y demás aspectos sociales al interior de la matemática abre el panorama para que la modelación matemática, concebida como una actividad que trasciende la traducción entre dos dominios, pueda convertirse en una actividad útil para atender a los propósitos anteriormente mencionados en la formación de profesores. Para aproximarse a tales ideales, la modelación matemática debe comprenderse como una actividad que no se agota en la producción de representaciones matemáticas articuladas a la situación de estudio, sino que también reconoce otros aspectos de la naturaleza humana y del papel de la matemática en la sociedad.

Con base en lo anterior, en Villa-Ochoa (2013a) describí algunas comprensiones de la modelación matemática que se encuentran en la literatura, así mismo, mencioné que dichas comprensiones pueden implicar maneras de actuar en el aula de clase. En este documento me propongo ampliar los elementos allí expuestos y presentar y analizar dos situaciones que derivan de un proyecto de investigación que pretende observar las maneras como la modelación y la tecnología pueden integrase al aula de clase, de esa manera, espero que las reflexiones que aquí se presentan posibiliten en el lector miradas alternativas sobre la modelación matemática y sus posibilidades y limitaciones en el aula de clase.

Las situaciones

Conforme mencioné anteriormente, las situaciones que presentaré en este documento se desprenden de un estudio que se desarrolla con futuros profesores de matemáticas. El estado actual de las situaciones es fruto de continuos refinamientos y reflexión con diferentes miembros de la Red Colombiana de modelación en Educación Matemática; estas situaciones, al igual que otras, han estado expuestas a discusión en la sección de recursos del sitio web de la red (www.recomem.com.co), también han sido previamente discutidas con estudiantes y profesores de matemáticas en diferentes espacios en mi Universidad y otros eventos académicos internacionales (e.g. VIII CNMEM, VIII COVEM). Las situaciones, grosso modo, están estructuradas con dos intencionalidades, la primera es involucrar a los futuros profesores en experiencias en las cuales afronten algunos tópicos matemáticos a partir de los contextos implicados en las situaciones; y la segunda, tiene que ver con las construcción de reflexiones por los participantes a través de su propia experiencia en el seguimiento y ejecución de las tareas que estructuran la situación. Algunas cuestiones que orientan la consecución de este segundo propósito radican en que los participantes identifiquen los propósitos que puede tener la actividad, tanto para el tratamiento conceptual de algún tópico matemático como para la identificación de modos de hacer modelación matemática; seguidamente se somete a discusión las posibilidades y se reconocen las limitación que cada actividad podría presentar en el aula de clase. Finalmente se sugiere que el participante valore los posibles roles que tanto el profesor como el estudiante podrían seguir en este tipo de situaciones, así como los aspectos por los cuales la situación podría caracterizarse como modelación matemática o no.

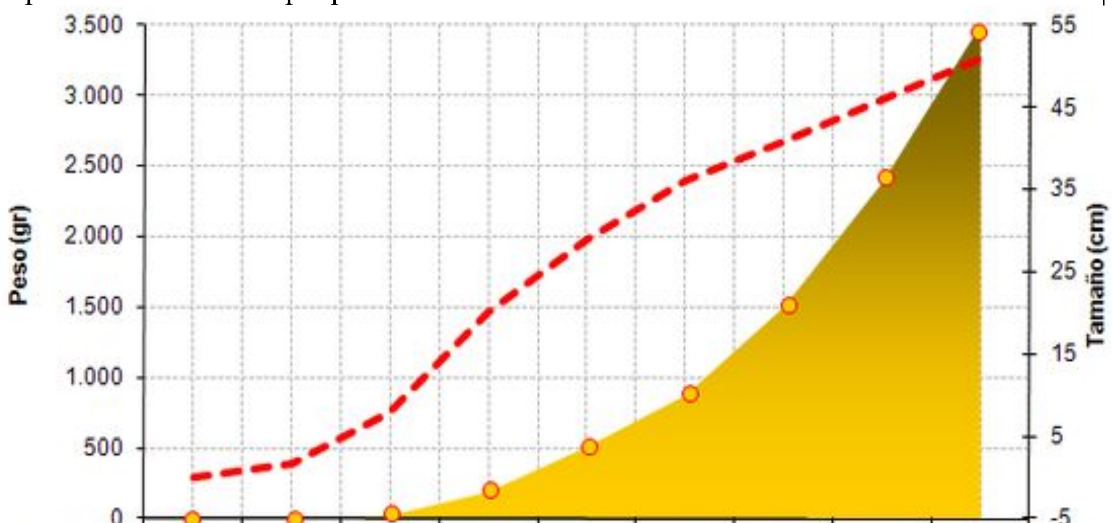
1. Situación: Análisis de modelos y el crecimiento fetal

La situación se presenta según el enunciado en el siguiente recuadro:

Durante el tiempo de gestación de un bebé es necesario llevar un control y monitoreo de su desarrollo a través de varias ecografías. Entre las características más observables se tiene la estimación del tamaño y, principalmente, el peso. Aunque no existen valores fijos que permitan prever el comportamiento del crecimiento de un feto, en medicina se usan estimaciones y modelos matemáticos que posibilitan a los médicos llevar el control en las maternas.

Momento uno: ¿Qué nos dice un modelo?

A continuación se presentan algunos de los modelos que suelen usarse para ilustrar información con respecto al tema. Obsérvelos, discútalos con sus compañeros y escriba la información que usted considera que puede encontrarse en dichos modelos.



Semanas	4	8	13	18	23	27	31	35	40
Peso (gr)	0	3	23	190	510	875	1.500	2.383	3.500
Tamaño (cm)	0,1	1,7	8	20	29	36	41	46	51

Ilustración 1. Evolución semanas del peso y tamaño del feto. Tomado de http://www.papaenapuros.com/evolucion-del-peso-del-feto-en-el-embarazo/

Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)	Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)
4	0	0	22	450	28
5	0	0,1	23	510	29
6	0	0,3	24	600	30
7	0	1,1	25	660	34
8	0	1,7	26	760	36
9	0	2,4	27	875	37
10	5	3,4	28	1.005	38
11	10	4,3	29	1.153	39
12	16	5,7	30	1.319	40
13	23	8	31	1.500	41
14	43	14	32	1.702	42
15	70	15	33	1.918	44
16	100	16	34	2.146	45
17	140	18	35	2.383	46
18	190	20	36	2.622	47
19	240	22	37	2.859	48
20	300	25	38	3.083	49
21	360	26	39	3.288	50
			40	3.500	51

Tabla 1. Tamaño y peso de un feto.
Tomado de http://www.papaenapuros.com/evolucion-del-peso-del-feto-en-el-embarazo/

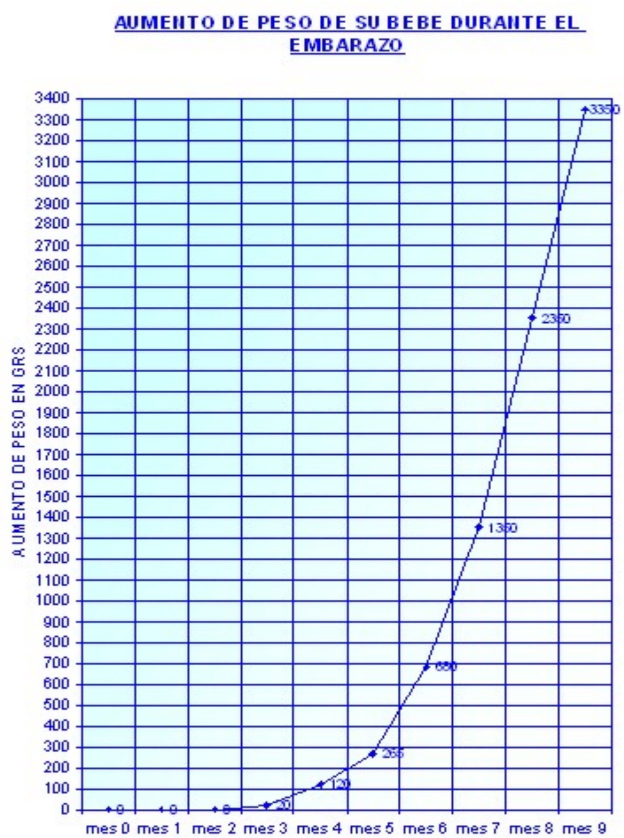


Ilustración 2. Peso al final de cada mes del embarazo;
http://www.portalesmedicos.com/publicaciones/articles/1177/6/

Mencione algunas preguntas que considere podrían responderse con la información proporcionada por los modelos. Menciona otras que consideres no podrían responderse con dicha información.

Momento dos: El fenómeno de estudio más allá de las matemáticas

Una vez identificada la información en los anteriores modelos, analiza una posible respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Se puede observar algún patrón de crecimiento fetal durante el curso de la gestación?
2. ¿Cuáles factores pueden influir o determinar el peso al nacer?
3. Existen etapas en el proceso de gestación ¿Cuáles podrían ser los intervalos en los cuales se caracterizan esas etapas. Cuáles criterios podrían definirlas y cuáles serían los pesos fetales promedio en tales etapas?
4. ¿Cómo cree que los matemáticos, biólogos, médicos han llegado a consolidar estos modelos matemáticos?

2. Situación: La matemática de los servicios públicos

El *primer momento* de esta situación se compone por la forma como en Villa-Ochoa (2007) he sugerido el desarrollo de la actividad. En ese sentido, se inicia con un diálogo con los participantes sobre los aspectos que ellos tienen, o deberían tener en cuenta, para tomar la decisión sobre cuál plan de telefonía fija o móvil deben elegir. Algunas variaciones en esta pregunta emergen cuando es otro el servicio público analizado (e.g. servicio de gas, acueducto, etc.)

Después de analizar el caso personal sobre la relación consumo y costo se invita a los estudiantes a suponer el rol de asesores de la comunidad y que, por tanto, deben orientar a los demás ciudadanos en una buena elección del plan de consumo. Esta situación sugiere la necesidad de trascender el tratamiento aritmético (personal) para construir representaciones gráfica y algebraica de funciones (en Villa-Ochoa, 2007, este tipo de situaciones, con algunas simplificaciones, puede llevar a producir funciones lineales o por tramos). Una vez construidas las representaciones gráfica y algebraica, se hacen los tratamientos algebraicos necesarios para encontrar las intersecciones y finalmente poder determinar los intervalos en los cuales las funciones costo reflejan el más económico.

Con el ánimo de ilustrar la necesidad de valorar el modelo se propone a los estudiantes considerar la "continuidad" de las cantidades allí involucradas y, por tanto, un análisis de esa característica en los modelos, esta situación generalmente conlleva a la reformulación de la función, en una función parte entera (escalonada) tal y como ha sido sugerido por Villa-Ochoa (2007).

El *segundo momento* de la situación consiste en cuestionar a los participantes con preguntas cómo ¿Qué tiene el fenómeno o situación estudiada que conlleva que ese [la función parte entera] sea el modelo?, ¿Qué dice el modelo de la situación?, ¿qué no dice el modelo de la situación?

Una vez identificada las características de la situación que conducen a este tipo de funciones, se pasa a un *tercer momento* en el cual los estudiantes deben buscar otras situaciones, con características semejantes, en las cuales el mismo tópico matemático [función parte entera], pueda constituirse como modelo matemático de los fenómenos en ellas implicados.

Una experiencia con futuros profesores

Las dos situaciones presentadas anteriormente han sido implementadas en algunos espacios con futuros profesores de matemáticas, entre ellos, grupos de estudiantes[2] de Práctica Docente y de un Semillero de Investigación adscrito a los programas de formación de profesores de matemáticas en la universidad donde laboro. Los grupos de estudiantes han sido heterogéneos en el sentido que se han conformado en ocasiones por estudiantes avanzados en su plan de estudios, pero en otras, con estudiantes iniciantes (estudiantes de primer año), intermedios (estudiantes de segundo y tercer año) y avanzados (estudiantes de cuarto y quinto año).

- *Aspectos generales de la experiencia relativos a la primera intencionalidad de las actividades:*

Conforme mencioné en Villa-Ochoa (2013b), si bien los estudiantes tuvieron diferentes aproximaciones al análisis de las gráficas de y las tablas asociadas al crecimiento fetal, también es cierto que ello no impidió que los estudiantes iniciantes cimentaran sus conocimientos para futuros estudios (e.g, cálculo diferencial). En relación con esta situación, en Villa-Ochoa (2013b) mostré que todos los estudiantes iniciaron el estudio de la situación con el reconocimiento de las cantidades que se implican tanto en los gráficos como en las tablas. Como consecuencia de ello, los futuros profesores tendieron a manifestar cierto desacuerdo con la “sintaxis” de los gráficos pues, según ellos, rompe con las reglas convencionalmente establecidas en las clases de matemáticas; a través de las discusiones entre los distintos participantes, los estudiantes lograron observar que socialmente, los modelos matemáticos pueden obedecer a otras presentaciones y reglas derivadas de la demandas que las profesiones hacen de ellos.

Conforme Soares y Javaroni (2013) y Soares (2012) han resaltado, el análisis de modelos puede constituirse en una estrategia pedagógica que permite introducir nuevos conceptos matemáticos en estudiantes que previamente no los han estudiado. Sin embargo, como Villa-Ochoa (2013b) apunta, no solo los estudiantes quienes no han estudiado algunos tópicos matemáticos se aproximan a nuevos conceptos, sino que también los estudiantes quienes ya lo han cursado, adquieren mayores significados y nuevas comprensiones de los tópicos matemáticos implicados en la situación. Mayores evidencias de este hecho pudieron construirse en la situación relacionadas con las matemáticas en la cuenta de servicio la cual relato a continuación.

Para el desarrollo de la situación 2, previamente se les había solicitado a los estudiantes que llevaran consigo la factura de servicios públicos, los estudiantes se dispusieron a trabajar en equipo y a reconocer los diferentes valores y aspectos que se facturaban en ellos; en esta parte de la actividad los estudiantes continuamente estuvieron preguntando por los significados de algunos valores facturados, y sobre la diferencia entre los valores entre las facturas de los diferentes miembros, algunas conjeturas de las posibles causas de estas diferencias fueron emergiendo y se hizo necesario consultar en fuentes especializadas (leyes, decretos que regulan

[2] En este documento hago uso de las denominaciones “futuros profesores de matemáticas” y “estudiantes” para referirme al mismo colectivo de personas; de esa manera, espero facilitar la lectura del documento.

los servicios públicos) para salir de dudas. La producción de los modelos algebraicos para los estudiantes iniciantes estuvo basada en la identificación de regularidades y patrones numéricos y en entender el significado de las variables. Recurrir a la construcción de tabla de valores fue de fundamental para alcanzar producir tanto los modelos para la función (lineales y por tramos) para las funciones parte entera. Para los estudiantes quienes ya había cursado las asignaturas de precálculo y cálculo, los modelos fueron construidos de manera más directa.

En el caso de los estudiantes no iniciantes, se observó cierto grado de sorpresa por poder ver la presencia de este concepto en una situación propia del contexto. Declaraciones como las que presento a continuación se convierten en muestra de este hecho[3]:

> Diana: "*… que bien que por fin veo dónde se aplica eso, yo lo vi en introcálculo [asignatura precálculo] pero no lo vimos con aplicaciones, yo creo que mis estudiantes así lo podrán entender…*"
>
> Santiago: "*nosotros habíamos visto modelación en cálculo, pero eran ejercicios de esos que hay al final del capítulo… no me había imaginado así esa función* [refiriéndose a la función parte entera]"

Posterior a la producción de los modelos se pasó al momento dos descrito anteriormente. La intención de esta parte de la situación, era que los estudiantes pudieran reconocer los aspectos que en ella hace que la función sea una *parte entera* y no una *lineal o por tramos* (lineales y afines).

Los estudiantes se comprometieron con esta parte de la situación y trabajaron en equipos. Algunas de las respuestas de los estudiantes fueron:

> "*profe, eso salió fue de ver que no cobran los KWH por fracción sino completo"*
>
> *"porque los pedacitos [fracciones] de KWH no los cobran proporcional"*

Se invitó a los estudiantes a que continuaran con el reconocimiento de funciones que se pudieran identificar en la misma factura de servicios (telefonía, acueducto, alcantarillado) y que argumentaran porque las funciones que pudieran surgir de allí son o no funciones por partes (o parte entera). Los estudiantes lograron concluir que todas esas funciones tenían "el mismo comportamiento de la función costo en energía" por que "también se cobra la unidad de medida completa y no la fracción". Finalmente se le pidió a los estudiantes que identificaran fuera de la factura de servicios públicos otras situaciones en las cuales se podrían presentar funciones *parte entera*. En esta momento de la actividad emergieron contextos como: El pago del servicio de parqueadero, el costo de los planes de telefonía celular, el valor de una carrera de taxi, entre otros.

La experiencia vivida con estos futuros profesores a través de esta manera de hacer modelación, y en particular, afrontar los momentos dos y tres de la situación le permitieron a los estudiantes reconocer ciertas características comunes entre los diferentes contextos en los cuales la función *parte entera* puede hacer presencia, de esa experiencia se logró asociar la función como una expresión que modela a cualquier situación como las descritas por ellos mismos al finalizar esta experiencia. En palabras de algunos estudiantes "*una función en la que una*

[3] Los nombres usados en este documento corresponden a seudónimos

variable depende de otra a la cual se le asignan los mismos valores por intervalos, y no por fracción".

- *Algunas reflexiones construidas por los participantes relativas a la segunda intencionalidad de las actividades:*

Durante el desarrollo de las situaciones de modelación por parte de los futuros profesores de matemática se identificaron los diferentes episodios en los cuales ellos mismos construyeron ciertos conocimientos, no solo matemáticos sino también propios del contexto del cual emerge la situación. Este tipo de episodios sirvió para observar algunas características de la actividad de modelación en la cual siempre ha de estar en relación con otras áreas, disciplinas o contextos, y en consecuencia, los lenguajes utilizados no siempre han de ser solo los de la matemática. En ambas situaciones los participantes se vieron en la necesidad de indagar por términos como cigoto, embrión, hiperplasia celular, hipertrofia celular para el caso de la biología y por términos como KWH, conectividad, transporte de energía, ajuste, comercialización, todos ellos propios del contexto energético.

Tanto los conocimientos matemáticos como los extramatemáticos fueron producidos ante la necesidad de consultar sobre otros tópicos de los fenómenos de crecimiento fetal o el consumo de energía; ello sirvió de evidencia para observar la necesidad de interrelacionar conocimientos de otras áreas y reconocer que a través de la modelación otras disciplinas pueden entrar en juego dinamizando el trabajo matemático al interior del aula de clase. Estas reflexiones son consistente con las evidencias presentadas por Berrío (2012), Rendón & Esteban (2013) y Obando et al. (2013) quienes sugieren la importancia de colocar en diálogo los saberes matemáticos y no matemáticos (de otras áreas) intentando superar ciertas miradas "utilitaristas" de la matemática sobre el contexto, es decir, miradas en las cuales los contextos son asumidos como puntos de partida para el estudio de la matemática, pero posteriormente se omiten en el desarrollo de la actividad de la modelación.

Conforme argumenté en Villa-Ochoa (2013b) en la situación de Análisis de Modelos interviene espontáneamente el uso de tecnologías como una manera "heurística" para estudiar el fenómeno, así como buscar evidencia que permita validar o refutar las conjeturas que van surgiendo en el proceso estudio del fenómeno; como evidencia de este hecho, un conjunto de estudiantes transcribió los valores presentados en la Tabla 1 en el software Excel, y con base en los datos realizó un ajuste de regresión llegando a descartar la conjetura de que el comportamiento del peso con respecto al tiempo correspondía a una función cuadrática, del mismo modo, otro conjunto de estudiantes insertó el gráfico de dicho peso (Ilustración 2) en la ventana de gráfico del Geogebra, y mediante la manipulación de los parámetros de la función pudo construir una amplia familia de funciones cuadráticas de las cuales ninguna logró superponerse a dicho gráfico. Este tipo de experiencias vividas por los participantes, permitieron observar que la tecnología tiene diversos usos al interior del aula de clase, y que al articularse con procesos de modelación permite (re)organizar los modos de producción de conocimiento matemático. Las experiencias desarrolladas por futuros profesores permiten observar cómo las tecnologías participan activamente del desarrolla de actividades relacionadas con análisis de modelos (Soares & Javaroni, 2013)

Consideraciones finales

Este documento pretende constituirse en una orientación para el taller (cuya denominación coincide con el nombre de este artículo) que se desarrollará en el I CEMACYC. Se espera con los participantes, investigadores, profesores en formación y en ejercicio profundizar en las reflexiones y críticas al uso de modelos y la modelación matemática al interior de las matemáticas escolares y en la formación de profesores de matemáticas.

De manera particular, se espera que los participantes logren observar el doble rol que tiene este conjunto de situaciones, es decir, para conjugar diferentes conceptos matemáticos que previamente han sido desarrollados, o incluso, para introducir temáticas sin que con antelación hayan sido estudiadas en clase. Ambos tipos de situación (construcción, validación de modelos y análisis de modelos) pueden constituirse en herramientas para estudiantes que hayan o no estudiado las temáticas puedan reconocer aspectos conceptuales que cimenten un posterior estudio de las mismas, o reconocer otros significados de las temáticas; en otras palabras, este tipo se situaciones, más allá de una característica meramente utilitaria, se convierte en *artefactos culturales* (Bonotto, 2007) sobre los cuales se produce conocimiento matemático.

El uso de este tipo de situaciones en las cuales interviene la construcción o análisis de modelos demanda implicaciones para la formación de futuros profesores de matemáticas y para la modelación matemática como un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática; estas implicaciones han de estar relacionadas con:

- El reconocimiento del contexto o fenómeno como medio en la producción de conocimiento tanto matemático como de otras disciplinas.
- Involucrar a los futuros profesores en el reconocimiento de los roles que pueden tener los modelos matemáticos en la sociedad y la cultura.
- Discutir que la naturaleza de la construcción, validación y análisis de modelos es diversa y que por tanto no se deja “modelar” ni “encapsular” en representaciones y ciclos de la modelación; de esa manera se espera construir visiones de la modelación matemática que trascienden usos instruccionales de este tipo de representaciones y ciclos.
- Reconocer las limitaciones que este tipo de siuaciones puede presentar en la producción de conocimiento matemático escolar.

Bibliografía

Berrío, M. (2012). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café.* (Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Tesis de maestría no publicada), Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Bonotto, C. (2007). How to replace word problem with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and application in Mathematics Educations. The 14th ICMI Study* (pp. 185-192). New York: Springer.

Javaroni, S., & Soares, D. (2012). Modelagem matemática e Análise de modelos na Educaçao Matemática. *Acta Scientiae, 14*(2), 260-275.

Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 175-200. doi: 10.1007/BF00143931

Obando, J. D., Sánchez, J. F., Muñoz, L. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). El reconocimiento de variables en el contexto cafetero y su constitución como modelos matemáticos In G. Obando (Ed.), *Matemática Educativa-13° Encuentro Colombiano* (1 ed., Vol. 1, pp. 453-459). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Radford, L. (2002). The Historical Origins of Algebraic Thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, pp. 13-36). Netherlands: Springer.

Rendón, P. & Esteban, P. (2013). *La modelación matemática en ingeniería de diseño.* Paper presented at the I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana .

Soares, D. (2012). *Uma abordagem pedagógica baseada na análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* (Doctorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-Brasil.

Soares, D., & Javaroni, S. (2013). Análise de Modelos: possibilidades de trabalho como Modelos matemáticas em Sala de aula. In M. C. Borba & A. Chiari (Eds.), *Tecnologias Digitais e Educação Matemática* (pp. 195-219). São Paulo: Livraria da Física.

Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *Tecno Lógicas, 19*, 63-86.

Villa-Ochoa, J. A. (2013a). *Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase.* Paper presented at the VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática Santa Maria-RS, Brasil.

Villa-Ochoa, J. A. (2013b). *Análisis de modelos por los futuros profesores de matemáticas.* Paper presented at the VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas-RS, Brasil.

Comunicaciones

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

A comunidade quilombola do Curiaú na perspectiva da etnomatemática

José Roberto Linhares de **Mattos**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
jrlinhares@vm.uff.br

Elma Daniela Bezerra **Lima**
PPGEA/UFRRJ
Brasil
elma.lima@ifap.edu.br

Resumo

Este trabalho é parte de uma pesquisa desenvolvida em uma comunidade quilombola na cidade de Macapá, no Estado do Amapá, no Brasil. Nosso objetivo é mostrar como o processo de produção e comercialização de farinha pode se relacionar com conteúdos ministrados durante as aulas de matemática. Procuramos descrever o modo como o professor de matemática pode ministrar suas aulas, buscando aproximar a escola do dia a dia dos moradores da comunidade, fazendo com que os alunos participem de atividades desenvolvidas na escola que se fundamentam nas concepções da Etnomatemática. Especificamente, mostramos uma atividade, realizada com os alunos do 9º ano do ensino fundamental da escola da comunidade, que envolveu todo o processo de produção e comercialização da farinha produzida pelos moradores da comunidade. A metodologia utilizada foi a observacional e relatos do professor de matemática da escola, em conversas informais sobre o processo de ensino e aprendizagem nas suas atividades.

Palavras chave: etnomatemática, comunidade quilombola, Curiaú, ensino de matemática, produção e comercialização da farinha.

Introdução

Neste trabalho apresentamos a etnomatemática presente no processo de produção e comercialização de farinha, que é uma atividade laboral dos moradores da comunidade quilombola do Curiaú. Para isso, descrevemos uma atividade escolar que envolveu todo este processo. A atividade foi desenvolvida no decorrer das aulas de matemática da escola de ensino fundamental localizada dentro da comunidade quilombola do Curiaú, da qual participaram os alunos do 9º ano, desta escola.

O objetivo foi mostrar como o processo de produção e comercialização da farinha pode ser relacionado aos conteúdos ministrado nas aulas de matemática. O trabalho encontra-se estruturado em cinco momentos. No primeiro momento, apresentamos as Comunidades Quilombolas do Brasil. No segundo momento, descrevemos a Comunidade Quilombola do Curiaú. No terceiro momento apresentamos a escola dessa comunidade quilombola. No quarto momento contamos como ocorre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola do Curiaú. E no quinto momento mostramos o processo de produção de farinha.

Finalmente, apresentamos as nossas considerações finais, onde mostramos a relevância desse trabalho, que acreditamos que possa contribuir para que se entendam as relações existentes entre a atividade desenvolvida pelos moradores dessa comunidade e a escola, e associando essa relação com o ensino de Matemática e o modo como o professor de matemática dessa escola consegue planejar e ministrar os conteúdos das suas aulas, de acordo com o que está proposto nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana, conforme o que é estabelecido na Lei 10.639/03.

As comunidades quilombolas do Brasil

Estima-se que entre os anos de 1550 e 1850 tenham chegado ao Brasil quatro milhões de negros, trazidos a força do continente africano, em especial das regiões onde hoje estão situadas: Guiné, Benin, Costa do Marfim, Mali, Congo, Angola e Moçambique. (“História: a exploração dos africanos”, 2013, p.310).

Os negros chegavam ao Brasil, amontoados nos porões dos navios negreiros, muitos morriam durante a viagem, e os que sobreviviam eram vendidos como escravos para trabalharem na agricultura e na mineração. Durante mais de 300 anos a mão de obra escrava foi a principal força de trabalho no país e a base de toda a atividade econômica.

A formação de quilombos, que são comunidades formadas por escravos foragidos que tentavam sobreviver fora da sociedade colonial, no Brasil, foi um movimento de resistência à escravidão. No século XX quando surgiram os movimentos e entidades para defender os direitos da população negra, o Quilombo dos Palmares, fundado por seu líder Zumbi, surge como referência histórica a esses movimentos.

No Brasil, ainda sobrevivem algumas comunidades negras que foram originadas de quilombos, hoje essas comunidades são denominadas de comunidades quilombolas. Essas comunidades quilombolas desde o ano de 1970 são identificadas, em todos os estados brasileiros, pela Fundação Palmares, ligada ao Ministério da Cultura. A maior parte dessas comunidades encontra-se localizadas nas regiões Norte e Nordeste (Sociedade: Quilombo, 2013, p.120).

A Constituição Brasileira de 1988 reconhece o direito de posse da terra dessas populações negras, oriundas dos quilombos, este processo de reconhecimento teve início no ano de 1995. A maioria dessas comunidades é formada por dezenas de famílias, e algumas reúnem milhares de habitantes, principalmente nos estados do Maranhão e da Bahia. Geralmente essas comunidades estão localizadas em locais isolados, como são remanescentes de quilombos essas comunidades tem um modo de vida em que predominam a posse coletiva da terra, a agricultura de subsistência e a criação de animais.

Desde o ano de 2003, que o critério utilizado para o reconhecimento de uma comunidade quilombola passou a ser o da autoidentificação, dispensando-se a apresentação de documentos que comprovem a ascendência de antigos escravos e a posse ininterrupta sobre o território. Porém, os problemas relacionados à demarcação das terras quilombolas acontecem em diversos estados, onde os moradores dessas comunidades muitas vezes entram em conflito com fazendeiros e proprietários de terras desses locais.

A comunidade quilombola do Curiaú

Em Morais (2011) encontramos que a comunidade do Curiaú recebeu oficialmente o título de Comunidade Quilombola, no dia 03 de novembro de 1999, conferido pela Fundação Palmares, tornando-se a única comunidade quilombola reconhecida no estado do Amapá.

Para Morais (2009) a contribuição africana está presente na sociedade amapaense desde o período colonial, quando vários africanos vieram para o Amapá, misturando-se e adaptando-se aos padrões culturais existentes, construindo e mantendo uma cultura até hoje manifestada nas festas religiosas, na música, na culinária, na linguagem e outras práticas artísticas como, por exemplo, nas manifestações de: marabaixo, batuque, tambor, candomblé, capoeira, ladainhas, procissões, folias e tradições dos antepassados da comunidade negra que fazem parte da formação cultural do Amapá.

Segundo este autor, foi com a organização dos quilombos em locais de difícil acesso, que centenas de negros viveram muitos anos como viviam livres na África. E assim como aconteceu em todo território brasileiro, um grupo de negros foragidos, da região de Belém, no ano de 1749, fundaram um quilombo às margens do rio Anauerapucu. No período entre os anos de 1750 a 1782, aumentou muito a quantidade de escravos trazidos para a região. Negros que não aceitaram a escravidão rebelaram-se e fugiram formando os quilombos de Maruanum, Igarapé do Lago, Ambé, Cunani, Curiaú e Goiabal.

Morais (2011) nos informa que a origem do nome Curiaú está associada a uma das finalidades da área, que é a criação de gado (cria) e o mugido das vacas (mu), resultando no termo *criamu*, que posteriormente passou a ser denominada Criau e atualmente se chama Curiaú. Remanescente do antigo Quilombo Afro-brasileiro, a comunidade do Curiaú composta predominantemente por Afrodescendentes, mantém preservados seus costumes e tradições culturais, despertando o interesse e atraindo pessoas para prestigiarem seus festejos aos santos: São Sebastião, São Lazaro, Santa Maria, São Joaquim e outros, nos meses de janeiro, fevereiro, maio e agosto, respectivamente, preservando a integridade de seus valores e raízes etnoculturais.

Ainda em Morais (2011) encontramos que o principal produto cultivado é a mandioca, para produção artesanal de farinha, e cultivam também hortaliças (alface, cebolinha, coentro, repolho, melancia, maracujá, limão, laranja, abacate e outros) em pequena escala para o consumo local, cultivadas em pequenas propriedades. A comercialização do açaí é uma atividade realizada na comunidade, o açaí e a farinha também são componentes que fazem parte da alimentação diária da população local.

A escola da comunidade quilombola do Curiaú

A pesquisa foi realizada durante a observação de uma atividade escolar, desenvolvida pelo professor de matemática, de uma escola pública estadual em Macapá-AP, localizada na comunidade do Curiaú. A escola foi fundada no ano de 1943, mas a mudança para o prédio onde funciona atualmente se deu no ano de 1992.

A escola da comunidade quilombola do Curiaú oferece, aos filhos dos moradores da comunidade, ensino fundamental do 1º ao 9º ano, pelo período da manhã no horário de 07:30 às 12:00 e no período da tarde no horário de 13:30 às 18:00. A mesma, também possui uma turma da 3ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos – EJA no horário de 13:30 às 18:00.

Esta escola, nas suas dependências, possui: diretoria, secretaria, sala dos professores, banheiros masculino e feminino, ginásio, cozinha, pátio, salas de aula e biblioteca.

A escola atende um total de 268 alunos que moram na comunidade ou no entorno da mesma. Quando os alunos concluem o ensino fundamental, eles são matriculados nas escolas do centro da cidade. A escola conta com recursos oriundos do governo estadual que ajuda os estudantes, disponibilizando o transporte escolar fluvial e terrestre (barco e ônibus) gratuitamente para todos os alunos matriculados na escola, de acordo com a relação encaminhada pela diretora da escola a Secretaria de Educação Estadual.

Os professores e funcionários da escola que moram na própria comunidade são denominados de “filhos da comunidade” e os demais professores e os outros funcionários moram em bairros bem próximos ao Curiaú como: Jardins, Jardim Felicidade, Açaí, Infraero I e II, Brasil Novo, Boné Azul, Pedrinhas, Goiabal e Renascer.

Os professores da escola buscam contextualizar suas aulas com as atividades do dia a dia dos moradores da comunidade. Esses moradores, que são pais de alunos, contribuem com a merenda escolar fazendo doações de alimentos cultivados nas próprias propriedades. Esses pais agricultores doam frutas, verduras, hortaliças, temperos e animais de pequeno porte para ajudar no preparo das refeições diárias que seus filhos fazem na escola.

Os conteúdos das aulas estão fundamentados na Lei 10.639/03, que altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, determinando que no currículo oficial da rede de ensino será obrigatória a inclusão dos conteúdos programáticos referentes ao estudo da temática "História e Cultura Afro-Brasileira", a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política, pertinentes à História do Brasil, que serão ministrados no âmbito de todo currículo escolar.

A escola desenvolve diversos projetos que procuram envolver os alunos e propiciar que os mesmos permaneçam mais tempo na escola, entre esses projetos destacamos os principais que são: o *Programa Mais Educação*, *Reforço Escolar*, *Saberes Orais*, *Música e Percussão*, *Aulas de Francês*, *Projeto de Artes*, *Tranças de Cabelo* e o *Projeto Curiaú Mostra a Tua Cara*. Todos esses projetos têm como eixo central o resgate da cultura dos valores afrodescendentes, a valorização do negro e integração da cultura Africana no cotidiano da comunidade e da escola.

Ensino e aprendizagem de matemática na escola do Curiaú

Brasil (1997) quando se refere às ações educativas de combate ao racismo e discriminações diz que os sistemas de ensino e os estabelecimentos de Educação Básica, nos níveis de Educação

Infantil, Educação Fundamental, Educação Média, Educação de Jovens e Adultos e Educação Superior precisam incluir nos conteúdos de disciplinas e em atividades curriculares "conhecimentos de matriz africana e/ou que dizem respeito à população negra" (Brasil, 1997, p. 24). Por exemplo: em Matemática, contribuições de raiz africana, identificadas e descritas pela Etnomatemática.

Para Costa (2009) as ideias, conhecimentos e fazeres relacionados à classificação, inferência, ordenação, explicação, modelação, contagem, medição e localização espacial e temporal, se originam, vivem e se renovam a partir das necessidades que um grupo de pessoas sente em relação a sua sobrevivência e transcendência, este fato sempre ocorre num contexto histórico e cultural indissociável da linguagem utilizada pelo grupo, dos códigos de comportamento adotados, das práticas sociais, dos valores, dos mitos, dos ritos, dos conhecimentos modificados ou apreendidos por meio da dinâmica cultural do encontro, das relações de poder que se estabelecem entre o grupo e a natureza, entre as pessoas do próprio grupo e entre o grupo e outros grupos, da arte e da religiosidade do próprio grupo, bem como de outros conhecimentos e manifestações culturais compartilhados coletivamente.

Trindade (2006), nos apresenta algumas propostas didático-pedagógicas em Matemática que podem ser trabalhadas em sintonia com os eixos norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, no que se refere à valorização da diversidade étnico-cultural, com a intenção de propiciar aos discentes a oportunidade de conhecerem, reconhecerem e ressaltarem os valores civilizatórios afro-brasileiros interligando matemática, cultura, educação e sociedade.

O professor de matemática, da escola do Curiaú, nos informou que para o planejamento das aulas de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, ele relaciona os conteúdos de Matemática com as manifestações culturais africanas e afro-brasileiras usando informações sobre países africanos pesquisados pelos próprios alunos na internet e em livros disponíveis na biblioteca da escola. Ao desenvolver esses conteúdos, ele também utiliza valores e números da própria comunidade, como por exemplo: dados sobre a produção e comercialização de alimentos, cultivados por moradores da comunidade, no mercado e nas feiras do centro da cidade. Ele nos explicou que os moradores da comunidade plantam e comercializam hortaliças, frutas, produzem tucupi e farinha d'água, e ainda criam animais de pequeno porte para venda.

O processo de produção de farinha

Brasil (1997) ao abordar a Pluralidade Cultural afirma que a construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático, intuitivo e cultural, aproximar o saber escolar do universo cultural em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem. Segundo D'Ambrósio:

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à cultura. (D'Ambrósio, 2011, p. 22).

Por outro lado, ao dar importância a esse saber, a escola contribui para a superação do preconceito de que Matemática é um conhecimento produzido exclusivamente por determinados grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas.

Nesse trabalho, a História da Matemática, bem como os estudos da Etnomatemática, são importantes para explicitar a dinâmica da produção desse conhecimento, histórica e socialmente.

Frankenstein & Powell (1997) e Knijnik (1996) afirmam que a Etnomatemática reconhece que todas as culturas produziram e produzem conhecimentos matemáticos, consideram relevante a inserção desses conhecimentos no currículo escolar para que possam ser contemplados e compreendidos em sua diversidade, em conformidade com a visão da Pluralidade Cultural, apontada pelos PCN.

De acordo com Mattos & Brito:

> O trabalho do campo é repleto de saber matemático, dando-nos a oportunidade de atravessarmos as fronteiras da sala de aula, para conhecermos a realidade do nosso aluno e, assim, compreendermos as dificuldades que eles enfrentam na escola, quando da aplicação dos conteúdos distanciados de seu contexto. (Mattos & Brito, 2012, pp. 969-970).

Brasil (1997) sugere que cada escola desenvolva projetos envolvendo questões relacionadas às relações étnico-raciais, diversidade racial e pluralidade cultural, consideradas de relevância para a comunidade. Temas relacionados à educação e diversidade cultural, por exemplo, são contextos privilegiados para o desenvolvimento de conteúdos que estabelecem uma relação histórico-cultural com o senso numérico, registros do processo primitivo de contagem, medida, porcentagem, sistema monetário, legitimando as origens africanas do conhecimento, ressaltando os valores civilizatórios afro-brasileiros.

De acordo com o recomendado em Brasil (1997), na escola do Curiaú, durante o planejamento das aulas de Matemática, os professores buscam relacionar os conteúdos com as manifestações culturais africanas e afro-brasileiras. Por exemplo, os professores trabalham os conteúdos de matemática em sala de aula utilizando informações de países africanos, como população, extensão territorial, densidade demográfica, bandeiras etc. Esses dados são pesquisados em livros e atlas, disponíveis na biblioteca da escola.

O professor de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, ao desenvolver os conteúdos utiliza valores e números da própria comunidade, como a quantidade de farinha produzida e comercializada no mercado e nas feiras do centro da cidade, os custos dessa produção e o lucro obtido na venda. Esse processo é estendido para a produção e venda do tucupi, para a colheita e venda do açaí, e de outras frutas como acerola, abacaxi, laranja, limão, manga, melancia, maracujá, muruci e taperebá. Entre as hortaliças eles plantam e comercializam alface, repolho, cebolinha, cheiro verde, quiabo, e a própria mandioca que é a raiz de onde eles extraem o tucupi e a farinha d’água.

Figura 1. a) Casa de farinha, b) Tipiti e forno, c) Catitu.
Fonte: Acervo Fotográfico dos pesquisadores.

Durante as aulas de matemática o professor do 9º ano do Ensino Fundamental, levou seus alunos para conhecerem, observarem e participarem de todo o processo da produção de farinha em uma "Casa de Farinha" (local onde se processa a mandioca e que consiste em uma barraca coberta na sua maioria com palha de inajá, de chão batido, sem paredes, onde estão o forno e os demais utensílios necessários para o processamento da mandioca. Normalmente, localiza-se próximo aos roçados e cursos d'água, porém, hoje pode também estar localizada às proximidades das residências pela facilidade para se utilizar energia elétrica) de propriedade de um dos moradores da comunidade do Curiaú (ver figura 1.a).

A atividade começou às cinco horas da manhã, horário em que é colhida a mandioca nas plantações, os alunos acompanharam tudo de perto registrando em seus cadernos anotações referentes às informações coletadas durante a atividade, informações sobre os custos de produção, a quantidade de mandioca colhida, o total de quilos de farinha produzida a cada fornada, as despesas com o transporte e embalagem, valor de venda e o lucro obtido ao final.

Segundo relato do professor de matemática, os próprios alunos concluíram que o valor final de comercialização da farinha, que é R$ 10,00 (dez reais) o quilo, é muito barato se levarmos em consideração todo o trabalho e desgaste físico, pois a cada fornada são obtidos no máximo 20 quilos, e durante o processo em que a farinha é torrada no forno (tacho de latão, redondo, onde é torrada a mandioca para fazer os diversos tipos de farinha) os trabalhadores se revezam porque não pode parar de mexer, pois a farinha pode queimar ou embolar.

Os alunos também aprenderam que após descascarem a mandioca, os produtores a ralam em uma máquina denominada de "catitu" (ver figura 1.c) que é uma peça cilíndrica, em madeira, ornada com serrilhas de aço no sentido longitudinal, utilizado para ralar (cevar) a mandioca, e que para extrair o "tucupi" (sumo de coloração amarelo intenso extraído da mandioca descascada, ralada e esprimida,) eles utilizam o "tipiti" (ver figura 1.b) que é um objeto de forma cilíndrica, alongada, confeccionado com talas de guarumã ou jacitara entrelaçadas, dotado de elasticidade, usado para espremer a massa da mandioca, para a retirada do tucupi.

Ao final do trabalho os alunos produziram redações e questionários que geraram tabelas e gráficos sobre todo o processo de produção e comercialização da farinha, registrando tudo o que foi desenvolvido, compreendido e aprendido durante essa atividade.

Considerações finais

A realização desse trabalho permitiu verificarmos que a Etnomatemática presente no processo de produção da Comunidade do Curiaú pode ser relacionada aos conteúdos das aulas de Matemática na escola da Comunidade, produzindo um saber que procura aplicabilidade na sua forma de conhecimento estabelecida na parceria com os trabalhadores que produzem e vendem a farinha, comercializada por eles, contribuindo substancialmente para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Percebemos que o professor de Matemática desta escola tem consciência da importância das contribuições emergentes da cultura dos povos de origem africana, de acordo com o que está proposto na Lei Federal 10.639/03. E que as diretrizes curriculares emanadas desta lei, possibilitam aos professores de Matemática, abordagens históricas, interculturais, que ampliam o foco do currículo escolar brasileiro para a diversidade cultural, marcada por uma origem africana, cujas raízes se encontram no período colonial que produziu as heranças étnicas e culturais.

Referências bibliográficas

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2003). *Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003*. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 10 jan.

Costa, W. (2009). *As histórias e culturas indígenas e as afro-brasileiras nas aulas de matemática*. Belo Horizonte: UFMG, v. 25, p. 175-197.

D'Ambrósio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Frankenstein, M., Powell, A. (1997). *Ethnomathematics: challenging eurocentrism in mathematics education.* Albany: State University of New York Press.

História: a exploração dos africanos. (2013). *Almanaque Abril 2013*, 12,310.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência: educação matemática e legitimidade cultural.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Mattos, J. R. L. & Brito, M. L. B. (2012). Agentes rurais e suas práticas profissionais: elo entre matemática e etnomatemática. *Ciência & Educação*, 18(4), 965-980.

Morais, P. D. (2009). *História do Amapá – O passado é o espelho do presente.* Macapá: JM.

Morais, P. D. (2011). *Amapá em Perspectivas – Municípios do Amapá.* Macapá: JM.

Sociedade: Quilombo. (2013). *Almanaque Abril 2013*, 5,120.

Trindade, A. (2006). *Em busca da cidadania plena.* Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho.

A PRÁTICA DOCENTE E A FORMAÇÃO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: INVESTIGANDO CONEXÕES POSSIVEIS

Sonner **Arfux** de figueiredo
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul/Universidade Bandeirante Anhanguera
Brasil
sarfux@uems.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Bandeirante Anhanguera
Brasil
nielce.lobo@gmail.com

Resumo

Apresentamos parte de uma metodologia de formação inicial de professor de matemática, que abordou jogos na proposta formativa para integração da Prática Docente à Teoria. Proposta construída a partir dos primeiros resultados de uma pesquisa em andamento, cujo objetivo é investigar a implementação da Prática como Componente Curricular. Com a metodologia *Design Based Research*, permite ajustes, no processo formativo e investigativo. A pesquisa qualitativa fundamenta-se nos conceitos do conhecimento profissional de Shulman, nos fundamentos da Práxis segundo Vásquez. Estruturamos em três fases: documental, construção e aplicação da proposta e análise. Analisamos um episódio, na perspectiva de Shulman, as conclusões parciais evidenciam o recurso de jogo relevante para integrar a Pratica como Componente Curricular, num curso de Matemática, entretanto enfatizamos que conhecimento pedagógico do conteúdo compreende um tipo de conhecimento importante na definição de um corpo de conhecimentos profissionais e auxilia na estruturação das práticas pedagógicas como componentes curriculares na formação.

Palavras chave: Prática como Componente Curricular (PCC), Formação Inicial de Professores, Licenciatura em Matemática, Ensino de Trigonometria.

Introdução

Este artigo relata parte de uma proposta de formação inicial do professor de Matemática, para integrar as atividades práticas a um componente curricular, para nossa investigação nos subsidiamos nas resoluções que orientam as reformulações dos Projetos Pedagógicas dos Cursos de Licenciatura em Matemática, as quais ampliam a visão da prática para além do estágio nos vários modos de fazer Prática, exigência que acompanha a Resolução do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2002) inspirada no Parecer do mesmo conselho, (BRASIL, 2001), que determina a existência de uma carga horária de no mínimo 400 horas de Prática integrada aos Componentes Curriculares (PCC), esta deve ser vivenciada ao longo do curso de licenciatura, conforme determina o parágrafo I do referido parecer e estão incluídas nas disciplinas da Área de Formação Básica, especialmente se pensarmos que esta prática deve permear as disciplinas do primeiro ao último ano de um curso de Licenciatura em Matemática.

O embasamento teórico para a pesquisa, no tocante à formação, vem dos estudos de Shulman (1987) sobre o conhecimento profissional docente e, mais especificamente de Ball, Thames & Phelps (2008) sobre os conhecimentos para o ensino de matemática, além disso, nos fundamentamos no conceito de Práxis discutida por Vásquez (1986). Pesquisadores como Shulman (1987) e Ball, Thames, & Phelps (2008), nos dão indicações a partir de suas investigações sobre como contemplar na formação inicial a construção do conhecimento profissional docente em todas as suas dimensões, e Vásquez nos amplia a visão dicotômica entre a teoria e prática. Não obstante essas diferenças, a práxis é, definitivamente, teórico-prático, a prática amplia horizontes teóricos sem que se reconheça sua origem. É certo que existem diferenças específicas ou autonomia entre teoria e prática, a prática não obedece diretamente e indiretamente às exigências da teoria, mas sim suas próprias contradições, e que somente em ultima estância, ou seja, depois de um desenvolvimento histórico, a teoria responde à prática e é fonte desta.

Apresentamos a análise e discussão da Prática em uma das intervenções junto ao conteúdo arcos e ângulos relacionado a trigonometria na circunferência, que incluiu um dos tipos de atividades com materiais concretos, utilizados em todo o processo formativo tais como: softwares, material reciclado, jogos, etc., as formas que consideramos mais úteis de representações, ilustrações, explicações e demonstrações, do conteúdo matemático.

Um aspecto a destacar é que na proposta o conhecimento pedagógico do conteúdo distingue um corpo de conhecimentos típico do professor para o ensino, por corporificar a combinação entre o conteúdo da matéria e a pedagogia na atividade de ensino do professor. Assim, a forma natural como um professor conduz um processo de aprendizagem, a flexibilidade com que trata o conteúdo e o ajuste deste ao nível de conhecimento dos alunos, bem como a seleção do estilo mais adequado às contingências do ambiente denotam os padrões de conhecimento pedagógico do conteúdo de um professor. (SHULMAN, 1987).

Este texto se divide, então, em três partes: na primeira parte, baseado em Vásquez, faço algumas breves considerações sobre a origem e dificuldades de se compreender e se seguir o princípio da indissociabilidade teoria-prática, na segunda discutimos a Práxis na formação do professor e onde surge a expressão "prática como componente curricular" na recente legislação educacional brasileira. Por fim, apresento brevemente algumas possibilidades de discussão e a análise em um episódio, na perspectiva de Shulman (1987), que evidenciam o jogo como recurso didático relevante para a integração da pratica como Componente curricular.

A PRÁXIS: definitivamente teórico-prático

A ideia da “Pratica como Componente Curricular”, tema central deste artigo aparece em destaque nas propostas atuais, a partir de críticas ao modelo racionalista pedagógico espelhado ao modelo da racionalidade prática. Por esta via define-se outras maneira de representar a formação docente, no entanto, não é de hoje que a relação entre a Teoria e a Prática divergem em discussões que giram em determinados significados da “práxis” e da relação entre a teoria e prática. Este movimento antagônico ao modelo de racionalidade técnica emerge, na margem dos regulamentos legais recentes, uma ênfase pautada na formação pela prática sem a adequada relação com a teoria e, portanto, sem o embasamento teórico requerido nos cursos de licenciatura e nos processos de formação do professor. Com base na crítica ao modelo de racionalidade técnica e orientadas pelo modelo denominado “racionalidade prática”, foram definidas outras maneiras de se compreender a formação docente.

No intuito de superar as dificuldades de se compreender e se seguir o princípio da indissociabilidade teoria-prática na formação docente, buscamos alguns significados como o do termo "πρᾶζις", empregados pelos gregos na antiguidade para designar a ação propriamente dita, e que transcrevemos como “praxis”, e em nosso vocabulário escrevemos “práxis” ou “prática”, o primeiro mais utilizado e aceito no campo filosófico e o segundo usado indistintamente em nosso idioma sendo muito empregado na linguagem comum e literária. O termo “práxis” é conservado como escrito na Grécia antiga pelos portugueses, alemães e espanhóis em outras línguas como, por exemplo, em francês usa-se “practique”, o italiano “prassi” e “practica”, em Russo “práktika”, convém lembrar que o emprego deste termo “práxis” que deriva do grego "πρᾶζις", não se deve igualar os significados do termo em uma ou outra língua, neste sentido utilizaremos o termo “prática” não no sentido do significado predominante de atividade prática humana no sentido estritamente utilitário e pejorativo como atividades práticas, homem prático, profissão muito prática, etc., pois este tipo de ação na Grécia antiga aplicava-se aos gestos exteriores do sujeito e a seus atos e escrevia-se "ποιησις" *poiésis*, que para eles era uma atividade poética do artesão e não prática.

Em uma consciência filosófica sobre o modelo racionalista da prática, Vásquez (1986), não deixa de ter antecedentes do passado nem tão pouco surge como uma forma acabada do Marxismo, o certo segundo ele é que depois de superado o idealismo, uma consciência mais elevada, não implicando a uma atitude pré-filosófica, nem tampouco no retorno a um ponto de vista filosófico como o do materialismo vulgar ou metafísico, ligado a consciência comum e anterior às formas mais desenvolvidas do idealismo (Kant, Fichte e Hegel), partindo assim para uma concepção mais avançada, ou seja, uma superação no sentido dialético de negar e absorver, tanto do materialismo tradicional como o do idealismo, uma filosofia da práxis de modo abstrato e mistificado, embora se apresente nela a atividade pratica humana, cuja origem da separação entre teoria e prática na cultura ocidental identificada na Grécia clássica (V-IV a.C.), onde havia uma nítida divisão social entre classes trabalhadoras e classes ociosas.

Ainda conforme Vásquez, o conceito de práxis é uma atividade prática que faz e refaz coisas, isto é, transmuta uma matéria ou uma situação segundo a etimologia Grega, explícitas em Aristóteles (384-322 a.C.), práxis como fenômeno que se esgota em si mesmo, se engendra uma obra, é poesia, ou criação e quando cita Aristóteles justamente para mostrar a concepção da relação teoria e prática que se tinha naquela época, naquela sociedade.

Neste sentido, a destruição da atitude própria à consciência comum é condição indispensável para superar toda consciência mistificada da práxis e ascender a um ponto de vista objetivo, científico a respeito da atividade prática do homem, unindo o pensamento a ação conscientemente. Mas por mais importante que seja o papel da ação política, a teoria não perde seus direitos supremos segundo filósofos gregos da antiguidade, como por exemplo, Platão e Aristóteles sem renunciar a primazia da vida teórica, admitiram a legitimidade do que podemos chamar de práxis política. Platão teve inclusive a consciência de que a teoria deve ser prática, ou seja, o pensamento e a ação devem manter-se em unidade, e se mantém fazendo repousar a prática na teoria, ou mais exatamente fazendo com que as ideias se tornem práticas por si mesmas.

Vásquez se refere a Platão para discutir a questão da teoria se tornar prática ao dizer que: A teoria se torna prática não só porque seja segundo Platão, um saber de salvação, graças ao qual o homem se liberta da escravidão da matéria, se mantém em suas condições humana e se realiza como ser humano, como também porque a teoria se ajusta plenamente á prática, com o que a primeira deixa de ser um saber puro e cumpre uma função social, política. Teoria e prática, filosofia e política, unem-se na pessoa do filósofo-rei ou do rei-filósofo. (VÁSQUEZ, 1986, p.19).

Assim, observamos que Platão vê uma prática digna, deixando-a se impregnar totalmente pela teoria, em uma relação unilateral em que a pratica política dos homens não cumpre outra função a não se deixar guiar ou se moldar totalmente pela teoria, assim a dicotomia entre o mental (a teoria) e o material (a prática), associando o primeiro ao que é superior e o segundo ao que é inferior, é uma característica da educação grega clássica. Assim, a filosofia grega, bem como a educação dela decorrente, formalizou a primazia da razão como algo absolutamente separado dos afazeres práticos, sendo o conhecimento como pura contemplação.

A prática há de ser filosófica e vale por seu conteúdo racional e teórico, e por analogia a unidade platônica de teoria e prática não passa da diluição da práxis na teoria.

Vásquez em seu livro “Filosofia da Práxis” elucida e enriquece o seu ponto de vista da relação da Teoria e prática, primeiro ao examinar as concepções de Hegel, que entende a atividade da consciência ou do espírito, como filosofia do fazer (ou saber) absoluto, abre caminho para a filosofia Marxista, no idealismo Alemão, seu principio ativo é princípio de liberdade e autonomia. Hegel in Vásquez, tinha perfeita consciência tanto de sua unidade como de princípio que lhe serve de base, sendo que o fundador desse movimento é Kant, exatamente por haver baseado sua teoria do conhecimento sobre o sujeito e não sobre o objeto, estabelecendo como fundamento supremo a consciência, não só do conhecimento, como também da moral.

Kant leva a cabo a famosa “revolução copernicana”, mas admite a existência de uma “coisa em si”, percebendo a fonte da atividade e da liberdade na consciência, no sujeito, mas é criticado por Hegel por admitir um novo dualismo que enfraquece e restringe o mérito de haver firmado o princípio que é fundamento e ponto de vista de partida da filosofia alemã moderna da época (*apud* VÀSQUEZ, 1986, p.76). Observamos por consequência os filósofos idealistas alemães, não só Kante, Fichte, Schelling e Hegel em particular tinham consciência da desconformidade entre o teórico e o prático, e tratou de correlacionar o ativismo da consciência a circunstância histórica real.

Mas, Hegel, segundo Vásquez, nos proporciona o primeiro tratamento filosófico da práxis humana como atividade transformadora e produtora de objetos materiais, para isto, Hegel se desliga de seus antecessores idealistas que reduzem a prática como um tipo peculiar de atividade da consciência, essencialmente moral. Em uma etapa posterior de sua obra, Hegel se vê no limite de uma problemática religiosa, a superação do que na época ele chama de positividade ou objetividade morta, examinando sob este a relação homem com os objetos.

Não obstante estas diferenças, a práxis é, definitivamente, teórico-prática, isto é, dois lados de uma moeda que se separam por abstração, é certo que existem diferenças específicas ou autonomia entre a teoria e a prática, nem sempre a segunda torna-se teórica, tão pouco a primazia da prática dissolve a teoria e ás vezes a teoria adianta-se á prática, e existem teorias ainda não elaboradas como prática.

Logo, o arroio do raciocínio filosófico no qual ocorre historicamente requer que se negue como argumentação pura, e, voltando o olhar para a realidade, aceite a influência da práxis, que só se possibilita sua aceitação como crítica radical enfocada a uma realidade injustamente opressiva. Quando consideramos as relações entre a teoria e prática, no primeiro plano dizemos que a primeira depende da segunda, na medida em que a prática é fundamento da teoria, que determina o horizonte de desenvolvimento e progresso do conhecimento. A este respeito Engels diz in Vásquez.

> Até agora, tanto as ciências naturais como a filosofia menosprezaram completamente a influência que a atividade do homem exerce sobre seu pensamento e conhecem apenas, de um lado, a natureza e, de outro, o pensamento. Mas o fundamento mais especial e mais próximo do pensamento humano é a natureza por si só, a natureza enquanto tal, e a inteligência humana foi crescendo na mesma proporção em que o homem ia aprendendo a transformar a natureza. (ENGELS, 1961, p. 183, In VÁSQUEZ, 1986, p.123).

Neste sentido o conhecimento científico natural avançam no mesmo processo de transformação do mundo natural em virtude da relação prática que o homem estabelece com ele, mediante a produção material, colocando-lhe exigências que contribui tanto em ampliar seu horizonte como os das soluções.

Não obstante essas diferenças, a práxis é, definitivamente, teórico-prático, a prática amplia horizontes teóricos sem que se reconheça sua origem. É certo que existem diferenças específicas ou autonomia entre teoria e prática, a prática não obedece diretamente e indiretamente às exigências da teoria, mas sim suas próprias contradições, e que somente em ultima estância, depois de um desenvolvimento histórico, a teoria responde à prática e é fonte destas.

A Práxis na Formação Inicial de Professor

Sempre que se fala em conhecimentos fundamentais para a formação do professor de matemática, referente às competências profissionais na formação de professores vários autores têm se debruçado sobre esta temática, investindo anos em estudos no intuito de melhor compreender como se dá o processo de ensino-aprendizagem, dissecando os saberes, as ações, os pensamentos, as intenções e as reflexões que o compõem. Entendemos que este tema é complexo o qual demanda que seja abordado em diversos aspectos, tais como: corpo docente, discente, currículo, projeto pedagógico, aspectos estruturais, dos quais focaremos e discutiremos a questão da formação docente sob os aspectos curriculares do curso de licenciatura em Matemática.

Com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional bem como suas resoluções, estabelece-se novas diretrizes curriculares para os cursos de formação de professores da educação básica (BRASIL, 2002), o Conselho Nacional de Educação (CNE) recomendou que a formação inicial seja concebida, planejada, operacionalizada e avaliada visando à aquisição de competências e habilidades. Nesse sentido, a Resolução CNE/CP n.º1(BRASIL, 2002), instituiu a Prática como Componente Curricular (PCC) a qual deve ocorrer dentro das próprias disciplinas ofertadas nos Cursos de licenciatura, diluída em sua carga horária e no transcorrer de todo o processo do ensino e de aprendizagem, de modo que em seu desenvolvimento se propicie ao licenciando o exercício da Teoria e da Prática, no gesto de aprender a ser professor, num processo indissociável entre ensino, pesquisa e extensão.

Entendemos que este seja o momento de reafirmarmos o papel da Universidade na formação de professores e na iniciação à docência. Para isto é fundamental identificar os elementos constituintes das atividades de PCC que mais auxiliam na construção das competências pedagógicas e na ampliação dos conhecimentos do acadêmico e, em particular dentre as licenciaturas, no nosso caso, a Teoria e Prática como um Componente Curricular no curso de Licenciatura em Matemática. Pois a formação adequada dos professores não é exclusivamente teórica, mas envolve determinada quantidade de trabalho Prático, assim entendemos que, a partir desta identificação, será possível subsidiar os professores universitários que lecionam nesse curso, a integrar no interior de disciplinas, tais como: Cálculo, Álgebra, Geometria, Matemática Elementar, a prática como componente curricular.

Diante do exposto quanto às reformulações de projetos pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática surgiu o projeto de pesquisa de doutoramento, que subsidia este artigo. Tal pesquisa tem por objetivo de investigar a implementação da Prática como parte integrante de um Componente Curricular presente no Curso, no caso na disciplina de Matemática Elementar. Estas resoluções consolidam a formação de professores em uma área de investigação e de práticas que no âmbito da didática e da organização escolar, vem intervir diretamente no desenvolvimento profissional do formador e no currículo da instituição.

Assim, para dar sentido à formação e à Práxis dos professores, os projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura necessitam favorecer o desenvolvimento das competências necessárias para a intervenção em suas áreas.

Destacam-se como pontos primordiais, que refletirão na aula de Matemática, a análise dos princípios e critérios para a seleção (o que ensinar) e a organização didática (como ensinar) além dos conteúdos matemáticos para que ocorra a aprendizagem.

Inserido no rol dos formadores de professores de Matemática, a preocupação tem recaído sobre a aula de Matemática. Considerando a aula como o ponto de encontro importante para a interatividade entre o livro didático usado pelo aluno e a bagagem intelectual dominada pelo professor, pode-se dizer que nela se fazem presente o conhecimento matemático cientificamente elaborado além do conhecimento pedagógico necessário para o desenvolvimento dos conteúdos. Esse encontro pode ocorrer em duas dimensões metodológicas: simples reprodução dos conhecimentos cientificamente elaborados para ser memorizados ou por meio da reconstrução dos conceitos para a compreensão desses conhecimentos.

Neste sentido Ball, Thames, & Phelps (2008), focam suas pesquisas em como os professores necessitam saber e ser capazes de fazer, efetivamente, para desenvolver o trabalho de ensinar um determinado conteúdo, neste sentido optaram em investigar essa questão de uma forma que poderia ser melhor caracterizada o trabalho do professor “de baixo para cima”, começando com a prática em suas pesquisas o interesse foi em que mais os professores necessitam saber sobre matemática, e como e onde poderiam os professores usar tal conhecimento, na prática?

Neste sentido os autores apontam que os professores fazem ao ensinar matemática, e como fazer o que eles fazem, demanda raciocínio matemático, percepções, compreensão, e habilidade? Em vez de começar com o currículo, ou com padrões para a aprendizagem dos estudantes, nós estudamos o trabalho do professor (BALL, THAMES & PHELPS, 2008 p.23).

Em termos de nossa formulação, a formação matemática que o futuro professor vivencia no curso de licenciatura contribui para a estruturação de um conjunto de concepções do licenciando a respeito do conhecimento matemático e dos processos de ensino e aprendizagem de matemática, as quais influenciam a sua prática, como professor da escola básica.

Ainda segundo os autores, os professores necessitam ampliar sua proficiência em relação a Prática Matemática, eles necessitam ser capazes de falar sobre como a linguagem matemática é usada, como escolher, fazer, e usar representações matemáticas, eficazmente, e como explicitar e justificar as ideias matemáticas de outros, todas estas situações, engajam os professores a praticas matemáticas particulares, e engajam os mesmos a práticas matemáticas em sua forma descomprimida ou em sua forma desempacotada. (BALL, THAMES & PHELPS, 2008 p.18).

Observamos segundo os autores que o apelo contínuo da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo é que ele conecta o conhecimento do conteúdo com a prática de ensino, assegurando que as discussões sobre o conteúdo são relevantes para o ensino e que as discussões sobre o ensino mantêm a atenção para o conteúdo.

Neste sentido Ball, Thames, & Phelps, (2008) discutem a contribuição de Shulman (1987) que estabelece sete categorias de conhecimento profissional do conteúdo, que compreende uma categoria de conhecimento que diz respeito a capacidade de se realizar um diagnóstico e decidir quais os procedimentos disponíveis para resolver um problema, a abordar um conteúdo, a sistematizar um conceito, ou seja a gestão da sala de aula, a organização do tempo, ou planejamento, para esta organização do conhecimento, Shulman (1987) desenvolveu tipologias ao estabelecer sete categorias de conhecimento de base para o ensino, contemplando o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo (que são os princípios ou estratégias de gestão e organização de classe, úteis para ensinar o conteúdo), o conhecimento curricular (referente ao conhecimento do professor para selecionar e organizar os programas, bem como os meios que dispõe para isso), o conhecimento pedagógico do conteúdo (que é uma “amalgama” ou combinação especial entre conteúdo e pedagogia, típico do professor), o conhecimento dos alunos e de suas características, o conhecimento dos contextos educacionais (ambiente de trabalho, região e características culturais da comunidade) e o conhecimento dos fins educacionais (valores sociais, propósitos e bases filosóficas e históricas).

Assim o conhecimento pedagógico do conteúdo é um tipo de conhecimento do professor que faz a interligação entre um conhecimento formal sobre o ensino, elaborado e validado a partir de pesquisas universitárias convencionais, e um conhecimento de natureza prática, desenvolvido pelo professor através da experiência do trabalho docente. A questão mais interessante é que quando ao estabelecer novas diretrizes curriculares para os cursos de formação de professores da educação básica (BRASIL, 2002), o Conselho Nacional de Educação (CNE) recomendou que a formação inicial seja concebida, planejada, operacionalizada e avaliada visando à aquisição de competências e habilidades, de forma que a PCC estivesse presente do primeiro ao quarto ano de um curso de licenciatura, e esta referência de Shulman (1987) trás o “paradigma perdido” é de que a divisão entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico (teoria e Prática), não representa a tradição do ensino universitário, mas uma criação recente, é um conhecimento mais formal ou mais prático ou ainda a combinação de ambos.

Novamente Ball, Thames, & Phelps (2008), esclarecem que ao trazer o conteúdo para o centro das discussões, Shulman propõe três categorias de conhecimento relacionado ao conteúdo: Conhecimento da matéria, conhecimento curricular do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Enquanto que o conhecimento da matéria refere-se à quantidade e organização do conhecimento por si só na mente do professor, o conhecimento curricular do conteúdo representa o conjunto de programas elaborados pelo professor sob um conteúdo, considerando o nível dos acadêmicos bem como os meios disponíveis para o ensino do conteúdo.

A pesquisa

Em nossa proposta formativa para a formação inicial, foi construída a partir dos resultados obtidos na primeira fase da pesquisa, fase esta que foi documental, abordando análise da legislação pertinente, dos Projetos pedagógicos da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS, mais especificamente a do Curso de Licenciatura em Matemática e dos aspectos teóricos da formação inicial de professores. Nessa primeira fase identificamos princípios da Prática que devem estar presentes na disciplina de Matemática Elementar, e investigamos as indicações dos Parâmetros Curriculares de Matemática (PCN), quanto ao ensino de trigonometria na Educação Básica[1], no caso, o conteúdo escolhido para ser desenvolvida na proposta formativa.

Na implementação da proposta formativa é relevante informar que o pesquisador, autor deste artigo, assumiu o papel de formador em aula junto aos acadêmicos, e assim, os dados levantados, as desestabilizações ocorridas durante o processo, às entrevistas e as discussões são direcionadas de modo a coletar dados de múltiplas maneiras para minimizar possíveis interpretações e opiniões conduzidas pelo olhar do pesquisador.

Estruturamos a pesquisa em três fases, na primeira foi feita pesquisa documental, a segunda contempla a construção da proposta formativa e sua aplicação em campo e a terceira e última fase é a de análise das características da metodologia que impulsionam a integração da Prática como componente curricular. Neste artigo focamos a fase três, particularmente quanto análise das características da proposta formativa em um episódio, isto é, em uma das intervenções feita com os acadêmicos no desenvolvimento da proposta formativa no primeiro semestre de 2013, na disciplina de Matemática Elementar no conteúdo de trigonometria, um dos conteúdos desta disciplina com maior dificuldade dos acadêmicos ingressante no curso de Matemática, licenciatura, sobretudo da sua importância em inúmeras aplicações a outros domínios específicos e aos princípios matemáticos do Ensino Superior.

A seguinte questão é a orientadora da pesquisa: *Quais são as características de uma metodologia de formação inicial de professores de Matemática cuja proposta seja integrar a Prática como Componente Curricular na disciplina de Matemática Elementar, particularmente no conteúdo de trigonometria?*

O embasamento teórico para a pesquisa, no tocante à formação, vem dos estudos de Shulman (1987) sobre o conhecimento profissional docente e, mais especificamente de Ball, Thames, & Phelps (2008) sobre os conhecimentos para o ensino de matemática, e das pesquisas de Tardif (2002) e Zabala (1998) a respeito da relação Teoria e Prática do ponto de vista da formação inicial do educador. Pesquisadores como Shulman (1987) e Ball, Thames, & Phelps

[1] *Ver artigo "A prática como componente Curricular: Uma investigação na licenciatura em Matemática da UEMS-VII SESEMAT, 2013".*

(2008), nos dão indicações a partir de suas investigações de como contemplar na formação inicial a construção do conhecimento profissional docente em todas as suas dimensões.

A pesquisa qualitativa que estamos empreendendo é de natureza descritiva e interpretativa e está sendo desenvolvida com a metodologia do *Design Based Research*. Tal método é proposto por Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer & Schauble (2003), e ele permite fazer da sala de aula um laboratório de pesquisa para pesquisadores e alunos, os quais criam hipóteses, as desenvolvem e analisam com interações num processo cíclico, permitindo uma reestruturação durante todo o processo formativo, de modo a se adequarem às características do contexto de pesquisa. Os sujeitos em si não são o foco de análise e sim as intervenções feitas com eles e as intervenções desenhadas de modo a se adequarem ao grupo pesquisado.

Na proposta formativa é relevante informar que o pesquisador, primeiro autor deste artigo, assumirá o papel de formador em aula junto aos acadêmicos, e assim, os dados levantados, as desestabilizações ocorridas durante o processo, às entrevistas e as discussões são direcionadas de modo a coletar dados de múltiplas maneiras para minimizar possíveis interpretações e opiniões conduzidas pelo olhar do pesquisador.

Estruturamos a pesquisa em três fases, na primeira foi feita pesquisa documental, a segunda contempla a construção da proposta formativa e aplicação em campo e a terceira e última fase é a de análise das características que impulsionam a integração da Prática como componente curricular. Neste artigo focamos a fase três, particularmente quanto análise das características da proposta formativa em um episódio, isto é, em uma das intervenções feita com os acadêmicos no desenvolvimento da proposta formativa no primeiro semestre de 2013, na disciplina de Matemática Elementar.

A análise feita na fase 1 da pesquisa, serviu de subsidio para propormos o processo formativo para os acadêmicos em um curso de Licenciatura em Matemática, que se propõe a integrar a licenciatura com a realidade, com uma visão aos formadores de futuros educadores de Educação Básica, uma visão da realidade deste sistema de ensino, de forma que o estágio - nos dois últimos anos da graduação - não seja o único momento de integração da licenciatura com a realidade escolar, ou seja, o estágio não seja o único momento de integração da Teoria à Prática.

Na fase 2, que compreende a concepção e o desenvolvimento de uma proposta formativa2 para acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, contemplamos a construção da proposta e a pesquisa em campo. Os dados nessa fase são coletados por meio de questionário de entrada aos acadêmicos que cursam a disciplina, entrevista semiestruturada ao final, materiais produzidos na sala de aula, gravações em áudio, vídeo e, registros de observação.

Apresentamos uma discussão da Prática em uma das intervenções junto ao conteúdo arcos e ângulos relacionado a trigonometria na circunferência, que incluiu um dos tipos de atividades com materiais concretos, utilizados em todo o processo formativo tais como: softwares, material reciclado, jogos, etc., as formas que consideramos mais úteis de representações, ilustrações, explicações e demonstrações, do conteúdo matemático. Paralelo a estas atividades sustentamos, em consonância com a proposta de Donald Schön, a necessidade de formar o professor como um pesquisador "pesquisador no contexto prático" como um profissional que "reflete-na-ação", e ressaltamos que este trabalho de pesquisa deve ser articulado com a atuação na Educação Básica.

[2] Ver artigo "A Prática Docente e a Formação na Licenciatura em Matemática: investigando conexões possíveis" VII CIBEM, 2013.

Um aspecto a destacar é que o na proposta o conhecimento pedagógico do conteúdo distingue um corpo de conhecimentos típico do professor para o ensino, por corporificar a combinação entre o conteúdo da matéria e a pedagogia na atividade de ensino do professor. Assim, a forma natural como um professor conduz um processo de aprendizagem, a flexibilidade com que trata o conteúdo e o ajuste deste ao nível de conhecimento dos alunos, bem como a seleção do estilo mais adequado às contingências do ambiente denotam os padrões de conhecimento pedagógico do conteúdo de um professor. (SHULMAN, 1987).

O Jogo como uma atividade de Prática como Componente Curricular

Durante a fase de aplicação da proposta formativa, na discussão do conteúdo de arcos e ângulos no ciclo trigonométrico, utilizamos o jogo de dominó de arcos e ângulos (POLONI, LOBO DA COSTA, 2013), que tem as mesmas regras que o jogo de dominó comum[3], entretanto não se colocam lado a lado peças iguais, mas sim peças que possuam valores equivalentes para os arcos, medidos em graus ou em radianos, confeccionaram dois jogos, sendo um para arcos e ângulo de 0^0 a 180^0, e seus respectivos arcos em radianos, e outro com arcos e ângulos de 180^0 a 360^0, sendo que este segundo exploramos o conhecimento do conteúdo em um nível de conhecimento aprofundamento mais elaborado (Figura 1 e 2).

As Figuras 1 e 2, mostram a sequência dos dois modelos de dominós, o acadêmico após jogas o jogo 1, e aprender as representações de grau e radiano e suas conversões, passava para o jogo2, sendo que neste jogo as medidas dos ângulos, bem como sua conversão eram de um grau de dificuldade maior, pois, são medidas arcos e ângulos incomuns nas abordagens deste conteúdo no Ensino Médio.

Os acadêmicos logo perceberam e associaram as regras de um jogo de dominó tradicional ao de arcos e ângulos no ciclo trigonométrico e foi considerado como tendo grande potencial para a aprendizagem:

- **Acadêmico A:** a brincadeira de dominó trigonométrico foi de grande importância na fixação dos ângulos notáveis e a sua conversão para o radiano;

- **Acadêmico B:** Aulas com jogos pedagógicos são bons para o aprendizado, e é na prática que entendemos como se faz.

- **Acadêmico C:** o jogo foi importante, pois aprendi a conversão do radiano com mais facilidade.

- **Acadêmico D:** Com o jogo de dominó ficou nítido o entendimento, pois foi preciso calcular para saber os valores correspondentes de cada pedra, ajudando até a decorar certos valores.

[3]Regras do dominó comum para 4 jogadores: São distribuídas 7 peças para cada jogador; dá início ao jogo o jogador que tiver a peça dupla de maior valor; as peças de valores iguais devem ser colocadas lado a lado; se o jogador não tiver uma peça para colocar na mesa deverá passar a vez; vence o jogador que colocar todas as suas peças na mesa primeiro.

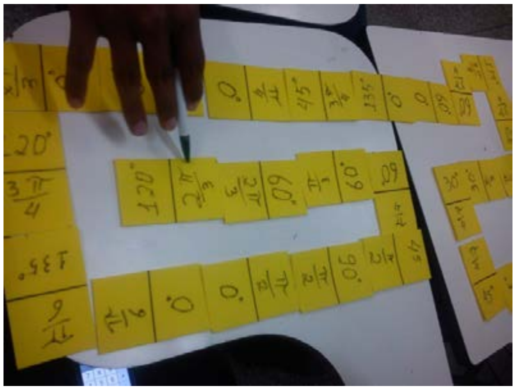
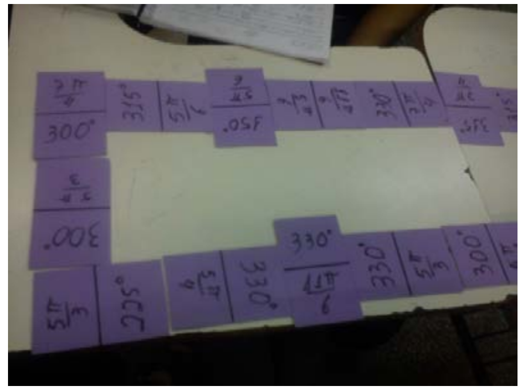



Figura 1 – Jogo1 de dominó de arcos e ângulos 0^0 a 180^0. Figura 2 – Jogo2 de dominó de arcos e ângulos 180^0 a 360^0.

Ressaltamos que os jogos podem auxiliar na aprendizagem, mas a mediação do professor ao conduzir os alunos durante a realização de jogos é fundamental para auxiliá-los na construção dos conhecimentos e por outro lado, o uso atividades lúdicas, a preocupação com o processo da preparação e implementação do conteúdo de ensino e de como se processa a interação conteúdo e aluno, são as semelhanças mais evidentes nestas correntes de investigação. Acredita-se que a discussão entre estes termos seja ainda parte de um processo de adoção ou mesmo de readequação de abordagens tradicionais às recentes concepções epistemológicas sobre o ensino. Salientamos que a sistematização deste conceito só aconteceu posteriormente a atividade proposta com o jogo.

Resultados parciais da pesquisa

O recurso aos jogos durante a como uma das atividades da proposta formativa promoveu a reflexão coletiva sobre os conceitos trigonométricos que estavam sendo abordados nos jogos. Podemos inferir que essas reflexões, a troca de ideias e a discussão dos diferentes pontos de vista dos acadêmicos em formação inicial. Este recurso utilizado durante a formação constituí num método capaz de intermediar a aprendizagem, fazendo-os refletir coletivamente sobre suas práticas, principalmente no que tange a implementar a prática como componente curricular em um curso de licenciatura. Na visão dos acadêmicos que foram sujeitos dessa pesquisa, o conhecimento pedagógico do conteúdo é a forma de representação e transformação da matéria de ensino que torna esta mesma matéria compreensível ao acadêmico, compreensão de conceitos matemáticos, a sistematização e a generalização de um determinado conteúdo devem ocorrer na aula de Matemática tendo o professor como planejador e orientador da aprendizagem e o aprendiz aquele que desenvolve e conclui as ações. Visto dessa forma, ensinar é dar condições para que o aluno construa seu conhecimento.

Para que esse processo se efetive como postura pedagógica é necessária um professor prático e reflexivo. Acreditamos que o ensino de qualidade começa pela reflexão do professor sobre sua atividade, sem rejeição do conhecimento sistematizado; dessa forma, torna-se um produtor e não simples consumidor de teorias alheias. Contudo em atitude natural, por mais obscura que seja da Práxis, uma ideia é ascender ao plano reflexivo, que é o plano próprio em sua forma mais elevada da atitude filosófica. Assim a consciência comum desprende-se da concepção ingênua e espontânea para elevar-se a uma consciência reflexiva.

O professor reflexivo constrói uma teoria própria, explicativa de sua prática, contribuindo para a sistematização de novos conhecimentos e consegue articular o conhecimento científico com o conhecimento pedagógico dos conteúdos (SHULMAN, 1987). O recurso jogos durante a formação também promove a reflexão coletiva sobre os conceitos trigonométricos que estavam sendo abordados nos jogos. Podemos inferir que essas reflexões, a troca de ideias e a discussão dos diferentes pontos de vista dos professores podem ter levado à ressignificação de conceitos.

Essas atividades práticas - o jogo em sala de aula, na discussão dos conteúdos matemáticos - transcendem o estágio e têm como finalidade promover a articulação das diferentes práticas em uma perspectiva interdisciplinar, é desenvolvido com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando à atuação dos acadêmicos em situações contextualizadas, tais como registro de observações realizadas característicos do cotidiano do professor de matemática.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content Knowledge for Teaching What Makes It Special?* Journal of teacher education, 59(5), 389-407.

Brasil, Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno. Parecer CNE/CP 9/2001. (2001*). Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Disponível em <http://portal mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf>.

_____. Conselho Pleno. Resolução CNE/CP 1/2002. (2002). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena.* Diário Oficial da União, Brasília, Seção 1, p.31.

_____. Resolução CNE/CP 2/2002. (2002). *Institui a Duração e a carga horária dos cursos de Licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior*. Diário Oficial da União, Brasília. Seção 1, p. 9.

Coob, P; Confrey, J; Disessa, A.; Lehrer, R.& Schauble, L.(2003*). Design experiments in educationresearch. EducationalResearcher*, v.32, n.1, p. 9-13.

Figueiredo, S. A.; Lobo Da Costa, N. M. (2013). *Licenciatura em Matemática: o desafio de integrar a prática a um componente curricular.* VII SESEMAT – Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. Anais. Campo Grande-MS.

_____. (2013). *A prática docente e a formação na licenciatura em matemática: investigando conexões possíveis*. VII CIBEM-Congreso Iberoamericano de Educacíon Matemática. Anais. Montevideo-Uruguai.

Shulman, L. Conocimento y enseñanza. (1987). *Estudios públicos, 83.* Centro de Estudios Públicos. Traduzido por Alberto Ide. Chile: Santiago.

Zabala, A. (org.) (1998). *A Prática educativa: como Ensinar*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda.

Vázquez, A. S. (1986). *Filosofia da práxis*. Tradução de Luiz Fernando Cardoso, 3ª ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra.

Poloni. Marinês Y. Lobo da Costa, N. M. (2013). *Formação Continuada de Professores e o uso de Jogos no Ensino de Trigonometria.* XI ENEM- XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais. Curitiba-Pr.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Actividades de aprendizaje en matemática, mediadas por recursos de la Web 2.0

Esteban **Ballestero** Alfaro

Escuela de Ciencias y Letras, Instituto Tecnológico de Costa Rica

Costa Rica

eballestero@itcr.ac.cr

Resumen

El auge de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC´s), ha puesto al servicio de los usuarios, una serie de recursos gratuitos de uso común. La educación no puede obviar que este fenómeno cobija a los estudiantes de todas las edades, exponiendo a los educadores ante un nuevo reto donde, creativamente y mediante experiencias de aprendizaje innovadoras que impacten los procesos metodológicos dentro de las aulas, pueda poner las TIC´s al servicio del aprendizaje de los mismos.

Este escrito detalla los resultados de una experiencia de aprendizaje implementada con estudiantes de Cálculo de la carrera de Ingeniería en Computación, que combina la teoría tradicional del estudio de movimientos de Proyectiles con una experiencia de aprendizaje inductivo, basada en datos experimentales y el apoyo de recursos virtuales disponible en la Web 2.0.

Palabras clave: Instrumento, proyectiles, cálculo, Web 2.0, TIC´s, aprendizaje.

Introducción

Continuamente los profesores de matemática se ven expuestos a situaciones en las que, los estudiantes insisten en cuestionar la aplicación práctica de lo que se estudia en esta disciplina. A nivel Universitario encontramos una fuerza de resistencia al cambio, en particular, cuando este implica actualización tecnológica de parte del docente. Como afirma Cabero (2005), las

Universidades están llamadas a incorporar NTic´s dentro de sus procesos e ir perdiendo ese miedo al llamado “mi tesoro”, es decir, entre profesores, estudiantes e instituciones debe prevalecer una cultura de colaboración mutua donde en un futuro cercano ya no sería cuestión de estudiar “en”, sino “como” o “desde”.

Los estudiantes actuales invierten una cantidad significativa de horas de su tiempo en redes sociales o espacios de naturaleza similar, de esta manera, plataformas como youtube, blogs, wikis y otras herramientas, constituyen medios de consulta frecuente para ellos.

En particular, los estudiantes de Ingeniería en Computación se sienten en su mayoría identificados con el uso de plataformas tecnológicas y encuentran un aliciente cuando cuentan con el respaldo de un profesor que les permita realizar sus trabajos en ellas. Claro está, que la naturaleza de su formación no garantiza que tengan un dominio avanzado sobre el uso de estas herramientas, pero, al menos se espera que dispongan de una predisposición que facilite la fase de apropiación de uso de esta.

Considerando las variables señaladas, se tomaron dos grupos de estudiantes de Cálculo de la carrera de Computación que tenían experiencia previa de trabajo en plataformas virtuales, adquirida tanto por iniciativa propia como por un curso previo. Se les expuso a varias experiencias de aprendizaje donde aspectos como indagación y experimentación, fuesen complementadas con las facilidades de recursos disponibles en la Web 2.0.

Se toma parte de los resultados documentados de esta experiencia para compartirlas en este escrito, esperando persuadir y motivar a otros docentes para que sigan innovando en sus clases haciendo un mayor aprovechamiento de los espacios virtuales.

Fundamentación

El entorno de esta experiencia se le conoce como la Web 2.0, no obstante, es un concepto que tiene sus diferentes acepciones dependiendo de la forma como se aborde, ya sea desde el campo social, económico-empresarial, filosófico e incluso, entre los llamados puristas y los Geeks. Para efectos de este escrito, entenderemos a la Web 2.0 desde los siguientes siete principios propuestos por Cobo&Pardo (2007): La World Wide Web como plataforma de trabajo, el fortalecimiento de la inteligencia colectiva, la gestión de las bases de datos como competencia básica, el fin del ciclo de las actualizaciones del software, los modelos de programación ligera junto a la búsqueda de la simplicidad, el software no limitado a solamente un dispositivo y las experiencias enriquecedoras de los usuarios.

La Web 2.0, conocida como la Web Social, se diferencia precisamente de la Web 1.0 no en el hecho de que sea una plataforma diferente, sino en las potencialidades y facilidades que le ofrece al usuario donde este pasa a tener protagonismo. Así, según Rexach (2010) afirma:

Pero más allá de todo intento de definición, el concepto de Web 2.0 es acerca de las personas y lo ellas podrían llegar a hacer con las herramientas disponibles (p.11)

Con lo anterior, se parte de que el aprendizaje se realiza mediante actividades que desarrolla el sujeto para construir el conocimiento, es decir, vivenciar una experiencia de aprendizaje en la que a partir de una serie de acciones propuestas por el docente, el estudiante pueda mediante la realización de conjeturas y el establecimiento de relaciones, entre otras cosas, generar un aprendizaje por descubrimiento con significado de lo aprendido. Como lo indica Asubel, Novak y Hanesian [citado en Espiro, 2009]:

Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento, el contenido descubierto se hace significativo, en gran parte, de la misma manera que el contenido presentado se hace significativo en el aprendizaje por recepción.

Claro está que el estudiante no es un ser vacío, sino que tiene conocimientos o bases previas y es en este sentido que los autores visualizan el aprendizaje significativo, es decir, hay aprendizaje significativo cuando el aprendiz puede relacionar de manera no arbitraria el nuevo conocimiento con lo que sabe a priori, comprende lo aprendido y se apropia de este conocimiento para aplicarlos en variados contextos.

Basado en esta propuesta, se deben privilegiar acciones que promuevan el trabajo cooperativo, el trabajo en equipo, el desarrollo de proyectos y actividades pertinentes para la construcción de conceptos, así como el desarrollo de capacidades para resolver problemas. De este modo, también Sánchez; Boix &Jurado (2009) consideran que desde el Internet se puede potenciar situaciones interactivas, facilitar la expresión y el control del entorno, potenciar tanto la interacción social como del aspecto motivacional del individuo, abriendo posibilidades infinitas para el desarrollo personal, familiar, laboral y en el campo de la innovación de la enseñanza, haciendo aportes mediante nuevas oportunidades didácticas.

La realización de la actividad humana en general para Vygotsky, requiere una serie de factores intermediarios, como son los instrumentos psicológicos simbólicos y los medios de comunicación interpersonal.

La teoría de la instrumentación es una propuesta actual neo-Vygotskyana expuesta por Verilon y Rabardel y que ha sido retroalimentada por otros autores que han realizado trabajos posteriores.

Los autores definen dos conceptos: artefacto e instrumento. Estos conceptos se pueden considerar respectivamente equivalentes a los instrumentos materiales y psicológicos definidos por Vygotsky. Verillon y Rabardel (1995) definen el artefacto:

Se refiere a todos los objetos de la cultura material a la que un niño tiene acceso durante su desarrollo. (p. 81)

Es necesario establecer algunas diferencias entre los instrumentos y los artefactos. Para Verillon y Rabardel el artefacto puede verse como un objeto material hecho por el hombre, mientras que el instrumento es considerado como un constructo psicológico. Verillon y Rabardel (1995) afirman:

El punto es que el instrumento no existe en sí mismo. Una máquina o un sistema técnico no constituyen inmediatamente una herramienta para el sujeto. Así, un instrumento resulta desde el establecimiento, por el sujeto, de una relación instrumental con un artefacto, ya sea material o no, producido por otros o por sí mismo (pp. 84-85).

Sobre esta diferencia, Artigue (2002) agrega:

El instrumento es diferenciado desde el objeto, material o simbólico, sobre el cual está fundamentado y para lo cual es usado el término "artefacto". Así, el instrumento es una entidad mixta, parte artefacto, parte esquemas cognitivos los cuales lo hacen un instrumento (p.250).

Para explicar la funcionalidad del instrumento en esta teoría, así como el proceso en el que un artefacto se transforma en instrumento, Verillon y Rabardel proponen el siguiente modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada (IAS: Instrumental Activity Situations) que considera las situaciones de actividades donde el artefacto sufre esta transformación:

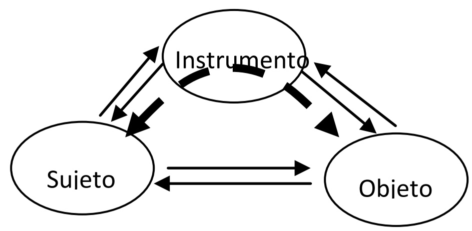


Figura 1: Modelo de IAS

Este modelo expone las diferentes relaciones que se dan entre la triada: sujeto, instrumento y objeto, bajo un modelo de situaciones de la actividad instrumentada. Primeramente encontramos relaciones directas de manera respectiva: Sujeto-Instrumento, Instrumento- Objeto y Sujeto-Objeto. No obstante, estas relaciones son bien conocidas bajo cualquier otro tipo de actividad, entonces, la novedad de esta teoría radica en la línea punteada (ver figura 1) que intenta explicar cómo el sujeto se apodera del objeto a partir de la mediación del instrumento.

Para cualquier persona que interactúa con un artefacto, este no tiene un valor instrumental desde un inicio, sino que este valor instrumental se adquiere mediante un proceso. Artigue (2002), expone que debe existir un proceso mediante el cual el artefacto se transforme en instrumento y a este proceso lo denomina *Génesis Instrumental*, que además involucra la construcción de esquemas personales o la apropiación de los esquemas sociales preexistentes. Esta génesis instrumental trabaja en dos direcciones: la instrumentalización (la sujeto aprende a manipular el instrumento) y la instrumentación (el sujeto usa el instrumento para razonar, pensar, cambiar sus esquemas cognitivos).

Un aula virtual, al igual que al aula tradicional, es un espacio cultural pero, que según Tishman; Perkins & Jay (1997) no en todas las aulas es posible generar una cultura de socioconstrucción del conocimiento. Los autores exponen que para impactar positivamente en el aprendizaje y en la experiencia formativa de manera relevante, toda aula debe poseer cuatro dimensiones forzosas: los contenidos relevantes y actualizados; el procesamiento pedagógico de los contenidos que evite la disposición de estos sólo de manera presencial, es decir, ¿información para qué?; la tutoría virtual donde desarrolle un clima de interacción entre los participantes que les permita aprender a pensar con los otros de manera colaborativa, sin descuidar el seguimiento evaluativo y autoevaluativo de los involucrados; el dispositivo tecnológico, que adquiera una dimensión instrumental donde además de facilitar la comunicación entre los estudiantes, funja como un mediador para que los participantes socio-construyan el aprendizaje.

Se hace mención a una dimensión instrumental del dispositivo tecnológico porque a diferencia de la herramienta que cumple con su única función de desempeñar un papel para lo cual fue creado, el instrumento se desarrolla dentro de un contexto mixto, que involucra en parte la herramienta (artefacto representado por los entornos virtuales de la Web 2.0) y en parte esquemas cognitivos producto de pensar con el artefacto (Verillon y Rabardel (1995), Artigue (2002)). En este contexto, el aula virtual debe ser el medio para pensar y aprender, no solamente un medio para intercambiar documentos y comunicarse de manera sincrónica y asincrónica, que además, complementada con una fase experimental vivencial, resulta ser una propuesta de trabajo alentadora.

Metodología.

Actualmente los requerimiento técnicos y de personal para la incorporación de TIC´s en el aula, no es un problema tan alarmante dentro de las realidades de muchos países a nivel mundial, pero, como indica Cabrero (2005), los problemas son más de corte cultural, metodológico, organizativos y estructurales. El interés particular de este artículo, es hacer una contribución en el aspecto metodológico.

Los resultados que se expondrán en este escrito, se centrarán en una actividad específica por razones de espacio, no obstante, el éxito de la misma nos es un asunto simple que se pueda considerar meramente desde la óptica de esta actividad, sino que desde la planificación se buscaba aprovechar un proceso educativo que venía fortaleciéndose en las plataformas virtuales desde cursos previos.

El curso se desarrolla de la manera tradicional presencial, con la variante de que se realizaron dos trabajos extraclases que fueron abordados por los estudiantes haciendo uso de plataformas virtuales. Los sujetos del estudio fueron alrededor de unos 60 estudiantes de la Carrera de Ingeniería en Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica, de la Sede Regional San Carlos, que estaban cursando Cálculo durante el II Semestre de 2010. En su mayoría, los estudiantes habían ingresado a dicha carrera ese año, no obstante, se contaba con una base importante de estudiantes repitentes de generaciones anteriores.

Si revisamos la malla curricular de dicha carrera se puede identificar que los estudiantes, antes de poder matricularse en el curso de Cálculo, deberán cumplir con el requisito de tener aprobado el curso de Matemáticas Discretas, que en su totalidad lo habían recibido con el mismo profesor. En este curso previo, los estudiantes realizaron varios trabajos que implicaba cierto tipo de indagación y exploración apoyados en recursos virtuales. Seguidamente se detallan los recursos más utilizados para la realización de esos trabajos y el uso respectivo dado en el proceso:

Recurso virtual	**Uso**
Diseño de blogs en la plataforma Blogguer	Como medio de publicación de los resultados de cada uno de los retos que se le plantearon en la asignación. Brinda la posibilidad de complementar la información textual con recursos como vídeo, gadgets, imágenes, entre otras cosas y ofrece al lector la posibilidad de comentar los post
Trabajo en Wikis usando Wikispaces	La wiki fue un recurso de apoyo colaborativo. Tuvo dos funciones muy puntales: la primera consistía en compartir referencias tanto virtuales como físicas que podrían contener información importante para el trabajo, entonces, se compartían con el resto de compañeros basado en la premisa de que se pueden potenciar las posibilidades de colaboración porque las búsquedas se vuelven colectivas; la segunda consistió en compartir la dirección de su blog e instar a los compañeros a que realizaran una visita y dejaran sus comentarios (principio de socialización de los resultados)
Plataforma de Googlewave (se encuentra fuera de funcionamiento desde 2011)	Al ofrecer facilidades de trabajo sincrónico y asincrónico, la plataforma de googlewave se convirtió en el espacio virtual de ensayo y error, donde se creaba una wave privada para cada equipo de trabajo, donde el profesor podía tener acceso a todas ellas. Se restringía las posibilidades de trabajo dentro de la plataforma para poder monitorear la cantidad de ingresos de los

	participantes, el número y la calidad de los aportes, asesorar en el momento oportuno, cada miembro del equipo podía evaluar lo que proponía el compañero y se generaban las discusiones para consensuar la respuesta final.
Google docs	La compatibilidad entre todas las plataformas o servicios que pone a disposición de los usuarios la compañía google, es una gran virtud que se tiene que aprovechar en estos casos. De esta manera, una vez consensuada la respuesta en googlewave, se creaba de forma paralela un documento formal en googledocs, que iba a ser el trabajo final a calificar. Hoy en día, las opciones para crear documentos en la plataforma han mejorado y migrado a la nube, mediante la tecnología de Google Drive.
Otros recursos como foros, slideshows, gadgets, chats, Skype	Los estudiantes desarrollaron actividades que involucraban la discusión de casos en foros dentro de la plataforma institucional llamada Tec Digital (basada en tecnología de DotLRN). La necesidad de mejorar los recursos disponibles en el blog, obligaba a desarrollar presentaciones tipo Slideshows y con los gadgets (otras aplicaciones complementarias como contadores de visitantes, hora y fecha, menúes, etc). Las posibilidades de comunicación sincrónica se desarrollaron en su mayoría en los chats internos de las plataformas y hubo un importante uso de la aplicación de Skype

Figura 2. Recursos virtuales de la Web 2.0 utilizadas por los estudiantes, con su respectivo uso

Basada en esa experiencia desarrollada en el curso de Matemáticas Discretas, se formula una propuesta que buscaba aprovechar esas bases ya cimentadas, debido a que los estudiantes ya había superado la fase de Instrumentalización y ahora, se podría ofrecer retos en donde la actividad intelectual fuese mayor.

Se conformaron equipos de trabajo con los estudiantes de entre 4 o 5 integrantes máximo. Para realizar el trabajo los estudiantes contaron con una guía completa en formato pdf elaborada por el profesor, donde se detallaban los cuatro retos que deberían atender durante la actividad extraclase. Seguidamente, un breve resumen de cada reto:

1. El movimiento de proyectiles, como parte de las aplicaciones a la física: se hace una introducción del movimiento parabólico en diferentes situaciones cotidianas, como el movimiento de los huracanes, las acrobacias y otros deportes. Finalmente, se explica que muchos de estos casos representan movimientos de proyectiles frecuentemente estudiados en física.
2. Buscando a Cenicienta: dónde a partir de una lista de pistas debían construir el cuadro de variación y la gráfica de una función. Ellos recibirían por separado un par de pistas a su correo, luego, deberían compartirlas con el resto de los compañeros de trabajo. El reto solo se podía resolver si se contaba con todas las pistas completas.
3. Crecimiento humano: caso en el que estudiaría la forma en la que las personas vamos creciendo desde la infancia hasta la edad adulta. La idea consiste en que a partir de los datos que se disponen en el Caja Costarricense del Seguro Social, donde se establecen los parámetros normales relacionados con el crecimiento en función de la edad, los estudiantes

haciendo uso de la calculadora TI-92 generarían una curva de mayor ajuste para luego trabajar con ella, haciendo un análisis de crecimiento, máximos y mínimos.

4. Cierre y exploración: dónde se les pedía a los participantes realizar una reflexión sobre la experiencia. Esta parte es importante porque el estudiante, luego de lo realizado en los restantes retos, debían hacer una abstracción personal de todo lo aprendido durante la experiencia o al menos, indicar los aspectos que captaron en demasía su atención e interés.

Dada las restricciones de espacio con las que se cuenta, este artículo dará un trato especial a los resultados obtenidos en el reto 1 y 4. Para desarrollar estos retos los estudiantes debían realizar el proceso en dos fases:

1. Una primera fase experimental: los grupos programaban una cita durante una semana en específico y se movilizaban a un lugar acondicionado con los implementos básicos que se iban a requerir, según lo había solicitado el profesor en la guía. El equipo tomaba las instrucciones para la construcción de un cohete de papel que iba a ser lanzado varias veces desde la base del suelo y a partir de diferentes ángulos: 15°, 30°, 45°, 60° y 75°.

   Una vez elaborado el cohete se usaba un soporte metálico donde se coloca una prensa que cumpliría la función de soporte para el punto de lanzamiento, cuyo ángulo se regularía con un transportador. El motor impulsor del lanzamiento sería a partir de presión de aire usando una botella plástica de refresco, donde a la salida se conectaba con una manguera que en el otro extremo contaba con un tubo de PVC en el cuál, se insertaría el cohete. Se aclara que el modelo debe prever la eliminación de fugas de aire para garantizar el máximo impulso de lanzamiento.

   Una vez listo el prototipo, se disponían a realizar los lanzamientos, en este caso, se realizaron cinco por cada ángulo y el alcance horizontal registrado se basaría en el promedio de estos 5 datos. Durante los lanzamientos y la fase previa del diseño del prototipo los estuantes documentaban la actividad con fotografías y grabarían un vídeo. La siguiente figura, ayuda a ilustrar el diseño final del prototipo:

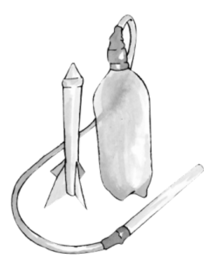


Figura 3. Prototipo propulsor para lanzamiento de cohete

2. Luego de la experimentación los estudiantes llegaron a ciertas conclusiones en relación al alcance horizontal en función del ángulo, entre otras cosas y entonces, el siguiente obstáculo consistiría en confrontar sus resultados experimentales con lo que la teoría física explica. La fase experimental se compartiría en un blog creado por ellos y la fase de análisis experimento-teoría, se realizarían de forma completa en un doc de google para la respectiva revisión y retroalimentación por parte del profesor.

Al finalizar el blog los estudiantes invitaron a sus compañeros de clase para que visitaran su blog, esto en una wiki especial que propuso del profesor. Para la revisión de los trabajos se contó con la opinión de pares externos, quiénes eran otros profesores de matemática y de la carrera de Computación que amablemente, luego de visitar los blogs, devolvían al profesor una evaluación basada en rúbricas que previamente se les daba a conocer.

Finalmente, es importante aclarar que la actividad de lanzamiento de cohetes es una adaptación de un modelo experimental utilizado en el Exploratorium de San Francisco, USA.

Análisis de resultados.

Una vez realizado el prototipo los estudiantes iniciaron con los lanzamientos en un campo abierto y amplio. Cabe mencionar que por las condiciones climáticas de la zona, la lluvia siempre fue una amenaza que en algunos momentos obligaron a los estudiantes a movilizarse a un espacio cerrado, pero, que permitía continuar con el proceso.

Seguidamente, se presenta la tabla de resultados de uno de los grupos

Resultados finales ya promediados:

Ángulo	Tiempo de vuelo(s)	Alcance máximo horizontal	Tiempo de altura máxima (s)	Altura máxima (m)	Rapidez inicial (m/s)
15	1,938	18,41	0,0810	3,7849	9,5326
30	1,768	17,2	0,1670	13,8244	9,8652
45	2,552	23,98	0,2448	28,9083	9,6980
60	2,828	16,38	0,2046	20,4085	6,1295
75	3,198	18,04	0,2548	31,2419	6,1688

Figura 4: Medidas relacionadas con el lanzamiento del cohete, según variación del ángulo de disparo.

Durante la fase de recolección de datos los estudiantes solamente registran la distancia horizontal y el tiempo de vuelo, las restantes medidas se obtienen a partir de las fórmulas teóricas que explican el comportamiento de los proyectiles en física. La toma de datos es un aspecto en el que el profesor debe insistir, porque la mínima variación en el disparo u otro aspecto del proceso podría sesgarlos. La escogencia de los ángulos, si logran apreciar en la primera columna de la Figura 4, son parejas de ángulos complementarios de escogencia intencional porque se pretendía que los estudiantes pudieses comprobar los resultados teóricos que demuestran que el alcance horizontal de un proyectil, es idéntico para ángulos de lanzamiento complementarios. La siguiente figura, ilustra este comportamiento:

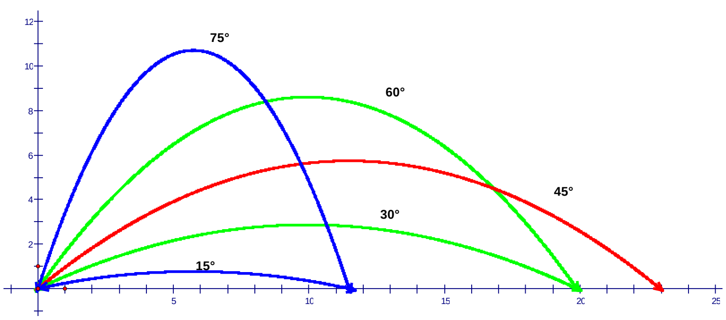


Figura5. Variación del alcance vertical de proyectil, en función del alcance horizontal

El grupo que propuso la Figura 4 efectivamente llega a esa conclusión sin problema alguno para los ángulos complementarios de 15° y 75°, pero, en el caso de 30° y 60° manifestaron tener una sospecha fuerte, pero una leve duda surgida por a la variación hace que no sea muy fuerte el argumento. Adicionalmente concluyen que el ángulo de 45° es el que proporciona el alcance máximo horizontal.

Por otra parte, al mantener los ángulos complementarios alcances horizontales similares, los estudiantes explican que sí se evidencia en la columna de "alcance vertical" una notable diferencia, donde para el ángulo menor se tiene un alcance vertical relativamente bajo mientras que para el ángulo mayor, al estar el apuntador más cerca de la vertical, se tendrá una elevación mayor.

En la siguiente fase, los estudiantes tuvieron que confrontar sus datos experimentales con la teoría. La idea consistía en comprobar algunas fórmulas y a partir de estas validar sus conjeturas o en caso de que los datos experimentales no coincidieran, ellos buscarían la explicación que justificara los posibles errores acontecidos en la toma de datos. Se les proporcionó la siguiente información base:

Medida	*Fórmula*
Velocidad inicial horizontal	$V_{x0} = V_0 \cos(\theta)$
Velocidad inicial vertical	$V_{y0} = V_0 \mathrm{sen}(\theta)$
Alcance (distancia) horizontal	$X(t) = V_{x0}t$
Alcance vertical	$Y(t) = Y_0 + V_{y0}\mathrm{t} - \frac{1}{2}\mathrm{gt}^2$
Velocidad horizontal en el tiempo	$V_x(t) = V_0 \cos(\theta)$
Velocidad vertical en el tiempo	$V_y(t) = V_{y0} - gt$

Figura 6. Fórmulas físicas básicas para lanzamiento de proyectiles

A partir delos datos de la Figura 6, se le asignaron una serie de tareas a los estudiantes que se resumen a continuación:

- Comprobar la validez de estos resultados: $X(t) = V_0 \cos(\theta)\, t, Y(t) = Y_0 + V_0 \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{t} - \frac{1}{2}\mathrm{gt}^2$
- Comprobar que $[X(t)]^` = V_x(t)$ y $[Y(t)]^` = V_y(t)$ (derivadas de las distancias horizontal y vertical)
- A partir de la fórmula que calcula el recorrido $R(\theta, t_v) = V_0 \cos(\theta) t_v$ y apoyados en la ecuación auxiliar $Y(t) = 0$, se debía resolver el problema de optimización, identificando el ángulo que permitiese obtener el alcance máximo horizontal.
- A partir de la Función Objetivo $Y(t) = Y_0 + V_0 \,\mathrm{sen}(\theta)\, \mathrm{t} - \frac{1}{2}\mathrm{gt}^2$, se le solicitó a los estudiantes que comprobaran que efectivamente $Y_{max} = Y_0 + \frac{V_0^2 sen^2(\theta)}{2g}$ era el valor

correspondiente al alcance vertical máximo observado en un lanzamiento para un ángulo específico.

Esta segunda fase de comprobación teórica es más similar a la que se acostumbra a hacer en los cursos, tanto de física como matemática donde el fenómeno de lanzamiento de proyectiles sea el tema base, pero, el complemento de realizar el experimento de manera a priori y disponer de la posibilidad de compartir los resultados con otras personas en la web, generó un atractivo particular para los actores y un reforzamiento de la teoría como consecuencias de la parte vivencial, al punto que en evaluaciones posteriores los estudiantes afirmaban recordar muchos de los resultados teórico a partir de recuerdos que se crearon durante la experiencia de los lanzamientos, porque mentalmente lograron hacer ese anclaje visual de la fase de experimentación con la teoría.

Como anteriormente se indicaba, se le solicitó a los estudiantes que expresaran sus impresiones sobre la actividad y en este sentido, se rescatan algunas apreciaciones:

En conclusión general además de reforzar los temas ya vistos en clase, aprendimos a elaborar trabajos utilizando una serie de herramientas que están disponibles siempre y que nunca se les saca el provecho que se debería, en esta asignación en particular utilizamos un módulo de blog el cual nunca había usado, tuvimos que investigar sobre como subirle animaciones, videos y demás, la creación y edición de flash, la parte del video y el tener que subirlo a Youtube, todas un conjunto de herramientas que nunca antes había siquiera pensado en utilizar lo cual hizo más interesante y provechoso la asignación. Considero y pienso que al igual que mis compañeros que este ha sido un trabajo que nos dejó mucho y no solo sobre curso, sino que ha ampliado nuestra visión como debe ser la realización de nuestro trabajo no se debe limitar a lo típico.

Marvin

Bueno en esta segunda asignación el principal conocimiento fue sobre el movimiento parabólico a medir todas esas variables como rapidez inicial, altura máxima, tiempo en altura máxima etc.. pero aún más importante que eso aprendí que un curso de cálculo no debe ser tan magistral como en el pasado este tipo de asignaciones a mí personalmente me motivo mucho a ponerle más interés al curso ya que no es la primera vez que llevo el curso y este es el curso de cálculo más dinámico que he llevado, felicitaciones Profesor esta nueva metodología sin duda alguna marcara una pauta en los cursos impartidos por la escuela de ciencias y letra que se imparten en el tec que normalmente son aburridos y repetitivos.

También aprendí a no tomar a la ligera este tipo de asignaciones ya que su realización se tomó su tiempo y su grado de dificultad era mayor de lo pensado esta asignación es comparable a una tarea programable de cualquier curso de la carrera.

Ricardo

Estas dos apreciaciones reflejan el sentir de la mayoría, que en un principio veían el trabajo con cierta reserva, claro, como lo indicaron, esta modalidad de trabajo rompió el esquema tradicional de trabajo de los cursos de cálculo, en particular rescato las palabras de Ricardo que era estudiante repitente y tenía un parámetro de comparación como argumento. La asignación se realizó en octubre a un mes de finalizar el segundo semestre, donde por cuestiones propias de la universidad es el mes más cargado de trabajo para los estudiantes y esa era una de las razones por las cuáles mantenían su reserva debido a que el factor tiempo jugaba en su contra, no obstante, fue motivante ver que cuando llegaron a trabajar y empezaron todo el proceso se les veía más relajados en un ambiente de compartir haciendo, de este modo los fallos, los errores, los aciertos, las puestas en común acuerdo y demás, lograron un nivel de compromiso y apropiación que inclusive algunos de ellos aún conservan el cohete como recuerdo.

Para finalizar esta sección es trascendental el efecto más allá del curso que trae a colación este tipo de actividades, porque al estar los estudiantes realizando la fase experimental fue interesante observar como esta acción visual despertaba el interés de todas las personas particulares que circulaban en el mismo espacio, que se acercaban a los estudiantes a preguntarle lo que estaban haciendo y la razón del mismo, enterarse que en un curso de matemáticas era posible realizar este tipo de actividades era novedoso para la gente, algunos hasta se tomaron fotos con los estudiantes para llevarse un recuerdo de lo visto.

Para cerrar esta sección, no queda más que resaltar que este tipo de actividades tienen un alto potencial para educar, socializar y sensibilizar a la población civil, a los funcionarios de la institución de diferentes puestos, los mismos estudiantes, sus familias, compañeros y con la posibilidad de dejar sistematizada esta experiencia en un blog, les permite impactar aún más allá de nuestras fronteras institucionales.

Conclusiones

1. Los recursos tecnológicos de la Web 2.0, mediaron en el proceso como un instrumento, mejorando las vías de comunicación para desarrollar análisis colectivos entre miembros del equipo de trabajo. El pensamiento colectivo en plataformas, tanto de manera sincrónica como asincrónica, enriquecen significativamente los análisis.
2. Las posibilidades de interacción tanto en la web como a nivel presencial, mejoraron las relaciones interpersonales del equipo. El empoderamiento que cada estudiante tuvo al ser partícipe de todo el proceso, repercutió en una actitud más comprometida con el mismo y los resultados.
3. Las posibilidades de innovación y creatividad fueron aprovechadas por los participantes, quiénes, a manera de ejemplo, intentaron variaciones de diseño del cohete mejorando su diseño original a formas más aerodinámicas, no propuestas en la guía de trabajo, que pudiesen lograr mayores alcances y al punto que se generó una competencia sana entre los diferentes equipos por desarrollar ese prototipo de cohete de mayor alcance de vuelo. Adicionalmente, sorprende la aparición de estudiantes con conocimientos y capacidades interesantes que encuentran una oportunidad en este tipo de actividades para mostrarlas o darlas a conocer, como por ejemplo a nivel de diseño de Interface, elaboración de vídeos y liderazgo en el equipo de trabajo.
4. Los estudiantes aprendieron tanto aspectos propios del contenido base del curso que justificaba la actividad como, un aprendizaje adicional como valor agregado en cuanto al uso de plataformas virtuales y formas de trabajo en ellas, al punto de que actualmente manifiestan que desde esa experiencia puntual, continúan utilizando los recursos virtuales para realizar sus trabajos en los restantes cursos e incluso, en otras actividades personales individuales o que impliquen grupos de trabajo. Además la experiencia despertó la iniciativa por seguir indagando, experimentando e incorporando el uso frecuente de recursos más recientes que no estuvieron disponibles en su momento. A pesar de que algunos sí conocían las bondades de las plataformas a nivel técnico, manifestaron que la experiencia les enseñó a aprender estrategias para trabajar en colectivo, una deficiencia constante que no habían

podido resolver y que les resultaba útil dada las limitaciones de espacio físico para reuniones presenciales.

Finalmente, cabe mencionar que las capacidades de escritura y comunicativas se mejoran significativamente en la medida en que los estudiantes reciben constante retroalimentación; desde luego, al estar expuestos a una situación donde deben escribir no solo para ellos a nivel individual, sino para socializar ideas y propuestas para el grupo y el público en general a partir de los blogs, lo que los obliga a repensar lo escrito si prevalece el interés en que garantizar que el mensaje llegue al público meta, pues así lo demandan las necesidades de comunicarnos.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of computer for Mathematical Learning* , 7, 245- 274.

Cabrero, A. (2005). Las TICs y las Universidades: retos, posibilidades y preocupaciones. *Revista de Educación Superior*, 34, 77-100.

Cobo, C & Pardo, H. (2007).*Planeta Web 2.0. Inteligencia colectiva o medios fast food.Grup*. Recerca d'Interaccions Digitals, Universitat de Vic. Flacso México. Barcelona / México DF.

Espiro, S.(2009). *El aprendizaje en entornos virtuales*. Virtual Educa: Argentina.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: la educación desde una perspectiva cultural*. PAIDÓS, Barcelona.

Murphy, P& Lambertson, P. (2003). *The Math Explorer*. San Francisco: Exploratorium.

Pea, R. (1985). Beyond amplification: Using computers to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20, 167-182.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. En G. Salomon (ed). *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 47-87). Kingdom. USA: Cambridge University Press.

Rexach, V. (2010). *El manejo de la información: nuevos y viejos esquemas para un mismo problema*. Virtual Educa: Argentina.

Sánchez, A; Boix, J & Jurado, P. (2009). La sociedad del conocimiento y las TICS: una inmejorable oportunidad para el cambio docente. *Pixel-Bit Revista de Medios y Educación*, 34, 179-204.

Tishman,S; Perkins,D & Jay,E. (1997). *Un aula para pensar: aprender y enseñar en una cultura de* pensamiento. Buenos Aires: Aique.

Verillon, P & Rabardel, P. (1995). Cognitions and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10 (1), 77-101.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Afectos hacia la docencia de las matemáticas en futuros maestros

Ana **Maroto** Sáez
Escuela de Magisterio, Universidad de Valladolid
España
amaroto@am.uva.es
Santiago **Hidalgo** Alonso
Escuela de Magisterio, Universidad de Valladolid
España
shidalgo@am.uva.es
Tomás **Ortega** del Rincón
Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid
España
ortega@am.uva.es
Andrés **Palacios** Picos
Escuela de Magisterio, Universidad de Valladolid
España
palacios@psi.uva.es

Resumen

La formación inicial del futuro docente es uno de los índices de calidad más fiables en cualquier sistema educativo. En el plano concreto de las matemáticas descubrir los factores que determinan actitudes favorables a su docencia se presenta como un objetivo ineludible de gestión educativa. Al inicio de la formación del maestro es el momento más adecuado para conocer e identificar los factores afectivo-emocionales implicados en la docencia en matemáticas de estos futuros docentes.

Pretendemos en este trabajo calibrar su gusto hacia la docencia de las matemáticas mediante una escala construida ad hoc. Con una amplia muestra de estudiantes del grado de maestro de Educación Primaria de varias universidades españolas realizamos el análisis factorial de dicha escala obteniendo dos factores con excelentes índices de ajuste que nos servirán para adentrarnos en el constructo *actitudes hacia la docencia en matemáticas.*

Palabras clave: afectos, docencia, futuros maestros, matemáticas, escala de actitudes.

Introducción

La formación inicial y permanente de docentes es un factor de calidad de primer orden en cualquier sistema educativo**.** Durante un tiempo, los esfuerzos de mejora de los programas de formación inicial se centraron en los contenidos y en un aumento de conocimientos. Actualmente, sin olvidar estos contenidos, y centrándonos en el ámbito matemático, se ha puesto atención en formar a los futuros docentes teniendo en cuenta el *dominio afectivo matemático* y sus tres componentes básicas: actitudes, emociones y creencias.

El análisis de estos factores afectivos es especialmente relevante en los estudiantes de magisterio por su condición de docentes del mañana. En su futura función docente no se van a limitar a reproducir de forma aséptica las líneas que emanen de los decretos correspondientes, ni siquiera aunque lo intenten, pues sus actitudes, sus creencias, sus teorías personales sobre qué son y cómo se enseñan las matemáticas van a estar presentes en todo momento, (Ernest 2000; Barrantes y Blanco 2004).

Podemos asegurar que las referencias sobre las matemáticas que tienen los futuros maestros coinciden casi siempre con las que tuvieron cuando fueron alumnos en esa disciplina (Ernest, 2000; Barrantes y Blanco, 2004). Llinares y Sánchez (1990) consideran que estas creencias del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza juegan un importante papel tanto en la determinación de la afectividad de sus alumnos como en la caracterización de algunos rasgos del proceso de socialización del estudiante para profesor.

Las actitudes negativas de los futuros maestros no deben ser subestimadas, dado que los profesores a menudo funcionan como modelos para sus estudiantes. Los profesores que admiten abiertamente que no les gustan las matemáticas, por ejemplo, es probable que influyan en las actitudes de sus alumnos hacia la asignatura. Por lo tanto, los programas de formación del profesorado deben ayudar a desarrollar actitudes más positivas hacia las matemáticas y su enseñanza (Charalambos, Panaoura & Philippou, 2009). Los estudios existentes (Chan & Wu 2006) sugieren que tal objetivo no va más allá del alcance de los programas cuidadosamente diseñados de formación del profesorado.

En este trabajo nos interesamos por las actitudes hacia la docencia de las matemáticas de los futuros maestros con la idea de poder conocer los gustos e intereses de los futuros maestros hacia la docencia de las matemáticas y así poder mejorar su formación e indirectamente la de sus futuros alumnos.

Para ello, elaboramos una escala de actitudes hacia la docencia de los futuros maestros de Primaria, que analizamos factorialmente y atendemos a los factores que influyen en dichas actitudes.

Antecedentes

En el mundo de las matemáticas, el concepto de *actitud* ha sido usado con una definición que hace referencia a una predisposición evaluativa, con carga emocional, que dirige la conducta.

Esta definición supone la existencia de tres componentes básicos de la actitud: la cognición o creencias sobre el objeto de la actitud, el afecto o carga evaluativa de dicha creencia y una conducta intencional o comportamiento en relación a dicha actitud (Gómez-Chacón, 2000).

No obstante, en relación a las matemáticas, cabe distinguir entre *actitudes matemáticas* y *actitudes hacia las matemáticas*. La *actitud hacia las matemáticas* tendría que ver con la valoración, el aprecio y el gusto por esta disciplina subrayando más la vertiente afectiva que la cognitiva. Las *actitudes matemáticas*, por el contrario, tendrían que ver con el modo y la manera de utilizar capacidades generales que son relevantes para al quehacer matemático (apertura mental, pensamiento reflexivo, etc.), y que se relacionaría más con la cognición que con los afectos.

En relación a las *actitudes hacia las matemáticas* de los docentes, es de sobra conocida la trascendencia que tienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el rendimiento matemático de los alumnos. Recientemente, Sakiz, Pape & Hoy (2012) han encontrado que un elemento importante para el devenir escolar del estudiante de matemáticas es el modo en el que los profesores les apoyan emocional y afectivamente. Este apoyo del profesor determina la percepción de eficacia matemática del estudiante y el gusto por las matemáticas, siendo este último el motor de esfuerzo e, indirectamente, de rendimiento escolar. Quizá por esta importancia, contamos con un buen número de investigaciones cuyo objeto de estudio son las actitudes hacia las matemáticas del futuro docente.

Blanco et al (2010) observan que los futuros maestros consideran útiles las matemáticas tanto para la vida como para comprender mejor otras disciplinas y entienden que la didáctica de las matemáticas les ha aportado otras formas de abordar los problemas matemáticos que antes desconocían.

Existen numerosas investigaciones que relacionan las actitudes hacia las matemáticas y las actitudes hacia la docencia de las matemáticas; en ellas se observa que unas y otras tienen muchos aspectos en común y se relacionan fuertemente (Young-Loveridge 2010; Kunter, Tsai, Klusmann, Brunner, Krauss, & Baumert 2008).

En este trabajo nos interesamos por las actitudes hacia la docencia de las matemáticas de los futuros maestros con la idea de que conociendo los gustos e intereses de los futuros maestros hacia la docencia podremos mejorar su formación e indirectamente la de sus futuros alumnos.

Objetivos

Concretamente, son nuestros objetivos:

1.-Construir una escala que mida las actitudes hacia la docencia de las matemáticas de los futuros maestros.

2.-Analizar factorialmente dicha escala.

3.-Analizar el gusto o rechazo hacia la docencia de las matemáticas que presentan inicialmente los estudiantes del Grado de maestro de Primaria.

Materiales y método

Muestra

El estudio se ha llevado a cabo con una muestra de 1332 alumnos de los primeros cursos del Grado de Maestro de Primaria de 11 campus universitarios públicos de España. Estos alumnos no habían cursado en su formación universitaria asignatura alguna de matemáticas antes de de la toma de datos de la escala.

Instrumentos y metodología

La toma de datos se realizó mediante una *Escala de Actitudes hacia la Docencia de las Matemáticas* (EADM), formada por 19 ítems cuyo objetivo es medir la cuantía y la dirección de las actitudes de los futuros maestros hacia la posibilidad de enseñar matemáticas en su futuro como docentes. Para su elaboración se contó con trabajos previos como los realizados por McGinnis, Kramer, Shama, Graeber, Parker & Watanabe (2002).

En su construcción se ha seguido el siguiente procedimiento: En una primera fase, se recopilaron un conjunto amplio de preguntas a partir del análisis de los trabajos antes citados con las que se elaboraron los primeros modelos de escalas. El borrador fue evaluado por expertos en Didáctica de la Matemática. Con los datos de estas evaluaciones, fueron seleccionadas las preguntas más pertinentes por su *relevancia* (los ítems deberían estar claramente relacionados con el objeto de estudio) y *claridad* (fácilmente comprensibles, con afirmaciones simples). Con el resultado obtenido se realizaron los primeros pre-test con una pequeña muestra de alumnado, para asegurar su comprensión. Los valores de la fiabilidad medidos mediante el Alfa de Cronbach fueron altos (Tabla 1) y no hubo necesidad de eliminar ninguna de las preguntas preseleccionadas.

Tabla 1

Índice de fiabilidad de la escala

Nombre de la escala	Alfa de Cronbach	Nº preguntas
Escala de actitudes hacia la docencia de las Matemáticas(EADM)-TOTAL	,898	19

Análisis estadístico

Los datos obtenidos fueron analizados mediante los paquetes estadísticos SPSS 18.0 y LISREL 8.7. Los ítems se corresponden según el grado de acuerdo con el enunciado en una métrica tipo Likert de cinco puntos (valores de 0 a 4 que van desde desacuerdo total; desacuerdo; de acuerdo; bastante de acuerdo y acuerdo total). Este categorización permite considerar todas las preguntas como variables numéricas, ya que según O'Brien (1979), Schroeder, Sjoquist, y Stephan (1990) y Díaz (2002) una variable ordinal puede tratarse como métrica cuando tenga cinco o más categorías.

Resultados

Dada la importancia que la *Escala de Actitudes hacia la Docencia de las Matemáticas* (EADM) tiene para el desarrollo del trabajo, se realizó, tras su aplicación a los sujetos de la muestra, un Análisis Factorial de Componentes Principales (AFCP) del total de sus preguntas. De este análisis resultaron dos factores con índices de ajuste excelentes: un primer factor (F1) *Gusto o Rechazo hacia la docencia de las matemática* (ej. de ítems: *"me gusta más enseñar matemáticas que cualquier otra materia del curriculum de Primaria"*, o *"Quiero ser un buen maestro, pero ¡que las matemáticas las expliquen otros compañeros!"*. El segundo de los factores encontrado (F2) se relaciona con las posibilidades que la didáctica de las matemáticas ofrece para el futuro maestro (ej. de ítems: "*la didáctica de las matemáticas me ayuda a entender las matemáticas*", *"la didáctica de las matemáticas me ha hecho valorar el trabajo del profesor de matemáticas"*, etc.). Por ello, le hemos denominado *Actitudes favorables hacia la Didáctica de las Matemáticas*.

Estos dos factores dieron lugar a la consideración de dos subescalas que pasamos a denominar *Escala de Gusto por la Docencia de las Matemática* (EGDM), y *Escala de Actitudes hacia la Didáctica de las Matemáticas* (EADIM) compuestas por 12 y 7 ítems respectivamente con índices de Cronbach altos , como queda reflejado en la Tabla 2.

Tabla 2

Índices de fiabilidad de las subescalas

Nombre de la escala	Alfa de Cronbach	Nº preguntas
Subescala de Gusto por la Docencia de las Matemáticas (EGDM)	,901	12
Subescala de actitudes hacia la Didáctica de las matemáticas (EADIM)	,879	7

Presentamos a continuación los resultados obtenidos en las dos subescalas EGDM y EADIM. Como dijimos anteriormente, este tipo de escala nos permite asociar un valor numérico a cada ítem, por lo que los resultados se muestran en términos de la media aritmética obtenida en cada uno de ellos. Téngase en cuenta que algunos ítems están enunciados en términos negativos (ej: ítem nº 2. *Preferiría no tener que explicar matemáticas en mi futuro ejercicio como maestro* ó ítem nº 4. *Tengo que dar clase de matemáticas ¡que pase cuanto antes!*) y que el hecho de obtener una media inferior a 2 no supone una mala actitud, sino todo lo contrario.

Los resultados de la subescala EGDM, Gusto o rechazo por la docencia de las matemáticas se muestran en la Tabla 3

Tabla 3

Media de los items de la subescala EGDM, Gusto o rechazo por la docencia de las matemáticas

Gusto por la Docencia	Media
1. Me gusta ser profesor de matemáticas en Primaria	2,09
2. Preferiría no tener que explicar matemáticas en mi futuro ejercicio como maestro	1,35
3. Me siento cómodo explicando cómo he resuelto un problema de matemáticas	2,19
4. Tengo que dar clase de matemáticas ¡que pase cuanto antes!	1,19
5. Quiero ser un buen maestro, pero ¡que las matemáticas las expliquen otros compañeros!	1,21
6. Si he elegido ser maestro es para poder explicar matemáticas	1,16
7. Tengo que preparar una unidad didáctica de matemáticas, ¡qué horror!	1,26
9. Ser un buen profesor de matemáticas es cosa de unos pocos	1,40
11. Me siento inseguro explicando matemáticas	1,53

12. Me gusta más enseñar matemáticas que cualquier otra materia del curriculum de Primaria	1,10
13. Aunque quiero ser un buen maestro no entiendo el método matemático	1,33
16. Puedo pasarme horas preparando materiales y recursos para la clase de matemáticas	1,57

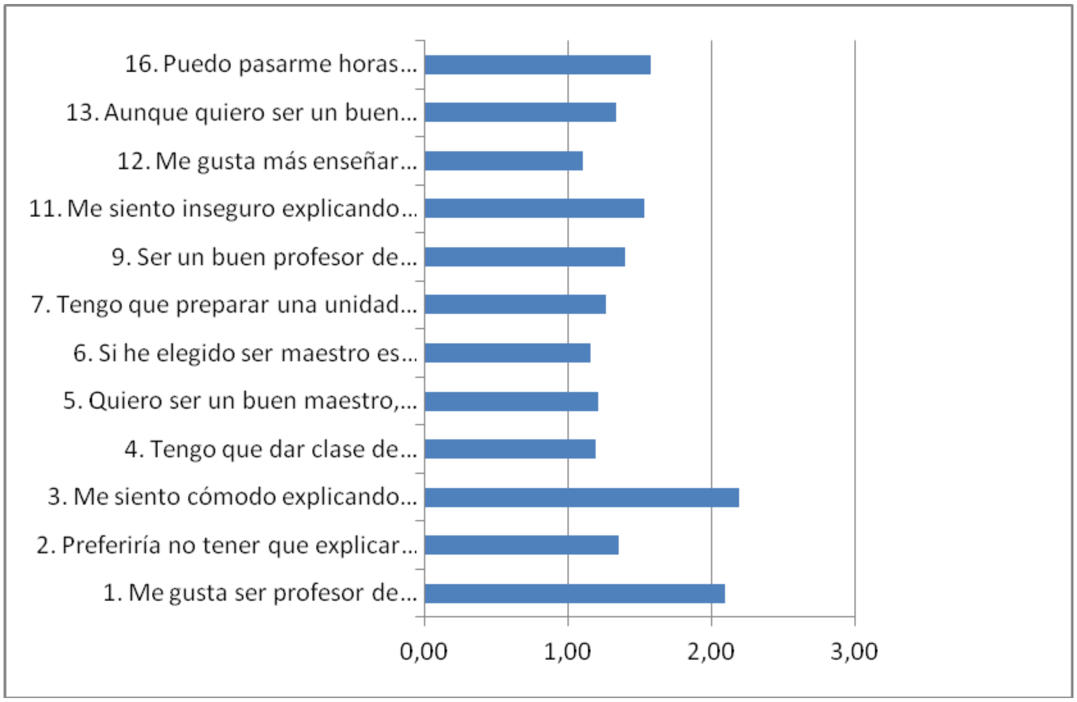


Fig 1. Media de los items de la subescala EGDM, Gusto o rechazo por la docencia de las matemáticas

La media obtenida en la subescala EGDM es M= 1,96 (teniendo en cuenta las correcciones de los ítems negativos)

Los resultados de la subescala EADIM, Actitudes favorables hacia la didáctica de las matemáticas se muestran en la Tabla 4

Tabla 4

Media de los ítems de la subescala EADIM, Actitudes favorables hacia la Didáctica de las Matemáticas

Actitudes hacia la Didáctica de las matemáticas	Media
8. Para mi futuro profesional es fundamental entender las claves de la enseñanza de las matemáticas	2,73
10. Si me lo propongo puedo entender las claves de la enseñanza de las matemáticas	2,71
15. El conocimiento de didácticas específicas, metodologías y estrategias me ha hecho cambiar mi opinión sobre las matemáticas	1,56
17. No es lo mismo saber matemáticas que saber enseñar matemáticas. Esto segundo me gusta más	2,54

18. La didáctica de las matemáticas me acerca a las matemáticas y me hace apreciar su enseñanza	2,23
19. La didáctica de las matemáticas me ayuda a entender las matemáticas	2,26
20. La didáctica de las matemáticas me ha hecho valorar el trabajo del profesor de matemáticas	2,42

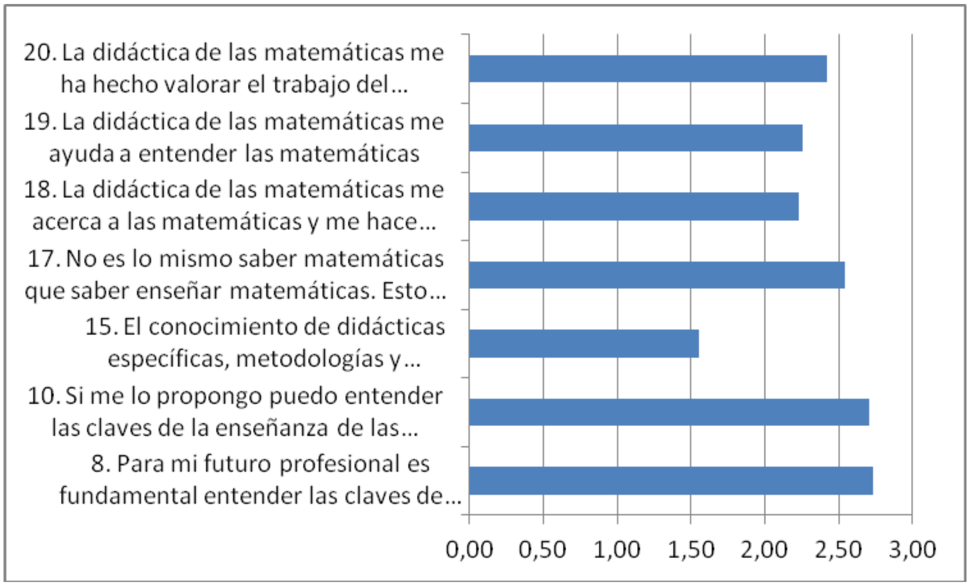


Fig 2. Media de los ítems de la subescala EADIM, Actitudes favorables hacia la Didáctica de las Matemáticas

La media obtenida en la subescala EADIM es M= 2,35 (teniendo en cuenta las correcciones de los ítems negativos)

Conclusiones

La escala presentada a los futuros maestros de ed. Primaria sobre las actitudes hacia la docencia de las matemáticas EADM, nos permite cuantificar sus gustos o rechazos hacia la docencia de las matemáticas.

La escala contempla dos factores que forman parte del constructo *actitudes hacia la docencia en matemática*: gusto hacia la docencia (subescala EGDM) y actitudes hacia la didáctica de las matemáticas (subescala EADIM). Los resultados obtenidos (mejores en la EADIM que en la EGDM) parecen indicar que a los futuros maestros les atrae más la idea de conocer métodos y estrategias que les ayuden a enseñar matemáticas que la idea de conocer contenidos matemáticos.

A partir de los resultados obtenidos en la subescala EGDM podemos concluir que a los estudiantes del Grado de maestro les gusta ser docentes de Primaria, quieren impartir clases, preparar sus materiales y ser unos buenos maestros, pero no son las matemáticas precisamente la materia que les ha llevado a elegir esta profesión. Asumen que una de las asignaturas que tienen que impartir son las matemáticas y aunque no las rechazan no son una de sus materias preferidas para la docencia.

La subescala EADIM nos muestra un estudiante para maestro que confía plenamente en la Didáctica de las matemáticas, la cual le va a proporcionar las claves de la enseñanza de esa materia y le ayudará a suplir las carencias que pudiera tener en la comprensión de las matemáticas. Podemos decir que presentan una actitud bastante positiva hacia la Didáctica de las matemáticas y cree tener acceso a ella sin dificultad. Se inclina más por la enseñanza de las matemáticas que por saber matemáticas.

Finalmente, aclarar que los datos obtenidos son de alumnos de primeros cursos universitarios. Cabe suponer que la experiencia con la materia ha de crear actitudes estables, situación que puede modificar los resultados presentados en el presente trabajo. Esta aclaración, abre la puerta a una futura línea de trabajo consistente en el análisis de los mismos datos, de los mismos futuros maestros, pero ya en los últimos cursos de su formación universitaria.

Referencias y bibliografía

Barrantes, M. y Blanco. L. (2004). Recuerdos Expectativas y Concepciones de los Estudiantes para Maestro sobre la Geometría Escolar. *Enseñanza de la Ciencias*, 2004, 22(2), 241-250.

Charalambous, Ch., Panaoura, A. & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers’ beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educ Stud Math 71*, 161–180.

Díaz, V. (2002). *Técnicas de Análisis Multivariante para Investigación Social y Comercial*. Madrid: Ra-Ma.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno*, 2, pp. 9-27.

Gómez-Chacón,I. M. (2000) *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Kunter, M., Tsai, Y. M., Klusmann, U., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2008). Students' and mathematics teachers' perceptions of teacher enthusiasm and instruction. *Learning and Instruction, 18(5)*, 468-482.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1990): El conocimiento acerca de las Matemáticas y las prácticas de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 8(2), 97- 102.

McGinnis, J. R., Kramer, S. Shama, G., Graeber, A., Parker, C. & Watanabe, T. (2002). Undergraduates attitudes and beliefs about subject matter and Pedagogy Measured Periodicallyina Reform-Based Mathematics and Science Teacher. *Preparation Program our nalofresearchin science teaching vol.39, (8)*, 713–737.

O’Brien, R. G. (1979). A general ANOVA method for robust test of additive models for variance. *Journal of the American Statistical Association, 74,* 877-880.

Sakiz,G., Pape, S.J. & Hoy, A.W. (2012) Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics class rooms? *Journal of School Psychology 50*, 235–255.

Schroeder, L.D., Sjoquist, D.L., & Stephan, P.L. (1990). *Understanding Regression Analysis: An introductory Guide*. Londres: Sage University Paper.

Young-Loveridge, J. (2010). Two Decades of Mathematics Education Reform in New Zealand: What Impact on the Attitudes of Teacher Education Students? *Mathematics Education Research Group of Australasia, 33, Jul* 3-7.

Young-Loveridge, J. (2010). Two Decades of Mathematics Education Reform in New Zealand: What Impact on the Attitudes of Teacher Education Students? *Mathematics Education Research Group of Australasia, 33, Jul* 3-7.

Chang, Y. L., & Wu, S. C. (2006). Teacher efficacy and elementary teacher education. *Academic Exchange Quarterly*, 10(3), 75–79.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Algunas reflexiones sobre actividades en el aula de clase que han mejorado tanto la enseñanza como el aprendizaje de la matemática

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Alejandro **Martínez** Acosta
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
amartinez@utp.edu.co

Resumen

Se mostrarán experiencias realizadas en la semana de inducción universitaria y otras en el aula, implementadas en algunos cursos de matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, las cuales llevaron a mejorar la motivación de los alumnos por el estudio de la matemática y a revisar la práctica docente.

Dentro de las experiencias se encuentran: conexión entre el conocimiento nuevo y lo aprendido. Es decir, la información que tiene almacenada un estudiante en su memoria sobre una realidad, o un concepto. La importancia de la matemática, su relación con otras ciencias y el entorno. Es tarea del profesor proponer situaciones que motiven por el estudio de la matemática, para ser entendida como una ciencia transversal en la formación. La matemática como soporte teórico en desarrollos científicos y tecnológicos. Destacar su papel en la modelación, planteamiento y solución de problemas que surgen en las disciplinas del saber y su desarrollo histórico como una estrategia de enseñanza.

Palabras clave: alumno, aprendizaje, aula, didáctica, cotidianidad, educación, experiencias, matemática.

Introducción

Es frecuente encontrarse con estudiantes que a pesar de estar cursando una carrera universitaria como ingeniería, tecnología o química, le tienen fobia a la matemática, o la consideran ajena a su carrera, sin importancia o sin relación con su programa académico. Entre sus argumentos están: la matemática es abstracta, no tiene relación con la realidad, la cotidianidad o la vida diaria y menos está presente en lo que ellos están cursando o van a ejercer en su vida profesional.

Preocupados por la apatía que la mayoría de los estudiantes que ingresan a la Universidad Tecnológica de Pereira, UTP, tienen hacia la matemática y los altos índices de repitencia, deserción, bajo aprovechamiento académico y falta de motivación por el estudio de la misma, se han desarrollado diferentes proyectos de investigación, por ejemplo: “Diagnóstico de las causas que obstaculizan el aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira”, “Análisis de la mortalidad académica del curso Matemática I”, los cuales buscaron además de hacer un diagnóstico, construir propuestas que mejoraron los altos índices de fracaso académico.

Se mencionan en particular, investigaciones realizadas por el grupo “Estudios metodológicos para la enseñanza de la matemática y el uso de las nuevas tecnologías, EMEMATIC” de la UTP, el cual ha venido trabajando en esta problemática. Estos estudios han establecido las causas más relevantes que interfieren en el aprendizaje: causas inherentes a los profesores que orientan la asignatura ya que una gran mayoría no tienen claridad en el objetivo del curso ni de su importancia en la formación del ingeniero; su metodología, que generalmente es repetitiva y centrada en el docente y no le permite al alumno hacerse partícipe de su aprendizaje, contextualizar conceptos, ni relacionarlos con otras asignaturas de matemáticas o de ingeniería. La exclusión de la Matemática Moderna en la educación media ha hecho que la mayoría de estudiantes lleguen a la universidad sin un manejo adecuado de teoría de conjuntos, lógica y geometría, lo que se refleja en la falta de abstracción y manejo de estructuras. La legislación, reformada recientemente, ha permitido que lleguen a La Universidad estudiantes sin condiciones académicas aceptables debido al proceso de promoción automática.

Debido a lo anterior, el grupo EMEMATIC realizó propuestas entre las que cabe mencionar:

- “Una propuesta de enseñanza para el curso Álgebra Lineal”. La propuesta se fundamentó pedagógicamente en el Aprendizaje Desarrollador, se enfatizó en las categorías de la didáctica: objetivo, contenido, medios y evaluación. Además, se hizo una caracterización de los estudiantes, el compromiso con su proceso de aprendizaje, la motivación por la matemática y las bases para cursar la asignatura.
- El desarrollo del proyecto “Estudios metodológicos para contribuir a mejorar el proceso de Enseñanza_Aprendizaje del Álgebra Lineal, incorporando las nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones”, el cual tuvo como objetivo: Diseñar una propuesta metodológica incorporando las tecnologías de la información y las comunicaciones, que contribuya a mejorar el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la asignatura Álgebra Lineal y motive al estudiante de ingeniería de La Universidad Tecnológica de Pereira a utilizar los conocimientos adquiridos en dicha asignatura como

una herramienta en el planteamiento o solución de problemas afines a sus intereses. Uno de los resultados de dicho proyecto, en cuanto a la incorporación de las TIC, fue el diseño y construcción del software denominado ALTIC (Álgebra Lineal y las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones), desarrollado en su primera versión y cuyo objetivo es: servir de mediador entre el contenido de aprendizaje y el estudiante bajo la guía didáctica del profesor, para que el alumno compruebe, contextualice, refuerce y afiance conceptos. Además, se escribieron dos libros: Lecciones de Álgebra Lineal, libro de trabajo para estudiantes y guía didáctica del docente, y Álgebra Lineal con problemas de modelado (en prensa).

- "Diseño, construcción e implementación del curso Matemáticas Fundamentales basado en el Aprendizaje Desarrollador", se propuso desarrollar estrategias de aprendizaje que permitieran a los alumnos afrontar con éxito otras asignaturas universitarias. Complementar y nivelar la formación con la que el estudiante llega de la educación básica y media. Algunos de los logros más significativos al terminar el curso fueron: aumento de la retención de los alumnos, el 75% de los que ingresaron permanecieron hasta el final, se promovió el desarrollo de estrategías de aprendizaje, fomentando el trabajo en equipo, logrando que los estudiantes aprendieran la importancia del error, dándose cuenta que equivocarse es una herramienta de aprendizaje; la mayoría de los alumnos avanzaron hacia la autoregulación e independencia.
- Diseño de materiales didácticos fundamentados en el Aprendizaje Desarrollador para la enseñanza del curso Fundamentos en Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira. El proyecto culminó con el diseño y construcción de materiales didácticos que han servido de guía para el docente en su labor de enseñanza y guía de trabajo para el alumno.
- Ciclo de conferencias y talleres ofrecidos a los estudiantes que ingresan a la Universidad Tecnológica de Pereira, en la semana de adaptación a la vida universitaria, a primer semestre en los programas de ingeniería, tecnología, química industrial y administración ambiental, en el periodo 2008 – 2011. Uno de los objetivos de estas conferencias fue: Mostrar la importancia de la matemática, su presencia en lo que vemos o hacemos y algunos de sus aportes en desarrollos científicos o tecnológicos.

En este artículo se mostrarán algunas de las actividades propuestas y desarrolladas con los alumnos para lograr el objetivo anterior. Experiencias fundamentadas en el aprendizaje desarrollador y que han sido posteriormente implementadas en algunos cursos que ofrece el Departamento de Matemáticas de la UTP, las cuales han permitido revisar la práctica docente y contribuir a mejorar la motivación de los estudiantes por el estudio de la misma.

Resultados

Teniendo en cuenta que la mayoría de los alumnos que ingresan a la UTP conciben la matemática sólo como números, ecuaciones, sin aplicaciones y que no sirve para nada, se ofreció en el marco de la semana de inducción o adaptación a la vida universitaria, durante el periodo 2008 a 2011, conferencias con las cuales se pretendía fomentar un cambio de perpepción hacia la matemática, o por lo menos mostrarla desde otro contexto. Para ello se desarrollaron diferentes actividades clasificadas de la siguiente manera:

La conexión entre el conocimiento nuevo y el aprendido. Es decir, la información que tiene almacenada un alumno en su memoria sobre una realidad, o un concepto. No se puede pensar que los alumnos son "tablas rasas", que tienen la mente "vacía", sino que, son personas con experiencias acumuladas, que son valiosas en el momento de desarrollar el nuevo conocimiento. Como lo afirma Ausubel (1968) "el aprendizaje tiene lugar cuando el aprendiente liga la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo en este proceso ambas".

Con el fin de buscar esta conexión se motiva al estudiante a realizar lecturas matemáticas de diferentes fotografías de sitios de la región que son conocidos por ellos. Por ejemplo, cuando el cielo está completamente despejado, se puede observar desde la ciudad de Pereira el nevado del Ruíz, también recuerdan la tragedia del 23 de diciembre de 2011, la explosión de poliducto en Dosquebradas, como se ilustra en la figura

Figura 1. Nevado del Ruíz y explosión del poliducto en Dosquebradas.

Pasados algunos minutos algunos estudiantes intervienen identificando en la figura término tales como temperatura, altura, distancia y ángulos, sin embargo no recuerdan con claridad una definición para estos términos y tampoco se les explica en el momento. El solo hecho de recordarlos es algo positivo para ellos, pues se espera que les quede la inquietud para aclararlos, consultarlos o investigarlos. Además, se les da a conocer en cuáles asignaturas los van a usar, con el fin de mostrar que estos no se quedan solo en el aula de clase.

Para introducir los números enteros, positivos y negativos, y su importancia, se propone una discusión acerca de la posible temperatura en el nevado y en un incendio. Otra actividad que permite relacionarlos se presenta en la siguiente figura (Figura 1))

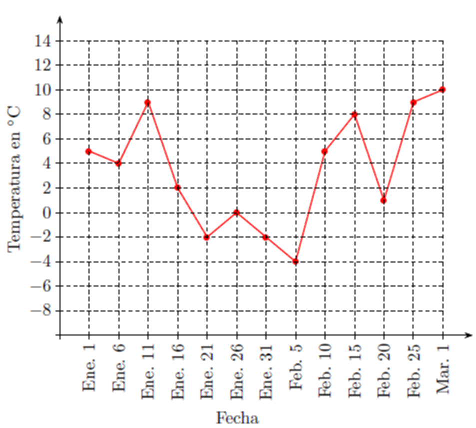


Figura 2. Análisis de la temperatura.

para que ellos respondan las siguientes preguntas: ¿Cuál es la temperatura mínima y máxima? El 18 de enero la temperatura mínima fue 2,5 °C menos que la temperatura mínima del 16 de enero, ¿cuál fue la temperatura el 18?. El 2 de febrero la temperatura mínima fue 0,8 °C más que la temperatura mínima del 5 de febrero, ¿cuál fue la temperatura en febrero 2?

Con el análisis de las respuestas a las que llegan la mayoría de los estudiantes, se le hace notar la importancia del signo menos (-) y lo que representa en la solución de un problema, con el propósito de que se concienticen en el manejo de los signos y su relevancia. De este modo, se evita a la hora del examen, por ejemplo, el comentario: "profe solo me faltó el signo, eso no importa, un signo no es nada".

La segunda experiencia, hace referencia a la *importancia de la matemática, su relación con otras ciencias y el entorno*. No es deber del alumno estar motivado por el estudio de la matemática, ni conocer su importancia y presencia en otras ciencias, en la vida cotidiana, o saber cómo esta influye en el desarrollo del pensamiento; pero si es tarea del docente presentar situaciones que motiven su estudio, permita enterderla como una ciencia transversal en la formación de los futuros profesionales, que la interioricen en sus vidas, decisiones y realmente aprendan a reconocerla en cada actividad y situación.

Por ejemplo, no es posible que veamos un rectángulo caminando como si se tratara de una persona, sin embargo cada uno es capaz de reconocerlos en cualquier lugar. Tampoco hemos visto una función hiperbólica, pero podemos contarle al estudiante cómo esta clase de funciones ayudan a modelar la deflexión de las cuerdas de energía. De igual manera, no vemos un vector, ni una derivada, porque, cuando se estudian vectores, pareciera que su importancia subyace sólo dentro la geometría y no se hace el ejercicio de relacionarlos con el entorno, con las situaciones que se pueden vivir a diario o que se escuchan[1]. Uno de estos casos son los siguientes, los cuales han ocurrido en la ciudad y que han sido noticia, como se ilustra en la figura y se muestra a los estudiantes.

Figura 3. Accidente en el Viaducto.

En el accidente ilustrado en la figura de la derecha, se informó que el taxista frenó repentinamente en el carril central del Viaducto César Gaviria Trujillo y el motociclista no alcanzó a hacerlo. Surgen varias preguntas: ¿El motociclista guardaba la distancia prudente?, ¿cuál era la velocidad a la que conducía? ¿el conductor del taxi guardaba la distancia adecuada y la velocidad permitida? El taxista manifiesta que venía conduciendo

[1] Uzuriaga López Vivian Libeth. Martínez Acosta Alejandro. (2010). Algunas experiencias que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista Entre Ciencia e Ingeniería*, Universidad Católica de Pereira.

adecuadamente respetando las normas de tránsito, lo sucedido fue repentino. ¿El taxista dice la verdad?. Con respecto a la foto de la izquierda quedan varias dudas y una de ella es: ¿qué pasó?, ¿cuál era la velocidad para que esta camioneta se volcara?. Lo que se pretende con esta actividad es debatir acerca de los conceptos que se necesitan para dar respuestas a las preguntas y a otras que puedan surgir. También, se hace una reflexión sobre el peligro que representa no seguir las normas de tránsito y se hace un llamado de atención sobre la cantidad de estudiantes de la Universidad que lamentablemente han perdido la vida en accidentes como los registrados en la figura. Además, se evidencia cómo la matemática está presente en todo y ayuda a resolver algunos problemas que se presentan diariamente, en este caso para los policias de tránsito.

Aprovechando que los estudiantes han realizado caminatas guiadas dentro del campus universitario, se les muestra fotos de algunos sitios de la Universidad, como se ilustra en la figura 4 y se les pide que los identifiquen


Bloque Administrarivo


Planetario


Facultad Ciencias Ambientales


Guaducto y Facultad Ciencias Ambientales

Figura 4. Lugares del campus universitario UTP.

La mayoría de ellos pueden identificar sin problema el Planetario, la Facultad de Ciencias Ambientales y el Guaducto, pero no esta facultad que se ve al fondo del mismo. Con mayor dificultad identifican el bloque administrativo y la razón que argumentan es: "no está de frente". Se pregunta ¿desde cuál edificio o sitio pudieron haber tomado la fotografía?. Nuevamente, se hace una breve discusión sobre la importancia de la matemática y algunos conceptos geométricos básicos que retomarán en el primer curso de matemáticas.

Se presenta otra foto del Guaducto, como aparece a continuación, con el fin de hacer una aproximación mediante una parábola, para mostrar que la matemática no se queda en el aula de clase y las ecuaciones que allí se estudian, son usadas en diferentes situaciones o contextos.

Figura 5. Guaducto de la UTP.

La tercera experiencia resalta la importancia de *la matemática como soporte teórico en desarrollos científicos y tecnológicos*. No se puede desconocer el papel fundamental que juegan las matemáticas en la modelación, planteamiento y solución de problemas que surgen en varias áreas y disciplinas del saber, aspecto importante en el aprendizaje del estudiante, porque aprenden a reconocer en ellas un fundamento teórico en los adelantos científicos y el avance de éstos implican abstracción, imaginación, desarrollo de la creatividad y del pensamiento.

Para destacar esta fundamentación teórica que proporciona la matemática, se le muestra al estudiante la figura siguiente y se pide que identifique conceptos matemáticos

Figura 6. Puente Helicoidal Dosquebradas, Colombia.

Un gran número de alumnos consideran que la forma del puente es una circunferencia. Esta afirmación permite hacer la siguiente reflexión: si es un puente, ¿puede ser circular?, si es circular, ¿por donde ingresan los vehículos? y ¿por donde salen?. En seguida, se hace notar el nombre “Puente Helicoidal” consiguiendo que los estudiantes lleguen a una respuesta acertada: tiene forma de hélice, de espiral. A continuación, se introduce de manera muy rápida y sencilla una definición de helice, se presentan las ecuaciones que desde el curso de Matemáticas III o Cálculo en Varias Variables deben estudiar y se menciona la importancia que las constantes a y b representan en el diseño del puente.

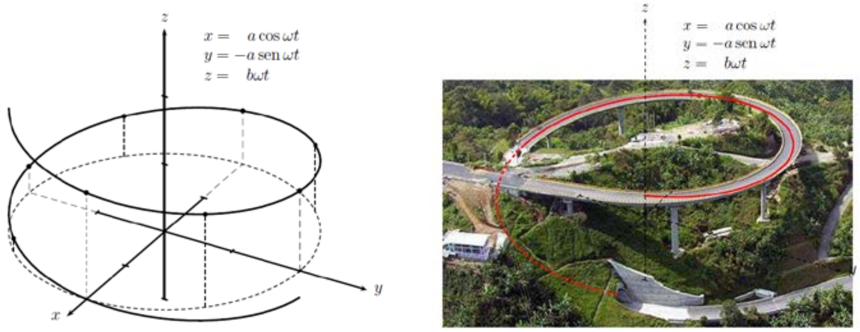


Figura 7. Hélice y puente helicoidal.

Un ejemplo más de la matemática como uno de los fundamentos teóricos en el desarrollo de otras ciencias o disciplinas es la relación con la medicina: la importancia de las habilidades matemáticas en el ámbito médico. Habilidades mostradas por el Dr. Víctor Hugo Olmedo Canchola, en su artículo “Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación”, al citar la definición de Golbeck y colaboradores cuando definen las habilidades matemáticas en salud como: “*La capacidad para acceder, procesar, interpretar, comunicar y actuar con base en aspectos numéricos cuantitativos, gráficos, bioestadísticos y probabilísticos de la información sanitaria necesaria para tomar decisiones efectivas en salud*” (Canchola, 2012).

De igual forma, la matemática está presente en especialidades como la cirugía plástica en donde se usan conceptos geométricos tales como ángulos, planos, simetrías, áreas y volúmenes, entre otros. Conceptos matemáticos más complejos como la teoría de fractales han contribuido a salvar vidas, como es el caso del estudio realizado por el físico, Dr. Antonio Brú, en el tratamiento del cáncer. Otra área que se ha venido aplicando en estudios selectos para la medicina, es el método de elementos finitos usados en la construcción de modelos continuos de tejidos, órganos, entre otros.

La última experiencia que se expone en este documento se ha denominado *el desarrollo histórico*. Se resalta la importancia de conocer problemas abiertos, conjeturas y posibles soluciones, que han permitido el desarrollo de diferentes áreas de la matemática y otras disciplinas.

No es un secreto que la mayoría de los cursos de matemáticas ofrecidos desde los primeros años hasta la universidad están aislados de la historia de sus conceptos. Se enseñan de forma tan cuidadosa y ordenada que dejan la idea que la matemática es dogmática, acabada, cerrada, estática y descontextualizada; lo cual puede ser una de las causas que hacen que los estudiantes no le vean relación con la carrera que estudian o profesión que ejercerán. Además, esta manera de concebir la enseñanza hace que los alumnos crean que todo es inmediato, que los problemas son fríos, surgen de la nada, son de solución inmediata y sin ningún esfuerzo.

Cuando se permite conocer los conflictos, frustraciones, intentos fallidos y largos caminos, incluso por siglos, que están detrás de un concepto, una teoría, un teorema, una estructura, etc. animan a cualquier estudiante, incluso a motivarse por la investigación y puede hacer parte de un recurso didáctico para el docente.

Conocer la historia de la matemática, permite resaltar la importancia de temas diversos que se articulan en un contexto histórico, particular o general. Además, exhibe una idea general del tema, lo relaciona con diferentes disciplinas, áreas y líneas centrales el pensamiento matemático, así como las dificultades y obstáculos epistemológigos del concepto. Como se afirma en el artículo La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza: "la Historia de la Matemática pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su notable impacto en la Historia del Pensamiento." (González, 2004).

Un ejemplo de actividad que se trabaja con los estudiantes para ilustrar la experiencia inicia con la pregunta ¿Existe alguna relación entre la matemática y los mensajes escritos de forma secreta? Al notar que la mayoría, por no decir todos, no tienen ni idea de una posible respuesta, se hace otra pregunta ¿conocen aplicaciones en la vida diaria donde se usen los números primos? Silencio total, ¿dado un número es fácil conocer si es primo o compuesto? Hay respuestas absolutas, si. Esta respuesta es el reflejo de lo que enseñó el profesor y lo que siempre hizo en el aula, propuso ejemplos con números de pocos dígitos, así que el alumno quedó totalmente convencido que decidir si un número es primo o compuesto es tarea fácil. Cuando se les cuenta que en la práctica es un problema computacionalmente difícil de resolver, es más, es un problema NP-completo y se explica que quiere decir esto, se nota el interés que el hecho genera. Más aún, cuando se hace un breve recorrido histórico sobre la necesidad del hombre en escribir mensajes que no pudieran ser entendidos por cualquier persona, es decir, mensajes encriptados. El interés crece y se mantiene cuando se habla de las diferentes aplicaciones, no sólo de descifrar un mensaje como ocurría en siglos pasados, en guerras o en otros escenarios, sino como la criptografía se ha introducido en la vida diaria, como en la firma digital, el acceso a redes mediante el usuario y la clave, en las transacciones comerciales vía intranet o en la propia información registrada en una tarjeta débito o crédito.

Conclusiones

Un gran número de estudiantes quedan inquietos por profundizar en temas en los cuales la matemática ayuda en su modelación o solución de algún problema cotidiano o que surgirá en su profesión.

La mayoría de las personas no perciben la matemática, ni la reconocen en las actividades que realizan cotidianamente, ni en el entorno que los rodea. La imagen que se han formado acerca de ella es que son solo números, ecuaciones, cálculos y fórmulas. Una de las principales causas de esto es una enseñanza centrada únicamente en el aspecto disciplinar de la misma, en la cual no se ha tenido en cuenta el aporte que esta hace a otras áreas y ciencias, así como las herramientas que ofrece para modelar el mundo y la realidad en que vivimos, conllevando un rechazo hacia su aprendizaje y falta de motivación por su estudio.

Referencias y bibliografía

Canchola, V. (2012). Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación. *Revista Medicina Interna de México,* 28(3):278-281.

Cordón Oscar. (2007). Imitar las hormigas para resolver problemas empresariales. *Matenomía: blog de las aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.* http://grupos.emagister.com/documento/imitar_a_las_hormigas_para_resolver_problemas_empresariales/1015-368953

D´Amore, B. (2008). Matemática en todo. Editorial Magisterio. Bogotá.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, España, 45: 17-28.

http://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Sanz Serna Jesús María. (2008). Matemáticas y medicina. *La Gaceta de la RSME*, 11(50), 665 – 677.

Uzuriaga, V. & Martínez, A. (2010). Algunas experiencias que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista Entre Ciencia e Ingeniería*, Universidad Católica de Pereira. 3 (6):112-128.

Uzuriaga, V. Martínez, A. & González, C. (2012). La matemática más allá de simples números y ecuaciones. *Revista Ciencia et. Thecnica*. 50, 112-117.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Ambiente Virtual de Aprendizagem: uma possibilidade de ressignificar o ensino de Matemática.

Tanise Paula Novello
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
tanisenovello@furg.br

Débora Pereira Laurino
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
deboralaurino@furg.br

Resumo

O Mathemolhes é um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), que propõe a construção de conhecimentos e conceitos matemáticos e ambientais; o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e a ampliação da consciência ambiental, a partir da exploração e problematização de situações problemas contextualizadas em uma realidade local envolvendo a preservação e o cuidado com o ambiente costeiro. No ambiente virtual encontram-se jogos, desafios, curiosidades e atividades em torno de questões ambientais e matemáticas inseridas em um cenário real que é a orla da Praia do Cassino (Brasil, Rio Grande/RS). Esse artigo traz a análise de interações, ocorridas nos diferentes espaços do Mathemolhes mostrando as percepções das professoras acerca das potencialidades pedagógicas desse ambiente para trabalhar conceitos da Matemática. A discussão é realizada pela articulação das falas das professoras com a teoria que balizam esse estudo, na intenção de compreender as potencialidades a partir das práticas pedagógicas vivenciadas por esse coletivo de professoras.

Palavras chave: ambiente virtual, aprendizagem, matemática, tecnologia.

Introdução

No atual contexto escolar da sociedade é praticamente impensável fazermos algumas tarefas sem a presença da tecnologia. Na escola, a tecnologia assume papel expressivo especialmente em atividades administrativas facilitando o fechamento de notas, tabulação de presenças, a emissão do histórico dos alunos entre outras. Contudo, chega o momento em que a tecnologia suscita por espaços que vai além do administrativo e ocupa seu lugar onde será mais útil e com potencial pedagógico latente: a sala de aula.

As aulas expositivas, nas quais são utilizados apenas o quadro-negro, o giz e o livro didático, já não satisfazem as expectativas e o desejo dos estudantes. Nesse sentido, viabilizar ações sócio-ambientais através de atividades, de problematização, de situações de confronto é papel do educador. Para Piaget (1978) só agindo é que fazemos experiências e só através de nosso fazer é que chegamos à consciência dos objetos. Enquanto não esbarramos em obstáculos realizamos ações rotineiras, sem estarmos conscientes de detalhes de nosso fazer.

Um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) poderá se constituir em um recurso, para que educandos e educadores desenvolvam seu potencial criativo e lúdico e através da interação, das trocas sintam-se sujeitos de seus saberes, possibilitando a constituição de uma rede de tecnologias intelectuais com ênfase na relação entre os elementos, na forma com que esses se entrelaçam, se complementam e se modificam, ampliando e transformando as maneiras de agir e pensar (Laurino, 2001).

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem representam possibilidades de experiências cooperativas e envolvem aspectos importantes no processo de crescimento dos estudantes e professores em que o operar com as tecnologias amplia e modifica o espaço e as oportunidades de aprender, além de dinamizar as práticas pedagógicas. Nesses ambientes a cooperação virtual vem apoiar o processo de desenvolvimento cognitivo e social visando à construção coletiva de conhecimentos, pelo compartilhamento de experiências, informações, dúvidas, desejos e descobertas em tempo real (Novello, 2006).

A intenção do artigo é trazer a análise de interações de professoras, ocorridas nos diferentes espaços do Mathemolhes mostrando as percepções delas acerca das potencialidades pedagógicas desse ambiente para trabalhar conceitos da Matemática. O experienciar das professoras ocorreu em oficinas pedagógicas e atividades desenvolvidas em suas escolas com seus alunos no Mathemolhes. As oficinas pedagógicas foram desenvolvidas para 12 professoras do ensino fundamental da rede municipal, sendo que a participação na oficina vinculava, necessariamente, a professora a trabalhar no Mathemolhes com um grupo de alunos em sua escola. Porém, algumas professoras não se restringiram a trabalhar somente com um grupo, realizando as atividades no AVA com outras turmas de estudantes.

Possibilidade para a construção de conhecimentos matemáticos

O AVA Mathemolhes (http://www.mathemolhes.ceamecim.furg.br) é um ambiente educativo que viabiliza a cooperação virtual, é formado por espaços virtuais de aprendizagens que problematizam questões matemáticas e ambientais, voltado especialmente para estudantes de 6º a 9º ano do ensino fundamental, o que se justifica pelo fato de os conteúdos curriculares conceituais dessas séries estarem enfatizados nas atividades propostas.

No ambiente virtual encontram-se jogos, desafios, curiosidades e atividades em torno de questões ambientais e matemáticas inseridas em um cenário real que é a orla da Praia do Cassino (Brasil, Rio Grande/RS). As situações problemas trazem dados e informações estatísticas, geográficas e culturais atuais, com ênfase no ambiente local, instigando os alunos a refletirem suas práticas, buscarem possíveis soluções que utilizam a lógica matemática, conduzindo, assim, a abstração dos conceitos.

O Mathemolhes é apresentado por dois personagens, habitantes característicos da Praia do Cassino, que são um leão marinho (Leomar) e um siri (Sirico), presentes em todos os cenários. Na interação, esses personagens conduzem os visitantes virtuais a navegar pela orla desafiando-os a explorar e interagir no ambiente. Os educandos são convidados a enviarem soluções e comentários para os desafios, sugerir e opinar sobre as soluções já enviadas por outros usuários, bem como e interagir em espaços de bate-papo, lista de discussão; tecendo assim, passo-a-passo, os fios de uma rede de conhecimentos.

Ao acessar o AVA, os visitantes são convidados a preencher um cadastro para que se tornem membros da comunidade, e as interações no AVA sejam armazenadas e identificadas.

Os personagens conduzem os visitantes a desvendar e conhecer a orla da praia, as dunas, o espaço da Iemanjá, a passarela, os molhes da barra e navio encalhado (Figura 1), isto é as seis regiões (subambientes) da praia do Cassino que compõem o AVA.

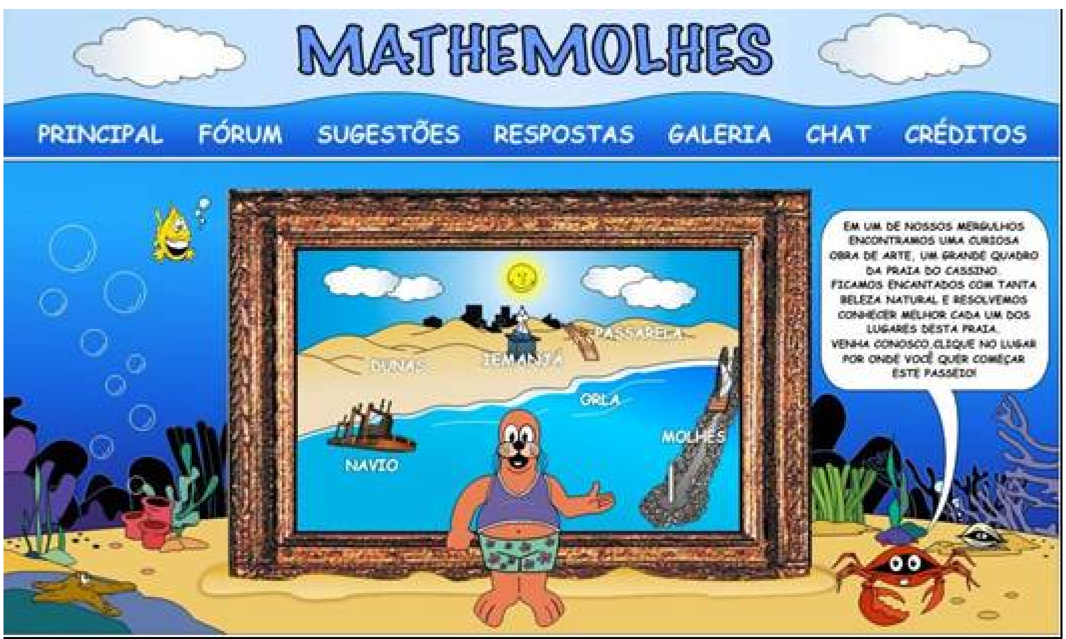


Figura 1. Cenário principal do AVA

A partir da interação através de desafios, jogos, dicas, curiosidades e atividades estudantes e professores poderão construir conhecimentos e conceitos matemáticos e ambientais, estimulando o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e a ampliação da consciência ambiental, uma vez que "o conhecimento progride não tanto por sofisticação, formalização e abstração, mas, principalmente, pela capacidade de contextualizar e englobar" (MORIN, 1997, p.15). Nessa perspectiva, o Mathemolhes configura-se como um ambiente em que os conhecimentos estão integrados, isto é, um AVA que dialoga com todas as áreas do saber, mesmo que as dimensões ambiental e matemática que permeiam o AVA sejam mais visíveis.

O Mathemolhes é um ambiente gráfico que induz à leitura e interpretação, para além da textual, incentivadas pela possibilidade de composição de novos desafios e informações para serem disponibilizadas no ambiente. A galeria de imagens é um espaço para desenhos, fotos e figuras que pode ser criado e recriado pelos sujeitos que interagem no ambiente. A produção textual é atualizada na elaboração e envio de respostas aos desafios propostos, na composição de novos desafios e informações para serem disponibilizadas no ambiente e nas interações síncronas e assíncronas.

Dessa forma, a arquitetura do AVA torna a dinâmica da interação aberta e flexível, uma vez que os sujeitos que habitam o Mathemolhes o recriam na convivência, através de questionamentos, contribuições e críticas. A cada solução provisória o ambiente é atualizado e sua virtualidade é modificada a cada problematização, da mesma forma os sujeitos são transformados na/pela interação.

Proposta Pedagógica

O experienciar das professoras ocorreu em oficinas pedagógicas e atividades desenvolvidas em suas escolas com seus alunos no Mathemolhes. As oficinas pedagógicas foram desenvolvidas para 12 professoras do ensino fundamental da rede municipal, vinculados a escolas que participam do Projeto ESCUNA. Dois acadêmicos dos cursos de licenciatura da FURG, que atuam como bolsistas nas escolas, também participaram das oficinas com as professoras. As escolas fazem parte do projeto desde 2003 e contam com uma sala equipada com computadores ligados à Internet e uma professora (20h/a) que realizou o curso de Especialização em Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação oferecido pela FURG, e atua como articulador nas atividades do ESCUNA em sua escola.

As oficinas pedagógicas foram realizadas com encontros semanais a distância (4) e presenciais (4) no Núcleo de Tecnologia Educacional (NTE) do município do Rio Grande. A participação na oficina vinculava, necessariamente, a professora a trabalhar no Mathemolhes com um grupo de alunos em sua escola. Porém, algumas professoras não se restringiram a trabalhar somente com um grupo, realizando as atividades no AVA com outras turmas de estudantes.

Como método de análise utilizou-se a Análise Textual Discursiva, proposto por Moraes e Galiazzi (2007), que busca aprofundar a compreensão dos fenômenos investigados. Os dados foram organizados em categorias, não definidas a priori, que emergiram da dinâmica entre o estudo teórico e o processo de análise dos dados. As categorias são decorrentes do processo de unitarização, técnica que produz a fragmentação de informações desestruturando sua ordem, produzindo um conjunto desordenado e caótico de unidades. O aperfeiçoamento e a delimitação das categorias aconteceram através do retorno cíclico aos dados agrupados, na construção de diferentes níveis de categorias: iniciais, intermediárias e finais, em ordem crescente de abrangência. Na intenção de manter o anonimato, os sujeitos que interagiram no ambiente esses serão identificados por um nome popular de espécies de peixes típicos da região sul do Estado.

A seguir, são apresentadas e analisadas as discussões tecidas por professoras durante as oficinas realizadas, que interagiram nos diferentes espaços do ambiente, sobre as potencialidades pedagógicas do Mathemolhes para trabalhar conceitos da Matemática.

Potencialidades do Mathemolhes para o ensino de Matemática

Ao pensar e problematizar o AVA desvelaram-se os problemas ambientais, que sempre são complexos e requerem a intervenção de conhecimentos de várias disciplinas para as suas soluções (Dias, 2000). Por outro lado, verificou-se que o contexto local pode ser tomado como tema gerador para trabalhar conceitos de diferentes áreas do saber, aliado a problemáticas reais, especialmente aquelas vinculadas à matemática uma vez que essa área do conhecimento aparece no AVA explicitamente. Trabalhar conceitos matemáticos a partir de situações-problemas contextualizadas na realidade local instigou os professores a desenvolverem e apontarem sugestões e estratégias de como explorar os desafios integrando-os a sua prática de sala de aula.

- Sobre a sugestão... - **Tainha** - 11/07/2005 - 10:27:19
  Seria interessante um desafio em que eles deveriam achar quantas possibilidades diferentes de pintar aquelas pipas, por exemplo. Cada um mandaria sua resposta e creio que uns achariam mais que outros e estes por sua vez, ficariam enlouquecidos tentando achar mais!!!

  Sobre a sugestão... - **Tainha** - 11/07/2005 - 10:29:14
  É uma alternativa! Nós pensamos que seria mais interessante poucos alunos em cada computador, para que pudessem interagir mais. E depois de agosto, prometi que todos, em grupos pequenos, irão poder conhecer esse AVA e interagir. Será que vamos encontrar outras escolas ou o pessoal vai parar após esse curso?

  Pintar é uma ótima idéia!! - **Merluza** - 11/07/2005 - 10:31:45
  Podemos sugerir aos alunos que pintem pipas no novo paint que será instalado e assim poderão criar a vontade.

Extrato do fórum: Discutindo o Mathemolhes

O trabalho com situações-problemas, proposto no Mathemolhes, incentiva os alunos a criarem estratégias e atribuírem significado aos conceitos. Durante os encontros, os professores relataram a dificuldade de desenvolver atividades que vinculem os conteúdos matemáticos a situações reais e próximas das vivências de seus alunos.

- **Mathemolhes** - **Tainha** - 27/06/2005 - 10:16:43

  Penso que os alunos irão adorar trabalhar a Matemática, através das questões ambientais e desafios propostos no Mathemolhes.

  - matematica - **Papa-terra** - 27/06/2005 - 10:25:16
    OI Tainha... temos a mesma area de formacao, a matematica esta sempre presente nos diversos contextos...

    - matematica - **Peixe-espada** - 27/06/2005 - 10:30:58
      concordo, muitas vezes a matemática é retratada como difícil e sem aplicação. Espero q o Mathemolhes sirva como uma mudança no ensino.

      - Possibilidade - **Papa-terra** - 27/06/2005 - 10:39:21
        Concordo com vc Peixe-espada, talvez a dificuldade da Matemática esteja muito associada a usa falta de aplicabilidade... esperamos que o Mathemolhes venha contribuir de alguma forma, como uma possibilidade...

    - Aplicabilidade - **Tainha** - 27/06/2005 - 11:6:59
      Concordo que a Matemática está presente em diversos contextos, mas muitos de nós ainda temos dificuldade de encontrá-la ou encontramos uma aplicabilidade distante da realidade dos alunos, o que complica muitas vezes complica mais. Mas a praia e as questões ambientais estão bem pertinho, é mais fácil para todos

Extrato do fórum: Oficinas

Nota-se essa dificuldade relacionada ao professor de matemática na fala da professora Tainha. A contextualização aparece do discurso das professoras como uma possibilidade, como uma ideia que pode vir a ser, mas que nem sempre se concretiza. Micotti (1999, p.162) ressalta a importância do ensino da Matemática vinculado a situações da vida cotidiana:

> O caráter abstrato dos estudos matemáticos surpreende os principiantes nos primeiros contatos com um mundo de idéias e representações, desprovidas das particularidades das coisas materiais. Apesar de a matemática ser utilizada e estar presente na vida diária, exceto para quem já compartilha deste saber, as idéias e os procedimentos matemáticos parecem muito diferentes dos utilizados na experiência prática ou na vida diária.

Promover o desenvolvimento de atividades que provoquem o envolvimento, a participação ativa dos alunos e a interação, suscita articulação entre contextos e informações para a construção de conhecimentos. Vejam-se os relatos que seguem:

> **Peixe-espada** - 05/08/2005 - 9:41:28
> É muito interssante ver o primeiro contato dos alunos com o Mathemolhes, eles ficam maravilhados com as imagens e com os desafios. A matemática não fica retratada como uma matéria difícil e cansativo
>
> **Extrato do fórum: Fechamento das oficinas**

> **Matemática divertida!!** - **Merluza** - 05/08/2005 - 9:29:43
> Que bom que gostaram de aprender matemática aqui neste ambiente. Realmente é muito divertido e diferente. Trata das coisas que a gente conhece: o Cassino.
>
> **Extrato do fórum: O que acharam do Mathemolhes?**

Disponibilizar meios alternativos de aprendizagem, como os ambientes virtuais, pode ser um dos caminhos a serem percorridos por alunos e professores, permitindo conforme no diz Freire (1998) que se reconheçam como arquitetos de sua própria prática cognoscitiva. Ambientes virtuais de aprendizagem são espaços que dispõem de condições e estratégias organizados de tal forma que propiciam a verificar a construção de conceitos por meio da interação entre os sujeitos (professores e alunos) e objetos de conhecimento. Através da interação os sujeitos podem se tornam co-autores do AVA, pois produzem o AVA enquanto o atualizam.

No extrato abaixo a professora extrapola o que vinha sendo discutido em relação à importância de contextualizar conceitos ressaltando a importância dos sujeitos que interagem no AVA para além dos conceitos escolares, ou seja, o espaço de cidadania contemplado nas discussões do Mathemolhes. Tal fato reforça que as questões sociais e ambientais necessitam estar presente em ambientes virtuais uma vez que trazem à tona aspectos significativos da educação como o reconhecer-se cidadão.

- água potável e fração - **Peixe-espada** - 27/06/2005 - 10:38:43
  É mesmo Tainha! De que adianta somar frações se não entendermos a fração de água potável que temos em nosso planeta!

  - oi Peixe-espada!!!! - **Abrótea** - 27/06/2005 - 10:43:16
    Além de poder ter a possibilidd de mostrar ao aluno q é posssível entender a fração da matemática e a da água, há a possibilidd tb de auxiliar o aluno a se percber cidadão, p/ q esta palavra não acabe tão distordcid c/oestá atualmente

Extrato do fórum: Oficinas

Para Moraes (2004), é papel da escola criar espaços e situações que potencializam a interação, o que implica interagir nos contextos social, afetivo e cultural que influenciam os mecanismos de assimilação dos objetos do conhecimento, o desenvolvimento da aprendizagem e a maneira como as competências humanas evoluem. Conviver em espaços que possibilitam desenvolver pensamento criativo e reflexivo, fortalecer a auto-estima das pessoas e praticar capacidades de interação e participação é educar para a cidadania.

Pela interação aprendemos, nos expressamos, confrontamos nossas experiências, idéias, realizações; buscamos ser aceitos, acolhidos pela sociedade, pelos colegas, por alguns grupos significativos (Moran, 1998). Os registros nos diferentes espaços do AVA Mathemolhes tornaram visíveis as trocas e interações não somente com os desafios propostos, mas com as respostas enviadas. O seguinte recorte relata que os alunos sentiram-se desafiados a interagir não só com o ambiente, mas também a enviar comentários sobre as soluções enviadas por outros estudantes.

- mathemolhes - **Mangangá** - 11/07/2005 - 10:1:57

  Nossos alunos ficaram empolgadíssimos resolvendo os desafios propostos, mas principalmente ao interagir nas respostas dos "colegas" de outras escolas.

Extrato do fórum: Discutindo o Mathemolhes?

Contudo, em outro diálogo os professores relataram que alguns alunos se restringiram a interagir nos questionamentos dos desafios, não enviando comentários às soluções enviadas por outros estudantes. As professoras relataram que os alunos estavam ansiosos esperando que outros colegas interagissem com eles através das soluções enviadas, porém ficaram chateados, pois ninguém havia interagido. Outro aspecto revelado pela professora Tainha é o receio que os alunos tiverem em comentar as soluções já enviadas, talvez por insegurança ou timidez. Na fala seguinte a professora complementa, deixando evidências de que os alunos estão preocupados em se exporem em virtude do acerto ou do erro.

- Interação - **Maria Luiza** - 05/08/2005 - 10:2:42
  No 2º encontro, eles procuraram respostas as suas e não encontrando ficaram decepcionados.

- resposta - **Goete** - 05/08/2005 - 10:3:58
  Peixe-espada, reparamos que os alunos não interagiram com as outras respostas eles só se preocuparam em responder aos desafios sem olhar a resposta dos outros, parecia que estavam fazendo uma prova

- Respostas - **Tainha** - 05/08/2005 - 10:10:31
  Não observei interações. Eles até observavam as outras respostas, mas era como se não "quisessem se intrometer". Fiquei surpresa porque observei que enviaram nuitas vezes as mesmas respostas!

Extrato do fórum: Discutindo o Mathemolhes

- Reflexão - **Tainha** - 05/08/2005 - 9:34:53

  Os alunos adoraram o Mathemolhes. No início ficaram preocupados com as respostas que estavam enviando, queriam que eu dissesse se estavam certos, estavam com medo do erro e do que outras pessoas poderiam falar ou fazer com as respostas erradas. Procurei tranqüilizá-los quanto a isso...

Extrato do fórum: Fechamento das oficinas

Uma característica do espaço digital é sua capacidade de constante e rápida atualização, o que viabiliza o fazer e o refazer contínuo, transformando o erro em possibilidade de novas aprendizagens. O digital favorece, ainda, a alunos e professores o acompanhamento do processo de (re)elaboração sem perdas do que já foi criado, pela potencialidade de organizar e manter os registros e produção de novos saberes.

No Mathemolhes o aprender é entendido como processo produtivo em que o ato de experimentar assume importância, englobando naturalmente o erro. O erro é importante e parte integrante do processo de aprender e, de certa forma, é desejável para que o acerto seja construído de maneira mais sedimentada e consistente. Nesse sentido, o ambiente não tem como intuito que os usuários enviem soluções únicas, acabadas e prontas, mas deseja fomentar discussões e instigar o envio de possíveis respostas aos desafios propostos e às soluções já enviadas por outros usuários, de forma recursiva.

A apropriação da utilização da tecnologia pelos educadores poderá gerar novas possibilidades de utilização educacional, tornando-se imprescindível criar condições para formação dos professores, proporcionando a construção gradativa de suas competências para a utilização dos recursos informatizados. Perrenoud (2000, p. 128) aponta que “formar para as novas tecnologias é formar o julgamento, o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, as faculdades de observação e de pesquisa, a imaginação, a capacidade de memorizar e classificar, a leitura e a análise de textos e de imagens, a representação de redes, de procedimentos e de estratégias de comunicação”.

Durante as discussões das atividades desenvolvidas no Mathemolhes, as professoras enfatizaram a necessidade e a urgência de se articularem para desenvolver ações conjuntas que tornem possível a integração dos diferentes saberes nas diversas disciplinas.

> a atitude interdisciplinar não está na junção de conteúdos, nem na junção de métodos; muito menos na junção de disciplinas, nem na criação de novos conteúdos produtos dessas funções; a atitude interdisciplinar está contida nas pessoas que pensam o projeto educativo. (Fazenda, 1993, p.64)

Participar das oficinas pedagógicas e experienciar o Mathemolhes foi um primeiro passo para as professoras (re)pensarem sua prática nesse novo contexto, no qual ninguém tem a posse do saber e todas as pessoas sempre sabem algo que as torna importantes quando juntas, constituindo a inteligência coletiva, que só será alcançada quando o educar acontecer num clima de confiança (Lévy, 1997). Assim, as interações pessoais e grupais ultrapassam o conteúdo para, através dele, ajudar a construir um referencial rico de conhecimento, de emoções e de práticas entre alunos e professores.

A educação inserida no contexto das tecnologias necessita constituir-se num processo de comunicação aberta entre professores e alunos, no qual o professor assume uma nova relação no ensinar e aprender, tornando seu fazer mais flexível e participativo, ao considerar o ritmo e as habilidades específicas de cada aluno.

Os relatos das professoras mostraram a necessidade de criação de espaços que ensejem discussão e vivência da tecnologia, num processo conjunto de teoria e prática. As possibilidades encontradas pelo grupo ao explorar o ambiente evidenciaram que o Mathemolhes será sempre (re)configurado e (re)organizado.

Conclusões

Esse artigo tem o intuito de apontar algumas possibilidades e limites educacionais do AVA Mathemolhes, assim como identificar propostas metodológicas e as potencialidades pedagógicas para trabalhar conceitos da Matemática, apontadas pelas professoras no trabalho com o ambiente virtual.

Nesse sentido, percebeu-se que o AVA Mathemolhes distingue-se dos demais ambientes por apresentar uma intencionalidade pedagógica. Assim, a discussão é realizada pela articulação das falas das professoras com alguns autores que balizam esse estudo (Ramal, 2002; Micotti, 1999; D’Ambrosio, 1986), na intenção de compreender as potencialidades a partir das práticas pedagógicas vivenciadas por esse coletivo de professoras.

Pelas interações percebeu-se que o contexto local pode ser tomado como tema gerador para trabalhar conceitos de diferentes áreas do saber, aliado a problemáticas reais, especialmente aquelas vinculadas à matemática uma vez que essa área do conhecimento aparece no AVA explicitamente. Trabalhar conceitos matemáticos a partir de situações-problemas contextualizadas na realidade local instigou as professoras a desenvolverem e apontarem sugestões e estratégias de como explorar os desafios integrando-os a sua prática de sala de aula, uma vez que essa forma de trabalhar incentiva os alunos a criarem estratégias e atribuírem significado aos conceitos.

As professoras salientaram, ainda, que trabalhar no Mathemolhes possibilitou valorizar a participação e o diálogo permanente de todos os envolvidos no processo de aprendizagem, devido à possibilidade de interação simultânea em um mesmo espaço. As interações no ambiente permitiram que alunos e professoras realizassem trabalhos coletivos, nos quais os envolvidos trocaram idéias, negociaram e compartilharam propostas, a fim de atingir objetivos comuns. No trabalho coletivo, o professor atuou como dinamizador considerando as variáveis que apareceram em cada situação, elaborando estratégias para desafiar e instigar a participação ativa dos envolvidos no processo de construção, seja ela coletiva ou individual, do conhecimento. Essa dinamização, em alguns, casos ainda está presa a práticas reguladoras, como por exemplo, o cuidado com o que é escrito no fórum, a indicação a responder um determinado desafio e o controle dos caminhos que estão sendo percorrido pelos alunos no AVA.

Por outro lado, a oportunidade de conviver com seus alunos no virtual permitiu às professoras (re)pensar seu papel enquanto docente e ir assumindo outras posturas, extrapolando o preceito de ser “dono da verdade”, daquele que tem o domínio da matéria que ministra, ou ainda mesmo, de ser o representante de todos os saberes, capaz de ter respostas para tudo.

O ambiente configurou-se em um espaço de trocas de saberes, compartilhamento de dúvidas e de busca de estratégias e soluções conjuntas. A aposta é que na convivência com o outro se estabeleçam relações de respeito mútuo, horizontalizando hierarquias entre os envolvidos, assentando postura de tolerância, respeito e humildade na convivência com as diferenças do outro, num processo constante de negociação.

A aprendizagem no contexto virtual pode alterar intensamente a relação professor-aluno e a dinâmica das aulas. As ferramentas de interação – fórum, chat, formulários de respostas –, disponíveis no Mathemolhes potencializaram a proximidade das professoras com seus alunos e com seus pares, auxiliando-as a compreender os interesses e dúvidas dos alunos, assim como considerar o conhecimento sob novas perspectivas.

Através dos relatos das professoras pôde-se verificar que a organização do Mathemolhes transcende as barreiras hierárquicas e a compartimentalização dos conhecimentos, por meio de uma estrutura que privilegia a integração das diversas áreas do saber sem uma concepção linear pré-determinada. O AVA tem uma intencionalidade em torno de questões matemáticas no contexto ambiental, porém não se restringe a essas áreas, apresentando conceitos de diversas áreas do conhecimento contextualizados em situações reais que permite ao educando abstrair, atribuir significados e estabelecer relações.

Espera-se que o AVA Mathemolhes se configure em um ambiente que auxilie o professor a inserir a tecnologia no seu fazer pedagógico, assim como trabalhar as questões ambientais de forma integrada e ampla. Conviver em ambientes virtuais de aprendizagem dinâmicos e culturalmente ricos – pelas diferenças que o compõem – possibilita a construção e aplicação de conhecimentos, em diferentes contextos, através da interação e trocas com o outro. Dessa forma, o Mathemolhes pode se constituir num espaço de convivência que amplia e modifica as formas atuais de ensinar e de aprender, na busca conjunta por uma comunidade virtual de aprendizes, constituindo-se na cidadania e na solidariedade, mesmo sem que se saiba, a priori, o rumo que tomarão as interações.

REFERÊNCIAS

D´ambrosio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo : Summus.

Dias, G. (2000). *Educação Ambiental: princípios e práticas*. 6 ed. São Paulo: Gaia.

Fazenda, I. (1993). *Interdisciplinaridade: um projeto em parceria*. São Paulo: Loyola.

Freire, P. (1998). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 8.ed. São Paulo: Paz e Terra.

Laurino, D. (2001). *Rede virtual de aprendizagem - interação em uma ecologia digital.* Porto Alegre. 153p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Faculdade de Educação, Departamento de Psicologia, Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Levy, P. (1997). *A inteligência coletiva: para uma antropologia do ciberespaço*. Lisboa: Instituto Piaget.

Micotti, M. C. (1999). *O ensino as propostas pedagógicas*. In: BICUDO, Maria Aparecido. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Ed.UNESP.

Moraes, R.; Galiazzi, M. (2007). *Análise textual discursiva*. Ijuí: Unijuí.

Moraes, M. C. (2004). *Pensamento eco-sistêmico: educação, aprendizagem e cidadania no século XXI*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Morán, J. M. (1998). *Mudanças na comunicação pessoal*. São Paulo: Paulinas.

Morin, E. (1997). *Complexidade e ética da solidariedade*. In: CASTRO, Gustavo. et al. Ensaio de complexidade. Porto Alegre: Sulina.

Novello, T. (2006). *Investigando a interação das professoras no Ambiente Virtual Mathemolhes*. Rio Grande, 97p. Dissertação (Mestrado em Educação Ambiental), Universidade Federal do Rio Grande - FURG.

Perrenoud, P. (2000). *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Piaget, J. (1978). *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.* 3ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Ramal, A. C. (2002). *Educação na cibercultura: hipertextualidade, leitura, escrita e aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

An activity involving geometry, arithmetic and numerical representations

Denis **Tanguay**
Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques
Québec, Canada
tanguay.denis@uqam.ca
Fabienne Venant
Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques
Québec, Canada
venant.fabienne@uqam.ca
Mireille Saboya
Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques
Québec, Canada
saboya.mireille@uqam.ca
Loïc Geeraerts
Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques
Québec, Canada
geeraerts.loic@uqam.ca

Summary

We propose the a priori *analysis of an activity involving geometry, arithmetic and numerical representations of rational numbers. It starts with a geometric manipulation with GeoGebra and gradually leads students to consider the divisors of 360 and to reflect upon approximations and exact representations of angle measurements. A first 'off-class' experiment is presented and discussed, as a case study. Through it, we acknowledge that it is possible to design suitable teaching situations, so as to make students reflect in a meaningful context on the dualities* ideal object / visual representation, exact measurements / approximations, *and on the type of certainty intended from a mathematical standpoint. The activity takes place in the 'geometer-physicist' paradigm proposed by Tanguay & Geeraerts (2012, 2013) and instilled by Jahnke (2007, 2010).*

Resumen

En este texto presentamos el análisis de una actividad que combina la aritmética y la geometría y suscita un trabajo sobre las representaciones de los números racionales. A través una serie de manipulaciones geométricas con GeoGebra, los alumnos examinan los divisores de 360 y reflexionan sobre las aproximaciones y las representaciones de la mesura exacta de los diferentes ángulos creados. Una primera experimentación que tuvo lugar fuera del aula de clase es presentada en este texto y discutida como estudio de caso. El ánalisis nos permite concluir que es posible elaborar situaciones de enseñanza construidas para que los alumnos reflexionen, en un contexto frúctuo y significativo, sobre las dualidades objeto ideal / representación visual, medidas exactas / aproximaciones*, y sobre los tipos de certezas requeridos en las matemáticas. Este actividad se inscribe en el paradigmo del geómetra-físico, propuesto por Tanguay & Geeraerts (2012, 2013) bajo la influencia de las investigaciones de Jahnke (2007, 2010).*

Résumé

Nous proposons l'analyse a priori *d'une activité qui convoque arithmétique et géométrie, et suscite un travail sur les représentations des nombres rationnels. Elle est initiée par des manipulations géométriques avec GeoGebra, et conduit progressivement les élèves à examiner les diviseurs de 360 et à réfléchir au sujet des approximations et des représentations exactes des mesures d'angles en jeu. Une première expérimentation « hors classe » est présentée et discutée, comme étude de cas. Nous en concluons qu'il est possible d'élaborer des situations d'enseignement construites pour que les élèves réfléchissent, en contexte riche et significatif, aux dualités* objet idéal / représentation visuelle, mesures exactes / approximations*, et aux types de certitude visés par les mathématiques. L'acitivité a pour cadre le paradigme du géomètre-physicien, proposé par Tanguay & Geeraerts (2012, 2013) sous l'impulsion des travaux de Jahnke (2007, 2010).*

Key words : geometry, arithmetic, regular polygons, number representations, dynamic geometry software, measurement, empiricism, geometer-physicist paradigm

Projet CRSH du Canada n° 169912. The authors also express their gratitude to Lourdes Guerrero and Christian Morales, from *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo* (UMSNH), Morelia, Mexico.

Jahnke's framework on empiricism in mathematics

According to Jahnke (2007), dealing with mathematics as in physics would provide a more harmonious transition between everyday life thinking and mathematical thinking, and a stronger epistemological foundation for teaching proof and proving. His argumentation is carried out by considering how *generality* is dealt with :

- general statements from everyday life and from physics share their empirical basis and the fact that the conditions delimiting their scope of validity is (more often) virtually unattainable;
- in *everyday life*, determining all the possible conditions of validity or non-validity is seldom relevant;
- in *physics*, physicists try to relate general statements to the most accurate domain of validity, even if their theory will always remain subject to falsification by new observed phenomena (e.g. Popper, 1963/1991);

- by contrast, determining the (exact) domain of validity of a general statement is intrinsically linked to the way *mathematics* operate : the set of conditions is fixed and closed by the building of a (preferably axiomatized) theory.

As in mathematics, general statements in physics are connected by hypothetico-deductive developments that integrate them into a network and build them up as a theory. Yet in physics, the theory does not disqualify the empirical bases but rather makes them richer : any experimental verification about a statement not only corroborates it, but also increases the conviction that all other statements connected to it in the network are true :

> The epistemological motivation of proof is not to be founded on the idea that proofs in contrast to measurement provide absolute certainty, but on the idea that proofs open new and more complex possibilities of empirical corroboration. In short, in an empirical environment *proofs do not replace measurements but make them more intelligent*. (Jahnke, 2007, p. 83, italics from the original)

Doing geometry as would do physicists in their lab

Based on Jahnke's reflections, a precise teaching framework for classroom geometry has been proposed by Tanguay & Geeraerts (2012, 2013), within what they call the *geometer-physicist paradigm*, that they situate between Natural Geometry (G-I) and Natural Axiomatic Geometry (G-II) (Houdement & Kuzniak, 2006). It claims that the class should be considered a researchers' community building a theory (Legrand, 1988), that experimentation and empirical validations should be brought back into the fold and regarded as complementary to proof. It assumes that measurement provides nothing but approximations (Tanguay & Geeraerts, 2012), this assumption being a basis to acknowledge the hypothetical status of empirically validated statements, this status being considered with (greater) care :

> It is for us symptomatic that institutional teaching resources rebuke equalities such as $\frac{4}{3} = 1{,}33$ or $\sqrt{2} = 1{,}414$, but in the same time agree without a murmur with equalities such as $mes[AB] = 5$ cm, in contexts where inferred measures and measures obtained with the geometry tools are blithely combined . (Op. cit., p. 21; our translation)

Accordingly, the issues of exactness and approximation should be fully problematized, and integrated into the quest for certainty pertaining to the statements at stake.

Measurements and numerical representations

Measurement involves going back and forth between the field of (synthetic) geometry and the field of arithmetic, between geometric figures and numbers. In problem-solving contexts, some measures are inferred — e.g. from Pythagoras' or Thales' theorems — and give rise to irrational numbers or rational numbers with infinite decimal expansion. The numerical representations may then come from different registers — e.g. quotients written in the form p/q, finite decimal, repeating decimal with ellipses or with the period overlined… — then calling for a *coordination between registers* (Duval, 1993). In these instances, the duality exactness-approximation should be a teaching goal and issue, and will inevitably echo with the approximation of rational and irrational numbers by finite decimal expansions, and in parallel with the problems of (visually) representing ideal geometrical objects and dealing with measurements from the figural representations.

Now, when measurements are not *performed* with the traditional geometric tools but rather are *red* on a screen via the specific functionalities of dynamic geometry software packages (DGSs), then students' relationship to exactness changes because they are convinced that what is displayed at the screen is necessarily exact (Kuzniak, 2010, p. 86). So it is important to plan teaching situations where students are brought to reflect on the precision of the displays, on the way DGSs handle internally the numbers and their representations, especially when they come from measurements related to the represented geometric figures. The following activity has been designed regarding these issues, through a collaboration between researchers from Quebec and Mexico.

A GeoGebra activity intertwining geometry and arithmetic

The activity is intended for students from the beginning of secondary school (12-14 years old). They work in teams of two, one team per each computer terminal. The instructions are open :

> The triangle ΔABC visible at the screen is isosceles, with [AC] ≅ [BC]. Form all the regular polygons you can by rotating ΔABC around point C. You may vary ∠ACB either with the slider α or by typing directly α, the measure of ∠ACB, in the given box. The slider *n* allows you to change the number of triangles obtained as images of ΔABC by repeated rotations around center C and of angle α. Do you know the name of each polygon you formed ? As you go, fill in the table. You can add as many lines as you want.

Measure α of ∠ACB	Number of triangles, obtained by rotating ΔABC	Name of the regular polygon you formed
	n =	
	n =	
⋮		

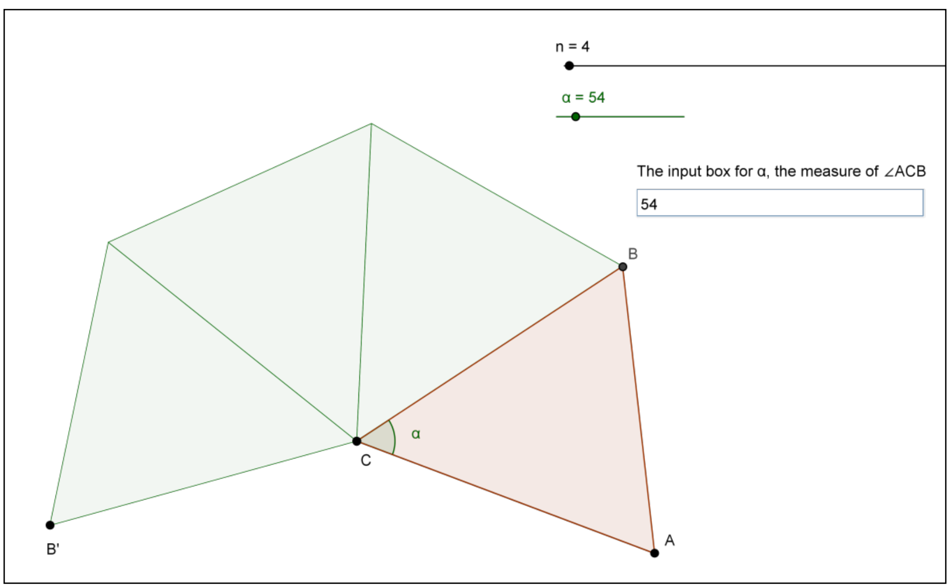


Figure 1. The GeoGebra screen given from the start

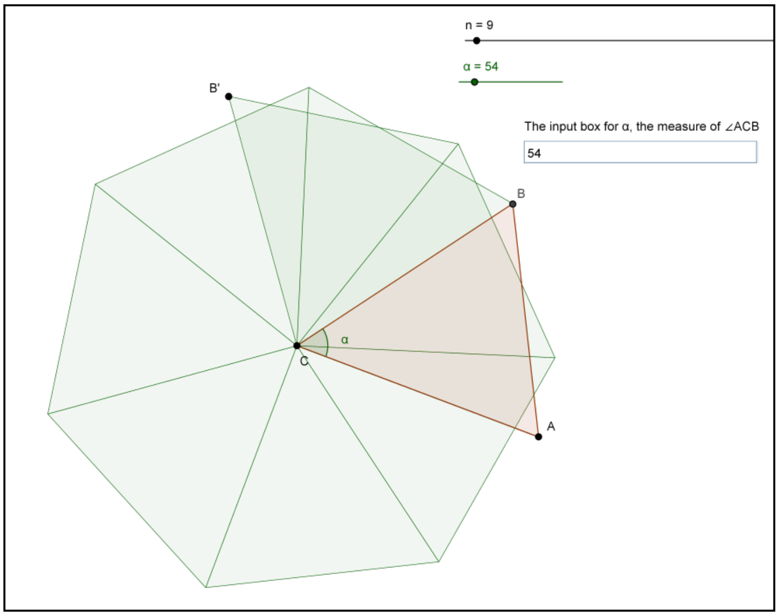


Figure 2. Increasing the number of triangles with the slider *n*

To do the task, students lean on the fact that any regular polygon can be decomposed in as many isosceles triangles as there are sides, these triangles sharing a common vertex, the center C of the circumscribed circle. Some knowledge elements are thus activated here, that the students could have previously met or that they may be discovering through the activity.

Elements of *a priori* analysis (Artigue, 1988)

We will settle for giving the outline; for a detailed analysis, see Tanguay et al. (2013). The situation can easily fill up two lessons. In the first one, while using the two sliders so as to 'close' the polygon without overlaps, students are expected to correlate the decomposition of the regular *n*-gon into *n* isosceles triangles with the divisibility of 360 by α, the measure of the central angle. In the institutionalization phase (Brousseau, 1998) concluding the first lesson, a list of the divisors of 360 may be established by the whole group, either along a decreasing list, considering α and starting with $\alpha = 120°$, or along an increasing list for *n*, starting with $n = 3$. For each couple (α, n) possible in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, the corresponding polygon is produced at the screen. A special discussion should be held to deal with the pairs (180°, 2) and (360°, 1).

In the next lesson, the teacher proposes to investigate the case $n = 7$. We anticipate that a majority of students won't enter 360/7 in the input box for α, but will rather enter the approximation they'll get from their pocket calculator. But when the entered value is not 360/7 or its approximation with at least 15 decimals[1], then a sufficiently close zoom shows a polygon

[1] Let *k* denotes the number of decimals selected in the pull-down menu (→Options →Rounding), $k = 2$ being the default, $k = 15$ being the maximum available from GeoGebra. If the entered number *is* 360/7 or an approximation with more than *k* decimals, then the number displayed by GeoGebra (version 4.0.41.0) in the α box is its approximation rounded to the *k*-th decimal. The polygon will appear well closed even after zooming only if the entered value is 360/7 or an approximation with 15 decimals or more, independently of the number displayed. So as regard the measure of ∠ACB, the relation between the entered number, the displayed number and the number used internally by the software is not transparent.

which is not well closed. Of course the teacher must show how to use the zoom and ask for a verification that the polygon is well closed.

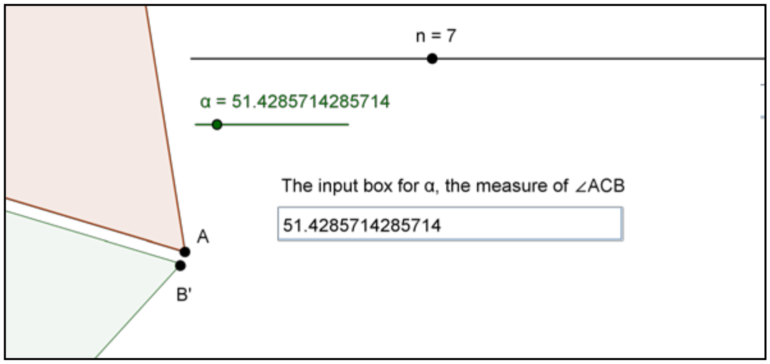


Figure 3. A close zoom, for an approximation of 360/7 with 13 decimals

The final discussion should concern the ‘exact’ decimal expansion of 360/7 — the teacher may go as far as explaining the period by carrying out the long division on the blackboard —, the value used internally by GeoGebra to deal with 360/7, and the one that should be considered in theory when the ideal figure of the heptagon is decomposed.

A first experiment, as a case study (Karsenty & Savoie-Zajc, ch. 9)

A first experiment, conducted ‘off-class’ during a week-end afternoon with four students aged 12 and 13, confirmed, to a great extent, the *a priori* analysis. Student 1 and Student 2 of Team 1 are considered strong in school mathematics. Student 2 is notably at ease with hand computation and appears eager to show this skill off. In Team 2, Student 3 is largely over average and Student 4 is plain average. The experiment consisted in two periods of 75 minutes each, separated by a 20-minute break. Each period was devoted to the corresponding above-mentioned ‘lesson’, and each ended with a 15-minute whole group discussion. Although the concern of this article is mainly related to the second period, we will outline some interesting outcomes from the first as well.

The divisors of 360 and a flat polygon

At the very beginning of their work, having quickly constructed the polygons with central angle 90°, 120° and 72°, Students 1 and 2 seemed to discern the relation $n \times \alpha = 360°$ although they didn’t explicitly state it. Indeed, they started listing the divisors of 360 by increasing the value of n with an increment of 1, Student 2 finding each corresponding value of α by hand calculation. They stopped at $n = 20$, explaining to the observing researcher that “after, it goes the other way round, … the angle measurement becomes the number of triangles and the number of triangles becomes the angle measurement”. They also explained that the numbers 7, 11, 13, 14, 17, 19 have to be skipped, because the quotient is not a whole number (« la division ne tombe pas juste », in French). When asked what was to be done with these values of n, they answered without hesitation that the corresponding polygon does not exist. During the whole group discussion concluding the first period, they argued, quite surprisingly, that the values $n = 2$ and $\alpha = 180°$ give rise to a two-sided (regular) polygon with a flat central angle, each of the two sides being reduced to a point.

The regular heptagon

In the second period, being asked to explore the case *n* = 7, Team 1 had to accept reconsidering its previous conclusion about it. Student 1 asked for a calculator but Student 2 quickly delved into the long division of 360 by 7, and soon realized that the quotient is periodic. As successive entered values for α, their attempts unfolded the numbers 51.5 – 51.42857143 – 51.428571428571 – 51.428571428572 – 51.4285714285714 – 51.42857142857142 – 51.428571428571428, this last one being displayed as 51.42857142857143 by GeoGebra. Each entered value was followed by zooming-in and only the last one resulted in a seemingly well closed polygon, even after repeated zoom-in. Nevertheless, the two students remained uncomfortable with the idea of a figure constructed from a non exact measurement for the central angle, as would soon be revealed by the concluding whole group discussion.

The following exchanges show how Team 2 became aware of the limits of the software, as much for what concerns the computation and the use of an approximate value for 360/7 by GeoGebra, as for what concerns the precision of the graphical display where the two sides [AC] and [B'C] — [B'C] being the image of [BC] in the *n*-th triangle — are supposed to coincide exactly. It is worth noting that Student 4, in principle the weakest of the four, is really the one who first expressed the idea that beyond a certain threshold, more precise numbers induce no visible effects and are thus somewhat pointless.

> Team 2 has made attempts to construct the heptagon with 2 and then 10 decimals for α. Seeing with the zoom that the polygon is not well closed, they try to enter more decimals. They ask for 'a bigger calculator, with more digits'. The researcher put on the desktop the computer calculator. Then Student 3 realizes that the number is periodic, and enter four periods in a row into the α box. They zoom and zoom and zoom and are now convinced that the polygon is well closed.
>
> Student 3 : 428571 428571 428571... it goes on like this at infinity.
> Student 4 : the more 428571 we put... Here, we can't see it because of this system, but the more we put of 428571, the more exact it gets.
> Researcher : it would mean that what you've put there, it is not perfectly exact?
> Student 4 : no, but, it's exact for the software.
> Student 3 : for the software, we've reached the maximum.
> Student 4 : we can add this at infinity but at some point, it will be, ... as an atom.
> Researcher : OK, so the software is not able to see... with more precision ... than that?
> Student 4 : nothing more to be said, we've got it now! [He refers to their first attempts and their disappointment, having seen the polygon not well closed and invalid]. It's no more human for the eyes...
> Researcher : no more human for the eyes??
> Student 4 : the eyes can't see that. [that is if the two sides don't coincide exactly, it is not visible.]
> Student 3 : it's atomic.
> *The two speaking at the same time*
> Student 4 : yes, that's it. Now, we've got to the atomic. […] We've got it, we've made it, we're Science makers!
> Student 3 : it's a more-than-perfect polygon, we are finished!

In the closing discussion between the four students and the researchers, Team 1 argued, quite radically, that since an exact (finite) decimal expansion of 360/7 is not possible, hence the regular heptagon does not exist. Team 2 didn't agree, arguing that a precision going beyond what is visible is unnecessary. The researchers concluded the debate in terms of *theory* versus *practice* : in theory, the regular heptagon exists as an ideal object, and the exact measure of its central angle is 360/7 degrees. In practice, one can always manage to obtain a representation as accurate as needed.

Conclusion

Through this case study, we may acknowledge that despite the difficulties and challenges engendered by DGSs with respect to empiricism, because of their precision and presumed infallibility, it is nevertheless possible, by designing suitable teaching situations, to make students reflect, in a meaningful context, on the dualities *ideal object – visual representation*, *exact measurements – approximations*, on the type of certainty aimed at according to a mathematical perspective and on the strong dependence this perspective nurture with *the theoretical*.

A coordination between numbers and figural representations

Team 2 really gets into the activity in accordance with the *a priori* analysis. The two students follow a trial-and-error approach in which the designed computer tool is used as a construction, exploration and validation tool, to produce representations of the targeted geometrical objects. This approach allows Team 2 to foster a coordination between related systems of *signs*, namely the numbers as measurements and the displayed figural representations, so that in this instance the technological setting can be assessed as a *tool of semiotic mediation*, in Bartolini Bussi & Mariotti's sense (2002). First the possibility of constructing a regular polygon with integers as angle measurements is linked to the notion of divisibility, geometry providing a meaningful context to strengthen the understanding of this notion. Secondly, by linking numerical approximations to geometrical approximations, the relation between the ideal object 'regular heptagon' and its figural representations is conceptualized by Students 3 and 4 as analogous to the relation between the number 360/7 and its decimal approximations. Their comments in each phase of the second period show their capability of distancing themselves from the technical constraint of the software regarding numbers and geometrical displays, and to consider numbers and figural representations from a more abstract and purely mathematical standpoint. To such an extent that the activity can be said having succeed in "promoting the evolution of signs expressing the relationship between the artifact and tasks into signs expressing the relationship between artifact and [mathematical] knowledge" (op. cit., p. 753).

A gap between the numerical and the geometrical 'worlds'

By contrast, Team 1's approach is further remote from what was expected. It is deeply rooted into the 'numerical'. The relation between the central angle measurement and the number of sides having been rapidly guessed at an intuitive level by Team 1's members, the technological tool is immediately dropped and the quest for regular polygons is reduced to a listing of the divisors of 360. The software is used as a verification tool but not as an experimentation tool; for example the values $n = 7, 11, 13, 14, 17, 19$ are not 'tried', even less 'explored' with the tool during the first period, the numerical conclusions being deprive of a deeper geometrical corroboration. The reaction of Students 1 and 2 about the heptagon in the concluding discussion is also revealing of their difficulty in coordinating the numerical world and the geometrical world. Although they have constructed an heptagon seemingly well closed in the second period, although one of the researcher showed them an heptagon obtained directly from *Regular Polygon* in the GeoGebra pull-down menu, Students 1 and 2 kept arguing that the heptagon doesn't exist because it is impossible to obtain an exact value [*sic*] for $360 \div 7$. Student 1will eventually nuance her position by saying that the heptagon exists in theory but is not 'drawable'

(« dessinable », in French). Anyhow, we felt until the end an uneasiness with Team 1's idea about the 'real' existence of the regular heptagon, as if its GeoGebra display was something like a fraud.

Institutionalization and teachers' involvement

The activity has nevertheless reached its goal to the extent that it brought the four students to reflect on the status of what is seen at the screen, on the way numbers are possibly processed by the software, and on the necessity of taking a step back when mathematical conclusions are to be drawn from numbers and displays technologically generated. Besides, considering that some of these issues remained 'technologically non transparent' i.e. that some displays and processing kept their 'black-box' feature, and also that not all of the four students were equally at ease with the conclusions, the present case study brings us to stress the importance of the institutionalization phases, of researchers' or teachers' involvement in acting "… both at the cognitive and the metacognitive level, both fostering the evolution of meanings and guiding pupils to be aware of their mathematical status" (op. cit., p. 754). By explaining that in a way, even representing a square entails displaying it with lines of a certain thickness and measuring it with tools the exactness of which can never be ascertain, the researchers brought the students to realize, at a 'meta'-level, that reasoning and theoretical scaffolding in mathematics must be considered apart, in parallel, from the problem of physically representing the objects at stake.

More to come

It also stresses that if the activity instilled an awareness in the students' minds, it is of course far from having settled the above mentioned issues. The study therefore calls for more experiments, especially in more standard classroom contexts, and for development of activities and teaching sequences in which issues pertaining to measurement, empiricism and proof would be further explored. These are among the goals of a larger ongoing research program about the geometer-physicist paradigm.

References

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 9, n°3, 281-308.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education,* 2nd edition, 746-783. Routledge : New-York (USA) and Abingdon (UK).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Éditions La pensée sauvage, Grenoble, France.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, 37-65.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°11, 175-193.

Jahnke, H. N. (2010). The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (eds), *Explanation and Proof in Mathematics*, Philosophical and Educational Perspectives. Springer, New-York.

Jahnke, H. N. (2007). Proofs and hypotheses. ZDM, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 39 (1-2), 79-86.

Karsenti, T. & Savoie-Zajc, L. (2004). *La recherche en éducation : étapes et approches*. 3e édition. Éditions du CRP, Université de Sherbrooke.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education*, University of Cyprus, 71-89.

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n°3, 365-406.

Popper, K. R. (1991). *La connaissance objective*. Translation from the original 1963 edition. Flammarion, Paris.

Tanguay, D., Geeraerts, L., Saboya, M., Venant, F., Guerrero, L. et Morales, C. (2013). An activity entailing exactness and approximation of angle Measurement in a DGS. To appear in the *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 8), February 2013, Antalya, Turkey.

Tanguay, D. & Geeraerts, L. (2013). Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : comment intégrer le travail avec les LGD ? To appear in *Relime*, vol. 17, Numero Extraordinario 1, desde el 3° simposio *Espace de Travail Mathématique* (ETM3, Oct. 2012, Université de Montréal, A. Kuzniak et P. R. Richard, organizers).

Tanguay, D. & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, n°88, 5-24.

Análisis de la trayectoria docente de tres estudiantes para profesor en el campo de la educación estadística

Ángel Ricardo Vargas Peña
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
anrivarpe@gmail.com

Angie Carolina Cruz Cáceres
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
anyulicmatematicas@gmail.com

Vivian Carolina Herrera Espinosa
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
caher08@gmail.com

Resumen

El presente trabajo se enmarca en el campo de la Educación Estadística y tiene como propósito principal presentar los resultados obtenidos frente a la descripción y el análisis de la trayectoria docente de tres estudiantes para profesor de matemáticas a partir del uso de métodos e instrumentos para el estudio de dichas trayectorias a nivel estadístico. Para ello, se consideró la implementación de actividades para la enseñanza de las representaciones gráficas estadísticas (diagrama de barras), utilizando como recursos la televisión, el periódico y páginas Web. De igual forma, este trabajo presenta los resultados de una propuesta inicial presentada en el 12 ECME (Encuentro Colombiano de Matemática Educativa) y en el VIII Festival Internacional de Matemáticas llevado a cabo en Costa Rica.

Palabras Clave: Gestión en el aula, el papel del profesor, reflexión sobre la enseñanza, formación profesional docente, trayectoria docente.

Problema de investigación

Dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, existen tres fases, que enmarcan la labor docente, propuestas por Llinares (2000): La fase preactiva (diseño y planeación de actividades); la fase interactiva (gestión en el aula) y la fase postactiva (reflexión y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje); en éstas se contempla una tensión entre los hechos que el docente planea para su gestión - de acuerdo a una determinada teoría metodológica para secuenciar, donde se plantean algunas acciones esperadas por los estudiantes- y lo que realmente sucede dentro de su gestión en el aula en el proceso de enseñanza.

Para tal caso, frente a las fuertes implicaciones que tiene la gestión del profesor en la construcción de un saber escolar, Lurduy (2000) menciona que "[…] desarrollar competencias y procedimientos matemáticos necesita explorar el conocimiento matemático mismo por actividad […] esto implica aceptar y asumir que quien desarrolla cualquier propuesta de práctica docente es el profesor" (p. 13).

El docente y las acciones que realiza adquieren una importancia dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, pues como lo menciona Fernández (2004) existen grandes vacíos en cuanto a lo que hace y debe hacer el docente; lo que la legislación entiende por cumplimiento de la labor y lo que los docentes suelen hacer en los espacios de formación.

Con base en lo anteriormente planteado, se construye la siguiente pregunta de investigación: ***¿Cuál es la trayectoria docente que recorren tres estudiantes para profesor durante su gestión en el aula, para la enseñanza de las representaciones de gráficas estadísticas en cuanto a la construcción, interpretación y análisis de las mismas en los estudiantes de grado noveno, a partir de tres medios de comunicación?***

Teniendo en cuenta el anterior cuestionamiento, se plantearon los siguientes objetivos de investigación: Generar categorías de observación y análisis de las trayectorias docentes de tres estudiantes para profesores de matemáticas [de aquí en adelante EPM] desarrolladas a partir de la gestión de una actividad para la enseñanza de las representaciones gráficas estadísticas (diagrama de barras) utilizando como recurso tres medios de comunicación (uno diferente en cada actividad): Televisión (Noticieros), Páginas Web (Artículos) y Periódico en estudiantes de grado Noveno. Hacer uso de métodos estadísticos que den cuenta del respectivo análisis didáctico tanto de la trayectoria de cada EPM como de la comparación entre las mismas, evidenciando su importancia en los procesos tanto de enseñanza como de investigación docente. Realizar una reflexión didáctica en torno a la trayectoria docente en cuanto a la comparación de dos aspectos fundamentales de su labor: lo que el docente debe hacer (relación entre el diseño y planeación del mismo) y lo que hace dentro del aula (trayectoria docente para el caso de la gestión en el aula).

Referentes teóricos

El presente soporte teórico da cuenta de cuatro componentes importantes desde los cuales se articula el desarrollo del problema de investigación: el docente, el estudiante, el saber y el entorno; y las posibles relaciones que se establecen entre los mismos, haciendo un énfasis sobre la labor docente en dos aspectos mencionados por Fernández (2004): Lo que realiza el docente y lo que debe realizar según la postura crítica de su práctica, desde los cuales propone seis tareas para el caso del desarrollo de la profesión de educar.

Con relación al *primer componente*, el docente se constituye como eje fundamental para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este sentido Fernández (2004) hace una distinción inicial entre las tres tareas comúnmente conocidas por la comunidad educadora en general frente a lo que realizan los docentes: La dedicación del tiempo para preparar las clases y decidir qué temas enseñar; como segunda tarea se establece lo que se entiende por el proceso de gestión en el aula, llamado por el autor como *"La obligación laboral"* y el proceso de examinar o evaluar a los estudiantes para determinar el nivel de desarrollo obtenido por medio de los procesos de enseñanza y aprendizaje establecidos en el aula.

Pero la profesión docente va más allá de los tres aspectos mencionados y comúnmente conocidos, que en algunos casos, se han tomado de forma separada; para tal caso dicho autor establece seis tareas que deben dar cuenta de lo que debe realizar el docente en su labor como profesional: En primer lugar, lo profesores deben tener una adecuada comprensión de la profesión de enseñar. En segundo lugar se destaca el diseño o planeación que se construya los cuales debe propender por la programación de tareas frente a momentos y modalidades de su metodología didáctica y de evaluación, y a la reflexión frente a la gestión de las mismas.

En tercer lugar se menciona el momento metodológico. Ésta tarea forma parte fundamental dentro de la gestión del profesor en el aula, ya que depende de la metodología propuesta el desarrollo de la motivación hacia el aprendizaje, tomando en cuenta las interacciones entre profesor – estudiante, el uso del lenguaje y demás aspectos que inciden en los procesos mismos de enseñanza. En cuarto lugar se encuentra la planificación e implementación de una evaluación equitativa, que muestre el nivel de desarrollo de los estudiantes frente al saber hacer en un contexto determinado. El quinto aspecto se refiere al momento de perfeccionamiento, innovación e investigación de su accionar en el aula, según su propia experiencia, revisión de investigaciones, autoevaluación de su trayectoria como profesional de la educación. Finalmente se destaca el momento de organización de la enseñanza con base en los procesos evidenciados a nivel particular y general durante su gestión en el aula.

El *segundo componente* hace alusión al estudiante, razón de ser de la escuela y del docente, dicho sujeto aprende en la medida en que logra aplicar sus conocimientos en situaciones externas a las propuestas en el aula, es por ello que se hace necesario que los escenarios en los que se construyan los objetos estadísticos tengan relación con la vida cotidiana y la realidad del estudiante, puesto que desde los planteamientos de Behar (2001) "[…] El aprendizaje esta fundamentalmente relacionado con el entendimiento de la realidad y por lo tanto la enseñanza debería ir dirigida a ayudar al estudiante a entender los fenómenos" (p. 28).

Desde esta perspectiva el autor expone que para identificar, de manera general, las dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje de la estadística, se parte del hecho fundamental de que el estudiante es el responsable directo de su aprendizaje, y para ello se deben tener en cuenta los siguientes aspectos: Condiciones y recursos disponibles; estilo de aprendizaje y conocimientos previos.

El *tercer componente* hace alusión al saber, el cual juega un papel importante en los procesos de enseñanza/aprendizaje guiando las diferentes acciones que el docente determinará en el aula, basadas en un objeto de enseñanza. El objeto estadístico a desarrollar en cada secuencia didáctica hace referencia a las representaciones gráficas estadísticas que, según el planteamiento de Godino & Batanero (2009) tienen un papel esencial en la sociedad tecnológica actual y están presentes en los medios de comunicación e información encontrándose en todos los ámbitos de la vida cotidiana, por lo tanto es de gran interés centrarse en el estudio de los mismos ya que dentro de la amplia variedad de gráficos que se encuentran en la prensa, la televisión y la web, el uso incorrecto de los mismos permite la creación de un buen debate, por ello se debe crear en el estudiante una habilidad para leer y comprender las tablas y gráficos estadísticos que le permita ser un ciudadano alfabetizado (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009)

En este sentido, se abarca el interés por alfabetizar estadísticamente a los estudiantes a partir de los resultados de diferentes investigaciones que permiten determinar la necesidad de crear un ciudadano crítico que reflexione sobre lo que aprende, lee o escribe (M.E.N, 1998) teniendo en cuenta que el contexto a trabajar en la secuencia didáctica conlleva a la crítica de los gráficos estadísticos de tres medios de comunicación Páginas Web, Televisión y Periódico. Aoyama (2007) analizando la interpretación que hacen los alumnos de algunos gráficos ha establecido los siguientes niveles de comprensión del gráfico:

1. <u>Nivel Racional/literal:</u> Los estudiantes leen correctamente los gráficos, interpolan, detectan tendencias y predicen. Usan las características del gráfico para responder a las cuestiones propuestas pero no critican la información y no proporcionan explicaciones alternativas.

2. <u>Nivel Crítico:</u> Los estudiantes leen el gráfico, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información; pero no son capaces de pensar en hipótesis alternativas que expliquen la disparidad entre un gráfico y una conclusión.

3. <u>Nivel Hipotético:</u> Los estudiantes leen el gráfico, lo interpretan, evalúan la información y son capaces de crear sus propias hipótesis y modelos. (p.140)

El *cuarto y último componente* hace referencia al entorno entendido como los espacios que rodean los procesos de enseñanza y aprendizaje tanto en el aula como fuera de ella, y que influencian las concepciones de los estudiantes. Para tal caso, la saturación social de los medios de comunicación, genera concepciones en los estudiantes frente a las interpretaciones y construcción de las representaciones gráficas; según Paulos (1999) *"…lo que aquí interesa destacar es que nuestra sed de historias, agentes y motivos es tan intensa que muchos ven significado en series de letras fuera de contexto…"* (Pág., 11) haciendo alusión al afán de establecer predicciones, estimaciones y/o representaciones de historias sociales que carecen de significado estadístico y a su vez, puede generar una mala comprensión y/o noción de los objetos netamente estadísticos, sus representaciones, interpretaciones y/o análisis. En este sentido, la escuela no ha logrado encontrar un lugar dentro de la era de crecimiento tecnológico que se que presenta constantemente en la vida cotidiana de los jóvenes en la actualidad, puesto que en lugar de incluir los diferentes medios de comunicación (que impactan la vida de los adolescentes) como herramientas pedagógicas, tratan de competir contra ellos, generando un pared que separa los intereses de los jóvenes y las labores escolares que se realizan diariamente en las instituciones educativas del país.

Desarrollo metodológico de la investigación

Para el desarrollo de la investigación, se partió del reconocimiento de la metodología mixta. Se inició desde la caracterización de cada una de las trayectorias de los EPM, a través de una descripción minuciosa y detallada de la gestión que se realiza en el aula, comparándola con su respectivo diseño. En éste sentido, se han establecido tres aspectos concretos para realizar el respectivo análisis y desarrollar la reflexión didáctica: el uso de los recursos empleados, el lenguaje utilizado y el tipo de preguntas generadas durante el desarrollo de la actividad por parte del docente. Ya que cada trayectoria es única, se retoma la investigación cualitativa, puesto que ésta está encaminada hacia el análisis de casos concretos en su particularidad local y temporal, partiendo de las expresiones y actividades de las personas en sus contextos naturales, como lo menciona Flick (2004).

Para tal caso, se partió de un análisis cuantitativo para lograr establecer las categorías que permitieron realizar, finalmente, un análisis didáctico de cada una de las trayectorias, y para ello se emplearon diferentes técnicas para análisis de información como: Teoría de Rachas y Análisis Cluster, elementos que permitieron establecer inferencias y observaciones a partir del comportamiento evidenciado en la trayectoria (tanto de los estudiantes como de los EPM).

De manera inicial, se diseño una secuencia didáctica con el fin de familiarizar a los estudiantes con los conceptos estadísticos que servirían como pre-conceptos para desarrollar la actividad (secuenciada a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau, 1998) en la que se llevó a cabo el análisis de la trayectoria docente. Durante la actividad se realizó una video filmación y, paralelamente un agente externo al observado realizó el respectivo protocolo de la sesión de clase.

Finalmente, la video filmación fue analizada a partir de la Teoría de Rachas, la transcripción de la filmación mediante el programa Atlas T.I. y los protocolos construidos a partir de los momentos establecidos en el diseño de la actividad. Por último, el nivel de desarrollo de los estudiantes fue observado desde el Análisis Cluster.

La aplicación de las tres actividades (una por cada EPM) propuestas para el análisis de las trayectorias se estipulan para grado noveno de escolaridad colombiana. Como son tres grupos, a continuación se realizará una descripción de las características de cada uno de ellos, con base en la gestión de los tres EPM:

- Estudiante Para Profesor de Matemáticas No 1 (EPM1): Estudiante Ángel Ricardo Vargas Peña, la muestra en la cual el EPM implementó la actividad fue: Grupo 01 (G1): conformado por 32 estudiantes del curso 902 del IED OEA de la localidad de Kennedy en Bogotá, Colombia. Las edades de los estudiantes oscilan entre 13 y 16 años. Aula Inclusiva (estudiantes con discapacidad visual).

- Estudiante Para Profesor de Matemáticas No 2 (EPM2): Estudiante Angie Carolina Cruz Cáceres, , la muestra en la cual el EPM implementó la actividad fue: Grupo 02 (G2): conformado por 36 estudiantes del curso 903 del IED OEA de la localidad de Kennedy en Bogotá, Colombia. Las edades de los estudiantes oscilan entre 13 y 16 años.

- Estudiante Para Profesor de Matemáticas No 3 (EPM3): Estudiante Vivian Carolina Herrera Espinosa, , la muestra en la cual el EPM implementó la actividad fue: Grupo 03

(G3): conformado por 35 estudiantes de grado noveno del colegio Rembrandt ubicado en la localidad de Engativá en Bogotá, Colombia, que no han recibido ninguna formación a nivel de educación estadística a lo largo de su vida escolar.

Nota aclaratoria: Los EPM fueron estudiantes de IX semestre del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de caldas; cuyo enfoque se fundamenta en la reflexión sobre la práctica docente; estudiante en formación para desarrollarse como docente investigador.

Análisis a partir de las categorías de observación frente a la implementación de la actividad

En este apartado se da cuenta del respectivo análisis frente a la implementación de tres actividades enfocadas hacia el estudio de gráficos estadísticos presentes en las páginas web, el periódico y la televisión. En éste sentido, se define con relación a dos aspectos: la trayectoria didáctica que cada docente recorrió a lo largo de ésta implementación y, el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes ante dichas gestiones en el aula. En este orden de ideas, las categorías de análisis se dividieron de la siguiente manera:

Trayectoria docente: Teniendo en cuenta la definición dada por el IDEP (2002), donde se entiende por trayectoria docente el conjunto de acciones, gesticulaciones, procesos y metodologías que el profesor pone en juego en su desarrollo profesional; las categorías abarcadas dentro de este aspecto estarán fragmentadas de acuerdo a los elementos a analizar dentro de la misma, como lo son: el uso del lenguaje estadístico, el planteamiento de preguntas y el uso del recurso (Páginas Web, Periódico, Televisión); que constituyen la base para la construcción de sub-categorías, en las cuales se logra sintetizar cada elemento a observar dentro del proceso de gestión de la actividad en el aula de clase.

Tabla No 1.
Categorías, sub-categorías y observables- trayectoria docente.

CATEGORÍA	SUB-CATEGORÍA	OBSERVABLES
A. Uso de Lenguaje Estadístico	1. Orientaciones del Profesor	1. Indicaciones con relación al lenguaje estadístico que tiene el instrumento del estudiante. 2. Respuestas sobre el lenguaje estadístico en el proceso que realizan los estudiantes 3. Uso del lenguaje estadístico en los procesos de generalización. 4. Aclaración de situaciones estadísticas no evidentes en el proceso de los estudiantes. 5. Generalización de los conceptos estadísticos a partir de la reflexión crítica realizada en la socialización de la actividad. * Organización de clase (disciplina, participación)
B. Preguntas (del docente)	2. Preguntas de control	6. Explicativas sobre instrumento 7. Sobre procedimiento del (los) estudiante(s) 8. Conceptos que se desean desarrollar ** Con relación al recurso utilizado.

	3. Preguntas de análisis	9. Comparación 10. Clasificación
	4. Preguntas de inferencia	11. Conclusión 12. Generalización
C. Uso de recursos	5. Uso de medios de comunicación: página Web, Video y periódico	13. Orientación para el manejo del recurso. 14. Definición de gráficos. 15. Uso de gráficos según datos presentes por parte del profesor.
	6. Guía del estudiante: Instrumento a desarrollado	16. Explicación y aclaración de los ítems propuestos en el recurso. 17. Dar instrucciones sobre los ítems en los cuales el estudiante presenta dificultad.
	7. Exposición de los desarrollos de los estudiantes	18. Desarrollo de los estudiantes para un lenguaje común. 19. Solución de inquietudes

Desarrollo del estudiante: Las categorías abarcadas dentro de este aspecto están definidas de acuerdo a los niveles de comprensión de un gráfico estadístico propuestos por Aoyama (2007); a partir de los cuales se establecen diez sub-niveles (incluyentes) en los cuales se describe el proceso de desarrollo alcanzado por los estudiantes de acuerdo a los resultados obtenidos en las hojas guía. Este tipo de categorización permitió la caracterización de los conglomerados que surgen al realizar un análisis Cluster.

Tabla No 2.
Niveles y sub-niveles de desarrollo de los estudiantes.

NIVELES	SUB-NIVELES
Nivel Racional/ Literal. N1	**1.** Realiza una lectura y observación de un determinado grafico estadístico para establecer el tipo de información que se presenta. **2.** Reconoce la frecuencia absoluta. **3.** Realiza algoritmos que le permiten encontrar la frecuencia relativa. **4.** Comprende las implicaciones y usos de la frecuencia relativa para establecer análisis porcentuales en una muestra determinada.
Nivel Crítico. N2	**5.** Reconoce datos relevantes y erróneos presentes en los datos proporcionados. **6.** Establece grados de veracidad de conjeturas e inferencias respecto a la información presentada en el grafico estadístico. **7.** Realiza conjeturas en torno a la frecuencia absoluta y relativa de los datos.

Nivel Hipotético. N3	**8.** Evalúa la fiabilidad de la estadística proporcionada en el medio de comunicación. **9.** Establece valores verídicos en casos de contradicciones en la información, manteniendo las proporciones de los datos originales. **10.** Formula hipótesis alternativas respecto a la información presentada en el medio de comunicación, y es capaz de analizar críticamente las implicaciones del estudio estadístico presentado.

Cada uno de estos niveles, estará dividido en sub-niveles que darán cuenta del proceso de resolución llevado a cabo por los estudiantes en los ítems propuestos en la hoja guía, se tiene en cuenta aquí que este análisis se realizará en la situación de acción (Brousseau, 1986) en la cual los estudiantes actuaron de manera individual sobre un medio material, a partir de sus conocimientos previos. Con base en la información obtenida a través del análisis realizado mediante el programa ATLAS TI, los protocolos y la implementación de la teoría de Rachas para cada EPM, a continuación se presenta la respectiva triangulación de los datos expuestos individualmente en secciones anteriores a partir de las categorías, sub-categorías y observables analizados por cada EPM.

Categoría A. uso del lenguaje estadístico:

Con base en la categoría (A), sub-categoría 1(orientaciones del profesor) y observables 1-5; se realizan ciertas comparaciones en la trayectoria docente de cada EPM frente a los resultados generados de manera porcentual. Estos porcentajes abarcan la sub-categoría orientaciones del profesor (1) a partir de la cual se exponen los diversos tipos de aclaraciones, indicaciones, generalizaciones y exposición de resultados realizados por el EPM. Desde esta perspectiva se determinan los siguientes resultados:

EPM1: Durante su trayectoria docente este estudiante para profesor, con relación al EPM2 y EPM3, realiza en un porcentaje menor (29, 3%) diversas orientaciones entre las cuales se evidencian en una mayor proporción (11, 13%) las referidas hacia respuestas sobre el lenguaje estadístico que tiene el instrumento del estudiante. Sin embargo, con relación al observable alusivo al uso del lenguaje estadístico en los procesos de generalización, este EPM no evidencia durante su trayectoria ningún tipo de intervención que permita detectar este tipo de acción durante el desarrollo de la sesión de clase. En el proceso de análisis de la trayectoria se evidencia cierto tipo de orientaciones durante el desarrollo de la clase a partir de las cuales el EPM1 indica a los estudiantes el tipo de organización dentro del aula (trabajo individual o grupal), aspectos relacionados con el manejo de la disciplina y el tipo de participación que tiene el estudiante en las diferentes situaciones presentes en el diseño de la actividad. Este tipo de acciones generan un observable emergente (*) en esta sub-categoría, el cual abarca todas las intervenciones descritas anteriormente.

EPM2: A lo largo de la sesión de clase este estudiante para profesor, con relación al EPM1, evidencia un porcentaje significativamente alto de orientaciones a lo largo de su intervención en el aula (40,55%). De acuerdo a los observables este hace un mayor uso de indicaciones (21,2%) con relación al tipo de organización llevado a cabo en el aula (grupal e individual), así como el manejo de la disciplina y el establecimiento de la participación de los estudiantes durante el desarrollo de los diferentes momentos expuestos en la actividad. Observable emergente en la trayectoria descrita por el EPM2 (análogo al EPM1). Con relación al EPM3 se evidencia una cercanía porcentual en esta sub-categoría, estos EPM evidencian en una mayor proporción el desarrollo de intervenciones con relación a la disposición de los estudiantes en el aula de clase y las instrucciones manejadas para mantener el ambiente de clase.

EPM3: Durante el desarrollo de la actividad este estudiante para profesor, con relación al EPM1, mantiene una confinidad porcentual ya que en un 33,4 % este maneja orientaciones de clase, sin embargo este EPM se enfoca mayormente (%12,5) hacia las acciones caracterizadas por la organización del aula, la disciplina y la participación por parte de los estudiantes. Observable emergente durante esta trayectoria. (Análogo al EPM1 y EPM2). Con relación al EPM2; se presenta una proximidad porcentual en el desarrollo de orientaciones, ambos EPM presentan el mayor porcentaje en indicaciones referidas al observable emergente (*) descrito anteriormente.

Categoría B. preguntas del docente:

A continuación se establece una comparación entre la categoría (B), sub-categorías (2-4) (preguntas de control, análisis e inferencia) y observables (6-12) (Ver tabla No 1); evidenciados en cada una de las trayectorias de los estudiantes para profesor de matemáticas [EPM] respecto a las preguntas formuladas:

EPM1: este fue el que hizo en menor proporción preguntas a sus estudiantes a lo largo de su trayectoria (41,62%). Sin embargo, se evidencia un porcentaje significativo con relación a los demás EPM hacia la sub-categoría referida a las preguntas de control, siendo éste el estudiante que mayor porcentaje tuvo. Uno de los aspectos evidenciados de forma significativa en el EPM1 a comparación de los demás se centra en el desarrollo de un observable emergente que ocupó el 5.1% de su trayectoria pero no se evidenció en los demás EPM. Esta observable emergente [**] durante el análisis de su trayectoria en el programa ATLAS T.I. está relacionada con las preguntas de control enfocadas al uso del medio de comunicación.

EPM2: Éste estudiante para profesor hizo uso de preguntas en una proporción media a comparación del EPM1 y EPM3. Se evidencia de forma significativa la formulación de cuestionamientos enfocados hacia el uso de procedimientos por parte de los estudiantes en cuanto a las preguntas de control. Uno de los observables que menos se evidenció a lo largo de su trayectoria con relación a las preguntas de control fue el referido a las preguntas que conducían hacia posibles explicaciones sobre el instrumento usado en la fase de acción y formulación (guía del estudiante) a comparación de los demás.

EPM3: Este EPM fue el que más preguntas realizó a lo largo de su trayectoria. En cuanto a las preguntas de control, uno de los aspectos menos evidenciados fueron las preguntas enfocadas hacia la explicación de la guía del estudiante, ya que los demás EPM reflejaron un mayor valor porcentual de sus trayectorias. Para el caso de la sub-categoría 3, el EPM3 fue el que más preguntas de análisis realizó a comparación de los demás. Dichas preguntas de análisis estuvieron enfocadas en su mayoría hacia los procesos de comparación y clasificación de datos presentes en el recurso usado (video) en la fase de acción y formulación. En cuanto a la sub-categoría 4, relacionada con las preguntas de inferencia, en éste EPM se caracterizó porque realizó más preguntas de inferencias que el EPM1.

Categoría C. uso del recurso:

A continuación se establece una comparación entre la categoría (C), sub-categorías (5-7) y observables (13-19) (Ver tabla No 1); evidenciados en cada una de las trayectorias de los estudiantes para profesor [EPM] respecto a las preguntas formuladas:

EPM1: El presente estudiante para profesor utilizó el recurso de la página web un 38,14% de su trayectoria, lo cual lo ubica como el EPM en recurrir a la utilización del recurso con mayor frecuencia. La mayor parte de sus intervenciones estuvieron encaminadas a trabajar y aclarar aspectos concernientes al desarrollo de cada uno de los ítems propuestos en la guía de trabajo del estudiante en un 17.85 %, destacándose por ser el que más acude a la guía diseñada. El EPM recurre a las exposiciones que sus estudiantes realizan para darle desarrollo a la clase el 8.37%, ya que retoma dichas anotaciones y conclusiones que van surgiendo en una menor proporción respecto a la guía de trabajo y la pagina web. Sin embargo, respecto a los otros dos EPM, es quien retoma la participación de sus estudiantes con mediana frecuencia.

EPM2: Evidenció en su trayectoria docente el empleo del recurso (periódico) en una baja intervención (25.13%). Con respecto a los demás EPM, el EPM2 fue quien utilizó el periódico con una frecuencia baja (9.21%). Sin embargo, se puede observar que el EPM escasamente retoma las opiniones y participaciones que sus estudiantes realizan, puesto que esto está representado tan solo en un 1.38%, lo cual difiere significativamente de los porcentajes de los otros dos EPM. Es posible que esto ocurriera debido a que el tiempo para realizar la socialización de la actividad fue demasiado corto con respecto al tiempo con el que contaron los otros dos EPM. El EPM2 recurrió con mayor frecuencia (14.54%) al instrumento diseñado para que el estudiante diera desarrollo a la actividad.

EPM3: Respecto al uso del medio de comunicación (páginas web, periódico y video) que cada EPM utilizó en el desarrollo de la secuencia, se establece que en la gestión realizada, el recurso empleado con mediana frecuencia fue el video, puesto que el EPM3 recurrió al mismo en un 26.04% de la trayectoria trazada. Como se puede observar, el video y la pagina web fueron utilizados con una frecuencia similar. Cabe resaltar que ambos recursos estaban a disposición de todo el grupo, razón por la cual no se realizó ninguna manipulación completamente individual, además estos grupos estuvieron ubicados en lugares diferentes. En términos generales se puede observar que a pesar de que cada EPM contaba con tres recursos diferentes, todos utilizaron la hoja de trabajo de los estudiantes con una frecuencia mayor.

Conclusiones y resultados encontrados

Los resultados de esta investigación, se determinan a través de tres aspectos, que se mencionan a continuación:

Aportes en el campo de la investigación en educación estadística:

A lo largo del proceso de indagación acerca de la trayectoria docente, estipulada según el IDEP (Citado por Lurduy, Rocha, Sánchez, Guerrero & Gil, 2007) como las acciones, gesticulaciones y elementos que el docente usa durante el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje; se pudo establecer que dentro del campo de análisis de las acciones que el docente ó EPM realiza durante su gestión en el aula (mencionada desde Llinares [2000] como la fase interactiva); existen pocas investigaciones que involucran diversos métodos estadísticos que permitan determinar elementos didácticos, metodológicos y teóricos reflejados en la puesta en escena dentro del aula de clase.

Para tal caso, la presente investigación permitió construir y validar una red categorial enfocada hacia el análisis de las acciones que tres EPM realizaron durante su gestión en el aula para la enseñanza de gráficos estadísticos a través del uso de tres medios de comunicación. Esta red categorial está constituida a partir de 3 categorías generales que se deseaban observar (uso de lenguaje estadístico, preguntas formuladas por el docente hacia sus estudiantes y uso del recurso), de las cuales surgen 7 sub-categorías y 19 observables que permitieron determinar de forma rigurosa, las acciones que efectivamente realizaron los EPM durante su proceso de gestión en el aula y, reflexionar sobre sus prácticas al enseñar esta temática. En este caso, se pudo evidenciar lo mencionado por Llinares & Krainer (2006) al afirmar que:

> La práctica reflexiva ofrece una perspectiva de cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la enseñanza y proporciona información sobre los cambios en su enseñanza de las matemáticas y la estadística. La reflexión de los estudiantes para profesor es un componente clave en esta visión del aprendizaje y se asume que uno aprende mediante la reflexión sobre la propia experiencia (p. 437).

Por otra parte, la respectiva validación de la red categorial usada permite determinar el nivel de significatividad que tiene al analizar las tres trayectorias docentes a través del programa Atlas T.I. y la teoría de Rachas. En promedio, el porcentaje de citas traslapadas de los tres EPM no es superior al 9%, logrando identificar claramente cada una de las categorías, sub-categorías y observables que se deseaban evidenciar tanto en la video filmación como en la transcripción de la sesión de clase. Este es uno de los aportes significativos que propuso y ejecutó esta investigación.

Respecto a la alfabetización estadística a través de la teoría de situaciones didácticas*:*

En la fase de planificación y organización, nombrada por Llinares (2000) como la fase pre-activa, las tareas del profesor están enfocadas hacia la elección de los contenidos a desarrollar en el aula, el tipo de problemas y recursos a utilizar, y finalmente los instrumentos de evaluación. Desde esta perspectiva en esta fase se define una relación importante entre el docente y el currículo, dado que es el docente quien construye el significado de aquellos conceptos que va a desarrollar en el aula basado en los aspectos legales y el nivel educativo de una institución. En este sentido, los EPM diseñaron una secuencia de actividades dentro del campo de la educación estadística que permitió alcanzar las bases conceptuales para la implementación de la actividad donde se analizó la trayectoria docente. Esta secuencia se organizó desde la Teoría de Situaciones Didácticas (T.S.D.) propuesta por Brousseau (1998), donde se establecieron diversas situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización que fundamentaron todo el proceso de adaptación curricular.

Respecto al análisis de las trayectorias de los tres EPM:

Con base en el análisis desarrollado durante la investigación, se puede establecer que la creación de las diferentes categorías permitió realizar una descripción detallada de las acciones realizadas por cada EPM en el desarrollo de la fase interactiva. Mediante el programa Atlas ti, se logró describir minuciosamente cada una de las intervenciones realizadas por los EPM, puesto que se realizaron dos análisis de la transcripción de cada sesión. En el primero, se evidenciaron las sub-categorías propuestas, definiendo a cual pertenecía determinada intervención y en el segundo, el observable específico que caracterizó y diferenció las acciones pertenecientes a una misma sub-categoría. Por otra parte, la implementación de la teoría de rachas permitió realizar una comparación entre la planeación, que fue propuesta desde la Teoría de Situaciones Didácticas (T.S.D), y la gestión realizada por cada EPM en los momentos de acción, formulación, socialización.

En cuanto al análisis de los desarrollos observados en los estudiantes, se recurrió a los niveles propuestos por Aoyama (2007) respecto a la comprensión de gráficos estadísticos. Con el fin de analizar sistemáticamente el instrumento implementado durante las fases de acción y formulación, se hizo uso del análisis clúster, el cual permitió caracterizar el nivel alcanzado por cada uno de los estudiantes y, establecer una comparación entre las tres muestras utilizadas. Por otra parte, frente a la construcción de protocolos individuales que diesen cuenta de la respectiva descripción de la sesión de clase de cada EPM, se pudo establecer un análisis cualitativo enfocado en dos aspectos: el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes en cada punto del instrumento usado en las fases de acción y formulación y, las acciones que se alcanzaron a evidenciar de forma significativa en cada una de las fases trabajadas a través de la teoría de situaciones didácticas.

Referentes bibliográficos

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. International Electronic Journal of Mathematics Education 2 (3). Disponible en: http://www.iejme.com/032007/ab10.htm

Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2009). "*Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions*". Sixth Conference of European Research in Mathematics Education, Lyon, 2009.

Behar, R. (2001) "*Aportaciones para la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje de la estadística*". Universidad Polítéctica de Catalunya. Barcelona y Santiago de Cali.

Brousseau, G. (1986) "*Fundamentos de la Didáctica de la Matemática*", Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No 19 (versión castellana, 1993)

Brousseau, G. (1998) "*Educación y Didáctica de las matemáticas en Educación Matemática*", México.

Fernández, M (2004) *"Las tareas de la profesión de Enseñar. Práctica de la Racionalidad Curricular. Didáctica Aplicable"*. 2da. Ed. Rev. y aumentada. España. Siglo XXI de España Editores, S.A.

Flick, U. (2004) *"Introducción A La Investigación Cualitativa*". Observación, etnografía y métodos de datos visuales, pp. 149-174. Ediciones Morata, S.L. Coruña. España.

Godino, J. Batanero, C. (2009) Capitulo 1. Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre las prácticas. pp. 9-34 *"Tendencias Actuales Sobre La Investigación En Educación Estocástica*. Editores Luis Serrano R. Málaga, España. ISBN: 978-84-692-4151-6

Llinares, S. (2000) "*Comprendiendo la práctica del profesor de Matemáticas*". En J. P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.) *Educación Matemática en Portugal, España e Italia.* SEM - SPCE: Lisboa, Portugal, pp. 109-132, ISBN 972-8614-00-4.

Llinares, S & Krainer, K. (2006) "*Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners*". En A. Gutierrez (Eds) Hand Book for research on the Physchology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 429-459). Rotterdan: Sense Publishers.

Lurduy, J. (2000) *"Formación de profesores de matemáticas".* Revista Horizontes Pedagógicos. Editorial Taller Creativo. Bogotá, Colombia *v.*1 *fasc.*1 pp. 9-17, *ISSN:* 0123-8264.

Lurduy, J. Rocha, P. Sánchez, N. Guerrero, F. Gil, D. (2005) *"Rutas De Estudio Aprendizaje En El Aula, El Caso De Las Matemáticas"*. Cuadernos de investigación No. 5. IEIE. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

M.E.N (1998). "*Lineamientos Curriculares de Matemáticas*". Bogotá, Colombia

Paulos, J. (1999) *"Un matemático lee el periódico".* Tusquets Editores, S.A. Barcelona, España

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Análisis del discurso oral de profesores universitarios al explicar la noción matemática de variación

Waldo Antonio **Torres** Vázquez
Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
waldo.torres@upr.edu

Resumen

En este artículo se analiza el discurso oral de tres profesores expertos al enseñar la noción matemática de variación a grupos pequeños de estudiantes universitarios. Usando un diseño de investigación cualitativa, y técnicas de análisis del discurso, se estudiaron los modos discursivos de los profesores y se relacionaron con las posturas epistemológicas que estos demostraban en la clase. Los hallazgos revelan la importancia del cuestionamiento y la argumentación como elementos esenciales de una cultura de enseñanza y aprendizaje en construcción. Se observó también una estrecha relación entre las mezclas de los modos discursivos utilizados y el manejo de las diferentes representaciones semióticas de las funciones matemáticas, usadas como vehículo para desarrollar la noción de variación. También se discute la relación entre las estructuras lingüísticas utilizadas y el proceso de construcción de relaciones sociales en la sala de clases.

Palabras clave: discurso oral, variación, epistemología, modos discursivos, representaciones semióticas, profesores universitarios, relaciones sociales.

Introducción

La noción matemática de *variación* es fundamental para que los estudiantes[1] puedan comprender cómo los cambios en una variable causan cambios en otra variable relacionada. Por lo tanto, los conceptos matemáticos de *variable* y *función* están estrechamente relacionados con la noción de variación. Si dos cantidades variables se pueden relacionar de manera que cada valor de alguna de ellas se asigna o relaciona con algún valor único de la otra decimos que las

[1] En este artículo los términos “estudiantes” y “profesores” se refieren a los y las estudiantes, así como a los profesores y las profesoras.

dos variables están relacionadas por una función. Si $y = f(x)$ es una función matemática donde x y y son las variables relacionadas por la función f, y el valor de x cambia por cierta magnitud, digamos Δx, entonces la noción de variación nos permite estudiar la magnitud del cambio en la variable y, conocida como Δy. La variación se utiliza, por ejemplo, para introducir las aproximaciones iniciales del concepto de *derivada* como un cociente diferencial y para el aprendizaje de las transformaciones en las gráficas de funciones.

Según Reséndiz (2006), la noción de variación no es necesariamente un objeto explícito en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pero es parte fundamental de muchas prácticas discursivas en esa materia. “El uso sistemático de la noción de variación se hace a través de su asociación con conceptos como el de crecimiento y decrecimiento de las funciones” (Reséndiz, 2006, p. 438). En su estudio exploratorio, Díaz (2005) investigó varios grupos de estudiantes que fueron expuestos a experiencias planificadas de aprendizaje que incluían la noción de variación. El propósito era analizar, desde una perspectiva reflexiva-cualitativa, los modos de pensar de los estudiantes sobre esta noción matemática. En particular, se identificó el uso de metáforas, corporales y conceptuales, para analizar las prácticas sociales vinculadas a la construcción de significados. Uno de los proyectos que ha generado varias investigaciones sobre el tema es el denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional,* desarrollado en Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, en México. Varios trabajos de investigación originados en este Centro han demostrado “la existencia de robustas dificultades para tratar cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional” (Cantoral & Reséndiz, 2003, p. 35). Estas dificultades pueden ser de diferente naturaleza pero, en general, se agrupan en dos categorías, a saber: (1) las que se relacionan con el dominio de los procedimientos algebraicos para establecer y usar variaciones, y (2) las de tipo conceptual-cognoscitivo que impiden al estudiante reconocer la relación causal entre dos variables que cambian de valor.

Algunos resultados de investigaciones han puesto de relieve el papel fundamental que tiene el discurso oral de profesores y estudiantes en el desarrollo de las dificultades para el aprendizaje de la variación (Cantoral & Reséndiz, 2003; Reséndiz, 2006). Estos discursos se dan de manera concurrente, en muchas ocasiones espontánea, y se ha documentado que unos influyen en otros; aunque ese grado de influencia aún no se ha logrado precisar (Piccolo et al., 2008). Sin embargo, Reséndiz (2006, 2010) ha estudiado el papel que juega el discurso oral que se usa para enseñar y aprender la noción de variación en estudiantes universitarios, documentando elementos discursivos utilizados por el profesor para generar acuerdos sociales, así como la construcción de conocimiento, personal y compartido, sobre la variación.

El discurso oral de los profesores, así como todo su sistema de prácticas de enseñanza, está influenciado por sus posturas epistemológicas sobre las Matemáticas, y sobre cómo se enseña y cómo se aprende. Aunque Sierpinska y Lerman (1996) aclaran que las epistemologías no se transfieren directamente a las prácticas de enseñanza, la influencia de las primeras es indirecta, pero esencial, y muy debatida en la construcción de aproximaciones teóricas. Un aspecto epistemológico fundamental que se pone de manifiesto cuando los profesores de Matemáticas enseñan la noción de variación (junto con los conceptos de variable y función) es la elección y el uso que le dan a los *registros de representación semiótica* de las funciones: gráfica, numérica y algebraica. Estos registros están también directamente relacionados con la naturaleza del discurso oral utilizado para enseñar y aprender. Varios investigadores (Font, Bolite, & Acevedo, 2010; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Trinter & Garofalo, 2011) han estudiado la relación entre las representaciones semióticas de las funciones y la comprensión de los conceptos matemáticos que están siendo representados.

El estudio de las secuencias discursivas tiene importantes implicaciones para la práctica educativa, particularmente desde la perspectiva filosófica del *interaccionismo simbólico*. Esta perspectiva pragmática requiere un reconocimiento de la importancia de la cultura en la planificación de los procesos educativos. Los significados no se desarrollan estrictamente de manera individual, sino como resultado de las interacciones de los aprendices como parte de una cultura. Lo importante es que no se trata de la adaptación a una cultura previa o existente, sino que la construcción de los significados contribuye a la formación de la cultura de la clase, pues hay significados *personales* que se pueden negociar colectivamente y otros que emergen naturalmente de las interacciones. Godino, Batanero y Font (2009) hacen énfasis en el uso del lenguaje como herramienta en la negociación de significados durante las interacciones, y nuestros hallazgos ponen de relieve la importancia del *cuestionamiento y la argumentación* como elementos esenciales de esa *cultura en construcción*.

Propósito

Asumiendo la definición de *discurso* como "lenguaje puesto en acción", desarrollamos este proyecto de investigación con el propósito de analizar el discurso oral de profesores universitarios, cuando enseñan la noción matemática de variación a un grupo de estudiantes. El objetivo particular de nuestro análisis fue caracterizar, principalmente, la naturaleza lingüística del discurso oral docente y relacionarlo con las posturas epistemológicas que los profesores demuestran cuando enseñan la noción de variación. Además, estudiamos la elección y el uso que los profesores hacen de las representaciones semióticas de las funciones matemáticas (gráfica, numérica y algebraica) en sus discursos orales, y cómo esto se relaciona con las mezclas de modos discursivos y posturas epistemológicas observadas. Finalmente, se estudió también el uso de construcciones lingüísticas en función del desarrollo de las relaciones e interacciones sociales en la sala de clases.

Métodos

Recopilación de los datos

Todas las partes de esta investigación se realizaron en la Universidad de Puerto Rico en Cayey[2] y los datos principales se obtuvieron de tres clases, de aproximadamente una hora de duración cada una. En cada clase un profesor explicó la noción de variación a un grupo de dos estudiantes que le fueron asignados, asegurando que no habían tomado clases, previamente, con él o ella. Las clases se ofrecieron en días diferentes, entre octubre y diciembre de 2012, en una sala de clases tradicional, con los estudiantes sentados en torno a una mesa y el profesor usando sólo una pizarra y marcadores. Los tres profesores tenían al menos 5 años de experiencia en la enseñanza Matemáticas o Física a estudiantes de nivel universitario en Puerto Rico, y los seis estudiantes eran de primer y segundo año de bachillerato en Ciencias o Educación en Ciencias. Las clases se grabaron, en audio y video, y se transcribieron detalladamente. Los datos adicionales para la triangulación se obtuvieron de: los apuntes escritos (bitácoras) que hicieron los estudiantes mientras interactuaban con el profesor en clase y los cuestionarios reflexivos de

[2] Para esta investigación se utilizaron fondos semilla otorgados por el Decanato de Asuntos Académicos de la UPR en Cayey, como parte de su proyecto de apoyo a la investigación docente (Proyecto FIDI).

todos los participantes. No se ofrecieron exámenes de ningún tipo, ni evaluaciones de los estudiantes hacia el profesor; intentando que las interacciones sociales en la sala de clases ocurrieran de la forma más natural posible.

Procedimiento para el análisis de los datos

Para el análisis se utilizaron múltiples técnicas dentro del paradigma de la investigación cualitativa, aunque todas centradas en un ***diseño de Teoría Fundamentada complementado con un enfoque de Análisis de Discurso.*** Con este diseño se pretende representar y analizar los datos con toda la complejidad que estos presentan, sin depender de juicios previos enmarcados en teorías pre-existentes. En particular, utilizamos el *enfoque constructivista* de Teoría Fundamentada, desarrollado por Charmaz (2006), y reconocido por su énfasis en la relación del investigador con los participantes (Birks y Mills, 2011). El análisis de los datos se realizó de forma no lineal con ciclos de retroalimentación y dividido en cuatro fases, como se describe a continuación.

Primera fase. Para la codificación inicial, o abierta, se utilizaron las técnicas de la *comparación constante* y los *memos analíticos,* en la plataforma electrónica del programa NVivo-10. El análisis ese enfocó en identificar grupos de palabras según su naturaleza lingüística (preguntas, metáforas, verbos de acción para operaciones matemáticas, adjetivos para describir la variación, etc.). En la etapa de codificación intermedia fue evidente que necesitábamos categorías que describieran características del discurso que evidenciaran las *intenciones* del hablante, así como sus construcciones lingüísticas. Para lograr esto se seleccionó un subconjunto de los *modos discursivos* más comunes. Los modos discursivos son los procedimientos usados para ordenar las categorías de la lengua en función de las finalidades discursivas, o modos de organización del discurso, durante el acto de comunicación. Esto produjo un conjunto de 15 códigos nuevos, agrupados en 4 categorías, que se describen en el siguiente diagrama (Figura 1). Las primeras tres categorías corresponden exclusivamente a modos discursivos del profesor y en la cuarta categoría se recoge el breve intercambio oral que cada profesor tuvo con sus estudiantes.

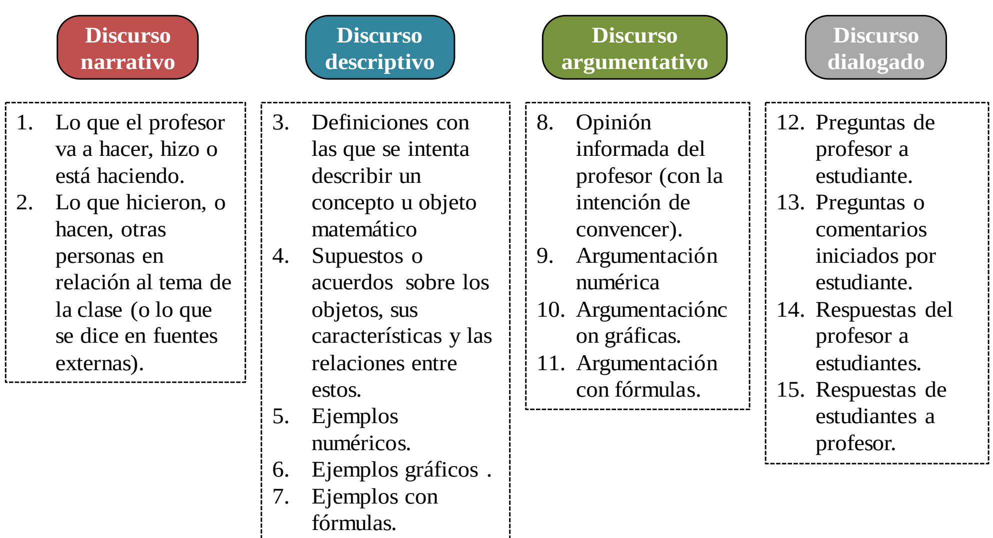


Figura 1. Distribución de los 15 códigos en las 4 categorías definidas.

Segunda fase. Iniciamos esta fase convencidos de que las relaciones entre categorías no eran de jerarquías, o de causa-efecto, sino complementarias y "asociativas"; por lo cual nos propusimos estudiar el *fluir* de los discursos en cada clase. Para esto se diseñó una técnica original de construcción de gráficas que ilustra el cambio de códigos y categorías "momento a momento". A esta herramienta gráfica que facilita el análisis longitudinal de los discursos en la sala de clases le hemos llamado EKG, pues tienen el aspecto general de un *electrocardiograma del discurso en la clase*. En la Figura 2 aparece una porción de la gráfica EKG usada en el análisis de una de las clases.

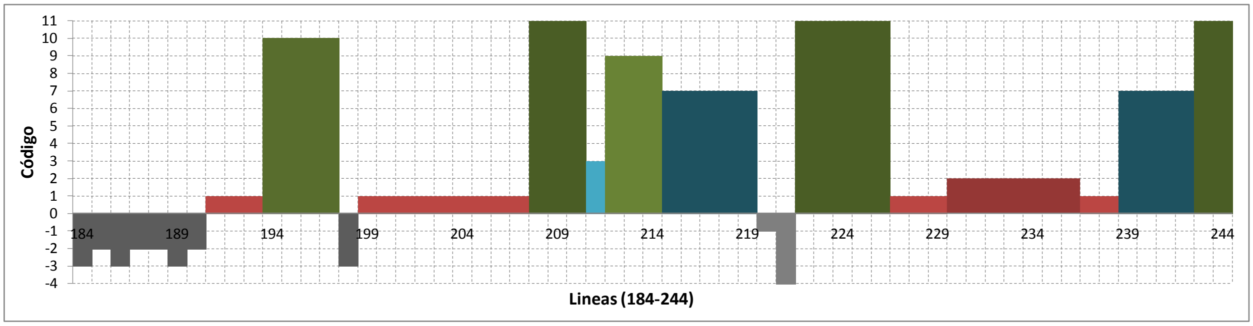


Figura 2. Porción de gráfica EKG utilizada para analizar la segunda clase

Con esta herramienta, aplicada a las transcripciones de todas las clases, se identificaron patrones discursivos emergentes, y mezclas de discursos, así como la frecuencia relativa y la ubicación de cada uno de los discursos representativos, en cada parte de cada clase. Finalmente se estableció la frecuencia y orden de los segmentos de discurso que utilizaron los registros numérico, gráfico y algebraico para las funciones matemáticas.

Tercera fase. En esta fase se utilizaron varias técnicas de *análisis de discurso* para identificar las posturas epistemológicas de cada profesor, en relación con las Matemáticas y su enseñanza. Preferimos la espontaneidad del análisis "en vivo" de cada clase, en vez de preguntar directamente a cada docente sobre sus posturas filosóficas; y justificamos cada elección con referencias de citas sobre la clase y su comparación con las descripciones formales de las diferentes posturas epistemológicas. Además, utilizamos la tipología presentada por Gee (2011) y lo reportado por Herbel-Eisenmann et al. (2010) sobre la noción de *conjunto léxico* para identificar palabras o frases cortas, repetidas con mucha frecuencia, que le añaden una "marca especial" al desarrollo del discurso oral. Estos conjuntos léxicos se relacionan con sentimientos, actitudes y valores que, para propósitos de nuestra investigación, son importantes como evidencia de las interacciones sociales que ocurren en cada clase.

Cuarta fase. En esta última fase se retomó la comparación constante y el análisis de los memos analíticos para encontrar los patrones y recurrencias que permitieron desarrollar una *síntesis conceptual* para proponer una *teoría explicativa*. Esta teoría intenta establecer las relaciones entre los discursos y las respectivas posturas epistemológicas de los docentes. También se concluye con argumentaciones teóricas sobre la relación entre los discursos de los profesores y la construcción de las relaciones sociales en la sala de clase, así como la relación de los primeros con el tratamiento que hacen de las representaciones semióticas de las funciones.

Análisis y resultados

Los modos discursivos y las posturas epistemológicas

En la Tabla 1 se resume el perfil de modos discursivos utilizados por los profesores en cada clase analizada, según se distribuyen en los códigos y categorías utilizadas. En la primera clase el profesor demostró una postura epistemológica cónsona con el *constructivismo moderado* y un énfasis marcado en el modo discursivo dialogado. El profesor de la segunda clase usó extensamente el modo narrativo y demostró una postura epistemológica *naturalista* de las Matemáticas, y el de la tercera clase se valió de un manejo extenso de la argumentación y la descripción, exhibiendo una postura epistemológica *socio-antropológica.*

Tabla 1. *Frecuencia porcentual del texto analizado en cada clase, según su código y categoría.*

Categorías	Códigos	% Clase 1	% Clase 1	% Clase 2	% Clase 2	% Clase 3	% Clase 3
Narración	1	10.2	11.4	11.3	47.0	4.6	6.5
	2	1.2		35.7		1.9	
Descripción	3	5.4	18.1	3.7	16.2	3.5	30.5
	4	5.3		3.4		6.5	
	5 (n)	2.9		0.6		12.7	
	6 (g)	4.1		0		3.7	
	7 (f)	0.4		8.5		4.1	
Argumentación	8	2.5	21.6	11.5	27.2	20.9	39.2
	9 (n)	8.3		0.6		10.5	
	10 (g)	6.0		0.8		1.6	
	11 (f)	4.8		14.3		6.2	
Diálogo	-1 y -4	47.3	48.9	1.4	9.6	7.3	23.7
	-2 y -3	1.6		8.2		16.4	

Es evidente que en cada clase se observan con más frecuencia *parejas* de modos discursivos (sumando al menos el 70% de todo el texto analizado en cada clase) pero siempre incluyendo con énfasis el modo *argumentativo*. En la primera clase, el profesor constructivista asumió la existencia de un conocimiento pre-existente que los estudiantes deben reconstruir y se valió del diálogo para provocar esa *reconstrucción*, mientras interactuaba con los estudiantes. El profesor usó como punto de partida las definiciones de dos tipos de variación (conocimiento pre-existente) e hizo referencias frecuentes al *trabajo* que realizarían, como por ejemplo: "*recuerde que lo que vamos a trabajar son dos ejemplos*" y "*vamos a estar trabajando el concepto de variación*"; implicando la gran cantidad de cómputos por hacer, pero también la gran cantidad de preguntas de reflexión que serían formuladas. En este caso el "trabajo" es la construcción, o reconstrucción, conceptual que se lograría con el estudio de los ejemplos a presentarse.

Según Kitcher (1988) la postura naturalista, observada en la segunda clase, tiene como característica importante su carácter social e histórico y la importancia que concede a la práctica. Esto coincide con la insistencia del profesor en narrar con detalle los referentes históricos, como cuando dice: "*estoy hablando de la Matemática occidental que se nutrió de esas otras Matemáticas pero que se fue relegando como una tradición en sí misma*"; y la constante referencia a hechos prácticos como: "*una ecuación que describía las vibraciones de una cuerda y la naturaleza de sus soluciones, era un debate y ahí se vieron forzados a pensar mejor qué quería decir que una variable fuera función de otra*". Aunque ésta fue la clase de menor participación de estudiantes en secuencias dialogadas, ésta ocurrió principalmente por iniciativa de los propios estudiantes, como se muestra en el siguiente fragmento de diálogo entre el profesor (P) y el estudiante (E).

P: *Si tú estableces esa variación entre ellas, tú puedes producir bien fácil una ecuación.*
E: *Pero eso es en formas bien básicas de relación.*
P: *Sí, sí… pero entonces tú vas a ver qué se puede.*
E: *Aplicar.*
P: *No… se puede ampliar, se puede aplicar obviamente pero… de hecho, por ejemplo, que se yo, Leonardo Da Vinci… todas las leyes que propuso, por las cuales es tan famoso… todas eran lineales.*
E: *¿Todas?*
P: *Todas. Él siempre pensaba que la naturaleza se comportaba de esa manera... lo cual es falso, ¿ok?*

Decimos que la postura epistemológica observada en la tercera clase es socio-antropológica tomando como punto de partida la *Teoría de Situaciones Didácticas* de Brousseau (1990, 1991), que forma parte de los enfoques antropológicos modernos para la enseñanza de Matemáticas, y que afirma que un concepto no se desarrollará, si el sujeto nunca tiene una necesidad del mismo. Este profesor usó a menudo ejemplos relacionados con aspectos relevantes del diario vivir, recreando la necesidad de formar una noción clara de variación, como por ejemplo cuando dice: "*Pues yo hago una regla y espero que la gente bajita tenga valor más pequeño que la gente alta, ¿verdad?*"; o cuando explica que "*el peso generalmente tiene que ver con la salud del nene, así que uno dice ¿qué está pasando que las mamás tienen nenes que son con un peso bien pequeño, ¿por qué?*". El fin no es que los estudiantes repasen un proceso histórico-cultural del desarrollo de un concepto, sino conducir una enseñanza directa del concepto ya conocido, pero repitiendo las aproximaciones que históricamente dieron origen al concepto mismo.

Representaciones semióticas de funciones

El siguiente diagrama (Figura 3) resume los hallazgos sobre los tipos de representaciones semióticas de funciones utilizadas en cada clase. Podemos concluir que existe también una estrecha relación entre las diferentes posturas epistemológicas observadas y el manejo de las diferentes representaciones semióticas de las funciones matemáticas.

Representación semiótica de funciones	Clase observada	Características
Todas (en balance)	Primera	Presentadas en estricto orden: numérica, gráfica y luego algebraica
Principalmente numérica	Tercera	Para asociar el concepto con una métrica
Principalmente gráfica	*(ninguna)*	*(uso moderado para apoyar relaciones numéricas)*
Principalmente algebraica	Segunda	Como síntesis abstracta de conocimiento pre-establecido

Figura 3. Características del uso de representaciones semióticas de funciones.

El profesor *constructivista* (primera clase) organizó cada ejemplo manejando en estricto orden las representaciones numérica, gráfica, y luego la algebraica; sin convertir a ninguna de ellas en protagónica. Esta elección es común en clases que introducen un concepto enmarcado con un discurso constructivista, pues provee a los estudiantes herramientas variadas de análisis para que el estudiante, en su momento, pueda construir aquella representación conceptual que le parezca más apropiada. Además, la variedad de representaciones facilita el diálogo y la argumentación en grupos de estudiantes con trasfondos heterogéneos que, sin embargo, se pueden sentir motivados a participar de las interacciones en la clase. De otra parte, resultó muy apropiado el énfasis absoluto que el profesor *naturalista* (segunda clase) hizo de la representación algebraica de las funciones, pues sirvió como recurso de *síntesis*, al recoger los elementos esenciales del desarrollo conceptual-histórico que se presentaron en una clase introductoria y con tiempo limitado. En general, las otras dos representaciones de las funciones, y particularmente la numérica, se utilizaron al enseñar la noción de variación con más frecuencia en las secuencias descriptivas y argumentativas iniciales, probablemente debido al más bajo nivel de abstracción que estas representaciones suponen. Éste no era el enfoque de la segunda clase, cuyo objetivo parecía más presentar una apretada síntesis conceptual para motivar luego otro nivel de análisis sobre el concepto. Fue en la tercera clase, del profesor que exhibió una postura *socio-antropológica*, que se observó el énfasis marcado, y casi absoluto, en el manejo de la representación numérica pues sirvió como recurso esencial para reconstruir una definición de la variación como una métrica para el *grado de heterogeneidad*.

Las relaciones sociales

En las tres clases analizadas el discurso predominante fue el del profesor. Este modelo es común en las cátedras universitarias, donde impera la idea de que el profesor es portador del “saber sabio”, delegando a los estudiantes un rol más pasivo de asimilar información y aclarar dudas. Para intentar crear un clima de empatía y confianza durante la clase, el profesor *constructivista* manejó extensamente conjuntos léxicos que terminaban con la interrogante “*¿qué*?”, en un intento por lograr la participación de los estudiantes con respuestas directas y específicas. Una vez los estudiantes reconocen que pueden aportar respuestas correctas (aunque breves) se deben sentir en más confianza de responder preguntas más reflexivas o, inclusive, formularlas en la clase. Claro que para que esto ocurra tiene que haber un tiempo de maduración en las relaciones sociales, que no fue posible observar en esta investigación.

De forma parecida, el profesor de postura *socio-antropológica* se valió de los conjuntos léxicos "*¿verdad*?" y "*¿está bien*?" con propósitos análogos, pero en este caso la intención era mantener una especie de "conversación retórica" (pues las preguntas no se hacían con la intención se recibir respuesta) que comunicara la idea de que el profesor buscaba la *aprobación* de los estudiantes durante su exposición. El tono suave y el ritmo rápido que usó el profesor con estos léxicos se entendía como un mensaje de "ustedes me pueden corregir porque puedo cometer errores, y eso está bien". El profesor *naturalista*, por su parte, recurrió más al tuteo y al uso frecuente de expresiones coloquiales con la intención de comunicar un clima de apertura al diálogo. Es significativo que la (escaza) participación de estudiantes en esta clase fuera, sin embargo, más espontánea; buscando indagar más en las explicaciones o narraciones del profesor.

Discusión

El análisis de las categorías en este estudio, enriquecido con el enfoque del análisis discursivo y la reflexión sobre el ambiente de relaciones sociales en la clase, nos permite esbozar una teoría general que se ilustra en el diagrama de la siguiente página (Figura 4). Aunque se observaron mezclas de *pares* de modos discursivos, con relativos grados de énfasis, la *argumentación* fue el modo discursivo predominante en todas las clases. Esto era de esperarse por la marcada relación de poder en las salas de clases de Matemáticas, ubicando al profesor en el rol de "*argumentar para provocar reflexión y discusión*". Pero los modos en que cada profesor argumenta son muy variados y, evidentemente, influenciados por las posturas epistemológicas que demuestran en cuanto a las Matemáticas y su enseñanza. El profesor constructivista mezclará más las argumentaciones con el diálogo, buscando *negociar* con los estudiantes hasta que afloren concepciones personales de lo aprendido. El diálogo puede ser más unidireccional (originado principalmente por el profesor) cuando el proceso de construcción es más *guiado*, para retar o motivar a los estudiantes; o más bidireccional (con origen tanto en estudiantes como en profesores) cuando se trata de un constructivismo más *radical* que intente lograr una negociación, o acuerdo, en torno al concepto estudiado.

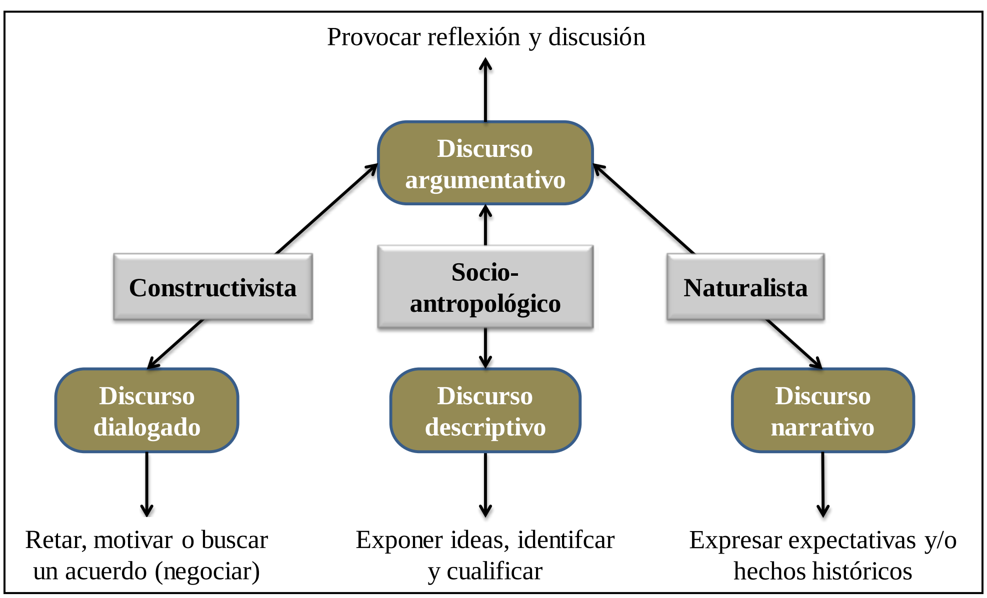


Figura 4. Construcción teórica propuesta entre posturas epistemológicas y las mezclas de modos discursivos.

En cambio, el profesor naturalista narrará "el cuento" necesario para que los conceptos específicos explicados (micro) se vinculen con la reflexiones históricas (macro), con la expectativa de que la fusión de ambas produzca una imagen conceptual más clara y duradera. En este caso la narración extensa (sea para expresar expectativas o hechos) se convierte en una especie de "argumentación teórica"; que apoya el tratamiento de ejemplos y expectativas particulares de la clase. De otra parte, el profesor cuya postura epistemológica es socio-antropológica utilizará las argumentaciones como vehículo principal, y las descripciones como apoyo, para mover la clase hacia un auto-reconocimiento de parte de los estudiantes de *qué es, por qué es, cómo es, y cómo se utiliza* un concepto particular.

Al enfocar el discurso didáctico con marcada presencia del modo argumentativo, los profesores intentan provocar la discusión, más o menos crítica, dependiendo de la intrincada mezcla que cada cual haga con otros modos discursivos; para eventualmente provocar la construcción de significados personales en los estudiantes. Son estas *mezclas* de modos discursivos las que dan un sello personal a la clase de cada profesor. En general, observamos cómo en todas las clases el modo discursivo *descriptivo* aportó contexto para las argumentaciones (especialmente por medio del planteamiento y solución de ejemplos). En este sentido, se utilizó para clarificar y apoyar la construcción conceptual de los significados de la noción de variación, según presentados por cada profesor. De otra parte, el modo narrativo fue utilizado de formas variadas. En un caso este modo narrativo se utilizó para marcar pausas en la clase que servían para reducir la densidad y abstracción del tema central, mientras se narraba la historia de por qué se podía hacer lo que se argumentaba y describía. Estas pausas, que no deben verse como distractores de las secuencias didácticas, son efectivas cuando el discurso se cambia, brevemente, al modo narrativo, y se permite decir y escuchar las historias que sustenten la conceptualización teórica en desarrollo. En otro caso se usó la narración como modo protagónico para contextualizar el aprendizaje con referencias al desarrollo histórico de los conceptos y, aún en otro caso, apenas estuvo presente pues "el cuento que había que contar" se estaba hilvanando con mezclas de argumentación y descripción en una secuencia de ejemplos planificados.

Comentarios generales, limitaciones y recomendaciones

Una característica relevante, que se desprende de las tres clases observadas es la escaza participación de los estudiantes universitarios en los diálogos durante la clase y el predominio del discurso de los profesores, tanto en extensión de tiempo, como en la profundidad de los contenidos. Esto es análogo a lo reportado por Radovic y Preiss (2010) en aulas de Matemática de Segundo Ciclo Básico en Chile. Estos investigadores encontraron que "parecieran haber más semejanzas que diferencias en términos del discurso del profesor cuando se dirige a todos los alumnos de la sala" (p. 77). Este modelo de poca participación estudiantil se reconoce como común en las "cátedras universitarias", pero parece ser de mutuo acuerdo en la dinámica social universitaria pues las pocas reflexiones personales que los estudiantes anotaron en las bitácoras eran para describir a los profesores con frases tales como: "*buena interacción con los estudiantes*", "*precisa y fácil de entender*", "*da la impresión de saber lo que está hablando*". Esto debe ser reflejo del sentido de subordinación de estudiantes que atribuyen cualidades positivas a la figura de poder, como para justificar su falta de control en el ambiente de aprendizaje. Podríamos pensar que, hipotéticamente, los estudiantes pudieran haber escrito sobre su *buena interacción con el profesor* o sobre cómo se *entendieron de parte y parte*.

Otro aspecto importante que ha resultado evidente en el análisis de estas clases es la diversidad de conceptualizaciones teóricas que pueden utilizar los profesores universitarios sobre un mismo concepto matemático, y cómo esto influye en el discurso construido para la clase. El espectro de estas conceptualizaciones observadas, en relación con la noción matemática de variación, fue desde lo más específico y concreto (al hacerlo equivalente con heterogeneidad) hasta lo más general y abstracto (al usarlo como generador de la noción de límite y derivada en Cálculo). Las diferencias son significativas pues cada profesor tenía sólo una hora para exponer el tema y no hubo restricciones en el diseño del contenido de la clase. Por lo tanto, será necesario preguntarnos cuántos otros conceptos matemáticos son presentados a los estudiantes de formas tan variadas, en cursos con profesores diferentes; y cómo los estudiantes logran hacer sentido personal de los significados que intentan aprender. No estamos sugiriendo que la diversidad de presentaciones de un mismo concepto sea un factor negativo para el aprendizaje, sino cómo esa diversidad es manejada de manera positiva para construir aprendizaje.

Es muy probable que se puedan observar clases de Matemáticas con mezclas de modos discursivos diferentes a las observadas con nuestros tres participantes. Debido al número limitado de clases observadas, sería necesaria la investigación de un mayor número de profesores, con el propósito explícito de ir construyendo una tipología de *mezclas* de modos discursivos, con sus respectivos referentes epistémicos asociados. Pero más importante aún, sería necesario investigar cómo esta variedad de discursos de parte de los profesores es comprendida por los estudiantes para apoyar la construcción coherente y efectiva de significados, sobre todo si se toma en cuenta que los estudiantes universitarios están a menudo expuestos a estos discursos sin un orden o plan previsto, como parte de los currículos universitarios existentes. Por último, resulta imprescindible continuar los esfuerzos por aumentar el cúmulo de conocimiento sobre los procesos de comunicación en las salas de clase de Matemáticas, incluyendo el análisis de los discursos de profesores y estudiantes, si pretendemos desarrollar programas curriculares efectivos que propendan al desarrollo personal y cognitivo de nuestros estudiantes.

Referencias y bibliografía

Birks, M. & Mills, J. (2011). Grounded Theory: A Practical Guide. Thousand Oaks, CA: Sage

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte). *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), 259- 267. Traducción al español de Luis Puig. Disponible en http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51335/93083

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda Parte). *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 9(1), 10- 21. Traducción al español de Luis Puig. Disponible en http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51351/93100.

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 133-154. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*, London and Thousand Oaks, CA:Sage.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 145-168. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Font, V., Bolite, J., & Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics,* 75(2), 131-152.

Forrest, D.B. (2008). Communication theory offers insight into mathematics teachers' talk. *The Mathematics Educator,* 18(2), 23–32.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartamentalized in students' thinking? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(4), 197-224.

Gee, J. P. (2010). How to Discourse Analysis: A Toolkit. New York, NY: Routledge.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, Versión ampliada y revisada al 8 de marzo de 2009 del artículo: The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Herbel-Eisenmann, B., Wagner, D. & Cortes, V. (2010). Lexical bundle analysis in mathematics classroom discourse: the significance of stance. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 23-42. DOI 10.1007/s10649-010-9253-6

Kitcher, P. (1988). Mathematical Naturalism. En: W. Aspray and P. Kitcher (eds.). History and Philosophy of Modern Mathematics. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Volume XI. Minneapolis: University of Minnesota Press.Piccolo, D.L., Harbaugh, A.P., Carter, T.A., Capraro, M.M., & Capraro, R.M. (2008). Quality of instruction: Examining discourse in middle school mathematics instruction. *Journal of Advanced Academics,* 19(3), 376-410.

Radovic, D. & Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico en Chile. *Psykhe*, 19(2), 65-79. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=96715366007

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(3), 435-458. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Reséndiz, E. (2010). El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales, la noción de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-I), 99-112. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Dordrecht, HL: Kluwer, A. P., 827-876.

Trinter, C.P. & Garofalo, J. (2011). Exploring non routine functions algebraically and graphically, *Mathematics Teacher,* 104(7), 508-513.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Aprendizagem do conceito de frações frente a situações de aprendizagem sugeridas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo

Raquel Gomes de **Oliveira**
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências e Tecnologia-Unesp
Brasil
raqueloliveira@fct.unesp.br

Resumen

O objetivo da pesquisa era verificar se no currículo de Matemática proposto pela Secretaria de Educação de São Paulo (SEE) existem referenciais piagetianos considerados determinantes para que aconteça a construção operatória ou significativa do conceito de frações. Para alunos do 6º ano, que vivenciaram atividades desse currículo, aplicou-se uma prova diagnóstica sobre a relação parte-todo, a associação entre representação pictórica e a linguagem matemática, a equivalência e ordem entre frações e a representação fracionária. Os resultados mostraram que os elementos que compõem o referencial científico piagetiano estão presentes, de forma pontual, no material didático proposto pela SEE, mas a construção operatória do conceito de frações não foi satisfatória. Portanto, é necessário que este material seja reelaborado através de materiais e atividades didáticas que contemplem e possibilitem a articulação dos referenciais piagetianos a fim de que haja essa construção pelos alunos.

Palabras clave: currículo de matemática, ensino e aprendizagem, frações.

Introdução

Resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP que mostram o desempenho dos alunos quanto ao conceito de frações, em vários contextos, contribuem para que sejam investigados a natureza do material didático disponibilizado às escolas do Estado de São Paulo e o modo como este material é trabalhado em situações de ensino aprendizagem.

> Acredito que uma das principais causas para o surgimento dessas dificuldades de compreensão e significação do conjunto dos números racionais, representados na forma de fracionária, é o modo como em geral como as frações são apresentadas aos alunos. Ao abordar este conteúdo os professores, na maioria das vezes, iniciam conceituando os números racionais dando exemplos, geralmente numéricos, e, após, já começam a realizar operações introduzindo os algoritmos, sem que o aluno compreenda a quantidade que está sendo representada e utilizada na operação. (PROCHNOW, 2010, p.13).

Análises de resultados e comentários que se encontram no Relatório Pedagógico do SARESP (2010) sobre o ensino e aprendizado do conceito de frações contribuíram para a relevância da pesquisa à medida que apontaram necessidades pedagógicas para o trabalho deste conceito. Necessidades esta que requereram a investigação do material didático utilizado nas aulas de Matemática e também não menos importante, a investigação sobre a forma como foi trabalhado com os alunos.

Desse modo, a pesquisa buscou verificar a existência de referenciais científicos propostos por Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) para que seja realizada a construção de forma significativa do conceito de frações junto ao material didático para o 6º ano, disponibilizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE).

Fundamentações teóricas e revisão de pesquisa sobre ensino e aprendizagem de frações

De acordo com Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), a noção de fração quer seja relativa à quantidade contínua quanto ou discreta constrói-se no nível das operações concretas e esta construção do conceito de fração só é possível quando ocorrer uma articulação operatória entre os seguintes elementos: existência de uma totalidade divisível; existência de um número determinado de partes; esgotamento da divisão do todo; relação entre o número de partes e o número de cortes; igualização das partes; compreensão de que cada fração pode também ser um todo sujeito a novas divisões e atendimento ao princípio da invariância.

Este último elemento, princípio da invariância, diz respeito ao fato de a quantidade (contínua ou discreta) dos objetos não variar em função da variação de suas formas, posições, arranjos… É preciso que o aluno tenha a capacidade de compreender que essas modificações resultam de transformações mentalmente reversíveis. Somente tendo esta capacidade é que entenderá que uma parte é o resultado da diferença entre o todo e a(s) outra(s) parte(s) e também que a soma de todas as partes é igual a este todo. Quando um aluno age sobre um objeto, pela partição e sobreposição de uma parte (a unidade) sobre as outras, tem a possibilidade de conseguir perceber o todo como um múltiplo da unidade tomada. Para Piaget et al (1948) , isto também acontece na construção do conceito de número, quando se trabalha simultaneamente com o encaixe de classes e a seriação das relações não simétricas.

Na presença do esquema de encaixe e de comparação entre as próprias partes, tanto no contexto discreto como no contínuo o aluno conseguirá obter meios, terços e quartos desejados. Já na ausência deste esquema, um quarto ou a metade da metade provocará dificuldades, tanto no contexto contínuo como no discreto. Conforme assinala Piaget, esta dificuldade não está no contexto trabalhado, mas sim na ausência de um esquema de comparação e de encaixe entre as partes e o todo. Assim, o processo de construção do conceito de frações métricas ou numéricas está vinculado aos problemas das relações entre a ação operatória e a representação perceptual, isto é, entre a abstração reflexionante (a partir da ação) e a abstração empírica (a partir do objeto), colocando a primazia na primeira como elemento ativo ou operatório responsável pela generalização necessária para a construção da ideia de número fracionário.

Oliveira (1996) em seu estudo realizado com crianças da 5ª série (atual 6º ano da Educação Básica) utilizou um pré e um pós-teste sobre frações, dividindo as turmas e trabalhando com uma delas de forma convencional e com a outra usando princípios construtivistas e considerando alguns dos elementos propostos por Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), chegando ao resultado que o grupo que trabalhou de forma diferenciada obteve melhores resultados quanto à aprendizagem de frações em relação ao grupo que trabalhou de forma convencional.

Magina e Campos (2008) realizaram um estudo com 70 professores polivalentes e 131 alunos da 3ª e 4ª séries do ensino Fundamental. Os resultados revelaram que os professores superestimam a capacidade de acerto dos alunos principalmente para os da 4ª série. Na análise dos dados, constatou-se que os professores conseguiram identificar e explicar os erros dos alunos, contudo apresentaram estratégias de ensino muito limitadas, estratégias estas limitadas ao uso de desenhos ou material concreto, o que pouco contribui para os alunos superarem a dificuldade na aprendizagem de frações. Estas estratégias têm por objetivo facilitar a comparação perceptual das partes com o todo e das partes entre si, em detrimento do ensino das operações de ordem e equivalência, consideradas por Magina e Campos (2008) como invariantes operatórios fundamentais para o aprendizado do conceito de frações. Conclui-se também que não há clareza dos diferentes significados de frações para os professores o que os leva a propor situações de aprendizagem restritas ao ensino do significado e da percepção da relação parte-todo.

Magina, Bezerra e Spinillo (2009) realizaram uma pesquisa sobre frações com 57 crianças entre oito e dez anos, todos de escolas públicas da cidade de São Paulo. Em seu trabalho eles dividiram as crianças em três grupos: Grupo Experimental (GE), Grupo de Controle (GC), ambos formados por crianças da 3ª série sem instrução alguma sobre frações, e o Grupo de Referência (GR), este com crianças da 4ª série que já receberam alguma instrução sobre frações. Todos os grupos foram submetidos a um pré–teste e depois de oito semanas a um pós-teste. Somente o GE durante oito semanas recebeu uma intervenção na qual os alunos trabalhavam com material concreto e manipulativo, representações gráficas variadas (diagramas, representações icônicas, pictográficas entre outras) e folhas de papel quadriculado. Não se priorizou um único material, ao contrario, mostrou-se que as frações poderiam ser representadas de varias maneiras e que existe uma relação entre todas. Também eram colocadas em evidência as dúvidas dos alunos abrindo espaço para discussões sobre os acertos e erros dos mesmos.

A conclusão aponta que existem três tipos de erros padrões tanto no pré quanto no pós-teste. No erro Tipo-1 as crianças interpretam frações como se fossem números naturais, no erro Tipo-2 a criança interpreta a fração como número natural enquanto vai resolver o problema principalmente com quantidades discretas e no erro Tipo-3 não se reconhecia a necessidade de dividir o todo em partes iguais. Este tipo de erro aparecia quando quantidades contínuas estavam envolvidas. Através do pós-teste concluíram que o GE teve um grande avanço passando de 10,2% de acertos no pré-teste para 69,8% enquanto que o GC passou de 12% para 12,3% e o GR de 10,7% para 31,8%. Através disso concluíram que a intervenção teve bons resultados, pois as crianças no pré-teste estavam praticamente no mesmo patamar, e depois da intervenção crianças de 3ª série obtiveram resultados mais substanciais, mostrando que a maneira em como se apresenta e trabalha as frações interfere e muito no aprendizado do aluno.

O estudo feito por Junior e Colvara (2010), com 22 estudantes universitários dos quais 12 eram do curso de licenciatura em Matemática, teve como objetivo analisar como alunos de ensino superior lidavam com conceitos fundamentais da Matemática, neste caso, as frações foram o tema. Para a realização do estudo foi aplicado um questionário individual com 11 questões, sendo 9 abertas e 2 da forma verdadeiro ou falso. Depois que eles respondiam o questionário, o mesmo era lido na presença deles onde era conduzida uma entrevista para conseguir identificar qual o raciocínio e a estratégia usada para resolver os problemas propostos no questionário. Os estudantes foram orientados a construir um mapa conceitual sobre frações.

Os resultados mostraram que 67% dos alunos entendiam Fração como divisão, 17% Fração como parte de algo, 8% Fração como razão e proporção e nenhum no modelo Científico. Nesse estudo, os autores puderam constatar que a maioria dos alunos encontra-se distante do nível conceitual que se espera para eles, isto pode ser constatado em seus modelos mentais, pois foram observadas muitas falhas conceituais, e muitas destas falhas podem ter sido originadas através pelas estratégias de ensino adotadas nos primeiros anos de escolaridade..

Maciel e Câmara (2007) aplicaram uma série de 10 questões sobre frações com crianças da 5ª série até alunos do 3º ano do Ensino Médio. No questionário eles variaram a quantidade (contínua e discreta), a representação (figuras ou linguagem natural) e a significado das frações (operador, parte-todo e quociente). Um dado interessante observado no estudo foi que alunos com menor escolaridade obtiveram melhor desempenho nas questões com quantidades contínuas, e somente depois das 7ª série que há um equilíbrio de rendimento entre os sujeitos. Maciel e Câmara (2007) constatam em sua pesquisa que 52% dos erros cometidos pelos alunos do Ensino Fundamental devem-se ao fato da ideia de fração como quantidade discreta estar fortemente associada ao denominador da fração.

Já para os alunos do Ensino Médio, a tendência é realizar uma operação de soma entre os termos da fração, por exemplo: um quarto de n elementos para eles seria (1+4), essa ideia esteve presente em 49% dos participantes. Para alunos do 3º Ciclo quando o numerador não é unitário nas frações discretas, 46% dos sujeitos realizam a operação de soma entre os termos da fração, independente da quantidade do todo, por exemplo: 2/3 de 17 bolinhas seria 5. Trinta por cento dos alunos do Ensino Médio tendiam a realizar multiplicação entre os termos da fração, por exemplo: 2/3 de 18, seria 6. Na pesquisa eram contempladas as ideias de fração como (relação parte-todo, quociente e operador). A ideia de parte-todo é a mais explorada na sala de aula, porém os alunos não obtiveram melhor rendimentos no questionário com o passar dos anos de escolaridade. Em relação à ideia de operador, o rendimento se mostra inalterado, tendo um baixo rendimento em todas as séries. A ideia de quociente tem seu melhor rendimento nos alunos da 5ª série, para os demais anos os índices de sucesso se mantiveram constantes. Através da análise de 3 categorias de erro, concluem que os erros encontrados pouco se alteram com o desenvolvimento da vida escolar e constatam que alunos do 3º ciclo, que trabalham números proporcionais obtiveram melhor desempenho nas questões que contemplavam fração como parte-todo e quociente. Os alunos do 3º ano que tem aulas de Física e Química que trabalham de forma mais acentuada as frações centesimais se saíram melhor em questões que contemplavam as frações como operadores.

Como visto, o ensino e a aprendizagem do conceito de frações têm se mostrado como pertinente tema de pesquisa em que a variedade de objetivos e metodologias contribuem para o entendimento de que muito temos ainda que avançar em estudos que se qualifiquem como parâmetros para um efetivo processo de ensino e aprendizagem de frações, fundamentado sobretudo, pelo entendimento e apresentação curricular deste conceito.

Objetivo e metodologia da pesquisa

O objetivo geral da pesquisa era analisar a aprendizagem do conceito de frações por alunos do 6º ano frente à utilização de situações de aprendizagem propostas pelo atual Currículo de Matemática do Estado de São Paulo e veiculadas nas escolas estaduais por meio do Caderno do Professor e do Caderno do Aluno. Especificamente os objetivos foram: 1) analisar situações de aprendizagem propostas pelo Currículo do Estado de São Paulo em termos da relação entre ação operatória e representação perceptual; 2) analisar se as situações de aprendizagem propiciaram aos alunos elaboração da relação parte-todo e do conceito de operador tanto em grandezas discretas como contínuas; 3) analisar se as situações de aprendizagem propiciaram a elaboração operatória da associação entre representação geométrica e linguagem matemática e 4) analisar se as situações de aprendizagem propiciaram a elaboração dos conceitos de equivalência e de ordem entre frações.

A pesquisa foi realizada por um aluno do 3º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da FCT-Unesp com 20 alunos do 6º ano de uma escola pública da cidade de Rancharia-SP. Os dados foram levantados através da descrição e análise do material didático denominado Caderno do Aluno volume 1 e 2, onde estavam dispostas as sequências didáticas, além da análise de um caderno de classe de um aluno assíduo a fim de verificar como o material didático havia sido desenvolvido. Ainda para o levantamento de dados, aplicou-se uma prova diagnóstica para todos os alunos da sala para averiguar o desempenho quanto ao conceito de frações voltado para a relação parte-todo, associação entre representação pictórica e a linguagem matemática, equivalência e ordem entre frações e representação fracionária.

Resultados e análise

Todas as questões desta análise estão dispostas no apêndice.

Na questão 1, 30% dos alunos resolveram este tipo de exercício usando as 15 bolinhas de gude como se fosse algo contínuo e não discreto, isso porque desenharam um retângulo e fizeram 15 divisões nele para representar as 15 bolinhas, o que faz pensar que isso se deve aos tipos de exercícios trabalhados no material da SEE que contempla somente o contexto contínuo, por exemplo, o primeiro exercício onde os alunos vão construir o conceito de frações já é feito neste contexto, onde os alunos usando uma folha de papel A4 realizam a construção de um Tangram e depois a eles são feitas perguntas sobre qual fração representa uma determinada peça, por exemplo esta questão: “Um triângulo pequeno corresponde a que fração do triângulo grande?”. Concluímos que 45% alunos não têm compreensão operatória sobre a resolução do exercício, porque eles não operam o conceito de fração em termos de comparação e encaixe entre as partes, independentemente se estas são contínuas ou discretas como propôs Piaget et al (1948) e Piaget (1978).

Para a questão 5, percebe-se que os alunos não têm domínio operatório sobre o uso de operadores: 90 % dos alunos erraram a questão. Uma justificativa para isso é encontrada em Lamon (2006) para o qual um operador é um:

> [...] conjunto de instruções para executar um processo. Por exemplo, “2/3 de” é um operador que instrui você para multiplicar por 2 e dividir por 3. Para aplicar o operador “2/3 de” realizamos as operações familiares de multiplicação e divisão

> sucessivamente. [...] o operador 2/3 pode ser visto como uma única operação numa quantidade Q, pode ser visto também como uma multiplicação de Q por 2 seguida da visão do resultado por 3, ou ainda, como uma divisão de Q por 3 seguida da multiplicação do resultado por 2.” (LAMON, 2006, p. 151-152).

Baseando-se em Lamon (2006) é possível concluir que, não houve por parte dos alunos a assimilação do uso dessas instruções, realizando assim somente a operação da divisão de 21 por 7, não entendendo como é necessário fazer a multiplicação pelo numerador 3 ou que devem tomar 3 parcelas iguais do resultado da divisão, o que na questão 1 pode ter causado menos erros (70%) devido ao fato de o numerador ser 1.

A questão 2 teve 90% de acertos, levando a inferir que isto pode se deber ao fato de ser o modelo de exercício mais trabalhado no Caderno do Aluno da SEE, além de os alunos poderem realizar a contagem da quantidade de quadrados que compunham a figura. Porém na questão 4, o número de acertos (30%) foi menos da metade da questão 2 (90%), levando a questionar sobre a causa de tal diferença. Uma possível explicação para essa diferença entre as porcentagens de acertos para questões que tratam do mesmo conceito é dada por Hasemann (1986) que em entrevistas com crianças da 7ª série, mostra que é possível ter-se diferentes desempenhos em questões que tratam de um mesmo conceito. Estas diferenças são causadas pelas diferentes representações internas que diferem em noções e conceitos objetivos ao mesmo tempo.

Para a questão 3, a resposta errada e mais frequente (80%) em relação a afirmativa “1/10 é maior que 1/8”, sugeriu que os alunos não entendem que a fração é também uma representação da operação de divisão. Logo, quando eles comparam frações, se a fração tiver um numerador igual ao da outra a que tiver maior denominador será menor. De certa forma os alunos ainda estão trabalhando no campo dos números naturais. Bocalon (2008) em seu estudo sobre o Erro na Aprendizagem de Frações, através dos erros mais frequentes, percebeu que os alunos não conseguiram entender e nem representar as frações. O que mostrou que não houve compreensão do conteúdo estudado concluindo que os alunos possuem muita dificuldade em trabalhar com números fracionários e há falta de entendimento sobre o conceito de frações. Para esta questão o ideal seria que os alunos utilizassem o MMC (mínimo múltiplo comum) ou então construíssem uma fração equivalente para assim melhor poder analisar. Porém segundo Oliveira (1996) a construção de uma fração a partir de uma dada anteriormente requer um grau elevado de abstração. Grau este que podemos ver que os alunos ainda não possuem.

O conceito de equivalência entre áreas de uma mesma figura geométrica foi observado na questão 7, que contava com a presença dessas figuras. De acordo com os resultados foi possível entender que a representação das áreas pode ter contribuído com o segundo maior número de acertos dos alunos na prova (40%). No entanto, o índice de erros de 60% também pode ser considerado alto. Através deste tipo de resultado podemos perceber que ainda é muito falha a compreensão do conceito de equivalência entre áreas de figuras geométricas. Conforme análise das sequências didáticas sugeridas pelo material da SEE é possível perceber que a equivalência de frações é trabalhada apenas aritméticamente.

A representação das frações próprias e impróprias em contexto contínuo, através de figuras geométricas, foi analisada na questão 6. Analisamos primeiramente as frações próprias. Na tabela 1, os dados remetem exclusivamente à representação feita de maneira correta para o numerador e denominador, com denominador representado em partes iguais. Na tabela 2 estão os dados de representação correta de numerador e denominador sem a igualização das partes.

Tabela 1

Dados da questão 6 sobre representação correta de fração própria

Figura Geométrica	Número de Acertos	Total de itens (figuras) contabilizando as 20 provas	Porcentagem de acerto frente ao total de itens (figuras)
QUADRADO	5	20	25%
CÍRCULO	17	60	28%
TRIÂNGULO	0	20	0
RETÂNGULO	8	20	40%

Tabela 2

Dados da questão 6: representação de fração utilizando partes desiguais (considerando a representação correta do numerador e denominador)

Figura Geométrica	Representação utilizando partes desiguais	Porcentagem de acertos frente ao total de itens (figuras)	Não representa	%
QUADRADO	11	55%	4	20%
CÍRCULO	28	47%	15	25%
TRIÂNGULO	16	80%	4	20%
RETÂNGULO	7	35%	5	25%

A figura que teve maior índice de acerto, conforme a tabela 1, foi o retângulo, podendo ter como causa o fato deste aparecer frequentemente no material didático fornecido pela SEE. Ou seja, isto pode ter refletido diretamente nos dados da questão, pois foi a figura com maior porcentagem de acertos (40%). Do mesmo modo, o triângulo é uma figura geométrica bem pouco considerada pelo material da SEE, isto porque os alunos não tinham ideia de como fazer a representação correta da fração que se referia ao triângulo: nenhum aluno acertou a representação fracionária em um triângulo. Na tabela 2, percebe-se a porcentagem de acerto porque se considerou apenas a representação correta do numerador e denominador desconsiderando, portanto a necessidade de igualização das partes nas representações realizadas. Esse tipo de constatação também é encontrado em Silva (2005) que afirma que quando o ensino enfatiza somente tarefas que apresentem figuras que permitem somente o uso da técnica de dupla contagem (contar a partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e a partes que foram consideradas (numerador)), consequentemente não permite ao aluno desenvolver outras técnicas, o que limitará suas ações na resolução deste tipo de tarefa em que a necessidade de o aluno dividir em partes iguais indica o entendimento ou não do conceito que ele tem de frações. Outro exemplo sobre o tipo de tarefas que oportunizamos aos alunos é sobre fração imprópria, como podemos esperar que um aluno represente corretamente 6/4 sendo que só foram trabalhadas curricularmente frações próprias?

Comparando os dados das tabelas 1 e 2, podemos inferir que os alunos possuem o conceito de frações, mas este ainda necessita ser sistematizado, porque na representação geométrica da fração sabem que numerador é o número de partes tomadas e denominador é o número de partes em que o inteiro foi divido, dado que fizeram esas representações nas figuras. Contudo, a maioria dos alunos não considera a necessidade de divisão em partes iguais.

Esta necessidade de sistematização também pode ser encontrada com as representações nos círculos. Os dados mostraram que para o círculo os alunos tiveram 21,6% dos acertos nos círculos com denominador múltiplo de dois, enquanto que para denominador não múltiplo de dois a porcentagem de acerto foi de apenas 6,6%. O mesmo também acontece na tabela 2 na qual para múltiplos de 2, o percentual de acertos foi 28,33% e para os não múltiplos foi 18,33%. Logo, é possível considerar que devido ao fato de o denominador ser um múltiplo de dois, ou seja, isto foi um facilitador para que os alunos acertassem ao fazer as divisões na figura. É interessante observar a contradição dos resultados entre o quadrado e o retângulo que são figuras parecidas em sua forma para os alunos. Enquanto o retângulo teve 40% de acertos o quadrado teve apenas 25%. Na análise das provas um fato observado foi que 45% dos alunos fizeram a representação de 2/3 igual a da figura dada na questão 4, onde percebemos que os alunos sabem em quantas partes devem dividir a figura porém não consideram a igualização entre as mesmas.

Tabela 3

Dados da questão 6 sobre a representação de frações impróprias

Total de itens (figuras) contabilizando as 20 provas	Representa Corretamente fazendo uso de outro inteiro	Porcentagem de acerto frente ao total de itens	Representa erroneamente (inverte numerador e denominador)	Porcentagem de erro frente ao total de itens (figuras)	Não representa	%
40	7	17.5%	5	12.5%	28	70%

Os dados mostram que a quantidade de alunos que consegue fazer a representação de frações impróprias, de maneira correta, é pouca (17,5%) frente ao número de alunos que não conseguem fazer essa representação (70%).

Oliveira (1996) em seu trabalho explica sobre a dificuldade na representação de frações em figuras geométricas. No estudo, constatou-se que os alunos quando trabalham em situações de certa forma desconhecidas para os mesmos, eles procuram de alguma forma representar tal situação e para isso utilizam procedimentos que estariam corretos para outra situação. Segundo Oliveira (1996) é como se a dificuldade da situação permitisse aos alunos uma forma de regressão cognitiva. Assim a ideia de dividir em partes iguais, entendida em outras situações foi deixada de lado.

Silva e Almouloud (2008) fazem a seguinte observação em seu estudo:

> Comumente, o ensino utiliza e prioriza o trabalho com a concepção parte-todo baseado, principalmente, em figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos, polígonos e círculos, sendo, por isso, natural o uso dessas figuras para compreensão das regras operatórias com números fracionários. No entanto, um primeiro ponto que deve ser considerado é a impossibilidade de o resultado ser maior que o inteiro, pois, se para a fração 2/3, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes, de mesma área ou “iguais”, das quais duas estão sendo consideradas, como explicar a fração 5/3? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três? (SILVA E ALMOULOUD, 2008, p.59).

Esta dúvida é o tipo de dúvida que vários alunos apresentaram durante o teste, podemos perceber isso através da porcentagem de erro (70%), um fato que pode justificar este resultado é o fato do material da SEE possibilitar minimamente o trabalho pedagógico com frações impróprias, sendo que este trabalho só ocorre em um único exercício, que é o da figura 6, e neste a divisão da figura já está previamente feita.

Os dados desta pesquisa corroboram com a afirmação de Ciscar e García (1988) na qual "as ideias relativas ao conceito de fração demandam um tempo considerável, em relação ao processo de ensino e aprendizagem", concluindo que a diversidade das estruturas cognitivas e as diferentes interpretações dadas para as frações condicionam tais processos. A caracterização e a identificação dos contextos que tornam significativas as ideias sobre fração estariam ligadas a um conceito maior. Ou seja o conceito global ou total de frações não pode ser adquirido de uma só vez.

Conclusões

Através dos dados obtidos pela pesquisa e pela análise do material fornecido pela SEE, percebe-se que o material contempla sim alguns elementos piagetianos, dentre os quais estão presentes: existência de uma totalidade divisível; existência de um número determinado de partes; esgotamento da divisão do todo; compreensão de que uma fração é um todo sujeito a novas divisões e necessidade de igualização das partes. Elementos como a relação entre o número de partes e o número de cortes e o princípio da invariância não são trabalhados no material. Estes elementos estão presentes na sequência da SEE de forma pontual, o que não possibilitou aos alunos ter a devida articulação cognitiva ou operatória entre os mesmos.

Os dados também nos mostram que a compreensão dos alunos quanto a conceitos como equivalência entre frações e fração como uma representação da divisão é muito falha.

É possível concluir que isso se deve ao modo como eles são apresentados/trabalhados didaticamente com os alunos. Na maior parte do material da SEE os conceitos relativos ao conceito de fração são trabalhados predominantemente na forma aritmética, tendo muito pouco uso de representações geométricas. Tomemos como exemplo o trabalho com as operações de soma e subtração, em momento algum é inserido este trabalho com contexto geométrico.

O trabalho no contexto discreto também não aparece, o material privilegia em sua maioria o trabalho na forma contínua o que não oportuniza aos alunos terem uma percepção de todas as formas possíveis de se trabalhar com as frações. Com isso, concluir-se que o material fornecido pela SEE contempla alguns elementos de Piaget et al (1948) e Piaget (1975), porém conforme também dados de outros estudos, é necessário que este material seja reelaborado a partir de sua complementação com uso de materiais e atividades didáticas que contemplem e possibilitem a articulação dos referenciais piagetianos a fim de que haja a construção operatória do conceito de frações pelos alunos.

Referências e bibliografia

BOCALON, G. Z. (2008). ***O Erro na Aprendizagem de Frações no Ensino Fundamental: Concepções Docentes.*** Dissertação (Mestrado em Educação)-PUC/PR. Curitiba.

CISCAR, S.; GARCÍA, M. V. S. (1988). ***Fracciones***. Madri-Espanha: Sintesis.

MACIEL, A.; CÂMARA, M. (2007). Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Ideias Associadas. ***Bolema***, 28, 163-177.

MAGINA, S; BEZERRA, F. B; SPINILLO, A. (2009). Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. ***RBEP***, 90, 225, 411- 43.

MAGINA, S; CAMPOS, T. (2008). A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. ***Bolema***, 31, 23-40.

NUNES, T.; BRYANT, P. (1997). ***Crianças fazendo matemática***. Porto Alegre: Artes Médicas.

OLIVEIRA, R. G. (1996). ***Aprendizagem de Frações: Uma Análise Comparativa de Dois Processos Diferentes de Ensino na 5ª série do 1º grau.*** Dissertação (Mestrado em Educação)-UNICAMP/SP. Campinas. 1996.

PIAGET, J. (1975). ***Introduction a la Epistemologia Genética***. 1. El Pensamiento Matemático.

_______.; Inhelder, B. e Szeminska, A. (1948). La Partition des Surfaces et la Notion de Fraction. In: ***La Geómétrie Spontanée de l'Enfant.*** Paris: Press Universitaires de France.

PROCHNOW, K. Z. S. (2010). ***Uma Abordagem Diferenciada dos Números Racionais na Forma Fracionária.*** Monografia (Especialisação em Matemática)-UFRGS/RS. Porto Alegre.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. (2012).***Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental.*** São Paulo.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. (2009). ***Caderno do Aluno da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo vol -1 e 2.*** São Paulo

SILVA, M. J. F. (2005). ***Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a quinta Série***. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática)-PUC/SP. São Paulo.

____________; ALMOULOUD, S. A. (2008). As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. ***Bolema***, 31, 55-78.

VIEIRA JR, N.; COLVARA, L. D. (2010). Os Modelos Mentais de Frações: Como universitários lidam com conceitos fundamentais de Matemática? ***Ciências e Cognição***: Núcleo Temático: EDUCAÇÃO, TECNOLOGIA E COGNIÇÃO, 15, 1, 137-154.

Apêndice

Avaliação Diagnóstica aplicada para alunos do 6ºano

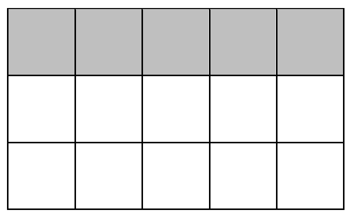
Nome: nº série:

1) Arthur perdeu $\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas de gude. Pode-se dizer que Arthur perdeu:

a) 12 bolinhas
b) 3 bolinhas
c) 5 bolinhas
d) 4 bolinhas

2) A parte pintada na figura abaixo representa a fração:

a) $\frac{5}{10}$
b) $\frac{5}{15}$
c) 5
d) $\frac{10}{5}$



3) Quando comparamos as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$, percebemos que:

a) $\frac{1}{10}$ é maior que $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ são equivalentes

d) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ não podem ser comparados

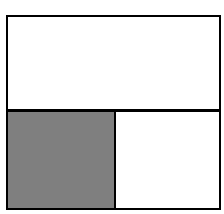
4) A parte pintada na figura abaixo representa qual fração desta figura?

a) 1

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

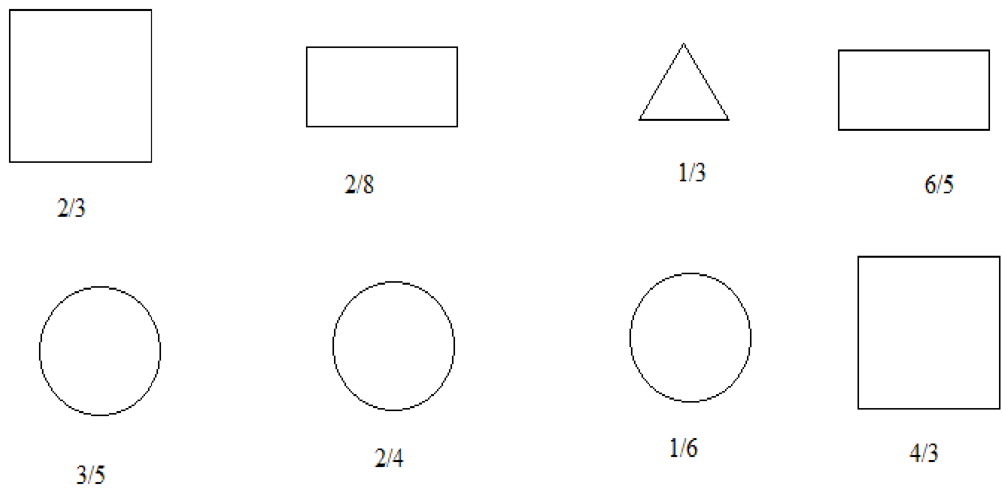
d) $\frac{1}{3}$



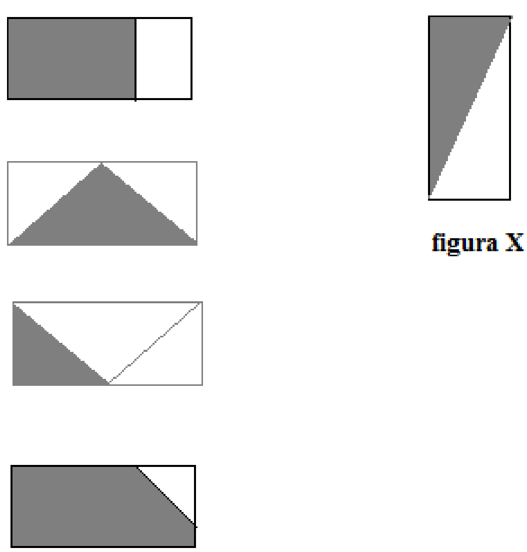
5) João comeu $\frac{3}{7}$ de 21 jabuticabas. Assim, João comeu:

a) 11 jabuticabas.
b) 9 jabuticabas.
c) 3 jabuticabas.
d) 4 jabuticabas.

6) Para cada figura represente a fração que está abaixo dela:



7) Ligue a única figura que tem área equivalente à área da figura X:



I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Atitudes em relação à Estatística de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
drapoj@uol.com.br
Júlio Henrique da **Cunha Neto**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
julio_h_neto@hotmail.com
Raquel Oliveira **Bodart**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
raquelbodart@iftm.edu.br

Resumo

Este estudo teve como objetivo investigar as atitudes de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre o ensino de Estatística de escolas públicas e privadas, no município de Uberaba, Minas Gerais, Brasil. Apresentam-se estatísticas básicas que configuram um perfil da relação positiva ou negativa deste grupo de professores em relação à Estatística, uma análise de frequência das proposições positivas e/ou negativas que compõem a escala de atitudes, de forma a caracterizar aspectos mais pontuais da relação dos professores em relação à Estatística e o cálculo do valor do coeficiente de confiabilidade (alfa de Cronbach). As atitudes destes professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental na cidade de Uberaba, Brasil é positiva tanto para os professores que estão em escolas públicas como também em escolas privadas. Acredita-se que estudos como estes possam indicar caminhos para a melhoria do processo ensino e aprendizagem destes conteúdos.

Palavras-chaves: atitudes; professores, ensino fundamental, ensino de estatística.

Abstract

This study aimed to investigate the attitudes of teachers in the early years of elementary school about teaching statistic public and private schools in the city of Uberaba, Minas Gerais, Brazil. Presents basic statistics that make up a profile of positive or negative in this group compared to the teacher Statistical analysis of the frequency proposals positive and/or negative comprising the attitude scale in order to further characterize specific aspects of the relationship between teachers relation to Statistics and calculation of the reliability coefficient (Cronbach's alpha). The attitudes of these teachers in the early years of elementary school in the city of Uberaba, Brazil is positive both for teachers who are in public schools as well as private schools. It is believed that studies such as these may indicate ways to improve the teaching and learning process of these contents.

Keywords: attitudes, teachers, elementary school; education statistics.

Introdução

O uso indiscriminado de informações estatísticas em jornais impressos ou televisivos e na internet para representar os mais diversos acontecimentos, nem sempre é tratado ou divulgado com o devido rigor matemático. Desta forma, torna-se necessário que as pessoas estejam preparadas para entender e refletir a respeito das imagens e dados que lhes são apresentados, e que sejam capazes de interpretar as inúmeras informações a respeito dos mais variados temas.

Desta forma, os conteúdos estatísticos no currículo de todos os níveis educativos deveriam propiciar um crescimento do interesse pelos assuntos relacionados com o ensino e aprendizagem da Estatística, e concretamente às atitudes em relação à Estatística, que se referem à valorização e ao apreço de determinada disciplina.

Além disso, tem se mostrado comum o professor desconsiderar o ensino de conteúdos estatísticos, podendo ser justificado por uma formação inicial deficiente em relação às práticas pedagógicas e conceitos estatísticos ou por priorizar outros conteúdos matemáticos considerados por estes mais importantes para a aprendizagem dos alunos.

Lemos e Gitirana (2004) enfatizam que muitos dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, encontram dificuldades em compreender este modo de representação e reconhecem não estarem preparados para trabalhar com esse conteúdo em sala de aula. A maioria dos professores que lecionam Matemática neste período foi formada em cursos de Pedagogia, onde foi oferecido, pouco ou nenhum elemento para sua formação em relação a conteúdos estatísticos.

O interesse pela compreensão dos efeitos das atitudes dos professores e sua consequente repercussão na aprendizagem dos alunos têm provocado o aparecimento de várias pesquisas. Gonçalez e Brito (2001), por exemplo, defendem que professores, com atitudes positivas em relação à Matemática encorajam seus alunos à independência, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio e das habilidades básicas para a resolução de problemas. Ao contrário disso, os professores com atitude negativa podem tornar seus alunos dependentes, pois a única fonte de conhecimentos é o professor.

Na visão de Auzmendi (1992) as atitudes em relação à Matemática ou à Estatística são aspectos não diretamente observáveis e compostos pelas crenças, sentimentos e predisposições comportamentais em relação ao objeto.

Aparício, Bazán e Abdounur (2004) apresentam os resultados da aplicação de duas escalas de atitude em relação à Estatística (Cazorla, Silva, Vendramini e Brito, 1999; Estrada, Batanero e Fortuny, 2003) e seu relacionamento com o desempenho na disciplina de Estatística em professores do Ensino Fundamental, mostrando que há uma mudança significativa e favorável na atitude em relação à Estatística e um relacionamento significativo desta atitude com o desempenho na disciplina.

Além disso, Estrada (2001) diz que a avaliação de atitudes é um tema permanente na educação, mais poucas vezes é abordado de maneira sistemática nas atitudes em relação à Estatística.

Observa-se que as pesquisas sobre atitudes em relação à Estatística no Brasil são pouco estudadas e quando feitas são focadas nos alunos. Iniciou-se com Brito (1994 e 1998), obtido mediante a adaptação da escala de atitudes em relação à Matemática de Aiken (1974) para o Brasil, e avaliadas a partir de Cazorla, Silva, Vendramini e Brito (1999), sendo utilizadas em (Silva, Brito, Cazorla e Vendramini, 2002; Silva, 2000; Vendramini, 2000); Brito e Vendramini, 2001; Gonçalez, 2002; e Ribeiro, 2004.

Gonçalez (2002) realizou um estudo com 1096 estudantes universitários dos primeiros anos do curso de Pedagogia de uma Universidade Particular de Campinas e de São Paulo buscando verificar as atitudes dos mesmos em relação à Estatística, o desempenho e a utilização do computador como mais um instrumento facilitador da aprendizagem. Os resultados revelaram que 49% dos estudantes apresentavam atitudes negativas.

Pereda (2006) investigou o aspecto afetivo da aprendizagem da Estatística através do estudo das atitudes em relação à Estatística. Pesquisou a relação entre atitude e o desempenho acadêmico de 87 professores que participaram de um programa de complementação acadêmica para obter o título profissional de Licenciado em Educação, fazendo uso das escalas de atitudes em relação à Estatística de Cazorla, Silva, Vendramini e Brito (1999) e Estrada, Batanero e Fortuny (2003).

Correia (2008) trata da formação matemática dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e um de seus apontamentos são os aspectos psicológicos na formação do professor, mencionando a importância da relação professor-aluno. O autor deixa claro que as atitudes destes professores em relação ao ensino da matemática e inseridos a Estatística, fazem diferença na aprendizagem de seus alunos. A ausência de conteúdos matemáticos na formação do pedagogo dificulta suas competências de construir e analisar os processos de aprendizagem do aluno; elaborar situações problemas; escolher livros didáticos; avaliar o desempenho do aluno; etc.

Portanto, este estudo teve como objetivo investigar as atitudes de professores que atuam nos anos iniciais de escolas públicas e privadas, no município de Uberaba, Minas Gerais, Brasil. em relação à Estatística.

Procedimentos Metodológicos

Para observarmos as atitudes de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de Escolas de Uberaba, Minas Gerais, Brasil sobre o ensino de Estatística, foi adaptado a Escala de Atitudes de Professores em relação à Estatística – EAPE de Oliveira Júnior e Morais (2009) para determinar como 40 (quarenta) professores de 4 (quatro) escolas públicas e 2 (duas) escolas privadas dos anos iniciais do Ensino Fundamental se colocam frente ao Ensino de Estatística.

A escala de atitudes é do tipo *Likert*, com 4 níveis, com proposições positivas e negativas, composta por 36 itens. Cada item contém 4 possibilidades de respostas, sem a inclusão da alternativa neutra, segundo Cazorla, Silva, Vendramini e Brito (1999).

Na escala de atitudes disponibilizada aos participantes da pesquisa todos os itens da escala foram apresentados com a mesma numeração, ou seja, (1) para concordo totalmente; (2) para concordo parcialmente; (3) para discordo parcialmente; e (4) para discordo totalmente. Os itens da escala Likert foram apresentados desta forma para evitar uma tendência em relação a escolha da opção que mais se identificasse com aspectos positivos e negativos da escala.

Além disso, por exemplo, o item 1 da escala: "É divertido lecionar estatística." foi considerado como de aspecto positivo em relação à Estatística e o item 2 da mesma escala: "A aprendizagem da estatística não pressupõe conhecimentos matemáticos.", foi considerado como de aspecto negativo em relação também à Estatística; e da mesma forma para todos os outros itens da escala. Considerou-se, portanto os seguintes itens da escola como positivos: 1, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 26, 29, 31, 35 e 36; e como negativos: 2, 3, 6, 8, 10, 11, 12, 16, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 31, 32, 33 e 34.

Para os itens negativos da escala a pontuação considerada foi a seguinte: discordo totalmente – 4 pontos; discordo parcialmente – 3 pontos; concordo parcialmente – 2 pontos; e concordo totalmente – 1 ponto. Esta pontuação coincidiu com a marcação para cada um dos itens negativos da escala apresentada no questionário de pesquisa e, portanto, foi a pontuação considerada para estes itens. Para cada um dos itens positivos foi considerada a seguinte pontuação: concordo totalmente – 4 pontos; concordo parcialmente – 3 pontos; discordo parcialmente – 2 pontos; e discordo totalmente – 1 ponto.

Para a geração da pontuação dos itens positivos da escala de atitudes, partiu-se do banco de dados gerado considerando o que cada um dos participantes da pesquisa marcou no campo da escala no questionário distribuído e utilizando-se a função "se" do software Microsoft Excel, procedeu-se à seguinte alteração: (a) marcação (1) para concordo totalmente, transformando em 4 pontos (o número 4); (b) marcação (2) para concordo parcialmente, transformando em 3 pontos (o número 3); (c) marcação (3) para discordo parcialmente, transformando em 2 pontos (o número 2); (d) marcação (4) para concordo totalmente, transformando em 1 ponto (o número 1).

Após a transformação descrita, foi feito o somatório dos pontos atribuídos a todos os itens da escala (positivos e negativos) para cada um dos professores participantes da pesquisa. E com a pontuação individual de cada um dos professores foram geradas estatísticas básicas que auxiliaram na caracterização da atitude dos professores em relação à Estatística.

Configurou-se também um perfil da relação positiva ou negativa deste grupo de professores, pela análise de frequência das proposições positivas e/ou negativas que compõem a escala de atitudes, de forma a caracterizar aspectos mais pontuais da relação dos professores em relação à Estatística. Desta forma, consideramos os seguintes aspectos, quais sejam: (1) um aspecto mais positivo em relação à Estatística que é o nosso constructo; (2) um aspecto menos positivo quando considerada a mesma relação. Para esta análise, considerou-se a frequência das respostas dadas pelos professores considerando a marcação feita na escala de atitudes proposta no questionário de pesquisa. Com a intenção de tornar explícito o conteúdo das mensagens emitidas pelos participantes nas entrevistas, recorreu-se à análise de conteúdo (Bardin, 1977) que se apresenta como um conjunto de técnicas que permite conhecer *o que está por trás das palavras*.

Além destes elementos, também foi determinado o valor do Coeficiente de Confiabilidade (Alfa de Cronbach) que trata da análise das escalas de mensuração, que permite determinar a extensão em que os itens estão relacionados com os demais e a fidedignidade do constructo, ou seja, uma relação positiva dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação à Estatística. De acordo com Corrar, Paulo e Dias Filho (2007), um modelo bastante utilizado é o Alfa de Cronbach, que trata da consistência interna baseada na correlação média entre os itens. Segundo Field (2009) um valor do α de Cronbach é aceitável se estiver no intervalo de 0,7 a 0,8 e valores substancialmente mais baixos indicam uma escala não confiável.

Atitudes em relação à Estatística de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental

A Tabela 1 apresenta a distribuição das respostas dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas, públicas e privadas, participantes da pesquisa, para cada um dos itens da escala, os quais mostram que a frequência das respostas dadas às proposições tende para resultados mais positivos do que negativos.

Para classificar as atitudes dos professores em positivas ou negativas, também se utilizou o seguinte ponto de corte: considerou-se que uma pontuação acima de 50% do total máximo de pontos (144), ou seja, maior que 72 pontos, como tendo atitudes positivas em relação à Estatística e aqueles que apresentaram 72 pontos e menos, atitudes negativas.

Portanto, o valor médio da pontuação obtida pelos professores deste grupo na escala de atitude foi de 112 pontos, com um desvio padrão de 15 pontos e um coeficiente de variação de 13,4% o que indica uma pequena variação entre as pontuações obtidas pelos professores, levando-nos a considerar que a atitude em relação à Estatística desse grupo de sujeitos é positiva.

Além disso, considerou-se a frequência das respostas dadas pelos professores considerando a marcação feita na escala de atitudes proposta no questionário de pesquisa. Assim, ainda na Tabela 1 pode-se observar que a proposição que apresentou resultado menos positivo foi a de número 6: *Podemos manipular a realidade através da Estatística*, ao considerar que a proposição é negativa e que 63,2% dos professores concordam com esta afirmativa. Sendo assim, pode indicar que os professores considerem que pelo poder de gerar conclusões pode-se manipular a realidade, mas que configura um elemento negativo do tratamento dos dados que devem ser confiáveis.

Por outro lado, as proposições que apresentaram resultados mais positivos foram as de número 4: *Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística*, ao considerar que a proposição é positiva e que 97,4% dos professores concordam com esta afirmativa; e a de número 36: *Os alunos devem estar conscientes da importância do conhecimento matemático para a aprendizagem da estatística*, ao considerar que a proposição também é positiva e que 97,3% dos professores concordam com esta afirmativa.

Isso pode indicar que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de todas as escolas (públicas e privadas) tem uma preocupação com a motivação de seus alunos e tentam conscientizá-los da importância do conhecimento matemático para aprender Estatística.

Tabela 1
Distribuição das respostas dos Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental de todas as escolas participantes para as proposições da escala de atitudes em relação à Estatística.

N	Proposições	Natureza	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Discordo Parcialeemnte	Discordo Totalmente
1	**É divertido lecionar estatística.**	P	18,4	63,1	13,2	5,3
2	**A aprendizagem da estatística não pressupõe conhecimentos matemáticos.**	N	5,3	15,8	13,1	65,8
3	**As representações gráficas não facilitam a compreensão dos resultados estatísticos.**	N	10,5	10,5	10,5	68,5
4	**Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística.**	P	89,5	7,9	2,6	0,0
5	**O pensamento estatístico é tão necessário para a cidadania eficiente como saber ler e escrever.**	P	57,9	34,2	7,9	0,0
6	**Podemos manipular a realidade através da estatística.**	N	21,1	42,1	15,8	21,0
7	**Respondo com maturidade quando meus alunos fazem perguntas.**	P	78,9	13,2	7,9	0,0
8	**Ao corrigir uma questão de estatística concentro-me somente na precisão da resposta.**	N	18,4	36,8	23,7	21,1
9	**Ao corrigir uma avaliação de estatística preocupo-me com a qualidade das argumentações apresentadas.**	P	55,3	36,8	2,6	5,3
10	**A estatística não é um instrumento de pesquisa confiável.**	N	15,8	21,1	26,3	36,8
11	**Comentar um problema de estatística com colegas não ajuda a resolvê-lo.**	N	10,5	26,3	18,4	44,8
12	**Conscientizar os alunos quanto a importância da estatística para seu dia a dia é perda de tempo.**	N	10,5	0,0	5,3	84,2
13	**Devo desenvolver atividades com dados reais utilizando minhas experiências.**	P	57,9	28,9	7,9	5,3
14	**Vinculo os conteúdos estatísticos a minha experiência.**	P	48,7	40,5	5,4	5,4
15	**Estudo e procuro explicações lógicas que comprovem as imprecisões apresentadas por autores de livros de estatística.**	P	48,7	37,8	5,4	8,1
16	**Evito as informações estatísticas quando as leio.**	N	8,1	13,5	29,7	48,7
17	**Procuro diferentes maneiras de resolver um problema de estatística.**	P	64,9	24,3	5,4	5,4
18	**É importante desenvolver pesquisas para que os alunos possam fazer a relações entre a teoria e a prática.**	P	83,8	10,8	2,7	2,7
19	**Fico frustrado ao ensinar estatística.**	N	8,1	5,4	27,0	59,5
20	**Gosto da estatística porque ela ajuda a solucionar problemas objetivamente.**	P	51,4	40,5	8,1	0,0
21	**A estatística me ajuda a entender mais profundamente a complexidade de certos temas.**	P	51,4	40,5	8,1	0,0
22	**Ministro os conteúdos estatísticos de forma semelhante ao que faziam meus antigos professores.**	N	11,1	16,7	30,5	41,7
23	**Não desenvolvo atividades com dados reais utilizando experiências de outros.**	N	5,4	27,0	24,3	43,3
24	**Para ser um bom professor de estatística não é importante resgatar os conceitos estatísticos fundamentais.**	N	13,9	5,5	13,9	66,7
25	**Utilizo a estatística exclusivamente para dar aulas.**	N	16,2	13,5	16,2	54,1
26	**Procuro evitar que os alunos memorizem os conceitos estatísticos.**	P	5,4	40,6	27,0	27,0
27	**Utilizo muitas estatísticas sempre que desejo inspirar confiança.**	N	16,2	32,4	32,4	19,0
28	**Sinto-me frustrado com a incerteza dos modelos estatísticos.**	N	8,3	19,4	27,8	44,5
29	**Fazer perguntas aos alunos durante as aulas ajuda na apreensão do conteúdo.**	P	70,3	24,3	2,7	2,7
30	**Uma resposta aproximada da resposta certa é mais valiosa do que uma resposta certa de um problema aproximado.**	P	22,9	45,7	14,3	17,1
31	**Utilizo pouco a estatística quando não estou em sala de aula.**	N	8,1	46,0	21,6	24,3
32	**Vejo de maneira incômoda as informações estatísticas apresentadas na mídia em geral.**	N	18,9	32,5	18,9	29,7
33	**Não julgo ser importante o conhecimento de softwares estatísticos por parte dos alunos.**	N	10,8	13,5	13,5	62,2
34	**Não me parece importante relacionar novos conceitos com conteúdos anteriormente apreendidos.**	N	5,4	8,1	8,1	78,4
35	**O conhecimento de estatística é como o de uma língua estrangeira: ele poderá ser útil a qualquer momento.**	P	59,5	29,7	5,4	5,4
36	**Os alunos devem estar conscientes da importância do conhecimento matemático para a aprendizagem da estatística.**	P	86,5	10,8	0,0	2,7

Fonte: Pesquisa privada. 2012.

Observa-se ainda que o valor do α de Cronbach da escala em análise é igual a 0,79714, portanto, podendo concluir que há uma relação positiva de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de algumas escolas públicas e privadas em Uberaba em relação à Estatística que é o elemento chave da análise deste trabalho.

A Tabela 2 apresenta a distribuição das respostas dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas públicas participantes da pesquisa, para cada um dos itens da escala, os quais também mostram que a frequência das respostas dadas às proposições tende para resultados mais positivos do que negativos.

Da mesma forma que a descrição referente aos professores das escolas públicas e privadas participantes, para classificar as atitudes dos professores das escolas públicas em positivas ou negativas, utilizou-se o seguinte ponto de corte: pontuação acima de 50% do total máximo de pontos (144), ou seja, mais que 72 pontos, como tendo atitudes positivas em relação à Estatística e aqueles que apresentaram 72 pontos e menos, atitudes negativas.

Portanto, o valor médio da pontuação obtida pelos professores deste grupo na escala de atitude foi de 111 pontos, com um desvio padrão de 16 pontos e um coeficiente de variação de 14,4% o que indica uma pequena variação entre as pontuações obtidas pelos professores, levando-nos a considerar que a atitude em relação à Estatística desse grupo de sujeitos é positiva.

Ainda na Tabela 2 pode-se observar que a proposição que apresentou resultado menos positivo foi a de número 8: *Ao corrigir uma questão de estatística concentro-me somente na precisão da resposta*, ao considerar que a proposição é negativa e que 64,3% dos professores concordam com esta afirmativa e a de número 32: *Vejo de maneira incômoda as informações estatísticas apresentadas na mídia em geral*, ao considerar que a proposição também é positiva e que 63,0% dos professores concordam com esta afirmativa. Sendo assim, há indicação de que os professores consideram somente a precisão da resposta não considerando também o raciocínio que o aluno desenvolva e que pode estar indicando caminhos para a melhoria da aprendizagem do conteúdo. Além disso, ver as informações estatísticas na mídia pode estar refletindo o não domínio da ferramenta e/ou que estas informações podem estar sendo manipuladas.

Por outro lado, as proposições que apresentaram resultados mais positivos foram as de número 36: *Os alunos devem estar conscientes da importância do conhecimento matemático para a aprendizagem da estatística*, ao considerar que a proposição é positiva e que todos dos professores concordam com esta afirmativa e a de número 4: *Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística*, ao considerar que a proposição é positiva e que 96,4% dos professores concordam com esta afirmativa. São as mesmas proposições da Tabela 1 de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de todas as escolas (públicas e privadas) indicando as mesmas preocupações do grupo anterior, ou seja, a motivação e conscientização dos alunos da importância do conhecimento matemático para aprender Estatística.

Desta forma, observa-se que o valor do α de Cronbach da escala em análise é igual a 0,80687, portanto, conclui-se que há uma relação positiva dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas em Uberaba em relação à Estatística que é o elemento chave da análise deste trabalho.

Tabela 2
Distribuição das respostas dos Professores das Escolas Públicas para as proposições da escala de atitudes em relação à Estatística.

N	Proposições	Natureza	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Discordo Parcialeemnte	Discordo Totalmente
1	É divertido lecionar estatística.	P	17,9	57,1	17,9	7,1
2	A aprendizagem professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de todas as escolas (públicas e privadas) m da estatística não pressupõe conhecimentos matemáticos.	N	3,6	21,4	14,3	60,7
3	As representações gráficas não facilitam a compreensão dos resultados estatísticos.	N	14,3	14,3	10,7	60,7
4	Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística.	P	85,7	10,7	3,6	0,0
5	O pensamento estatístico é tão necessário para a cidadania eficiente como saber ler e escrever.	P	50,0	39,3	10,7	0,0
6	Podemos manipular a realidade através da estatística.	N	17,8	39,3	17,9	25,0
7	Respondo com maturidade quando meus alunos fazem perguntas.	P	75,0	14,3	10,7	0,0
8	Ao corrigir uma questão de estatística concentro-me somente na precisão da resposta.	N	17,9	46,4	21,4	14,3
9	Ao corrigir uma avaliação de estatística preocupo-me com a qualidade das argumentações apresentadas.	P	42,9	46,4	3,6	7,1
10	A estatística não é um instrumento de pesquisa confiável.	N	14,3	25,0	25,0	35,7
11	Comentar um problema de estatística com colegas não ajuda a resolvê-lo.	N	10,7	28,6	17,8	42,9
12	Conscientizar os alunos quanto a importância da estatística para seu dia a dia é perda de tempo.	N	14,3	0,0	7,1	78,6
13	Devo desenvolver atividades com dados reais utilizando minhas experiências.	P	67,9	21,4	10,7	0,0
14	Vinculo os conteúdos estatísticos a minha experiência.	P	51,9	40,7	3,7	3,7
15	Estudo e procuro explicações lógicas que comprovem as imprecisões apresentadas por autores de livros de estatística.	P	40,8	40,8	7,4	11,0
16	Evito as informações estatísticas quando as leio.	N	7,4	18,5	33,3	40,8
17	Procuro diferentes maneiras de resolver um problema de estatística.	P	55,6	33,3	7,4	3,7
18	É importante desenvolver pesquisas para que os alunos possam fazer a relações entre a teoria e a prática.	P	77,8	14,8	3,7	3,7
19	Fico frustrado ao ensinar estatística.	N	11,1	7,4	29,6	51,9
20	Gosto da estatística porque ela ajuda a solucionar problemas objetivamente.	P	44,4	44,5	11,1	0,0
21	A estatística me ajuda a entender mais profundamente a complexidade de certos temas.	P	48,2	40,7	11,1	0,0
22	Ministro os conteúdos estatísticos de forma semelhante ao que faziam meus antigos professores.	N	14,8	18,5	29,6	37,1
23	Não desenvolvo atividades com dados reais utilizando experiências de outros.	N	7,4	29,6	25,9	37,1
24	Para ser um bom professor de estatística não é importante resgatar os conceitos estatísticos fundamentais.	N	15,4	7,7	15,4	61,5
25	Utilizo a estatística exclusivamente para dar aulas.	N	22,2	18,5	14,8	44,5
26	Procuro evitar que os alunos memorizem os conceitos estatísticos.	P	3,7	44,5	22,2	29,6
27	Utilizo muitas estatísticas sempre que desejo inspirar confiança.	N	11,1	29,6	37,1	22,2
28	Sinto-me frustrado com a incerteza dos modelos estatísticos.	N	11,1	18,5	33,3	37,1
29	Fazer perguntas aos alunos durante as aulas ajuda na apreensão do conteúdo.	P	69,2	26,9	3,9	0,0
30	Uma resposta aproximada da resposta certa é mais valiosa do que uma resposta certa de um problema aproximado.	P	23,1	42,3	11,5	23,1
31	Utilizo pouco a estatística quando não estou em sala de aula.	N	11,1	44,5	22,2	22,2
32	Vejo de maneira incômoda as informações estatísticas apresentadas na mídia em geral.	N	25,9	37,1	22,2	14,8
33	Não julgo ser importante o conhecimento de softwares estatísticos por parte dos alunos.	N	11,1	18,5	14,8	55,6
34	Não me parece importante relacionar novos conceitos com conteúdos anteriormente apreendidos.	N	7,4	11,1	11,1	70,4
35	O conhecimento de estatística é como o de uma língua estrangeira: ele poderá ser útil a qualquer momento.	P	51,9	33,3	7,4	7,4
36	Os alunos devem estar conscientes da importância do conhecimento matemático para a aprendizagem da estatística.	P	85,2	14,8	0,0	0,0

Fonte: Pesquisa privada. 2012.

A Tabela 3 apresenta a distribuição das respostas dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas privadas participantes da pesquisa, para cada um dos itens da escala, os quais também mostram que a frequência das respostas dadas às proposições tende para resultados mais positivos do que negativos.

Da mesma forma que a descrição referente aos professores das escolas públicas e privadas participantes, para classificar as atitudes dos professores das escolas privadas em positivas ou negativas, utilizou-se o seguinte ponto de corte: pontuação acima de 50% do total máximo de pontos (144), ou seja, mais que 72 pontos, como tendo atitudes positivas em relação à Estatística e aqueles que apresentaram 72 pontos e menos, atitudes negativas.

Portanto, o valor médio da pontuação obtida pelos professores deste grupo na escala de atitude foi de 116 pontos, com um desvio padrão de 10 pontos e um coeficiente de variação de 8,6% o que indica uma pequena variação entre as pontuações obtidas pelos professores, levando-nos a considerar que a atitude em relação à Estatística desse grupo de sujeitos é positiva.

Ainda na Tabela 3 pode-se observar que a proposição que apresentou resultado menos positivo foi a de número 6: *Procuroevitar que os alunos memorizem os conceitos estatísticos*, ao considerar que a proposição de número 6 é negativa e que 80,0% dos professores concordam com esta afirmativa. Sendo assim, pode ser que os professores considerem que pelo poder de gerar conclusões pode-se manipular a realidade, mas que configura um elemento negativo do tratamento dos dados que devem ser confiáveis.

Por outro lado, as proposições que apresentaram resultados mais positivos foram as de número 4: *Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística*, e a de número 18: *É importante desenvolver pesquisas para que os alunos possam fazer a relações entre a teoria e a prática.* As duas proposições mostram que todos os professores concordam com esta afirmativa.

Isto pode indicar que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas privadas além de se preocuparem com a motivação, buscam desenvolver pesquisas permitindo ao aluno relacionar os conteúdos abordados com a prática realizada.

Kline (1999) registra que o valor do α de Cronbach igual a 0,8 é apropriado para testes cognitivos como o teste de inteligência, sendo que para testes de habilidade um ponto de corte de 0,7 é mais adequado. Ele também afirma que quando se tratar de construtos psicológicos, valores abaixo de 0,7 podem ser esperados, por causa da diversidade dos construtos que estão sendo medidos.

Desta forma, observa-se que o valor do α de Cronbach da escala em análise é igual a 0,77836, portanto, podemos concluir que há uma relação positiva dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas em Uberaba em relação à Estatística que é o elemento chave da análise deste trabalho.

Da análise estatística (*Teste t*) dos resultados provenientes da medida de atitudes (p = 0,14971 > 0,05), obteve-se a indicação da aceitação da hipótese (*as atitudes dos professores em escolas públicas e dos professores em escolas privadas não diferem e são positivas em relação à Estatística*). Portanto, não se verificou a existência de diferenças entre as médias dos pontos obtidos na escala de atitudes pelos participantes pertencentes a cada um dos dois grupos, ou seja, professores dos anos iniciais de escolas públicas e privadas.

Tabela 3
Distribuição das respostas dos Professores das Escolas Privadas para cada uma das proposições da escala de atitudes em relação à Estatística.

N	Proposições	Natureza	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Discordo Parcialeemnte	Discordo Totalmente
1	**É divertido lecionar estatística.**	P	20,0	80,0	0,0	0,0
2	**A aprendizagem da estatística não pressupõe conhecimentos matemáticos.**	N	10,0	0,0	10,0	80,0
3	**As representações gráficas não facilitam a compreensão dos resultados estatísticos.**	N	0,0	0,0	10,0	90,0
4	**Motivar os alunos ajuda na aprendizagem da estatística.**	P	100,0	0,0	0,0	0,0
5	**O pensamento estatístico é tão necessário para a cidadania eficiente como saber ler e escrever.**	P	80,0	20,0	0,0	0,0
6	**Podemos manipular a realidade através da estatística.**	N	30,0	50,0	10,0	10,0
7	**Respondo com maturidade quando meus alunos fazem perguntas.**	P	90,0	10,0	0,0	0,0
8	**Ao corrigir uma questão de estatística concentro-me somente na precisão da resposta.**	N	20,0	10,0	30,0	40,0
9	**Ao corrigir uma avaliação de estatística preocupo-me com a qualidade das argumentações apresentadas.**	P	90,0	10,0	0,0	0,0
10	**A estatística não é um instrumento de pesquisa confiável.**	N	20,0	10,0	30,0	40,0
11	**Comentar um problema de estatística com colegas não ajuda a resolvê-lo.**	N	10,0	20,0	20,0	50,0
12	**Conscientizar os alunos quanto a importância da estatística para seu dia a dia é perda de tempo.**	N	0,0	0,0	0,0	100,0
13	**Devo desenvolver atividades com dados reais utilizando minhas experiências.**	P	30,0	50,0	0,0	20,0
14	**Vinculo os conteúdos estatísticos a minha experiência.**	P	40,0	40,0	10,0	10,0
15	**Estudo e procuro explicações lógicas que comprovem as imprecisões apresentadas por autores de livros de estatística.**	P	70,0	30,0	0,0	0,0
16	**Evito as informações estatísticas quando as leio.**	N	10,0	0,0	20,0	70,0
17	**Procuro diferentes maneiras de resolver um problema de estatística.**	P	90,0	0,0	0,0	10,0
18	**É importante desenvolver pesquisas para que os alunos possam fazer a relações entre a teoria e a prática.**	P	100,0	0,0	0,0	0,0
19	**Fico frustrado ao ensinar estatística.**	N	0,0	0,0	20,0	80,0
20	**Gosto da estatística porque ela ajuda a solucionar problemas objetivamente.**	P	70,0	30,0	0,0	0,0
21	**A estatística me ajuda a entender mais profundamente a complexidade de certos temas.**	P	60,0	40,0	0,0	0,0
22	**Ministro os conteúdos estatísticos de forma semelhante ao que faziam meus antigos professores.**	N	0,0	11,1	33,3	55,6
23	**Não desenvolvo atividades com dados reais utilizando experiências de outros.**	N	0,0	20,0	20,0	60,0
24	**Para ser um bom professor de estatística não é importante resgatar os conceitos estatísticos fundamentais.**	N	10,0	0,0	10,0	80,0
25	**Utilizo a estatística exclusivamente para dar aulas.**	N	0,0	0,0	20,0	80,0
26	**Procuro evitar que os alunos memorizem os conceitos estatísticos.**	P	10,0	30,0	40,0	20,0
27	**Utilizo muitas estatísticas sempre que desejo inspirar confiança.**	N	30,0	40,0	20,0	10,0
28	**Sinto-me frustrado com a incerteza dos modelos estatísticos.**	N	0,0	22,2	11,1	66,7
29	**Fazer perguntas aos alunos durante as aulas ajuda na apreensão do conteúdo.**	P	80,0	20,0	0,0	0,0
30	**Uma resposta aproximada da resposta certa é mais valiosa do que uma resposta certa de um problema aproximado.**	P	22,2	55,6	22,2	0,0
31	**Utilizo pouco a estatística quando não estou em sala de aula.**	N	0,0	50,0	20,0	30,0
32	**Vejo de maneira incômoda as informações estatísticas apresentadas na mídia em geral.**	N	0,0	20,0	10,0	70,0
33	**Não julgo ser importante o conhecimento de softwares estatísticos por parte dos alunos.**	N	10,0	0,0	10,0	80,0
34	**Não me parece importante relacionar novos conceitos com conteúdos anteriormente apreendidos.**	N	0,0	0,0	0,0	100,0
35	**O conhecimento de estatística é como o de uma língua estrangeira: ele poderá ser útil a qualquer momento.**	P	80,0	20,0	0,0	0,0
36	**Os alunos devem estar conscientes da importância do conhecimento matemático para a aprendizagem da estatística.**	P	90,0	0,0	0,0	10,0

Fonte: Pesquisa privada. 2012.

Conclusão

À vista dos resultados obtidos, a atitude em relação à Estatística deste grupo de professores que ministram aulas de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental na cidade de Uberaba, Brasil é positiva tanto para os professores que estão em escolas públicas como também em escolas privadas.

O interesse pela compreensão dos efeitos das atitudes dos professores e sua consequente repercussão na aprendizagem dos alunos têm provocado o aparecimento de várias pesquisas. Gonçalez e Brito (2001), por exemplo, defendem que professores, com atitudes positivas em relação à Matemática encorajam seus alunos à independência, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio e das habilidades básicas para a resolução de problemas. Ao contrário disso, os professores com atitude negativa podem tornar seus alunos dependentes, pois a única fonte de conhecimentos é o professor. Além disso, alguns estudos destacam que a atitude em relação à Matemática tem efeitos significativos sobre o desempenho do aluno, ao longo das séries.

O trabalho pretende chamar a atenção para a necessidade de se avaliar as atitudes dos professores em relação ao seu instrumento de trabalho uma vez que podem influenciar na motivação em ensinar e consequentemente dos alunos em aprender elementos estatísticos.

A análise desenvolvida neste estudo salienta a importância de pesquisas relativas a se conhecer mais sobre o universo de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação ao ensino de Matemática e principalmente ao ensino da Estatística no Brasil, já que nos deparamos, na literatura vigente, ainda com poucos estudos concernentes a este conteúdo.

Referências

Aiken, L. R. (1974). Two Scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 67-71.

Aparicio, A, Bazán, J, & Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à Estatística em professores de Ensino Fundamental no Peru: primeiros resultados. In *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática* (EPEM), São Paulo.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto e A. Pinheiro, Trad.). Lisboa: Edições 70.

Brito, M. (1994). O papel das competências das habilidades e das atitudes na aprendizagem e no ensino de Matemática e Estatística. *Mapeamento de pesquisas em Educação Matemática*, Brasília, DF: INEP, 1(1), 17-18.

Brito, M. R. F. (1998). Adaptação e Validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. *Zetetiké*. 6(9), 109-162, 1998.

Brito, M. R. F., & Vendramini, C. (2001). Avaliação de uma escala de atitudes em relação à Estatística e sua relação com o conceito e a utilidade da Estatística. In 28° Congresso Interamericano de Psicologia, Santiago, Chile, 1, 11-32.

Cazorla, I. M., Silva, C. B. da, Vendramini, C. A., & Brito, M.R.F. (1999). Adaptação e validação de uma Escala de Atitudes em relação à Estatística. In *Anais da XXI Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística* - desafios para o século. Santa Catarina: Florianópolis, 45-57.

Corrar, L. J., Paulo, E., & Dias Filho, J. M. (2007). *Análise multivariada*. FIPECAFI: Atlas.

Correia, C. E. F. (2008). A formação (Matemática) dos professores polivalentes. *Revista de Educação Matemática*, Pedro e João Editores, 11(13).

Estrada, A. (2001). Actitudes hacia la Estatística e instrumentos de evaluacion. In *Actas de las Jornadas Europeas de Estatística*. La enseñanza y la difusión de la Estatística. Islas Baleares. España.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2003). Actitudes y estadistica en profesores em formación y en ejercicio. In *Actas del Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativ*, 27. Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida, p. 909-920.

Field, A. (2009). *Descobrindo a estatística usando o SPSS.* Trad. Lorí Viali. Porto Alegre: Artmed.

Gonçalez, N. (2002). *Atitudes dos alunos do curso de pedagogia com relação à disciplina de estatística no laboratório de informática*. Campinas: Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Tese (Doutorado em Educação - Educação Matemática).

Gonçalez, M. H. C. de C., & Brito, M. R. F de (2001). A aprendizagem de atitudes positivas em relação à matemática. In M. R. F. de Brito (Org.), *Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa* (pp. 221-233). Florianópolis: Insular.

Kline, P. (1999). *The handbook of psychological testing*. London: Routledge.

Lemos, M. P. F., & Gitirana, V. A. (2004). *A formação de professores através de analises a priori de atividades em interpretação de gráficos de barras***.** In: Anais do VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Básica).

Oliveira Júnior, A. P., & Morais, J. F. (2009). Validação da Escala de Atitudes de Professores de Estatística em Relação à Estatística no Ensino Superior no Brasil. *Revista Ciência & Educação*, 15(3), 581-591.

Pereda, A. S. A. (2006). *Aspectos afetivos na aprendizagem da estatística: atitudes e suas formas de avaliação*. Dissertação de Mestrado em Educação, São Paulo, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2006.

Ribeiro, V. M. S. (2004). *Uma abordagem sobre as Atitudes e as Ideias de Licenciandos em Relação à Estatística*. Dissertação de Mestrado em Educação, Campinas, Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica de Campinas.

Silva, C. B. (2000). *Atitudes em relação à Estatística*: um estudo com alunos de Graduação. Dissertação de Mestrado em Educação, Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Silva, C. B., Brito, M. R. F., Cazorla, I. M., & Vendramini, C. M. M. (2002). Atitudes em relação à estatística e à matemática. *PsicoUSF*, 7(2), 219-228, jul/dez.

Vendramini, C. M. M. (2000). *Implicações das atitudes e das habilidades matemáticas na aprendizagem dos conceitos de Estatística.* Tese de Doutorado em Educação, Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas

Luis Ángel **Bohórquez** Arenas
Doctorado en Educación "DIE", Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"
Bogotá (Colombia)
labohorqueza@udistrital.edu.co

Resumen

Ernest (1989) afirmó que las creencias y concepciones de un profesor regulan su práctica de enseñanza en el aula. De esta manera, si se desean cambios en las prácticas de los profesores de matemáticas, al parecer, deben cambiar sus creencias y concepciones. Al respecto se generó la pregunta: ¿es posible cambiar las creencias y concepciones de los profesores? (Thompson, 1991). Las investigaciones de Senger (1999), D'Amore y Fandiño (2004) y Pehkonen (2006), entre otras, han arrojado resultados positivos acerca de que las creencias y concepciones de los profesores pueden cambiar. En este artículo se presentarán los resultados de una investigación cuyo objetivo primordial fue identificar y caracterizar cambios en las concepciones de los estudiantes para profesor de sexto semestre de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Bogotá, Colombia). En esencia se presentarán resultados que muentran las concepciones inicales de los estudiantes y su cambio al finalizar la intervención.

Palabras clave: Creencias, concepciones, cambios de concepciones, gestión.

Creencias y Concepciones

En muchas de las investigaciones que hacen parte de este escrito, algunos autores manejan los términos creencias y concepciones como sinónimos. Sin embargo, otros autores señalan que son diferentes tipos o niveles de conocimiento y que por lo tanto forman parte del conocimiento profesional del profesor. El término concepciones ha tenido y tiene diferentes usos y significados: creencias, sistema de creencias, reflexiones a priori, ideologías y teorías implícitas. En los párrafos siguientes intentaré acercarme a definir de manera más clara y operativa para los fines de mi investigación estos dos conceptos.

Las creencias

En relación al término "creencias", en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2001) se establece que proviene del latín "credére" y que se define como "tener por cierto una cosa que el entendimiento no alcanza o que no está comprobada o demostrada". También en este diccionario (2001) se la define como "creer que (alguien o algo) tiene verdadera existencia", "estar convencido de la bondad o validez de algo o alguien".

En la investigación educativa, para Grossman, Wilson y Shulman (1989) las creencias son más discutibles que el conocimiento, están más abiertas al debate. Estos autores afirman que las creencias del profesor son de dos tipos dependiendo de si están referidas a las matemáticas como disciplina científica o a las matemáticas como objeto de enseñanza- aprendizaje. Las primeras influyen en el contenido que se enseña y en la forma de enseñarlo. Las segundas influirán en la orientación que el profesor da a la materia que enseña.

Thompson (1992) señala que una de las características de las creencias es que pueden ser consideradas con variación del grado de convicción. El creyente puede estar pasionalmente entregado a su punto de vista o en el otro extremo podría considerar una afirmación de un asunto como más probable o no. Además, esta autora afirma que las creencias a menudo incluyen sentimientos afectivos y evaluaciones, memorias de experiencias personales vividas, supuestos sobre la existencia de entidades y mundos alternativos los cuales no son abiertos a la evaluación externa o examinación crítica (p. 29). Otras características de las creencias que presenta esta autora es que no están consensuadas, son independientes de su validez y que están caracterizadas por una falta de acuerdo sobre cómo son evaluadas y juzgadas (p. 29).

Por su parte Pajares (1992) considera que las creencias están conformadas de tres componentes: el cognitivo (conocimiento), el afectivo (emoción) y el conductual (acción); además, señala que las creencias son un tipo de conocimiento basado en evaluaciones y juicios ligados a la componente afectiva, mientras que el conocimiento se basa en hechos objetivos.

Ponte (1994), en cambio, toma las creencias en el sentido de proposiciones no demostradas, y aunque hace una diferenciación entre creencias y conocimiento, considera a las primeras como una parte del conocimiento del sujeto. Al respecto este autor afirma que las creencias se pueden ver como una parte del conocimiento relativamente "poco elaborado" en vez de ver a los conocimientos y a las creencias como dos dominios distintos. Este autor establece que las creencias personales no requieren, incluso, consistencia interna. Esto implica que las creencias son a menudo discutibles, más inflexibles, y menos dinámicas que otros aspectos del conocimiento. Las creencias juegan un papel más importante en aquellos dominios del conocimiento en los que la verificación es difícil o imposible (p. 30)

Vicente (1995) establece que las creencias son ideas u opiniones que la gente tiene en la cabeza pero sin haber comprobado ni haberse detenido a examinar si se trata de algo fundado o sin fundamento.

Moreno (2000) considera que las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.

Las concepciones

Sfard (1991) establece que las concepciones pueden ser consideradas el lado personal/privado del término "concepto". Para Ruíz (1994), las concepciones se pueden situar en dos dimensiones. Por una parte se diferencian las concepciones subjetivas o cognitivas de las epistemológicas; y, por otra, las concepciones locales de las globales. Este autor establece que las concepciones subjetivas son mantenidas por cada sujeto, de manera individual y se refieren al conocimiento y creencias de los sujetos. En cambio, las concepciones epistemológicas se refieren a tipologías de conocimiento existente en un cierto periodo histórico, o circunscrito a los textos o programas de cierto nivel de enseñanza. Ahora bien, sobre las concepciones globales, este autor señala que son aquellas que describen holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto a diferencia de las locales que tienen en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores (p. 71).

Ponte (1994) señala que las concepciones pueden ser vistas como el plano de fondo organizador de los conceptos. Ellas constituyen como "miniteorías", o sea cuadros conceptuales que desempeñan un papel semejante a los presupuestos teóricos de los científicos. Las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas y ligadas a ellas están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada uno tiene de lo que constituye su papel en una situación dada (p. 195).

Azcárate, García y Moreno (2006) señalan que las concepciones de los docentes consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes. De hecho, consideran que algunas características de las concepciones del profesor son: primero que forman parte del conocimiento, segundo que son producto del entendimiento, tercero que actúan como filtros en la toma de decisiones y finalmente que influyen en los procesos de razonamiento (Azcárate, García & Moreno, 2006).

D'Amore y Fandiño (2004) vinculan el significado de concepción a la idea de creencia afirmando que la creencia (convicción) es una opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa a propósito de algo y que el conjunto de las convicciones de alguien (A) sobre un determinado aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T. Además, estos autores establecen que "si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T" (p. 26).

Otro autor que relaciona las creencias con las concepciones es Pehkonen (2006), pues este autor utiliza el término concepción en paralelo a las creencias. En este caso, define las concepciones como las creencias conscientes, es decir, las concepciones forman un subgrupo de las creencias (Pehkonen, 2006). En donde el autor entiende las creencias de un individuo como lo subjetivo, basado en la experiencia, el conocimiento y las emociones a menudo implícitos en algún asunto o el estado del arte.

De las concepciones de los profesores sobre las matemáticas

Thompson (1992) señala que existe una visión de matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas. Desde esta concepción, según la autora, saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina, lo cual genera la concepción de enseñanza de la matemática como aquella que debe poner énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado es raramente comprendido. Esta investigadora también presenta en sus trabajos una visión alternativa a la anteriormente descrita sobre el significado y la naturaleza de la matemática. Esta visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social y cultural. En donde, manifiesta la autora, la idea que subyace en esta visión es que “saber matemática” es “hacer matemática”.

Ejemplo de la visión de considerar el significado y la naturaleza de la matemática como una construcción social se encuentra en el trabajo de Ernest (1988) quien ve a la matemática como un campo de la creación y la invención humana en continua expansión, en el cual los patrones son generados y luego convertidos en conocimiento (Ernest, 1988).

Ernest (1988) presenta una tercera concepción que los profesores tienen de las matemáticas, la cual denomina concepción instrumentalista de las matemáticas, que Thompson (1992) caracteriza como aquella en donde las matemáticas se conciben como un saco de herramientas que están formadas de una acumulación de hechos, reglas y destrezas para ser usadas por expertos en la consecución de un fin externo. Así, las matemáticas son un juego de efectivas y útiles reglas y hechos (p. 132). Desde esta perspectiva, según Carrijo (1998), las matemáticas son un conjunto de resultados de marcado carácter utilitario, cuyas veracidad y existencia no están sujetas a discusión o revisión.

Ya Thompson en el año 1992 informaba que los investigadores reportaban variados desacuerdos o inconsistencias entre las concepciones y creencias profesadas por los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas y la práctica instruccional.

Concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Las concepciones de los profesores sobre la enseñanza están conformadas, según Thomson (1992), por aspectos muy diversos. Por ejemplo, lo que considera un profesor como objetivos deseables del programa de matemáticas, su propio rol en la enseñanza, el rol de los estudiantes, las actividades apropiadas del salón de clases, la aproximación a la práctica instruccional deseable, la legitimación de los procedimientos matemáticos y los resultados aceptables de la instrucción..

Thompson (1992) señala que las concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas son también probablemente reflejo de los puntos de vista, aunque tácitos, del conocimiento matemático de los estudiantes, de cómo ellos aprenden matemáticas, y de los roles y objetivos de la escuela en general. Una fuerte relación ha sido observada entre las concepciones de los maestros sobre la enseñanza y sus concepciones sobre el conocimiento matemático de los estudiantes (p. 135).

Ya a mediados de la década de los ochenta, Kuhs y Ball (1986) identificaron cuatro modelos de enseñanza de las matemáticas asociadas a formas de actuación en el aula (gestión del aula) en las concepciones de los profesores. El primer modelo considera que la enseñanza de las matemáticas se centra en la construcción personal del conocimiento matemático por el aprendiz; estos autores afirman que este es un punto de vista constructivista. El segundo modelo está centrado en el contenido con énfasis en la comprensión conceptual, el cual se caracteriza porque la enseñanza de las matemáticas es conducida por el contenido en sí, pero enfatizando la comprensión conceptual. El tercer modelo está centrado en el contenido con énfasis en el desempeño, en donde la enseñanza de las matemáticas enfatiza el desempeño de los estudiantes y el dominio de las reglas y procedimientos matemáticos. Finalmente el cuarto modelo está centrado en el aula, en el cual la enseñanza de las matemáticas se basa en el conocimiento del aula efectiva.

Cambio de creencias y concepciones

Existen algunos informes que reportan éxitos en el cambio de concepciones y creencias de los profesores sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. En particular el trabajo de D'Amore y Fandiño (2004), en cual el cambio de convicciones se entiende como "desarrollo-modificación de las convicciones en el transcurso del tiempo" (p. 28). Estos investigadores aportan en su estudio una caracterización de los cambios logrados por profesores en condiciones de formación (estudiantes para profesor), en tres ámbitos principalmente: concepciones sobre la matemática, concepciones sobre la didáctica de la matemática y concepciones sobre el papel del docente de matemáticas, los cuales sin lugar a dudas influyen en la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje.

Pehkonen (2006) asegura que para estudiar el cambio de convicciones del profesor o del estudiante para profesor hay algunas consideraciones teóricas en la literatura que parecen tener más conexiones que otras con el cambio a un nivel profundo (p. 83). Para este autor, un profesor o estudiante para profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre sus acciones se produce aprendizaje. De tal auto-reflexión, la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir. Pehkonen (2006) afirma que hacer que los estudiantes para profesor sean conscientes de sus convicciones parece ayudarles a desarrollar cambios en éstas (p. 83).

Pehkonen (2006) asegura que, aunque con diferencias, las investigaciones han demostrado que las concepciones de los profesores pueden cambiar y también bajo qué condiciones estos cambios se producen. Sin embargo, este autor y Akinsola (2009) coinciden en señalar que *el problema sobre el cambio de las concepciones de profesores* es vigente y abierto en la investigación internacional sobre educación matemática.

En Colombia el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas) adoptó la resolución de problemas como posibilidad de construcción de conocimiento matemático y como metodología de trabajo en el aula, al mismo tiempo que ha propuesto una estructura curricular en la que los diferentes tipos de pensamiento matemático y su didáctica tengan un lugar explícito en la formación planteada (Lebem, 1999).

Bajo el marco de este proyecto curricular y teniendo en cuenta las consideraciones expuestas por D'Amore, (2006, 2007), Llinares, (1998, 2000, 2004, 2008), Mescud (2007) y Bohórquez, Bonilla, Narváez y Romero (en prensa) se establece el espacio de formación denominado didáctica de la variación. En este espacio de formación de estudiantes para profesor, se propone a los estudiantes problemas matemáticos que les permitan aprender el concepto de variación y reflexionar sobre el aprendizaje de este concepto. Este proceso busca que los estudiantes reflexionen, aún más, sobre la posibilidad de la resolución de problemas como ambiente de aprendizaje y la manera como debe ser su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en este tipo de ambiente.

Para Llinares (2000) la fase de gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, es la segunda fase en que se puede dividir la práctica de un profesor, en la cual se da la relación entre el problema propuesto y los estudiantes en el contexto aula. En esta fase, según este autor, algunas de las tareas del profesor son especificas del contenido matemático y otras son de carácter general relacionadas con la organización de los estudiantes, el manejo del orden y la disciplina, las tareas propuestas, entre otros (Doyle, 1986).

En el proyecto de investigación doctoral se quiere responder:

¿Qué cambios se han producido en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas?

¿Qué factores apoyan o limitan este cambio de concepciones de los estudiantes para profesor?

Objetivos

Identificar y caracterizar cambios en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje en un ambiente de resolución de problemas.

Caracterizar y explicar factores del ambiente que pueden apoyar o limitar el cambio de concepciones.

Aspectos metodológicos

Este proyecto se realizó con estudiantes para profesor del curso de didáctica de la variación de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (programa de formación de profesores de matemáticas Bogotá- Colombia), el cual tiene una duración de diez y seis (16) semanas con una intensidad de ocho (8) horas de clase semanal. El número de estudiantes en el curso fue de treinta y seis (36), los cuales dado el tipo de trabajo que se realiza en este espacio de formación se organizan en grupos de cuatro (4) personas. De estos grupos se eligió un grupo; básicamente esta elección estuvo sujeta a las respuestas que los integrantes del grupo dieron al instrumento "invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula".

Recolección de información.

Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información para posibilitar una triangulación de los resultados que den respuesta a mi pregunta de investigación y a los propósitos de mi proyecto, utilizaré tres medios de recolección de información.

El primer medio para recolectar información consistió en aplicar un instrumento denominado "invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula", el cual se basa en el instrumento diseñado por D'Amore y Fandiño (2004). Este instrumento se aplicó a todos los estudiantes del curso en dos oportunidades al iniciar y al finalizar el curso. Es de aclarar que en la segunda aplicación del instrumento, se solicitó a los estudiantes para profesor que declaren no sólo sobre las concepciones de su gestión del proceso enseñanza-aprendizaje sino también de los cambios que ellos consideran se dieron en la mismas, de manera similar a lo solicitado por D'Amore y Fandiño (2004) en su investigación. El segundo medio para recolectar información fueron las entrevistas semi-estructuradas y el tercer medio de recolección de información fueron las grabaciones de audio y video de las interacciones de los pequeños grupos.

Análisis de la información

Para dar respuesta a las preguntas de investigación y a los propósitos del proyecto de investigación doctoral, se seleccionó en primera instancia, tanto en el primer instrumento como en las entrevistas, para construir una primera viñeta que permita establecer las concepciones inicales de los estudiantes, las cuales se denominaron precedentes (P). Los resultados asociados a esta primera viñeta serán presentados en detalle en esta comunicación.

En segunda instancia, teniendo en cuenta la información obtenida de las otras entrevistas y de las grabaciones de audio y video de las interacciones de los pequeños grupos en los diferentes momentos del desarrollo del curso, se construyó una segunda viñeta en donde presentaron las concepciones de los estudiantes a partir de la sexta semana de trabajo en el experimento de enseñanza. Es decir, establecieron concepciones (S1, S2, S3…).

Una tercera viñeta se construyó para presentar las concepciones finales de los estudiantes con relación a la gestión. Finalmente, se pusieron en relación los datos obtenidos en la viñeta uno, dos y tres para determinar qué cambios se han dado en las concepciones y qué cambios los limitan o facilitan.

Resultados

Los resultados presentados en este artículo se centran en presentar los resultados de la viñeta 1, es decir dan cuenta de las concepciones iniciales de los estudiantes del curso. En esencia para la construcción de esta viñeta 1: Sobre las concepciones iniciales de un grupo de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje como futuros profesores de matemáticas. Los datos, para la elaboración de esta viñeta, proceden de la primera sesión presencial en donde veintiséis (26) estudiantes respondieron al instrumento carta inicial, de entrevistas semi-estructuradas sobre las respuestas del instrumento inicial a miembros del grupo G1 y de las discusiones al interior del grupo G1 en la resolución de problemas.

En el instrumento inicial aplicado en la primera sesión presencial es el siguiente:

Apreciado estudiante

Cordialmente me dirijo a ti para solicitarte que en respuesta a esta comunicación describas cuál consideras debe ser tu gestión como futuro profesor en un ambiente de aprendizaje que se fundamente en la resolución de problemas. Es para mi importante que me respondas con la mayor honestidad, de la manera más sincera y explicita posible. En tu respuesta puedes hacer alusión a las acciones que efectuarías en la clase, a cómo organizar el grupo de estudiantes, a las orientaciones que harías a los mismos o cualquier otro aspecto que asumas hace parte de la descripción de la gestión, siempre teniendo en cuenta que estamos en un ambiente de aprendizaje especifico que se fundamenta en la resolución de problemas.

Muchas gracias por tu atención,

Ángel Bohórquez Arenas

En las respuestas de los veintiséis estudiantes se observó que hacen descripciones muy generales sobre su gestión como futuros profesores de matemáticas, en donde la gestión del profesor se reduce a aquel que guía y orienta el trabajo de los estudiantes en la resolución del problema, pero no hacen explícita la descripción de dicha gestión en particular con aquella asociada al contenido matemático. Incluso cuando se refieren al acompañamiento que el profesor hace de los grupos, básicamente hace referencia a la posibilidad que tendría el profesor de decidir cuándo un grupo puede dar a conocer sus avances.

Se toman como prototipo de la descripción anterior las respuestas dadas por los estudiantes E1, E2, E3 y E4, quienes son integrantes de un mismo grupo de trabajo denominado G1. En esta primera respuesta, E1 habla de hacer permanente observación e intervención, en donde el profesor brindará posibles soluciones a los atascados de los estudiantes.

Mi gestión frente a un ambiente de aprendizaje de resolución de problemas, se encuentra fundamentado en:

Permitir que el estudiante se relacione con un problema o con algunos que lo conlleven a la comprensión de alguna temática…

…haré permanente observación e intervención, que el estudiante sienta ese acompañamiento y que el profesor brindará posibles soluciones o alternativas para los atascados que no permitan avanzar…

Las consideraciones de E1 en la respuesta anterior están ligadas a sus concepciones sobre la gestión del profesor como aquel que guía y orienta el trabajo de los estudiantes en la resolución de problema, pero no describe en detalle las características de dicha orientación. De hecho, aunque E1 se refiere a las soluciones que el profesor brindará para que los estudiantes superen los atascados, no hace alusión a las características de las preguntas o gestión asociada con el contenido matemático que el profesor puede involucrar. Esto se corrobora con las respuestas que E1 da en la entrevista semi-estructurada.

En la entrevista semi-estructurada E1 responde a la pregunta del investigador: ¿Cuando hablas de soluciones o alternativas para los atascados que no permiten avanzar explícitamente a qué te refieres? *Me refiero a las orientaciones que uno como profesor puede dar, por ejemplo a que uno puede dar soluciones a los estudiantes para que vean cómo se hacen ese tipo de problemas.*

El estudiante E2 en respuesta al instrumento inicial divide la gestión en tres grandes partes: la primera asociada a la manera como conformaría los grupos de trabajo y las características que considera deben tener esos grupos; en segundo lugar se refiere a las características de los problemas y en tercer lugar a la necesidad de que el profesor acompañe y guie a los estudiantes. También en este punto se refiere a lo conveniente que es que el profesor permita que los diferentes grupos muestren sus avances a los demás.

Inicialmente considero que la conformación de los grupos de trabajo… debe responder a los gustos de los estudiantes, dado que si los estudiantes no se sienten a gusto con el grupo, seguramente esas diferencia retrasaran el proceso de trabajo…

Intentaría que los problemas no sólo se trabajen en lo abstracto sino que los estudiantes puedan recrear o modelar dicho problema a su gusto y perspectiva…

… acompañamiento y guía brindada a los estudiantes o grupos de trabajo. ... conocer los avances de cada grupo, por consiguiente proponer formas de mostrar los avances de los grupos más avanzados…

En la respuesta de E2 se aprecia que involucra a la gestión del profesor aspectos asociados a la organización, el diseño de los problemas y al acompañamiento de los estudiantes. Sin embargo, en ella cuando hace referencia a la guía brindada por el profesor no describe ni explica en qué consiste esa guía, incluso cuando se refiere al acompañamiento que el profesor hace de los grupo básicamente hace referencia a la posibilidad que tendría el profesor de decidir cuándo un grupo puede dar a conocer sus avances.

A la pregunta ¿Cuál considera debe ser su gestión como futuro profesor en un ambiente de aprendizaje que se fundamente en la resolución de problemas?, la estudiante E3 responde haciendo alusión directa a su experiencia como estudiante y comenta que tendrá en cuenta tanto los aspectos positivos para involucrarlos como los negativos para no repetirlos. En primera instancia considera conveniente llevar una clase que en donde el profesor de manera simultanea trabaje por una lado la resolución de problemas y por otra haga explicaciones. Considera que en esta segunda parte el profesor no dará soluciones a los problemas, pero dará muestra de la temática del problema.

En esta respuesta, E3 también hace referencia a la conveniencia de que los estudiantes registren el trabajo que van realizando y finalmente refiere a la institucionalización del problema que ella como profesora haría. En esencia, ella buscaría que los estudiantes comenten ideas, opiniones, críticas y soluciones del problema, sobre todo buscaría que sus estudiantes fuesen capaces de saber el objetivo y la temática trabajada por medio del problema. En esta institucionalización se aclaran dudas y si el problema no fue abordado por los estudiantes como se esperaba entonces ella lo resolvería con ayuda de los estudiantes.

Como futura docente de matemáticas, consideró que desde mi propia experiencia hay muchas fortalezas que se pueden trabajar con los estudiantes desde la resolución de problemas y alguna debilidades que espero no repetir.

En primer lugar, llevaría en paralelo una clase enfocada a la resolución de un problema determinado enfocado al análisis de la temática que se esté trabajando, pero por otra parte considero que eso no es suficiente y el estudiante necesita aclaración y conocimiento de la temática…

Las consideraciones de E3 en esta respuesta están ligadas a sus concepciones de que si se trabaja por resolución de problemas la gestión del profesor no está asociada a la aclaración de dudas a los estudiantes ni hablar sobre la temática asociada al problema. Por esta razón considera que su gestión involucraría dos tipos de metodología como lo expresa. Asimismo, a pesar de que E3 habla de la institucionalización, la considera como una parte de la clase que no esta asociada a la resolución del problema.

Como se mencionó anteriormente los resultados de la viñeta uno dan cuenta que los estudiantes tienen una idea de gestión del profesor del proceso enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas como aquella en donde el profesor debe orientar el proceso, pero sin establecer de qué manera debe hacerlo o cómo. En contraste en la carta final estos mismos estudiantes manifiestan que es necesario que el profesor conozca a profundidad los conceptos que se esperan se aprendan a partir de la resolución del problema y que la característica más fuerte de su gestión esta dada primordialmente por el tipo de preguntas que le puede hacer a los estudiantes para generar aprendizaje. En esta etapa del curso los estudiantes presentan ejemplos explícitos de preguntas y en su procesos de resolución del problema hacen alusión a la gestión del conocimiento matemático.

Referencias

Akinsola, M. K. (2009). Comparison of Prospective and Practicing Teachers' Mathematics Efficacy Beliefs Regarding Mathematics Teaching and Classroom Management. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education. New Research Results* (pp. 119-130). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Azcárate, C., García, L., & , M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [RELIME]*. 9 (1), 85-116.

Bohórquez, A., Bonilla, M., Narváez, D. & Romero, J. (En prensa). La variación como emergente de la resolución de problemas y (de) la construcción de una comunidad de aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas.

Carrijo, J. (1997). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de alumnos de más de 14 años. Aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación, n. 8*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. (36).

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon*. [Cádiz, España]. 58, 20 (1), 25 - 43.

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. In M. C. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching, 4th Edition.* New York: MacMillan Publishing.

Ernest, P. (1988). The Attitudes and Practices of Student Teachers of Primary School Mathematics. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of PME-12* (Vol. 1, pp. 288-295). Veszprem, Hungary.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching. The state of art* (pp. 249–254). London: Falmer Press.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in Mathematics Education?* (pp. 39-58). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*. New York: Pergamom.

Kuhs, T. M., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and dispositions*. East Lancing:Michigan State University, Center on

Teacher Education.

Lebem (1999). *Documento de Acreditación Previa. Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas*. (Sin publicar). Bogotá, Colombia. Universidad Distrital.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento creencias y contexto en relación a la noción de función. In J.P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazin, & C. Loureiro (eds.), *Desenvolvimiento profissional dos professores de matemática. Que formacao?* Lisboa Portugal.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, no 17, 51-64.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas”. En J.P. Pontey L. Sarrazina (eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa, Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática.

Llinares, S. (2004). Construir conocimiento necesario para enseñar matemáticas Prácticas sociales y tecnología. *Seminario ticinese sulla didattica della matemática L’Alta Scuola Pedagógica (ASP)*, Locarno. 24-25.

Llinares, S. (2005). Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje. *CIBEM* Oporto.

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a “ver” la enseñanza de las matemáticas. En Sbaragli, S. & D’Amore, B. (eds.), *La matematica e la seua Didattica, ventánni diimpegno* (pp. 177-180). Roma: Carocci Faber.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de Matemáticas. Desarrollo de entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *JAEM* Granada.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos e comunicación. En *Seminario Universidad Pedagógica Nacional*, Bogotá.

Mescud (2007). *El pensamiento multiplicativo y su relación con el significado institucional de referencia acerca de multiplicación. Informe final de investigación*. Bogotá: Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de la ecuaciones diferenciales* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Pajares, M. F. (1992). Teachers’ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.

Pehkonen, E. 1994. On Teachers’ Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik* 15 (3/4), 177–209.

Pehkonen, E. (2006). What Do We Know about Teacher Change in Mathematics?. In L. Häggblom, L. Burman & A-S. Röj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* Vol 1. (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva.

Pehkonen, E. & Törner, G. 1999. Teachers' professional development: What are the key change factors for mathematics teachers? *European Journal for Teacher Education* 22 (2/3), 259–275.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teacher's profesional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (vol 1, pp. 195 – 210). Lisboa, Portugal.

Ruíz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral) Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22 (1), 1-36.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Internacional Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learn*. NewYork, USA. Wood, T. (2001). Learning to teach mathematics differently: reflection matters. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the PME-25 Vol. 4* (pp. 431–438). Utrecht: Freudenthal Institute.

Vicente, L. (1995). *Palabras y creencias*. Murcia, España: Universidad de Murcia.

Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico

Adriana Tiago Castro dos **Santos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - SP
Brasil
Adriana_larissa.le@hotmail.com

Resumo

A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica são aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear. Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo histórico e epistemológico das primeiras contribuições da Geometria. É importante que o professor discuta os acontecimentos históricos ao trabalhar com os conteúdos da Geometria Analítica, propor aos alunos os problemas matemáticos que originaram os conceitos da Geometria Analítica e possibilite ao aluno a construção do conhecimento e não apenas para a resolução de algoritmos.

Palavras chave: educação matemática, geometria analítica, epistemologia da geometria analítica, ensino da geometria analítica, história da matemática.

Introdução

A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica e aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear.

No entanto, a aprendizagem de Geometria Analítica no Brasil, têm apresentado dificuldades conforme relatório citado nos trabalhos de Celestino (2000) e Di Pinto (2000), tal relatório foi feito pela *Comissão do projeto das "Disciplinas problema" da Pró-Reitoria de graduação da UNICAMP* de 1997, em que a Geometria Analítica é citada como uma das disciplinas com mais de 35% de reprovação na UNICAMP e na USP.

Di Pinto (2000) forneceu um panorama do estado das produções acadêmicas sobre o ensino de Geometria Analítica no Brasil da década de 90. Esse autor analisou as treze produções científicas brasileiras encontradas (dissertações, teses e artigos) que tratavam do ensino e da aprendizagem de Geometria Analítica.

O autor concluiu que a principal preocupação presente dessas pesquisas era com a ideia da falta de significado dado pelos estudantes aos objetos matemáticos estudados, pois as pesquisas apontavam a ênfase dada pelo ensino de Geometria Analítica em manipulação de algoritmos.

Por sua vez, Fiorentini *et al* (2002) realizaram um levantamento e análise das pesquisas brasileiras sobre a formação de professores que ensinam Matemática, do período de 1978 a 2002. Encontraram 112 trabalhos acadêmicos (teses e dissertações). Dentre suas conclusões, os autores indicam a ausência de estudos histórico-filosóficos e epistemológicos do saber matemático e a predominância do ensino técnico formal das disciplinas específicas.

Com o intuito de contribuir com o ensino da Matemática, educadores matemáticos, apontam possíveis relações entre a história, epistemologia e ensino da aprendizagem da matemática. Alguns estudos propõem novas contribuições em relação da história da matemática já vem sendo realizadas há algum tempo (Mendes, 2006, 2009; Miguel, 1997; Miguel & Brito, 1996; Miguel & Miorim, 2005; Miorim & Vilela, 2009).

No entanto é necessário saber que a história não resolverá todos os problemas do ensino e aprendizagem da matemática. Os estudos de Furinghetti (2007) sugerem que a história da matemática seja uma mediadora da matemática, não é método de ensino, mas uma provedora de recursos que conduz à reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático. Saito e Dias (2013) propõe um diálogo entre historiadores e educadores da matemática de modo que permita uma reflexão sobre a possibilidade da construção de uma interface que contemple a significação dos objetos matemáticos historicamente constituídos, promovendo a apropriação da significação dos objetos matemáticos.

Saito e Dias (2013) salientam que a articulação entre a história e ensino, não é uma tarefa simples, pois não visa apenas uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos, mas também uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático-pedagógica. Concordo com os autores que defendem a ideia de que não existe uma única história da matemática e é necessário apresentar uma história que contempla a abordagem de cultura matemática.

Os autores argumentam que a contextualização histórica não implica apenas na descrição dos conteúdos matemáticos, mas também, relacioná-los à própria natureza da matemática no passado. Por meio da análise histórica dos conceitos e das problemáticas que conduziram ao surgimento de um conteúdo matemático num determinado momento histórico, é possível compreender como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas. (Bromberg & Saito, 2010).

Neste sentido proponho neste artigo, apresentar um estudo histórico e epistemológico das primeiras contribuições para o surgimento da Geometria Analítica.

As primeiras contribuições

A matemática originalmente foi a ciência dos números e das grandezas e inicialmente era limitada pelos números naturais, porém as primeiras grandes civilizações conheciam algumas frações. Nos primeiros estágios da humanidade houve a preocupação de como surgiu a geometria analítica.

.O início da associação da relação numérica com a configuração espacial são pré históricas, como é também a primeira conexão entre números e tempo. Os antigos documentos escritos da Mesopotâmia, Egito, China e Índia dão evidência da preocupação com a mensuração. Os Papiros pré-helênicos e as e escritas cuneiformes trazem problemas que envolvem os conceitos de comprimento, área e volume.

Historicamente as ideias da Geometria Analítica surgiram da comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas. Os egípcios e os babilônios deram os primeiros passos na geometria por meio do estudo do círculo.

Os babilônios adotaram uma aproximação três para π (embora um exemplo seja conhecido no qual o valor é tomado em 3+1/8), mas sua geometria do círculo, no entanto, ultrapassa os egípcios. Eles reconhecem que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto, antecipando Thales por bem mais de mil anos. Além disso, eles estavam familiarizados ao mesmo tempo com teorema de Pitágoras.

Os babilônios nunca chegaram a esse ponto de vista, pois tais elementos essenciais da geometria analítica como coordenadas e equações de curvas surgiram muito mais tarde, mas é bom ter em mente que muitos aspectos da matemática antiga aproximam das concepções modernas. Sistemas primitivos de coordenadas foram usados por agrimensores, antes de 1400 a.C. e, provavelmente, também por astrônomos da Mesopotâmia, mas não há nenhuma evidência de que egípcios ou babilônicos geômetras desenvolveram um sistema de coordenada geométrica formal.

A origem da ideia de coordenadas não foi a única dificuldade para o desenvolvimento da geometria analítica. Deficiências na aritmética, sistemas de numeração usados nos vales do Nilo e da Mesopotâmia não foram tão bem adaptado para cálculo como é o nosso.

Admitindo-se que estes sistemas de numeração eram imperfeitos tais sistemas prejudicou o desenvolvimento da Álgebra. Pode-se citar como exemplo, que os babilônios calculavam a diagonal de um quadrado utilizando meia dúzia de casas decimais. No entanto as deficiências foram provavelmente mais em conceitos do que em número de símbolos numéricos.

"A Álgebra exige um maior grau de abstração do que a geometria e este elemento parece ter sido deficiente na matemática pré-helênica. Os números se referiam essencialmente a números inteiros, e faltava a ideia de frações nos escritos egípcios. Muito tempo foi gasto para encontrar maneiras de evitar frações unitárias, de modo que a proporção de 2 a 43 seria escrita como 1/24 + 1/258 + 1/1032 ou como 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301. O tempo que os babilônios alcançaram o conceito de número racional é uma questão em aberta por causa de equívocos na interpretação de tabelas cuja utilização foi muito enfatizada" (Boyer, 1956, p. 2).

O autor salienta sobre a dificuldade de determinar até que ponto esse trabalho determinou o desenvolvimento na Grécia, onde os próximos passos em direção à geometria analítica foram tomadas de forma e espírito diferente.

Thales e Pitágoras são em grande parte os responsáveis pelo "clima intelectual" na Grécia durante o século VI a.C., a partir do qual a matemática propriamente dita surgiu, mas suas contribuições estava mais em seu ponto de vista abstrato e em seu arranjo dedutivo de material do que em qualquer novidade da matéria As obras desses homens não sobreviveram, mas foram considerados os primeiros matemáticos a ser fundadores da geometria demonstrativa.

Thales contribuiu especialmente para a geometria. Boyer afirma que ele parece ter acrescentado pouco a aritmética ou à associação pré-helênica da álgebra e geometria, mas Pitágoras e seus discípulos foram muito mais longe nessa direção. Relacionavam o tempo e o espaço como número. O *slogan* "tudo é número" serviu de muita inspiração para a matemática, geometria analítica e numerologia. Como parte deste programa, os pitagóricos continuaram os problemas pré-helênicos de comprimento, área e volume, confiantes de que o número poderia ser sempre associada a magnitude geométrica. Fizeram implícita a hipótese plausível em trabalhos anteriores, que as relações de segmentos de retas (e similarmente para áreas e volumes) são explícitas por razões de números inteiros, e, portanto, no conceito de razão e proporção tornou-se base para toda matemática grega.

A falta do conceito de fração no pensamento antigo desempenhou um importante papel na ciência e na matemática, tal pensamento durou mais de dois mil anos, com a ideia de proporcionalidade, em vez da noção mais geral de função.

Nos dias de Thales e dos primeiros Pitagóricos, o "reino do número" incluiu apenas os números inteiros positivos, as únicas curvas reconhecidas na geometria eram a linha reta e o círculo. Se esta situação continuasse, talvez não houvesse a necessidade para o desenvolvimento da Geometria Analítica ou do Cálculo. No entanto, na metade século V a.C. ocorreu uma crise que abalou os fundamentos da filosofia em meios pitagóricos e sua associação com o número.

Esta crise intelectual abriu o caminho para a análise elementar estritamente concentrada no tempo, mas amplamente situada no pensamento do mundo Mediterrâneo; Zeno de Elean (nascido ca. 496 a.C.), Hippasus de Metapontum (fl. 445 a.C.), Demócrito de Abedera (ca. 460-357 a.C.), Hipócrates de Chios (nascido ca. 460 a.C,), e Hípias de Elis (nascido ca. 460 a.C.).

Boyer (1956) afirma que é interessante notar que, em cada caso, as contribuições desses homens não foram o resultado de problemas na ciência natural ou tecnologia, e sim motivados questões puramente filosófica. Ao contrário de uma crença amplamente difundida, os desenvolvimentos importantes na matemática não aconteceram necessariamente com a relação do trabalho e do mundo ou para as necessidades materiais do homem.

A busca grega para as essências levou os pitagóricos a imagem do universo como uma infinidade de pontos matemáticos completamente sujeitos às leis de número - uma espécie de geometria aritmética, mas não é de todo uma geometria analítica. Mas o espaço e o tempo têm uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade". O ponto era uma unidade geométrica. Aristóteles definia um ponto pitagórico como uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Tal visão foi contra ao que Zeno propôs como paradoxos.

"Zeno propôs quatro paradoxos em movimento, dos quais os dois primeiros - a Dicotomia e o Aquiles – argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdividir o espaço e tempo, e os dois últimos - a Flecha a e o Estádio – refutam que um objeto em voo sempre ocupa espaço igual a si mesmo; mas aquilo que sempre ocupa lugar no espaço iguala si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, portanto o movimento é ilusão" (Boyer, 1996, p. 52).

Os paradoxos, como se vê agora, envolvem noções como sequência infinita, limite e continuidade, os conceitos para os quais nem Zeno nem qualquer dos antigos deu uma definição precisa. Eles representavam uma confusão de sentido e razão, e, portanto, naquela época não eram responsáveis, mas sua influência foi profunda. Considerando que os pitagóricos tinham imaginado uma união da aritmética e geometria, os gregos matemáticos após Zeno viram apenas a incompatibilidade mútua dos dois campos.

O trabalho de Hipasus foi talvez ainda mais obstrutivo para o desenvolvimento de métodos analíticos do que a de Zeno. Os pitagóricos tinham continuado o estudo do comprimento, área e volume, confiante de que o número pode sempre ser associado à grandeza geométrica, mas não muito tempo depois de 450 a.C. Hipasus (ou possibilidade de outra pessoa) criticou esta doutrina com a descoberta de que existem casos simples de segmentos de reta que são mutuamente incomensuráveis.

A relação da diagonal de um quadrado, por exemplo, não pode ser expressa em termos de números inteiros. Tal como isso foi obtido de acordo reconhecimento da ausência de terminação de equivalente geométrica do processo de encontrar o máximo divisor comum, ou pode ter origem no método dado por Aristóteles a demonstração de que a existência de tal relação leva à contradição que um inteiro pode ser de uma só vez tanto pares e ímpares.

A descoberta das grandezas incomensuráveis causou uma forte impressão no pensamento grego é indicada pela história que Hipasus sofreu a morte por naufrágio como uma penalidade para a sua divulgação. Demonstra-se mais confiável pela proeminência dar à teoria de irracionais por Platão e sua escola. A crise da filosofia pitagórica causada pela incomensurabilidade poderia ter sido cumpridas pela introdução de processos infinitos e números irracionais, mas os paradoxos de Zeno bloqueou este caminho.

Ao longo da história dos gregos não havia a análise algébrica. A Geometria era o domínio da grandeza contínua, a aritmética estava preocupada com o conjunto discreto de números inteiros, e os dois campos eram irreconciliáveis. Comprimento, área e volume eram conceitos geométricos indefinidos. A "álgebra" dos gregos era uma geometria de linhas em vez de uma algoritmo de números e problemas clássicos para a construção de linhas, uma espécie de equivalência de teoremas de existência modernas na análise e para eles não haviam fórmulas algébricas independentes. .

Em meados do século V a.C surgiu uma das maiores teorias científicas de todos os tempos: o do atomismo físico.

Demócrito, um dos fundadores da doutrina atômica, também era matemático, e para ele, Arquimedes atribuiu a determinação ou demonstração do volume da pirâmide e do cone. Demócrito compôs numerosas obras que carregam sobre os aspectos críticos dos princípios da geometria, mas praticamente tudo o que ele disse foi perdido.

Por conseguinte, é difícil reconstruir o seu pensamento, mas parece claro que para ele é em grande parte devido a introdução do infinitesimal na geometria. Este atomismo matemático tornou-se, mesmo nos dias gregos, um dispositivo heurístico poderoso, e no século XVII era a força motivadora que levou ao cálculo.

No entanto, a utilização do infinitamente pequeno na antiguidade não poderia ser feita rigorosa porque a noção algébrica de variáveis contínuas não era conhecida.

O método de exaustão, o equivalente cálculo integral grego baseou-se no axioma de Arquimedes, que assume que as grandezas contínuas por bissecções podem ser reduzidas a elementos tão pequenos quanto desejado. O argumento procedeu muito como seria no caso do método moderno de limites, com exceção do ponto de vista geométrico, em vez de numérico.

O círculo e a linha reta possuía fascínio peculiar para os gregos. O sofista Hípias (425 a.C) nascido em Helis inventou a primeira curva que não seja o círculo e a linha reta, introduzindo na geometria da noção de um movimento mecânico. Proclo e outros comentadores lhe atribuem a curva conhecida depois por trissetriz ou quadratriz de Hípias. Essa é traçada assim:

> "No quadrado $ABCD$ (fig. 1) seja o lado AB deslocado para baixo uniformemente a partir de sua posição presente até coincidir com DC, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado DA leva para girar em sentido horário de sua posição presente até coincidir com DC. Se as posições dos dois segmentos são dadas em um instante fixado qualquer $A'B'$ e DA'', respectivamente, e se P é o ponto de intersecção de $A'B'$ e DA'' o lugar descrito por P durante esses movimentos será a trissetriz de Hípias, a curva APQ na figura. Dada essa curva, faz se a trissecção de um ângulo com facilidade. Por exemplo, se PDC é o ângulo a ser trissectado, simplesmente trissectamos os segmentos $B'C$ e $A'D$, com os pontos R, S, T e U. Se as retas TR e US cortam a trissetriz em V e W, respectivamente as retas VD e WD, pela propriedade da trissetriz dividirão o ângulo PDC em três partes iguais" (Boyer, 1996 p. 47-48).

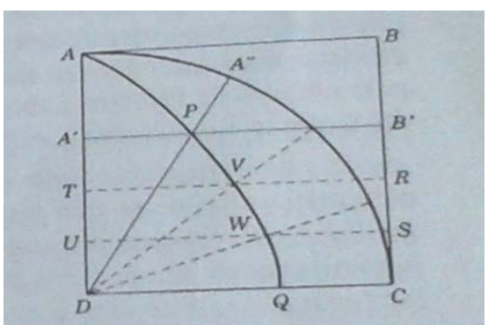


Figura 1 Quadratriz de Hipias
Fonte: Boyer, 1996 p.47

A curva de Hípias chamada de quadratriz e pode ser usada para quadrar o círculo é de importância não só como uma nova curva, mas também como anunciando uma das ideias básicas da geometria analítica - de um lugar geométrico.

Dos três problemas famosos da geometria, a duplicação do cubo foi o que teve o maior papel no desenvolvimento da geometria analítica, e evidentemente foi um que incendiou a imaginação dos antigos gregos. A história diz que o povo de Atenas recorreu ao oráculo de

Delos para aliviá-los de uma praga devastadora. A praga continuou, e quando denúncia foi apresentada com o oráculo, o povo se lembrou de que tinha aumentado o volume do altar oito vezes, ou seja, eles tinham resolvido geometricamente a equação $x^3 = 8$ em vez da equação $x^3 = 2$.. A praga finalmente diminuiu, mas continuaram as tentativas de duplicar o cubo.

Acerca de dois mil anos mais tarde é que se tornou claro que o oráculo sarcasticamente propôs um problema insolúvel conhecido como problema de Delos.

Hipócrates de Chios feito algum progresso em direção à duplicação do cubo em mostrar que, se duas grandezas médias proporcionais x e y pode ser determinada de forma a satisfazer a proporção contínua $a: x = x: y = y: 2a$, então o proporcional x será o do cubo pretendida - isto é, que irá satisfazer a equação $x^3 = 2a^3 \cdot$.

Platão exerceu uma forte influência sobre a matemática por seu entusiasmo pelo assunto, mas seus interesses não se encontravam na direção da geometria analítica.

Mas parece que, em geral, Platão condenou o uso de artifícios mecânicos na geometria, alegando que estes tendem a materializar um assunto que ele pertencia ao campo das ideias eternas e incorpóreo. Ele percebeu que a matemática não lida com as coisas dos sentidos, como os valores que são traçados, mas com os ideais que eles se assemelham.

Na medida em que a régua e compasso estão em concreto como artifícios mecânicos, é difícil ver por que Platão sentia um abismo entre a linha reta e circulo por um lado e todas as curvas restantes no outro.

Platão apreciou profundamente os problemas que foram levantados em matemática pelos paradoxos de Zeno e da descoberta do incomensurável, sugeriu um possível método. Ele considerava o contínuo como gerado pela corrente de um infinito sem limites abstratos, e não composto por uma agregação dos indivisíveis.

Tal ponto de vista é algo análogo ao método heurístico utilizado por Leibniz e Newton dos infinitesimais e fluxões, mas é em essência uma petição de principio com a falta de definição de termos.

Dois dos melhores alunos de Platão, Aristóteles (384-322 a.C) e Eudoxus (ca. 408-355 a.C), foram contestados de serem mais inclinados para as ciências naturais. As decisões de Aristóteles sobre o indivisível, o infinito, e o contínuo foram àquelas ditadas pelo bom senso imediato. Ele negou categoricamente a existência de mínimos segmentos de linha indivisíveis e de um infinito real ou concluído.

A essência da continuidade foi encontrada em situações em que são infinitamente divisíveis. Seu estudo do movimento estava preocupado com explanação quantitativa ao invés da descrição quantitativa e assim impediu uma ciência dinâmica. No entanto, foi a continuidade que trouxe aos matemáticos medievais muito perto de geometria analítica.

A contrapartida matemática das vistas filosófica de Aristóteles é vista no trabalho de Eudoxo, a maioria das quais é conhecida apenas indiretamente através de outros pesquisadores.

Pelo método da exaustão de Eudoxus (e talvez Hipócrates antes dele) foi ativado para comparar, através da teoria da razão e proporção, grandezas geométricas curvilíneas e retilíneas.

No entanto, a descoberta da incomensurabilidade mostrou que as relações, mesmo das figuras retilíneas, nem sempre pode ser definida em termos de números inteiros.

> "Eudoxus foi sem dúvida o mais brilhante matemático de seu século. Menaechmus (ca. 360 aC), irmão de Dinostratus e tutor de Alexandre, o Grande para fazer a contribuição mais espetacular do tempo para o desenvolvimento da geometria analítica. Este trabalho parece ter sido inspirado pelos problemas de Delian que Arquitas tinha dado a sua incrível tríade de superfícies. Sua contribuição mais notável foi uma solução tridimensional do problema de Delos, e obteve sua solução sem a ajuda de coordenadas"(Boyer, 1956, p. 17).

Estudou cuidadosamente as secções do cilindro em um plano, e descobriu o uma nova curva com propriedades surpreendentes. A elipse pode, ter entrado para a geometria grega como uma secção de um cilindro, ou de alguma forma não conhecida.

Dentre todas as curvas a elipse era vista em situações rotineiras. Rodas e outros objetos circulares, quando visto obliquamente, aparecem como elipses, e as sombras por círculos geralmente são elípticas.

Demócrito, em sua geometria infinitesimal, foi conhecido por ter estudado as secções circulares de um cone. Será que ele não observava as seções elípticas mais gerais? Não há evidências de que ele o fez. Foi relatado por Proclus e Eutocius que a elipse, hipérbole e a parábola foram descobertas por Menaecmus na metade do século IV a.C, e foi conhecida como "Tríades de Menaecmus".

Menaecmus parece ter sido levado a elas, seguindo o mesmo caminho que Arcytas havia sugerido, ou seja, ele tentou resolver o problema de Delos por secções de sólidos geométricos.

Tomou três cones circulares reto, um ângulo agudo, um retângulo e um obtusângulo, e cortou cada um deles por um plano perpendicular a um elemento. Tal fato revelou pela primeira vez aos geômetras gregos vez uma família de curvas que, ao contrário de linhas, círculos e quadriláteros diferem em forma, bem como em tamanho.

Por meio destas secções cônicas o cubo é facilmente duplicado, ou por meio da intersecção das duas parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$, ou através da primeira intersecção destas com a hipérbole $xy = 2ax^2$.

Se Menaecmus duplicou o cubo com essas curvas tal como é relatado, ele deve ter sabido o equivalente geométrico da equação da hipérbole equilátera se refere às suas assíntotas como eixos. Zeuthen, Heath, e Coolidge supor que esta equação foi derivada a partir da forma em relação a um vértice $y^2 = 2ax - x^2$ traduzindo-eixos e obter o centro da equação $x^2 - y^2 = a^2$ e eixos de rotação com a metade de um ângulo certo para obter $2xy = a^2$.

A realização provável de Menaecmus é dada acima, em forma analítica e esses procedimentos não fez jus ao seu talento. Ele foi um pioneiro na descoberta da família mais útil e interessante de curvas em todas as ciências e matemática, e o caminho foi feito de modo difícil pela falta de ideias algébricas e simbolismo.

As secções cônicas já são definidas como local num plano - o local de pontos para os quais a distância a um ponto fixo (foco) é a distância a partir de uma linha fixa (diretriz) numa razão fixa (excentricidade).

É uma questão relativamente simples para traduzir esta propriedade que define em linguagem analítica por meio de notações algébricas e técnicas modernas. O Simbolismo trigonométrico e fórmulas agora permitem uma facilidade realizar transformações algébricas sob rotação dos eixos por meio de equações algébricas.

Um extraordinário grau de originalidade seria necessária para Menaecmus conceber o equivalente a tudo isso de forma geométrica, mas a evidência parece indicar que ele fez isso. O que ele escreveu foi quase completamente perdido, e até mesmo os nomes que ele deu às curvas são desconhecidos.

Tem sido sugerido que Menaechmus pode ter sido o primeiro a ter o plano como um lugar geométrico, construído cinematicamente de uma maneira semelhante à que foi adotada por Hipias para a quadratura.

A secção de cones foram mostradas para ter propriedades fundamentais como lugar geométrico do plano e dessas "equações geométricas básicas", inúmeras outras propriedades das curvas no plano foram deduzidos. O descobridor original parece ter sido Menaecmus ".

É uma grande pena que as obras de Menaecmus foram perdidas, de modo que as reconstruções de seu trabalho são em grande parte conjecturas.

Sob as circunstâncias, pode se bem adiar uma análise mais aprofundada dos métodos que ele poderia ter usado até estar em um terreno mais sólido, nas obras publicadas de Apolônio, as porções das Cônicas de Apolônio de abertura, presumivelmente, são representativos do pensamento de Menaecmus.

Por mais dois mil anos depois que Descartes comprometeu-se a trazer à tona as curvas planas superiores, e ao fazê-lo, ele inventou a geometria analítica em sentido muito mais geral do que a de Menaecmus.

O incomensurável havia deixado uma impressão tão profunda no pensamento grego que eles cuidadosamente distinguiram os casos em que as grandezas eram racionais e aquelas em que eram irracionais.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1637, no pequeno texto chamado *Geometria*, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

Considerações Finais

O objetivo deste artigo foi apresentar as primeiras contribuições para surgimento da Geometria Analítica. Por meio da história constata-se que as ideias que fundamentam a Geometria Analítica surgiram em meios a muitos problemas enfrentados pelo homem, tais como a descoberta dos números irracionais, dos incomensuráveis, os paradoxos de Zeno, o método da exaustão, a ideia de continuidade, questões filosóficas e crenças religiosas.

É importante que o professor discuta os acontecimentos históricos ao trabalhar com os conteúdos da Geometria Analítica, proponha aos alunos os problemas matemáticos que originaram os conceitos da Geometria Analítica e possibilitar ao aluno a construção do conhecimento e não apenas para a resolução de algoritmos.

Referências e Bibliografia

Boyer, B. C. (1956). History of Analytic Geometry its Development from the pyramids to the Heroic Age. Princeton Juntion N.J: Yeshiva University.

Boyer, B.C. (1996). História da matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher.

Bromberg, C.; Saito, F. (2010). A história da matemática e a história da ciência. In; Beltran, M. H. R.;

Saito, F.; Trindade, L. dos S. P. (Org.). *História da ciência: tópicos atuais*. São Paulo: Livraria da Física, (pp. 47-72).

Cajori, F. (2007). *História da matemática*. São Paulo: Ciência Moderna.

Cavalca. P (1997). *Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação*. Dissertação de Mestrado Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo.

Di Pinto, M. A. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: As pesquisas Brasileiras da década de 90*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Eves, H. *Introdução à história da matemática*.(2004). Campinas: Ed. Unicamp.

Fauvel L, J.; Van Maanem, J.(2000). *History in mathematics education*: an ICMI   study. Dordrecht: Kluwer.

Fiorentini, D; Nacarato A. M.; Ferreira, A. C. Lopes, C. S.; Freitas, M. T. M; Miskulin, R. G. S.(2002). Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, 36, (pp.137-159). Acesso Maio, 04, 2013 em http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/1098?mode=full

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Berlin, 66, (2), (pp.131-143).

Mendes, I. A. (2006). Matemática e investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo.

Mendes, I. A.(2009). *Investigação histórica no ensino da matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Miguel, A.(1997). As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetekiké, Campinas, 5, (8), (pp.73-105).

Miguel, A.; Brito, A. J. A (1996). História da matemática na formação do professor de matemática. *Cadernos Cedes*, 40, (pp.47-61).

Miguel, A.; Miorim, M. A.(2005). História na educação matemática: propostas e desafios.Belo Horizonte: Autêntica.

Miorim, M. A.; Vilela, D. S. (Org.).(2009). *História, filosofia e educação matemática*. Campinas: Alínea.

Saito, F., Dias, S. M. (2013). Interface entre a história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século. *Ciência & Educação*, 19, 89-111. Acesso Junho, 07, 2013 em http://dx.doi.org/10.1590/S1516-73132013000100007

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Características de una clase de derivada no convencional

Ricardo Enrique **Valles** Pereira
Departamento de Formación General y Ciencias Básicas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
revalles@usb.ve
Dorenis Josefina **Mota** Villegas
Departamento de Formación General y Ciencias Básicas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
dorenismota@usb.ve

Resumen

La enseñanza de la matemática se transforma constantemente debido aincorporaciones de nuevas estrategias al aula;en particular, en la asignatura "Matemática I", Universidad Simón Bolívar-Venezuela, se realizan actividades de implementación y evaluación de estrategias de enseñanza que involucran herramientas tecnológicas. Para este estudio se propusorealizar una clasesobre la derivada apoyada en recursos no convencionales (tecnológicos) y compararla con unarealizada con recursos tradicionales (convencionales) donde se buscó caracterizar la clase de derivada apoyada en recursos tecnológicos (grupo experimental) a partir de las diferencias suscitadas en el rendimiento académico de los estudiantes entre está clase y la tradicional (grupo control). El rendimiento de ambos grupos fue testeado mediante una prueba objetiva cuyo resultado fue sometido a criterios de estadística inferencial, comparando la media académica de cada grupo y determinándose una diferencia significativa entre ellas, que sugiere ser debido al tratamiento no convencional en la enseñanza de la derivada.
Palabras clave: Matemática I, derivada, estrategias, enseñanza, recursos tecnológicos.

Introducción

Los entornos educativos actuales se encuentran en constante transformación debido a las reflexiones del uso e incorporación de nuevas estrategias para la enseñanza de la matemática, las cuales deben ser dirigidas en una integración crítica, donde se defina el qué, por qué y para qué de su incorporación y aprovechamiento. Álvarez y Soler (2010), señalan que "En la actualidad, las matemáticas son el soporte insustituible de los avances tecnológicos y comunicacionales de una sociedad altamente tecnificada, que exige un especial esfuerzo de formación y preparación de sus miembros" (p.227). En tal sentido Valles (2011), afirma que el uso cada día mayor de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en el ámbito educativo obliga a Profesores y Estudiantes a prepararse de modo efectivo en estos nuevos entornos, lo que constituye una revolución en los métodos de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo estudios internacionales como PISA (2009), dejan entrever que pese a los esfuerzos de propiciar nuevos entornos de enseñanza y aprendizaje, aún existe bajo rendimiento académico[1] en conocimientos matemáticos que experimentan varios países latinoamericanos (Argentina, Brasil, Colombia). Por lo que se puede inferir que en Venezuela, aunque no sea un país participante, por ser latinoamericano podría ubicarse dentro de estos niveles; de hecho ya en investigaciones nacionales realizadas anteriormente, como la de Hernández (2005),se da a conocer que los estudiantes presentan un bajo nivel de rendimiento académico en las asignaturas pertenecientes a la Cátedra de Matemática (Matemática I, II y III), señalando que el 66% de los docentes adscritos al Departamento reportan notas por debajo de la mínima aprobatoria; donde el porcentaje de alumnos aplazados alcanza hasta un 66,1% y el porcentaje de abandono de la asignatura llegó a ser de un 52,3%. En vista de las dificultades presentes en la educación matemática a nivel universitario cada vez son más los investigadores abocados al intento por encontrar una solución viable a lo que ya se ha convertido en un problema a nivel mundial; a su vez muchos de esos trabajos han estado dirigidos de una u otra forma al uso de la tecnología como medio para la enseñanza de la matemática a nivel universitario.

En relación a esto Cabero (2007), afirma que las tecnologías son un bastión fundamental en los nuevos escenarios de interacción social, donde los entornos educativos están en continua transformación; por consiguiente se requiere de un análisis crítico al uso que se le dará a las tecnologías en el ámbito educativo, en busca de involucrar de una manera óptima las mismas, definiendo claramente los criterios de su implementación y buen uso.

En la Universidad Simón Bolívar-Venezuela, a partir del trimestre I-(2011) se han estado implementando recursos tecnológicos como apoyo para la enseñanza del cálculo diferencial, particularmente en los cursos de Matemática I de las carreras técnicas afines a la administración, aduana y aeronáutica; dichos recursos se basan en la utilización de la plataforma educativa OSMOSIS como entorno virtual paralelo a la clase presencial y en el uso del video proyector como recurso audiovisual en las clases presenciales propiamente dichas.

Sin embargo, no se había analizado el impacto que tiene la implementación de estos recursos en el rendimiento académico de los estudiantes cursantes de la asignatura Matemática I; por lo tanto se consideró pertinente evaluar la incidencia de esos recursos de enseñanza en el aprendizaje de uno de los temas más importantes de la matemática a nivel universitario: el cálculo diferencial, para ello se analizó el rendimiento académico obtenido por los estudiantes luego de la aplicación de una prueba objetiva al final de la implementación de un proceso de estudio sobre derivada (por ser este contenido el corazón del cálculo diferencial) mediante el uso de estrategias de enseñanza apoyada en los recursos tecnológicos antes mencionados y se comparó con el rendimiento académico de los estudiantes que recibieron la clase de derivada de manera tradicional o convencional a los que se le aplicó la misma prueba objetiva al finalizar la clase dada de manera convencional.

---

[1]Se entiende por rendimiento académico las notas obtenidas por los estudiantes que certifican el logro alcanzado, por lo tanto indican de forma precisa y accesible los objetivos logrados por los discentes (Garbanzo, 2007).

De esta manera, el objetivo general propuesto fue *caracterizar una clase de derivada no convencional (apoyada en recursos tecnológicos)* realizando la comparación entre el rendimiento académico de un grupo de estudiantes que recibieron la clase no convencional (grupo experimental) con otros que vieron la clase sobre derivada de manera tradicional o convencional (grupo control). Y como objetivos específicos que permitieron alcanzar ese objetivo general se plantearon:

- Determinar el conocimiento previo para el estudio de la derivada que poseen los estudiantes de dos grupos de matemática I (grupo control y grupo experimental) del trimestre I-2013 de la Universidad Simón Bolívar-Venezuela.
- Implementar un proceso de estudio sobre la derivada apoyado en recursos tecnológicos (grupo experimental) y otro basado en recursos convencionales de enseñanza (grupo control).
- Analizar el rendimiento académico del grupo experimental y del grupo control en el contenido de derivada, mediante la aplicación de una post-prueba; empleando para dicho análisis herramientas de la estadística descriptiva e inferencial.

Una vez demostrada la homogeneidad de los grupos de estudio y de haber implementado tanto la clase convencional como la no convencional sobre derivadas; nos avocaremos en este artículo a los resultados obtenidos al desarrollar el último objetivo.

Marco teórico

Investigaciones previas

Las investigaciones previas relacionadas con el estudio, se enfocaron desde dos puntos de vista: En primer lugar se revisaron algunos trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial y específicamente con la enseñanza y aprendizaje de la derivada y en segundo lugar se indagó sobre estudios relacionados con la implementación de recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Con relación a las investigaciones vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada se tiene referencia de los trabajos de: Sánchez, García y Llinares (2008), quienes estudiaron "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática"; Font (2009) con un trabajo titulado "Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites" además de Pino, Godino y Font (2011) quienes publicaron un investigación titulada "Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada"; todos estos investigadores convergen en la importancia de estudiar cómo es enseñada y aprendida la derivada en niveles pre-universitarios y universitarios; mencionando la relevancia que esté tópico matemático para la adquisición de conceptos matemáticos posteriores; además instan a los docentes investigadores a seguir profundizando sobre el tema en pro de la optimización de su enseñanza y, en consecuencia, de su aprehensión por parte de los discentes.

Por su parte, entre aquellos estudios realizados acerca de la implementación de recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática están: Mora y Vera, (2010) quienes indagaron sobre el "Entorno virtual para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en una variable"; Montilla (2010), quien realizó una investigación titulada "Curso en línea sobre la introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para la cátedra de ecuaciones diferenciales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo"; Matus y Miranda (2010), los cuales trabajaron en "Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática" y Moreno y García (2012), abordando en un trabajo de ascenso el "Diseño de un material educativo computarizado como apoyo didáctico en la interpretación y resolución de problemas de recta tangente en secciones cónicas desde un punto de vista geométrico y analítico"; dichos investigadores coinciden en destacar los aspectos positivos que proporcionan el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, de igual forma recomiendan seguir implementando estas nuevas herramientas en el quehacer educativo de una manera crítica y estructurada, es decir, registrando las potencialidades y posibles limitantes que surjan de dicha implementación.

Referente teórico

Las principales referencias teóricas que sustentaron el estudio fueron: la importancia que ha adquirido la Didáctica de la Matemática como disciplina científica; la descripción de un panorama general actual sobre el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática a nivel superior; además, de una breve descripción sobre los principales recursos tecnológicos utilizados en la clase sobre derivada no convencional: plataforma educativa OSMOSIS y uso de recursos audiovisuales en clases presenciales.

A continuación se explica de manera resumida cada una de las referencias teóricas mencionadas.

Didáctica de la matemática como disciplina científica. Desde la década de los años 70, la didáctica de la Matemática ha estado adquiriendo el nombre de disciplina científica cada vez con más fuerza (Gascón, 1998; D´Amore, 2006; Ruiz, Chavarría y Alpizar, 2006). En países de Latinoamérica, entre ellos, Venezuela, a esta disciplina científica se le concibe con el nombre de Educación Matemática o Matemática Educativa; en ese sentido Godino (2010), señala que dicha disciplina puede ser definida como:

Un sistema social, heterogéneo y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:

(a) La acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

(b) La tecnología didáctica, que se propone desarrollar materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.

(c) La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (profesor, estudiantes y conocimiento matemático).(p. 45).

Esos tres componentes tienen un objetivo en común: la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; sin embargo, esos componentes son investigados generalmente de manera aislada, ya que el enfoque temporal, los objetivos, los recursos empleados, entre otros, son aspectos distintos; aunque sin duda alguna convergen en la praxis educativa matemática.

Cuando se hace referencia a la "acción práctica" no es otra cosa que el contexto donde el docente de matemática desarrolla el proceso de enseñanza, es decir, la clase de matemática; pero allí existen otros elementos, entre ellos, los sujetos que reciben esas clases (estudiantes), el contenido matemático particularmente impartido y el aprendizaje que se supone se produce por parte de los estudiantes; todos esos aspectos se pueden incluir en lo que se denomina: proceso de estudio.

El propósito principal de todo profesor de matemática es que el mayor número posible de sus estudiantes entre en contacto con esa Ciencia, es decir, que aprendan matemática, en ese modo, deberá estar interesado en la información que pueda producir en los estudiantes un efecto de enseñanza en tiempo real, todo esto sería la descripción del primer componente mencionado anteriormente. Seguidamente, el segundo componente hace referencia a la "receta" que mejor funcione para la optimización del primer componente (acción práctica), por lo tanto involucra la "elaboración de dispositivos para la acción y es el campo propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc" (Godino, Op cit. p. 46). Por último la tercera componente llamada "investigación científica" tiene como finalidad la realización de teorías que traten de describir, explicar, analizar y evaluar los dos componentes anteriores para la toma de decisiones sobre los procesos de estudios y los dispositivos implementados en esos procesos; este último componente se realiza generalmente en las Universidades.

Por lo anteriormente mencionado, asumiendo la visión de Didáctica de la Matemática como disciplina científica, se considera pertinente, que en las investigaciones a nivel superior relacionadas con la Didáctica de la Matemática, se lleven a cabo estudios que valoren durante la "acción práctica" la implementación de recursos que el docente suponga "novedosos" y que se crea que optimizan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es decir, que se desarrolle el tercer componente; es por ello que el propósito del presente estudio es la caracterización de un proceso de estudio sobre la derivada apoyado en recursos tecnológicos.

Uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática a nivel superior. A nivel universitario, son cada vez más los investigadores preocupados por los desfavorables resultados que generalmente obtienen los estudiantes en matemática en las universidades a nivel mundial y para contrarrestar esos resultados, muchos de ellos han apostado al uso de las tecnologías para el enriquecimiento de su praxis educativa, pues la creencia es que los problemas relacionados con la enseñanza pueden subsanarse con el diseño de nuevas estrategias metodológicas que posibiliten un rol más activo del estudiante en el proceso, donde las tecnologías ofrecen esa posibilidad (Torregrosa y otros, 2010).

No obstante a pesar de la evolución experimentada de los recursos tecnológicos en matemática durante la última década en el ámbito educativo, así como las potencialidades que poseen los mismos a la hora de manipularlos en el quehacer pedagógico, sorprendentemente, en muchas de las universidades del País, no ha originado cambios significativos, ya que el promedio del rendimiento académico de los estudiantes en el área de la matemática sigue estando bajo de la calificación mínima aprobatoria.

Algunos investigadores (Área, 2000; IDEA, 2003; Márquez, 2008) señalan que el motivo de la invariabilidad de los resultados desfavorables en el aprendizaje, pese al uso de recursos tecnológicos como apoyo a las estrategias de enseñanza en el área de la matemática se debe, en primer lugar, a la aparición de innumerables recursos tecnológicos matemáticos, los cuales demandan tiempo para su comprensión y manipulación por parte de los docentes, hecho que ha generado que una gran parte del profesorado desconozca las verdaderas potencialidades que estos recursos ofrecen en la enseñanza de la matemática; en segundo orden, está el esfuerzo adicional que supone, especialmente para los profesores de matemática, el tener que estructurar asignaturas en las que se involucren los conceptos teóricos, prácticos, aplicaciones y problemas orientados al uso de algún recurso tecnológico específico; adicional a esto, resulta preocupante la poca voluntad de algunos docentes en matemática a la formación en la manipulación de estos recursos; finalmente, en tercer lugar, se presenta el temor que en los docentes provoca el "fantasma de la automatización", que implica que el estudiante no realice los procedimientos matemáticos que garanticen la comprensión del contenido impartido.

Como contraparte, varios investigadores (Gamboa, 2007; Morales, Poveda y Ugalde, 2009; entre otros) afirman que se pueden superar esas limitaciones y sacarle provecho al uso de los recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática y de esa forma se obtendrían avances significativos en el aprendizaje; y que pueden contrarrestarse los aspectos negativos mencionados anteriormente:

En primer lugar ya en el mercado actual existen paquetes de programas de cálculo (tanto numérico como simbólico) y de representación gráfica realmente destacables con una fácil y amena estructura, con precios bastante razonables para las instituciones de educación universitaria que adquieren la licencia; además de ellas también se cuenta con innumerables software libres de los cuales el docente de matemática puede manipular y apoderarse del que considere más idóneo para su quehacer académico en el aula de clases. En segundo lugar, el docente universitario, está en el deber de adaptarse a los cambios educativos y de ajustar su metodología a las nuevas herramientas disponibles, ya que la educación debe satisfacer las demanda de la sociedad actual; en tercer lugar, en lo que concierne al "fantasma de la automatización", dichos temores son más propios de aquellos que persiguen convertir a sus estudiantes en máquinas de calcular y/o de memorizar que formarlos como profesionales creativos, con una capacidad de raciocinio desarrollada, dotados de sentido crítico, y con una buena dosis de intuición y de recursos matemáticos que les puedan ser útiles en su trabajo.

Es evidente, que existen dos posturas extremas hacia los resultados favorables o desfavorables que implica el hecho de incorporar recursos tecnológicos como parte de la enseñanza de la matemática. En este caso, lo ideal es mantener una postura objetiva y equilibrada ante dichos extremos; si bien es cierto que no se pueden ignorar los cambios globales que existen en la sociedad producto de uso de las nuevas tecnologías, y del impacto educativo que eso supone; tampoco es sano asumir que la incorporación de esos recursos al aula es la solución a todas las dificultades que se tienen actualmente en la enseñanza de la matemática; al respecto Cabero (1998) sostiene que el medio tecnológico es simplemente un instrumento más que se añade al diseño curricular, de tal manera que su posible eficiencia no dependerá exclusivamente de su potencial tecnológico para transmitir e intercambiar información, sino de la forma que se adapten otros medios existentes en el currículo y el rol que desempeñe el docente y alumno en el proceso de formación, por ende los medios son un instrumento curricular, más eficaces cuando los problemas a resolver y los objetivos a alcanzar así los justifiquen.

Descripción general de los recursos tecnológicos en los que se apoyará la estrategia de enseñanza sobre derivadas.

Plataforma OSMOSIS. Fue diseñada por la Dirección de Servicios Multimedia de la Universidad Simón Bolívar-Venezuela (2007), quien además se encarga de desarrollarla, integrarla y gestionarla. OSMOSIS es un sistema para la gestión del aprendizaje colaborativo, inicialmente desarrollada tomando el código fuente de dokeos y de caroline, razón está que hace a dicha plataforma un software de código abierto bajo licencia GNU/GPL.

Entre sus características se tiene que, es un software sencillo de manejar y de incorporar en él contenidos, posee una interfaz gráfica común de plantillas, soporta cualquier tipo de formato de documento (doc, pdf, ppt, entre otros); viene a ser de gran ayuda a la formación educativa ya que permite la comunicación interpersonal, logrando hacer seguimiento al proceso educativo del estudiante, tiene la particularidad de acceder a objetos de aprendizajes, permitiendo interacción sincrónica y asincrónica con los usuarios de la misma.

OSMOSIS está constituida por un área de trabajo; entre sus principales entradas se tienen: descripción del curso, chat, foros, gestión de documentos, enlaces, evaluaciones, anuncios, casilleros, usuarios, grupos, lecciones, resultados de evaluaciones. Está estructurada para brindar la información al usuario de manera rápida, sencilla, segura y confiable; así como también permite la personalización del área de trabajo en base a los requerimientos del docente administrador del curso.

Uso de recursos audiovisuales en clases presenciales. Actualmente en los procesos comunicativos del aula, los recursos tecnológicos como medios audiovisuales están jugando un importante papel ya que son considerados como “medios complementarios de transmisión de los mensajes. Tanto es así que en la actualidad los alumnos también pueden utilizar tales medios, a la hora de aprender y a la hora de realizar o presentar sus trabajos” (Adame, 2009, p.1).

Sin embargo para que se pueda hacer uso de esos medios en el aula de clases, en primer lugar se deben contar con ellos y hoy en día se ve la preocupación de muchos centros educativos por dotar las aulas de esos recursos. En segundo lugar más allá de disponer de esos recursos en el aula, el docente debe verlos como potenciales herramientas de apoyo a la enseñanza tan elementales y necesarias como los medios usados tradicionalmente.

Es importante diferenciar aquellos medios que se consideran tradicionales de los denominados recursos tecnológicos; los primeros son aquellos que básicamente se encuentran en un aula de clase: pizarrón, marcador, libro de texto o apuntes del docente, en cambio los segundos son todos aquellos instrumentos tecnológicos que facilitan la presentación de la información mediante sistemas acústicos, ópticos, o la unión de ambos que no pretenden desplazar a los recursos tradicionales sino que por el contrario sirven de complemento a estos. Al respecto Adame (Op cit.) señala que “Los medios audiovisuales se centran especialmente en el manejo y montaje de imágenes y en el desarrollo e inclusión de componentes sonoros asociados a las anteriores” (p.2)

Adame (Op cit.) también hace mención a las funciones que desempeñan los medios audiovisuales en la enseñanza, entre las que se tienen: Una mayor efectividad en las explicaciones del docente por el enriquecimiento de los limitados recursos tradicionales, una presentación secuencial del contenido a ser impartido, la posibilidad de desarrollar en el estudiante capacidades y actitudes porque exige el procesamiento global de la información contenida generalmente en imágenes, la implementación de las imágenes facilitan el proceso de abstracción y comparación de manera gráfica porque proveen el análisis de los elementos involucrados, pueden estimular la motivación de los estudiantes generando sentimientos favorables hacia el aprendizaje por el impacto de emociones que puede trasmitirse mediante una imagen, un sonido o ambos elementos complementados, la transmisión de experiencias a través de imágenes que de otra manera no serían posible su visualización por estar fuera del contexto del educando, involucran al estudiante con la tecnología audiovisual desde un punto de vista educativo complementando su alfabetismo digital.

Es importante mencionar, que para la utilización de los medios audiovisuales en el aula, se debe tener en cuenta previamente la planificación didáctica de la clase y la realización de actividades incorporando los medios audiovisuales apropiados.

Uno de los recursos audiovisuales de interés en la presente investigación es el video proyector, ya que en los ambientes de clase en la Universidad Simón Bolívar –Venezuela (contexto del estudio) están dotados con este medio audiovisual, conectado a un equipo multimedia con acceso a internet; este recurso tecnológico es uno de los más utilizados en los últimos tiempos, el cual brinda la posibilidad de proyectar imágenes fijas o dinámicas maximizadas con la ayuda de otro dispositivo electrónico (computador, tabletas electrónicas, entre otros). El mayor provecho didáctico que se puede obtener del video proyector es cuando se utiliza como amplificador del ordenador, ya que permite proyectar la gran gama de funcionalidades de este último: presentaciones en cualquier formato (ppt, pdf, Word, flash; entre otros), audios, videos, imágenes estáticas o dinámicas, entre otros.

Metodología

Tipo y diseño de la investigación. Este estudio es de corte cuantitativo de diseño experimental, donde se seleccionaron al azar dos grupos (control y experimental respectivamente) de estudiantes a los que se le demostró posteriormente su homogeneidad; al primero de ellos se le impartió el tema de derivada por medio de una clase tradicional, apoyándose en el pizarrón, marcadores y escuadras, mientras que el segundo grupo recibió el tratamiento en base a la misma clase sobre derivada pero apoyada en recursos tecnológicos disponibles en el aula como lo son el video proyector, equipo multimedia, conexión a internet y plataforma OSMOSIS.

Población y muestra. La población estuvo conformada por todas las secciones que se aperturaron de la asignatura Matemática I, correspondientes a las carreras de Administración de Turismo, Organización Empresarial, Comercio Exterior y Administración Aduanera, de la Universidad Simón Bolívar-Venezuela, Trimestre I-2013; cada una de ellas con un promedio de (68) alumnos por sección. Por su parte la muestra estuvo conformada por dos secciones de Matemática I, tomadas al azar, constituidas por 72 (grupo control) y 65 estudiantes (grupo experimental) respectivamente.

Técnica e instrumentos de recolección y procesamiento de datos. Para la recolección de datos sobre el rendimiento académico de los estudiantes se aplicó un cuestionario posterior al tratamiento de los grupos conformados por la muestra del estudio; éste se basó en una post-prueba, y se realizó con el fin de verificar las posibles diferencias concernientes al rendimiento académico de ambos grupos.

En lo referente al análisis de los datos, los instrumentos fueron sometidos previamente a criterios de validez (a través de juicio de expertos) y confiabilidad (utilizando el coeficiente de correlación Kuder-Richardson20, se obtuvo una alta confiabilidad de 0,94) luego se decodificaron los datos con el uso de la estadística descriptiva e inferencial.

Análisis de los datos. Para el análisis de los resultados se aplicó la misma prueba a ambos grupos al finalizar el contenido de derivadas que posteriormente fueron sometidas a una diferencia entre medias, haciendo uso de la estadística inferencial; a continuación algunos datos arrojados del análisis:

Tabla 1
Datos de los grupos de estudio.

	Grupo control	Grupo experimental
Número de alumnos	72	65
Promedio	23,86	25,78
Varianza	15,04	16,40
Nivel de α	0,05	

Fuente: Valles y Mota. 2013.

Se tomó en cuenta la varianza a nivel de la población, el tamaño de la muestra grande y de tipo no correlacional; adicionalmente el tipo de contraste fue bilateral.

Hipótesis Operacional (H_0): el promedio aritmético del rendimiento de los estudiantes que recibieron la estrategia de enseñanza basada en recursos tecnológicos es igual en relación al promedio aritmético del rendimiento de aquellos estudiantes que fueron enseñados con recursos tradicionales.

Hipótesis Operacional (H_1): el promedio aritmético del rendimiento de los estudiantes que recibieron la estrategia de enseñanza basada en recursos tecnológicos difiere en relación al promedio aritmético del rendimiento de aquellos estudiantes que fueron enseñados con recursos tradicionales.

Resultados:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Regla de decisión:

Si $Z_1 < Z_0$, se acepta H_0 Si $Z_1 \geq Z_0$, se acepta H_1

Decisión:

$Z_1 = 2{,}82 > Z_0 = 1{,}96$, por lo tanto se acepta H_1

Interpretación: la diferencia entre las medias de ambos grupos es significativa, real o verdadera, es decir la diferencia se debe a los efectos positivos en el rendimiento de los estudiantes sometidos a la clase no convencional sobre derivada; no obstante se realizaran otras pruebas que confirmen y detallen este resultado.

Ahora se presentan los resultados discriminados por las dimensiones evaluadas en la prueba a fin de determinar las diferencias exactas entre los grupos con respecto al tema sobre derivada:

Tabla 2

Discriminación de resultados, por dimensiones de los grupos.

Dimensiones evaluadas en la prueba objetiva para ambos grupos	Grupo control	Grupo experimental
	% respuestas correctas	% respuestas correctas
Dimensión 1: Problemas que dieron origen a la derivada	79%	96%
Dimensión 2: Definición formal de la derivada en un punto	66%	70%
Dimensión 3: Derivabilidad lateral.	71%	73%
Dimensión 4: Definición formal de la derivada de una función	63%	74%
Dimensión 5: Notaciones de Leibniz para representar la derivada de una función	62%	69%
Dimensión 6: Relación entre derivabilidad y continuidad	84%	89%
Dimensión 7: Cálculo de rectas tangentes y normales a una función empleando el concepto de derivada de una función	67%	67%

Fuente: Valles y Mota. 2013.

Interpretación: En cuanto a la dimensión 1 correspondiente a los *problemas que dieron origen a las derivadas* se tiene que el porcentaje de respuestas correctas por parte del grupo experimental(96%) superan considerablemente las del grupo control (79%); de la dimensión 2 concerniente a la *definición formal de la derivada en un punto* el grupo control con el 66% de las respuestas correctas obtuvo 4 puntos porcentuales por debajo del grupo experimental quien alcanzó un 70% de respuestas correctas para esa dimensión; por su parte, en la dimensión 3 referida a la *derivabilidad lateral*, el porcentaje de respuestas correctas de cada grupo se diferenció por dos puntos a favor del grupo experimental que obtuvo el 73%, es decir, que el grupo control obtuvo un 71% de respuestas correctas para esa dimensión. La dimensión 4 se basó en la *definición formal de la derivada de una función,* en esa dimensión el grupo experimental superó en 11 puntos porcentuales al grupo control, obteniendo el primero un 74% y el segundo un 63% de respuestas correctas respectivamente. En lo referente a la dimensión 5 relativa a las *notaciones de Leibniz para representar la derivada de una función,* el grupo experimental supero el porcentaje de respuestas correctas con un 69% respecto al grupo control quien alcanzó un 62%. En la dimensión 6 referida a la *relación entre derivabilidad y continuidad*, el grupo control obtuvo un 84% de respuestas correctas, mientras que el grupo experimental lo supero con un 89% de respuestas correctas para esta dimensión. Por último, en cuanto a la dimensión 7 sobre *el cálculo de rectas tangentes y normales a una función empleando el concepto de derivada de una función,* ambos grupos obtuvieron el mismo porcentaje de respuestas correctas representado por un 67%.

Conclusiones

Una vez aplicada la prueba objetiva sobre derivadas tanto al grupo experimental (tratamiento no convencional de enseñanza) como al grupo control del estudio (tratamiento convencional de enseñanza), se analizaron las medias aritméticas obtenidas de las calificaciones resultantes en ambos grupos a fin de determinar posibles diferencias significativas entre ellas. Para ello se utilizó una prueba de hipótesis para diferencia entre medias; está prueba arrojó que existen diferencias significativas entre el promedio de calificaciones obtenidos por el grupo experimental y el grupo control. Posteriormente, con esos resultados se decidió discriminar los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas por dimensiones, cada una de ellas evaluadas en la prueba objetiva aplicada a fin de determinar con exactitud en cuál de esas dimensiones se establecía con claridad diferencias significativas en las calificaciones.

De este último análisis se evidencia en primer lugar cómo los porcentajes de las respuestas correctas del grupo experimental para cada dimensión superan o igualan el porcentaje de respuestas correctas del grupo control; esto da indicios del rendimiento académico superior que tiene el grupo experimental en comparación al grupo control. Luego, estudiando las mayores diferencias de puntos porcentuales entre los grupos, se evidencia que en las dimensiones 1 y 4 el grupo experimental supera por más de 10 puntos porcentuales al grupo control. Esto puede interpretarse como una mejora significativa y contundente en el rendimiento académico de los estudiantes que recibieron la clase no convencional sobre derivadas; en comparación con aquellos estudiantes que recibieron la clase de manera tradicional o convencional; sin embargo, se continuará escudriñando en estos resultados a partir de la aplicación de otros análisis más detallados a fin de consolidar o ajustar estos primeros hallazgos obtenidos.

Referencias y bibliografía

Adame, A. (2009). Medios Audiovisuales en el Aula.*Pedagogía de los medios audiovisuales.*Recuperado el 6 de marzo de 2012 de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_19/ANTONIO_ADAME_TOMAS01.pdf

Álvarez, Y., y Soler, M. (2010). Actitudes hacia las Matemáticas en estudiantes de Ingeniería en Universidades Autónomas Venezolanas, 3(89), 225-249. Recuperado el 13 de febrero de 2012 de http://www.scielo.org.ve/pdf/p/v31n89/art02.pdf

Área, M (2000) ¿Qué aporta Internet al cambio pedagógico en la educación superior? Redes multimedia y diseños virtuales. *Actas del III Congreso Internacional de Comunicación, Tecnología y Educación.* Universidad de Oviedo, 128-135.

Barberá, E., yBadia, A. (2005). El uso educativo de las Aulas Virtuales Emergentes en la Educación Superior. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 2(2),1-12. Recuperado el 13 de marzo de 2012 de http:// www.uoc.edu/rusc

Cabero, J. (2007). Las necesidades de las TIC en el ámbito educativo: oportunidades, riesgos y necesidades.Recuperado el 03 de marzo de 2012 de http://investigacion.ilce.edu.mx/tyce/45/articulo1.pdf

Cabero, J. (1998): Las aportaciones de las nuevas tecnologías a las instituciones de formación continuas. *V Congreso interuniversitario de organización de instituciones educativas, Madrid, Departamentos de Didáctica y Organización Escolar de laUniversidad de Alcalá, Complutense.*Recuperado el 13 de marzo de 2012 de http://tecnologiaedu.us.es/cuestionario/bibliovir/85.pdf

D´Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática. Colombia: Editorial Magisterio.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)= x^2$ sin usar la definición por límite. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18 (2), 15-28

Dirección de Servicios Multimedia. (2007). Departamento de Producción Multimedia. Universidad Simón Bolívar. http://osmosis.dsm.usb.ve/

Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas.*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 2(3), 11-44. Recuperado el 20 de abril de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3/cuaderno3_c1.pdf

Garbanzo, G. (2007). Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios. Revista educación, 31(1), 43-63.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de la Matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathemátiques*, 18(1), 77-88.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica*. *Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática"*. Universidad de Granada. Recuperado el 20 de junio de 2012 dehttp://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/linea_investigacion/Otros_IOT/IOT_067.pdf

Hernández, A. (2005). El rendimiento académico de las matemáticas en alumnos universitarios. *Encuentro Educaciona*,12 (1), 9 – 30. Recuperado el 29 de febrero de 2012 de http://revistas.luz.edu.ve/index.php/ed/article/viewFile/1146/1114

IDEA (2003). *Tecnología e informática: un estudio experimental sobre el impacto del ordenador en el aula*. Librosvivos. Ediciones SM. Recuperado el 25 de mayo de 2012 de www.ti.profes.net/especialidades2.asp?id_contenido=41794

Marqués, P. (2008). *Impacto de las TIC en educación: funciones y limitaciones*. Recuperado el 23 de mayo de 2012 de http://dewey.uab.es/PMARQUES/siyedu.htm

Matus, C., y Miranda, H. (2010). Lo que la Investigación sabe acerca del uso de Manipulativos Virtuales en el Aprendizaje de la Matemática.*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5(6),143-151. Recuperado el 23 de mayo de 2012 de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/641

Montilla, J. (2010). *Curso en línea sobre la introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para la cátedra de ecuaciones diferenciales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo.* Trabajo presentado ante el Área de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo para optar al título de Especialista en Tecnología de la Computación en Educación. Recuperado el 28 de mayo de 2012 de http://produccion-uc.bc.uc.edu.ve/documentos/trabajos/70002A17.pdf

Mora, A., Vera, M.(2010). Entorno virtual para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en una variable. *Revista de Investigación Evaluativa*, 2(5), 67-82. Recuperado el 02 de junio de 2012 de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/32925/1/articulo5.pdf

Morales, Y.; Poveda, R. y Ugalde, A. (2009). La tecnología como herramienta educativa:insumos para una posible reforma curricular en la carrera de enseñanza de la matemática de la universidad nacional.*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4 (5), 95 - 111. Recuperado el 02 de abril de www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/628

Moreno, G., García, C. (2012). *Diseño de un material educativo computarizado como apoyo didáctico en la interpretación y resolución de problemas de recta tangente en secciones cónicas desde un punto de vista geométrico y analítico.* Trabajo de ascenso. Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de http://riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/193/1/13159.pdf

Pino, L., Godino, J., y Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. Educ.Matem. Pesq. São Paulo, 13 (1), 141-178.

PISA (2009).Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe Español. Recuperado el 24 de febrero de 2012 de http://iaqse.caib.es/documents/aval2009-10/pisa2009-informe-espanol.pdf

Ruíz, A., Chavarría, J., y Alpizar, M. (2006). La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 1 (2), 53-69. Recuperado el 02 junio de 2012 de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/viewFile/8/13

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la Derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*,11 (002), 267-296. Recuperado el 02 de mayo de 2012 de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33511205.pdf

Torregrosa, G., y otros (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revistade Educación*. 2(352), 379 - 404

Valles, R. (2011). Fenómeno Tecnológico Informativo en el Área de la Matemática Educativa. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado el 22 de febrero de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2491/supp/2491-6629-1-SP.pdf

Cartilla TIC para la enseñanza de las matemáticas.

Carlos Alberto **González** Martínez
Colegio Calasanz Bogotá
Colombia
cgonzalez@ccb.edu.co

Resumen

El departamento de matemáticas en su plan de mejora para el año 2012, decidió que cada docente debía capacitarse en el manejo de TIC en el aula, posteriormente diseñar y escribir actividades que se pudieran compartir con otros docentes de la institución, sobre la enseñanza de algunos temas para grados de primaria y bachillerato. Los registros de dichas actividades se han compilado en una cartilla docente, llamada **CARTILLA TIC PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS,** y que sirve de apoyo, para que cada docente adapte e incorpore las actividades que considere convenientes, así mismo, con ellas poder dinamizar las metodologías que en la normalidad de la escuela son de carácter tradicional. La primera edición de la cartilla se realizó a partir de 4 fases: 1) capacitación individual, 2) diseño y entrega de actividades, 3) corrección y 4) compilación. Los programas que se usaron para el diseño de las actividades fueron: Power Point, JClic, Geogebra, Regla y Compás y Cabri Geometre II Plus.

Palabras clave: TIC, cartilla docente, metodología, programas, enseñanza, capacitación.

Por qué usar las TIC en el aula de matemáticas.

Las Tecnologías de Información y Comunicación aplicadas a la educación son potentes herramientas que permiten afianzar conceptos, definiciones, algoritmos y procedimientos entre otros, de las diversas áreas del conocimiento, de tal manera que los estudiantes de las nuevas generaciones se acercan a éstas con mayor confianza y seguridad; pues los procesos de aprendizaje a partir de herramientas que son "fácilmente" manipulables, provocan un rompimiento de los temores que tienen los educandos cuando acceden a diversas informaciones, más aún en disciplinas que son consideradas “difíciles” durante la etapa escolar.

Particularmente, el aprendizaje de las matemáticas es considerado complejo a partir de ciertos niveles educativos, debido a sus conceptos, algoritmos, aplicaciones y otros elementos como el lenguaje mismo. La enseñanza de esta disciplina se ha venido dinamizando durante los últimos años con el uso de diferentes elementos didácticos, de tal manera que los docentes se han actualizado con el propósito de enseñar unas matemáticas más “frescas y agradables” en unos ambientes más enriquecedores y significativos. Es así como entra en juego el uso de programas computacionales en la enseñanza de las matemáticas, que acompañados de unidades didácticas diseñadas en contextos significativos y con buenos instrumentos evaluativos, proveen a los estudiantes de las herramientas fundamentales y necesarias para afrontar los nuevos retos que propone un mundo globalizado y que da pasos agigantados a nivel tecnológico.

Pero no sólo los programas computacionales y especializados en la disciplina son la única herramienta que puede usar el docente en la enseñanza de las matemáticas, existen además otras herramientas como software básico (office), páginas interactivas, calculadoras, páginas de internet de consulta, webpage institucional, etc, que puede ayudar al docente y a los educandos a acercarse a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, es importante que las instituciones se actualicen en cuánto a sus elementos tecnológicos, computadores, tablets, tableros inteligentes, equipos audiovisuales, etc, y de la misma manera con los programas requeridos. El software gratuito es de gran utilidad y sus aplicaciones y dinamismo, permiten realizar muy buenas actividades con los estudiantes.

En Colombia, desde hace algunos años (no más de 2 décadas) el gobierno (sector oficial de la educación) y las instituciones privadas se han estado preocupando por el desarrollo tecnológico y científico del país. En concordancia, se ha promulgado la ley de TIC del 2009 y se han generado políticas nacionales que han influido directamente en las metodologías de enseñanza en las instituciones de educación media y superior. Es así como el Colegio Calasanz Bogotá, a partir de sus directrices, invita a los diferentes departamentos a incluir el uso de Tecnologías de información y comunicación, para la enseñanza- aprendizaje.

El departamento de matemáticas en su plan de mejora para el año 2012, decidió que cada docente debía capacitarse en el manejo de TIC en el aula y posteriormente escribir actividades que se puedan compartir con otros docentes, sobre la enseñanza de algunos temas (suma en la educación inicial, multiplicación de naturales, propiedades de los paralelogramos, triángulos semejantes, transformaciones de funciones, funciones trigonométricas, derivadas, etc) para grados de primaria y bachillerato. La iniciativa surge por la preocupación que tiene el departamento acerca de la innovación en el aula, las nuevas metodologías de enseñanza, la evaluación, y sobretodo, teniendo en cuenta que los ámbitos virtuales en los cuales se desenvuelven los estudiantes de las nuevas generaciones son el pan de cada día. Los registros de dichas actividades se han compilado en una cartilla docente, la cual se ha llamado **CARTILLA TIC PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, CARTILLA DOCENTE,** y que su finalidad es servir de apoyo, para que cada docente adapte e incorpore las actividades que considere convenientes, de tal manera que con ellas pueda dinamizar las metodologías, que en la normalidad de la escuela son de carácter tradicional.

Esta cartilla es una propuesta inicial para la incorporación de algunos programas computacionales en la enseñanza de las matemáticas, que facilite a los docentes del Colegio

Calasanz Bogotá la exploración de ellos, la ejecución de las actividades propuestas y el diseño de nuevas actividades que se han de compilar en un futuro, con el fin de ofrecer a los estudiantes de la institución, nuevas herramientas de aprendizaje. Los programas que se usaron para el diseño de las actividades fueron: Power Point, JClic, Geogebra, Regla y Compás y Cabri Geometre II Plus.

Cómo diseñamos la cartilla.

La primera edición de la cartilla se realizó a partir de 4 fases: 1) capacitación individual, 2) diseño y entrega de actividades, 3) corrección y 4) compilación.

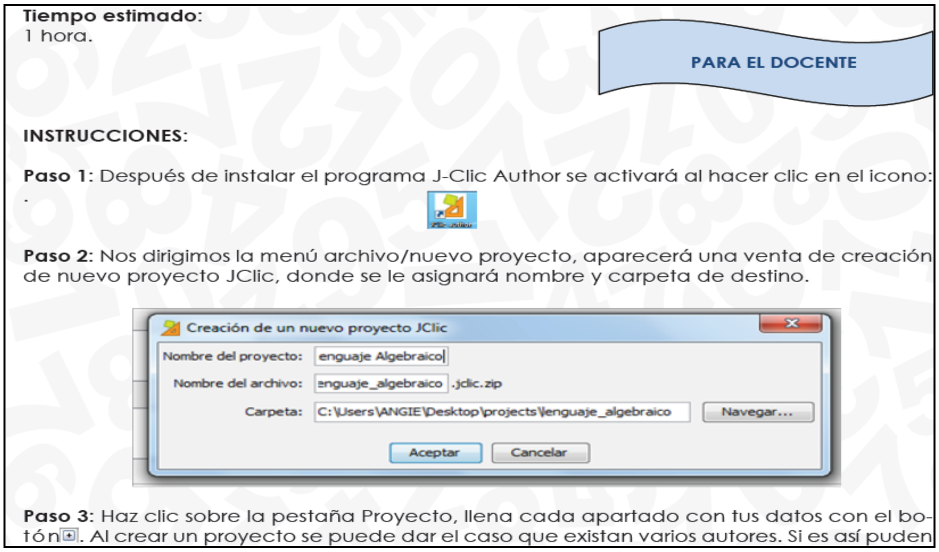
Fase 1: capacitación.

En la reunión anualizada del departamento de matemáticas (Año 2011), donde evaluamos nuestro quehacer pedagógico, evaluamos nuestros proyectos y demás aspectos correspondientes a nuestro oficio, decidimos que para el siguiente año (2012), era necesario incluir dentro de la metodología y como herramienta didáctica, el uso de algunos programas computacionales y especializados en el área para la enseñanza de las matemáticas. Algunos de los docentes manifestaron tener pocos conocimientos de programas especializados y evidentemente sobre el manejo de éstos, sin embargo dos de nuestros profesores mencionaron tener algún bagaje más amplio en el tema y fuimos quienes apoyamos la labor de nuestros compañeros. Para lo docentes que laboran en primaria se sugirió realizar una exploración de programas como JClic y herramientas de office básico (Power Point). El JClic es un software libre, en el cual se pueden diseñar actividades de diversa índole como completar, relacionar, rompecabezas, crucigramas, etc, y que tiene una interfaz agradable para los niños; además existe la posibilidad de descargar actividades ya realizadas, desde internet, las cuales se pueden modificar y adaptar a nuestro contexto educativo. Así que el reto inicial fue que cada docente interesado en este programa, realizará la exploración de las herramientas y así, comunicarnos las dificultades encontradas, para realizarles las sugerencias respectivas.

Para los docentes de bachillerato se sugirieron programas como Geogebra, Regla y Compás (software libre) y Cabri geometre plus y Derive (con licencia). De estos dos últimos, el colegio ha comprado las licencias, así que se pueden usar. La dinámica de exploración fue la misma al igual que con los docentes de primaria, esta fase duró alrededor de 4 meses, en los cuales algunos profesores estuvieron muy conectados y a gusto con el tema, y otros no tanto, pero todos con la intención de cumplir este primer objetivo, la autocapacitación.

Fase 2: diseño y entrega de actividades.

El trabajo posterior a la autocapacitación fue diseñar alguna actividad con el software explorado. Estas actividades son de dos tipos: el primero, era diseñar una actividad y describir el paso a paso, para que el docente que quiera realizarla con sus estudiantes, entienda como ejecutarla sin la necesidad de conocer a profundidad el software, pues básicamente es un instructivo. Una de nuestras profesoras, realizó una asociación compleja en el programa Jclic:


Tiempo estimado:
1 hora.

PARA EL DOCENTE

INSTRUCCIONES:

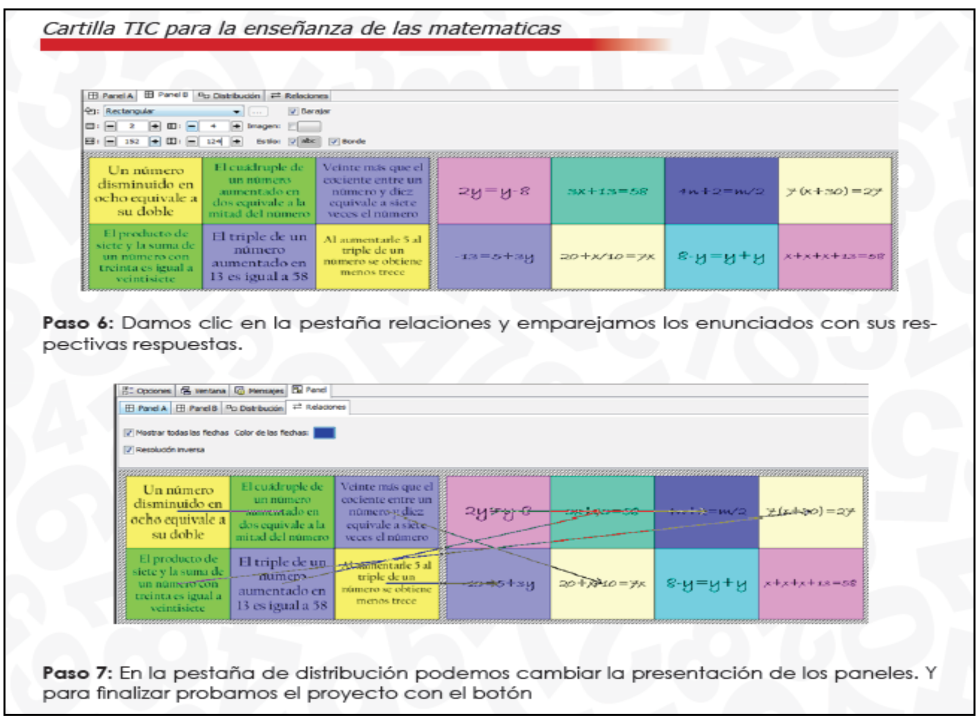
Paso 1: Después de instalar el programa J-Clic Author se activará al hacer clic en el icono:

Paso 2: Nos dirigimos la menú archivo/nuevo proyecto, aparecerá una venta de creación de nuevo proyecto JClic, donde se le asignará nombre y carpeta de destino.

Paso 3: Haz clic sobre la pestaña Proyecto, llena cada apartado con tus datos con el botón. Al crear un proyecto se puede dar el caso que existan varios autores. Si es así pueden

Figura 1. Actividad de asociación compleja en JClic.

En la *figura 1*se puede observar que la intención de la actividad, es generar a los docentes interesados en la actividad, un instructivo para crear un proyecto en el programa Jclic, en este caso una asociación compleja para el grado séptimo u octavo, relacionado el tema de operaciones con números enteros y expresiones algebraicas.


Cartilla TIC para la enseñanza de las matematicas

Paso 6: Damos clic en la pestaña relaciones y emparejamos los enunciados con sus respectivas respuestas.

Paso 7: En la pestaña de distribución podemos cambiar la presentación de los paneles. Y para finalizar probamos el proyecto con el botón

Figura 2. Actividad de asociación compleja en JClic.

El segundo tipo de actividad, fue aquella diseñada como instructivo para los profesores y que además propone un taller para que los estudiantes lo desarrollen después de realizarla. La siguiente es una actividad para estudiantes de grado undécimo respecto al acercamiento de la derivada, usando el programa regla y compás.

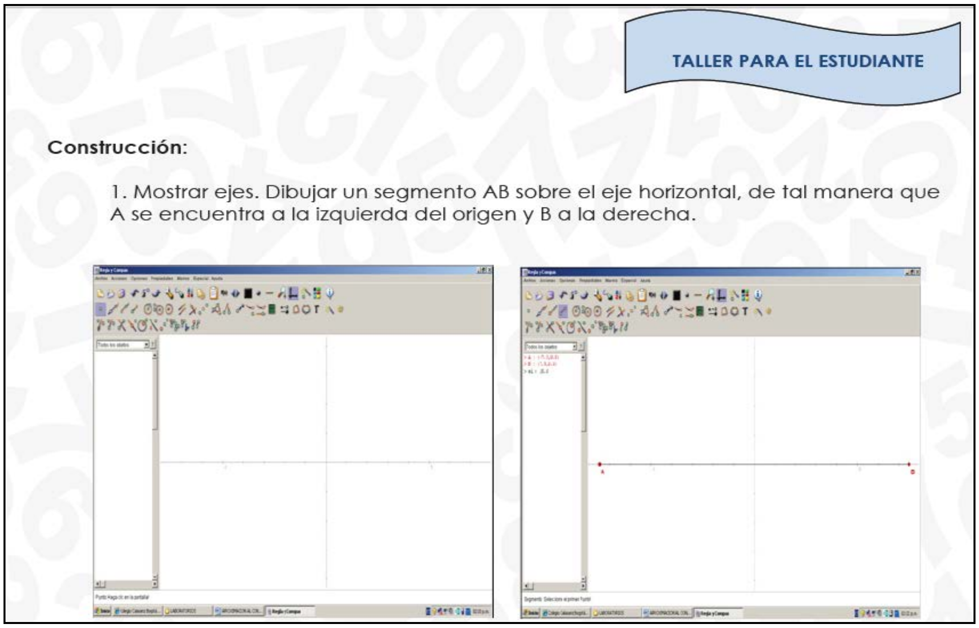


Figura 3. Actividad con Regla y Compás.

En la *figura 3* se observa que la actividad está dirigida hacia el estudiante, donde es necesario que realice una construcción. Es importante que el docente que desee hacer esta actividad con sus estudiantes la realice previamente, para que conozca la construcción propuesta y sí es necesario, la modifique de acuerdo a sus conocimientos, necesidades e intereses.

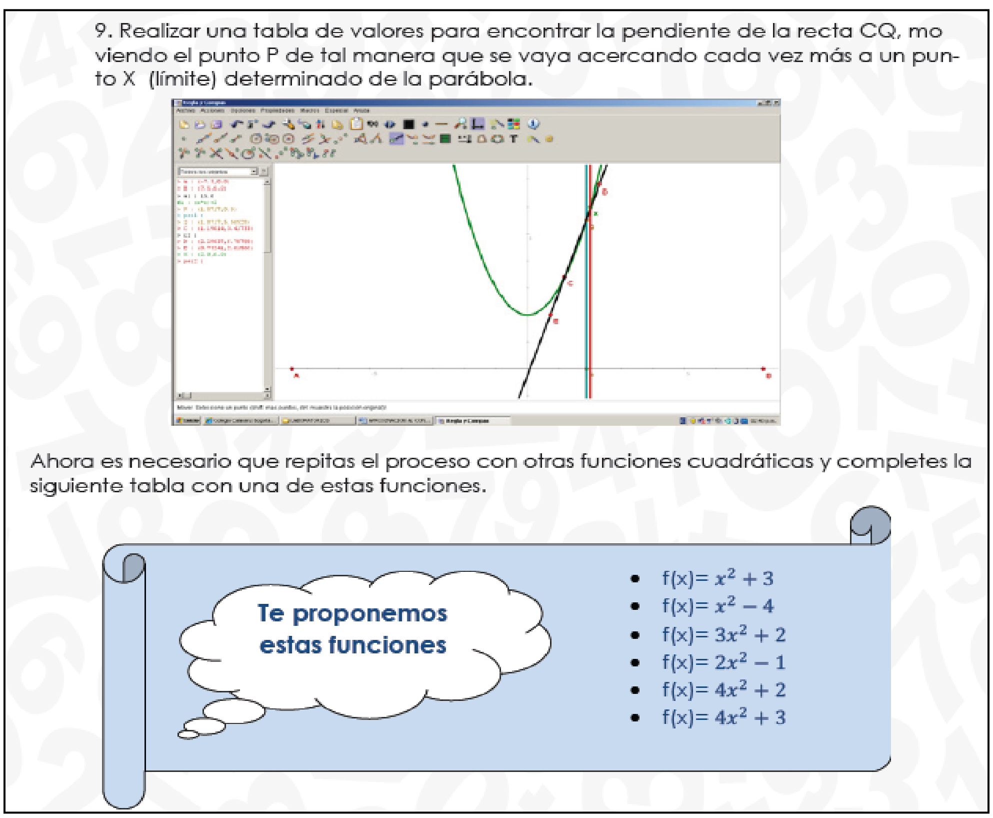
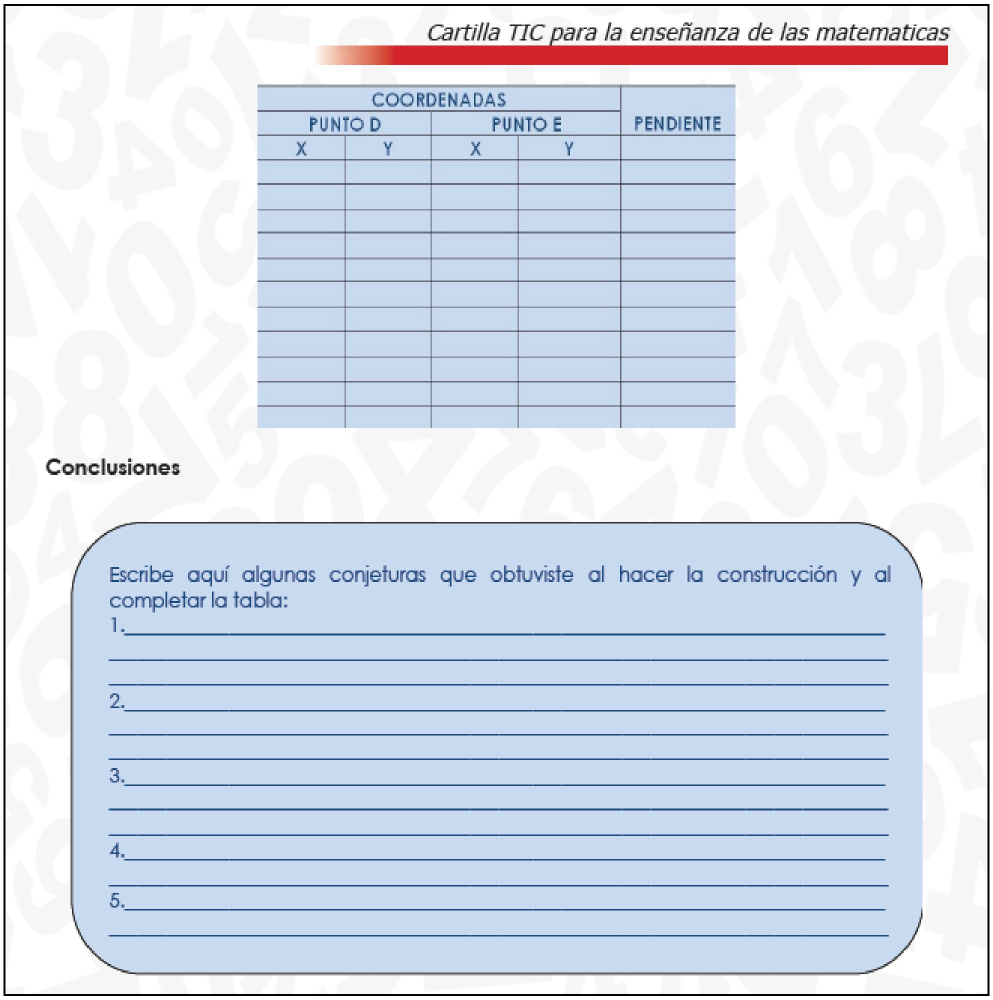


Figura 4. Construcción con regla y compás.



Cartilla TIC para la enseñanza de las matematicas

COORDENADAS				PENDIENTE
PUNTO D		PUNTO E		
X	Y	X	Y	

Conclusiones

Escribe aquí algunas conjeturas que obtuviste al hacer la construcción y al completar la tabla:

1.____

2.____

3.____

4.____

5.____

Figura 5. Taller a partir de la construcción.

En la fase de diseño se tuvo en cuenta aspectos como: las herramientas con las que cuenta la institución, la edad y el grado de los estudiantes y el contexto socio-educativo de los niños, niñas y adolescentes. Esta fase duró alrededor de 2 meses.

Fase 3: corrección de las actividades.

Al recoger las 13 actividades diseñadas, se revisaron y posteriormente, en reunión de departamento, se socializaron las correcciones, de tal forma que cada docente pudiera editarlas. Sin embargo durante el proceso de edición de la cartilla, el equipo de edición realizó algunas correcciones.

Fase 4: compilación.

Finalmente, fue necesario diagramar, compilar las actividades y darles a todas el mismo formato: título de la actividad, autor, grado para el cual se propone la actividad, objetivo, recursos, cuando es posible aplicarla, conocimientos previos, tiempo estimado, desarrollo de la actividad y taller para los estudiantes. Para el trabajo de diagramación tuvimos la ayuda de un diseñador gráfico.

Cartilla TIC para la enseñanza de las matematicas

Actividad Nº 9. ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DERIVADA COMO PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA EN UN PUNTO X.

Por Carlos A. González

GRADO: Once

Sirve para:
Aproximar a los estudiantes al concepto de derivada como la pendiente de recta tangente.

Recursos:
Software: Regla y Compás.

¿Cuándo Aplicarla?
Antes de iniciar el estudio de derivadas.

Conocimientos previos:
Límite de una función, pendiente de una recta y parábolas. Manejo básico del programa R y C.

Tiempo estimado:
2 horas.

TALLER PARA EL ESTUDIANTE

Construcción:

1. Mostrar ejes. Dibujar un segmento AB sobre el eje horizontal, de tal manera que A se encuentra a la izquierda del origen y B a la derecha.

Figura 6. Formato de las actividades.

Finalmente, socializamos dentro del departamento, el diseño de la cartilla y las actividades propuestas por cada docente. Sin embargo, este trabajo no termina aquí ya que decidimos realizar una nueva revisión de las actividades y ajustarlas mucho más, de tal forma que podamos ofrecer a nuestros docentes y estudiantes lo mejor de nuestro trabajo. Estos ajustes se propusieron para el mes de Agosto del 2013 y además se diseñarán nuevas actividades que se compilarán con las anteriores.

Figura 7. Portada de la cartilla.

Qué encontramos en el proceso.

A partir de la socialización final encontramos que, en primer lugar, algunos docentes del departamento han encontrado interesante y enriquecedor el acercamiento a algunos programas especiales de matemáticas, porque reconocen la potencialidad en cuánto a su dinamismo, su velocidad de procesamiento, la construcción de modelos, y sobre todo su potencialidad pedagógica y metodológica. El imbuirse en un mundo tecnológico que apoya procesos de enseñanza-aprendizaje produce curiosidad, sin embargo también provoca algún temor en aquellos que no son muy cercanos a estas herramientas tecnológicas.

En otros docentes aún existe el miedo y rechazo al uso de estos programas computacionales, porque creen que este tipo de herramientas desplazan al docente y piensan que los estudiantes deben aprender como ellos aprendieron, pues están seguros que para analizar situaciones, resolver algoritmos, realizar gráficas, construir modelos, es mejor hacerlo con papel y lápiz, ya que este ejercicio desarrolla su motricidad, y su comprensión en la disciplina es mejor.

De otra forma, el ejercicio de escribir las actividades, compilarlas para luego aplicarlas, es un acuerdo que se percibe necesario y muy enriquecedor. En muchas ocasiones los docentes realizamos actividades que atraen a nuestros estudiantes, pero nunca las escribimos. Escribir es un ejercicio que debe ser permanente en nuestra labor educativa, ya que nos conduce a una reflexión de nuestro que hacer diario y nos propone nuevas metas en cuanto a la metodología y la evaluación en la disciplina.

Podemos finalizar, mencionando que el desarrollo de las nuevas tecnologías ha dinamizado la educación, sus contenidos y metodologías. El fortalecimiento de las competencias matemáticas de los educandos no puede ser ajeno a la inclusión de herramientas tecnológicas. Las nuevas generaciones exigen nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje, así que los docentes debemos responder a estas necesidades. Las TIC no son el fin de la enseñanza de las matemáticas, son un medio y no son el único. El conocimiento de programas computacionales nos permite verificar, demostrar, modelar, construir conceptos de nuestra área de conocimiento, así que es importante fortalecer las habilidades en el manejo de estos.

Referencias y bibliografía

Marmolejo Valle, J.E. (2011). Uso de las TIC como herramienta pedagógica en la enseñanza de las matemáticas. Tomado de http://www.slideshare.net/jmarmolejov/uso-de-las-tic-en-la-enseanza-de-las-matematicas

López García, J.C. (2003). La integración de las TICs en matemáticas. Tomado de http://www.eduteka.org/Editorial18.php

Otero Diequez, A.M (2011). Las TIC para el logro de un aprendizaje significativo de la matemática. Tomado de http://www.monografias.com/trabajos68/tics-logro-aprendizaje-significativo-matematica/tics-logro-aprendizaje-significativo-matematica.shtml

¿Cómo participa la historia de la Aritmética en un curso de formación inicial de profesores de Matemáticas?

Adriana **Gálvez** Socarrás
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
adrianam.galvez@gmail.com
Andrés **Maldonado** Guinea
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
andresmaldonado2703@gmail.com

Resumen

En este escrito presentamos parte de los resultados de un estudio[1] que se llevó a cabo en el marco de la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, de la Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional, el cual se realizó con el fin de caracterizar el papel que cumple la historia de la aritmética en la formación inicial de profesores. Nos centramos específicamente en cómo participa la historia en un curso de la Licenciatura en Matemáticas en el cual se aborda el conocimiento pedagógico de contenido y en el que además interviene la historia de la aritmética.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, conocimiento del profesor, formación inicial de profesores, cómo involucrar la historia en la formación de profesores, historia de la Aritmética.

Presentación del problema

En la Universidad Pedagógica Nacional[2] de Bogotá, Colombia, la formación inicial de los profesores se hace en un programa de Licenciatura en Matemáticas en el cual hay varios ámbitos a través de los que se pretende hacer la formación en Historia de las Matemáticas de los futuros

[1] Tesis de Maestría: El papel de la historia de la aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas.
[2] La Universidad Pedagógica Nacional es una Universidad uniprofesional, que busca la formación de profesores en diferentes áreas.

profesores. El primero, es el curso *Tópicos de historia de las Matemáticas*; el segundo, los trabajos de grado que involucran HM; el tercero, los apuntes históricos que se involucran en las clases de Matemáticas; y el cuarto, son los cursos de la línea de Didáctica de la Matemática que está relacionada con el Conocimiento Pedagógico de Contenido (CPC), en esta línea se encuentra el espacio académico *Enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra* (EAAA), el cual estudiamos con el fin de intentar develar cuál es el papel de la historia en ese curso para la formación de profesores. Nuestro interés no era observar cómo participa la Historia de las Matemáticas (HM) en la licenciatura, sino en ese espacio académico, ya que por una parte es un curso en el que se hace uso de la HM y por otro lado EAAA es una propuesta en la que se está innovando en la formación de profesores, el curso lleva tan solo tres años de estar siendo desarrollado. EAAA en particular aborda la formación de lo que Shulman (1986) llama el conocimiento pedagógico de contenido.

Este espacio académico está situado en el sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en donde los profesores en formación ya han tenido cursos que abordan el conocimiento disciplinar respecto a la Aritmética y el Álgebra, pero no han tenido dentro de la Licenciatura un seminario específico de historia de las matemáticas.

En EAAA se contemplan tres frentes de trabajo, que son: La reflexión sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos; los aspectos curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y el álgebra; y el estudio de propuestas de enseñanza donde se incluye la identificación de materiales y recursos para el aula (Mora, 2009).

Ahora bien, para estudiar el papel de la historia de la aritmética en EAAA requeríamos abordar la relación entre el conocimiento histórico como parte del conocimiento del profesor de matemáticas, y encontramos que Guacaneme (2011) propone cuatro preguntas que se deben plantear para apreciar dicha relación, y tienen que ver con la racionalidad (los *porqué*), la intencionalidad (los *para qué*), el tipo de historia (el *qué*) y las estrategias (los *cómo*).

En relación al *cómo*, tuvimos en cuenta dos aspectos, uno en relación a cómo se promovió la apropiación de la historia de la Aritmética en cuanto a las temáticas vistas en el curso y otro en relación a la metodología.

En este último la literatura no reporta de manera explícita las estrategias para involucrar la historia; aún así, encontramos dos documentos de Bjørn Smestad publicados en 2008 y 2011, que dan cuenta de algunas estrategias de cómo se podría utilizar la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores.

Smestad (2011) plantea cinco maneras distintas de cómo incluir la historia de las Matemáticas, que son: como parte de una *lectura*, trabajando sobre las *fuentes originales*, *proyectos*, *tareas* y *juegos*.

Para Smestad (2011) el introducir *lecturas* respecto a alguna noción matemática, necesariamente involucra particularidades que aportan algunos aspectos de la historia misma, lo que contribuye a la construcción del conocimiento más que el solo hecho de relatarla o contarla. Por otra parte, Smestad muestra a partir de unos ejemplos, que no solo las lecturas contribuyen a introducir la historia, sino que las imágenes, las gráficas y demás elementos también lo hacen, ya sea en su manera de representar o en su manera de presentarlo.

En cuanto a las *fuentes originales* Smestad (2011) menciona que a través de éstas se pretende que los estudiantes tomen postura frente a diferentes situaciones que se presentan implícitamente al momento de abordar la obra (*v.g.*, la manera en que se escribe, los símbolos que introduce, la forma en aborda las demostraciones y hasta aspectos sociales según el contexto histórico en que se realizó la obra).

Smestad (2008) considera como tercera manera los *proyectos*, lo primero que menciona de ellos es que requieren mucho tiempo para realizar, pero en ellos se pueden abordar diferentes conceptos o simplemente tomar algún objeto matemático y mostrar todo lo que se puede hacer con él. Un aspecto importante que menciona Smestad, es que se dificulta conectar la historia con las matemáticas. También menciona que a veces los estudiantes para profesor logran hacer maravillosos proyectos en donde ellos logran conectar la historia de las matemáticas a la enseñanza de forma ingeniosa.

Por otro lado Smestad (2011) considera que a través de las *tareas* se puede involucrar la HM ya que a diferencia de los proyectos no se "quita tiempo" a las matemáticas, porque en ellas se desarrollan contenidos matemáticos que hacen parte o hicieron parte de un problema, un algoritmo, una situación, etc., en diferentes momentos de la Historia de las Matemáticas. Esto es beneficioso en cuanto a que los estudiantes tienen mayor cantidad de tiempo para discutir sobre los problemas en grupos o equipos de trabajo.

Finalmente Smestad (2011) plantea una quinta manera de abordar la HM a través del *juego*. De esta manera, realiza un acercamiento a las nociones matemáticas que serán trabajadas, utilizando parte de los saberes previos de los estudiantes. El *juego* para él consta de formular ejemplos e intentar encontrar el significado de aquellos conceptos que se van a abordar o que hasta ahora se van a introducir en la clase. Para esta categoría, Smestad menciona que es importante conocer los orígenes de los conceptos que se van a trabajar, porque los estudiantes pueden estar interesados o motivados en lo que van a abordar cuestionando los términos a trabajar.

Resultados

Para identificar cómo se llevan a cabo los procesos de apropiación del conocimiento histórico de la Aritmética en EAAA se tuvo en cuenta el documento del programa académico del curso, la propuesta para orientar el diseño del espacio académico y también episodios de 26 registros de audio y video en los que se evidenció el uso de la historia.

En el análisis encontramos que respecto al cómo se promovió la apropiación de la historia de la Aritmética en el curso, existen tres aspectos a tener en cuenta:

- Se buscaba identificar los objetos de estudio de la aritmética,
- diferenciar los objetos de estudio de la Aritmética y los del Álgebra y también
- hacer una comparación entre la historia de la aritmética y los desarrollos curriculares de la aritmética en la escuela.

Éstos aspectos no son lineales, no tienen un desarrollo cronológico respecto a HM sino que se desarrollan de forma paralela y es evidente la reflexión de tipo didáctico por lo que consideramos que no se pretendió un estudio de la historia de la Aritmética en sí misma, sino un estudio acerca de ésta en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Es así como por ejemplo al intentar identificar los objetos de estudio de la aritmética se propuso en el curso el estudio de las concepciones históricas de la aritmética y de allí se desprendió la concepción histórica de que la Aritmética es el estudio de los números, y esto llevó a un estudio paralelo para identificar qué era el número en diferentes momentos de la historia. De manera similar se hizo con la historia del álgebra y se buscó encontrar diferencias y semejanzas entre los objetos de estudio de la aritmética y el álgebra desde las perspectivas históricas y a su vez se iba haciendo una comparación con el currículo, por ejemplo cuando se habló del desarrollo histórico de los sistemas de numeración se buscó hacer la comparación en el currículo escolar para saber si se da en el mismo orden que como aparecieron históricamente.

Por otra parte, en cuanto a las estrategias metodológicas utilizadas para involucrar la historia de la Aritmética encontramos que en el documento base para el curso de EAAA (Mora, 2011) la profesora muestra que optó por una metodología basada en los siguientes aspectos: Imaginarios de los profesores en formación; preguntas orientadoras; realización de lecturas; revisión de textos escolares; desarrollo de talleres; controles de lectura; exposiciones cortas; planteamiento de posturas críticas; contraste entre sus imaginarios y la literatura especializada; diseño, experimentación y análisis post-acción de clases cortas; y finalmente, relación con lo vivido en su formación.

En cuanto a los videos analizados y en relación con el marco de referencia se resalta que la docente aborda tres de las estrategias propuestas por Smestad (2011) que son trabajo con lecturas, uso de diferentes fuentes históricas y proponer tareas que involucran la historia de las matemáticas como se muestra a continuación en la figura1.

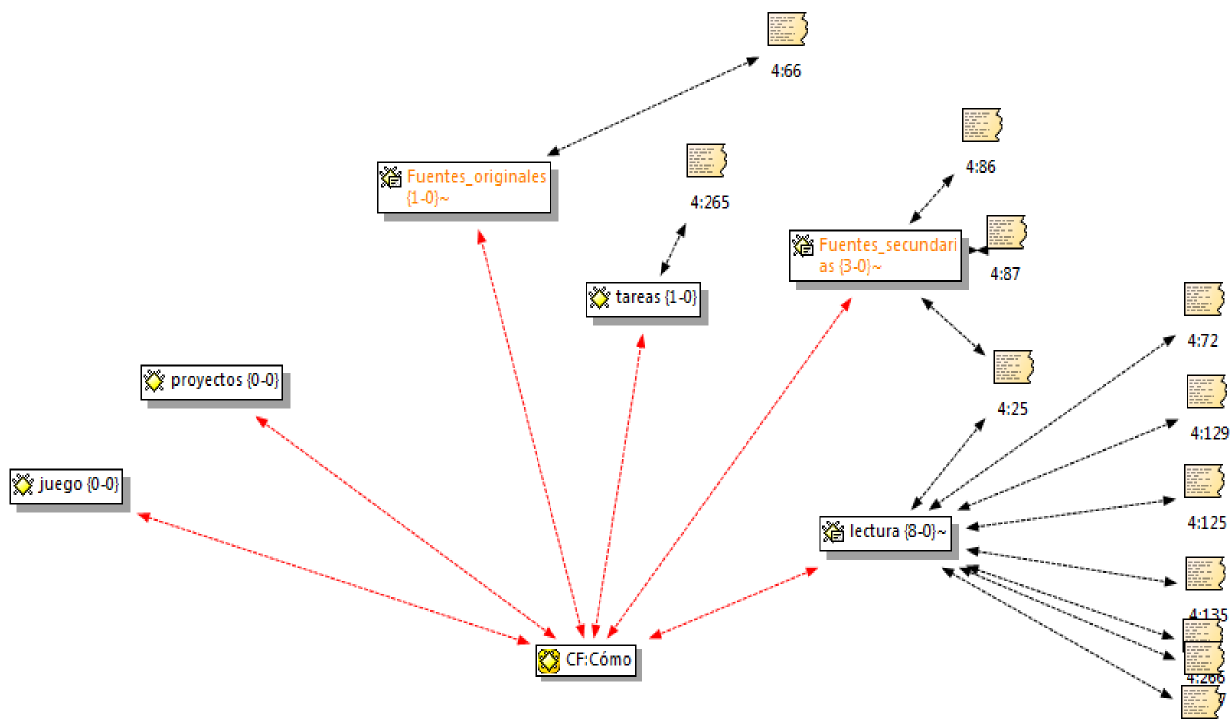


Figura 1. Estrategias de cómo abordar el conocimiento histórico

Respecto a la primera estrategia, la *lectura* de documentos especializados contribuye de manera significativa a la manera como los futuros docentes se apropian de un conocimiento que manejan en diferentes niveles (hay que tener en cuenta que los estudiantes ya están permeados de diferentes cursos en los que se trabaja la aritmética), pero posiblemente aún no se han cuestionado respecto a los aspectos ontológicos y epistemológicos de estos objetos matemáticos. Además, la pertinencia que tienen las preguntas en las sesiones de clase alimentan las discusiones, lo cual aportan y generan un ambiente de incertidumbre pero las diferentes socializaciones en clase o las lecturas contribuyen a responder aquellos cuestionamientos. También mediante las lecturas y discusiones en clase, se busca que los profesores en formación asuman posturas fundamentadas en la literatura especializada acerca de los objetos de estudio de la Aritmética desde una perspectiva histórica.

Por otra parte, el trabajo que se realizo con *fuentes originales* (considerando fuentes originales las obras matemáticas como por ejemplo las de Euclides, Al-kwarizmi, etc.) fue muy poco, incluso no se estudio como tal una obra original en el curso sino que se mencionaron, por ejemplo en algún momento uno de los profesores mencionó la obra de Elementos de Euclides y describió la obra a grandes rasgos. De manera similar, las *fuentes secundarias* (entendiendo por fuentes secundarias los libros de historia de las matemáticas escritos por los historiadores) solo son mencionadas en el espacio académico. Para este caso consideramos fuentes secundarias los momentos en los que la profesora manifiesta "en los libros de historia se encuentra que…" también los videos que se presentaron durante las clases, por ejemplo el video llamado "*De Diofanto al Siglo XXI*". Tanto las fuentes secundarias, como las fuentes originales son presentadas o mencionadas por los profesores que orientan el curso. Consideramos que esto último se debe a que los profesores en formación, no han tenido dentro de la Licenciatura un curso de Historia de las Matemáticas y ese quizás es el espacio donde ellos podrían tener contacto con fuentes originales y fuentes secundarias, por eso la alusión a las fuentes de la historia, no procede de los estudiantes, es decir que este se puede considerar un conocimiento exógeno al curso mismo y a los estudiantes.

Además de las fuentes anteriormente mencionadas en el curso también se utilizan y en mayor medida las fuentes didácticas como por ejemplo los documentos de Macías (2010), Maz y Rico (2001), y Sfard (1991). Además, en el uso que la profesora le dio a dichas fuentes dentro de las clases, se evidencia la preocupación por propiciar espacios de participación, discusión y exposiciones; en ellas, por medio de preguntas y lecturas, se pone en juego las diferentes concepciones de los estudiantes, los cuales tienden a recurrir a sus experiencias vividas o a realizar retrospecciones para intentar dar respuesta a los interrogantes planteados, además del proceso de análisis de estos documentos.

Las *tareas* propuestas por la profesora involucran diferentes tipos de actividades que involucran el trabajo en equipo, la socialización de ideas y otras estrategias que se mencionan a continuación:

Las *exposiciones* en las que por medio de asignación de diferentes aspectos a trabajar se procura que los estudiantes investiguen y se documenten al respecto. Gran parte de los documentos que usan los profesores en formación inicial para preparar las exposiciones y discusiones del espacio académico son documentos que corresponden a *fuentes didácticas*, que en la mayoría de los casos son sugeridas por la profesora. Por ejemplo cuando se trabajo acerca de las concepciones históricas del número se realizaron exposiciones grupales en las que cada grupo de estudiantes utilizó *fuentes didácticas* para preparar las exposiciones y complementaron con otros tipos de fuentes.

Las *intervenciones programadas* de la historia de la Aritmética, las cuales se hacen evidentes cuando por ejemplo la profesora presenta un video sobre Diofanto, o al momento de trabajar con un documento histórico. La profesora utiliza varios videos que involucran la historia bien sea a través de una biografía de algún matemático o sobre algún tópico del que se esté trabajando en el momento, por ejemplo cuando se establecieron diferencias entre los objetos de la aritmética y el álgebra se presento un video sobre las ecuaciones y la historia.

Las *intervenciones improvisadas* de la historia de la Aritmética, ya que aparecen en cualquier momento de las sesiones de clase, ya sea de parte de la profesora o de parte de algún estudiante para contribuir con las discusiones de clase que por lo general propicia la profesora buscando que los estudiantes tomen postura sobre los hechos históricos, curriculares o matemáticos que aparecen en el curso.

Además, en los registros se hace evidente la participación activa de los profesores en formación como núcleo de la metodología de las sesiones de clase. Así mismo, se realizaron *mapas conceptuales* y *cuadros comparativos* tanto para establecer relaciones y diferencias entre los objetos de estudio de la aritmética y el álgebra como también para las relaciones y diferencias existentes entre la historia de la aritmética y el currículo escolar. Para esto último también se hizo *revisión de textos escolares* como parte de las tareas propuestas, todo esto siempre con una socialización que permite mayor participación y conocer opiniones distintas de los diferentes estudiantes.

A modo de síntesis

Finalmente y teniendo en cuenta todo lo anterior, observamos que la formación en Historia de las Matemáticas como parte de un curso de Didáctica si es posible y se puede involucrar desde las mismas temáticas del curso, sin necesidad de convertirlo en un curso de Historia sino con la reflexión constante de aspectos didácticos, en este caso de la enseñanza y aprendizaje de la Aritmética.

Por otra parte, concluimos que si bien es cierto que la literatura no reporta de manera explícita las estrategias para involucrar la historia de las matemáticas en la formación inicial de profesores, recientemente se ha encontrado que Smestad (2011) ha documentado algunas metodologías que ha utilizado para involucrar la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores. Pero aún así, ese documento no logra abarcar todas las estrategias que se usan en el espacio académico, estrategias que se resumen en la figura 2.

Figura 2 Estrategias Utilizadas en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra

Consideramos que las categorías de análisis que establecimos en el marco de referencia, se quedan cortas en relación a lo que sucede en los episodios analizados, porque si bien es cierto que de las categorías de Smestad (2011) únicamente se utilizan tres en EAAA (lecturas, fuentes originales y tareas), también encontramos que se busca involucrar más a los estudiantes en la apropiación del conocimiento histórico y la reflexión didáctica acerca de la aritmética y el currículo, por medio de discusiones, socializaciones y exposiciones, en las que la profesora participa cuestionando los aportes de los estudiantes, mediando la discusión y consolidando los aspectos clave de las comparaciones que se hacen. También se busca formar un pensamiento crítico usando la historia de las Matemáticas y frente a diferentes temas de la didáctica de las matemáticas.

Referencias

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 8* (1), 30-46.

Arcavi, A. (1991). The experience of history in mathematics education: Two benefits of using history. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education , 11* (2), 11.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). Historical support for particular subjects. En *History in mathematics education: the ICMI Study* (págs. 241-243). Kluwer: Dordrecht.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leader, E. Pehkonen, & G. Torner (Edits.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (págs. 39-57). Suiza: Kluwer Academic Publishers.

Gálvez, A. M., & Maldonado, A. F. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas.* Bogotá: Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher. Teacher Knowledge and Teacher Education.* New York: Columbia University.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT, 2*.

Guacaneme, E. (2011). La historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM.* Recife (Brasil), 26 al 30 de junio.

Guacaneme, E., & Torres, L. (2011). Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas. Bogotá: IV Encuentro de programas de Formación inicial de profesores de matemáticas & V Seminario de matemática educativa. Fundamentos de la matemática Universitaria.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. , 12(1),* 67-101.

Mora, L. (2009). *Documento de avance de propuesta para orientar el diseño del espacio académico: Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mora, L. (2011). *Programa de Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L., M, B., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J., Katz, V., y otros. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. En *History in mathematics education. The ICMI study* (págs. 143-170).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Smestad, B. (2008). A look at three years of projects with students. *The International Conference on Mathematics Education,* Monterrey, México.

Smestad, B. (2011). History of Mathematics for Primary School Teacher Education Or: Can You Do Something Even if You Can't Do Much? In V. Katz, & C. Tzanakis, *Recent development on introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 201-210). The Mathematical Association of America.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Niss, M., & al, e. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maamen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Competencias de los docentes de Matemática según criterio estudiantil

Pablo José **Mena** Castillo
Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, Ministerio de Educación Pública
Costa Rica
pablo.mena.castillo@mep.go.cr

Resumen

La educación basada en competencias es una propuesta para eliminar de los procesos educativos la distancia entre teoría y práctica, con ella se pretende que la utilidad de los conocimientos para la vida se encuentre siempre presente en el acto educativo.
Ante el bajo rendimiento estudiantil en Matemática, es necesario analizar los factores que lo impactan en forma directa e indirecta, uno de ellos es la formación profesional de los profesores y las competencias que deben tener o desarrollar estos para llevar a cabo una labor educativa de calidad.
En esta investigación se precisaron 12 competencias profesionales que deben tener los docentes en la asignatura de Matemática a la hora de impartir clases de secundaria, según criterio del estudiantado. A partir del grado de importancia que le confirieron los estudiantes a estas competencias, se predijo la calificación del desempeño profesional docente.

Palabras clave: educación, matemática, competencias, desempeño profesional.

Introducción

En la actualidad y en el futuro inmediato, los sistemas educativos de los diferentes países y de Costa Rica, necesitan de profesores de Matemática capaces no solo de dominar la materia, sino de tener las competencias profesionales para su enseñanza. Los procesos educativos han evolucionado con las sociedades, el aporte de las distintas corrientes educativas y autores marcan la pauta en cómo se concibe la educación de los estudiantes. En una época la disciplina era lo primordial, en otra el castigo era indispensable, hasta la memorización se consideró como fundamental.

En la actualidad, la aplicación práctica de conocimientos y procedimientos en los procesos y en el saber hacer representan el norte educativo. Es así como surge la educación basada en competencias, sobre todo en las etapas obligatorias, la cual pregona un aprendizaje en el que no solo interesa lo meramente conceptual, sino su aplicación, por ello para Cano (2007) en la educación se "incluye lo que hay que saber, lo que hay que saber hacer y lo que hay que «ser»" (p. 9).

La educación basada en competencias nace como respuesta para eliminar la brecha entre teoría y práctica, con ella se pretende lograr una educación de calidad que permita tener derroteros en torno a implantar mecanismos educativos basados en experiencias exitosas. Para Romero (2005) en ella se "reconoce las experiencias y aprendizajes empíricos a fin de ir generando una mejora de los aprendizajes y a fin de implantar cantidad y calidad de la capacitación" (p. 9). En competencias, el trabajo de campo es fundamental, pues es ahí donde se pone a prueba la teoría y se genera nueva, dependiendo de las exigencias del medio.

El concepto de competencia es antiguo y en la actualidad ha cobrado un nuevo vigor. Esta tendencia no solo cobija al estudiantado, sino también a los docentes, pues se estila que los profesores deben ser competentes para afrontar los nuevos retos y la complejidad de las sociedades modernas. Cabe señalar que en sus orígenes las competencias estaban ausentes explícitamente de los sistemas educativos formales.

Se debe tomar en cuenta que si se quieren desarrollar competencias entre los estudiantes quienes se encargarán de desarrollarlas serán los docentes de Matemática, por lo tanto, ellos deberán de poseerlas también. Las competencias profesionales a su vez se convierten en una guía para la selección y la contratación laboral, la calificación, la evaluación y la promoción de los docentes. Las competencias, posibilitan al educador afrontar, con acierto, las situaciones del entorno educativo. Si bien muchos de estos atributos pueden ser innatos, como la vocación, otros se llegan a aprender y a desarrollar. De aquí la importancia y las implicaciones del tema para la formación y la capacitación continua en el ejercicio del rol profesional docente.

El enfoque basado en competencias implica que los docentes asuman como sujetos en proceso de formación y que reflexionen sobre su desempeño y su función como formadores de las nuevas generaciones.

Justificación

Las competencias resultan atractivas en los procesos de aprendizajes porque tienen que ver con el tema de la utilidad de los conocimientos, es decir, la puesta en práctica. Ellas son la respuesta a la clásica pregunta del estudiantado: ¿lo que vemos en la escuela, para qué nos sirve? Ante esta interrogante, la mayoría de los docentes brindan una respuesta inadecuada, debido a que el currículo tradicional, basado en contenidos y objetivos, imposibilita ser claros en este tipo de encrucijada. Las clásicas respuestas son: para ganar el examen de bachillerato, para cuando estudien en la universidad, entre otras, lo único que ocasionan es alejar de los procesos educativos la motivación estudiantil.

Las competencias en los sistemas educativos facilitan que los conocimientos de los centros educativos despierten los intereses del alumnado, porque los conocimientos asociados a una competencia deben de tener alguna utilidad, deben de servir para algo en la vida y ser interesantes a los estudiantes. Aunado a lo anterior, una educación basada en competencias es la mejor herramienta para hacer posible un centro educativo inclusivo. Aceptar que todos los estudiantes son diferentes y tienen el derecho de aprender es un compromiso ético y social que va más allá de la metodología. La diversidad de los discentes enriquece las posibilidades del grupo y convierte el aula es un espacio tan real como la propia vida.

Algunos autores han señalado que la actividad educativa no es ni una profesión ni una vacación, sino más bien un estilo de vida (Marchesi, 2007). Tres características básicas de todo buen docente es tener autoridad, responsabilidad y compromiso, y estas tres constituyen el núcleo central de este estilo de vida.

El tema de las competencias ha sido tratado por muchos autores y en especial para el contexto laboral, pero Perrenoud (2004) lo aborda desde el punto educativo. Este autor con base en su experiencia e investigaciones por varios años en diferentes países, realizó una propuesta de competencias que debe tener un profesional para desempeñarse en el campo educativo. Por ello, en la presente investigación se consideró en especial la propuesta de Perrenoud, pues es de los pocos autores que formaliza un aporte de cuáles deben ser las competencias de los docentes. Perrenoud propone qué características debe evidenciar un educador en su desempeño profesional para ser considerado competente en su trabajo. El trabajo de Perrenoud se puso a prueba con la presente investigación solo que particularmente en el contexto educativo costarricense.

Generalmente existe consenso en establecer que para desempeñarse adecuadamente en los salones de clases los docentes deben tener las siguientes tres características:

- Una formación sólida de la asignatura.
- Una formación psicopedagógica profunda.
- Ciertas competencias profesionales y personales.

Estos elementos permiten desarrollar en los docentes habilidades y competencias matemáticas, que les facilitan pasar del pensamiento simple al complejo, para que sean capaces de comprender, resolver situaciones y problemáticas interrelacionadas y sistemáticas, en un contexto incierto y cambiante. Las competencias docentes deben entenderse como el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, valores, creencias, intuiciones, percepciones y prácticas que les facilitan promover en los estudiantes el desarrollo de sus propias competencias de aprendizaje, básicas y para la vida.

En el proyecto Tuning para América Latina (Beneitone, P. y otros, 2007) se hace énfasis en una definición de competencia como una “red conceptual amplia, que hace referencia a una formación integral del ciudadano, por medio de diversos enfoques, como el aprendizaje significativo” (p. 36). Es decir, la competencia no debe reducirse al desempeño laboral o la adquisición de conocimientos, es un conjunto de capacidades desarrolladas a través de una serie de procesos conducentes a realizar múltiples acciones, mediante las cuales la persona evidencia su capacidad de resolver problemas en un contexto específico y muchas veces, cambiante. Para el presente trabajo se asumió la conceptualización hecha por Perrenoud (2004), para quien la competencia representa “una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones” (p. 11).

En las clases de Matemática se deben crear actividades de estudio que despierten el interés y motivación de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen sus resultados. Una de las competencias matemáticas más importantes es la aptitud para plantear, formular, resolver e interpretar problemas a través de la matemática en diferentes situaciones y contextos. Es decir, es la capacidad de traducir un problema de la vida real al lenguaje matemático y a partir de esto, producir una solución matemática pertinente al contexto. La OCDE (2004) define la competencia matemática como "la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participaren las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometidoy reflexivo" (p. 28).

Las competencias docentes están dirigidas a conseguir que los estudiantes aprendan y sean personas competentes que puedan usar lo aprendido en diferentes situaciones en las que se encuentren a lo largo de su vida. Que los estudiantes lleguen a comprender y saber usar las ideas matemáticas es posible si se involucran activamente en tareas que les permitan profundizar y relacionarlas.

La exigencia de que un docente sea competente surge de la necesidad de dominar otras habilidades que van más allá del ejercicio responsable de la transmisión del conocimiento. Los centros educativos del siglo XXI, asumen su responsabilidad cuando consigue que los estudiantes sean competentes para utilizar procesos cognitivos, sociales, afectivos y funcionales. Saber (conocimiento), hacer (procedimiento) y querer (interés y motivación) se integran en una única dinámica que se estimula, cuando en la clase o en elaula se convierten en escenarios reales que movilizan los conocimientos.

Con fundamento en lo estipulado hasta aquí y a la experiencia de este investigador, se definen las siguientes competencias para los docentes de Matemática:

1. Tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para desarrollar experiencias de aprendizaje.
2. Demostrar un amplio domino de los conocimientos matemáticos de secundaria.
3. Concebir los errores de los estudiantes y los obstáculos en el aprendizaje como oportunidades para desarrollar aprendizajes significativos.
4. Implicar al estudiantado en actividades de investigación o en proyectos educativos matemáticos.
5. Construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente. Estimula el razonamiento, el análisis, la inferencia lógica y la conceptualización en las clases de Matemática.
6. Concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y las posibilidades de los educandos.
7. Elaborar y hacer evolucionar los dispositivos de diferenciación, ser sensible ante la diversidad. Practicar el apoyo integrado (cooperación activa) y trabajar con estudiantes con grandes dificultades.
8. Suscitar el deseo de aprender, expliciten la relación con el conocimiento, el sentido del trabajo escolar y desarrollen la capacidad de autoevaluación en el estudiante.
9. Informar e implicar a la familia de los estudiantes.
10. Utilizar las TIC en el desarrollo de la clase.
11. Propiciar una cultura de paz, en la cual se prevenga la violencia.

12. Ofrecer una educación en la tolerancia y el respeto a las diferencias de todo tipo, ser categórico en el repudio y crítica a todo prejuicio y discriminación de sexo, etnias o credo religioso.

La vigencia y pertinencia de estas competencias fueron juzgadas por expertos y principalmente por quienes son la razón de ser del sistema educativo, los estudiantes.

Objetivo general

Precisar las competencias profesionales requeridas por los docentes en la asignatura de Matemática, según criterio del estudiantado de undécimo año de la Educación Diversificada de los colegios públicos, urbanos y académicos diurnos de la Dirección Regional de Educación de Occidente, durante el I periodo lectivo del 2012.

Objetivos específicos

1. Valorar la importancia de tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para desarrollar nuevas experiencias de aprendizaje.
2. Determinar la percepción que tienen los alumnos sobre las competencias y domino de los conocimientos de matemáticas de sus profesores.
3. Especificar la importancia de que los docentes de Matemática puedan concebir los errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes como oportunidades para desarrollar aprendizajes significativos.
4. Definir la importancia de que los docentes de Matemática puedan *implicar al estudiantado en actividades de investigación o en proyectos educativos matemáticos.*
5. Delimitar las opiniones de los estudiantes con respecto a la importancia de que los docentes de Matemática puedan *construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente.*
6. Describir la importancia de que los docentes de Matemática tengan la capacidad de *concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y las posibilidades de los educandos.*
7. Especificar la importancia de que los docentes de Matemática tengan la capacidad para respetar las diferencias individuales de los estudiantes.
8. Determinar la opinión del estudiantado sobre la importancia de que los docentes de Matemática *susciten el deseo de aprender, expliciten la relación con el conocimiento, el sentido del trabajo escolar y desarrollan la capacidad de autoevaluación en el estudiante*.
9. Determinar la importancia de que los docentes de Matemática sean capaces de *implicar a la familia de los estudiantes.*
10. Definir la importancia que le confieren los estudiantes a que los profesores de Matemática *utilicen las TIC en el desarrollo de la clase*.
11. Delimitar la importancia de que los docentes de Matemática propicien *una cultura de paz, en la cual se prevenga la violencia*, con base en el criterio del estudiantado.
12. Exponer la importancia de que los docentes de Matemática sean competentes en *ofrecer una educación en la tolerancia y el respeto a las diferencias de todo tipo.*
13. Determinar la calificación que le asigna la población estudiantil al desempeño profesional de su docente de Matemática con fundamento en su trabajo profesional.
14. Determinar la relación entre las competencias con la calificación que le asigna el estudiantado a sus docentes de Matemática.

Resultados

Para recolectar la información, se utilizó un cuestionario (instrumento psicométrico), en el cual la mayoría de los ítems se midieron mediante una escala de tipo Likert. Para garantizar que los resultados producto de la aplicación del cuestionario fueran válidos y confiables, el cuestionario fue sometido a una revisión de expertos y además, se realizó una aplicación piloto. Aunado a lo anterior, con los resultados de la aplicación del cuestionario se llevaron a cabo análisis psicométricos en el marco de la Teoría Clásica de los Test y la Teoría de Respuesta a los Ítems, para evidenciar la calidad técnica de los ítems.

A continuación se presentan los principales resultados de la investigación.

Calificaciones asignadas por el alumnado a los profesores de Matemática

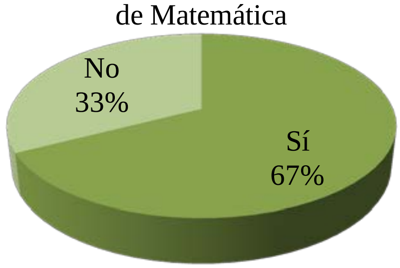
Las calificaciones asignadas al personal docente variaron desde 5 hasta 100 y estuvieron concentradas principalmente en calificaciones altas. Por ello, la calificación que más se repitió fue 90 (moda). El 50% del estudiantado asignó una calificación de 85 (mediana) o menos, es decir, el otro 50% le asignó a su docente una calificación superior a 85 y menor o igual al 100. Al haber algunas calificaciones tan bajas, el promedio de las calificaciones fue 78,41, no tan alto como la moda y la mediana.

Deseo de continuar recibiendo clases con su docente de Matemática

Los resultados a la pregunta: ¿Le gustaría seguir recibiendo clases con su actual profesor(a) de Matemática? Se presenta en el siguiente gráfico:

Gráfico 1

Deseo de seguir recibiendo clases con su docente de Matemática



Fuente: cuestionario para medir competencias de los docentes de Matemática, 2012.

El gráfico 1 muestra cómo una mayoría (67%) del estudiantado consultado sí desea continuar recibiendo lecciones con su docente actual de Matemática (en el momento de aplicado el cuestionario). Es decir, dos terceras partes del estudiantado sí deseaban seguir recibiendo clases con su docente de Matemática, pero un tercera parte no.

Grado de importancia de las competencias

Mediante el uso del programa estadístico SPSS versión 15.0 se precisó el grado de importancia que le confieren los estudiantes a las doce competencias de los docentes de Matemática. El ranking de las competencias se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 1

Rendimiento porcentual de cada competencia (ranking)

#	Competencia	Rendimiento
2	Demostrar un amplio domino de los conocimientos matemáticos de secundaria.	96,3%
3	Concebir los errores de los estudiantes y los obstáculos en el aprendizaje como oportunidades para desarrollar aprendizajes significativos.	88,0%
5	Construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente. Estimula el razonamiento, el análisis, la inferencia lógica y la conceptualización en las clases de Matemática.	87,4%
11	Propiciar una cultura de paz, en la cual se prevenga la violencia.	87,0%
6	Concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y las posibilidades de los educandos.	85,8%
12	Ofrecer una educación en la tolerancia y el respeto a las diferencias de todo tipo, ser categórico en el repudio y crítica a todo prejuicio y discriminación de sexo, etnias o credo religioso.	85,4%
7	Elaborar y hacer evolucionar los dispositivos de diferenciación, ser sensible ante la diversidad. Practicar el apoyo integrado (cooperación activa) y trabajar con estudiantes con grandes dificultades.	84,9%
8	Suscitar el deseo de aprender, explicitar la relación con el conocimiento, el sentido del trabajo escolar y desarrollar la capacidad de autoevaluación en el estudiante.	83,8%
9	Informar e implicar a la familia de los estudiantes.	79,5%
1	Tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para desarrollar experiencias de aprendizaje.	75,6%
10	Utilizar las TIC en la desarrollo de la clase.	70,6%
4	Implicar al estudiantado en actividades de investigación o en proyectos educativos matemáticos.	66,7%

Fuente: resultados del análisis de los datos con el SPSS, 2012.

En la tabla anterior se muestra que para los estudiantes es muy importante que el docente de Matemática demuestre un amplio domino de los conocimientos matemáticos para secundaria (segunda competencia), es decir, lo más importante para el estudiantado es que el docente de Matemática sepa sobre Matemática. En un segundo grado de importancia se encuentran 7 competencias (sus valores oscilan entre 88% y 83,8%), las cuales están relacionadas con el manejo que hace el docente de la medición pedagógica y en relación con los estudiantes en el aula. En un tercer grado de importancia se encuentran 3 competencias, con valores entre 79,5% y 70,6%, las cuales se refieren a la relación del docente con los padres de familia, a los conocimientos previos y a utilizar las TIC.

Por último, se encuentra la competencia que los estudiantes consideran menos importante, la competencia 4, esta se refiere al hecho de realizar investigaciones y proyectos educativos matemáticos. Es decir, para los estudiantes existen otras cosas más importantes en las cuales debe enfocarse el docente en sus clases que realizar investigaciones y proyectos.

En general, el porcentaje de rendimiento para las doce competencias es alto, pues todas superan el 65%. Es decir, en alguna medida las doce competencias definidas son importantes para los estudiantes. En ninguno de los casos, se presentó un porcentaje bajo, el cual fuera inferior al 50%.

Correlaciones entre las doce competencias y las calificaciones para el profesorado

En la presente investigación interesó determinar si las doce competencias definidas estaban relacionadas entre sí y además, si ellas se encontraban asociadas con la calificación que le asignaban los estudiantes a su docente de Matemática. En el cuestionario para medir las competencias de un docente de Matemática se formaron doce competencias, por lo cual para cada competencia se creó una nueva variable en el SPSS (llamadas Comp 1 hasta Comp 12) que consistió en la suma de las puntuaciones de los ítems que conformaban cada competencia. A partir de esto, se calculó las correlaciones entre estas trece variables, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 2

Correlaciones de Pearson entre las doce competencias y la calificación para el profesorado de Matemática

	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10	Comp 11	Comp 12	Nota
Comp 1	1,000	0,258	0,435	0,322	0,424	0,457	0,464	0,521	0,401	0,203	0,393	0,311	-0,078
Comp 2	0,258	1,000	0,388	0,242	0,392	0,374	0,423	0,400	0,350	0,210	0,342	0,260	0,067
Comp 3	0,435	0,388	1,000	0,441	0,629	0,655	0,569	0,640	0,367	0,245	0,525	0,393	0,038
Comp 4	0,322	0,242	0,441	1,000	0,413	0,400	0,459	0,513	0,396	0,343	0,302	0,283	0,016
Comp 5	0,424	0,392	0,629	0,413	1,000	0,644	0,591	0,677	0,362	0,361	0,516	0,356	0,121
Comp 6	0,457	0,374	0,655	0,400	0,644	1,000	0,631	0,699	0,391	0,318	0,494	0,403	-0,051
Comp 7	0,464	0,423	0,569	0,459	0,591	0,631	1,000	0,609	0,466	0,343	0,490	0,383	-0,002
Comp 8	0,521	0,400	0,640	0,513	0,677	0,699	0,609	1,000	0,423	0,480	0,597	0,423	0,004
Comp 9	0,401	0,350	0,367	0,396	0,362	0,391	0,466	0,423	1,000	0,202	0,383	0,381	-0,033
Comp 10	0,203	0,210	0,245	0,343	0,361	0,318	0,343	0,480	0,202	1,000	0,301	0,158	0,036
Comp 11	0,393	0,342	0,525	0,302	0,516	0,494	0,490	0,597	0,383	0,301	1,000	0,539	0,046
Comp 12	0,311	0,260	0,393	0,283	0,356	0,403	0,383	0,423	0,381	0,158	0,539	1,000	0,022
Nota	-0,078	0,067	0,038	0,016	0,121	-0,051	-0,002	0,004	-0,033	0,036	0,046	0,022	1,000

Fuente: resultados del análisis de los datos con el SPSS, 2012.

De acuerdo con los datos de la tabla 2, se muestra que la correlación de Pearson entre las doce competencias es positiva. Además, entre la mayoría de competencias esta correlación es alta, pues es superior o igual a 0,300. En ocho casos esta correlación es moderada, porque supera el 0,200 pero es inferior a 0,300. Estas correlaciones son entre las competencias 2 y 1, 10 y 1, 10 y 2, 10 y 3, 10 y 9, 12 y 2 y 12 y 4. Además el grado de asociación de usar las TIC en la clase (competencia 10) con considerar los conocimientos previos (competencia 1), saber de Matemática (competencia 2), partir de los errores de los estudiantes (competencia 3) e informar e implicar a la familia de los estudiantes (competencia 9), es baja.

El grado de asociación más bajo se presenta entre las competencias utilizar las TIC (competencia 10) y considerar la diversidad (competencia 12) en la desarrollo de la clase. La correlación más alta (0,699) se presentó entre las competencias 6 y 8, es decir, el grado de asociación entre concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y las posibilidades de los educandos y suscitar el deseo de aprender, explicitar la relación con el conocimiento, el sentido del trabajo escolar y desarrollar la capacidad de autoevaluación en el estudiante, es alto.

En las indicaciones del cuestionario se les solicitaba a los estudiantes juzgaran el grado de importancia de las doce competencias para un profesor de Matemática, no precisamente el que actualmente le estaba brindado clases en undécimo año. Esta indicación se evidencia que fue bien entendida por el estudiantado, porque las correlaciones de las doce competencias y la calificación que debían asignarle a su docente de Matemática fueron muy bajas e incluso en algunos casos fueron negativas. Ello también indicaba que el grado de asociación entre las doce competencias y la calificación fue bajo y en algunos casos presentó una direccionalidad contraria.

La única competencia que se asocia levemente con la calificación es la de construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas debe estar presente. Para comprobar la dirección de esta asociación se realizó un análisis lineal múltiple.

Análisis de regresión lineal múltiple

Para el presente estudio se estableció como variable dependiente "*¿qué nota global le daría usted a su actual profesor(a) de Matemática?"*, entendiéndose esta como la calificación asignada por el estudiantado al docente que en ese momento le estaba dando clases de Matemática en undécimo año. En cuanto a las variables independientes, originalmente se estipularon 15, a saber, *ocho competencias (se excluyeron del análisis cuatro competencias que tenían una correlación negativa con la variable independiente, ver cuadro # 2, estas fueron las competencias 1, 6, 7 y 9), sexo del estudiante, lugar donde terminó la escuela primaria, ¿Está repitiendo undécimo año?, ¿Le gustaría seguir recibiendo clases con su actual profesor(a) de Matemática, Horas de estudio de Matemática por semana, Sexo del profesor de Matemática y edad en años cumplidos del estudiante*. Sin embargo, como "en la realización de un análisis de regresión es habitual partir de una serie amplia de variables independientes (o predictorias)" (Cea, 2002, p. 108) se tomaron las decisiones siguientes:

- Mantener tal y como fueron definidas las variables: *Edad en años cumplidos del estudiante, las ocho competencias* y *Horas de estudio de Matemática por semana.*
- Recodificar las siguientes variables: *sexo del estudiante (0=Femenino y 1=Masculino), Lugar donde terminó la escuela primaria (0=Escuela pública y 1=Escuela privada), ¿Está repitiendo undécimo año? (0=Sí y 1=No), Sexo del profesor de Matemática (0=Hombre y 1=Mujer) y ¿Le gustaría seguir recibiendo clases con su actual profesor(a) de Matemática? (0=Sí y 1=No).*

Lo anterior significó que cada análisis de regresión múltiple se realizó con diez variables independientes o predictorias de un nivel de medición de razón y cinco variables con un nivel de medición nominal. Uno de los objetivos principales de todo análisis de regresión múltiple es seleccionar un grupo de variables que demuestren una contribución significativa a la predicción de la variable dependiente, es decir; "se busca un modelo sencillo, *parsimonioso* y, a la vez, fácil de interpretar" (Cea, 2002, p. 108). Para ello se debe aplicar uno de los tres procedimientos de selección de variables predictorias: inclusión secuencial de variables "hacia delante" ("forward"), eliminación progresiva de variables "hacia atrás" ("backward") o el procedimiento "paso a paso" ("stepwise") de inclusión y eliminación de variables.

Para el presente análisis se decidió realizar el tercer procedimiento: "paso a paso", pues los dos primeros "pueden considerarse casos especiales del tercer procedimiento, que es más utilizado" (Cea, 2002, p. 109). Es más, este tercer procedimiento es una combinación de los dos primeros, es decir, es un procedimiento de selección "hacia adelante" que incorpora los criterios de eliminación "hacia atrás".

Ecuación de la regresión múltiple

Con base en los resultados del análisis hecho con el SPSS, la ecuación de la regresión múltiple fue:

$$Y = 68{,}093 - 20{,}107\ SeguirClasRecod + 0{,}613\ Competencia\ 5$$

De la ecuación de la regresión múltiple anterior se puede interpretar lo siguiente:

- De las 15 variables independientes, tan solo 2 de ellas explican o predicen la calificación asignada por el estudiantado a su docente de Matemática. Recuérdese que esta calificación está dada de 1 a 100.
- Al valor 68,093 se le llama constante y representa el punto del hiperplano que interseca el *eje y*. Este valor denota el valor promedio de la variable dependiente cuando el valor de las variables independientes es cero.
- La variable predictoria SeguirClasRecod se encuentra negativamente relacionada con la calificación del docente de Matemática, pues su coeficiente es negativo.
- La variable predictoria Competencia 5 se encuentra positivamente relacionada con la calificación del docente de Matemática, pues su coeficiente es positivo.

Coeficiente de determinación múltiple

El coeficiente de determinación múltiple indica la proporción de varianza en la variable dependiente estadísticamente explicada por el conocimiento de las dos (o más) variables independientes. Él se define como el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple y constituye una medida de proximidad relativa empleada en el análisis de regresión múltiple para evaluar la bondad de ajuste del modelo.

El rango de valores que puede tomar el coeficiente de determinación múltiple oscila entre 0 y 1. Para Cea (2002) es de uno, entonces se dice que el modelo de regresión explica completamente la varianza de la variable dependiente, en caso contrario, si su valor es 0, entonces denota que el modelo de regresión carece de poder predictivo. Para determinar el porcentaje de la variable dependiente que es explicada por las variables independientes, se multiplica el coeficiente de determinación múltiple por 100.

El coeficiente de determinación múltiple del análisis de regresión múltiple fue 0,430, lo cual indicaba que las 2 variables independientes seleccionadas en el modelo de regresión múltiple logran explicar el 43% de la variable dependiente. Este es un porcentaje bastante alto, sobre todo para análisis en las ciencias sociales, e indica que las variables predictorias son bastante buenas, es decir, son buenas predictorias de la calificación que los estudiantes les asignan a sus docentes de Matemática.

Conclusiones

En el presente trabajo se definieron doce competencias que deben tener un docente de Matemática y todas ellas fueron importantes para los estudiantes, es decir, para los estudiantes seleccionados un docente de Matemática de undécimo año que trabaje en un centro educativo de secundaria debe evidenciar tener estas doce competencias, aunque unas en mayor medida que otras. Esta es una conclusión muy importante porque confirma que la posición de teórica de Philippe Perrenoud (2004) y de otros autores (los cuales han desarrollado sus teorías en el ámbito internacional), tiene vigencia en el contexto costarricense y es validada por el estudiantado.

Para los estudiantes la competencia más importante fue que el docente de Matemática demuestre un amplio domino de los conocimientos matemáticos de secundaria, es decir, para el estudiantado lo prioritario fue que el docente de Matemática sepa de Matemática y lo evidencie. Igualmente para Moreira (2001), la profesionalidad es una característica de orden laboral que supone el dominio de varios aspectos, dentro de los cuales destaca el dominio de los conocimientos teóricos propios de la asignatura.

En un segundo grado de importancia, los estudiantes apuntaron las siguientes 7 competencias:

- Concebir los errores de los estudiantes y los obstáculos en el aprendizaje como oportunidades para desarrollar aprendizajes significativos.
- Construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente. Estimula el razonamiento, el análisis, la inferencia lógica y la conceptualización en las clases de Matemática.
- Propiciar una cultura de paz, en la cual se prevenga la violencia.
- Concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y las posibilidades de los educandos.
- Ofrecer una educación en la tolerancia y el respeto a las diferencias de todo tipo, ser categórico en el repudio y crítica a todo prejuicio y discriminación de sexo, etnias o credo religioso.
- Elaborar y hacer evolucionar los dispositivos de diferenciación, ser sensible ante la diversidad. Practicar el apoyo integrado (cooperación activa) y trabajar con estudiantes con grandes dificultades.
- Suscitar el deseo de aprender, explicitar la relación con el conocimiento, el sentido del trabajo escolar y desarrollar la capacidad de autoevaluación en el estudiante.

Estas competencias demandan en el docente una buena formación inicial y una constante capacitación. En este marco, Vera Elizondo (2006) recomienda que la capacitación docente debe ser continua y permanente. Igualmente, la formación permanente es un punto fundamental para mejorar las prácticas educativas docentes. Para Marchesi (2007) el docente debe interesarse por el conocimiento que pretende que sus estudiantes aprendan y debe relacionar lo que se aprende en el aula con lo que el estudiante vive fuera de ella. Además, apunta que un buen docente debe ser capaz de facilitar el diálogo, la participación y la colaboración de sus estudiantes.

En un tercer grado de importancia, los estudiantes apuntaron las siguientes 3 competencias:

- Informar e implicar a la familia de los estudiantes.
- Tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para desarrollar experiencias de aprendizaje.
- Utilizar las TIC en la desarrollo de la clase.

Estas tres competencias, aunque menos importantes que las anteriores según el estudiantado consultado, igualmente tuvieron calificaciones altas dadas por los estudiantes, ello muestra que no se debieran de obviar en la labor docente. Por ejemplo, para Perrenoud (2004) ellas deberían ser tomadas en cuenta por los docentes cuando tienen que dar clases, en especial en este nuevo siglo en el cual las TIC forman parte de la cotidianidad del estudiantado.

En un cuarto grado de importancia se encontraba la competencia "Implicar al estudiantado en actividades de investigación o en proyectos educativos matemáticos". Es decir, para los estudiantes existieron otras cosas más importantes en las cuales debe enfocarse el docente en sus clases que realizar investigaciones y proyectos. A pesar de ello, no fue una competencia que según los estudiantes debiera estar ausente en las clases de Matemática, pues su grado de importancia dado por el estudiantado consultado fue 66,7%.

El grado de asociación entre las doce competencias fue alto y en algunos casos, moderado. Esto muestra que las doce competencias estuvieron relacionadas entre sí. Esta situación la confirman algunos autores, para quienes es muy importante el desarrollo de competencias en los docentes y que estas no tengan un comportamiento aislado en el desarrollo del acto educativo.

El querer continuar recibiendo clases con su actual docente de Matemática y que el docente construya y planifique en sus clases dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente inciden en la calificación que le asignan los estudiantes a sus profesores de Matemática de undécimo año. Esto se constató mediante la realización de un modelo de regresión lineal múltiple, el cual mostró evidencias de validez, al cumplirse los supuestos de la regresión.

La calificación global en una escala de 1 a 100 que le asignaría la población estudiantil matriculada en undécimo año de los cuatro centros educativos seleccionados de la Dirección Regional de Educación de Occidente a sus docentes de Matemática, se puede predecir en aproximadamente un 43% mediante el grado de importancia que le confiere el alumnado a la competencia “Construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas, en la cuales la resolución de problemas está presente. Estimula el razonamiento, el análisis, la inferencia lógica y la conceptualización en las clases de Matemática” y al interés estudiantil por seguir recibiendo lecciones con su actual profesor de Matemática. Es decir, mediante un modelo de regresión lineal múltiple se pudo constatar que las anteriores dos variables independientes son buenas predictorias de la variable dependiente.

Los resultados producto de la aplicación del cuestionario, fueron muy confiables, pues el coeficiente “Alfa de Cronbach” superaba el 0,9. Esto indicó que el uso de estos resultados para la toma de decisiones fue confiable.

Bibliografía

Andere, E. (2011). *La cultura del aprendizaje. Hogar y escuela del siglo XXI*. México: Eduardo Andere Martínez.

Beneitone, P., et al. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina. Informe final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. Bilbao, España: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen.

Cano, E. (2007). *Cómo mejorar las competencias de los docentes. Guía para la autoevaluación y desarrollo de las competencias del profesorado*. Barcelona: GRAÓ.

Cea D´Ancora, M. (2002). *Análisis multivariable. Teoría y práctica en la investigación social*. Madrid, España: Síntesis.

Elizondo H., V. (2006*). Competencias profesionales –genéricas y específicas- de los y las docentes de las áreas de Español y Matemática del Liceo Dr. Vicente Lachner Sandoval. Proyecto de Investigación para optar por el grado de Magíster en educación con énfasis en Administración Educativa*. Universidad de Costa Rica, Sistema de Estudios de Posgrado, Maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Administración Educativa, San José, C.R.

González, M. & Álvarez, Y. (2012). La formación de competencias profesionales del profesor: las competencias investigativas. *Revista Electrónica de Desarrollo de Competencias* (REDEC). 5(1). Enero-Junio, Universidad de Talca

Marchesi, A. (2007). *Sobre el bienestar de los docentes. Competencias, emociones y valores*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Moreira Mora, T. E. (2001). Percepciones sobre la formación docente y su posible articulación con la enseñanza de la matemática, un estudio de casos. *Revista Educación*, 25(1), 53-66.

Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. *Revista Praktika*, 23, 39-47.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Perrenoud, P. H. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona, España: Graó.

Romero, N. (2005). ¿Y qué son las competencias? ¿Quién las construye? ¿Por qué competencias?. *Revista Educar*, Octubre – Diciembre, 9-18.

Sierra, G. (2000). Una aproximación pedagógica para formar competencias. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, 48, 28-39.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Complex adaptive systems and quantitative reasoning in an interdisciplinary STEM mathematics classroom

Robert **Mayes**
Department of Teaching and Learning, Georgia Southern University
United States of America
rmayes@georgiasouthern.edu
Kania **Greer**
Institute for Interdisciplinary STEM Education, Georgia Southern University
United States of America
kagreer@georgiasouthern.edu
Deborah **Walker**
Institute for Interdisciplinary STEM Education, Georgia Southern University
United States of America
dwalker@georgiasouthern.edu

Overview

In this presentation we will share outcomes from the Real STEM project, which provides professional development for rural teachers in the Georgia Coastal Plains supporting implementation of interdisciplinary STEM courses as well as STEM modules in mathematics and science courses. Real STEM includes a number of innovative student-active strategies for teaching including: Understanding by Design (UbD) approaches to teaching for understanding, problem-based learning (PBL), place-based education (PBE), complex adaptive systems (CAS) thinking, and quantitative reasoning (QR). QR is the mathematical underpinning of the projects. The projects are ongoing so we will report our results on impact on teacher practice and student learning to this point. We will conclude with a discussion of how the projects may address issues of engagement for rural, low socio-economic status student populations in STEM in Central America and the Caribbean.

Key words: STEM education, quantitative reasoning, complex adaptive systems thinking, problem based, place based

Introduction

Real STEM is a collaboration of four rural school districts in the Georgia Coastal Plain with Georgia Southern University and multiple research institutes. The research institutes include the Skidaway Institute of Oceanography, the Sapelo Island National Estuarine Research Reserve, the Southeastern Natural Sciences Academy, the Ossabaw Island Education Alliance, and the Gray's Reef Marine Sanctuary. The purpose of the collaborative is to develop interdisciplinary STEM courses and modules for implementation in the partner high schools. In spring 2013 the collaborative developed modules which were integrated into existing high school classes. The modules provided an opportunity for the teachers to test out implementing interdisciplinary STEM approaches. In summer 2013 the teachers participated in field campaigns with STEM faculty from Georgia Southern University and the research institutes, to determine complex adaptive systems problems which would drive an interdisciplinary STEM research course to be offered in the 2013-14 academic year. Interdisciplinary STEM professional learning communities of teachers were established at each of the partner school districts to collaborate on development of the course. The expectation is that this course will impact not only the interdisciplinary course, but the mathematics and science courses of the teachers in the professional learning community.

Why should a program being conducted on the Georgia Coastal Plains be of interest to this program? The Central America and Caribbean education systems and the United States education system seem to be vastly different entities; however, many of the barriers impeding students in Central America and the Caribbean from continuing their education (poverty level, rural issues of access and transportation, academic skill, and relevance) are similar to the barriers to education in the rural areas of the United States, particularly in the Southern U.S. The common question for us is how do we make STEM education relevant to these traditionally under-represented populations in rural areas? How do we encourage more students to pursue STEM careers and become STEM literate citizens who can make informed decisions about grand challenges facing their generation? How can we improve the quality of life for students in rural areas of the United States, Central America, and the Caribbean?

Literature review

A desired outcome of student learning is the apt and effective application of content in complex, real-life situations. Only through use does translating knowledge to solve practical problems become efficient, spontaneous, and effortless (Arndt, 2006). Integrating systems thinking into learning has gained traction as a major movement in education, especially for understanding physical phenomena. It has been applied in the fields of engineering, health behavior and education, medicine, and science with documented efficiency and sustained benefits (Swanson et al., 2012). Its inclusive, cyclic design allows holistic visualization of problems and solutions relevant to many disciplines and communities (BeLue, Carmack, Myers, Weinreb-Welch, & Lengerich, 2012). Systems thinking is inherently interdisciplinary, with mathematics (QR) playing a central role in allowing students to make data-informed decisions.

According to Paul West, writing for the Jamaica Gleaner (2013, p. 4), an "essential component [to improving STEM education] should be education and training," of both teachers and students, from the primary level through the tertiary levels of education. This training would have to be focused on math and science and should emphasize ways of making these topics relevant to students. This is not just applicable to Jamaica but to students across Central America and the Caribbean. We propose that in order to make learning relevant it must begin by teaching for understanding (UbD) and not skill acquisition, be driven by problem-based learning (PBL) involving students in exploring authentic real-world problems, and engage students through place-based education (PBE) which ties the problem to their community or place (Figure 1). While PBE ties the problem to place, we look for connections to grand challenges that require the student to explore connections with regional or global problems. For example, the eight grand challenges in environment identified by the National Research Council, includes biogeochemical cycles, biological diversity and ecosystem functioning, and hydrological cycles. Such grand challenges are by nature interdisciplinary, complex adaptive systems (CAS). Complex Adaptive Systems have also been applied to learning since the mid 1980's (Dodder and Dare, 2000; Davis and Simmt, 2003); however, its implementation has not been widespread.

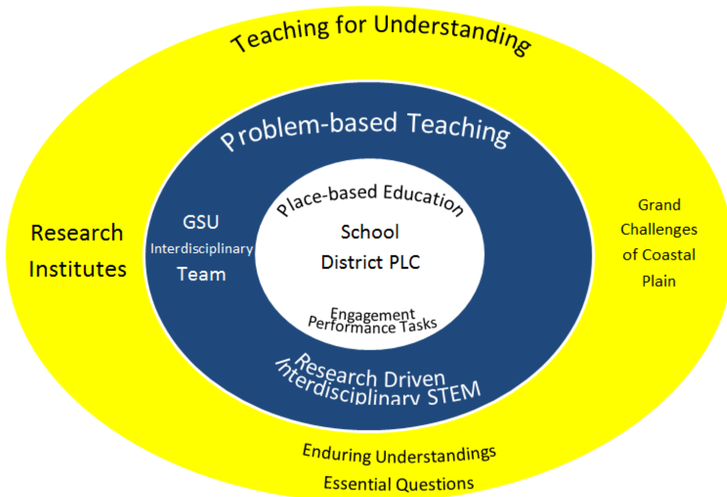


Figure 1: UbD, PBL, and PBE Focus

The grand challenges that serve as the driver for real-world problems in the Real STEM project require students to work within complex adaptive systems. CAS approaches to education are described as "balanced between order and anarchy," consisting of a "network of agents…working in parallel" and "evolving with [in their] environment" to produce an emergent flexible order with "a future that is hard to predict" (Dodder and Dare, 2000, p. 2) and allows for "global patterns of behavior to become apparent" (Lansing, 2003, p.185). Unfortunately, the change to systems thinking in education has been slow, as we still teach in subject silos rather than across curriculum with truly interdisciplinary and relevant learning for all students (Jacobson and Wilenksy, 2006). Lack of systems thinking across curriculum leaves students struggling to find unifying links between the individual elements within a curriculum (Jacobson and Wilensky, 2006). The result is that students turnoff and tune out to STEM, including mathematics. They simply do not see the importance of mathematics in their place.

As a subsystem within a system a classroom becomes a multidimensional set of interactions where the students interact and cooperate to solve problems and understand the world (Mennin, 2007). According to Davis and Simmt (2003) in order to learn to think from a systems perspective five conditions must be met in the classroom: "a) internal diversity, b) redundancy, c) decentralized control, d) organized randomness, and e) neighbor interactions" (p. 147).

Internal diversity

In order for the system to function well there must be a diversity of experiences present within the classroom. This allows for "variation" among the disparate parts (ie: the students) (Davis and Simmt, 2003, p 148) which lends itself to the novel solving of problems. Internal diversity allows for classroom activities to be adapted by students to focus on their interpretations (Davis and Simmt, 2003). Interdisciplinary problems allow students with diverse interests and abilities to interact within STEM and see mathematics through QR as having utility.

Redundancy

At first glance it seems that redundancy and internal diversity are at odds with one another. As internal group diversity focuses on the variety of experiences that students bring to the classroom, we speak of redundancy as a "sameness among [the student's]…experience, expectation, and purpose" (Davis and Simmt, 2003, p. 150). Having a shared community allows for "interactions among [the students] and allows for some students to "compensate for others' failings" (Davis and Simmit, 203, p. 150). Shared community is essential in solving real-world interdisciplinary problems and provides peer support and motivation for mathematics.

Decentralized control

In order for an understanding of systems thinking to permeate student learning, the teacher must give up control and allow students to self-manage their learning, individually or in groups (Davis and Simmt, 2003). It is the capacity to "disperse control" rather than "maintaining control" (Davis and Simmt, 2003, p. 153). This allows for learning to be neither fully teacher-centered nor fully student-centered but rather becomes a "shared insight" (Davis and Simmt, 2003, p. 153). The teacher should focus on establishing a "classroom collective" (Davis and Simmt, 2003, p. 164) rather than a set of individual learners or small groups of learners. Real STEM allows students to select problems within a frame of grand challenges, providing them the opportunity to engage in shared insight with their teachers. In addition we bring scientists into the conversation to assist teachers and students in refining their research questions, methods, and analysis.

Organized randomness

Organized randomness allows for a balance between the redundancy of shared qualities and the diversity of experiences that students bring to the classroom. It allows for rules to determine boundaries but not the "limits of possibility" (Davis and Simmt, 2003, p. 154). Organized randomness allows for classroom learning to be "relaxed [or] rigid" depending on the needs of the students (Davis and Simmt, 2003, p. 155). The Real STEM focus on quantitative data analysis as a means of moving students from qualitative discourse to quantitative discourse is an example of setting rules for both teachers and students in their research.

Neighbor interactions

In order for students to truly learn, they must be able to interact and affect each other's activities and learning. They need to be able to share "ideas, hunches, queries, and other manners of representation" (David and Simmt, 2003, p. 156). This allows for a community to develop within the classroom as concepts cross each other and patterns emerge (Mennin, 2007).

However, it should be noted that the amount of interaction is more important than the type of interaction (ie: pod seating vs. traditional seating). There must be time allowed for depth of interactions to take place in order for students to truly collaborate and cooperate. The Real STEM project requires teachers to use a performance task as a major component of evaluation. A performance task is an open-ended authentic situation that requires the student to demonstrate understanding through a performance, such as a presentation to experts on their findings. This centers learning of STEM with the students as they interact in collaborative groups on the performance task.

In addition, CAS thinking is an ideal platform to expand minority participation (including low socio-economic and other under-represented groups) in mathematics and the sciences in Central America, the Caribbean and the United States. The very nature of CAS thinking encourages the expansion of learning beyond the classroom by moving students from local to global situations. Because students bring a variety of experiences (Mennin, 2007) with them to the classroom, they can “construct beliefs about how things in the world behave” (Jacobson and Wilensky, 2006, p.20). By involving students in authentic, relevant, and engaging projects their understanding of systems becomes much more powerful leading to more collaboration and cooperative learning (Jacobson and Wilensky, 2006).

Mathematics plays a central role in implementing interdisciplinary CAS approaches into STEM courses. A fundamental tenet of CAS is that “the system is not just the sum of its parts, but the product of the parts and their interactions” (Davis and Simmt, 2003, p. 138). As Minnon (2007) further states, if one breaks down a CAS System into its parts it will not “provide an accurate picture of a group that is strongly interconnected” (p. 310). Mathematics provides the tools for building a quantitative account of the connection between the parts of a system. A focus on systems calls for modeling and model-based reasoning, which involves developing and using various forms of representation, feedback, and redesign (Lehrer & Schauble, 2002). Modeling enhances science education by broadening processes beyond conducting experiments. The application of mathematics and statistics within a STEM context is fundamental to a modeling based approach, providing quantitative data-based evidence to support qualitative arguments.

We refer to the application of mathematics within a context, including modeling, as quantitative reasoning. *Quantitative reasoning* (QR) is mathematics and statistics applied in real-life, authentic situations that impact an individual’s life as a constructive, concerned, and reflective citizen. QR problems are context dependent, interdisciplinary, open-ended, authentic tasks that require critical thinking and the capacity to communicate a course of action (Mayes, Peterson, & Bonilla, 2013). Mayes, Forester, Christus, Peterson, Bonilla, and Yestness (2013) have developed a learning progression for QR that has four fundamental components:

- Quantification act (QA): mathematical process of conceptualizing an object and an attribute of it so that the attribute has a unit measure, and the attribute’s measure entails a proportional relationship with its unit
- Quantitative literacy (QL): use of fundamental mathematical concepts in sophisticated ways to compare, contrast, and combine the quantified variables
- Quantitative interpretation (QI): ability to use models to make predictions and discover trends, which is central to a person being a citizen scientist
- Quantitative modeling (QM): ability to create representations to explain a phenomena

These components interact within a QR cycle (see Figure 2) when students engage in the process of science as model-building. QA is the process of mathematizing the context by identifying objects, their attributes, and assigning measures. The resulting variables can be operated on mathematically or statistically if a student possesses sufficient QL. Citizens are often provided models to support a political viewpoint, requiring QI to make informed decisions. Finally, while citizens may not build models, it is important that students engage in QM so they understand that models are simplified versions of complex systems. Otherwise as future citizens they may fail to question the authority of models.

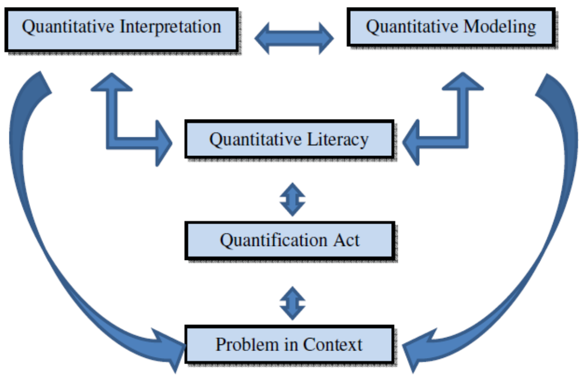


Figure 2: QR Cycle

Mathematics and QR tie into CAS in two fundamental ways. First, model-based reasoning is essential in CAS thinking and developing models is intensely mathematical. This includes quantifying variables from the real-world context, creating representations which are often quantitative such as graphs, statistical representations, and equations, and interpreting quantitative models. Second, the ability to reason quantitatively is essential when developing data-based arguments. Quantitative reasoning (QR) includes the development of quantitative literacy, the ability to interpret quantitative models, and even the ability to create quantitative models. According to Lutsky (2008), there are four major reasons for teaching quantitative reasoning to both teachers and students: QR will improve student reasoning, QR will improve student ability to construct, communicate, and evaluate arguments, relevant QR for students is "primarily simple and non-technical", and QR will bleed over to be relevant across the curriculum.

Pairing QR with CAS is a natural fit because "numbers are a staple of the accounts of world events, environmental trends, financial matters, consumer choices, health decision making, assessments, economics, science, and everyday issues" (Lutsky, 2008, p. 60). In essence numbers are widely used in everyday life and help us, among other things, to grasp complex concepts, see patterns, and facilitate discussions and arguments. Numbers have the power to inform and influence and it is imperative that all citizens of the world know how to understand numbers and think critically about them (Lutsky, 2008). In addition, Jacobson and Wilensky (2006) state that when paired together, CAS and QR become "key conceptual tools" for use in modeling and simulation of systems both real and artificial (p. 13).

Methodology

We believe our Real STEM project could be a model for working with the Central American and Caribbean education systems to improve STEM teaching and learning. Real STEM created a collaborative among Georgia Southern University, regional research institutes and school district partners to develop integrated STEM performance tasks that engage students in applied learning through real-world challenges of environment and energy that impact their local communities. Our goal was to connect students in the classroom with scientists in the field to have conversations about real-world problems impacting the Georgia coastal plain. The students will investigate these problems from their perspective, relating it to associated problems within the place they live. They will then expand their findings from local place to regional or even global grand challenges, using databases compiled by the regional research institute as well as national or global databases. While the intent was to provide teachers and students freedom in selecting the STEM problem to be studied, in collaboration with STEM researchers, a number of expectations for the modules were provided. The expectations include: the module must be interdisciplinary, including science, technology, engineering, and mathematics perspectives; the problem must be place-based, but extendable to regional, national, or global grand challenges; the task must engage students in conducting research in which they collect their own place-based data; the students must complete a performance task as a major component of the assessment in which they report their findings to a group of experts; and students must provide quantitative accounts which provide for data-based informed decisions.

To support the teachers in the project, we proposed three teams of professionals: Team 1 consisted of Research Scientists who identified research being conducted in the Georgia coastal plain which served as potential research problems for students; Team 2 consisted of an interdisciplinary team of Georgia Southern University STEM and STEM education faculty who assisted in transition of those research topics to a level that is accessible by secondary school students; and Team 3, the implementation team, which consists of Professional Learning Communities (PLC) of teachers from multiple STEM disciplines who work together within a school to develop and implement an interdisciplinary curriculum.

Results and conclusions

The implementation of the project consists of three goals: develop integrated STEM modules, implement the STEM modules in an interdisciplinary STEM pathways course, and evaluate the impact of the modules. In Spring 2013 the teachers developed a one to two week interdisciplinary STEM module and implemented it in an existing science course. This provided the PLCs the opportunity to pilot the module and test problem-based learning, place-based education, and Understanding by Design principles. In Summer 2013 the three teams collaborated on identifying research problems that would serve as the basis for the 2013-14 academic year interdisciplinary STEM courses. These are complete courses where students will work in collaboration on real-world authentic place-based research problems from an interdisciplinary perspective. We are currently finishing up the course development and have begun implementation of the courses in Fall 2013. For the course development teachers have had to develop research questions, curriculum, and an open ended performance task for students. Using the Understanding by Design Framework they are working to identify enduring understandings and applying a Backwards Design perspective to develop a curriculum. They have met with scientists from both Research Institutions and the University to hone their plans and develop solid research questions.

In order to compare teacher learning, we have collected and run preliminary descriptive statistics (Figure 3) on the data collected from the Concern, Confidence, and Commitment self-rating rubric from teachers throughout the professional development series this summer. The self-rating rubric is a Likart scale rubric on a scale of 1-Low to 5-High in regards to how teachers felt at the beginning and end of the professional development. It is important to note that the Concern scale is read in reverse of the Confidence and Commitment scale (one would expect higher levels of concern in the beginning and lower levels after the intervention). In regards to place-based education, initially teachers felt higher levels of concern about implementing PBE which led to lower levels of confidence and commitment. After the professional development on place-based education their concern levels dropped on average three points, and their confidence and commitment rose four points. For the professional development on problem-based learning, teachers initially had high levels of concern about implementation but also had relatively high levels of confidence and commitment to implementing. After the training on problem-based learning, concern dropped three points, while confidence rose five points and commitment rose five points. The results on teaching interdisciplinary STEM education were perhaps the least prone to change, with teachers initially feeling moderate levels of concern and afterwards only decreasing in concern two points. Their confidence did rise by five points and their commitment rose by three points, but overall there wasn't much movement on this subscale. For the Teaching for Understanding professional development, teachers showed decreases in levels of concern (from 12 points to 10) while their confidence and commitment each improved five points.

Table 1

Concern, confidence, commitment

	Concern		Confidence		Commitment	
	Before	After	Before	After	Before	After
Place-based Education	9	6	7	12	10	14
Problem-based Learning	12	9	11	16	14	19
Interdisciplinary STEM Teaching	8	6	9	14	11	14
Teaching for Understanding	12	10	18	23	19	24

Source: private survey, 2013

Even though we are only halfway through our project we have had many opportunities to evaluate the project and refocus our thinking. It has become obvious that as we were encouraging systems thinking for students, we took for granted that our teachers were able to think from a systems perspective. This was not always the case. For example, much of the research that is being done on the Georgia coastal plain is on the coast, but some of our school districts are inland (as much as 100 miles). We had to repeatedly stress to teachers and scientists alike that what happens on the coast does impact students 100 miles away as well as vice versa and help teachers learn to tie in the local place to a regional system. In addition, we learned that many of the data analysis techniques that scientists were using were beyond the understanding of the teachers in the project. Due to this there was often a disconnect, for teachers, between reading the data and interpretation of the data. For example, in a discussion with a teacher, we were talking about dissolved oxygen levels in the Savannah River. She was able to discuss learning from a scientist on how to measure dissolved oxygen, but she was unable to discuss why it was important to know those levels. It is essential that the data gathering be associated with a real-world problem in which the student is interested, such as the impact of dissolved oxygen levels on survival of a species. Despite these setbacks we have had great success with teachers in hands-on field campaigns. Encouraging teachers to get out of the classroom to investigate phenomena has been especially exciting.

In addition, with guidance, the teachers have expanded their systems thinking. For example, several schools are designing research questions concerning the health of a local river. Through the professional development, they were able to identify a greater purpose/impact of their study by looking at the role the river plays in the complete watershed. This scaled their thinking up to the system of a watershed (rivers to reefs), not just an isolated river. They were able to find a greater purpose for their original study by applying systems thinking.

The knowledge and skills gained by the teachers through the summer field experiences has reinforced the rationale of utilizing PBL and PBE pedagogy. Numerous times, the high school math teachers commented about appreciating the access to "real life" data that the research institutes collect. No more will they have to use artificially contrived numbers in their mathematics lessons. From the high level of teacher interest and engagement resulting from the field experiences, we expect this to carry over to the students.

Fostering collaboration between research scientists and high school students has not been without its challenges. Because research scientists are trained at a high level in their discipline, identifying appropriate entry points for content and skills for high school students/teachers has taken some work. As conversations have developed between our research scientist teams, our faculty team, and our PLC's, we are starting to overcome the gap. Through ongoing communication, smaller partnerships between experts and the teachers are beginning to develop. Teachers are becoming more comfortable in requesting input from the faculty and the scientists and the faculty and scientists are beginning to designate time and energy to working with the teachers and students.

We will share our experience of working with mathematics, science, and engineering teachers to develop and implement interdisciplinary STEM modules and courses. Intensive data collection on the Interdisciplinary STEM course offerings will take place in the Fall 2013 semester and we will share our most current data on the impact on both teacher practice and student learning. The preliminary teacher interviews and classroom observations indicate positive teacher response to working in interdisciplinary STEM professional learning communities and their interaction with scientists on identifying real-world problems. As the teachers further develop their modules and implement them in the fall, we will continue to track their development towards improved systems thinking and quantitative reasoning.

Main references and bibliography

Davis, B. & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education, 34,* 137-167. doi: 141.165.213.95

Dodder, R. & Dare, R. (20002). Complex adaptive systems and complexity theory: inter-related knowledge domains. *Research Seminar in Engineering Systems.* Retrieved from http://web.mit.edu/esd.83/www/notebook/ComplexityKD.PDF June 5, 2013.

Jacobson, M.J. & Wilensky, U. (2006). Complex systems in education: Scientific and educational importance and implications for the learning sciences. *The Journal of the Learning Sciences, 15(1)*, 11-34.

Lansing, J.S. (2003). Complex adaptive systems. *Annual Review of Anthropology, 32*, 183-204. doi: 141.165.213.95

Lehrer, R., & Schauble, L. (2002). *Investigating Real Data in the Classroom: Expanding children's understanding of math and science.* New York: Teachers College Press.

Lutsky, N. (2008). Arguing with numbers: Teaching quantitative reasoning through argument and writing. *Presented at Calculation vs.Contex: Quantitative Literacy and Its Implications for Teacher Education,* Racine, WI.

Mayes, R., Forrester, J. H., Schuttlefield Christus, J., Peterson, F., Bonilla, R. & Yestness, N. (2013). Quantitative reasoning in environmental science: A learning progression. *International Journal of Science Education,* DOI: 10.1080/09500693.2013.819534.

Mayes, R., Peterson, F., & Bonilla, R. (2013). Quantitative Reasoning Learning Progressions for Environmental Science: Developing a Framework. *Numeracy. January 2013.*

Mennin, S. (2007). Small-group problem-based learning as a complex adaptive system. *Science Direct*, *23*, 303-313. Doi: 10.1016/j.tate.2006.12.016

National Research Council. (2001b). *Grand Challenges in Environmental Sciences.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Schwarz, C.V., Reiser, B.J., Davis, E.A., Kenyon, L., Archer, A., Fortus, D., Shwartz, Y., Hug, B., & Krajcik, J. (2009). Developing a learning progression for scientific modeling: Making scientific modeling accessible and meaningful for learners. *Journal of Research in Science Teaching, 46*, 632-654.

Smith, G. A., & Sobel, D. (2010). *Place- and Community-Based Education in Schools (Sociocultural, Political, and Historical Studies in Education).* Routledge.

Strobel, J., & van Barneveld, A. (2009). When is PBL more effective? A meta-synthesis of meta-analyses comparing PBL to conventional classrooms. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, *3*(1), 44-58. Retrieved from http://docs.lib.purdue.edu/ijpbl/vol3/iss1/4/.

West, P. (2013). Cultivating a national agenda in STEM. *Jamaica Gleaner Online.* Retrieved from http://jamaica-gleaner.com/ June 5, 2013.

Wing, J. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35. [doi:10.1145/1118178.1118215]

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Construcción del pensamiento lógico matemático, programa "CENDI PARA TODOS"

Iliana **Roca** Benítez.
anailirb@hotmail.com
Centro de Desarrollo Infantil "Tierra y Libertad" No. 4.
México.
Damian Alejandro **Clemente** Olague.
Colegio Vizcaya, Centro de Estudios Universitarios Vizcaya de las Américas.
México.
damian.alex03@gmail.com
América del Carmen **Ortiz** Juárez.
Colegio Vizcaya, Centro de Estudios Universitarios Vizcaya de las Américas.
México.
ame_2210@hotmail.com

Resumen

Los primeros años de vida del niño se caracterizan por el rápido crecimiento, cambios que se ven notablemente influenciados por el medio circundante, y tener una importante significación para la formación de la personalidad de las futuras generaciones. El programa CENDI "Para Todos", traslada a las comunidades urbano marginales a un equipo de especialistas, con la función de orientar a la familia en actividades que potencialicen el desarrollo de sus hijos y supervisar las etapas de crecimiento a través de los especialistas, los que evalúan adecuadamente el crecimiento de los pequeños.

Con ello se pretende evitar que la estimulación temprana comience de manera tardía y se tenga un sesgo importante de niños que no participan en actividades de estimulación temprana desde su nacimiento o incluso antes de ésta. Así mismo, el propiciar del desarrollo de habilidades matemáticas mediante la vinculación de actividades lúdicas y lectoras.

Palabras clave: Construcción, Pensamiento Lógico matemático, Primera infancia, Educación inicial, Estimulación temprana.

Antecedentes

Los primeros años de vida del niño se caracterizan por el rápido crecimiento, cambios que se ven notablemente influenciados por el medio circundante, y tener una importante significación para la formación de la personalidad de las futuras generaciones.

Existen diferentes investigaciones en el mundo, entre las que destaca la realizada por la Dra. Anna Lucia Campos[1] en 2006, que señalan que la poda neuronal comienza desde el momento de nacer afectando el número de células cerebrales, las posibilidades de sinapsis entre ellas y la manera en cómo estas conexiones se establecen; de ahí la importancia de la estimulación temprana que ofrece la potenciación del desarrollo cognitivo que, sin lugar a dudas, repercutirá en la vida futura de los seres humanos. Pero no sólo la estimulación temprana favorece al desarrollo neuronal, también contribuye en la formación de las esferas de la personalidad: afectiva, cognitiva y motriz, que se forman en este período, generando niños más sensibles a su entornos social, capaces de resolver problemas, ser observadores y generadores de juicios propios, además de facilitárseles los procedimientos de metacognición entre otras cosas.

A pesar de que se reconoce socialmente que los niños que asisten a instituciones educativas tienen mayores habilidades y que la dinámica social empuja a los padres a llevarlos a casas de cuidado, guarderías o estancias, no se garantiza la asistencia o la estimulación no es la más adecuada, pues hay factores que ponen en riesgo el desarrollo óptimo de los niños y las niñas, tales como; la carencia de afecto (actividad directriz en los primeros años), planeación de actividades no dirigidas al alcance de los logros de desarrollo, desnutrición a consecuencia de los menús desbalanceados, poca preparación docente de las educadoras y asistentes educativas, atención oportuna del área médica, psicológica y pedagógica y el ingreso y tardío a las instituciones o centros de estimulación, pues el ingreso comienza a partir de los 2 años de edad promedio.

Con la finalidad de poder contribuir con la sociedad infantil y de crear espacios en dónde se ofrezca una atención de calidad a nuestros niños y niñas, se crean los Centros del Desarrollo Infantil (CENDI) “Tierra y Libertad” en el año 2004 con el objetivo institucional de *apoyar a la población de madres trabajadoras que tienen la responsabilidad directa de sostener el hogar y se ven en la necesidad de dejar a sus hijos e hijas bajo el cuidado de otras personas.* Así mismo, surgen con la finalidad de potencializar la Educación Inicial que hay en el Estado, generando programas educativos e instalaciones de vanguardia.

Los CENDI “Tierra y Libertad”, son instituciones educativas que pertenecen al Instituto de Educación Inicial del Estado de Colima y funcionan a través de gestiones de recursos públicos federales, apoyando a la educación a través de programas que favorezcan el desarrollo integral de los niños y las niñas; así pues, se preocupan por ofrecer educación integral desde la etapa pre-concepcional.

Es para los CENDI “Tierra y Libertad” una prioridad que los niños y las niñas que asisten cuenten con especialistas que evalúen los períodos del desarrollo y atiendan de manera oportuna los ámbitos que interfieren en el crecimiento, desde una visión multidisciplinaria: nutrición, pedagogía, psicología, salud y trabajo social.

[1] Presidente Asociación Educativa para el Desarrollo Humano

Por ello la Unión de Solicitantes “Tierra y Libertad”, Asociación Civil, del Estado de Colima, se ha dado a la tarea de apoyar y gestionar los recursos federales con los que se lleva a cabo la operación de estos Centros, así como de subsidiar las capacitaciones que el personal requiere para su formación continua. El Instituto de Educación Inicial del Estado de Colima está comprometido con la equidad y la justicia social, considerando la Educación Inicial, Preescolar y Primaria.

En estos centros se atiende a una matrícula, en los diferentes niveles educativos, de 1,590. De estos 300 corresponden a los niños que se encuentran en educación inicial (45 días a 2 años 11 meses). Sin embargo, los espacios no son suficientes para atender la demanda que solicita el ingreso a los CENDI de los diferentes municipios.

Por lo anterior y ante la preocupación de los CENDI “Tierra y Libertad” por dar equidad educativa y ampliar la cobertura en las niñas y niños del estado, se crea el programa de vías no formales **CENDI “Para Todos”.** Este programa con modalidad comunitaria, traslada a las comunidades urbano marginales del estado a un equipo de especialistas, el cual tiene la función de orientar a la familia en actividades que potencialicen el desarrollo de sus hijos y supervisar las etapas de crecimiento a través de los especialistas, los que evalúan adecuadamente el crecimiento de los pequeños.

Con ello se pretende también evitar que la estimulación temprana comience de manera tardía y se tenga un sesgo importante de niños que no participan en actividades de estimulación temprana desde su nacimiento o incluso antes de ésta. Así, la finalidad de impulsar un programa social como éste es poder generar una cultura de estimulación desde casa, alternándola con los días del programa, en donde participen, abuelos, padres, hermanos, haciendo que cada uno de ellos conozca la intencionalidad de las actividades de estimulación, la importancia y el manejo de las acciones instrumentales, los logros de desarrollo y sobre todo pueda identificar de manera oportuna las dificultades y problemáticas que se presenten a lo largo de la vida de los pequeños.

Los objetivos principales del programa son:

- Contribuir en el desarrollo integral de la niñez desde las diferentes etapas de la personalidad: afectiva, cognitiva, motriz, donde es vital la estimulación, el cuidado de la salud y la nutrición desde el nacimiento o incluso antes.
- Alcanzar los logros de desarrollo de manera oportuna con ayuda de la familia a partir de la estimulación del pensamiento, ante la resolución de problemas y el trabajo con actividades instrumentales propia de las actividades directrices de esta edad.
- Reconocer el papel que se le asigna al adulto, principalmente en el ámbito familiar. Pues es este quien ha de organizar, orientar y dirigir el proceso educativo de los niños y las niñas, qué deben lograr y cómo pueden alcanzarlo.
- Ampliar la cobertura de nuestro programa institucional, ofreciendo equidad de educación temprana a los niños que no reciben ningún servicio en materia de educación.
- General movimiento social, implementando la cultura en la sociedad sobre la importancia de la estimulación temprana desde el embarazo.

CENDI “Para Todos” corresponde a la modalidad de atención no institucional respondiendo a realidades para las cuales no fueron diseñados los sistemas formales, pero que comparten los mismos propósitos y principios de la vía institucional, variando la forma organizativa: el rol del docente, los escenarios donde se desarrolla, las estrategias y los medios que se emplean.

Además, reconoce, de la misma manera que la vía institucional, el papel fundamental de las condiciones de vida y la educación en el desarrollo de la personalidad del niño, en especial durante la etapa de 0-6 años. Es decir, el desarrollo armónico e integral de un ser humano dependerá en gran medida de cómo fue educado y atendido en su infancia temprana, ya sea en el entorno familiar o en una institución.

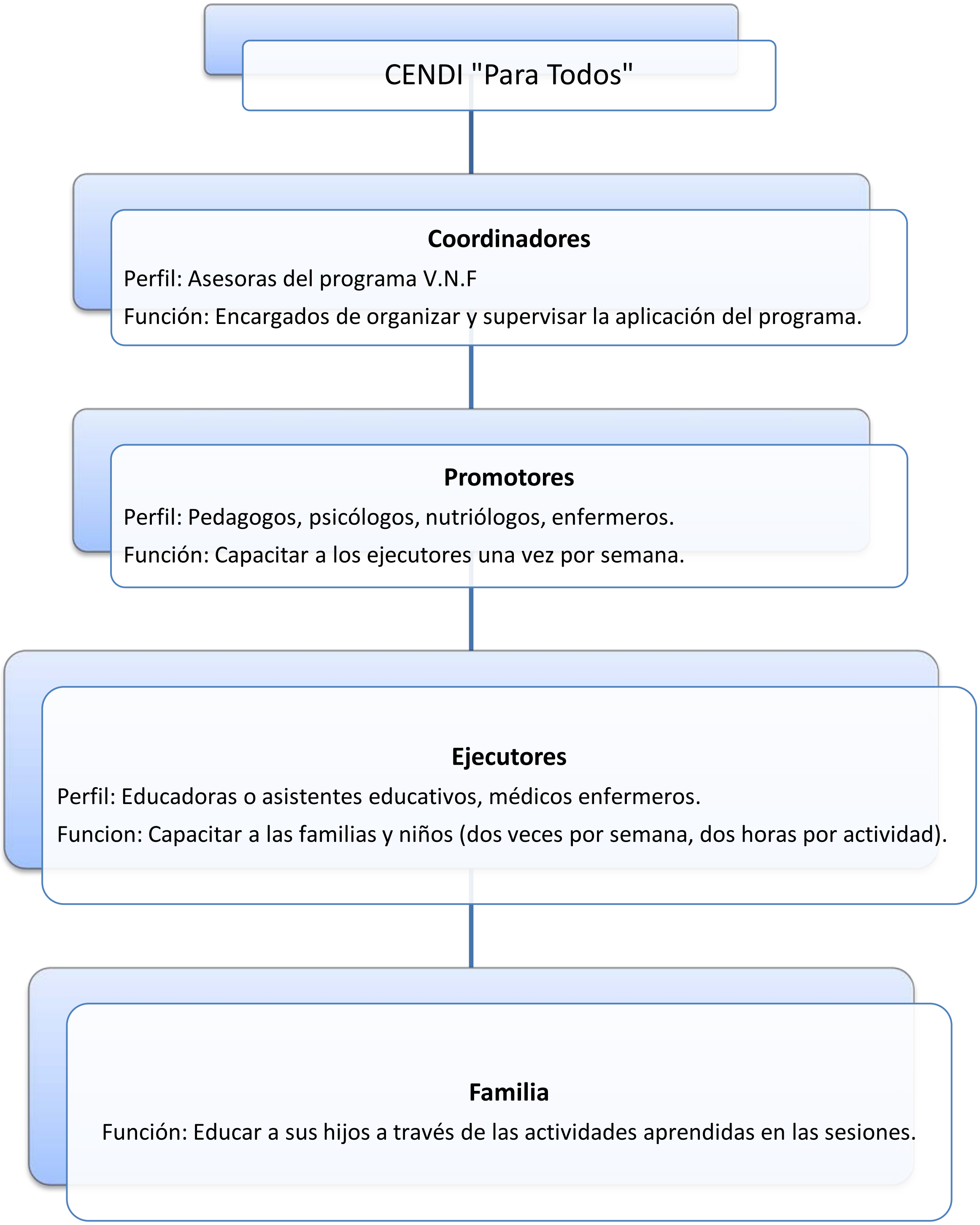
Por esta razón la inclusión de la familia -primera escuela- como uno de los pilares fundamentales es la de reconocer la importancia de su influencia en la educación infantil, pues, desde muy temprano, interviene en el desarrollo social, físico, intelectual y moral de los niños y las niñas, hecho que se produce sobre una base emocional muy fuerte, generando lazos afectivos, que sin duda, ayudan en la generación de una sociedad funcional, pero también contribuyen en la formación de niños con una mayor autoestima, habilidades intelectuales y la apropiación de los valores morales.

En cuanto a la organización, es la coordinación del programa CENDI "Para Todos" quién orienta, capacita y apoya en el desempeño de las ejecutoras o promotoras (equipo multidisciplinario de los CENDI de la vía formal), así como el trabajo con la familia.

La instalación y permanencia del programa requiere de una metodología de implementacion que no se puede oviar, pues es el registro (censo) de la población, los servicios con que cuenta, la cantidad de niños que no asisten a instituciones educativas, su plan de disfusión, entre otros, lo que permitirá que los padres de familia se acerquen por primera vez a conocer el programa.

La captación de nuestros niños se da en sus casas, a traves de la información proporcionada a los padres de familia; así, a nuestro programa acuden niños sin importar el sector social, condición económica o antecedente familiar. El único requisito es que los padres de familia, asistan con ellos a la actividad.

En las etas de crecimiento de los niños se fortalece de la relación que tenga con los agentes educativos que lo rodean, dejando un aprendizaje significativo y que marcará la pauta en su desarrollo. A partir de estas premisas es que el programa contiene una estructura interna en donde la participación de los especialistas permitirá no solo fortalecer las actividades de las ejecutoras, sino también la formación de la familia.



Mapa 1: Estructura interna del programa CENDI “Para Todos”

¿Cómo se organiza la participación de los niños y la familia en el Programa?

Los niños junto con sus familias asisten al CENDI a dos sesiones por semana, una hora y media. Participan en grupos, de máximo 20 niños, considerando que con la participación de un familiar por niño se convierten en 40 personas. Estos grupos se organizan por edades: 12-18 meses, 18-24 meses, 2-3 años, 3-4 años, 4-5 años y 5-6 años.

En las actividades que se realizan en la modalidad grupal participan siempre los niños y sus familiares por lo que se denominan **actividades conjuntas.**

El objetivo de las actividades conjuntas es influir de manera positiva en el desarrollo de los niños, pero fundamentalmente el de preparar a las familias para que aprendan a trabajar en sus casas los contenidos del Programa para lograr este desarrollo. Por ello, es imprescindible la asistencia sistemática de los familiares a estas sesiones de trabajo.

La actividad pedagógica tiene una duración de 10 a 15 minutos, con variación en la actividad. Ésta puede cambiar según el estado de ánimo del niño o niña y las condiciones que se consideran por la educadora para realizar dicha actividad. El tiempo restante se aprovecha para la estimulación del juego y/o actividades que tiene que ver con el ámbito de desarrollo personal.

Es importante también que los co-curriculares se integren en las actividades comunitarias realizando las actividades junto con las familias, por lo menos una por mes, siguiendo un rol que la coordinación asigne, lo que permitirá ofrecer a los padres de familia una alternativa más en la educación complementaria de sus hijos.

Algunas materias complementarias que se deben integrar al programa son:

- Natación
- Danza
- Educación Física
- Juegos autóctonos

A pesar de que el programa no favorece únicamente el pensamiento matemático, sino retomas las líneas directrices de desarrollo a través de la comunicación, la adquisición de las estructuras de la lengua materna, el juego de roles y simbólico, así como las habilidades y destrezas motoras finas y gruesas. Si es este uno de los elementos que con mayor peso se trabaja dentro de las actividades intelectuales pues da apertura a la conceptualización del mundo que lo rodea, la descripción de los objetos, las formas, lados, colores, texturas entre otros de los contenidos que posteriormente se describen.

CENDI “Para Todos” considera importante construir las bases del pensamiento matemático porque ayudará inicialmente en la generación de un conocimiento simbólico, el que será necesario para el desarrollo futuro del pensamiento pre-numérico, pre-lógico y pre-operacional durante la educación formal preescolar. Así mismo, la posibilidad de propiciar situaciones generadoras de conocimientos en los diversos aspectos del niño (Cardoso y Cerecedo, 2008; reeduca, 2009; Lasta, s.f.)

La experiencia de la práctica con los niños nos ha hecho descubrir cómo la matemática se relaciona con los demás contenidos, y nos hemos planteado la pregunta de ¿Por qué deberíamos dar mayor peso a la enseñanza de las matemáticas en estas edades?

El doctor Eugenio Geits, (2006: Párrafo 1), señala que

> Los niños, desde el día que nacen, son matemáticos. Constantemente están construyendo el conocimiento cuando interactúan mentales, física y socialmente con su ambiente y con los demás. Aunque los niños pequeños no puedan sumar o restar, las relaciones que hacen y su interacción con un entorno estimulante promueven en ellos la construcción de los cimientos y el armazón de lo que serán en el futuro los conceptos matemáticos. Incluso, hay alguna evidencia de que algunos conceptos matemáticos pueden ser innatos.

Gervarsi, (s. f.:2) señala que

> La importancia de la enseñanza matemática en la educación inicial se basa en la oportunidad actuar y posteriormente reflexionar sobre sus acciones: mediante el pensamiento, recuperar hechos que acaban de suceder, anticipar lo que podría producirse o tratar de prever. De modo que pueda confrontar una cantidad de hechos con los que se familiariza progresivamente, principalmente por frecuentación y además elaborar imágenes mentales, las que al relacionarlas y darles sentido permitirán que gradualmente estructure sus conocimientos”.

La educadora orienta a los padres a favorecer, desde un enfoque globalizador, la construcción de contenidos matemáticos cuando se les lee un cuento y se les pide que señalen la secuencia o hagan la seriación de los personajes, al realizar el conteo o describir la ubicación de los personajes en una lámina. Favoreciendo los contenidos como: secuencias, seriación, orientación espacial, identificación y discriminación de formas geométricas, acciones de correlación, reconocimiento de las propiedades de los objetos, color, forma, textura, entre otros.

La doctora Margarita Marín Rodríguez, (1999), en su publicación “El valor de los cuentos en la construcción de conceptos matemáticos”, hace referencia a la posibilidad captar la atención del niño e irlo involucrando en el pensamiento matemático favoreciendo con ello el juego simbólico y la imitación diferida, dando paso a las siguientes etapas de desarrollo cognitivo que señala Piaget.

Estas situaciones didácticas que tiene su origen desde un enfoque lúdico permiten crear un ambiente dónde los niños además de reflexionar, organizan, generan nuevas ideas y corrigen las anteriores, también se divierten y crean lazos afectivos con sus padres y sus coetáneos.

La realización de las actividades conjuntas incluye tres momentos fundamentales:

Organización de la Actividad Pedagógica.

1er. Momento. Bienvenida por parte de las educadoras, la cual genera un clima de confianza para los niños y nos permite el desapego de los niños a los padres para ubicarlos en el área de juego.

Se dan las orientaciones a los padres de familia sobre la actividad que se implementará mientras los niños se integran en el juego de roles.

2do. Momento. Los niños realizan la actividad conjunta con el apoyo de sus padres:

- INTELECTUAL: que está encaminada a favorecer las potencialidades cognitivas de los niños.
- ARTÍSTICA: Favorece el desarrollo motor fino, así como la concepción de conceptos básicos cómo colores, texturas, formas, entre otras.
- FÍSICA: favorece el desarrollo motor grueso de los niños, a través de las habilidades de correr, reptar, lanzar, brincar, bordear.

3er. Momento. Los niños se integran nuevamente en los juegos de roles, mientras se evalúa la actividad y se dejan las orientaciones para la próxima semana, además de establecer en qué momento de las actividades diarias de la familia se pueden estimular el contenido en casa.

Contenidos. Los contenidos son los mismos que se implementan en la vía formal, esto tienen como finalidad, dar continuidad a la educación que reciben en el programa con el ingreso a los CENDI.

Los ámbitos que se favorecen principalmente son: lenguaje y comunicación, matemáticas, salud, artes plásticas y el desarrollo musical.

En la tabla 1se muestran los contenidos matemáticos que se trabajan en las sesiones, todas las actividades están pensadas en la didáctica que el padre utilizará durante y después de la actividad pedagógica con sus hijos.

Tabla 1: *Contenidos matemáticos del programa CENDI "Para Todos"*

<table>
<tr><th>1 a 2 años</th><th>2 a 3 años</th><th>3 a 4 años</th></tr>
<tr><td>*Ampliar y consolidar la significación y utilización en el lenguaje activo de palabras y oraciones que designen nombres, acciones de: personas, juguetes y objetos conocidos del medio, animales, partes de los animales, plantas, alimentos que ingieren, objetos y mobiliario de su entorno; objetos de uso personal y vestuario, medios de transporte.

*Realizar de acciones de correlación:

*Abrir y cerrar.
*Tapar y destapar.
*Introducir objetos.
*Ensartar.
*Armar pirámides.
*Enroscar y desenroscar.
*Acciones con bloques.
*Colocar figuras en resaque.
*Realización de tareas instrumentales (tareas preparatorias).
*Alcanzar un objeto mediante una cinta atada al mismo.
*Atraer un objeto por medio de una cinta deslizable con dos extremos.
Realización de juegos de</td><td> Utilizar palabras y oraciones que designen personas, objetos y animales diversos, así como sus acciones.

*Relacionar palabras con partes del cuerpo humano.

*Ejercitar las estructuras fonatorias y motoras que intervienen en la emisión oral.

*Realizar observaciones en el medio circundante cercano.

*Utilizar cuentos, descripciones, narraciones, rimas y versos para el reforzamiento de entonaciones básicas de la lengua.

*Designar las cualidades esenciales de los objetos (forma, color, tamaño).

*Reconocer las propiedades de los objetos, color, forma, tamaño y textura, utilizando acciones de comparación a un nivel externo.

*Construir instrumentos de dos piezas y los utiliza para alcanzar un objeto.

*Comprender algunas</td><td>*Utilizar cuentos, descripciones, narraciones, rimas y versos para el reforzamiento de entonaciones básicas de la lengua.

*Comprender algunas relaciones espaciales de los objetos con respecto a su propio cuerpo.

*Realizar construcciones sencillas mediante modelos objétales con vacío y altura utilizando piezas igual al modelo para construir.

<u>Número.</u>

*Utilizar los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.

*Plantear y resolver problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

*Reunir información sobre criterios acordados, representa gráficamente dicha</td></tr>
</table>

imitación.	relaciones espaciales de los objetos con respecto a su propio cuerpo. *Realizar construcciones sencillas mediante modelos objétales con vacío y altura utilizando piezas igual al modelo para construir.	información y la interpreta. *Identificar regularidades en una secuencia a partir de criterios de repetición y crecimiento. <u>Forma, espacio y medida.</u> *Reconocer y nombrar características de objetos, figuras y cuerpos geométricos. *Construir sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial. *Utilizar unidades no convencionales para resolver problemas que implican medir magnitudes de longitud, capacidad, peso y tiempo. *Identificar para qué sirven algunos instrumentos de medición.

Fuente: Plan de trabajo del programa CENDI “Para Todos”

Evaluación. Aunado al formato de evaluación de los logros de desarrollo de los niños, se realiza registro en cada actividad de las cuestiones más importantes que se observen con respecto al desarrollo del niño y a la forma de actuación de la familia, pues sobre esta base se proyectará el trabajo en las siguientes actividades y se determinará si es necesario brindar una atención individualizada a la familia y al niño. Ello permitirá tener una evaluación sistemática del desempeño del niño y la familia, que se tendrá en consideración al hacer los balances periódicos del avance del programa.

Alcances del programa

Los niños puedan generar las primeras estructuras cognitivas para dejar atrás el rezago escolar en todos los niveles posteriores a la educación inicial y preescolar. Confiamos, en que si existe una estimulación temprana de calidad podremos tener alumnos con futuros escolares de calidad, y así cuando lleguen al nivel preparatorio y se enfrenten ante exámenes de ingreso a las universidades como el EXANI II (Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior) podrán resolver sin dificultad contenidos del aspecto referente al Razonamiento Matemático: Sucesión alfanuméricas y de figuras, Planteamiento y resolución de problemas, Percepción espacial, Integración de códigos y símbolos, entre otros. (2009).

Conclusiones

A lo largo de la implementación de este programa, se ha atendido a 280 familias y 302 niños que no recibían algún tipo de estimulación temprana, de estos pequeños se han incorporado 102 a la vía formal que son los Centros de Desarrollo Infantil “Tierra y Libertad” en el estado de Colima, en los que se han destacado habilidades más desarrolladas en comparación de los niños que ingresan por primera vez y que no han recibido estimulación temprana, entre las características que les diferencian es notable:

- Mayor facilidad para la adaptación a las aulas, las maestras y sus compañeros.
- Una socialización que permite no presentar comportamientos agresivos o violentos como: mordeduras, golpes y acciones disruptivas.
- La adquisición de las estructuras de la lengua materna con menores errores en la gramática.
- Mayor ampliación de vocabulario.
- Una comunicación más amplia con las educadoras y coetáneos.

Respecto al ámbito matemático:

- Los niños comprenden mejor las orientaciones espaciales.
- Realizan con mayor facilidad la descripción de los objetos.
- Se les facilita realizar construcciones sencillas mediante modelos objétales con vacío y altura utilizando piezas igual al modelo para construir.

Fuentes de consulta

Campos, Anna (2006). *Neurociencias, desarrollo y educación*. I Encuentro Internacional de Educación Inicial no Formal: Organización de los Estados Americanos. Recuperado el 11 de julio de 2013, de: http://portal.oas.org/LinkClick.aspx?fileticket=Xnvh2-5kpmI%3d&tabid=1282&mid=3693

Cardoso, Edgar y Cerecedo, María. (2008, noviembre). *El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia*. Revista Latinoamericana de Educación (47), 5-25. Recuperado el 13 de julio de 2013, de: http://www.rieoei.org/deloslectores/2652Espinosav2.pdf

Geist Eugenio (Abril, 2006) *Los niños nacen matemáticos: Animando y promoviendo el desarrollo temprano de los conceptos matemáticos en niños menores de cinco años.* 1Er Congreso Internacional lógico- Matemática en Educación Infantil. Recuperado el 10 de Julio de 2013, de: http://www.waece.org/cdlogicomatematicas/ponencias/egenegeist_pon_es.htm

Gervasi de Esain María. (s. f.). *La Enseñanza de las Matemáticas en Educación Inicial.* [Versión electrónica]. Recuperado el 11 de julio de 2013, de: http://www.oei.es/inicial/articulos/matematica_nivel_inicial.pdf

Guía del Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL), 2009. México.

Lastra, Sonia. (s. f.). *La formación del pensamiento matemático del niño de 0 a 4 años*. Gobierno del Estado Bolivariano de Miranda. [versión electrónica]. Recuperado el 13 de julio de 2013, de: http://www.miranda.gov.ve/educacion/images/archivos_pdf/formacion.pdf

Marín, Margarita. (1999). *El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos*. Revista de didáctica de las matemáticas (39), 27-38. Recuperado el 11 de julio de 2013, de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/39/Articulo04.pdf

Reeduca.com. (2009). *Introducción a las matemáticas en preescolar*. [versión electrónica]. Recuperado el 13 de julio de 2013, de: http://www.reeduca.com/introduccion-mates-preescolar.aspx

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Contribuições de um curso online na formação de professores de Cálculo: reflexões a partir da perspectiva conhecimento da prática

Andriceli **Richit**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
andricelirichit@gmail.com
Rosana Giaretta Sguerra **Miskulin**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
misk@rc.unesp.br

Resumo

Apresentamos neste artigo as contribuições de um curso à distância *online* para a formação continuada de professores de Cálculo Diferencial Integral em relação a prática de ensinar e aprender no contexto das tecnologias digitais. As reflexões apresentadas são oriundas do Curso supracitado que abordou a inserção das tecnologias digitais no âmbito da sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral bem como possibilitou discussões envolvendo Funções, Limites, Derivadas e Integrais com o software GeoGebra. Para tecer considerações acerca desta experiência, tomamos como ferramenta de análise a perspectiva *conhecimento da prática* (Cochran-Smith e Lytle, 1999a). Finalmente, apresentamos algumas discussões concernentes a formação continuada de professores, e encerramos enfatizando que além de ensinar e dos modos relacionados a ação de ensinar, compreendemos que a formação do professor de Cálculo Diferencial e Integral precisa considerar questões que articulem as tecnologias digitais à abordagem dos conceitos inerentes a disciplina em questão.

Palavras-chave: curso online, formação continuada de professores, tecnologias digitais, conhecimento da prática.

Alguns pressupostos de partida

No seio do movimento inerente as reformas educacionais, decorrentes das rápidas transformações oriundas do acelerado avanço tecnológico, não é mais aceitável que o ensino se dê de forma tradicional, ou seja, o presente cenário desafia o professor a ensinar de um modo distinto daquele experienciado por ele em seu processo de formação inicial. Assim, esta questão avança para a formação continuada deste professor (Richit, 2010).

Considerando estas questões, desenvolvemos uma pesquisa, em nível de mestrado, que engajou professores de Cálculo Diferencial e Integral e pesquisadores em um curso à distância *online*. Este curso online foi viabilizado pela plataforma de ensino a distância TelEduc, propiciando um contexto de reflexão e discussão sobre as possibilidades didático-pedagógicas relacionadas à apropriação e utilização das tecnologias digitais nos processos de ensinar e aprender conceitos de Cálculo Diferencial e Integral além de promover o desenvolvimento de competências para a utilização do software GeoGebra, o qual subsidiou as discussões aos conceitos relacionados a Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

Deste modo, o artigo ora apresentado compreende três partes. Destacamos inicialmente os entornos da pesquisa. A seguir, apresentamos a concepção de aprendizagem de professores adotadas em nossa investigação. Concluímos este artigo apontando as contribuições de cursos a distância *online* para a formação continuada de professores.

A pesquisa desenvolvida

A pesquisa por nós desenvolvida situa-se no movimento de articulação das tecnologias digitais a formação do professor de Cálculo Diferencial e Integral, seguindo uma abordagem qualitativa de caráter interpretativo, ou seja, buscou compreender aspectos do *conhecimento da prática* que inter-relacionam a utilização dos recursos das tecnologias digitais pelo professor de Cálculo Diferencial e Integral na prática pedagógica. O cenário de estudo e investigação da pesquisa foi o Curso de Extensão universitário à distância intitulado *"Tecnologias da Informação e Comunicação na formação continuada de professores que ensinam Cálculo Diferencial e Integral I"*, oferecido pela Pró-Reitoria de Extensão – PROEX/UNESP-RIO CLARO, SP, Brasil.

Buscamos durante o Curso de Extensão supracitado, trazer por meio da leitura de artigos, de capítulos de teses e dissertações, subsídios teórico-metodológicos para a inter-relação da Matemática e diferentes softwares educativos, enfatizando os limites e as possibilidades desses ambientes computacionais na exploração e construção de conceitos matemáticos, em específico, conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e discutir aspectos referentes à introdução das tecnologias digitais e à familiarização dos participantes quanto a utilização do software GeoGebra ao discutir roteiros de atividades exploratório-investigativas envolvendo conceitos de Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

As interações entre os participantes do Curso de Extensão ocorreram por meio das diferentes ferramentas do TelEduc, quer seja de maneira síncrona através da ferramenta Bate-Papo *(chat),* previamente agendados, ou de maneira assíncrona por meio das ferramentas Portfólio, Fóruns de Discussão e Correio Eletrônico, entre outros. Abaixo (Figura 1), apresentamos a Plataforma TelEduc que propiciou o desenvolvimento da investigação junto aos professores.

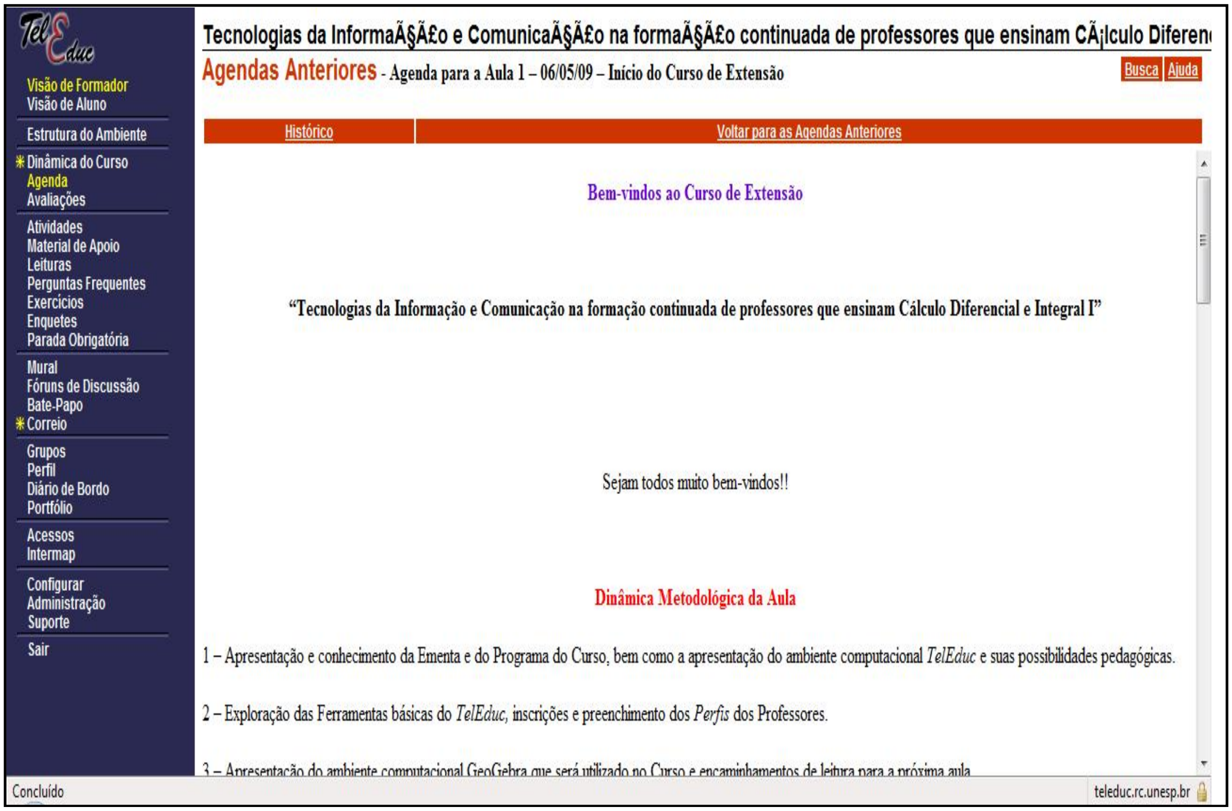


Figura 1: Interface da plataforma de ensino a distância - TelEduc

Acrescentamos ainda, que a abordagem escolhida, na presente pesquisa, deveu-se ao fato de que buscávamos a compreensão das ações entre sujeitos: Professores de Cálculo Diferencial e Integral e pesquisadores, situações de ensino aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das tecnologias digitais e interação dos professores de Cálculo Diferencial e Integral com recursos das tecnologias digitais (software GeoGebra e características computacionais e educacionais da plataforma de educação a distância – TelEduc). E, além disso, buscamos interpretar as ações desses sujeitos em um ambiente *online*.

Nossa investigação teve como última instância mobilizar professores de Cálculo Diferencial e Integral a utilizarem metodologias diferenciadas privilegiando recursos das tecnologias digitais, como tentativa de superar as dificuldades inerentes aos processos de ensino-aprendizagem de seus estudantes.

A perspectiva conhecimento da prática e a formação de professores: algumas aproximações

Historicamente, o pensar na direção da formação de professores, inicial e continuada, tem sido privilegiada em pesquisas de diversos campos científicos, incluindo-se a Educação Matemática. O crescente interesse por esse campo de investigação, mais especificamente pela formação continuada, deve-se, em partes, à relevância que esse processo assume no desenvolvimento profissional do professor e a forma como influencia a prática pedagógica (Tanuri, 2008).

No Brasil, a "universitarização" e a "valorização da prática" se constituem nos aspectos mais importantes das reformas do sistema de formação de professores (Tanuri, 2008). Outro ponto discutido por Tanuri (2008) refere-se à ênfase na formação eminentemente prática do professor, bem como no aproveitamento e na validação da experiência do professor.

Compreendemos deste modo, que o professor necessita de formação que contemple a diversidade e complexidade dos contextos educacionais, sociais e políticos, visto que a formação acadêmica voltada apenas aos conhecimentos teóricos não basta (Tanuri, 2008, Valente, 1999). Assim, o professor que atuará nessa escola transformada, precisa preparar-se para utilizar recursos das tecnologias digitais e desenvolver saberes relacionados aos conteúdos matemáticos integrado ao uso destes recursos (Valente, 1999, Miskulin, 1999). Sobre isso, Tanuri (2008) pontua que no bojo dessas mudanças, a prática passou a ser insistentemente defendida como fundamento de toda a teoria, ou seja, o tipo de conhecimento "que passa a ser valorizado é o saber prático, o saber que leva ao bom desempenho e à solução dos problemas do cotidiano da profissão (p.81)".

Entendemos desse modo que é necessário investir em propostas de formação, que façam uso dos recursos da Internet, dentre eles Cursos de formação à distância, pois muitos professores não têm como se deslocar para grandes centros na busca de formação e aperfeiçoamento profissional (Bairral, 2005; Mariano, 2008; Richit, 2010). Sendo assim, a formação continuada pode atualizar o docente frente às novas exigências da sociedade globalizada que se modifica continuamente, como por exemplo, para a utilização das tecnologias digitais. A esse respeito, Tanuri (2008, p. 90) pontua que

> Finalmente, cumpre destacar a importância da introdução das novas tecnologias da informação e comunicação em todos os programas de formação de professores, a fim de possibilitar aos docentes se não o domínio, pelo menos a familiaridade com essas tecnologias, para a sua própria aprendizagem contínua, para seu desenvolvimento profissional e para o trabalho com os alunos com essas novas tecnologias.

Assim, a questão que nos move situa-se nas relações entre a aprendizagem e o conhecimento construído pelo professor de Cálculo Diferencial e Integral, no contexto das tecnologias digitais e os aspectos intrínsecos à construção desse conhecimento. Para falar sobre a aprendizagem dos professores fundamentamo-nos em Cochran-Smith e Lytle (1999a), as quais sugerem que a aprendizagem do professor está assente em modos diversos de ver o conhecimento e, com ele, a prática pedagógica. Ou seja, o conhecimento que o professor constrói é sempre emergente, pois é elaborado no próprio cenário que constituem a situação fluída e mutável da prática (Roldão, 2007).

Cochran-Smith e Lytle (1999a) reconhecem concepções bastante diferenciadas acerca da aprendizagem dos professores, compreendendo imagens variadas de conhecimento; da prática profissional; das relações entre teoria e prática; dos contextos sociais, intelectuais e organizacionais que sustentam o aprendizado do professor; e nos modos que este aprendizado relaciona-se com mudanças educacionais e com os propósitos da escola. Nesse sentido, essas autoras apresentam, respectivamente, três concepções sobre a aprendizagem dos professores: o *conhecimento para/na/da prática.*

O *conhecimento para a prática* parte do pressuposto de que pesquisadores nas universidades geram conhecimentos e teorias que são utilizados pelos professores nas escolas, objetivando desenvolver e aprimorar a prática profissional destes.

O *conhecimento na prática* é gerado quando o professor se apropria de conhecimentos imbuídos no trabalho de especialistas e aprofunda seus próprios conhecimentos.

Já a noção *conhecimento da prática* é constituída quando os professores consideram suas próprias salas de aula locais para uma investigação intencional, ao mesmo tempo em que consideram o conhecimento e teoria produzidos por outros, material gerador para questionamento e interpretação.

Na concepção *conhecimento da prática,* os professores têm uma visão transformada e ampliada do significado do termo "prática", e o papel que os professores assumem como co-construtores de conhecimento, e criadores de currículo, está assente em suas próprias posturas de teóricos, ativistas e líderes escolares, ou seja, o que ocorre dentro da sala de aula é alterado e transformado quando o enfoque de prática do docente fundamente o contexto intelectual, social e cultural de ensino. Uma ideia subjacente ao *conhecimento da prática é* a de que os professores aprendem colaborativamente e esta aprendizagem ocorre em comunidades de investigação/ou redes. Por meio destas (incluindo cursos de formação continuada *online*), os participantes buscam com os outros construir um conhecimento significativo local com o objetivo de transformar o ensino, o aprendizado e a escola.

Para as autoras, a concepção de *conhecimento da prática* se diferencia da idéia de que existam dois tipos distintos de conhecimento de ensino, um que é formal, pois é produzido de acordo com as convenções da pesquisa social, e outro que é prático, produzido na atividade de ensino. Para Cochran-Smith e Lytle (1999a), a idéia implícita do *conhecimento da prática* é que

> [...] através da investigação, os professores ao longo de sua vida profissional – de novato a experiente – problematizam seu próprio conhecimento, bem como o conhecimento e a prática de outras, assim se colocando em uma relação diferente com o conhecimento. [...] Ela se baseia, ao contrário, em idéias fundamentalmente diferentes: que a prática é mais que prática, que a investigação é mais que a concretização do conhecimento prático do professor, e que entender as necessidades de conhecimento do ato de ensinar significa transcender a idéia de que a distinção formal-prático engloba o universo dos tipos de conhecimento (p.273-274).

De acordo com Cochran-Smith e Lytle (1999a), em comunidades de investigação os participantes realizam investigações orais ao dar sentido ao trabalho cotidiano da escola por meio de uma conversa organizada e por objetivos compartilhados pelo grupo. Do mesmo modo, ao explorarem questões e práticas em vários contextos, examinando casos particulares, os resultados principais decorrentes destas investigações orais são a compreensão ampliada do universo dos participantes.

> Em iniciativas de aprendizado de professores que derivam da concepção de conhecimento da prática, o objetivo da pesquisa-ação ou comunidades de investigação ou redes de professores é fornecer o contexto social e intelectual no qual os professores ao longo de sua vida profissional assumem perspectivas críticas sobre suas próprias suposições, bem como sobre a pesquisa de outros, além de construir conjuntamente conhecimento local para conectar seu trabalho a questões sociais mais amplas (Cochran-Smith e Lytle, 1999a, p. 283).

Corroborando a Miskulin et al (2006), entendemos que a investigação sobre as possibilidades advindas das tecnologias na formação de professores, pauta-se na premissa de que a relação com a tecnologia pode potencializar a capacidade de reflexão do professor sobre seus processos de pensamentos. Além disso, possibilita a construção de novos processos de aprendizagem relacionados a uma nova cultura profissional, assente na integração das diferentes tecnologias ao ensino, “pois oferecem a oportunidade de uma prática que potencialmente pode ser melhor que a praticada, considerando a sociedade em que vivemos” (Maltempi, 2008, p.60).

Pensando nos docentes, os quais são referidos por Maltempi (2008), e levando em consideração o ambiente de cursos *online,* entendemos que em contextos como estes, a aprendizagem dos professores pode ocorrer, e o *conhecimento da prática* pode ser construído.

Assim, acreditamos que o *conhecimento da prática* de professores para a utilização das tecnologias digitais pode ocorrer em cursos *online,* onde estes trabalham conjuntamente e discutem situações, que podem acontecer em sala de aula em função da apropriação e utilização das tecnologias digitais no âmbito da mesma. Miskulin, Silva e Amorim (2005) salientam que a “implementação da tecnologia no contexto educacional” influencia “a prática pedagógica do docente”, visto que o avanço da ciência e da tecnologia suscita uma nova cultura profissional, a qual prioriza novos conhecimentos e “novos olhares” no processo de formação de professores.

Na sequência do texto, trazemos alguns dados e possíveis interpretações para os mesmos pelo viés da perspectiva conhecimento da prática.

Uma interpretação para os dados e algumas (in)conclusões

Considerando o ambiente de cursos *online*, entendemos que em contextos como estes, a aprendizagem dos professores pode ocorrer onde estes conjuntamente discutem situações que acontecem em sala de aula em função da apropriação e utilização das tecnologias digitais.

Evidenciamos nas interlocuções dos docentes do Curso, que estes não tiveram formação ou a oportunidade de discutir sobre como utilizar a tecnologia em suas aulas, que tipo de atividade desenvolver com o apoio destes recursos, e quais softwares seriam mais adequados para desenvolver uma proposta de aula nessa perspectiva.

> *(20:36:18)* ***Leonardo*** *fala para* ***Todos****:* <u>*Falando de Computador...sabemos que boa parte dos softwares educacionais foram tendo como um ambiente de fundo: a sala de aula. Como você imagina que deve ser estruturado/composto um software matemático com o objetivo de ser levado em sua sala de aula. Como seria um modelo ideal de software matemático para você desenvolver com seus alunos. Com base no texto lido, o seu software teria um aspecto mais de exercício-e-prática, de tutorial ou de jogos de simulação? De acordo com a resposta anterior, descreva as vantagens e desvantagens desses softwares.*</u>
> *(20:37:01)* ***Fabiane Mondini*** *fala para* ***Todos****: Precisamos pensar sobre o que são e quais são os objetivos da educação. Dependendo do que compreendemos que é educação, o professor pode ser visto como um dos atores principais ou apenas como um mero coadjuvante...*
> *(20:37:16)* ***Renato*** *fala para* ***Todos****:* <u>*Penso que o "X" da questão não está propriamente na tecnologia. Ela complexifica o processo, na medida que o torna mais rico, mas o grande desafio é fazer com que os professores percebam que é preciso mudar sua prática mesmo sem a tecnologia.*</u>
> *(21:42:05)* ***Beatriz*** *fala para* ***Todos****: Adriana, atualmente acredito que* <u>*os professores muitas vezes não estão utilizando o computador, não por medo ou falta de conhecimento, mas sim porque já estão acostumados a usar o quadro e giz. Fica mais fácil do que ter que ficar preparando material ou uma aula em laboratório*</u>
> *(Bate-papo 20/05/09)* .

De acordo com os excertos, os professores apontam que esse movimento de inovação deverá partir deles, no sentido de levar a tecnologia para a sala de aula, e sair da *zona de conforto*

(Penteado, 1999) em que se encontram. Salientam também, que esse movimento de inovação não está somente atrelado a preparação, e ou formação para tal, mas que isto está relacionado a uma certa "alienação" destes professores frente às metodologias de ensino disponíveis, como por exemplo os recursos tecnológicos. Ou seja, apontam que a percepção de que a atualização destes, por meio do trabalho didático-pedagógico neste processo de inovação é condição fundamental para o bom exercício da profissão docente, e para os processos de ensino aprendizagem.

> *Fiquei extremamente interessada no curso por ter vontade de levar tecnologia para a sala de aula durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral I (Ficha de Inscrição, Vanessa).*

Pelo extrato do excerto acima, Vanessa diz ter *"vontade de levar tecnologia para a sala de aula"* revelando assim, o início de um processo de mobilização para a utilização das TIC no contexto de sua prática pedagógica.

Bianca, por sua vez, encontra-se em um momento de ansiedade frente à utilização de recursos tecnológicos, pois acredita que após o término do Curso terá condições de fazê-lo.

> *Tenho muitos anseios em ter novas metodologias para minha prática docente, cada semestre que passa percebo que tenho muito a aprender. Diante disso a formação continuada é muito importante, e meu maior anseio nesse curso é sair dele tendo meta no semestre que vem em minhas aulas de Cálculo introduzir um conteúdo através das TICs (Fórum de Discussão "Expectativas e Anseios sobre o Curso" Bianca, 26/05/09).*

Bianca deixa explícito que o movimento de inovação, que pretende iniciar em sua prática pedagógica no âmbito da aula de Cálculo está relacionado ao processo de formação de professores, pois durante seu processo de formação não construiu conhecimento no contexto das tecnologias digitais e que com a realização do Curso de Extensão terá condições de iniciá-lo.

Durante o desenvolvimento do Curso, a questão da utilização de ambientes computacionais, calculadoras entre outros recursos foram apontados pelos participantes como importantes aliados dos professores no fazer docente, devido às potencialidades e possibilidades advindas de sua utilização na criação de ambientes de aprendizagem na aula de Cálculo Diferencial e Integral.

As percepções e reflexões dos professores a respeito dos ambientes computacionais sinalizam que estes reconhecem a importância de uma prática pedagógica, que leve em conta a utilização dos mesmos.

Vanessa por sua vez reconhece, que a abordagem de certos conceitos de Cálculo com apoio de recursos tecnológicos, como ambientes computacionais, ajuda na compreensão dos mesmos:

> *[...] Em relação ao uso de tecnologias, faz uma enorme diferença usá-las em outros cursos que não sejam o de Matemática. Para os alunos do curso de Matemática as definições são dadas de maneira bem formal, e as demonstrações devem ser feitas, o que ajuda o aluno a compreender melhor as coisas. Nos outros cursos, o uso, por exemplo, de animações do winplot quando se esta ensinando limite, ajuda BASTANTE o aluno a entender a definição. Sendo assim, devemos abordar SIM de modo diferente os conteúdos quando ensinamos no curso de Matemática e nos outros cursos (Fórum de Discussão, Vanessa, 25/05/2009).*

Anderson, em outras palavras aponta que por meio de ambientes computacionais, as possibilidades de representação de conceitos oferecidos pelas tecnologias são bem maiores:

> *[...] Com uso das TICs novas possibilidades se abrem sobre como o deve ser analisado o conteúdo na sala. Para os que tem Cálculo como ferramenta de aplicações, então tais*

> *aplicações são simuladas e aperfeiçoadas. Para os que se especializam em Matemática, tem a chance de aprofundar cada vez mais sobre o que realmente as coisas são com as diferentes possibilidades de representação que as TICs oferecem (Fórum de Discussão, Anderson, 25/05/2009).*

Ainda nessa direção, Anderson, aponta que a utilização de ambientes computacionais pode atenuar um pouco o caos na abordagem de alguns conceitos de Cálculo, pois, por meio das tecnologias, é possível realizar algumas simulações e estas podem contribuir com a compreensão e construção dos conceitos por parte dos alunos.

> *O conceito de limite é caótico. A definição epsilon-delta é a origem do caos. Formalmente não se entende: dizer "para qualquer epsilon > 0 deve existir um delta > 0, tal que* $\left| f(x) - L \right|$ *< epsilon sempre que 0 <* $\left| x - a \right|$ *< delta." A primeira parte da frase diz que a existência do epsilon vai implicar a existência de um delta, enquanto que na última parte da frase diz que sempre que tivermos um delta satisfazendo determinadas condições, a existência de épsilon está garantida". Uma ambigüidade e contradição enormes. Este facto é motivo do caos. Acho que as TICs podem atenuar esse caos com as diferentes possibilidades de simulação: os alunos podem ensaiar, como se fosse um jogo: será que para cada delta, tão pequeno que seja, vou encontrar um épsilon correspondente? Portanto, quem ganha o jogo, já percebe o conceito formal de limite(Fórum de Discussão, Anderson, 27/05/2009).*

Anderson, ao refletir sobre a abordagem do conceito de limite assumiu uma postura de teórico ao dizer que *"TICs podem atenuar esse caos"*, o que reflete suas perspectivas interpretativas oriundas de suas próprias experiências (Cochran-Smith e Lytle, 1999a).

Letícia, por sua vez, percebe a utilização de softwares e/ou ambientes computacionais como importantes aliados do professor e importantes instrumentos de aprendizagem para seus alunos, na medida em que a abordagem de conceitos forem reelaboradas com a utilização de recursos das tecnologias digitais.

> *Vejo as Tecnologias, em especial os softwares, como ferramentas que podem se tornar instrumentos de aprendizagem. Dessa forma, se tornam mais uma estratégia que pode ser utilizada pelo professor em seu trabalho diário. E sendo esse trabalho bem planejado com o uso das tecnologias poderá auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem e no interesse do estudante (Fórum de Discussão, Letícia, 20/05/2009).*

Sumarizando, ao final do Curso de Extensão percebemos que os professores reconhecem a importância de uma formação adequada e específica, pois para ele fica difícil relacionar uma formação recebida (conhecimento sobre os recursos das tecnologias digitais) aos conteúdos que ministra (Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral). Também, evidenciamos a carência de processos de formação (falta de políticas públicas de formação), e que a experiência vivenciada por estes durante o Curso sinalizam inicialmente uma mudança de pensamento e postura no que tange a utilização de recursos tecnológicos.

Os professores pontuaram ainda, que o Curso, possibilitou a eles relembrar, ampliar ou re-significar conceitos de Cálculo já estudados, levando-se em conta recursos das tecnologias digitais. Para nós, essa mudança de ponto de vista é um indicativo da construção do c*onhecimento da prática* do professor no contexto das tecnologias digitais, onde estes professores estão conectando seu próprio ensino com a aprendizagem e sua própria aprendizagem com o ensino (Richit, 2010; Cochran-Smith e Lytle, 1999a).

Referências

Bairral, M.A (2005). Desenvolvendo-se criticamente em matemática: a formação continuada em ambientes virtualizados. In: FIORENTINI, Dario, NACARATO, Adair Mendes (Orgs.). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática. São Paulo: Musa Editora; Campinas: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP.

Cochran- Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationship of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. In A. Iran-Nejad & C. D. Pearson (Eds.), *Review of research in education 24 (1),* 249-306. Washington, DC: American Educational Research Association.

Maltempi, M. V. (2008). Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. *Acta Scientiae 10 (1),* 59-67. Canoas, ULBRA.

Mariano, C.R. (2008). *Indícios da cultura docente revelados em um contexto online no processo da formação de professores de matemática.* Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Miskulin, R.G.S (1999). *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo de ensino/aprendizagem da geometria.* Tese de Doutorado, Educação Matemática, Universidade de Campinas, São Paulo, Brasil.

Miskulin, R. G. S.; Perez, G.; Silva, M. R. C.; Montrezor, C. L.; Santos, C. R.; Toon, E.; Liboni Filho, P. A.; Santana, P. H. O. (2006). Identificação e Análise das Dimensões que Permeiam a Utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Aulas de Matemática no Contexto da Formação de Professores. *Boletim de Educação Matemática, 19 (20)*, 103-123.

Miskulin, R. G. S. ; Silva, M. R. C. ; Amorin, J. A. (2005). A implementação do ambiente computacional TelEduc e suas influências na prática pedagógica de professores em formação. In: Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, Porto - Portugal. Actas do V CIBEM.

Penteado, M. G. (1999). Novos Atores, Novo Cenário: Discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: Bicudo, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções & Perspectivas, 297-313. São Paulo: Editora da UNESP.

Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Roldão, M.C. (2007). Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. *Revista Brasileira de Educação, 34 (1),* 94-103.

Tanuri, L.M. (2008). Formação de Professores*:* história, política e processos de formação*.* *Revista Pesquisa Qualitativa, 3 (1),* 73-92.

Valente, J.A (1999). *O Computador na Sociedade do Conhecimento*. (1ª ed.) Campinas: Unicamp/Nied.

Conversas entre a Filosofia da Diferença e a Etnomatemática

Claudia Glavam **Duarte**
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Brasil
claudiaglavam@hotmail.com[1]

Leonidas Roberto **Taschetto**
Centro Universitário La Salle – UNILASALLE
Brasil
leontaschetto@yahoo.com.br[2]

Resumo

Nosso propósito nesta comunicação é problematizar algumas das intencionalidades educacionais que têm sido propostas por pesquisadores vinculados à Etnomatemática. Pretendemos analisar as relações de poder que imperam a partir de certas proposições didático-pedagógicas que se propõem a articular diferentes racionalidades matemáticas e a matemática escolar. O material empírico aqui analisado é composto por excertos de pesquisas que foram apresentadas durante o IV Congresso Brasileiro de Etnomatemática – IV CBEm – realizado em 2012, na cidade de Belém do Pará, Brasil. Metodologicamente seguimos orientações foucaultianas, tomando a precaução de não perguntar, nos excertos analisados, pelos sentidos ocultos dos discursos. As ferramentas teóricas utilizadas são provenientes das teorizações de Foucault, Wittgenstein, Deleuze e Guattari. A partir dos conceitos de *Ciência de Estado* e *Ciência Menor*, apontamos à necessidade do cuidado, por parte dos pesquisadores em Etnomatemática, no sentido de não favorecerem a transformação da *ciência menor* em uma *ciência de Estado*.

---

[1] Doutora em Educação pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS). Professora do Departamento de Metodologia de Ensino - MEN da Universidade Federal de Santa Catarina e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – UFSC.

[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com período sanduíche na Université de Paris 8. Professor do Curso de Pedagogia e do Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro Universitário La Salle - UNILASALLE.

Palavras-chave: Etnomatemática; Ciência de Estado; Ciência Menor; Educação Matemática; Filosofia da diferença.

Abstract

Our purpose in this communication is to discuss some of the educational intentions that have been proposed by researchers linked to Ethnomatematics. We intend to analyze the power relations that prevail from certain pedagogical didactic teaching that are inferred by investigations that were intended to articulate different mathematics rationalities and the mathematics education. The empirical material analyzed here consists of excerpts from surveys that were presented during the IV Brazilian Congress of Ethnomatematics - IV CBEm - conducted in 2012 in the city of Belém do Pará, Brazil.Methodologically, we follow guidelines by Foucault, taking care to not ask in the excerpts analyzed for hidden meanings of the discourses. Thus, the theoretical tools used in this analysis are derived from the theories held by Foucault, Wittgenstein , Deleuze and Guattari. From the concepts of state science and minor science we point to the need for care, by researchers in Ethomathematics, in order to not favor the transformation of the minor science into a state science.

Keywords: Ethomathematics; State Science; Minor Science; Mathematics Education; Philosophy of difference.

1. Iniciando a conversa

Pretendemos neste texto estabelecer uma conversa entre a Filosofia da Diferença e a Etnomatemática a partir da problematização de algumas das intencionalidades educacionais que têm sido propostas por pesquisadores vinculados a esta vertente da Educação Matemática. A finalidade deste exercício é balizada a partir das seguintes questões: que relações de poder imperam a partir do momento em que pesquisas etnomatemáticas dão visibilidade a diferentes racionalidades matemáticas? De que modo a instituição escola tem capturado essas diferentes pesquisas?

Em uma tentativa de resposta, mesmo que não se pretenda definitiva, analisamos excertos de pesquisas que foram apresentadas durante o IV Congresso Brasileiro de Etnomatemática – IV CBEm – realizado em 2012 na cidade de Belém do Pará. Metodologicamente, seguimos orientações foucaultianas, tomando a precaução de não perguntar pelos sentidos ocultos ou pela lógica interna dos discursos, ou, ainda, por uma suposta ideologia presente nos textos. Buscamos, pelo contrário, lê-los em suas exterioridades, e não evidenciar, como diz Deleuze (2005), o sobre-dito ou não-dito da frase, mas fazer o difícil exercício de permanecer simplesmente na "zona do dito" (Veyne, 1998, p. 252). Nosso trabalho se restringiu em verificar as enunciações que circulavam nos anais do X CBEm[3] e que diziam respeito as possíveis articulações entre as diferentes racionalidades matemáticas e a matemática escolar que, obviamente, guarda forte semelhança de família, para utilizar uma expressão wittgensteiniana, com a matemática acadêmica.

[3] Para dar visibilidade às enunciações retiradas dos anais e que serviram de objeto de análise, optamos por destacá-las colocando-as dentro de retângulos. Cabe ressaltar que não tivemos a pretensão de esgotar a totalidade de trabalhos apresentados nesse evento. Nossa intenção foi identificar e selecionar certo número de excertos que apontassem uma regularidade enunciativa.

2. Os modos de articulação entre as "outras" matemáticas e a matemática escolar. O que dizem os excertos?

Foucault ensinou-nos, dentre muitas outras coisas, que a produção da "verdade" está amalgamada a relações de poder que, em um efeito circular, produzem-na e sofrem efeitos dessa produção. Além disso, possuir o estatuto de cientificidade e estar ligada a um suporte institucional acentua-lhe o caráter de verdadeiro e permite-lhe adentrar um sistema de dispersão, que a faz circular de forma mais eficiente. Conforme este filósofo (Foucault, 2000, p. 113): "se existe uma geografia da verdade, esta é a dos espaços onde reside, e não simplesmente a dos lugares onde nos colocamos para melhor observá-la." Neste sentido, buscamos nos anais do IV Congresso Brasileiro de Etnomatemática a dispersão das enunciações que remetem a possíveis interlocuções entre as "outras" matemáticas e a matemática escolar. Mas o que afinal dizem essas enunciações?

> É nessa diversidade que é contextualizado o conhecimento empírico que será ali construído ou reconstruído e *transformado em conhecimento científico*. [Grifos nossos] (Polegatti & Mattos, 2012, p. 10)

> Com isso, entende-se que a Etnomatemática tem sido essencial neste tipo de trabalho, pois ao conhecer o contexto desses grupos e os elementos matemáticos presentes e utilizados no cotidiano dos mesmos, *obtivemos um suporte para poder trabalhar a Matemática inserida no contexto cultural* desses EES, de forma significativa a seus membros e *a partir de seus conhecimentos prévios***.** [Grifos nossos] (Meneghetti, Azevedo & Kucinskas, 2012, p. 10)

> Portanto, sistema de medidas (conteúdo matemático) além de ser muito usado no cotidiano implicitamente, em especial na agricultura, *pode ser transformado em conhecimentos cientifico* através das aulas fazendo uma abordagem Etnomatemática. [Grifos nossos] (Santos & Souza, 2012, p. 1)

> Essas ideias propostas como exemplo de interação entre os saberes, partindo de saberes/fazeres da vivencia de um grupo de alunos e *possível de ser articulado para desenvolver o conteúdo matemático escolar.* [Grifos nossos] (Queiroz, 2012, p. 9)

> Esse trabalho é parte de uma pesquisa mais ampla que está em desenvolvimento sobre os saberes e fazeres da Comunidade Quilombola Lagoa da Pedra *cujo enfoque é o ensino da matemática escolar a partir de ideias matemáticas dessa comunidade.* [Grifos nossos] (Klein & Bueno, 2012, p. 1)

> Conhecer as práticas de algum grupo social, exemplo: marceneiros, índios; ou abordar situações do cotidiano, *para utilizar os conhecimentos matemáticos nas aulas de matemática, modelando-os*. [Grifos nossos] (Belo, 2012, p. 7)

> Acreditamos que ao trabalharmos pedagogicamente as práticas matemáticas do contexto sociocultural de uma comunidade específica *associada à matemática acadêmica, os alunos compreenderão o significado do seu conhecimento matemático por eles utilizados no dia a dia, além de valorizá-los.* [Grifos nossos] (Junior, Bandeira & Gonçalves, 2012, p. 4)

> Os artefatos confeccionados e utilizados no cotidiano do ribeirinho poderiam *contribuir para um maior significado dos conceitos nas aulas de matemática [...]*. [Grifos nossos] (Souza, 2012, p. 10)

> [...] a inserção desses conhecimentos etnomatemáticos no currículo escolar também se apresentam *como um elemento motivador para o aprendizado da matemática escolar.* [Grifos nossos] (Junior, Bandeira & Gonçalves, 2012, p. 6)

> Trabalhar as ideias matemáticas a partir dos conhecimentos advindos das diferentes experiências de vida dos alunos, *tomando-os como ponto de partida para iniciá-los na cultura formal da Matemática* [...]. [Grifos nossos] (Januario, 2012, p. 10)

> O currículo precisa ter uma identidade com o seu público alvo, e essa identidade passa pela valorização cultural, o que torna a sala de aula de uma escola indígena um ambiente mais complexo e dinâmico, repleto de conhecimento empírico. *O salto de qualidade do conhecimento empírico se dá com o conhecimento científico*. [Grifos nossos] (Polegatti & Mattos, 2012, p. 3)

A regularidade enunciativa que se destaca nas enunciações supracitadas aponta que o “encontro” das “outras” matemáticas com a matemática escolar exigiria um “exercício de tradução”, que teria como finalidade “traduzir” as diferentes formas de matematizar o mundo para facilitar a aprendizagem e o desenvolvimento de conceitos pertinentes à matemática escolar. Assim, tais matemáticas motivariam a aprendizagem e dariam significado à matemática escolar. Pais (2012, p. 8), ao referir-se a esse exercício, propõe uma analogia bastante fecunda ao afirmar que as diferentes etnomatemáticas “[...] são usadas como entradas para o prato principal que é a matemática formal”, ou seja, serviriam como um petisco para aguçar o paladar para a chegada do “prato principal”.

Ao analisarmos os excertos acima identificamos que, recorrentemente, há a referência à “falta de significado” dos conteúdos matemáticos transmitidos na sala de aula. Teríamos um vácuo de significado, e esse “vazio” seria preenchido pela “contextualização dos conteúdos, [que] dar[iam] significado aos planos de estudo” e garantiriam a própria “existência” da matemática. Assim, o significado para a existência da matemática estaria vinculado à sua aplicabilidade no cotidiano extraescolar. A “realidade”, as racionalidades matemáticas postas a operar no contexto extraescolar seria a “*base concreta*” que daria sentido e visibilidade à “importância” dos conteúdos matemáticos desenvolvidos pela escola.

Evidenciada essa continuidade, parece pertinente refletirmos sobre algumas questões: que posições teóricas subsidiariam a afirmação de que trabalhar com a “realidade” do estudante, evidenciar outras racionalidades, “daria significado” à matemática escolar? Além disto, observa-se a preocupação em qualificar e legitimar as diferentes matemáticas através da possibilidade de transformá-la em conhecimento científico. Mas que implicações políticas estariam envolvidas nessa operação?

Na tentativa de uma possível resposta a primeira questão, buscamos algumas ferramentas teórico-conceituais de Wittgenstein e, para problematizarmos a segunda, tomamos como intercessores os professores Deleuze e Guattari.

O pensamento do segundo Wittgenstein oferece ferramentas para ensaiar uma resposta para essas indagações. Primeiro, é preciso atentar que tal afirmação poderia nos levar a pensar que os jogos de linguagem que conformam a matemática escolar seriam "vazios" de significado. Em contrapartida, as matemáticas da "realidade", isto é, as não-escolares, essas, sim, estariam encharcadas e saturadas de significados, aguardando "lá fora" para serem transferidas para a forma de vida escolar. Entraria em cena, então, uma "natural" operação de transferência: os significados presentes nas matemáticas não escolares seriam remetidos para a matemática escolar.

No entanto, na perspectiva wittgensteiniana que assumimos, entendemos que não é possível haver um "esvaziamento/saturação" de significados. Todos os jogos de linguagem – sendo práticas sociais – possuem significados dentro da forma de vida que os abriga. Considerada como um conjunto de jogos de linguagem, a matemática escolar apresenta uma gramática específica, conformada por um conjunto de regras. Assim entendida, a matemática escolar não apresenta uma incompletude que é sanada mediante seu contato com a "realidade", pois, segundo o filósofo:

> A realidade não é uma propriedade ainda ausente no que se espera e que tem acesso a ela quando nossa expectativa é cumprida. – Tampouco é a realidade como a luz do dia de que as coisas precisam para adquirir cor, quando estão, por assim dizer, sem cor, no escuro. (Wittgenstein, 2004, p. 102).

Ademais, Wittgenstein considera que "as regras da gramática não podem ser justificadas mostrando que sua aplicação faz uma representação concordar com a realidade, pois essa justificativa teria, ela própria, de descrever o que é representado" (Wittgenstein, 2004, p. 141). Mas, se capturados por uma "vontade de realidade", fossemos levados a insistir sobre a possibilidade de transferência de significados dos jogos praticados nas formas de vida não-escolares para os jogos de linguagem da matemática escolar, tal insistência não seria bem sucedida: a "passagem" de uma forma de vida a outra não garante a permanência do significado: sugere sua transformação, porque "do outro lado" quem "o recebe" é outra forma de vida (Veiga-Neto, 2004). Dito de outro modo, o significado não possui uma essência que poderia ser abarcada por qualquer uso que se fizesse do enunciado. Nessa mesma perspectiva, Condé (2004) esclarece:

> Um jogo de linguagem que é plenamente satisfatório dentro de uma determinada situação pode não ser em outra, pois ao surgirem novos elementos as situações mudam, e os usos que então funcionavam podem não mais ser satisfatórios em uma nova situação. (Condé, 2004, p. 89).

Assim, os significados produzidos por um jogo de linguagem, que é plenamente satisfatório dentro de uma situação extraescolar, poderiam não funcionar satisfatoriamente quando transferidos para uma situação escolar.

Para pensarmos a segunda questão, sobre a intenção de legitimarmos as outras matemáticas a partir da ênfase em suas aproximações com a matemática acadêmica escolhemos neste ensaio os conceitos de *ciência de Estado* e de *ciência menor* problematizados no volume cinco de Mil

Platôs (1997). A *ciência de Estado* é aquela que se sustenta a partir de proposições oriundas do método científico, onde, para conhecer, é preciso isolar o objeto, fragmentando-o, atingindo suas partículas últimas para melhor estudá-lo e compreendê-lo, ou seja, parte de um modelo cartesiano de decomposição. Além disso, esse modelo de ciência organiza, classifica, designa os elementos que vão do menor ao maior, do periférico ao centro, do mais simples ao complexo, ou seja, constrói teorias com hierarquias, divisões, ramificações, pois, segundo Deleuze e Guattari (1980), ele precisa "dispor de uma forte unidade principal, a do pivô, que suporta as raízes secundárias" [Tradução nossa] (p. 11). De forma geral, podemos inferir que as *ciências de Estado* buscam afirmações generalizáveis, constituindo-se num modelo totalitário na medida em que nega outras formas de conhecimento que não se pautam pelos seus princípios epistemológicos e regras metodológicas. Esta característica totalitária também é aferida por Deleuze e Guattari (1980) ao nomeá-la também de *ciência imperial* ou *ciência régia*. Assim, para manter essa característica, seria necessário o estabelecimento de uma determinada ordem e rituais de purificação seriam colocados a operar, no sentido de garantir a permanência de tal ordem. Todos os resíduos, "impurezas" ou "sujeiras" que não pertencem à ordem estabelecida pela *ciência imperial* devem ser eliminados. Nesta linha argumentativa, para Deleuze e Guattari (1997), a *ciência de Estado* "só retém da ciência nômade aquilo de que pode apropriar-se, e do resto faz um conjunto de receitas estritamente limitadas, sem estatuto verdadeiramente científico, ou simplesmente o reprime e o proíbe" (pp. 26-27)

E como se define *ciência menor* ou *ciência nômade*? Em que esta se diferencia da *ciência de Estado* ou *ciência maior*? Deleuze e Guattari (1980) vão dizer que a *ciência menor* tem um desenvolvimento excêntrico, totalmente diferente das *ciências de Estado*. Comecemos primeiro pela difícil caracterização de uma *ciência menor* apontada por estes filósofos:

> Há um gênero de ciência, ou um tratamento da ciência, que parece bastante difícil de classificar, e cuja história é até difícil seguir. Não são 'técnicas', segundo a acepção costumeira. Mas tampouco são 'ciências', no sentido régio ou legal estabelecido pela História. [Tradução nossa] (p.446).

Como percebemos, eles se referem à *ciência menor*, primeiramente, como sendo de difícil classificação. Assim, a ciência de tipo nômade não chega a ser propriamente uma ciência, pelo menos não no sentido que nos habituamos a pensá-la. Elas são marginais em relação às *ciências de Estado*. Marginais, contudo, não significa que elas fiquem à margem sobrevivendo das sobras deixadas pelas *ciências de Estado*. Ficam à margem porque não têm o mesmo estatuto conferido a esta ciência. Poder-se-ia mesmo dizer que se trata de uma "ciência" que diverge profundamente da lógica de organização e funcionamento das *ciências régias*.

Tais divergências podem ser entendidas no sentido de que a *ciência menor* não tem qualquer pretensão de totalidade, de vida eterna, convivendo pacificamente com a contradição. Tem vocação solidária, dispensando a necessidade de se atribuir uma autoria para o conhecimento por ela produzido; este é nômade, desterritorializado, ou seja, pertence a um "espaço sem fronteiras, não cercado" (Deleuze & Guattari, 1997, p. 51). Conhecimento que flui... atravessa fronteiras... não privado... de bando... nômade... vagabundo.

Além disso, está amalgamado com o contexto em que se produz, bem diferente da lógica que sustenta a *ciência de Estado* que se empenha em constituir um conhecimento desencarnado do humano que resulte em uma ossatura idealizada. Estrutura... desenvolvimento.... evolução... máquina binária... dicotomia... hierarquia...

No encontro, na aproximação entre a c*iência de Estado* e a c*iência menor*, que lógica prevalece? Dito de outra forma, posicionando o conhecimento matemático acadêmico como pertencente à lógica da *ciência de Estado* e as "outras" matemáticas como pertencentes à *ciência menor*, o que acontece quando elas se encontram no espaço escolar ou no espaço da academia? Que tensionamentos nas *ciências de Estado* têm sido provocados pela Etnomatemática ao dar visibilidade a essas "outras" matemáticas?

Pensemos nas pretensões, ou na falta delas, de cada uma das ciências. A *ciência de Estado*, segundo Deleuze e Guattari (1997), tenta capturar e domesticar da *ciência menor* tudo aquilo que lhe interessa ou lhe é estranho. Pensando somente nesta perspectiva, poderíamos inferir que a Etnomatemática, ao dar visibilidade às "outras matemáticas", nos locais que abrigam, por excelência, a *ciência de Estado*, estaria a serviço, mesmo que de uma forma não intencional a ela, pois estaria lhe fornecendo "matéria prima" para ser colocada na esteira dos processos de purificação. Tal processamento dar-se-ia por encerrado quando a *ciência menor* não fosse mais reconhecida como tal, visto que suas características foram profundamente alteradas. Porém, o produto ainda exigiria uma espécie de carimbo para sua "livre" circulação, um carimbo que a legitimasse: Estatuto de *ciência de Estado* – verdade absoluta.

Por sua vez, a *ciência menor*, mesmo que não seja a sua pretensão, carrega em si a potência de minar, de constituir-se em uma *máquina de guerra* que poderia "contaminar", desestabilizar, produzir fissuras na *ciência de Estado*. Impedi-la de participar deste jogo e nesta arena, seria negar seu poder de resistência. Em outras palavras, seria negar-lhe a potência do combate. Suas próprias características se tornam armas para o tensionamento da lógica da *ciência de Estado*. O nomadismo e sua capacidade de desterritorialização constituem-se em uma característica que dificulta sua apreensão total e definitiva por parte da *ciência de Estado*. A partir das considerações realizadas, apontamos à necessidade do cuidado, por parte dos pesquisadores em Etnomatemática, no sentido de não favorecerem a transformação da *ciência menor* em uma *ciência de Estado*, pois a Etnomatemática tem propiciado, não raras vezes, uma linha demarcatória entre *ciência de Estado* e *ciência menor* muito tênue e rarefeita. No entanto, como é de dentro da *máquina de guerra* que as fissuras podem ser executadas, é preciso então que as "outras matemáticas" estejam ali presentes, minando os territórios escolares e acadêmicos, que sua presença se traduza em combate, ou seja, que a *ciência menor* não perca sua capacidade de máquina de resistência.

3. Uma pausa na conversa...

Como vimos, uma das principais funções da *ciência de Estado* é a de domesticar qualquer movimento nômade que esteja em desacordo com os princípios que regem a forma-Estado. A forma-Estado que introjetamos e tomamos por modelo e referência se expande a todas as dimensões da vida. Mas como explicar que o aparelho de Estado se constitui na forma de interioridade que nós tomamos habitualmente por modelo? Uma primeira visada para esta interrogação é encontrada no início do primeiro volume de Mil Platôs (1995). Nós introjetamos a forma-Estado para depois a projetarmos às demais coisas do nosso entorno. No entanto, como tencionar tal propósito e colocar na arena acadêmica a *ciência menor* sem incorrer num processo de domesticação? Dito de outra forma, como é possível colocar na mesma arena as "outras matemáticas" e a matemática acadêmica e escolar sem que as primeiras sejam submetidas a um processo de purificação e de domesticação pelas segundas? Obviamente que não temos uma resposta pronta, até porque esse tensionamento não é de fácil resolução. No entanto, apontamos para a necessidade de pensarmos em modos de articulação que evitem aquilo que Santos (2007) denominou de epistemicídio, ou seja, o extermínio de outras formas de lidar com o conhecimento.

4. Referências e biblíografia

Belo, E. do S. V. (2012, novembro). Etnomatemática e a formação de professores: um olhar sobre a produção científica de 2005 a 2009. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática*. Belém, PA, Brasil, 4.

Condé, M. L. L. (2004). *As teias da razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna*. Belo Horizonte, Brasil: Argvmentvm.

Deleuze, G. (2005). *Foucault.* São Paulo, Brasil: Brasiliense.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1980). *Mille plateaux: capitalisme et schizophrénie*. Paris: Minuit.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1995). *Mil platôs* (Vol. 1). São Paulo, Brasil: Ed. 34.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1997). *Mil platôs: capitalismo e esquizofrenia* (Vol. 5). Tradução de Peter Pál Pelbart e Janice Caifa. São Paulo, Brasil: Ed. 34.

Foucault, M. (2000). *Microfísica do poder*. Rio de Janeiro, Brasil: Graal.

Januario, G. (2012, novembro). Prescrições curriculares para a eja e a matemática na perspectiva cultural. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Junior, G. C. de A., Bandeira, F. de A., & Gonçalves, P. G. F. (2012, novembro) A etnomatemática na cerâmica peruana em Jardim do Seridó/RN. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Klein, J. A., & Bueno, R. R. (2012, novembro). Atividades matemáticas a partir dos saberes e fazeres na produção do Adobe na comunidade quilombola Lagoa da Pedra – Arraias/TO. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Meneghetti, R. C. G., Azevedo, M. F. de, & Kucinskas, R. (2012, novembro). Sobre práticas educativas em matemática no contexto da economia solidária. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Pais, A. (2012). A investigação em Etnomatemática e os limites da cultura. *Revista Reflexão e Ação,* 20 (2), pp. 32-48.

Polegatti, G. A., & Mattos, J. R. L. (2012, novembro). Educação escolar indigena rikbaktsa: das roças e casas para as escolas. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Queiroz, M. A. L. de . (2012, novembro). Etnomatemática: um diálogo entre saberes tradicionais e saber matemático escolar. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática*, Belém, PA, Brasil, 4.

Santos, B. de S. (2007). *Renovar a Teoria Crítica e Reinventar a Emancipação Social*. São Paulo, Brasil: Boitempo.

Santos, K. L. dos, & Souza, E. R. S. (2012, novembro). A produção de farinha de tapioca como contexto de ensino para estudantes do 6º ano da vila de americano- PA. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática,* Belém, PA, Brasil, 4.

Souza, E. R. S. (2012, novembro). Etnomatemática no contexto de estudantes ribeirinhos do ensino médio. *Anais do Congresso brasileiro de Etnomatemática*, Belém, PA, Brasil, 4.

Veiga-Neto, A. (2004). Nietzsche e Wittgenstein. In: Gallo, S., Souza, R. M. (org.). *Educação do preconceito: ensaios sobre poder e resistência* (pp. 48-59). São Paulo, Brasil: Ed. Alínea.

Veyne, P. (1998). *Como se escreve a história e Foucault revoluciona a história* (4 ed.). Brasília, Brasil: Editora da UNB.

Wittgenstein, L. (2004). *Investigações filosóficas* (3 ed.). Petrópolis: Vozes.

Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano.

Osiel **Ramírez** Sandoval
Cinvestav - IPN
México
osielr@cinvestav.mx
César Fabián **Romero** Félix
Cinvestav - IPN
México
cesar.rfelix@gmail.com
Asuman **Oktaç**
Cinvestav - IPN
México
oktac@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación, realizada con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, basados en el análisis de una entrevista que incluye diversas situaciones de Transformaciones Lineales. Utilizando la teoría de registros de representación semiótica se analiza la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. Se incluyen descripciones de algunos casos exitosos de coordinación y de una situación donde no se logró ésta. Con base en las representaciones usadas por los estudiantes así como sus explicaciones verbales durante la entrevista, se concluye que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas.

Palabras clave: Algebra Lineal, Transformaciones Lineales, Registros de Representación Semiótica, Coordinación de Registros.

1. Objetivos de Investigación

La presente investigación toma como marco de referencia a la teoría de registros de representación semiótica de Duval (1999) centrándose en el concepto de Transformación Lineal (TL), con el objetivo de explicar la relación que guarda la coordinación de registros con el éxito al resolver situaciones matemáticas, y de dar ejemplos concretos de casos de coordinación y no coordinación.

Sin negar la complejidad intrínseca del concepto de TL como un factor en su aprendizaje, partimos de que "la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los aprendizajes conceptuales" (Duval, 1999, p. 30) y que de no llevarse a cabo la coordinación de registros, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano a un fracaso.

2. Aspectos Metodológicos

Los datos para la investigación se obtuvieron de una entrevista a estudiantes que cursaban Álgebra Lineal en una universidad pública de la Ciudad de México. Apoyándose en las propuestas metodológicas para investigaciones con un enfoque semiótico de Duval (2008); donde se señala que una aproximación semiótica permite describir al menos un procedimiento de análisis, el cual se compone de tres etapas:

(1) Las observaciones se realizan en el contexto de un problema; es esencial empezar por hacer el mapa representacional de todo el campo de trabajo de representaciones… en el que la búsqueda de la solución puede ser gestionada por los estudiantes. Esto no depende de lo que los estudiantes han hecho, sino de lo que se les da o lo que se espera de ellos.

(2) Este campo de trabajo es una herramienta para romper la producción de cada estudiante en segmentos o unidades interpretables en función de:

— los pasajes que él / ella hace o no hace … entre los diferentes registros de representación

— el registro elegido por el alumno para realizar un tratamiento.

(3) Por último, sobre esta base, una comparación verificable puede llevarse a cabo entre las distintas producciones conseguidas. Naturalmente, esta comparación puede estar correlacionada con el nivel de habilidades matemáticas, sin confundirse con ellas. Y, esta comparación se puede extender también a las producciones conseguidas durante largos períodos de tiempo, con el fin de observar si la comprensión evoluciona en profundidad o no. (p. 57)

Para los fines de la presente investigación, estas etapas se interpretan de la siguiente manera: En la primera se realizó la descripción de los registros y sus relaciones, así como un análisis a priori de cada actividad de la entrevista; en el segundo momento se segmentó la producción de los estudiantes en situaciones de coordinación y no coordinación; y en la etapa final se analizaron las producciones de los estudiantes, incluyendo sus expresiones verbales y gestuales, buscando relaciones entre la coordinación y el éxito al resolver las situaciones.

3. La Teoría de Registros de Representación Semiótica

En este apartado señalamos brevemente algunos de los elementos que componen la teoría de registros de representación semiótica, en los que nos apoyamos en la investigación presentada.

3.1. Registro de Representación Semiótica

Duval (1993) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. De tal manera, un sistema de signos puede ser un **registro de representación**, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación.

Acerca de la tercera actividad, Duval (2006) comenta que “es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común” (p. 112). Más precisamente, es común que dos representaciones de un mismo objeto en distintos registros no sean congruentes. La congruencia de representaciones está determinada por tres condiciones según Duval (1999):

> “… correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y [la posibilidad de] convertir una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada” (p. 6)

Siendo las unidades significantes las partes más pequeñas en que se puede descomponer una representación. Es importante señalar que cuando se tiene congruencia entre dos representaciones en un sentido, no necesariamente se mantiene la congruencia en el otro sentido de la conversión. Asimismo se pueden cumplir parcialmente, en diferente medida, los tres criterios de congruencia lo cual nos permite comparar la congruencia entre distintas representaciones y hablar de representaciones más o menos congruentes que otras.

Diversos conceptos en Álgebra Lineal como por ejemplo sistemas de ecuaciones, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales al trabajarlos en R^2 ó R^3, pueden representarse en por lo menos tres registros. Uno de los objetivos de la presente investigación es identificar los que emplearon los estudiantes entrevistados y las conversiones que realizaron.

3.2. Registros de representación en Álgebra Lineal

Existen diversas investigaciones que describen las características de los registros de representación usados o recomendados para el estudio del Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993; Soto, 2003; Soto et al., 2012), sin embargo para los propósitos de este artículo nos parece necesario precisarlas aún más. En esta sección presentamos una descripción que aunque no exhaustiva, proporciona mayor detalle sobre las características de los cuatro registros que pueden emplearse para dar solución a las situaciones que aparecen en las entrevistas.

Cabe aclarar que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista tales como espacio vectorial, vector y transformación lineal pueden ser representados en los cuatro registros descritos en este apartado. La descripción está enfocada en la manera particular que cada registro permite representar a estos objetos, en algunos tratamientos elementales y en características de algunas conversiones, coincidiendo en general con la descripción hecha por Pavlopoulou (1993).

Del análisis a priori, destacamos que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista pueden ser representados en cuatro registros: el registro algebraico donde se forman expresiones del tipo $Z=a*V+c*W$; el registro matricial, donde se representan arreglos rectangulares de otros objetos; el registro gráfico-sintético donde los vectores son representados con flechas definidas por su magnitud, dirección y sentido; y el registro gráfico-cartesiano que se caracteriza por utilizar ejes para definir a los vectores con las coordenadas relativas a éstos.

3.2.1. Registro gráfico sintético. Este registro tiene algunas reglas de formación que lo distinguen fácilmente, por ejemplo, para representar a un vector fijo se puede utilizar cualquier flecha de una familia infinita con la misma magnitud, dirección y sentido ya que comparten características definitorias en el registro; esto implica que la traslación de las flechas es un tratamiento neutro, en el sentido de que las representaciones conservan la misma información después de realizado el tratamiento.

Sobre los tratamientos esenciales en este registro, retomamos de Soto (2003) que existen dos tratamientos para la suma de vectores: regla del paralelogramo y regla del triángulo. Para sumar dos vectores con la regla del paralelogramo se traslada uno hasta que coincidan los puntos iniciales de ambos de manera que forman los lados adyacentes de un paralelogramo; los otros dos lados se construyen dibujando copias de los dos vectores iniciales, cada uno iniciando en el punto final del otro; el vector suma se representa entonces como la flecha que coincide con la diagonal del paralelogramo. Con la regla del triángulo, se traslada una flecha de modo que el punto inicial de ésta coincida con el punto final de la segunda flecha y el vector suma se representa con la flecha formada con el punto inicial del segundo vector y el punto final del primero.

Es común encontrar dificultades al utilizar este registro en Álgebra Lineal por la multitud de representaciones válidas para la misma situación (sea para vectores o para sumas) o por las muy distintas interpretaciones que se les puede atribuir a una misma representación, como la que trata con la forma de la letra "M" en el plano (Figura 1).

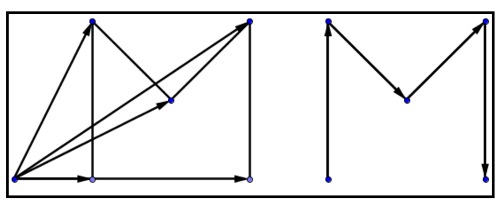


Figura 1. Interpretaciones posibles de una figura con forma de "M" en el plano

La ambigüedad del registro puede implicar complicaciones para su uso en determinadas situaciones al poder significar cosas considerablemente distintas, como podremos ver más adelante.

3.2.2. Registro gráfico cartesiano. Comúnmente en los cursos de Álgebra Lineal se deja de utilizar el registro sintético para representar a los vectores pasando a un nuevo registro gráfico que tiene inicialmente distintas reglas de formación para las representaciones. En este otro registro gráfico, los vectores también son representados por flechas pero ahora todas las flechas comparten el punto inicial; este punto inicial común es llamado el origen y generalmente es definido por la intersección de dos rectas perpendiculares llamadas ejes. Los ejes pueden estar graduados y de tal manera las flechas pueden estar acompañadas de etiquetas como en el otro registro gráfico o con etiquetas de coordenadas como (2,3).

En este segundo registro, dos flechas representan al mismo vector sólo si tienen el mismo punto final (o coordenadas), por lo que sólo hay una flecha para cada vector, y el vector cero es representado por el origen. La suma de vectores puede realizarse sólo con la regla del paralelogramo ya que no es válido desplazar una flecha de modo que su punto inicial sea distinto al origen. El registro cartesiano no comparte la ambigüedad del registro sintético al facilitar una única interpretación de representaciones como la de la letra M (y en general de cualquier región del plano) que podía ser vista en el registro sintético de dos formas distintas; la interpretación en el registro cartesiano corresponde a las flechas que van del origen a cada punto de la región indicada.

3.2.3. Registro algebraico y registro matricial. Presentamos estos dos registros en la misma subsección porque, a diferencia del par de registros gráficos, estos pueden ser utilizados simultáneamente sin mayores complicaciones y sin generar ambigüedad en las representaciones involucradas.

El registro algebraico es quizá el más usado cuando se definen conceptos o se redactan teoremas. En este registro se utilizan letras, números y símbolos para representar diversos tipos de objetos como vectores, escalares y operaciones, formando expresiones como la combinación lineal de tres vectores $a \cdot V + c \cdot W + d \cdot Z$; o la definición de vectores propios para una transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \wedge \exists k \in \mathbb{R}: T(U) = k \cdot U$$

En este registro dos letras representan al mismo vector si se declara explícitamente, es decir, el vector V es igual al vector W si se tiene la expresión V=W, o si se puede inferir a partir de tratamientos algebraicos como la sustitución de expresiones equivalentes. En general el registro algebraico permite una organización más eficiente del conocimiento matemático, ya que facilita la representación de situaciones complejas de una manera más precisa y compacta aunque con las desventajas propias del formalismo (ver Duval, 1999 y Soto et al., 2012).

El registro matricial permite representar en forma de matriz una gran diversidad de objetos del Álgebra Lineal. Por un lado las matrices son arreglos rectangulares de otros objetos (números, polinomios, otras matrices, etc. Por otro lado mediante ellas se pueden representar conceptos de otra naturaleza como cambios de base, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones. En el caso de una transformación lineal, ésta se puede representar con una matriz que al multiplicarla por cualquier vector se obtenga la imagen de tal vector bajo la transformación lineal.

La naturaleza de las matrices como arreglos de otros objetos provoca que en cierta forma se "hereden" algunas características de estos y de sus representaciones. De tal manera, es importante tener en cuenta que los tratamientos matriciales son generalmente derivados o influenciados por los tratamientos de las componentes de éstas. Si se tiene una matriz con entradas racionales de la forma a/b el tratamiento de suma es significativamente distinto a si la matriz tuviera entradas enteras o entradas algebraicas. Esta característica de los tratamientos matriciales nos puede llevar a interpretar partes de éstos, por ejemplo la suma de componentes, como tratamientos de otros registros.

En las situaciones relevantes para este artículo nos podemos encontrar con arreglos de números, como $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$; o de arreglos de polinomios como $\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x - 3 \cdot y \end{pmatrix}$.

El uso simultáneo de estos dos registros puede ser observado en expresiones del tipo $\alpha \cdot U + \beta \cdot V = \alpha \cdot \binom{1}{2} + \beta \cdot \binom{2}{3}$. Es común encontrar en libros o en producciones de los estudiantes expresiones mixtas que, en el mejor de los casos, implican que se ha desarrollado la coordinación de esos registros a tal grado de poder realizar conversiones de manera espontánea en una misma expresión. A pesar de que se pueden encontrar abundantes ejemplos de expresiones mixtas, no significa que los registros matricial y algebraico sean en su totalidad congruentes, como muestra Pavlopoulou (1993) en casos de conversión de matrices a sistemas de ecuaciones.

Atribuimos la abundante utilización de estas expresiones algebraico-matriciales al nivel de congruencia entre algunas representaciones en estos dos registros. Las reglas de formación en ambos registros tienen varias coincidencias, como se aprecia en la representación de una combinación lineal de vectores. Las unidades significantes en las expresiones de combinación lineal mantienen el mismo orden para la suma y para el producto por escalar. De tal manera, una simple sustitución puede ser suficiente para la conversión de una combinación lineal entre los registros matricial y algebraico.

3.3. Coordinación de Registros de Representación Semiótica

La coordinación consiste en la movilización y la articulación "inmediatas" de los registros de representación semiótica y supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro (Duval, 1999).

Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. De esta manera no se requiere la utilización hacia el exterior de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.

4. Análisis de la entrevista

A continuación presentamos el análisis de algunas situaciones realizadas durante la entrevista, poniendo especial énfasis en los casos donde las situaciones guardaban estrecha relación con la coordinación de registros, así como en algunos usos inapropiados de representaciones.

4.1. Definición de Transformación Lineal, según los estudiantes

La primera pregunta que se les presentó a los estudiantes, tenía el propósito en situar su concepción de Transformación Lineal, al cuestionarles ¿Qué entiendes por Transformación Lineal? La mayoría de los estudiantes hicieron alusión a la definición que se muestra en sus libros de texto, especialmente la definición que ofrece Grossman (2008, p. 460):

> Sean V, W dos espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

y

$$T(\alpha v) = \propto Tv$$

Por ejemplo, durante la entrevista Natalia[1] presentó su propia *"definición"* de la siguiente manera:

> Natalia: Me basaría en lo que es la definición, entonces: Se supone que una transformación lineal, es tal que pasa un vector $\alpha \in$ V, lo pasa a ser otro vector y el cual pertenece a un espacio vectorial diferente de V o puede ser el mismo. Esa es la definición, que yo daría por así decirlo.

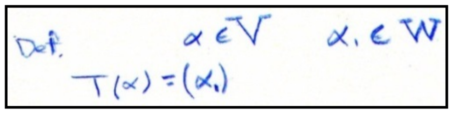


Figura 2. Definición de Natalia de Transformación Lineal

Natalia aporta una "*definición*", que no incluye suficientes condiciones para definir a una Transformación Lineal, aunque el siguiente extracto muestra que ella conoce la definición formal al explicarla de la siguiente manera:

> Natalia: …claro, si ya nos lo explican en los libros, bueno nos dice que la definición, dado dos vectores, su transformación cada uno; bueno, que la transformación lineal de la suma de los dos vectores es igual a que si fuera la transformación por separado y que si dado un escalar β, entonces este β al multiplicarlo por el vector, es como si tuviéramos al escalar β multiplicando a la transformación lineal, bueno ésta es la definición que he visto en los libros.

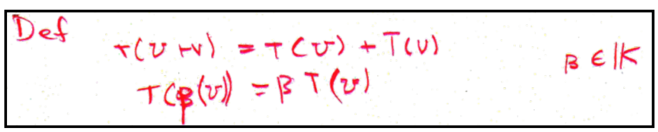


Figura 3. Definición formal representada por Natalia

Sin embargo ella insiste en usar su propia definición y nuevamente la explica, empleando el siguiente diagrama:

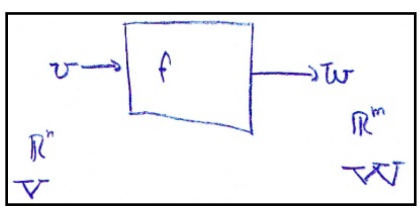


Figura 4. Diagrama de Transformación Lineal de Natalia

Esta figura, evoca a la presentación elemental de función que emplean algunos libros de cálculo al verla como una "caja negra" que trasforma los valores u objetos de entrada en los valores u objetos de salida. Natalia muestra confusión entre el concepto de función y el concepto de Transformación Lineal, ya que emplea algunos elementos distintivos de un curso de Cálculo. La concepción de Natalia consiste en el cambio de un vector en el dominio a uno del

[1] Todos los nombres de los estudiantes son pseudónimos.

contradominio, sin considerar condiciones de linealidad. Como veremos más adelante esto afectará su desempeño en el resto de la entrevista.

Por otro lado, el estudiante Luis al abordar la misma actividad, explica de manera más detallada lo que entiende por transformación lineal.

> [Luis] (Escribe): Por transformación lineal, entiendo una función que va de un subespacio dado a otro subespacio o en su defecto al cuerpo de los escalares en el cuál se esté trabajando, que cumple con la siguiente propiedad: Dados 2 elementos del subespacio (u,v) y un escalar (α) del cuerpo correspondiente, se tiene que
>
> $$\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$$

Al parecer, Luis se apega a la definición presentada en uno de sus libros de texto, donde se define la Transformación Lineal de la siguiente manera (Hoffman y Kunze, 1973):

> Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que
>
> $$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T(\beta)$$
>
> para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F. (p. 67)

La definición personal de Luis corresponde a la definición formal, y esto influye positivamente en su desempeño durante la entrevista.

4.2. Ejemplos de Coordinación de Registros

La elección del registro adecuado para iniciar la solución de un problema y la articulación de los demás registros que se decida utilizar contribuyen al éxito de la solución del problema matemático. Situaciones que provocan este tipo de decisiones se presentaron en diversos momentos de la entrevista, por ejemplo, se pidió a los estudiantes un *ejemplo de una TL*. El estudiante Luis propuso la siguiente expresión algebraica:

$$\boxed{T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ -5y \\ z+x \end{pmatrix}}$$

Figura 5. Transformación Lineal propuesto por Luis

Además de proporcionar un ejemplo, decidió demostrar su validez y en el transcurso de esta actividad, reveló la coordinación de diversos registros al emplear acertadamente conversiones en diferentes momentos para validar su propuesta. Empezó por definir dos vectores (u y v); continuó con una serie de conversiones del registro algebraico al matricial, realizando casi en su totalidad la demostración en este último registro. Posteriormente, aplicó su TL al resultado de la suma de los vectores, y aplicó algunos tratamientos matriciales para obtener una expresión en este registro que presentara un alto nivel de congruencia con la expresión algebraica *c*T(u)+T(v)*; permitiéndole realizar la conversión del registro matricial al algebraico, concluyendo su demostración al comprobar la condición de linealidad con la igualdad que propuso en su definición:

$$\boxed{c\begin{pmatrix} x_1+2y_1-3z_1 \\ -5y_1 \\ z_1+x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+2y_2-3z_2 \\ -5y_2 \\ z_2+x_2 \end{pmatrix} = c\,T(u) + T(v)}$$

Figura 6. Conversión del registro matricial al algebraico

En esta última acción el estudiante transita del registro matricial al algebraico de manera inmediata; la alta congruencia entre las representaciones que utiliza en estos registros puede ser un factor determinante para lograrlo.

Una situación de coordinación semejante a la anterior se aprecia cuando se solicita al mismo estudiante que proporcione un ejemplo de una Transformación No Lineal.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ z \\ y^3 \end{pmatrix}$$

Figura 7. Transformación no lineal propuesto por Luis

Luis proporciona un ejemplo en el registro matricial y haciendo un análisis similar a su ejemplo de transformación lineal, demuestra que éste no lo es. La estrategia que emplea consiste primero en trabajar el resultado obtenido al evaluar $T(c\alpha + \beta)$, posteriormente trabajar la expresión $c(T\alpha) + T(\beta)$ y averiguar la igualdad. Debido a que no son iguales los resultados, concluye que su ejemplo no corresponde a una Transformación Lineal. De esta manera Luis llega a demostrar que el ejemplo que propuso, efectivamente corresponde a una Transformación No Lineal. De la misma manera que en la situación anterior, parece diseñar un plan de acción que involucra los dos registros para luego transitar libremente entre ellos, lo que muestra su habilidad de coordinación.

4.3. Ejemplo de No Coordinación de Registros

La ausencia de coordinación de registros crea obstáculos en el aprendizaje, provocando incluso el fracaso en la resolución de problemas. Por ejemplo Natalia, al solicitarle un ejemplo de TL, inicia planteando la expresión:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^3$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(\alpha) = \beta$ $\quad \beta \in \mathbb{R}.$

Figura 8. Propuesta de Natalia de Transformación Lineal

Al pedirle que especificara cómo sería la TL, recurre al registro matricial para señalar que sería del tipo α=(4,5,7) con T(4,5,7)=(6,2), sin aclarar la naturaleza de T; revela dificultades para trasladar su ejemplo del registro algebraico al matricial. Para indagar sobre esta dificultad, se le solicita proporcionar el arreglo matricial correspondiente a la TL que propuso; ella nuevamente acude al registro algebraico para argumentar que la TL solicitada tendría la forma $Tx = Ax;\ A \in M_{nxm}$. Argumentando que "*la matriz tendría que ser de…2x2…bueno, sería buscar entonces una matriz, tal que al multiplicarse entonces diera al producto, entonces como éste es un vector* (x, y, z) *la matriz que buscamos nos va a mandar a R2*". En su intento por trasladar la representación algebraica al registro matricial, erra nuevamente y al percatarse que no puede obtener la matriz termina por no lograr proporcionar un ejemplo de TL.

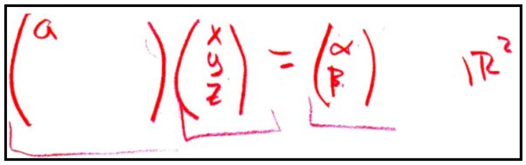


Figura 9. Registro matricial propuesto por Natalia

Natalia no pudo realizar la conversión de la igualdad escrita algebraicamente al registro matricial como consecuencia de la definición incompleta que utiliza. Sin embargo el hecho de que no se diera cuenta de qué datos le faltaban implica que no reconoce algunas unidades significantes en ambos registros, las que describen la relación entre las componentes de la matriz y la ecuación algebraica, y por tal razón se clasifica su intento como no coordinación.

5. Conclusiones

En esta investigación se obtuvo evidencia que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros, al presentársele alguna situación matemática busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverla. Sin embargo, el hecho de que resuelva alguna situación no implica que tenga esta habilidad. Por ejemplo el estudiante Franco al solicitarle una TL responde con la transformación identidad, caracterizándola con $T(I)=I$ y comprobando algebraicamente las propiedades de la definición. Aunque el estudiante proporcionó una respuesta correcta, la pregunta no nos permite averiguar si el estudiante realiza o no coordinación; simplemente pudo haber recordado un ejemplo trivial de TL.

Analizando únicamente las producciones de los estudiantes no se tendrían elementos suficientes para decidir si hay o no coordinación. Esto parece especialmente complicado en los casos que las producciones externas (verbales o en papel) son únicamente de un registro en particular. Un observador podría suponer que no hubo coordinación si no hace preguntas de seguimiento para averiguar qué tipo de representaciones que el estudiante tomó en cuenta al diseñar su estrategia para resolver la situación.

Por otro lado, se presentaron situaciones donde se muestra una gama de registros no coordinados, donde el intento de solución incluye representaciones de varios registros pero no lo consideramos coordinación porque sólo se realizan conversiones entre los registros que se recuerdan o son sugeridos por el investigador, partiendo de información incompleta, lo que impide tomar en cuenta algunas unidades significantes y el no hacerlo implica no cumplir la condición principal para la coordinación.

Observamos que la coordinación favorece la solución eficiente de situaciones matemáticas, mas no la garantiza. Las soluciones algorítmicas de problemas prototipo en la enseñanza mono-registro son un caso claro de esta situación. La importancia mayor de la coordinación según la teoría es para la aprehensión conceptual (Duval, 1999), ya que favorece la comprensión integrativa. Finalmente, proponemos la siguiente interrogante:

¿A parte de la conversión qué hay que desarrollar para lograr la habilidad de la coordinación?

La respuesta a esta pregunta contribuirá a mejorar teoría al esclarecer las relaciones entre la coordinación de registros y el aprendizaje conceptual; asimismo facilitará el desarrollo de propuestas de enseñanza que generen comprensión integrativa.

Referencias

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. Hitt), 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61.1-2**, 103-131.

Duval, R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics. En . L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.) *Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series. Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39-63). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Grossman S. (2008). *Álgebra Lineal*. México: Sexta Edición, McGraw-Hill Interamericana.

Hoffman K. & Kunze R. (1973), *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Pavlopoulou, K. (1993), Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de didactique et de sciences cognitive* **5**, 67-93.

Soto, J. L. (2003), *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en* R^2 *y* R^3, Tesis doctoral, Cinvestav - IPN, México.

Soto, J. L., Romero, C. F. & Ibarra, S. E. (2012), El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra, en *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (Eds. Hitt & Cortés), 38-49, Quebec, Canada, Loze-Dion éditeu.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual

Benjamín **Martínez** Navarro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
bemanav@yahoo.com.mx
Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
mrigolemini@gmail.com

Resumen

Se analizan -con base en un instrumento que se diseñó en el marco del proyecto cuyos resultados parciales aquí se exponen-, los estados de certeza (o presunción) que, en torno a hechos de las matemáticas, experimentó un participante (asesor en capacitación) en un foro virtual al resolver un problema matemático. Dicho análisis permitió a los investigadores detectar las posibles dificultades del asesor en la comprensión de conceptos matemáticos involucrados y sugerir las formas mediante las cuales él sustentó sus afirmaciones; también permitió concluir que los estados de certeza o presunción que en torno a los hechos matemáticos él experimentó, están relacionados con su nivel de comprensión y sus formas de sustentar las afirmaciones implicadas.

Palabras clave: certeza y presunción, sustentos de enunciados matemáticos, comprensión, foro virtual, capacitación a distancia.

Presentación

En la capacitación a distancia, como en todo proceso de aprendizaje, es necesario que la persona involucrada no sólo construya los conocimientos esperados sino que también experimente certezas en torno a esos conocimientos. En el caso de un foro virtual, lo anterior plantea el reto de contar con elementos teóricos e instrumentos analíticos que permitan distinguir los estados de certeza (en torno a los enunciados de contenido matemático que ahí surjan) que vivencian los alumnos inscritos. En consideración a esta problemática, en el documento se propone un instrumento teórico-metodológico para identificar en esos ámbitos educativos los estados de certeza (y otros estados internos, como la presunción) que eventualmente experimentan los involucrados. La aplicación del instrumento a un caso de estudio dejó ver que en esos ambientes de instrucción es posible suponer fundadamente los estados internos de certeza de la persona implicada; adicionalmente, el análisis de sus estados internos dio pauta para identificar la forma en que ella sustentó sus afirmaciones, y reconocer sus posibles dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos comprometidos en el estudio.

Antecedentes

Investigaciones diversas han centrado su atención en el papel que juega la certeza (y otros estados semejantes) tanto en el quehacer matemático como en el salón de clases. Por ejemplo, de acuerdo a Hersh (1993), en la investigación matemática el convencimiento es un propósito central de la prueba y es un criterio de demarcación: una justificación es una prueba sólo si convence a los jueces calificados. En contraste, él mismo supone que el objetivo de la prueba en el aula de matemáticas no es precisamente el de convencer o generar certezas sino el de estimular la comprensión de los estudiantes.

Al igual que Hersh, de Villiers (2010) encomia el valor explicativo de las pruebas en el aula, pero recupera para este ámbito su función de convencer. Conforme a lo que de Villiers sostiene, los matemáticos profesionales se convencen, durante la experimentación, de que sus procesos heurísticos de construcción de nuevos conocimientos van por buen camino; no obstante -continúa el investigador-, a los expertos en las matemáticas esos procesos empíricos casi nunca les suele generar certeza (absoluta) de sus resultados, en parte, porque el trabajo experimental no posee suficientes cualidades explicativas. Es por esto que recurren a las pruebas deductivas, las que para ellos representan la vía para sistematizar, comprender y explicar los resultados que generan. A nivel del aula, y de parecida manera a lo que sucede con los profesionales de las matemáticas, es este valor explicativo de las pruebas lo que -según de Villiers- probablemente genera mayor convencimiento en los estudiantes. Por ello, él sugiere que los profesores se esfuercen en exponer pruebas que expliquen ya que en el salón de clases, además de mostrar el carácter axiomático de la demostración, es muy importante aprovechar y potencializar el carácter explicativo de las demostraciones deductivas y las pruebas y el estado de certeza que puedan promover.

Con el objetivo de determinar la certeza (o presunción) que los autores de documentos escritos proyectan a través de ellos, Hyland (1998) se ha interesado por el análisis de textos, y en particular, en producciones redactadas por estudiantes. Él recurre a aspectos del lenguaje, que llama epistémicos, porque es mediante éstos que los escritores (consciente o inconscientemente) expresan su evaluación de las posibilidades de verdad de lo que afirman e indican el grado de confianza que experimentan en torno a ello. Atendiendo al hecho de que el compromiso del escritor puede ser expresado de acuerdo a una enorme variedad de formas y que estas expresiones pueden transmitir una amplia gama de significados Hyland y Milton (1997) ubicaron elementos léxicos utilizados por estudiantes en distintas categorías epistémicas (certeza, posibilidad o probabilidad).

En esta investigación se reconoce la importancia de que en la educación matemática se promueva certeza y estados de convencimiento en torno a enunciados de las matemáticas, siguiendo siempre criterios de esta disciplina (pertinentes al nivel educativo y al tema).

Consecuentemente, y debido a que las personas que participaron en el trabajo empírico que aquí se analiza son miembros de un foro virtual, a los autores les interesa identificar los estados de certeza (o presunción) en torno a enunciados o hechos de las matemáticas que ellos posiblemente experimentan y que expresan de manera escrita. Esto da cuenta del interés y la necesidad del marco interpretativo que se expone en el siguiente apartado

Marco interpretativo

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así") o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"). Rigo (2013[a]) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos". Ella propone que algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares), esquemas que pueden denotar cierta comprensión conceptual por parte de quien los aduce. En otros casos, continúa Rigo (2013[a]), los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático obedecen a sus motivos y no al contenido del enunciado, como los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden provenir de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan el uso de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad. En esta investigación se considera que, asociados a sus esquemas epistémicos, el sujeto experimenta estados internos de certeza (cuando le asocia el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción (cuando le asocia grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados internos Rigo (2013[a]) les llama "estados epistémicos".

Criterios para distinguir estados epistémicos (de certeza y presunción): Propuesta de un instrumento de análisis

Con base en las anteriores consideraciones, en lo que sigue se pone a la apreciación del lector el instrumento que permitió identificar (o suponer fundadamente, de acuerdo a las evidencias con las que contaban los investigadores) los estados epistémicos de los estudiantes que participaron en un foro virtual. En su diseño convergieron perspectivas provenientes de muy distintas disciplinas: de filosofía (Wittgenstein, 1988), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus, 1975), la sociología (Abelson, 1988), la lingüística (Boyero, 2012; Hyland, 1997; Hyland & Milton, 1998; Sánchez-Upegui, 2009) y la educación matemática (Rigo, 2013[a]; Rigo, 2013[b]).

Partiendo del hecho de que la comunicación en un foro virtual se da a través del lenguaje escrito, para distinguir los estados de certeza o presunción de sus participantes resulta necesario recurrir al análisis de su meta-discurso (entendido éste como el que va más allá de su discurso explícito) con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura. En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza (o de presunción) en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los siguientes criterios.

Elementos del habla. La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa perífrasis modales de obligación (e.g. tener que/deber/ haber de/haber que), el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo, hago, saco) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican dentro de la categoría epistémica de certeza (e.g. saber, pensar, en realidad, ciertamente). En caso de un menor grado de compromiso la persona recurre a mitigadores, por ejemplo, la persona usa el morfema verbal –ía que está asociado al modo condicional (e.g. sería, podría) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican en las categorías de probabilidad (e.g. creer, parecer, probablemente) o posibilidad (e.g. poder, tal vez, posiblemente).

Acción. El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.

Familiaridad. La persona activa esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres). Por ejemplo, la persona sustenta explícita o implícitamente el uso de un algoritmo aduciendo que es lo habitual o apelando a su facilidad.

Elaboración cognitiva. La persona activa esquemas epistémicos basados en razones matemáticas que pueden denotar cierta comprensión conceptual. Entre ellos se encuentran, por ejemplo, los esquemas epistémicos que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los esquemas epistémicos que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares).

Determinación. La persona manifiesta de manera espontánea su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia en un hecho de las matemáticas, a pesar de tener al colectivo en su contra o bien, tiene el valor de cambiar su posición frente al grupo. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.

Interés. Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:

-Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible (Cantidad).

-Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos y correctos (Cualidad).

-Relevantes. En el foro, una contribución relevante implica activar esquemas epistémicos para aportar información que hasta ese momento no se había considerado pero que guardan relación con las demás participaciones (De relación).

-Claras y precisas.

-Numerosas, en relación a sus intervenciones en otros temas y a la partición de otros.

Actitud. La persona muestra consistencia en los criterios anteriores. Esta consistencia puede presentarse en una intervención o en un período de tiempo considerablemente mayor.

Las anteriores condiciones pueden ser suficientes para que una persona experimente certeza o grados altos de presunción; sin embargo no son necesarias.

Consideraciones metodológicas

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994) y se enmarcó en un proceso de investigación-acción (Harding, 1978), en el sentido de que los resultados que se presentan provienen en parte de la reflexión de uno de los autores sobre su propia práctica.

El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos; el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria. Incluye un Módulo Cero y cuatro Módulos de contenido matemático que se estudian de forma secuenciada. En el Módulo I se revisan temas de conteo y medición, así como algunas relaciones numéricas básicas, en el Módulo II los participantes descubren regularidades y reconocen patrones para estudiar el lenguaje algebraico, en el Módulo III se estudian relaciones funcionales y en el Módulo IV se presentan problemas que involucran el planteamiento de una ecuación lineal con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada Módulo está dividido por semanas en las que se revisa un tema en particular.

Las actividades de enseñanza se desarrollan a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle a través de la cual los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. En el marco de los módulos del diplomado los estudiantes participan en foros de discusión y realizan actividades y tareas que implican resolución de problemas matemáticos. La dinámica consiste en que el tutor propone un problema a resolver, los estudiantes publican en el foro sus soluciones al problema propuesto e interactúan entre ellos para enriquecer o corregir sus respuestas; la discusión que se genera es guiada por el tutor.

Para el análisis que aquí se expone se eligió el Módulo IV porque los estudiantes tendían a sustentar sus respuestas. Las participaciones de ese módulo se organizaron en episodios, mismos que están conformados por todas esas participaciones de los estudiantes y del tutor que giran en torno a una actividad iniciada por este último. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución o conjunto de soluciones. Una vez que para propósitos del estudio se organizaron las participaciones en episodios, éstos se separaron en partes considerando las necesidades del análisis, asignándoles un numeral.

Para este reporte se seleccionaron tres participaciones: una de una estudiante, llamada Patricia, que abrió la discusión, y otras dos de otra estudiante, Jeymi, quien parece haber experimentado matices en sus estados epistémicos al exponer dos métodos de solución de un mismo problema, aparentemente correctos. Jeymi era una asesora que contaba con cuatro años y medio de experiencia cuando fue observada. Martínez (uno de los autores de este trabajo) fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones. En la edición de diplomado que aquí se analiza, él contaba con dos años de experiencia como tutor de asesores.

Análisis de Resultados: Episodio "El problema del salón de clases"

El episodio "El problema del salón de clases" que se examina en lo que sigue trata sobre la resolución de un problema que se puede resolver con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Comenzó con la solicitud del tutor para que los participantes en el foro resolvieran el siguiente problema:

En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7.¿Cuál es el número de hombres y mujeres?

a) ¿Cuántas incógnitas tienes?

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?

d) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

e) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema.

Para resolver el problema, de acuerdo al objetivo de la semana, se esperaba que los participantes reconocieran e identificaran la presencia de algo desconocido que se puede determinar; específicamente, que reconocieran como incógnitas del problema la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres en el salón; que simbolizaran las incógnitas, por ejemplo, mediante las letras "x" y "y" y que relacionaran las incógnitas con los datos del problema para establecer un sistema de ecuaciones. En una semana posterior se pediría a los estudiantes realizar las operaciones necesarias para determinar el valor específico y sustituir en la ecuación el valor encontrado para comprobar que era correcto.

Participación de Patricia

La participación que abrió la discusión en el episodio bajo examen fue la de Patricia. Su respuesta desencadenó las participaciones de sus compañeros y en particular la de Jeymi. Su participación fue la siguiente:

(2.3) a) ¿Cuántas incógnitas tienes?
(2.4) 2 el numero de hombres y de mujeres
(2.5) b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?
(2.6) "h" hombres y "m" mujeres.
(2.7) c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?
(2.8) no
(2.9) d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema
(2.10) h+m=7 m+7=h

En esta intervención, Patricia se limitó a contestar las preguntas que formuló el tutor. En (2.4) identificó como incógnitas al número de hombres y mujeres; posteriormente asignó la literal "h" al número de hombres y la literal "m" al número de mujeres (2.6) y finalmente relacionó esas incógnitas con los datos del problema para plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2.10). Como se aprecia, la segunda ecuación del sistema es incorrecta porque la alumna considera al número de mujeres como la variable independiente y al número de hombres como la variable dependiente (2.10).

La primera participación de Jeymi se dio como respuesta a la participación de Patricia (ver Primera participación de Jeymi). En ella, Jeymi resolvió el problema utilizando una ecuación lineal con una incógnita: x + (x + 7) = 61. La alumna comenzó enunciando lo que consideró los datos del problema; identificó como incógnita el número de hombres y le asignó la literal “x”; posteriormente relacionó la incógnita con los datos del problema con base en lo cual planteó una ecuación lineal con una incógnita, la que después simplificó para obtener el valor de la incógnita “hombres”, el cual utilizó para calcular el valor de la otra incógnita. Finalmente, sumó la cantidad de hombres y de mujeres para verificar la cantidad total de alumnos en el salón.

La segunda participación de Jeymi (ver Segunda participación de Jeymi) se dio a petición del tutor. En esa oportunidad Jeymi sugirió un sistema de ecuaciones (h+m=61, m=h+7) que tuvo como base la asignación de la literal “h” al número de hombres y “m” al número de mujeres, y la traducción al lenguaje algebraico del enunciado del problema (expresado en lenguaje natural). El sistema, aunque de expresión correcta, Jeymi lo dejó sin resolver.

Los investigadores inicialmente centraron su atención en detectar el probable estado epistémico que experimentó Jeymi en sus dos participaciones. Los resultados del análisis se exponen en lo que sigue.

Primera participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos

(3.3) primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan
(3.4) datos
salon de clases 61 alumnos
x hombres
x + 7 mujeres
(3.5) por lo cual hay 2 datos desconocidos
(3.6) pero de uno se resuelve el otro
(3.7) y tenemos una incognita denominda "X"
(3.8) que significa hombres
(3.10) Ahora plantearemos la ecuacion
(3.11) x + (x + 7) = 61
(3.18) y nos queda asi 2x=54
(3.19) ahora vamos a dejar sola la x
(3.20) y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros
(3.21) 2x/2=54/2
(3.22) y nos queda x=27.
(3.24) mujeres X + 7 = 27+7= 34
(3.26) en el salon de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres
(3.27) dando un total de 61 alumnos.

En relación a su primera intervención los investigadores concluyeron que Jeymi probablemente experimentó certeza. Esto se derivó de la identificación en ella de distintos de los criterios que aparecen en el marco interpretativo de este documento. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para someter a juicio del grupo respuestas y procedimientos distintos a los que se habían publicado en el foro hasta ese momento; por ejemplo, Patricia planteó un sistema de ecuaciones pero no lo resolvió (2.10), mientras que Jeymi planteó una ecuación (3.11) y obtuvo el valor de las incógnitas (3.26). Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores,* específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos para presentar reglas generales (3.10 y 3.19) o para hacer afirmaciones (3.5 y 3.7), llegando incluso a utilizar el enfatizador “hay que analizar” (3.3). Otros aspectos que hablan de la certeza de Jeymi son que *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando advirtió “ahora vamos a dejar sola a la “x” (3.19) y cuando realizó acciones consecuentes para efectivamente obtener su valor (3.20, 3.21 y 3.22); que activó *esquemas epistémicos* basados en la *familiaridad* al enunciar reglas como “hay que analizar muy bien los datos” o “ahora plantearemos la ecuación” que muy probablemente eran habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas; que ella aludió a *razones*, por ejemplo, al plantear una ecuación lineal con una incógnita en lugar de plantear las ecuaciones que se le solicitaron o en lugar de retomar el sistema de ecuaciones que había propuesto Patricia; sus razones también las dejó ver al declarar que “…[había] dos datos desconocidos” (3.5) y que “…de uno se [resolvía] el otro…” (3.6); además su domino conceptual quedó de manifiesto por los símbolos que introdujo en 3.7, en donde explicitó la interpretación que dio a la “x”, o en 3.20, donde denotó cierta comprensión de las propiedades del signo “=” al realizar la misma operación a ambos lados de la igualdad. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al explicar detalladamente su solución, al contestar correctamente todas las preguntas del problema, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al exponer una solución distinta a la que se habían mostrado en el foro hasta ese momento y al ser clara en su exposición. Finalmente, Jeymi demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

Segunda participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos

(5.17) ya que bueno vamos a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres
(5.18) entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61
(5.19) seria h+m=61
(5.20) pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 al numero de hombre
(5.21) esto seria
(5.22) h+7=m
(5.26) bueno por lo tanto nuestro sistema de acuaciones seria
(5.27) h+m=61 h+7=m
(5.28) creo jeje

La segunda participación de Jeymi se dio cuando el tutor le pidió cambiar su método de solución para resolver el problema. Pareciera que en esa oportunidad ella experimentó un estado de presunción porque, entre otras cosas, usó *mitigadores* tanto en su procedimiento como al rematar su participación; en ese proceso recurrió a estos elementos léxicos cuando tradujo literalmente cada enunciado del problema del lenguaje natural al lenguaje algebraico: por ejemplo, al traducir el enunciado “el número de mujeres excede en 7 al número de hombres” utilizó el mitigador “sería” (5.21) antes de plantear la ecuación correspondiente, “h+7=m” (5.22), a diferencia de su primera intervención en donde usó el enfatizador “nos queda” (3.18 y 3.22). Al finalizar su intervención ella utilizó el mitigador “creo jeje” (5.28) que da la impresión de que ella dejó abierta la posibilidad de error en el planteamiento de su sistema que, como ya se ha dicho, dejó sin resolver. Finalmente, parece que ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* porque para formular el sistema de ecuaciones no se apreció un sustento distinto a la traducción literal de los enunciados del problema al lenguaje algebraico, y no abundó sobre el significado conceptual de las letras o relaciones que ella introdujo, como lo hiciera en su primera intervención.

Alerta de una posible dificultad conceptual

Del análisis de los posibles estados epistémicos que experimentó Jeymi al presentar distintos métodos de solución se concluyó, de acuerdo a lo que se explicó, que en su primera intervención Jeymi probablemente experimentó certeza, y que en cambio vivenció un estado de presunción en su segunda participación. Esto alertó a los investigadores y los llevó a suponer que en esa segunda participación, Jeymi quizá tenía alguna dificultad conceptual, específicamente con la variable, aún cuando sus procedimientos y resultados en primera instancia eran correctos. Se decidió entonces analizar sus procedimientos usando el Modelo 3UV[1] (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de la variable.

En su primera intervención Jeymi inicialmente identificó la presencia de dos incógnitas al explicitar "…hay 2 datos desconocidos…" (3.5) (aspecto I1 de la variable como incógnita) pero inmediatamente reconoció una correspondencia entre las variables al mencionar "…de una se resuelve el otro…" (3.6) (aspecto F1 de la variable en una relación funcional). Para obtener el valor de la incógnita "cantidad de hombres" (aspecto I4 de la variable como incógnita) ella le asignó la literal "x" (3.7), la interpretó como "hombres" (3.8) aunque del contexto se infiere que se refería a la "cantidad de hombres" (aspecto I2 de la variable como incógnita). Posteriormente, utilizó esa literal para plantear la ecuación correctamente, x+(x+7)=61 (3.11) (aspecto I5 de la variable como incógnita), simplificó esa expresión (3.18) y realizó la misma operación a ambos lados de la igualdad (3.18) (aspectos G2 y G4 de la variable como número general). Una vez que obtuvo la cantidad de hombres, Jeymi la sustituyó en la expresión con la que representó la cantidad de mujeres (3.24) para obtener la respuesta, 34 mujeres (aspecto F2 de la variable en una relación funcional). Finalmente, sumó las dos cantidades para verificar el total de alumnos en la clase (3.26), 61 alumnos (aspecto I3 de la variable como incógnita).

En su segunda intervención (cuando planteó el sistema de ecuaciones) Jeymi en (5.18) identificó dos cantidades: el número de mujeres y de hombres (no explicitó que se trataban de incógnitas), en (5.17) les asignó las literales "h" y "m" y tradujo literalmente del lenguaje común al lenguaje algebraico el enunciado del problema para plantear el sistema de ecuaciones (aspecto I5 de la variable como incógnita): en (5.19) del enunciado "la suma de dos cantidades es 61" obtuvo la ecuación h+m=61 y en (5.22) del enunciado "el número de mujeres excede en 7 al número de hombres" obtuvo la ecuación m=h+7. Su intervención finalizó con el planteamiento correcto del sistema en (5.27), que dejó sin resolver.

El análisis precedente dejó ver a los investigadores que cuando Jeymi utilizó la representación "x", mostró flexibilidad en el uso de la variable dejando ver que ella contaba con las habilidades necesarias para obtener su valor y verificarlo. Incluso, mostró cierta madurez en el manejo del signo igual al utilizar el método de la balanza para obtener el valor de la literal. Esta flexibilidad y habilidades no las manifestó cuando en su segunda intervención recurrió a una representación distinta (h y m). A diferencia del significado que

---

[1] El Modelo 3UV distingue aspectos de los tres usos de la variable. *Aspectos de la variable como incógnita:* I1 Reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.I2 Interpretar la variable como valores específicos.I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación

un enunciado verdadero.I4 Determinar la cantidad desconocida.I5 Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. *Aspectos de la variable como número general:* G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general.G4 Manipular la variable simbólica. *Aspectos de las variables en una relación funcional:* F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas. F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
le otorgó a “x”, parece que Jeymi consideró esas literales “h” y “m” sólo como abreviaturas de las palabras “hombres” y “mujeres” perdiendo el significado de variables en toda su extensión; una muestra es que se refirió a esas literales como ‘cantidades’ (5.18).

Adicionalmente, y posiblemente relacionado con lo anterior, ella no percibió la relación entre las ecuaciones del sistema que ella misma enunció y, al carecer de razones, ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la familiaridad al dar cuenta de su sistema acudiendo únicamente al parafraseo del enunciado del problema. Por ejemplo, para explicar el planteamiento de la ecuación h+7=m (en lugar de m+7=h) ella sólo utilizó parte del enunciado del problema (“ya que el número de mujeres son las que exceden a el número de hombres”) y no hizo referencia al uso de las variables o a las relaciones funcionales entre variables, como lo hiciera en su primera intervención (“hay dos incógnitas” o “de una se resuelve la otra”). Todo ello probablemente le impidió resolver el sistema y determinar el valor de las incógnitas, que sí obtuvo cuando planteó una sola ecuación.

Principales Hallazgos

En la investigación se pudo constatar la eficacia del instrumento para identificar los posibles estados epistémicos que experimentó el sujeto de este estudio al resolver un problema matemático en el contexto de un foro virtual. A partir de este análisis fue posible distinguir la forma en que ella sustentó sus afirmaciones y el nivel de comprensión del concepto de variable que presentó en cada planteamiento. Cuando ella experimentó certeza mostró una comprensión conceptual de la variable que no se vio reflejada cuando los investigadores detectaron un estado de presunción en ella. Esto permitió suponer que cuando esta estudiante vivenció un estado de presunción quizá sólo activó esquemas basados en la familiaridad que le alcanzaron sólo para plantear el sistema y que la posible ausencia de razones (derivada tal vez de la falta de comprensión conceptual que desencadenó una representación distinta de la variable) le impidió continuar con la resolución.

Lo anterior deja ver que estudiar la trayectoria de los estados de certeza (o presunción) de los alumnos permite detectar posibles obstáculos conceptuales y determinar la forma en que ellos sustentan sus afirmaciones matemáticas. Esta conclusión puede ser útil en la práctica del tutor (y de cualquier docente de matemáticas) porque el análisis que él realice de los estados epistémicos que experimentan sus estudiantes puede ayudarle a identificar los posibles obstáculos que ellos tienen con algún concepto matemático. En el reporte que aquí se expone, fue posible identificar las dificultades que la profesora que se tomó como caso de estudio tenía con el concepto de la variable cuando experimentó un estado de presunción, a pesar de que sus resultados y procedimientos eran correctos (en primera instancia).

Lo antes dicho nos llevó a identificar otro fenómeno que se dio específicamente en el caso de Jeymi, la profesora del estudio: que su certeza está relacionada con sus niveles de comprensión y con la activación de esquemas epistémicos basados en razones, y que sus estados de presunción parecen estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales. Puede resultar interesante para el lector saber que este escenario no parece ser el más frecuente, lo cual se mostrará en otros reportes que los autores están actualmente preparando.

Referencias

Abelson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist*, *43(4)*, 267.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 205-221). USA: Springer.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–18). California: Sage Publications.

Harding, J. (1978). What is action-research in schools? *Journal of Curriculum Studies, 10(4),* 355-357.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24(4),* 389-399.

Hyland, K., & Milton J. (1997). Qualification and Certainty in L1 and L2 Students. *Journal of second Language Writing, 6(2)*, 183-205.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30,* 437-455.

Rigo-Lemini, M. (2013 [a]). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Rigo-Lemini, M. (2013 [b]). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la escuela primaria. Estudio del profesor. En Berciano A., Gutiérrez G., Climent N., & Estepa A. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao: SEIEM.

Sánchez-Upegui, A. (2009). Nuevos modos de interacción educativa: análisis lingüístico de un foro virtual. *Educación y Educadores*, *12(2)*, 29-46.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.* México: Editorial Trillas.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Currículum oficial de matemáticas y Cultura de Racionalidad

Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
mrigolemini@gmail.com
Sergio Gonzalo **Rodríguez** Rubio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rrsergg@yahoo.com.mx

Resumen

En la ponencia se analiza un material curricular oficial para las matemáticas de la educación secundaria, a la luz de los componentes de la noción de 'Cultura de Racionalidad': Creencias, Normas de Sustentación, Normas Heurísticas, y Normas sobre Reparto de Responsabilidades (entre otros aspectos). Se argumenta que el enfoque didáctico del currículum analizado, centrado en un enfoque hacia el descubrimiento –basado en procesos empíricos e inductivos–, va a 'contraflujo' en relación a otras propuestas curriculares internacionales (como las de Estados Unidos e Inglaterra), lo cual debe de alertar no sólo a las autoridades responsables del desarrollo curricular sino a todos los implicados con la educación matemática del país.

Palabras clave: análisis curricular, cultura de racionalidad, justificación matemática, educación secundaria, aprendizaje.

Antecedentes

Existen diferencias entre el currículo formal y el currículo que el profesor ejecuta cotidianamente en su clase. La divergencia entre el currículo puesto en práctica y lo que oficialmente se espera ha sido reconocida no sólo por los investigadores (Stein, Remillard y Smith, 2007, p. 321) sino por autoridades educativas responsables de la planificación y el desarrollo curricular (e.g., SEP, 2006, p. 29).

Los expertos en el tema han comenzado a investigar a los actores y las circunstancias (siempre complejas) que eventualmente pueden estar en el origen de las diferencias entre el currículo escrito y el formal, enfocando su interés, entre otras cosas pero de manera privilegiada, en los profesores (con sus marcos de comprensión y significación y en interacción con sus alumnos). Sin embargo –y a pesar de que existen análisis muy interesantes sobre los contenidos de (probabilidad) de los documentos curriculares (e.g., Sánchez, 2009) y de que las autoridades educativas conminan continuamente a los profesores a guiar su práctica educativa considerando los materiales curriculares oficiales (v. Lineamientos para la organización y el funcionamiento de los Consejos técnicos escolares, 2013, p. 13)–, los expertos parecen haber puesto escasa atención en el análisis del currículo mismo –aunque sea un factor que potencialmente incide en algunos aspectos de la práctica docente y que puede representar un obstáculo para que el profesor concrete las disposiciones oficiales curriculares (Stein, Remillard y Smith, 2007)–.

En continuidad con dicha línea de investigación, en el presente documento se hace un análisis de los materiales curriculares mexicanos aprobados por las instancias oficiales (Secretaría de Educación Pública) en la Reforma a la Educación Básica del año 2011. En el perfil de egreso de la Educación Básica precisado en el Plan de estudios (SEP, 2011a) se afirma que "El nivel de secundaria atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo" (p. 53) y se plantea que [a su egreso] "el estudiante formula y valida conjeturas; busca argumentos para validar procedimientos y resultados (p. 53)... argumenta y razona al analizar situaciones ... valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y modifica, en consecuencia, los propios puntos de vista (p. 43). Considerando el papel que en los distintos materiales curriculares mexicanos se le da al razonamiento y la argumentación, en esta presentación se analizan dichos materiales curriculares desde la perspectiva de la sustentación y el razonamiento. Se argumenta que el foco de los nuevos materiales está en los procesos de descubrimiento, a diferencia de la propuesta anterior –elaborada en la década de los noventa–, en la que además de considerar el enfoque heurístico se ponía atención a la prueba (localmente) deductiva.

Marco Interpretativo y razones de su elección

La prueba es una actividad inherente a la matemática disciplinar (Hanna y de Villiers, 2008). Por ello, la prueba o las 'pruebas en vías de desarrollo' (prácticas de explicación y justificación no necesariamente deductivas y por tanto menos sofisticadas que la prueba formal; Hanna y de Villiers, 2008, p. 330) debieran resultar imprescindibles en las clases de matemáticas (de ello han dado cuenta investigadores como Hanna, 2001; Stylianides, 2007).

Es en los profesores en los que naturalmente recae la responsabilidad de enseñar las distintas formas de prueba (Cfr., Franke, Kazemi y Battey, 2007, p. 227), ya que –como sostiene Cobb– "es importante no dejar al propio juicio de los alumnos la tarea de validación" (Cit. en Hanna y Janhke, 1996, p. 886). A los docentes les toca "crear las condiciones para conseguir que los alumnos comprendan los roles del razonamiento y de la prueba dentro de las matemáticas" (Hanna y de Villiers, 2008, p. 329): considerando su nivel de escolaridad, ellos deben poder ayudar a los alumnos a abrirse a las ideas de la argumentación matemática y a desarrollar los elementos críticos del razonamiento deductivo (Harel y Sowder, 2007, p. 833), lo que incluye la formulación de conjeturas y de generalizaciones, y el reconocimiento de este tipo de pensamiento cuando se presenta por otros (cfr. NCTM, 2000, p. 18).

Si bien las actividades de argumentación, justificación y prueba que el profesor eventualmente anima o desarrolla en su clase son, como ya se explicó, centrales en la ayuda pedagógica que él les puede brindar a sus alumnos, esas actividades justificativas no se reducen a acciones aisladas basadas en la aplicación de ciertas técnicas de validación y razonamiento (e.g., la reducción al absurdo, la formulación de contraejemplos, la inducción y la comprobación o la deducción de propiedades de las matemáticas), por más importantes que éstas sean.

En la clase de matemáticas los maestros –deliberada o involuntariamente– comparten, (negocian o imponen) a los alumnos creencias, prácticas sistemáticas, normas de acción e interacción y actitudes en general (Franke, Kazemi y Battey, 2007, pp. 237-239); específicamente, por tanto, comparten (negocian o imponen) también las que se relacionan con lo que el grupo considera (conciente o inconcientemente) como lo 'razonable' (Balacheff, 2000). Esto incluye, entre otras cosas, los criterios y tipos de sustentación que el colectivo acepta para justificar las verdades matemáticas (o en otros términos, las normas sociomatemáticas correspondientes a lo que ahí se asume como una explicación aceptable); o bien, las reglas relativas al reparto de obligaciones en relación a quién le toca argumentar y a quién valorar y sancionar los argumentos de los otros, entre otras cosas. En la clase de matemáticas, en suma, los maestros –en conjunción con sus alumnos– promueven una subcultura que descansa en los distintos aspectos y procesos concernientes a la sustentación y justificación. En el marco de la presente investigación, a esta subcultura se le ha denominado "Cultura de racionalidad".

La Cultura de racionalidad: una caracterización

Las comunidades que se agrupan en los salones de clase de matemáticas instauran y comparten su propia Cultura de racionalidad, la cual está asociada a un contenido matemático específico y depende del nivel de conocimientos que el grupo tiene sobre dicho contenido.

La Cultura de racionalidad está conformada por los siguientes componentes:

a. Un conjunto de compromisos, supuestos y creencias que (en mayor o menor grado) comparte el colectivo, en torno a las matemáticas y sobre el campo matemático específico; sobre cómo enseñarlo y sobre cómo se aprende en el ámbito escolar (con posturas claramente distintas entre el profesor y sus alumnos);

b. Un bagaje de verdades matemáticas (relacionadas con el campo específico y con los conocimientos que posee la comunidad sobre el tema) que el colectivo suele considerar como evidentes o por lo menos, ciertas;

c. Las normas de sustentación, es decir, el bagaje de esquemas de sustentación que el colectivo suele activar con el propósito de apoyar o justificar la verdad de los enunciados de contenido matemático (relacionados con el campo particular) que surgen en el aula. En el marco de esta investigación, a esos esquemas de sustentación se le denominan 'Esquemas epistémicos de sustentación' (Rigo, 2009; 2013);

d. Las normas de interacción y de reparto de responsabilidades. Se trata del reparto de obligaciones en relación al agente de clase que le corresponde certificar la pertinencia, viabilidad, o validez de los esquemas aplicados y la veracidad de los resultados;

e. Un conjunto de hábitos que regulan las disposiciones afectivas que los militantes del grupo experimentan hacia los procesos de sustentación y los resultados que de ahí se derivan

f. Un conjunto de hábitos que comparten los agentes de clase que los lleva a activar prácticas meta-cognitivas a través de las cuales toman conciencia de las circunstancias en las que en clase se pusieron en juego determinados esquemas epistémicos o bien, de los enunciados que se aceptaron sin justificar; entre otras muchas.

En síntesis, la Cultura de racionalidad influye en la determinación de los recursos en los que la comunidad confía para aceptar una creencia o un enunciado matemático como verdadero y los mecanismos sociales que tiene para certificar sus justificaciones y explicaciones. En clase de matemáticas el alumno, entonces, no sólo se ejercita en la aplicación de herramientas particulares para sustentar y validar; en ese ámbito el alumno aprende a participar activamente en las prácticas derivadas de la Cultura de racionalidad que prevalece en su grupo (Wenger, 2001).

En el apartado **Análisis de resultados** se emplea esta particular óptica en el análisis de los materiales curriculares que las autoridades educativas mexicanas propusieron para la materia de matemáticas en el año 2011, así como materiales curriculares para esa misma materia, correspondientes a 1993.

Metodología

Tomando como foco el tema de la justificación matemática, se hizo una revisión sistemática y a profundidad de los documentos oficiales que sirven de guía a los profesores de educación secundaria en México. La siguiente tabla muestra esos documentos y los apartados que se revisaron de cada uno.

Tabla 1
Documentos oficiales revisados.

Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas (SEP 2011a)	Plan de estudios 2011. Educación Básica (SEP 2011b)	Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas Batanero, Gutiérrez, Hoyos, López, Llinares, Sáiz y Sánchez (2011)	Planes de clase
Primera parte Propósitos Estándares curriculares Enfoque didáctico Organización de los aprendizajes Segunda parte Guía para el maestro	Perfil de egreso de la educación básica Campos de formación Pensamiento matemático	La cultura en el salón de clases El desarrollo del razonamiento matemático Aprender a demostrar en matemáticas	Primero, segundo y tercer grados

En los tres apartados de la primera parte de los Programas se puso énfasis en los procesos de descubrimiento, exploración, justificación y prueba, por ejemplo, cuáles son las formas o los niveles que proponen de justificación; si en una primera revisión, los procesos de razonamiento son inductivos o deductivos, etc. También se puso atención en ver si proponen alguna guía que contemplara cuál debería ser el papel del profesor y del alumno respecto a dichos procesos. En el cuarto apartado se hizo la revisión e identificación de los contenidos de los tres grados que incluyeran procesos o acciones de justificación, argumentación o validación. La búsqueda se hizo a través de palabras clave, entre las que se incluyen: explicar, justificar, argumentar, conjeturar, validar o deducir; palabras que denotan acciones que se considera están relacionadas con lo que en la Cultura de racionalidad se les denominó normas sociomatemáticas de sustentación y justificación. Posteriormente se hizo un análisis específico de cada contenido para ver qué tipo de procesos de sustentación o justificación implican, lo que llevó, para profundizar en el análisis, a la revisión de los planes de clase correspondientes.

Los planes de clase son parte del material que se le brinda al profesor y son un referente del tipo de actividades y situaciones que se tienen que implementar para la enseñanza de los contenidos de los Programas. Además contienen sugerencias y orientaciones relacionadas con las actividades. Así para el análisis de los planes de clase correspondientes a cada contenido que se identificó previamente en los Programas que contienen alguna palabra clave, interesó ver los procesos de sustentación o justificación que se promueven con las situaciones que se proponen, así como las responsabilidades que el profesor y el alumno tienen respecto a esos procesos.

La revisión de la *Guía para el maestro* (segunda parte de los Programas) tuvo la finalidad de conocer las sugerencias específicas que le dan al profesor, relacionadas con la justificación de procedimientos y resultados, y del Plan de estudios sólo se consideraron para el análisis los apartados: Perfil de egreso y Campos de formación, porque son los que presentan información referente a lo que se espera que los alumnos hagan en cuanto a la justificación en matemáticas.

Por último, del documento *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas,* al ser, como se indica en el mismo documento, un material de apoyo que le ofrece al docente información sobre el aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas; interesó analizar, por una parte "La cultura en el salón de clases", para ver qué diferencias o similitudes se encontraban respecto a la que se propone en el marco de la investigación que aquí se reporta, y por otra para conocer y analizar la información que presenta en cuanto a los procesos de justificación.

Análisis de Resultados: Un enfoque empírico inductivo de las matemáticas

En el apartado se exponen algunos aspectos sobresalientes de la Cultura de racionalidad que subyace a la propuesta curricular oficial instituida en el 2011. Para el análisis se consideraron, sobre todo, lo relativo a las creencias y supuestos, y a las normas de sustentación y descubrimiento. En el documento se expone lo correspondiente al primer grado de secundaria ya que, desde la perspectiva de los autores, se considera que el material resulta suficiente para ilustrar lo que en el documento se argumenta.

Compromisos, supuestos y creencias generales

En los materiales curriculares consultados se identificó una creencia matriz sobre las matemáticas y su didáctica, relacionada con el tema del razonamiento y la explicación; se trata del supuesto que está en la base del enfoque didáctico que descuella en el proyecto curricular mexicano de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: de que "los alumnos formulen conjeturas y elaboren explicaciones para determinados hechos numéricos o geométricos" (Propósitos de estudio de las matemáticas para la educación básica, SEP, 2011b, p. 13). La misma idea se encuentra en el Perfil de egreso (SEP, 2011a, p. 53), donde se sugiere que: "A lo largo de la Educación Básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica [entre otras cosas], formular y validar conjeturas, y buscar argumentos para validar procedimientos y resultados" (p.53).

Un supuesto análogo, pero referido ya no sólo al aprendizaje sino también al ámbito de la enseñanza lo plantean Batanero, Gutiérrez, Hoyos, López, Llinares, Sáiz y Sánchez (2011, p. 33); ellos postulan la conveniencia de que el profesor mantenga "permanentemente la exigencia de que los alumnos proporcionen explicaciones, justifiquen y expliquen de manera adecuada los procedimientos seguidos"

Así, en el enfoque que es posible distinguir en los documentos sobre políticas generales se considera a "las matemáticas como una ciencia que enfatiza la heurística y las aproximaciones inductivas;... considerando que su rol más significativo en el aula es la investigación, exploración y justificación informal", de manera semejante a los puntos de vista que subyacen (o subyacían) a otros desarrollos curriculares (v. Hanna, 2001, p. 10).

Si bien a nivel del discurso explícito que se expone en dichos materiales curriculares también se hace mención a procesos deductivos, como por ejemplo cuando en el Perfil de egreso se plantea que “El nivel de secundaria atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo”, en los hechos, es decir, en las prácticas matemáticas de aula que se proponen en los Contenidos y los Aprendizajes esperados incluidos en los Programas de estudio (SEP, 2011b), también predomina, y de manera ostensible, una concepción de las matemáticas en la que imperan las actividades de exploración, descubrimiento y las aproximaciones inductivas y empíricas. En el apartado siguiente se ofrecen evidencias de ese compromiso.

Normas de sustentación y de descubrimiento

De los 107 Contenidos que en los Programas de estudio de los tres grados de educación secundaria (2011b) se proponen para la materia de matemáticas, sólo en siete de ellos se hace referencia explícita a términos como ‘explicación’, ‘justificación’ o ‘deducción’, mientras que en ocho, aunque no se mencionan explícitamente sí aparecen (sobre todo los de ‘explicación’ y ‘justificación’) en el apartado de los Aprendizajes esperados correspondientes (2011b). Con el propósito de analizar los procesos argumentativos que subyacen a la propuesta curricular, en lo que sigue se introduce un marco interpretativo.

Criterios de análisis para procesos heurísticos, de generalización y prueba

En el contexto de este trabajo se ha elaborado un marco interpretativo que tiene como objetivo analizar los procesos de descubrimiento, exploración, verificación y sustentación sugeridos en los contenidos de los Programas de estudio (2011b); el marco analítico se describe en la Tabla 2. Los criterios que integran el marco interpretativo se emplearán para descubrir y tipificar los esquemas epistémicos que aparecen en dichos contenidos y se han diseñado tomando como base el trabajo de Mason (1996), el de Radford (2006a; 2006b) y el de García de León (2012), para el caso de la generalización; se apoyan en el de Hanna (2001), para el caso de visualización, y en el de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005), para los usos de la variable.

Tabla 2

Criterios de análisis para procesos heurísticos, de generalización y de prueba.

Tipo de Esquemas epistémicos		*Tipo de actividad cognitiva*
Esquemas Empíricos	1:	Análisis de casos particulares y trabajo empírico
Esquemas Empíricos; Esquemas Inductivos.	2:	Identificación de regularidades para uno o varios casos específicos (e.g., mediante ensayo y error)
Esquemas Deductivos (asociados a la heurística): · Esquema basado en la sintaxis algebraica; · Esquemas visuales; · Esquemas procedimentales (i.e., en los que se sustenta la veracidad del enunciado en los algoritmos realizados).	3:	Establecimiento de propiedades generales a través de la generalización para conjuntos infinitos; distinción de características que permanecen y que varían; identificación de estructuras subyacentes al problema
Esquemas deductivos de verificación: · Esquema por instanciación; · Esquema visual; · Esquema de análisis de casos particulares; · Prueba matemática.	4:	Verificación y tareas de comprobación y/o justificación de los resultados obtenidos (e.g., a través de la comprobación en un caso; del argumento visual; de la prueba matemática)

Con base en el marco interpretativo antes expuesto, en la Tabla 3 se expone el análisis de los cinco contenidos correspondientes al primero de secundaria en los que se mencionan las palabras 'justificación', 'explicación' o 'deducción'. En la primera columna aparece la descripción del Contenido tal como se encuentra en el documento oficial; en la tercera columna se hace una descripción breve de las tareas sugeridas, y en la segunda se hace referencia al numeral asociado al esquema epistémico que subyace a cada tarea.

Tabla 3

Análisis de Contenidos del primer año de secundaria.

Descripción de contenidos	Tipos de Esquemas Epistémicos y tareas	
Contenido: 7.1.5. Que los alumnos expliquen con lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas del perímetro y del área, expresen con una fórmula generalizada el área de algunas figuras geométricas e interpreten el uso de la literal como número general, aplicando diversos valores para el cálculo.	1: 3:	Calcular perímetros y áreas específicas de cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio; Enunciar la expresión de una fórmula general del perímetro y del área de las figuras antes mencionadas, con base en argumento visual y deducción algebraica.
Contenido: 7.2.6. Justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares con apoyo de la construcción y transformación de figuras. Que los alumnos deduzcan la fórmula general para calcular el área de un polígono regular.	1: 2: 2: 3: 2: 3:	Calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadrados específicos; Calcular perímetro y área de pentágono regular específico; Calcular el perímetro de polígonos de 8 y 10 lados generales; Enunciar la fórmula para calcular perímetro de cualquier polígono, con apoyo de argumentos visuales y deducciones algebraicas para fines de simplificación; Establecer la fórmula para área de hexágono y octágono (argumento visual y deducción algebraica); Establecer la fórmula del área de cualquier polígono regular (deducción algebraica).
Contenido: 7.3.5. Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares. Que los alumnos establezcan las relaciones de variación del apotema, perímetro y área en función de la medida de los lados de polígonos regulares y justifiquen sus respuestas	3: 3: 4:	Establecer una propiedad matemática general: la apotema y el perímetro de un polígono regular varía de igual forma (doble, mitad, triple) que la variación del lado; el área crece al cuadrado en relación al crecimiento del lado; Para el caso del apotema y el lado se propone un argumento visual: Verificar la conjetura en casos particulares.
Contenido: 7.3.6. Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas. Que los alumnos interpreten el factor constante fraccionario como dos operadores enteros y lo apliquen para resolver diversos problemas.	1: 3:	Aplicar Esquema por instanciación de una fórmula: la de la aplicación de un factor escalar; Establecer una propiedad matemática general: la aplicación sucesiva de factores es equivalente a la aplicación del producto de dichos factores (a partir del análisis de un caso. Esquema procedimental, i.e, basado en los procedimientos aritméticos específicos realizados).
Contenido: 7.4.3 Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la	1:	Analizar casos particulares: calcular la longitud de la circunferencia entre el diámetro;

circunferencia y el área del círculo. Explicitación del número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Que los alumnos: Justifiquen la fórmula para calcular el perímetro del círculo; que analicen la relación que existe entre la medida del diámetro y la circunferencia; y que establezcan la relación que existe entre r^2 y el área del círculo y con base en esto justifiquen la fórmula para calcular el área del círculo.	2: 3: 1: 3: 1:	Identificar regularidades aritméticas: π como la razón de la longitud de la circunferencia y el diámetro; Justificar la fórmula para el perímetro del círculo (deducción algebraica de lo anterior); Calcular razones de diámetros y razones de circunferencias correspondientes; Establecer una propiedad matemática general: la invarianza de la razón del diámetro y la circunferencia respectiva (con base en evidencias numéricas. Esquema procedimental); Aportar evidencia empírica para dar viabilidad a la fórmula del área del círculo, mostrando que $\pi r^2 < 4 r^2$.

Como se puede observar de la Tabla 3, la didáctica que se sugiere para prácticamente todos los Contenidos tiene como punto de partida algún esquema empírico de análisis de casos particulares, y también en la mayoría de ellos se sugiere cerrar con la verificación de lo conjeturado, también con base en dicho análisis particular. En todos ellos se proponen actividades de exploración, conjeturación y de comunicación de las propiedades inducidas, ya sea en lenguaje natural o en lenguaje simbólico algebraico. Si bien los casos analizados tratan de procesos de generalización que parten de análisis de casos particulares, resultado de inducciones, en todos ellos se pueden identificar actividades deductivas, las que como bien apunta Polya (1965) suelen surgir cuando se llevan a cabo trabajos de descubrimiento.

En el caso de los contenidos analizados correspondientes al primer curso de Secundaria, los Esquemas Epistémicos Deductivos que se pudieron identificar son de dos tipos. Por un lado, se trata de lo que en la literatura han llamado 'argumentos visuales' (Hanna, 2001) y que en el marco del presente trabajo se denominan Esquemas Epistémicos Visuales. En el caso de los Programas bajo estudio estos Esquemas Visuales cumplen más bien una función heurística de evidencia, que de justificación o de apoyo para algún argumento del tipo de las pruebas matemáticas; Por otro lado, se encontraron también inferencias basadas en la sintaxis específica del lenguaje algebraico (e.g., como en los procesos de simplificación). En este caso es preciso señalar que la presencia de ese registro de representación, con su simbología asociada la cual conduce de manera directa a la generalización (Radford, 2006a; 2006b), no garantiza una comprensión de la misma (García de León, 2012, p. 2); esto es, el empleo de la variable no confirma la comprensión de sus distintos significados y de los diferentes papeles que juega dentro del discurso matemático (cf. Ursini *et al.* 2005).

De modo que los esquemas epistémicos que se sugieren en el primer año de secundaria son, en la mayoría de los casos, de tipo Empírico; los hay de tipo Inductivo (categoría 2) y también se encuentran los Esquemas Deductivos, que como se explicó, están basados en argumentos visuales o en deducciones apoyadas en la sintaxis algebraica (categoría 3). Hay también casos de verificación, pero sólo a través de comprobaciones en casos particulares o argumentos visuales. En ningún caso se detectó argumentos del tipo de la prueba matemática, inscritos en organizaciones localmente deductivas.

Los resultados del análisis antes expuesto corroboran lo dicho en el anterior apartado, en el sentido de que la orientación que prevalece en los contenidos matemáticos incluidos en los Programas de estudio (2011b) para el primero de secundaria, es hacia la exploración, el descubrimiento, y las actividades de conjeturación, todas ellas basadas en procesos empíricos y prioritariamente inductivos. La actividad deductiva queda reducida a los argumentos visuales y al álgebra. El análisis del segundo y tercer grado –que no se exponen por razones de espacio– arrojó resultados muy semejantes.

Por otra parte, cabe aclarar que se identificaron muy escasas actividades de organización de conocimientos, de disposiciones afectivas y emocionales (salvo por el hecho de que los procesos de justificación se incluyen como una actitud dentro de los Estándares Curriculares –expuestos en 2011b–), y prácticamente se identificaron muy pocas actividades metacognitivas, sobre todo del tipo de las que se mencionan en el apartado f que aparece en la descripción de la Cultura de racionalidad.

Discusión de resultados

La Cultura de racionalidad que se puede distinguir en los documentos curriculares del 2011 difiere, en un aspecto muy importante, de aquella que permea a la propuesta curricular mexicana para la materia de matemáticas elaborada en el año 1993. Ésta queda de manifiesto en el Libro para el Maestro (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994), del cual se expone en lo que sigue algunos fragmentos que, se considera, permiten ilustrar y sustentar lo que en el presente escrito se argumenta.

En el Libro para el Maestro citado se sugiere que

> Las conjeturas surgen de la manipulación de objetos concretos o de la observación de lo que ocurre en varios casos particulares, es decir, de un razonamiento inductivo. Para validar estas conjeturas los alumnos necesitan aprender a razonar lógica, deductivamente. Este es un objetivo que requiere de una larga preparación para alcanzarse... (Alarcón *et al.* 2001, p. 243)

De entrada se puede apreciar el enfoque del proyecto didáctico: no separar, pero sí diferenciar, los procesos de descubrimiento –de tipo exploratorio, empírico, inductivo– de los procesos de validación y justificación, que se pide sean de carácter deductivo, como se podrá mejor apreciar en lo que sigue. Se mencionan además aspectos didácticos y pedagógicos, relacionados con los largos períodos de tiempo que son necesarios para incubar y asimilar esos procesos demostrativos y las técnicas asociadas.

En el texto citado se hace además una distinción –que para fines didácticos resulta primordial– entre los razonamientos deductivos formales, y lo que Hanna y de Villiers (2008) llaman la 'prueba en desarrollo':

> No debe confundirse la iniciación gradual al razonamiento deductivo propuesta por los programas con una presentación axiomática de la geometría. La idea es que en situaciones escogidas por el profesor, los alumnos produzcan conjeturas a partir de la exploración de algunos casos particulares y que aprendan gradualmente a rechazarlas construyendo un contraejemplo, o las prueben mediante un razonamiento deductivo. (Alarcón *et al.* 2001, p. 243)

El enfoque didáctico aquí otra vez es claro: la actividad propiamente matemática no termina en las actividades heurísticas; resulta imprescindible transitar muy suavemente, pero de manera decidida hacia la construcción de demostraciones deductivas, del tipo de las que se proponen en las matemáticas. Y para concretar su propuesta sugieren, entre otros, el siguiente ejemplo:

> Explorar lo que ocurre cuando se unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, ¿qué figuras obtiene? Los alumnos podrán darse cuenta, a partir del análisis de varios casos particulares, que se forma un paralelogramo. En una segunda fase, el profesor podrá orientarlos [sugiriendo trazos auxiliares, e.g.] a que proporcionen un argumento deductivo para

> demostrar que se trata efectivamente de un paralelogramo. Una vez que se tiene la demostración se les podrá preguntar a los alumnos si la misma sirve también para el caso de un cuadrilátero no convexo y si se quiere plantear otro problema relacionado con el anterior, pedirles explorar y demostrar qué ocurre cuando se unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero. (Alarcón *et al.* 2001, pp. 243-244)

La tarea heurística que se propone promueve la activación equilibrada de esquemas epistémicos tanto inductivos como deductivos: si bien el punto de partida son los Esquemas basados en el análisis de casos particulares, y Esquemas visuales, los autores sugieren también emigrar hacia los argumentos formales, es decir, hacia las pruebas semejantes a las inscritas en la geometría. Adicionalmente, en el fragmento citado, como en los anteriores, se puede identificar un claro reparto de responsabilidades así como prácticas de organización disciplinar diversas. A estas prácticas de organización también hacen referencia en el siguiente fragmento:

> También es importante no demostrar teoremas o resultados aislados, sino proponer actividades que permitan a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes. (Alarcón *et al.* 2001, p. 245)

Por otra parte, el aspecto afectivo también es considerado por los autores del texto citado:

> El aprendizaje de la geometría será más interesante para los alumnos si no se intenta probar desde el principio resultados evidentes, por ejemplo, que *en un triángulo a lado mayor se opone ángulo mayor*. Las actividades propuestas deberán hacer sentir la satisfacción que acompaña al descubrimiento de hechos hasta entonces desconocidos y de su relación con lo que uno ya sabía. Más adelante la atención del alumno se desplazará poco a poco de los resultados a sus demostraciones y comenzará a comprender por qué ciertos hechos necesitan demostrarse, aunque parezcan muy sencillos y evidentes. (Alarcón *et al.* 2001, p. 244)

Asimismo, el último párrafo hace referencia a prácticas metacognitivas, como las que se describen en f, las que los autores del texto retoman en la siguiente sugerencia: “Los alumnos deberán aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración y a redactar sus demostraciones” (p. 245).

Los autores, por otra parte, no descuidan los aspectos relacionados con la redacción y comunicación de resultados, aprovechando la oportunidad para que el profesor y sus alumnos tomen conciencia de las verdades aceptadas: “Se trata de presentar de manera matemáticamente correcta los resultados obtenidos durante la fase de investigación y búsqueda, distinguiendo con cuidado los resultados que se prueban de aquellos que se tomaron como ciertos o que ya habían sido probados antes”. (p. 245)

En la propuesta curricular del año 1993 se puede apreciar un enfoque hacia las matemáticas en el que se equilibran los procesos inductivos inmersos en las tareas de descubrimiento, por una parte, y los procesos demostrativos y de prueba inscritos en organizaciones localmente deductivas, por la otra (a), y se propone, también, que los agentes de clase identifiquen las verdades matemáticas demostradas de las que se han aceptado sin sustento (b). Se promueven actividades heurísticas y de sustentación, basadas en esquemas epistémicos tanto inductivos como deductivos; dentro de los últimos destacan sobre todo, la construcción de contraejemplos y las pruebas deductivas. (c). Se propone también un claro reparto de responsabilidades en relación a qué le toca hacer al profesor y a los alumnos (d); se habla de las disposiciones afectivas que hay que promover en los alumnos durante todos estos procesos argumentativos (e) y se insiste en la toma de conciencia de lo que se ha hecho y de su importancia (aspecto f). Como se comentó, muchos de estos aspectos no se encontraron en los materiales curriculares propuestos en al año 2011, lo que incluye también el Libro para el Maestro (en su edición de 2001).

Consideraciones finales

“La prueba –sostiene Hanna– continúa mereciendo un lugar prominente en el currículo matemático” (2001, p. 5). La investigadora sustenta su afirmación en dos ejemplos: el del currículum de matemáticas que se perfila en los Estándares elaborados por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y en el caso inglés. En relación a los Estándares del NCTM, la experta sostiene que mientras los publicados en 1989 “tenían un enfoque que enfatizaba la motivación hacia el argumento heurístico, lo que tuvo como resultado que se dejara de explotar el potencial de la prueba como una herramienta de enseñanza” (p. 10), los resultados de la reforma curricular llevada a cabo en Estados Unidos cambiaron ese acento. La nueva versión de los Principios y Estándares del NCTM (del año 2000) “remediaron esta situación al recomendar que el razonamiento y la prueba debían ser una parte del currículo de matemáticas a todos los niveles, desde el nivel preescolar hasta el grado 12” (Hanna, 2001, p. 10).

El caso de Inglaterra es en cierta forma análogo. Cierto es que a la fecha en la que Hanna escribió el artículo citado el currículo de matemáticas inglés todavía no había cambiado en su tendencia y acento hacia la heurística, sí en cambio se habían dado múltiples manifestaciones –específicamente a través de un manuscrito fechado en el año de 1995–, de expertos relacionados con el trabajo profesional de las matemáticas (de la London Mathematical Society, del Institue of Mathematics and its applications y de la Royal Statistical Society) reaccionando a esa orientación y reivindicando el papel de la prueba en el ámbito educativo.

A diferencia de esas tendencias internacionales, el currículum de matemáticas mexicano parece estar moviéndose en un sentido justamente opuesto. Valdría la pena que los responsables del desarrollo curricular y todos los que estamos involucrados en el acto educativo, consideráramos y evaluáramos con elementos teóricos y empíricos, esta circunstancia. Este documento tiene como propósito contribuir a ese análisis, que si bien puede resultar muy pertinente para el caso mexicano, también lo puede ser para el caso internacional.

Referencias

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: SEP.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas [Proof processes among mathematics students]*. Bogotá: una empresa docente, Universidad de los Andes.

Batanero, C.; Gutiérrez, A.; Hoyos, V.; López, G.; Llinares, S.; Sáiz, M. y Sánchez, E. (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. México: SEP.

Franke, M. L., Kazemin, E., y Battey, D. (2007). Mathematics Teaching and classroom practice. En F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 225-256). Charlotte, NC: NCTM

García de León, M. A. (2012). Procesos de generalización en ambiente logo: Estudio longitudinal con educadoras en formación inicial. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, Especialidad Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, Special issue on “Proof in Dynamic Geometry Environments”, *44* (1-2), 5-23.

Hanna, G., y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Hanna, G., y de Villiers, M. (2008). ICMI study 19. *ZDM–The International Journal of Mathematics Education, 40*(2), 329-336.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: U. S. A. National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. In N.Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching. London: Kluwer academic Publishers

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: *NCTM*.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Radford, L. (2006a) Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Psychology Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2006b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42* (3), pp 237-268.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria [The culture of rationality in the primary school mathematics classroom]*. Unpublished PhD. Dissertation, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Sánchez, E. (2009), La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México, en *Educación Matemática*, 21 (2), pp. 39-77.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2006). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular. Matemáticas.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011a). *Plan de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011b). *Programas de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

Stein, M. K., Remillard, J. y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 319-370). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.* México: Editorial Trillas.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* España: Ediciones Paidos América, S. A.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Cyberformação Semipresencial: uma possibilidade de formação continuada de professores de matemática

Vinícius **Pazuch**
Bolsista da CAPES – Processo nº: 6101-13-5
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
viniuch@hotmail.com
Maurício **Rosa**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
mauriciomatematica@gmail.com

Resumo

O movimento processual da Cyberformação Semipresencial, vivido por professoras de matemática do Ensino Fundamental e o pesquisador (primeiro autor do artigo), participantes de um grupo com dimensão colaborativa é o cenário para a relação com o saber estabelecida consigo mesmo, com os outros e o mundo (Charlot, 2000). Em particular, neste trabalho, intentamos mostrar quais aspectos vividos em Cyberformação Semipresencial influenciam na relação com o saber em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos. Os pressupostos teóricos contemplam reflexões sobre a Cyberformação (Rosa, 2011b) e a relação com o saber (Charlot, 2000). Os aspectos metodológicos revelam a natureza qualitativa dos dados produzidos no processo de Cyberformação Semipresencial em consonância com as análises. A unidade de análise é o tempo vivido (Bicudo, 2003), mostrando as construções e reconstruções de concepções dos participantes no processo de formação continuada (Imbernón, 2010). Assim, acreditamos que discutir/refletir sobre o uso de Tecnologias Digitais em formação continuada na perspectiva da Cyberformação é uma possibilidade de transformação dos sujeitos (professores e estudantes) e das ações no âmbito escolar.

Palavras chave: Tecnologias Digitais, Geometria, Saber.

Considerações introdutórias

Neste trabalho apresentamos os pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam o processo de Cyberformação Semipresencial, vivenciado por professoras de matemática do Ensino Fundamental e o pesquisador. Este processo é pano de fundo para as reflexões analíticas em relação ao saber. Em particular, “O saber é produzido pelo sujeito confrontado a outros sujeitos, é construído em ‘quadros metodológicos’. Pode, portanto, ‘entrar na ordem do objeto’; e torna-se, então, ‘um produto comunicável’ [...]” (Charlot, 2000, p.61). Neste sentido, apresentamos nossa questão-diretriz: “**Quais aspectos vividos em Cyberformação Semipresencial influenciam na relação com o saber, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos?**”

Em consonância com a questão-diretriz, entendemos a partir de Charlot (2000) que o saber é um produto comunicável, baseado em relações construídas ao longo da vida, com outros e com o mundo. Assim, por entendermos que as relações estabelecidas no tempo vivido (Bicudo, 2003) são importantes, mostramos a formação continuada de professores como espaços de criação, de pesquisa, de imaginação... (Imbernón, 2010). Ou seja, não é uma formação por acaso, mas uma formação vinculada à concepção de Cyberformação, a qual se fundamenta em transformar continuamente o saber em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos produzidos na formação inicial e na prática docente (Rosa, Pazuch & Vanini, 2012). Entendemos que esta formação não é por acaso, pois há uma intencionalidade de uso de Tecnologias Digitais (TD) para produzir relações com o saber, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos.

Pressupostos teóricos

A concepção de Cyberformação abrange “[...] a formação vista sob a dimensão específica (matemática), pedagógica e tecnológica que assume o uso de [Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e/ou Tecnologias Digitais], em específico, o ciberespaço em ambiente de EaD sob a perspectiva do *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC* [...]” (ROSA, 2011b, p. 11 - grifos do autor). Em específico, o *ser-com-TIC* “[...] além de estar no mundo, cria um novo mundo, ou micromundo [...] (Rosa, 2008, p.118)”, em que, o sujeito necessariamente está “plugado” ao meio tecnológico; o *pensar-com-TIC* pode permitir a construção de conhecimentos matemáticos “[...] nas relações com o mundo e com os outros” (Rosa, 2008, p. 106), que abrange a (trans)formação das ideias matemáticas possíveis com este meio tecnológico (computador, *software*, vídeo); e o *saber-fazer-com-TIC* “[...] é manifestado pelas ações intencionais efetuadas com o mundo, comigo mesmo e com os outros. Nesse sentido, ações desempenhadas na atividade, na construção de um produto, na prática [...] (Rosa, 2008, p. 136)”.

A Cyberformação Semipresencial (Pazuch & Rosa, 2012) evidencia o termo *semipresencial*, que tem a finalidade de contemplar momentos presenciais e a distância, integrando as características, potencialidades e desafios apresentados por cada ambiente. Em específico, a construção da Cyberformação Semipresencial converge com a ideia de *continuum*, proposta por Tori (2009). O *continuum* potencializa a ideia de processos de idas e vindas (Imbernón, 2010), não-lineares, e hipertextuais (Bairral, 2007) com o uso de TD.

Entendemos que o próprio movimento de Cyberformar-se é contínuo. E, sobretudo, na concepção de Cyberformação, é importante o professor evidenciar que o uso TD não é mecânico, técnico, ou baseado na utilização de recursos tecnológicos como auxiliares ao ensino e à aprendizagem. Mas, sobretudo, considerar as TD como meios que participam efetivamente na produção do conhecimento matemático (Rosa, Pazuch & Vanini, 2012).

Assim, concebemos as TD como meios possíveis de transformações cognitivas, em vez de uma “inserção forçada” de TD no contexto escolar. Então, o uso só se concretiza pela transformação (*ser-com*) do professor com o meio tecnológico, mobilizado pelo *pensar-com* as potencialidades geradas pelo vídeo, pelo *software*, sem “receitas”, muitas vezes, sem conforto, mas, com a intenção de *saber-fazer-com-TD*, o que não pode ser feito com outro recurso ou meio, em termos das dimensões tecnológica, pedagógica e matemática (Rosa, 2011b).

A *dimensão matemática* é entendida como o horizonte no qual emergem aspectos produzidos com TD, diferentemente da simples resolução de exercícios e/ou da matemática baseada em algoritmos. Ou seja, não é em momento algum nossa pretensão fazer uma transposição de “problemas” presentes em livros didáticos para um meio tecnológico (*software*, vídeo), por exemplo.

A *dimensão pedagógica* pode estar atrelada à reflexão sobre as concepções de ensino e de aprendizagem retratadas no âmbito da formação docente, seja ela, inicial ou continuada. Entendemos que a dimensão pedagógica pressupõe dialogar/transformar/questionar as construções teóricas concebidas pelo professor ao longo do tempo vivido (Bicudo, 2003), assim como, as práticas estruturadas nesse ínterim, segundo tendências pedagógicas (Fiorentini, 1995) que marcaram (ou marcam) tempos/espaços ‘povoados’ pelos professores em constituição/formação.

> Enfocar o fenômeno do tempo vivido é firmar nosso olhar na vida, no modo pelo qual ela flui. O que significa dizer, no modo que vivemos os instantes que em um *continuum* se interligam no fluxo do próprio movimento de ser. Não se trata, portanto, de um somatório de instantes entendidos como pequenas unidades, mas de um todo primitivo constituído por uma corrente, cujos elos são formados pelo nosso olhar que, organizadoramente, reúne momentos presentes, atribuindo sentido à totalidade do percurso realizado e a realizar (Bicudo, 2003, p. 33-34).

Por sua vez, a *dimensão tecnológica*, segundo Rosa (2011b), no contexto da Cyberformação se consolida ao considerarmos o meio tecnológico (Internet, vídeo, *software* etc.) como parte do processo cognitivo, abrindo diferentes fronteiras, fluxos de potencialização do tópico matemático estudado. Em específico,

> O *software,* o gráfico, a imagem, o *applet*, o texto, o vídeo, o *chat* etc., são maneiras e meios que materializam as ações potenciais que ocorrem no ciberespaço. Essas ações estão nos *softwares* destinados à matemática ou mesmo em ambientes virtuais de aprendizagem que possibilitam atividades educacionais as quais podem produzir conhecimento matemático (Bicudo & Rosa, 2010, p. 45).

Neste sentido, Rosa (2011b) pontua a necessidade de usar TD para possibilitar transformações cognitivas, em que, de fato, se produzam práticas docentes diferentes/potenciais em relação àquelas possíveis em outros ambientes ou com o uso de outros recursos. Por exemplo, “[...] *Softwares* que geram imagens e até movimentos, no sentido de reprodução dos fenômenos físicos, qualitativamente diferentes em relação à visualização, percepção e compreensão” (Bicudo & Rosa, 2010, p. 53-54).

Em termos gerais, a Cyberformação admite (ou é) multiplicidade de dimensões (psicológicas, filosóficas, sociológicas, culturais), além das dimensões matemática, pedagógica e tecnológica que se entrelaçam e permitem conceber esta formação. Nesse sentido, que estas dimensões podem interferir na produção do saber comigo mesmo, com os outros e com o mundo. Entendemos estas dimensões,

> [...] no sentido de tempo vivido, quando enfocamos o processo de formação e auto-formação, incluindo nele mudanças de crenças, construção e reconstrução de concepções, auto-percepção de sermos históricos, lançados ao mundo e à responsabilidade de mantermo-nos sendo [...] (Bicudo, 2003, p. 57).

Ao encontro com a responsabilidade de mantermo-nos sendo que a formação continuada de professores que ensinam matemática com TD se estabelece e pode permitir a construção e reconstrução de concepções sobre a matemática, sobre as TD, sobre o mundo, sobre o mundo-vida.

> Mundo-vida, entendido como a espacialidade (modo de sermos no espaço) e temporalidade (modos de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e demais seres vivos e natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas, e de outra natureza. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um nós e para a comunidade (Bicudo, 2009, p.141).

A construção de concepções está ligada à relação com o saber, que se dá consigo mesmo, com os outros e o mundo (Charlot, 2000). Na literatura há um conjunto de saberes docentes (Tardif, 2002), por exemplo, estruturado por uma classificação envolvendo tipologias. Assim, os olhares sobressalientam que "[...] o sujeito *é* relação com o saber. Estudar a relação com o saber é estudar o próprio sujeito enquanto se constrói por apropriação do mundo – portanto, também como sujeito aprendiz" (Charlot, 2005, p. 42 – grifos do autor).

Aspectos metodológicos

A metodologia está vinculada com a questão diretriz, de natureza qualitativa, pois [...] engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações ou opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...] (Bicudo, 2004, p. 104). A ideia do subjetivo permite a interpretação das falas, dos gestos e das ações das professoras e do pesquisador em *com-junto*[1] (Rosa, 2008), os quais estiveram em Cyberformação Semipresencial.

O contexto de investigação foi constituído por um grupo (pesquisador e quatro professoras de matemática do Ensino Fundamental que atuam em uma Escola Pública Estadual do Rio Grande do Sul, Brasil). Salientamos que a participação neste grupo de estudos foi voluntária, uma das características da concepção de grupo colaborativo (Fiorentini, 2004). A dimensão colaborativa (Nacarato et. al., 2006), converge para o estabelecimento de uma parceria em que "[...] todos trabalham conjuntamente (co-laboram) e se apóiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo" (Fiorentini, 2004, p. 50).

---

[1] "Para mim, na verdade, é um con-junto que permeia a construção do conhecimento, em con-junto seres humanos-mundo, homens-coisas […]" (Rosa, 2008, p.125).

O objeto matemático de investigação contemplou conceitos de geometria euclidiana no Ensino Fundamental (sólidos geométricos, figuras geométricas (triângulos, quadrados), entes geométricos (ponto, reta, plano) e suas propriedades), negociados e definidos, considerando o contexto vivido pelas professoras na escola, os objetivos e as questões contempladas na Prova Brasil para 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental. Esta última inferência se justifica pelas avaliações que os estudantes e a escola estão vinculados.

Para tratar deste objeto matemático, o planejamento foi realizado pelo grupo na perspectiva do *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TD* (Rosa, 2011b). O planejamento aconteceu em um movimento não-linear, vivido pelas professoras neste tempo cronológico (agosto de 2011 até dezembro de 2012), de idas e vindas. Isso instaurou outra lógica, que não é sequencialmente composta, mas que depende do "*como*", do "*por quê*", do "*para quê*" se cria/se produz, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos nesse (ou com esse) espaço-tempo de Cyberformação Semipresencial.

Os *instrumentos de produção de dados* aconteceram em três momentos distintos. No *primeiro*, realizamos entrevistas semiestruturadas (gravadas em áudio) com as professoras (em agosto de 2011), visando conhecer o processo de formação inicial e continuada, a constituição da prática docente, o ensino de geometria, a relação com o uso de TD em aulas de matemática e o processo de constituição dos professores de matemática (aspectos pessoais e profissionais).

O *segundo* momento englobou encontros presenciais (filmados) e a distância (setembro de 2011 a dezembro de 2012), via Plataforma Moodle e seus recursos (fórum, *e-mail*, *wiki*), os quais registraram as interações. Nos dois momentos (presenciais e a distância) foram organizadas e refletidas/realizadas: leituras e análises de artigos sobre o uso de TIC (Rosa, 2011a), *softwares* e Internet (Bairral, 2009), *softwares* de geometria dinâmica (Scheffer et. al., 2011; Amaral, 2011; Torres, 2012) e da Cyberformação (Rosa, 2011b; Rosa, Vanini & Seidel, 2011); atividades já produzidas ou relacionadas aos artigos mencionados e o planejamento de uma atividade com TD via *wiki*, a qual permitiu sua construção e reconstrução em qualquer espaço/tempo.

A *wiki* (atividade) contempla cinco momentos: (1) análise de vídeos do YouTube; (2) investigações geométricas no *software* Poly; (3) tratamento de conceitos e propriedades de triângulos e quadrados no *software* de geometria dinâmica Geogebra; (4) estudo de retas e pontos por meio do *Google Maps* e (5) produção de uma narrativa digital (Murray, 1997) pelos estudantes. Estes momentos constituíram a *wiki* (atividade) e se entrelaçam em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos.

O *terceiro momento* de produção de dados foi o desenvolvimento da atividade (co-produção com os estudantes na Laboratório de Informática da Escola), em que as ações docentes recorrentes ao processo de ensinar e de aprender matemática com TD se configuraram. As aulas das professoras foram filmadas de outubro de 2012 a dezembro de 2012.

Para este artigo, serão usadas **interações de um fórum de discussão** na Plataforma *Moodle*, o qual apresenta concepções de uso de TD e os olhares compósitos das professoras mediante a leitura do artigo proposto (Rosa, 2011a) e **o conteúdo de um *e-mail***, que corresponde a um dos momentos em que o planejamento foi discutido. Este e-mail salienta a continuidade do planejamento no mundo-vida dos professores. Em específico, o referido *e-mail* foi enviado por uma das professoras aos demais colaboradores do grupo.

A unidade de análise – **tempo vivido** - constituída, para este artigo, é o horizonte que se apresenta entre o movimento metodológico estabelecido em confluência com os pressupostos teóricos. Portanto, a unidade de análise reflete o construir e re-construir concepções sobre o uso de TD para ensinar matemática, a partir das interações no fórum e do conteúdo do *e-mail*. Dessa forma, as interações com os outros e com o mundo, podem transformar os modos como 'eu' me relaciono com o saber, ou ainda, quais aspectos se mostram em sujeitos/professores que precisam aprender para ser (Charlot, 2000), ou, para virem-a-ser professores que ensinam matemática com TD.

O tempo vivido: um olhar analítico

Neste artigo consideramos argumentos sobre: "**Quais aspectos vividos em Cyberformação Semipresencial influenciam na relação com o saber, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos?**", questão que permite olhar para a própria formação/constituição docente como tempo vivido. Nesse viés, segundo Imbernón (2010, p. 94) "[...] quando a formação deixar de ser um espaço de 'atualização' para ser um espaço de reflexão, formação e inovação, com o objetivo de os professores aprenderem [...]" pode se inaugurar a constante e contínua transformação de práticas docentes por meio da produção do saber. "A formação move-se sempre entre a dialética de aprender e desaprender" (Imbernón, 2010, p. 94), em termos da relação com o saber, sob as dimensões matemática, pedagógica e tecnológica, por exemplo. Em outras palavras, *como* o processo de Cyberformação Semipresencial colocou "em xeque" os saberes cristalizados ou até mesmo vistos ao longo do tempo, mas não vividos (Bicudo, 2003)?

No Excerto 1 - sobre o uso de TD nos processos de ensinar e aprender - são discutidos o porquê e para quê usar TD, evidenciando as reflexões/discussões apresentadas em Rosa (2011a). Esta foi uma das leituras propostas na Cyberformação Semipresencial (*Segundo Momento*). Para tanto, a partir da leitura de Rosa (2011a) o pesquisador apresentou duas questões a fim de descortinar as interações com as professoras (Fórum 1).

Excerto 1

Fórum 1 - Atividades Semipresenciais e TIC por Pesquisador - quinta, 8 setembro 2011, 00:51
Neste fórum a intenção é refletir sobre o artigo - Atividades semipresenciais da informação: Moodle - uma plataforma de suporte ao ensino. Cada um pode propor questões, discordar, comentar... A ideia é pensar com o artigo. Pensei em duas questões iniciais: 1) Quais as ideias fundamentais no artigo em sua opinião? 2) Em que o artigo contribui para pensar sua prática docente no Ensino Fundamental?
Re: por Professora 1 - sexta, 9 setembro 2011, 00:42
[...] O artigo contribuiu para refletir o quanto é importante o uso da tecnologia, mas que ela seja utilizada com um objetivo pré-estabelecido, não sendo usado somente por usar, ou seja como recurso, por tendência, moda etc... Mas realmente para pensar de outra forma, a construção do conhecimento.
Re: por Professora 2 - domingo, 11 setembro 2011, 11:07

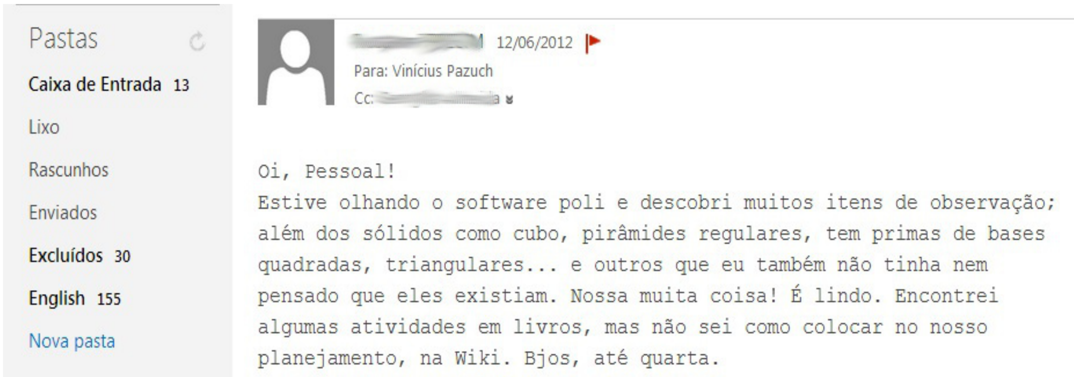
As TIC estão no contexto de quase todos indivíduos, e trazer esta ferramenta para dentro da sala de aula e como instrumento de aprendizagem poderá possibilitar leituras que não seriam vistas sem o uso dessas tecnologias. Achei muito importante o autor salientar que apesar da modernização e da evolução tecnológica, o uso das TIC no processo educacional deve ser pensado pelo professor como algo que irá propiciar para o aluno uma visão que não teria na sala de aula: "ampliação de possibilidades de construção do conhecimento". E a questão é: "Como a tecnologia pode permitir que eu pense de forma 'diferente' sobre determinada argumentação?" O artigo permite pensarmos como iremos usar as TIC nas nossas aulas, não como um modismo (como a Professora 1 disse) [...]
Re: por Professora 3 - terça, 4 outubro 2011, 13:00
o artigo nos leva a pensar que no meio de toda essa tecnologia virtual que a sociedade está vivendo nós professores temos que fazer nosso papel de intermediador e deixar os alunos experimentarem as possibilidades dela [...]
Re: por Professora 4 - quinta, 6 outubro 2011, 09:37
No rumo em que o mundo está tomando hoje, com celulares de última geração, aparelhos eletrônicos modernos nós professores teremos que estar atualizados a estas mudanças e pensar com tecnologia inovando as nossas aulas com vídeos e softwares. O artigo contribui para refletir o quanto é importante o uso de tecnologia na sala de aula.

Desta forma, as reflexões sobre o tempo vivido podem interferir e determinar as concepções sobre o uso de TD na escola, na vida, no mundo, no mundo-vida. Ao olhar para o Excerto 1, duas professoras argumentam que para integrar TD em sala de aula é necessário estabelecer outra relação com o saber, em termos pedagógicos: "*realmente para pensar de outra forma, a construção do conhecimento*" (Professora 1), e *"uma visão que não teria na sala de aula*" (Professora 2). Isto é, estabelecem a possibilidade de **construção** de outra concepção (Bicudo, 2003) para pensar matematicamente com o uso de TD, corroborando a concepção de Cyberformação (ROSA, 2011b).

Ao olhar para o conteúdo do artigo (Rosa, 2011a) as professoras 1 e 2 também mencionaram aspectos sobre o uso de TD: "*O artigo permite pensarmos como iremos usar as TIC nas nossas aulas, não como um modismo...*" (Professora 2) e "*não sendo usado somente por usar, ou seja, como recurso, por tendência, moda etc...*" (Professora 1), manifestando a preocupação evidenciada em Rosa (2011a), a qual sugere uma **reconstrução** de concepções (Bicudo, 2003) sobre o uso de TD, em termos tecnológicos, 'migrando' do modismo para a possibilidade de ampliação da relação com o saber.

Ao lançar o olhar para: "*teremos que estar atualizados a estas mudanças e pensar com tecnologia inovando as nossas aulas com vídeos e softwares*" (Professora 4), sugere uma obrigação ao professor. Segundo Imbernón (2010) a atualização é importante, mas não basta. A criação de processos de formação e auto-formação transcende a atualização e passa pela mudança de crenças (Bicudo, 2003), mesmo porque a 'inovação' pode não ser caracterizada dependendo do *software* e/ou vídeo a ser usado e da forma como serão usados. O Excerto 2 (conteúdo do *e-mail*) vem ao encontro de que a atualização ou inovação pode não modificar a relação o saber.

Excerto 2



Tardif (2002) argumenta que os saberes docentes são *temporais*, pois contemplam "[...] um processo de vida de profissional de longa duração do qual fazem parte dimensões identitárias e dimensões de socialização profissional, bem como fases e mudanças (Tardif, 2002, p. 262)". A professora encontra a visualização (*"e outros que eu não tinha nem pensado que eles existiam"; "É lindo."*) como novidade, em termos matemáticos, mas que se confronta "*Encontrei algumas atividades em livros, mas não sei como colocar no nosso planejamento, na Wiki*" recorrendo ao 'velho', o que desenha a necessidade de uma **reconstrução de concepções**, em relação aos aspectos pedagógicos e tecnológicos, com o objetivo de *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TD.*

Considerações finais

Deste movimento de Cyberformação Semipresencial estabelecemos o tempo vivido como unidade analítica, apontando quais aspectos vividos nesta formação continuada influenciam na relação com o saber, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos. Os aspectos da construção e reconstrução de concepções proeminentes dos discursos das professoras determinam/estabelecem a relação com o saber e as transformações cognitivas a serem perseguidas para vir-a-ser um professor que ensina matemática com TD.

Por isso, olhar para o tempo vivido é estabelecer relações com o mundo-vida, com os modos de sermos no espaço-tempo, com os outros seres humanos, com a cultura digital. Nesse viés, as concepções docentes se manifestam, sendo discutidas/refletidas e modificadas por meio das ações efetuadas ao pensar matematicamente com o uso de TD.

Deste processo de Cyberformação Semipresencial, como movimento contínuo, visamos mostrar as contribuições que este deflagrou para e na transformação das ações docentes. Salientamos que estas ações docentes foram baseadas no constructo teórico *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com* tecnologias (Rosa, 2008) e sob a análise dos aspectos teóricos do tempo vivido (Bicudo, 2003), consolidando em uma possibilidade de formação continuada de professores que ensinam matemática.

Referências

Amaral, R. B. (2011) A argumentação matemática colaborativa em um ambiente *on line*. *Acta Scientae*. v. 13, n. 01, p. 55-70.

Bairral, M. A. (2007) *Discurso, Interação e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais a Distância*. Seropédica: UFRRJ.

Bairral, M. A. (2009) *Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: UFRRJ.

Bicudo, M. A. V. (2003) *Tempo, tempo vivido e história*. Bauru, SP: EDUSC.

Bicudo, M. A. V. (2004) Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, M. C. & Araújo, J. L. (Ed.) *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, p. 99-112.

Bicudo, M.A.V. (2009) O estar-com o outro no ciberespaço. *ETD – Educação Temática Digital*, Campinas, v.10, n.2, p.140-156.

Charlot, B. (2000) *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed.

Charlot, B. (2000) *Relação com o saber, formação dos professores e globalização*: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed.

Fiorentini, D. (1995) Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*. Campinas, SP, ano 3, semestral, n. 4, p. 1-37.

Fiorentini, D. (2004) Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C. & Araújo, J. L. (Ed.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 47-76.

Imbernón, F. (2010) *Formação continuada de professores*. Porto Alegre: Artmed, 2010.

Murray, J. H. (1997) *Hamlet on the Holodeck*: the future of narrative in cyberspace. New York: Free Press.

Nacarato et. al. (2006) Professores e futuros professores compartilhando aprendizagens: dimensões colaborativas em processos de formação. In: Nacarato, A. M. & Paiva, M. A. V. (Ed.) *A formação do professor que ensina matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, p. 197-212.

Pazuch, V. & Rosa, M. (2012) Qual formação de professores objetivamos? A Cyberformação Semipresencial como possibilidade de (Trans)formação . In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 16., 2011, Canoas, RS. *Anais*...Canoas, RS: ULBRA.

Rosa, M. (2008) *A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game*: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Rosa, M. (2011b) Cultura Digital, Práticas Educativas e Experiências Estéticas: interconexões com a Cyberformação de Professores de Matemática. In: Reunião Anual da Anped, 34., 2011b, Natal, RN. *Anais*... Natal, RN: Anped.

Rosa, M. (2011a) Atividades semipresenciais e as tecnologias da informação: Moodle - uma plataforma de suporte de ensino. In: Mattos, A. P. de. et. al. (Ed..) *Práticas Educativas e Vivências Pedagógicas no Ensino Superior*. Canoas: Ulbra, p. 135-147.

Rosa, M., Pazuch, V. &Vanini, L. (2012) Tecnologias no ensino de matemática: a concepção de Cyberformação como norteadora do processo educacional. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 11., 2012, Lajeado. *Anais...* Lajeado: SBEM - RS.

Rosa, M., Vanini, L. & Seidel, D. (2011) Produção do Conhecimento Matemático *Online*: a resolução de um problema com o Ciberespaço. *Boletim GEPEM*, v. 58, p. 89-114.

Scheffer, N. F. et. al. (2011) *Matemática e Tecnologias*: atividades de matemática para ensino fundamental e médio com a utilização de softwares gratuitos. Erechim/RS: FAPES.

Tardif, M. (2002) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Tori, R. (2009) Cursos híbridos ou *blended learning*. In: Litto, F. M. & Formiga, M. (Ed.) *Educação a distância*: o estado da arte. São Paulo: Pearson Education do Brasil. p. 121-128

Torres, A. C. (2012) El dinamismo de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Marzo de 2012, n. 29, p. 9-22.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: Lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales

Minerva **Martínez** López
Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
minemartinez2008@hotmail.com
M. Teresa **Rojano** Ceballos
Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rojanot@gmail.com

Resumen

Se presenta un estudio sobre la resolución de ecuaciones lineales realizado con alumnos de primero de secundaria, en el que se utiliza un modelo de la balanza en versión virtual y dinámica. Se adopta una perspectiva semiótica en la que las escenas del modelo interactivo se conciben como espacios textuales, que al ser leídos por el usuario, entran en un proceso en cadena de lectura/transformación, durante el cual hay producción de sentido. El análisis de los textos producidos por los alumnos, revela una evolución del trabajo de éstos con el sistema de signos del modelo hacia la manipulación simbólica en el sistema de signos del álgebra. Afirmamos que dicha evolución es resultado de la producción de sentido de parte de los alumnos respecto al método algebraico de resolución de las ecuaciones.

Palabra clave: Textos, espacios textuales, ecuaciones lineales, balanza virtual, semiótica.

Introducción

Los alumnos enfrentan retos y dificultades cuando se inician en el estudio del álgebra, por la limitación que tienen en el dominio de la sintaxis algebraica. Su apego al pensamiento numérico no les permite resolver ecuaciones; aún si son de tipo aritmético ($x \pm a = b$ siendo a y b números enteros y $a \geq b$). La dificultad es mayor cuando se les presenta otro tipo de ecuaciones tales como: $ax \pm b = cx \pm d$ siendo *a, b, c,* y d números enteros, ya que para dar solución a éstas, no es suficiente la inversión de operaciones, más bien se debe entender la operación de la incógnita. Cuando el estudiante se enfrenta a éste tipo de ecuaciones, sus soluciones se sustentan en las operaciones básicas de la aritmética o simplemente no se resuelven. Investigadores como: Booth, (1984); Filloy & Rojano (1989); Gallardo, (2002); Kieran, (2006); Rojano, (1999); Sfard & Linchevsky, (1994) han demostrado que los errores sintácticos aparecen con frecuencia en los procesos de solución de estudiantes que se encuentran entre los 11-16 años.

En esta investigación el principal propósito va encaminado en analizar los procesos evolutivos de los alumnos hacia el Sistema Matemático de Signos (SMS) del álgebra, a partir de su interacción con el sistema se signos del modelo de la balanza virtual. Específicamente, interesa investigar los procesos de producción de sentido, en los actos de lectura/transformación del Espacio Textual (ET) inicial constituido por el modelo de la balanza virtual y los subsecuentes actos de lectura/transformación del Texto (T) producido.

Antecedentes

Ante la problemática que se conoce en el campo de la resolución de ecuaciones lineales, también se ha estudiado el papel que juegan los modelos “concretos” y se han reportado tanto resultados favorables (Carraher & Schliemann, 1991; Filloy & Rojano, 1989; Rojano, 1985; Vernaud & Cortés, 1986; Vlassis, 2002), como algunas dificultades, limitaciones y obstáculos que pueden presentar dichos modelos. Uno de los retos a vencer al encontrarse trabajando con modelos concretos es el arraigo al modelo, ya que en algunas ocasiones, los estudiantes no logran abstraer las acciones realizadas para recuperarlas en la resolución de ecuaciones con los métodos algebraicos. M. Bonilla (2009), en su investigación que realiza hace mención que la unidad interactiva de la balanza virtual, utilizada como herramienta para introducir al alumno al estudio del álgebra a través de la resolución de problemas con ecuaciones lineales ha sido favorable, ésta investigadora sigue la ruta didáctica que dicho modelo platea hasta llegar a la resolución de problemas, así también, M. Martínez (2009) trabajó con el modelo de la balanza virtual, en su investigación demostró que la manipulación e interacción con dicho modelo, permite que los alumnos logren abstraer las acciones trabajadas en el modelo y las lleven a papel y lápiz, no obstante, se enfrenta a obstáculos en la operatividad de ecuaciones que presentan coeficientes negativos ya que para dar solución a éstos se observa el apego al modelo por parte de algunos de los participantes, también se tienen las soluciones negativas en el trabajo de papel y lápiz que no son aceptadas por parte de los alumnos. Algunos investigadores han señalado que las ecuaciones que incluyen sustracción de términos representan un obstáculo en el aprendizaje (Bruno & Martinón, 1997; Gallardo, 2002; Glaeser, 1981; Radford & Grenier, 1996; Vlassis, 2002, Rojano & Martínez, 2009).

En este documento se describe el análisis de las interacciones entre los alumnos y el sistema matemático de signos de un modelo de balanza virtual[1]. También se hace referencia a elementos teóricos como T y ET. Refiriéndonos al modelo de la balanza como un ET, con el que interactuaron los estudiantes y dieron lugar a la producción de significado y sentido, a través del acto de lectura/transformación.

Marco de análisis.

Con la finalidad de analizar los datos obtenidos en las entrevistas y hojas de trabajo que realizaron los estudiantes participantes, se utilizó la noción de T elaborada en el trabajo de Talens & Company (1984), ésta se entiende como el resultado de un trabajo de lectura/transformación hecho sobre un ET que produce sentido en la mente del sujeto.

> "El ET tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el T es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizado por una persona como consecuencia de un acto de lectura" (Puig, 2003).

En este estudio concebimos las escenas del modelo de la balanza virtual como una secuencia de ET, los cuales entran en proceso de lectura/transformación dando origen a nuevos T, que estarán en posición de ser leídos y transformados, así sucesivamente *ad infinitum*. Hemos adaptado elementos de la teoría sobre la relación tríadica (S, O, I) de Charles Sanders Peirce, para describir esa cadena de actos de lectura/transformación. En la teoría de Peirce, tanto S como I son signos, e I es un nuevo signo S´ que creará en una mente otro signo I´ como interpretante del objeto O. Así O enlaza las dos tríadas (S, O, I) y (S´, O, I´) y de ahí se deriva como mero referente para trabaja la condición de apertura del signo en un proceso de semiosis que no tiene fin (Peirce, 1987). En nuestro trabajo, dicho proceso de semiosis se aplica a textos y no a signos como en la teoría de Peirce, lo cual nos permite hablar de cadenas del tipo T/ET/T, en las que la distinción entre T y ET es una distinción entre posiciones en un proceso, ya que T como resultado de una lectura de ET, queda en una posición de un nuevo ET para ser leído (transformado) y así, *ad infinitum* (Puig, 2003). También incorporamos la noción de Sistema Matemático de Signos (SMS), que es el producto de un proceso de abstracción progresiva en distintos momentos de la enseñanza (Filloy, Rojano & Puig, 2008). Al realizar la lectura/transformación de un ET el alumno puede usar operaciones aritméticas, estratos del SMS del álgebra, utilizar los signos del modelo virtual y dinámico de la balanza o la combinación de todos ellos en los nuevos T producidos.
A continuación se presenta el modelo de enseñanza con el que se trabajó el estudio.

[1] Esta unidad interactiva "la balanza" fue desarrollada por el grupo de programación "Descartes" en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE) de México y forma parte de los materiales interactivos que la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha distribuido en las escuelas tele-secundarias del país.

Modelo dinámico y virtual de la balanza.

Está constituido por dos tipos de balanza: balanza simple y balanza con poleas.

Balanza simple

Este tipo de balanza se utiliza para trabajar ecuaciones del tipo $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = cx + d$ siendo *a, b, c* y *d* números enteros. Dentro de esta balanza se encuentran cuatro ET los cuales llamaremos: 1) hallando el valor de la incógnita, consiste en hallar el peso desconocido colocando pesas de una unidad en el platillo del lado derecho, 2) representación de la ecuación, aquí se utilizan pesas de  y de  las cuales se colocan en los platillos de la balanza para representar la ecuación que es asignada al azar, 3) resolución de ecuaciones, aparece la ecuación representada en la balanza y se debe de tirar pesas hasta encontrar el valor de "x" y 4) resolución de ecuaciones con el uso correcto de operaciones, se tiene la balanza fija donde las acciones que se realizan aparecen desplegadas del lado derecho (ver figura 1).

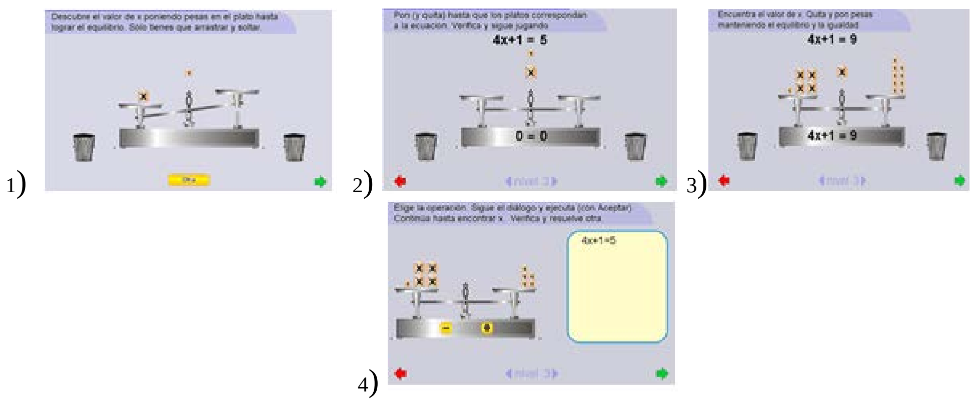
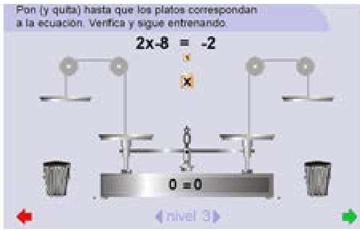


Figura 1. Las imágenes muestran los cuatro Espacios Textuales de "la balanza simple"

Balanza con poleas

Su estructura permite visualizar la "representación" correcta de una ecuación con términos negativos, ya que las poleas que la componen restan peso dando la idea de la representación de los negativos, porque los términos en sí; son todos positivos no existen pesos negativos. Esta balanza está constituida por tres ET: 5) representando la ecuación, al igual que en la balanza fija se colocan pesas de "x" o de una unidad, 6) resolviendo la ecuación, aquí el alumno puede transponer términos de derecha a izquierda y posteriormente eliminarlos para así hallar el valor de lo desconocido y 7) resolviendo la ecuación seleccionando la operación correcta, el alumno hace uso de la sintaxis algebraica utilizando la operación correcta, trabajando la ecuación como una transformación y verificando dichas transformaciones en la parte derecha. Este modelo de balanza se presta para que el alumno a través de la manipulación trabaje la transposición de términos, respetando así la metáfora del equilibrio y la eliminación de términos (ver figura 2).

5) 

6) 

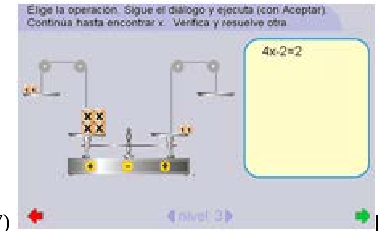
7) 

Figura 2. Espacios textuales que presenta la balanza con poleas para las ecuaciones que contienen términos negativos.

Método y recolección de datos

El estudio, es de corte cualitativo con intervención, participaron ocho estudiantes de primero de secundaria, de 12 y 13 años de edad los cuales no habían recibido instrucción alguna de tipo algebraico en la resolución de ecuaciones lineales. Se trabajó un pre-cuestionario conformado por tres apartados 1) balanzas diagramáticas, 2) ítems del tipo □ + 3 = 8, y 3) ecuaciones del tipo $x + a = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ (siendo *a, b, c* y d números enteros); la finalidad fue verificar los conocimientos y estrategias de solución que tenían los alumnos. En pantalla desplegable se explicó el funcionamiento del software y cada alumno trabajó de forma individual en la computadora, el estudio se llevó a cabo en seis sesiones. Al finalizar la enseñanza de cada sesión en el ET, se les proporcionaron hojas de trabajo las cuales fueron elaboradas con ítems de estructura semejante a la que manejan los ET trabajados. El objetivo fue conocer la evolución en el SMS del álgebra que emplea el alumno después del acto de lectura/transformación. Se aplicaron tres entrevistas. La primera se realiza después de la familiarización con el modelo y después de haber transitado por los tres primeros ET de la balanza simple (ver figura 1), esta entrevista se compone por siete ítems con estructura $x + a = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ siendo *a, b, c, y d* números enteros mayores a los que se trabajaron en los ET ya mencionados. La segunda entrevista se aplicó al terminar la sesión "*resolución de ecuaciones con el uso correcto de operaciones*", los ítems que lo constituyen contienen coeficientes y términos independientes con números mayores a los que presenta el ET del modelo. La tercera y última entrevista se aplica al finalizar los tres ET de la balanza con poleas, está constituida por ítems aritméticos y algebraicos con estructura que sale un poco fuera de la que se ha trabajado. El propósito general de las entrevistas, va encaminado a conocer más a fondo la ruta de pensamiento del alumno y los correspondientes SMS en los que el alumno realiza las acciones.
A continuación, se presentan resultados obtenidos en las hojas de trabajo y entrevistas de tres de los alumnos.

Análisis de resultados

Los alumnos participantes mostraron gran avance en la resolución de ecuaciones. Como resultado de los procesos de lectura/transformación del modelo, con la abstracción progresiva de un SMS lograron adquirir una sintaxis algebraica que permitió dar significado y sentido a cada uno de los nuevos T producidos por ellos mismos.

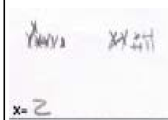
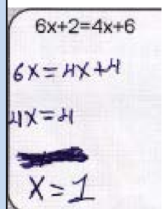
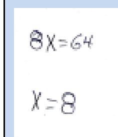
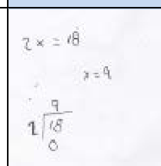
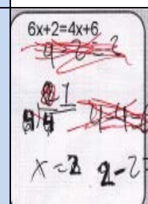
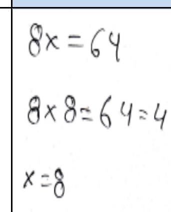
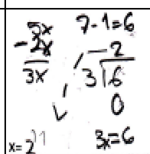
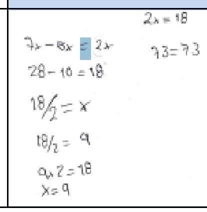
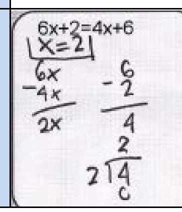
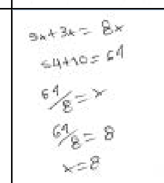
En el pre-cuestionario que se encontraba constituido por tres apartados *identificación del equilibrio, llenado del cuadro vacío y hallar el valor de la incógnita*, identificaron correctamente el equilibrio en las balanzas diagramáticas. Sus soluciones en los ítems *llenado del cuadro vacío*

(25 + □ = 85, □ + 188 = 53) se sustentan en ensayo refinamiento, es decir, realizan cálculos numéricos para hallar el valor buscado. Cuando se pide *hallar el valor de la incógnita*, no hay lectura correcta en la estructura de la ecuación, por lo tanto, las ecuaciones que presentan la ocurrencia de la incógnita en ambos lados no las resuelven y mucho menos las que presentan sustracción de términos.

Trabajo con la balanza simple

Al interactuar con los ET de la balanza simple, se desencadenan procesos de lectura/transformación en los cuales hay producción de sentido en las acciones que realizan en el modelo y que posteriormente aplican al trabajo en papel y lápiz, como se muestra en la tabla 1, Jonathan realiza sus propias producciones sígnicas para dar solución a la ecuación planteada, es decir evoca los intertextos de los ET trabajados en el modelo dinámico y a su manera lo ilustra. Damaris simplemente anota el resultado que es correcto pero no deja huella del desarrollo realizado y finalmente Bogar que nos deja ver la mezcla de un Sistema Matemático de Signos (SMS) tanto algebraicos como aritmético. Cuando en las hojas de trabajo y entrevistas se les presentan ecuaciones con coeficientes mayores a los trabajados durante la sesión de enseñanza, se advierte cómo se mantiene el apego al modelo concreto (balanzas diagramáticas). En el trabajo de los alumnos existe una mezcla de signos, tanto del modelo, como de la aritmética y del álgebra, que surgen como cadenas de textos, es decir   cada texto nuevo presenta características distintas al texto inicial. Las imágenes de cada T   presentado en la tabla 1, lleva consigo diferencias que no se contemplan en los T anteriores, la lectura/transformación modifica constantemente los ET que lee el alumno incluso los que él mismo produce. Jonathan inicialmente mantiene su apego al modelo realizando sus propias producciones sígnicas   para dar solución a la ecuación planteada, manipula la balanza fija y al trabajar la ecuación se equivoca, finalmente fortalece su SMS y abandona los intertextos (dibujos de balanzas) logrando dar solución con sus propia sintaxis. En el caso de Damaris podemos observar la mezcla de signos de la aritmética y el álgebra, se puede observar que en las actividades que se le han planteado con la balanza fija no existe producción de sentido, la corrección constante de las acciones realizadas demuestra la inseguridad que aún persiste en el trabajo de papel y lápiz, en la segunda entrevista demuestra un poco de confusión, con gran dificultad logra llegar a la respuesta correcta. La balanza fija permitió que algunos de los participantes utilizaran métodos propios de solución en las ecuaciones, incluyendo agrupación y simplificación de términos semejantes. En algunos casos persiste el trabajo aritmético,   los alumnos han adoptado estrategias de solución que les han permitido dar solución a las ecuaciones planteadas y que difícilmente dejaran atrás, tal es el caso de Bogar. (Ver tabla 1).

Tabla 1. *Ítems resueltos en el trabajo con la balanza simple.*

Alumno / ítems	$5x+1=2x+7$ Ítem resuelto después del trabajo "Resolución de ecuaciones"	$7x+10=5x+28$ Primera entrevista	$6x+2=4x+6$ Ítem resuelto después del trabajo en la balanza fija	$5x+3x=54+10$ Segunda entrevista
Jonathan				
Damaris				
Bogar				

Notas Las columnas que se encuentran sin color corresponden a respuestas que dieron los alumnos después de manipular la balanza y la sección colorida son soluciones dadas en las entrevistas.

Trabajo en la balanza con poleas.

El trabajo con la balanza simple fue de vital importancia para entender el ET de la balanza con poleas, la estructura de esta balanza permitió que los alumnos realizaran la transposición de términos, inicialmente de forma virtual y posteriormente llevarla a papel y lápiz en el álgebra simbólica. En la tabla 2, se puede observar como uno de los alumnos (Jonathan) hace uso del sistema de signos del modelo y del SMS del álgebra para trabajar la ecuación que se le presenta, los otros dos alumnos trabajan la ecuación como una transformación en forma vertical, no existe resistencia en trabajar con ecuaciones que contienen sustracción de términos. Realizan la transposición de términos para cambiar el signo menos y así poder hallar el valor de la incógnita. En el caso de Jonathan podemos observar que la manipulación de términos en éste tipo de ecuaciones es aceptable ya que realiza la transposición de términos semejantes y agrupación de los mismos aunque comete algunos errores de operación que no le favorecen al querer hallar el valor de la incógnita. En el caso de Emmanuel se muestra el uso correcto del SMS del álgebra, la lectura/transformación de los ET de la unidad interactiva favorecieron la producción de sentido en el desarrollo de las ecuaciones, llevando a la construcción de significado. Las acciones que los alumnos realizaron en el modelo ayudaron a evolucionar paulatinamente sus textos producidos en el nivel sintáctico algebraico. En el desarrollo de Bogar se puede observar que le ha costado trabajo modificar su SMS, ya que desde el inicio adoptó una estrategia que le ha facilitan dar solución a las ecuaciones planteadas y que también lo ha llevado a cometer errores, tal es el en la tercera entrevista donde invierte los términos al querer hallar el valor de equis y olvida el desarrollo que se aplica en los términos negativos. En esta tercera y última entrevista, se advierte como los alumnos son capaces de trabajar ecuaciones con una estructura distinta a las que presenta el modelo, ésta es: $x^2 + 2x = x^2 + 10$ (ver tabla 2), en el pre-cuestionario los alumnos no fueron capaces de dar solución a este tipo de ecuación, sin embargo al finalizar el trabajo con la unidad interactiva y con un poco de intervención el alumno logra resolver la ecuación planteada.

Tabla 2. La tabla muestra el trabajo realizado en la balanza con poleas. En la columna resaltada se muestran dos de los ítems que resolvieron los alumnos en la tercera entrevista.

Alumno / ítems	$7x - 8 = x - 2$ Resolución de ecuaciones en la balanza con poleas	$-4x = -4$ Resolución de ecuaciones en la balanza con poleas fija.	$-6 - 3x = -x + 4$ Entrevista 3	$x^2 + 2x = x^2 + 10$ Entrevista 3
Jonathan	$6x=6$ $x=1$	-4x=-4 $4=4x$ $x=1$	$-3x+x=6+4$ $-2x=10$ $-x=2$ $2=x$	$x^2+2x-x^2=10$ $0+2x=10$ $x=5$
Emmanuel	$\cancel{6x=6}$ 7x -8 = x-2 $x=1$	-4x=-4 $4=4x$ $x=1$	$0=-x+3x+6+4$ $0=2x\pm 10$ $-2x=10$ $x=-5$	$x^2+2x-x^2=10$ $2x=10$ $x=5$
Bogar	$7x-x=8-2$ $6x=6$ $x=6/6$ $x=1$	-4x=-4 $x=4/4$ $x=\boxed{1}$	$-3x+x=4+6$ $-2x=10$ $10/2=x$ $10/2=5$ $x=5$	$\cancel{2x}$ $x^2+2x-x^2=10$ $2x=10$ $\boxed{x=5}$

Con la perspectiva teórica adoptada, fue posible profundizar en los procesos de producción de sentido, así como visualizar las producciones sígnicas que dejaron impresas en los T producidos y esto se dio con base en la lectura/transformación de los ET del modelo virtual. Como se observó en las tablas 1 y 2, la adquisición de un SMS algebraico fue de manera gradual por medio de la interacción con los distintos sistemas de signos que corresponden a la balanza virtual.

Discusión final.

Al finalizar el estudio podemos afirmar que el modelo concreto virtual es una herramienta que favoreció el aprendizaje de la sintaxis algebraica en la resolución de ecuaciones lineales. Desde la perspectiva teórica adoptada, se puede decir que los ET del modelo dinámico son leídos y modificados no solo de forma mental sino también físicamente, provocando que exista producción de sentido en las acciones que se realizan en el modelo virtual, lo cual conduce a la construcción de significado. Como se muestra en las tablas 1 y 2, los ET de la balanza fija favorecieron la producción de sentido en los estudiantes participantes, ya que el observar las acciones realizadas al seleccionar la operación correcta permitió dar paso a la sintaxis algebraica, entendiendo el SMS del álgebra simbólica.

Investigadores como: Vlassis, (2002); Gallardo, (2002), Radford & Grenier, (1996) que se han dedicado a trabajar ecuaciones con sustracción de términos, han llegado a concluir que la sintaxis algebraica no enseñada correctamente provoca que los alumnos presenten confusión al trabajar el álgebra, específicamente la resolución de ecuaciones lineales. En esta investigación, podemos decir que el uso de la balanza con poleas permitió que los alumnos descubrieran la regla de transposición de términos en el trabajo de la adición y sustracción de los mismos (lo antes mencionado lo podemos corroborar con las entrevistas realizadas). Así también se dio la agrupación de términos semejantes. Todos los alumnos terminaron resolviendo y aceptando ecuaciones con sustracción de términos. Cabe mencionar que estamos hablando de ecuaciones que presentan la misma estructura a las trabajadas en el modelo, quedando exentas las ecuaciones con exponentes mayores que la unidad.

Para trabajar con esta unidad interactiva de la balanza, se requiere de una labor de enseñanza adicional para que el alumno pueda entender el funcionamiento del sistema de signos del modelo y de esta manera poder transferir las acciones a papel y lápiz, ya que el modelo por sí solo no conduce al aprendizaje deseado de las ecuaciones lineales. Se han realizado otras investigaciones con este modelo concreto que también apuntan al aprendizaje y resolución de ecuaciones lineales, las cuales han tenido intervención por parte de los investigadores porque como bien se dijo anteriormente el modelo virtual por sí solo no conduce a nada M. Martínez (2009), trabaja la resolución de ecuaciones lineales, ella busca la abstracción de la sintaxis algebraica por medio de la interacción y manipulación de las escenas del modelo. M. Bonilla (2009), indaga en la resolución de problemas verbales, iniciando con la resolución de ecuaciones lineales presentes en la unidad interactiva de la balanza virtual y M Bonilla (2013) realiza una investigación donde analiza cómo las *affordances* (cualidades de los objetos, o entornos, que permiten a un individuo realizar una acción) que se encuentran presentes en el Modelo de la Balanza virtual son reconocidas y transferidas por los sujetos a la sintaxis algebraica.

Al igual que otros modelos concretos, la balanza virtual también tiene sus limitantes, tanto en lo tecnológico, como en lo didáctico y en la metáfora del equilibrio. En lo tecnológico, podemos decir que se tiene la restricción a diez pesas tanto de equis como de una unidad, por lo que se recomienda utilizarla como material didáctico para la introducción en el tema resolución de ecuaciones lineales. Con respecto a lo didáctico nos encontramos frente a un modelo que solo considera coeficientes y soluciones enteras dejando de lado las ecuaciones con estructura decimal y por último dentro de la metáfora del equilibrio también tenemos limitantes puesto que la balanza no admite soluciones negativas. Como bien se mencionó anteriormente el modelo concreto que se utilizó en esta investigación es recomendable para trabajarlo como herramienta que nos permitirá iniciar de forma dinámica la introducción a la resolución de ecuaciones permitiendo facilitar y entender el trabajo venidero.

Agradecimientos

Al proyecto Conacyt (Ref. 168620), “Diálogos inteligentes con estudiantes de educación media y superior. El caso de los modelos parametrizados en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas”

Referencias.

Bonilla, M. (2009). *Del lenguaje natural al lenguaje simbólico: un estudio con alumnos de secundaria en la resolución de problemas verbales*. Tesis de maestría. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México.

Bonilla, M. (2013). ….. Tesis doctoral (en proceso)

Booth, L. (1984). *Algebra: Children´s strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics project*. Windsor; England: NFER-NELSON

Bruno, A. & Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(2), 249-258.

Carraher. & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México, Editorial Siglo XXI

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equation: the Transition from Arithmetic to Algebra, *for the learning of mathematics,* Montreal, Quebec. Canada, 9.2, (19-24)

Filloy, E.; Rojano T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.

Gallardo, A. (2002).The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra *Educational Studies in Mathematics, 49 171-192 Kluwer*

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres negatifs. *Recherche en Didàctique des Mathématiques*, *2*(3), 303-346.

Kieran, C. & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The Case of Equivalent Expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(1). Center for Teaching/Learning of Mathematics.

Kieran, C. (2006). ‘Research on the Learning and Teaching of Algebra: A broadening of sources of meaning. *In handbook of research on the psychology of mathematics education: Past present, future,* ed. A. Gutierrez and P. Boero 23-49. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Martínez, M. (2009). *De la modelación concreta a la sintaxis algebraica: Estudio con alumnos de secundaria sobre la resolución de ecuaciones lineales utilizando el modelo virtual de la balanza*. Tesis de maestría. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México. P. 148.

Peirce, Ch. (1987). Obra Lógica Semiótica. Madrid. Taurus.

Puig, L. (2003).Signos, textos y sistemas matemáticos de signos (Signs, texts and mathematical sign systems). In E. Filloy (Eds.), *Matematica Educativa: Aspectos de la investigación actual (Mathematics education:Aspects of contemporary research)* (pp. 174-186). México: Fondo de cultura Económica and Cinvestav.

Radford, L. & Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des Sciences de l'education*, *XXII (*2), 253-276.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra: Un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad*. Tesis doctoral. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México. P. 625.

Rojano, T. (1999*)*. Mathematics Learning in the junior Secondary School: Students´ access to significant mathematical ideas, Chapter 8, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouwns.

Rojano, T. & Martínez, M. (2009). *From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance model*. En Swars, S. L., Stinson, D. W. & Lemons- Smith, S. (Eds.), Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University. Vol. 5, pp 235-243.

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. En: Educational Studies in Mathematics 26:191-228. The Netherlands.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *IV*, 190-197.

Talens, J. & Company, J. M. (1984). The textual space: On the notion of text. *The journal of the Midwest Modern Language Association*, 17(2), 24-36.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. *Proceedings of the25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 375-382.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear responses to timed mathematics test. *Educational Studies in Mathematics*, 49, pp. 341-359.

Vernaud, G & Córtes, (1986). "Introducing algebra to low level 8th and 9th graders", en Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics Educational, Londres, pp. 319-324

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Demostraciones visuales de integrales complejas

José **Saquimux**
Universidad de San Carlos
Guatemala
jsaquimux@yahoo.co.uk

Resumen

Se describen demostraciones visuales[1] desarrolladas en el ambiente dinámico e interactivo del *Cabri II Plus 1.4*, creadas para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerrado en variable compleja. La parte real de la integral se visualiza como el flujo del campo de Polya a largo del contorno, la parte imaginaria, como el flujo de dicho campo que cruza el contorno. Aprovechando simetrías o por aproximaciones con regiones poligonales, los valores de las partes real e imaginaria se inducen, de áreas netas bajo las curvas de flujo tangencial y normal. El usuario puede explorar casos particulares de independencia de trayectoria, el teorema de Cauchy-Goursat, la fórmula de integral de Cauchy o el principio de deformación del contorno. Aún en prueba en el aula, se señalan sus bondes principales, se discuten aspectos problemáticos y se propone su uso reflexivo como apoyo significativo en la enseñanza habitual de variable compleja de ingeniería.

Palabras claves: Demostración visual interactiva, integral compleja, campo de Polya, Cabri

Introducción

En la enseñanza actual de matemática universitaria, las demostraciones visuales interactivas vienen usándose con más frecuencia y aceptación por varios profesores, ello porque con dichas herramientas se pueden proponer ambientes apropiados de aprendizajes basados en actividades de motivación, exploración, verificación, descubrimiento o investigación.

[1] En este documento, “demostración visual” o simplemente “demostración”, hacen referencia a un programa desarrollado en algún software, diseñado para visualizar en ambiente interactivo, interpretaciones geométricas de algún enunciado matemático. Comúnmente, como se menciona en diversos sitios de internet, con dicho nombre se designa a este tipo herramientas visuales. Una demostración visual no constituye ni reemplaza la prueba formal del enunciado que se visualiza, entendida esta última como una argumentación deductiva formal del enunciado.

Las demostraciones visuales ofrecen oportunidades de participación activa del estudiante en procesos de descubrimientos, convencimiento significativo, construcciones personales, y, como concluye Kawski (2007), se cree que pueden ayudar a construir raíces conceptuales profundas. En el mismo sentido, Tall (2004) afirma que las demostraciones visuales interactivas en las que el estudiante participa manipulando el "ratón" como interfaz enactiva, para seleccionar y controlar la imagen de la pantalla por medio de movimientos manuales intuitivos, le permite construir conceptos matemáticos basados en su percepción humana subyacente. Además cree que, su uso puede beneficiar a aquellos estudiantes que necesitan una visión intuitiva de ciertos conceptos matemáticos.

Para la enseñanza de integración compleja a nivel introductorio, se disponen de varias demostraciones dinámicas o interactivas creadas para visualizar distintas interpretaciones geométricas de integrales complejas. Por ejemplo; en Cabri, Mike (2004), presenta una demostración para visualizar integrales de potencias alrededor del origen, a través de su representación de una suma vectorial finita de Riemann. En Mathematica; Blinder (sin fecha) desarrolla una visualización de integrales de contorno alrededor de un polo simple, Custy (sin fecha) muestra la geometría de la integral de potencias alrededor del origen, mientras que Krug y Wilkingson (sin fecha), presentan campos de Polya sobre circunferencias para ilustrar su interpretación visual.

En este documento se describen brevemente demostraciones interactivas desarrolladas en el ambiente dinámico del Cabri II Plus, como propuestas en prueba, diseñadas para visualizar algunas integrales de línea y contorno cerrado de variable compleja (Saquimux, 2012) En ellas se visualizan las interpretaciones de integral compleja; la parte real como el área neta bajo la curva de flujo tangencial del campo de Polya de la función, mientras que la parte imaginaria como el área neta bajo la curva de flujo normal (Burn & Peterson 1998). Aprovechando simetrías o por aproximaciones con regiones de poligonales, los valores de las partes real e imaginaria se inducen, de áreas netas bajo las curvas de flujo tangencial y normal. Adicionalmente, se pueden visualizar los vectores de Polya y sus componentes tangencial y normal sobre el contorno.

En particular, se describen demostraciones visuales de integrales de funciones lineales sobre segmentos; de integrales de potencias de la forma $f(z) = 1/(z-z_0)^k \quad k = 0, \pm 1, \cdots$ sobre circunferencias o cuadriláteros, con z_0 dentro, sobre o fuera del contorno; e integrales de $f(z) = \sin z/(z-z_0)$ sobre circunferencias.

Creadas para visualizar las integrales mencionadas y algunas propiedades o teoremas asociados, el usuario puede interactuar con dichas demostraciones; arrastrando un punto z sobre la curva de integración, modificando las líneas o contornos, deslizando el polo o cero de la función, o cambiando algunos parámetros de la función.

Tienen importancia didáctica visualizar integrales de $f(z) = 1/(z-z_0)^k, \ k = 0, \pm 1, \cdots$ sobre $|z-z_0| = r$, puesto que permiten apoyar al estudiante en su comprensión sobre propiedades que conducen al concepto de residuo y justifica el estudio de series de Laurent de funciones complejas (Mike, 2004)

Aunque cada una está elaborada para fines didácticos específicos, se cree que pueden relacionarse entre sí para generar secuencias didácticas de determinado tema.

En cuanto a su aplicación en aula, algunas están en fase de evaluación inicial, otras aún no (y se proyecta elaborar otras más), con la esperanza de construir un conjunto de demostraciones efectivas en la enseñanza de variable compleja a nivel introductorio en carreras de ingeniería.

Descripción de las demostraciones

Integrales de línea

La Figura 1 muestra una imagen de una demostración para visualizar las partes real e imaginaria de $\int_C (Az + B)\, dz$, con C la unión de los segmentos PQ y QR e integrando en el sentido PQR. El usuario puede explorar varios casos, modificando C (deslizando los puntos R, Q o P) o cambiando los coeficientes de la función A y B (deslizando los puntos A y B)

Los segmentos en rojo y azul representan las curvas de flujo tangencial y normal respectivamente. La parte real está representada el área neta en amarillo y la parte imaginaria el área en celeste. En el ambiente dinámico e interactivo del Cabri, siguiendo a los deslizamientos que realiza el usuario, la demostración va proporcionando el valor numérico de dichas áreas netas, y con ello los valores las partes real e imaginaria de la integral.

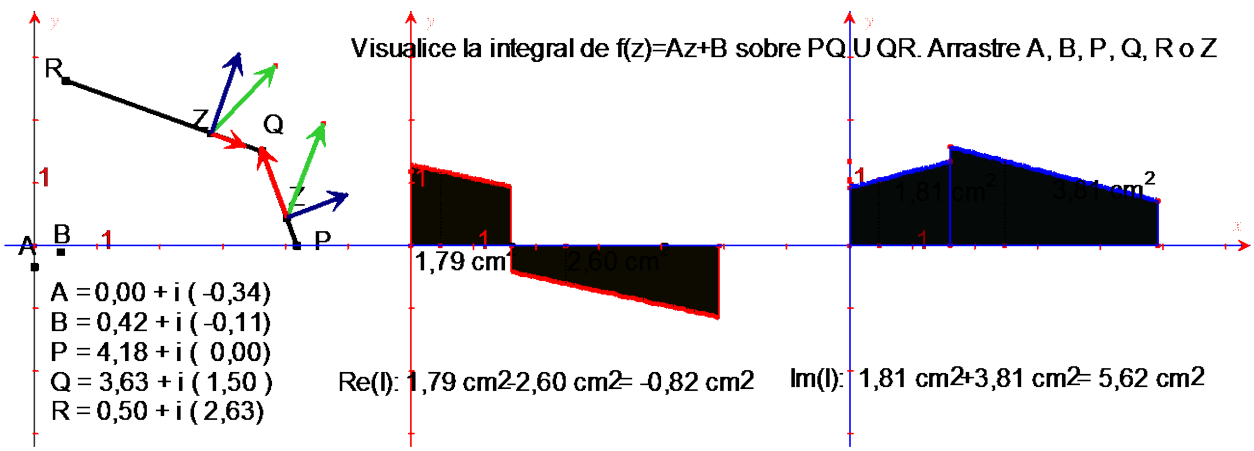


Figura. 1. Visualización de $\int_C (-i0.34z + 0.42 - i0.11)\, dz$, $C: PQR$, $P = 4.18$, $Q = 3.63 + i1.5$, $R = 0.5 + i2.63$, $\mathrm{Re}I \cong -0.82$, $\mathrm{Im}I \cong 5.62$. Vectores de Polya en verde, componente normal en azul y componente tangencial en rojo.

Como muestra la Figura 2, con P y R fijos, deslizando Q a otras posiciones, siempre que las curvas de flujo no corten al eje x como se muestran (restricciones de operación de la demostración), se visualiza que los valores de la parte real e imaginaria de la integral permanecen aproximadamente iguales.

Se pueden proponer actividades que favorecen, la exploración visual de la independencia de la trayectoria, discusiones sobre el teorema de Cauchy-Goursat, y la verificación en su forma compleja el teorema fundamental del cálculo para funciones lineales.

Adicionalmente, deslizando el punto z sobre los segmentos de integración, se puede explorar cualitativamente, relaciones entre magnitudes y direcciones de los vectores tangente y normal de Polya y, sentido de integración; con las coordenadas de los puntos sobre la curva de flujo correspondiente y el valor del área bajo la curva.

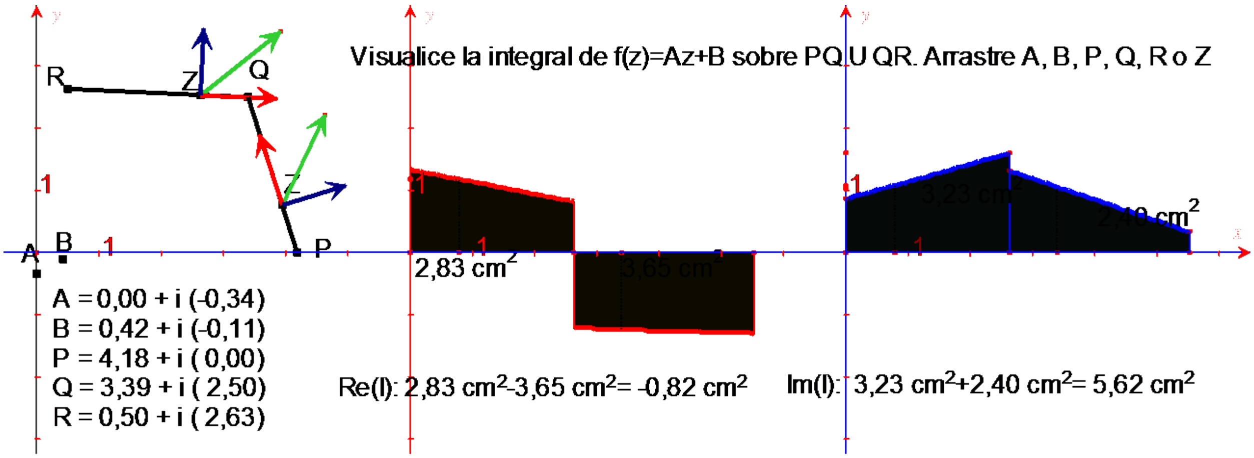


Figura. 2. Visualización de $\int_C (-i0.34z + 0.42 - i0.11)\,dz$, $C: PQR$, $P = 4.18$, $Q = 3.39 + i2.5$, $R = 0.5 + i2.63$, $\mathrm{Re}I \cong -0.82$, $\mathrm{Im}I \cong 5.62$.

Integrales de contorno cerrado

Se ha creado una demostración para visualizar las relaciones,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{para } k = 1 \text{ con } z_0 \text{ dentro de } C: |z - z_1| = r \\ 0, & \text{para } k = 0, -1, \pm 2, \pm \cdots, \text{con } z_0 = z_1 \end{cases}$$

En esta demostración, el usuario tiene varias posibilidades participación activa; deslizar el centro de la circunferencia z_1, deslizar el polo o cero z_0 de la función, variar el radio de la circunferencia, o seleccionar el valor del exponente k.

Al seleccionar $k = 1$, ubicar $z_0 = z_1$ y variando el radio de la circunferencia, se obtienen imágenes como la mostrada en la Figura 3, en la que se visualiza $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$. El área bajo la curva de flujo tangencial en rojo es nula. El área bajo la curva de flujo normal en azul es el área de un rectángulo, aproximadamente 2π. La demostración permite visualizar este hecho para distintos $z_1 = z_0$ en el plano, en particular cuando $z_1 = z_0 = 0$ se visualiza $\oint_C dz/z = 2\pi i$

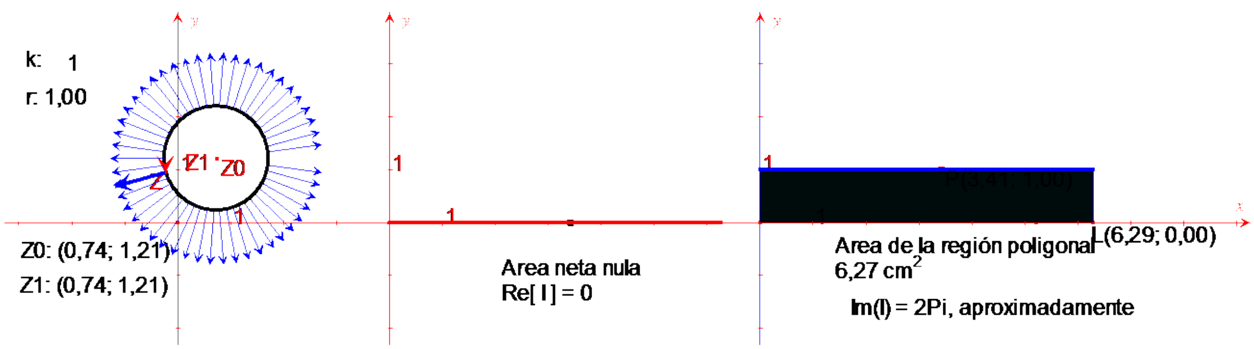


Figura 3. Visualización de $\oint_C dz/(z - z_0) = 2\pi i$ con z_0 en el centro de C. $\mathrm{Re}I = 0$. $\mathrm{Im}I \cong 2\pi$.

Seleccionando $k = 1$ y deslizando el polo z_0 alrededor del centro de la circunferencia, o el centro de la circunferencia z_1 alrededor del polo z_0, o cambiando el radio de la circunferencia bajo la condición de que el polo z_0 esté cerca de z_1; se visualizan imágenes como la Figura 4

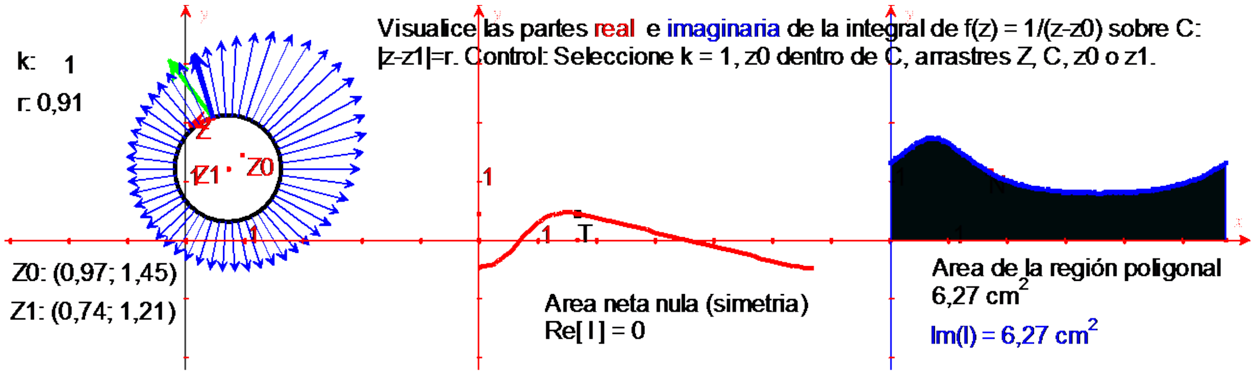


Figura 4. Visualización de $\oint_c \; dz/(z-z_0)=2\pi i$ con z_0 dentro de C. Re$I \;=\; 0$. Im$I \cong 2\pi$.

En esta imagen se observa, por simetría, que el área neta bajo la curva de flujo tangencial en rojo es cero; mientras que área de la región poligonal bajo la curva de flujo normal en azul se mantiene aproximadamente igual a 2π. Con estas actividades se induce $\oint_C \; dz/(z-z_0)=2\pi i$, con el polo z_0 dentro de C. Adicionalmente, permiten explorar o verificar un caso particular, del teorema del residuo en la integral $\oint_c \; dz/(z-z_0)$, con el punto singular z_0 dentro de C.

Seleccionando $z_0 = \; z_1$, variando r y seleccionando $k = 0, -1, \; \pm 2, \pm \cdots$ se puede visualizar $\oint_C \; dz/(z-z_0)^k = 0$. Se observa que las curvas de flujo tangencial y normal son senoidales, con $|k-1|$ ciclos completos sobre $[0, 2\pi r]$ (el perímetro de la circunferencia), por lo que las áreas netas bajo las curvas de flujo son nulas, mostrando que ReI = Im$I \;=\; 0$. La Figura 5 muestra la imagen para $k = 3$.

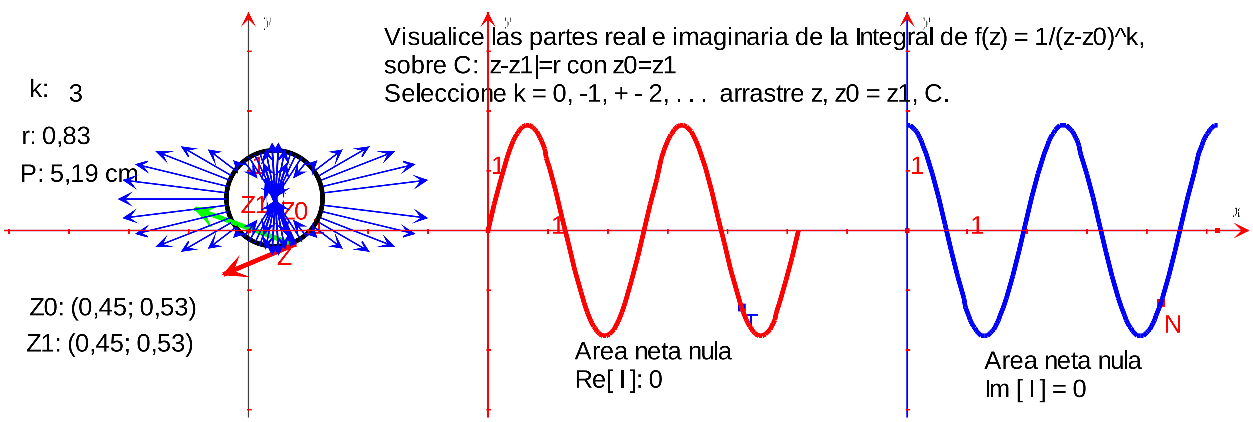


Figura 5. Visualización de $\oint_C \; dz/(z-z_0)^3 = 0$ con z_0 en el centro de C. ReI = Im$I = \; 0$.

Las visualizaciones de $\oint_C \; dz/(z-z_0)^k, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2\,, \pm 3$ con $C\!: |z-z_0| = r$, se puede pueden aprovechar para motivar el estudio del desarrollo de Laurent de una función y su uso en el cálculo de algunas integrales complejas.

Es de señalar que las demostraciones descritas están diseñadas para deslizamientos en las que se mantiene z_0 en el interior del contorno no “muy” cerca de la circunferencia; para deslizamientos de z_0 en el interior de la circunferencia cercanos a la misma, las curvas de flujo presentan valores extremos grandes que dificultan visualizar las áreas netas bajo dichas curvas.

Con la intención de mostrar casos particulares de $\oint_c \ f(z)dz = 0$ cuando $f(z)$ es analítica dentro de C, se ha creado una demostración para explorar el teorema de Cauchy-Goursat con visualizaciones de $\oint_C \ dz/(z - z_0)^k = 0 \ C\colon |z - z_1| = r, k \ = 0, 1 \ y \ 2$, y z_0 fuera de C. La Figura 6 muestra una imagen para $k \ = 1$. En ella deslizando el z_0, fuera de la circunferencia y a la izquierda de la curva punteada, se visualiza que las partes real e imaginaria se mantienen aproximadamente igual a cero, obtenidas por simetría o aproximación del área neta de una región poligonal bajo las curvas en rojo y azul respectivamente.

Esta demostración presenta ciertas dificultades de uso, la curva de flujo normal en azul es "muy sensible" a deslizamientos de z_0 y a la variación de k, presentando dificultades para aproximar el área neta bajo la curva, por lo que la demostración proporciona visualizaciones aceptables solamente en la región de deslizamiento de z_0 mencionada. Ello exige elaborar demostraciones diseñadas para operar en otras regiones de deslizamiento de z_0 en el plano, y para valores de k particulares.

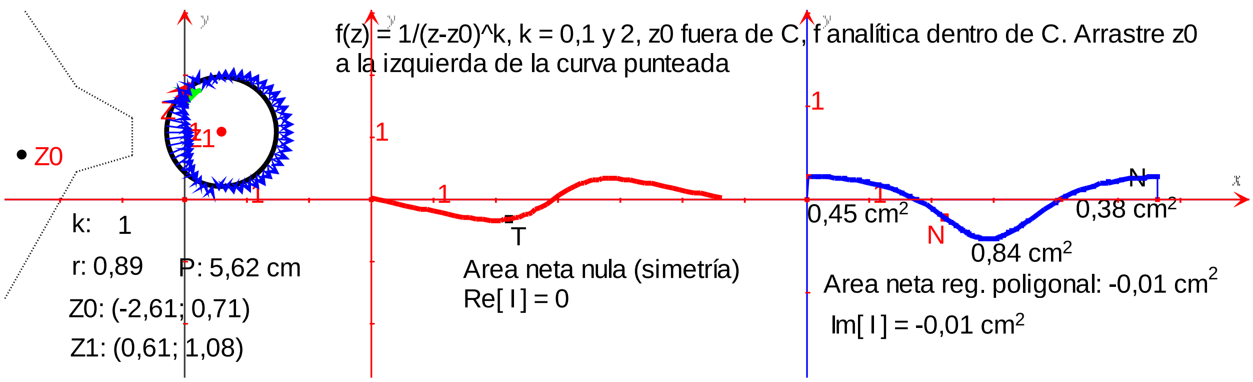


Figura 6. Visualización de $I = \oint_c \ dz/(z - z_0) = 0$, $\mathrm{Re}I = 0, \mathrm{Im}I \ \cong 0$, $f(z) = 1/(z - z_0)$ analítica dentro de C

La Figura 7, muestra una imagen de la demostración elaborada como complemento a las anteriores, para visualizar $\oint_C \ dz/(z - z_0) = \pi i$, cuando el punto singular z_0 está ubicado sobre la circunferencia. Deslizando z_0 sobre la circunferencia, deslizando el centro z_1 o variando el radio de la circunferencia, se visualiza que el valor de la integral se mantiene aproximadamente igual a πi. Con esta actividad se pueden promover discusiones sobre el valor principal de Cauchy.

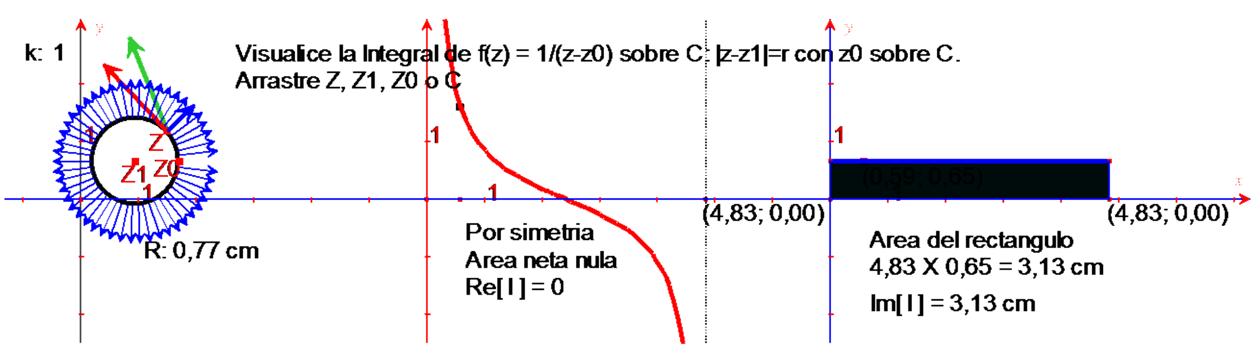


Figura 7. Visualización de $\int_C \ dz/(z - z_0) = \pi i$ cuando z_0 esta sobre C

Con la intensión de proponer exploraciones sobre el teorema de deformación del contorno, se dispone de una demostración para visualizar las integrales $\int_C \; dz/z^k = 0$, $k = 0, -1, \pm 2, \pm \cdots$, con C un rombo con centro en el origen. La Figura 8 presenta una imagen de esta demostración, para $k = 2$. Ubicando los puntos A, B, C o D a fin de que el contorno C forme un rombo, y variando $k = 0, -1, \pm 2, \pm \cdots$ se visualiza que las curvas de flujo tangencial (en rojo) y normal (en azul) son simétricas con respecto al eje horizontal. Las áreas netas bajo dichas curvas son nulas, por lo que, tanto la parte real como imaginaria de la integral son cero.

Con $k \; = \; 1$ y aproximando el área neta bajo las curvas de flujo normal, se visualiza que el valor de integral es igual a πi.

Articulando apropiadamente las demostraciones de $\int_C \; dz/z^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$ con C circunferencias o rombos centrados en el origen, se puede visualizar el principio de deformación del contorno para estas integrales y contornos.

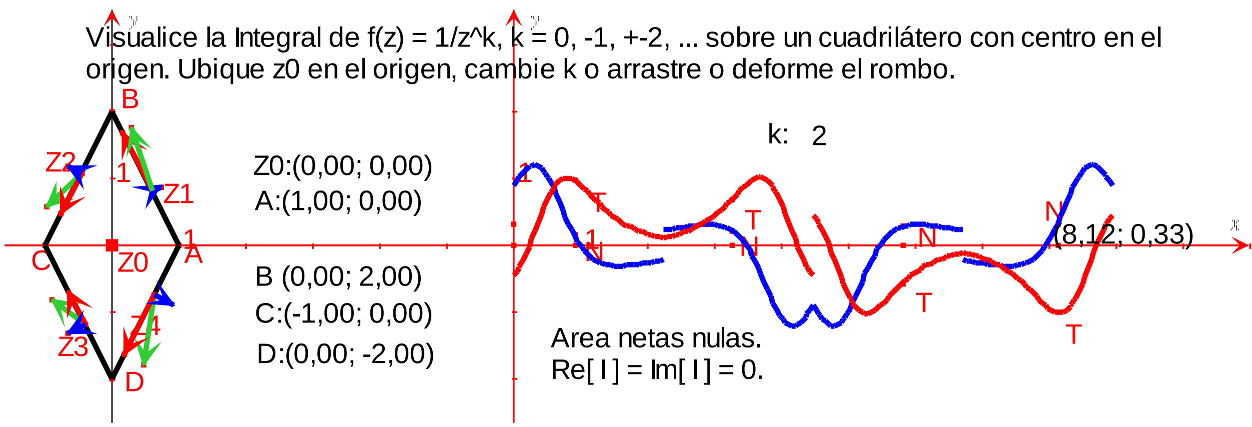


Figura 8. Visualización de $\int_C \; dz/z^2 = 0$ con C un rombo con centro en el origen

Esta demostración puede usarse para otras regiones de deslizamiento de z_0 o deformaciones del cuadrilátero, pero, de acuerdo a las curvas de flujo que genera, se deben construir regiones poligonales y aproximar las áreas netas bajo dichas curvas, situación que para ciertas regiones resulta complicada.

Finalmente, la Figura 9, muestra una imagen de una demostración para visualizar la fórmula $\int_C \; [\sin z/(z - z_0)]dz = 2\pi i \sin(z_0)$, con C la circunferencia $|z - z_1| = r$ para z_0 y z_1 reales, y z_0 dentro de C.

Deslizando z_0 sobre el eje real se visualiza, que el área neta bajo la curva (en rojo) de flujo tangencial es cero (por simetría), y el área de la región poligonal bajo la curva (en azul) de flujo normal es aproximadamente igual a $2\pi i \sin(z_0)$. Variando el radio de la circunferencia se visualizan curvas similares, y que el valor de integral no cambia. Para fines de comparación, para cada ubicación descrita del polo simple z_0, la demostración exhibe los valores numéricos de $2\pi \mathrm{sen} z_0$ y del área neta bajo la curva de flujo normal. Con esta actividad se pueden explorar casos particulares la fórmula de la integral de Cauchy.

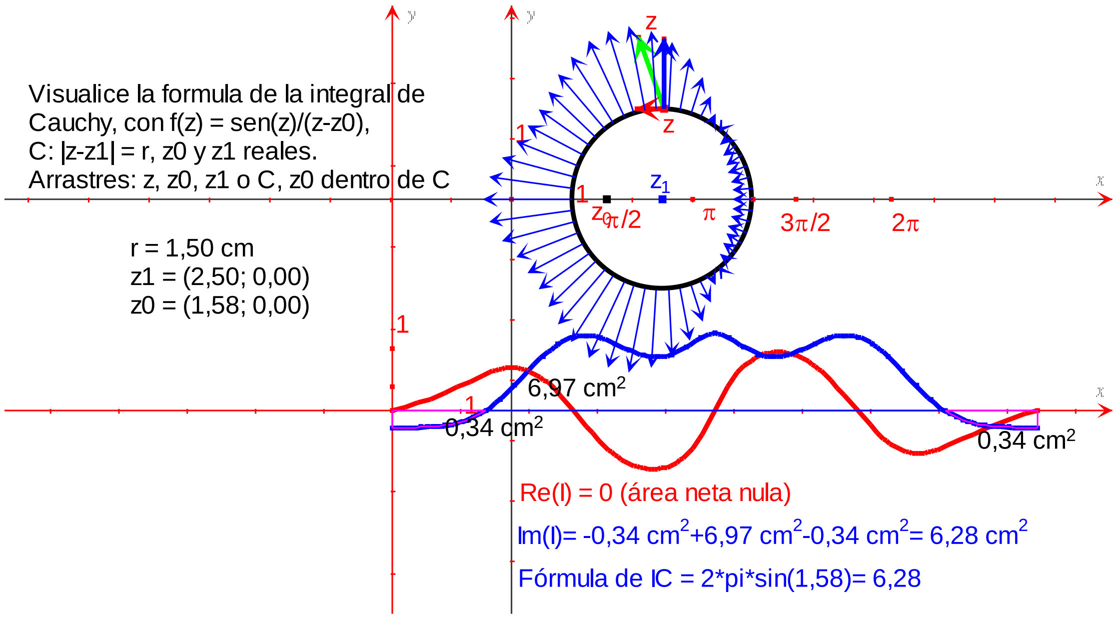


Figura 9. Visualización de $\int_C [\sin z/(z-z_0)]dz = 2\pi i \sin(z_0)$, con z_0 y z_1 reales, y $z_0 \cong \pi/2$ dentro de C. $ReI = 0$ e $\mathrm{Im}I \cong 2\pi i\sin(\pi/2)$.

Esta demostración puede usarse para otras regiones de deslizamiento con z_0 o z_1 complejos y el punto singular z_0 dentro del contorno, pero, de acuerdo a las curvas de flujo especificas que genera, se deben construir regiones poligonales para ellas, y aproximar áreas netas bajo dichas curvas.

Discusión y conclusiones

Como se describieron, las demostraciones propuestas, ofrecen varias posibilidades de uso, como herramienta didáctica apropiada para un fin específico; u organizarlas para proponer actividades de ilustración, exploración, verificación o aún más, de establecimiento de conjeturas, de algunos conceptos relevantes de integración compleja, en un ambiente de enseñanza, visual, interactivo y dinámico.

Con dichas demostraciones se espera proponer situaciones de enseñanza interactivas donde el estudiante pueda visualizar interpretaciones geométricas de algunas integrales complejas asociadas al campo de Polya. Pero también se espera adecuarlas u organizarlas para explorar o verificar relaciones particulares asociadas con, el teorema fundamental del cálculo en variable compleja, el teorema de Cauchy-Goursat, el valor principal de Cauchy, la fórmula de integral de Cauchy, el teorema del residuo, el principio de deformación del contorno. O también, para motivar el estudio de la expansión de Laurent.

Una ventaja adicional de la visualización de integrales en términos de campos de Polya es que permite relacionar esa interpretación con sus aplicaciones en el estudio de campo de velocidades de fluidos en carreras de ingeniería.

En cuanto a algunos aspectos problemáticos se pueden resaltar,

- Estudio adicional del campo de Polya. Su puesta en acción requiere su coordinación, dentro del contenido del curso, con el estudio adicional de campos de Polya e interpretación analítica de la integral con este campo. La ausencia de esta interpretación en algunos textos de uso común representa una dificultad de coordinación apropiada de enseñanza, así como un contenido adicional a enseñar.

- Relativas al Cabri. Debido a aproximaciones decimales en los cálculos y a la calidad de información que ofrece la imagen que se visualiza; algunas demostraciones tienen regiones de operación restringidas en las que son confiables o aceptables; de hecho, bajo ciertas condiciones de operación pueden inducir conclusiones falsas, o bien donde de ella no se puede proponer ninguna conjetura.
- Relativas a la visualización. En ensayos de actividades de exploración visual de algunas áreas netas; se ha observado que algunos estudiantes usan percepciones o argumentos falsos, generan procesos que le conducen a conjeturas falsas, o bien no logran establecer ninguna conjetura.

En relación a su puesta a prueba inicial en cursos de variable compleja de ingeniería, solamente se dispone de observaciones cualitativas generales. Se han observado sentimientos de motivación, sorpresa, interés y convencimiento estudiantil, tanto durante actividades de demostración pasiva como en actividades de exploración activas. En cuanto a formación o evolución de conocimientos, se ha notado que algunos estudiantes, hacen observaciones o interpretaciones erróneas, presentan dificultades con relacionar correctamente información visual, y dificultades con el traslado correcto de información entre representaciones visual y analítica; obviamente para estos estudiantes, las demostraciones les genera confusión u obstáculos en su aprendizaje. Sin embargo, para otros estudiantes, el grado de interacción dinámica que ofrecen las demostraciones propuestas, constituyen apoyo adicional en la construcción significativa de algunos conceptos involucrados en la teoría de integración compleja.

En cuanto a consideraciones para su puesta en acción, principalmente se recomienda; explorarlas, determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que puedan generar; informar al estudiante sobre la naturaleza aproximada de la información visual que ofrece el Cabri; aprovechar la generación de conjeturas para promover discusiones entre los estudiantes que conduzcan a la necesidad de formalizarlas, probarlas o refutarlas en ambiente simbólico; usarlas como apoyo o fortalecimiento de la compresión del estudiante sobre conceptos y relaciones de integración compleja en su correspondiente discusión simbólico formal; y coordinar su presentación con demostraciones interactivas en las que se visualizan otras argumentaciones e interpretaciones; principalmente, con aquellas relacionadas con la definición de integral compleja.

En relación al uso del Cabri y su aplicación como herramienta para visualizar integrales complejas; aunque este software no ha está desarrollado específicamente para trabajar con cantidades complejas y elaborar visualizaciones de variable compleja, sus numerosas capacidades, diversas opciones y características de operación para generar visualizaciones de aspectos geométricos de conceptos matemáticos, pueden aprovecharse para construir secuencias didácticas interesantes intencionadas para visualizar interpretaciones geométricas de integrales complejas. Su potencial de interacción dinámica y manipulación directa de resultados en ambientes táctil y visual, y su poder de proporcionar visualizaciones generalizadas, hace de este una herramienta aprovechable y convincente en la enseñanza de variable compleja a nivel introductorio en general (Jackiw, 2003), y en la enseñanza de aspectos geométricos de integrales complejas en particular.

Finalmente, es posible realizar mejoras en algunas demostraciones propuestas, rechazar las deficientes, o elaborar otras, a fin de crear en un conjunto efectivo, el cual pueda usarse como herramienta de ayuda exitosa en algunas secuencias didácticas. Aún confiando en lo que afirman Kawski (2004) y Tall (2008) en relación a sus aspectos beneficios del uso de demostraciones visuales en la enseñanza de la matemática en general, falta, realizar investigaciones específicas y detalladas sobre su influencia y efectividad en la construcción del conocimiento estudiantil sobre integración compleja a nivel introductorio.

Referencias

Blinder, S. (sin fecha) Contour Integral around a Simple Pole. Recuperado el 16 de mayo de 2013, de http://demonstrations.wolfram.com/ContourIntegralAroundASimplePole/

Burm, J. and Peterson, A. (1998) Interpretation of the complex contour integral. Resources for teaching complex analysis. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://faculty.gvsu.edu/fishbacp/complex/polya2.PDF

Cabri II Plus 1.4, http://www.cabri.com. Visitado en mayo de 2013

Custy, J. (sin fecha) The Geometry of Integrating a Power around the Origin. Recuperado el 16 mayo de 2013, de http://demonstrations.wolfram.com/ TheGeometryOfIntegratingAPowerAroundTheOrigin/

Jackiw, N. (2003) Visualizing complex Functions with the Geometers's Sketchpad. Triandafillidis, T. and Hatzikiriakou, K. Eds. *Procedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* 291-299 (Volos, Greece: University of Thessaly.)

Krug, D. & Wilkinson, S. (sin fecha) Pólya Vector Fields and Complex Integration along Closed Curves. Recuperado el 18 de mayo de 2013, de http://demonstrations.wolfram.com/ PolyaVectorFieldsAndComplexIntegrationAlongClosed Curves/

Mathematica. www.wolfram.com. Visitado en marzo de 2013

Miki, S. (2004) Dynamic Visualization of Complex Integrals with Cabri II Plus. Recuperado el 10 de junio de 2011, de http://epatcm.any2any.us/10thAnniversaryCD/EP/ 2004/2004C195/fullpaper.pdf

Saquimux, J. (2012) Integral de Contorno 1 y 2 con Cabri (Cadena de búsqueda. Estudiantes, Curso: Matemática Aplicada 5, Tipo de Archivo: Problemas Resueltos). Recuperado en mayo de 2012, de http://mate.ingenieria-usac.edu.gt/search_parameters.php

Tall, D. Smith, D. & Piez, C. (2008, p. 5). Technology and Calculus. Recuperado el 04 de Mayo de 2013 de http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

Demostrar y hacer demostraciones geométricas: algo de lo cual ocuparse en la formación de maestros de matemáticas en Puerto Rico

Olga Lucía **Quintero** Fonseca
Departamento de Matemáticas, Universidad del Turabo
Puerto Rico
oquintero@suagm.edu

Resumen

Esta investigación, desde una postura constructivista y bajo el paradigma de investigación acción, se propuso observar, analizar y enriquecer las prácticas pedagógicas de una clase de geometría euclidiana dirigida estudiantes de bachillerato en educación matemática nivel secundario en Puerto Rico.

La propuesta metodológica utilizada, que implementa el proceso de reflexión permanente como estrategia de aproximación al desarrollo de la destreza de demostrar en geometría, contribuyó a: (1) desarrollar una actitud más asertiva por parte de los estudiantes frente a la tarea de demostrar en geometría; (2) una mayor conciencia del nivel de apropiación y profundidad de algunos conceptos de geometría euclidiana por parte de los estudiantes; y (3) el reconocimiento del gran aporte del trabajo colaborativo en la adquisición de la destreza para desarrollar, probar y proveer justificaciones basadas en el método deductivo.

Se concluye en el estudio que el proceso reflexivo permanente apoya y estimula en los participantes (1) el descubrimiento consciente de su propio estilo de aprendizaje respecto al desarrollo de la destreza de demostrar en geometría; (2) la construcción de una comunidad de indagación reflexiva creativa. También esta investigación generó la conceptualización de una propuesta metodológica para la enseñanza de conceptos geométricos y de la destreza de demostrar.

Palabras clave: cualitativa, investigación acción, geometría, demostraciones, didáctica, formación de maestros.

Introducción

Algo característico de la actividad matemática es la demostración. Godino y Batanero (1994), Godino y Recio (2001) describen los escenarios en los que cobra importancia la demostración en cuatro grupos: (1) en los espacios de construcción de conocimiento matemático, desarrollado por los matemáticos puros para los que la demostración formal responde a la preocupación de justificar una afirmación. (2) En las comunidades científicas que hacen uso de conocimiento matemático, los expertos en ciencias experimentales; (3) en la vida cotidiana en la cual las personas usan argumentos informales; y (4) en el salón de clase, donde los maestros son los protagonistas (Godino y Batanero, 1994; Godino y Recio, 2001).

Este último escenario representa en Puerto Rico, el espacio en el cual los maestros de matemáticas de nivel intermedio en Puerto Rico deben enfrentar el reto de enseñar a demostrar en geometría. La visión presentada por el programa de matemáticas del Departamento de Educación en Puerto Rico (DEPR) está centrada en los principios que rigen los procesos de pensar, razonar, comunicar, aplicar y valorar. Específicamente respecto al proceso de razonar lo define como "exponer el pensamiento de tal manera que ofrezca argumentos que permitan demostrar o justificar un planteamiento" (DEPR, 2003, p.18), y el estándar de proceso lo explicita como "el estudiante es capaz de investigar, realizar y evaluar conjeturas y argumentos de contenido matemático en los cuales utiliza y selecciona diferentes tipos de razonamiento y métodos de prueba para validar y justificar sus conclusiones" (DEPR, 2003, p.35).

El estudio de la geometría, en el nivel secundario, conecta las exploraciones informales que se comienzan en el nivel elemental con los procesos formales. *La capacidad lógica de los estudiantes les permite hacer inferencias y llegar a deducciones a partir de situaciones que contienen problemas geométricos. Esto no significa que el estudio de la geometría en este nivel debe ser rigurosamente formal*; en su lugar, debe ofrecer la oportunidad cada vez mayor de que los estudiantes se ocupen de realizar exploraciones sistemáticas (DEPR, 2003, p.14)

El maestro de matemáticas de nivel intermedio en Puerto Rico, en su quehacer pedagógico, debe proporcionar al estudiante situaciones de aprendizaje en las cuales comprenda la naturaleza de los sistemas axiomáticos; y, desarrolle, pruebe y provea justificaciones basadas en el método inductivo y deductivo para establecer conjeturas que involucran líneas, ángulos y figuras (DEPR,2010).

Estas experiencias de aprendizaje solo pueden ser promovidas por los maestros si es que ellos las poseen, y están facultados para crearlas y/o recrearlas para sus estudiantes, si ellos mismos hacen uso de razonamientos matemáticos en la solución de problemas y son capaces de asociarlas a situaciones cotidianas y a conocimientos previamente adquiridos, y más aún si ellos mismos han sido expuestos a procesos de análisis de los tipos de demostración y a la experiencia de realizar demostraciones. De esto se sigue la trascendencia que tienen las creencias, conocimiento y prácticas metodológicas, tanto de los profesores que forman maestros de matemáticas como de los maestros en formación que se enfrentarán a los retos y requerimientos que establecen las políticas institucionales del DEPR.

Así, el maestro de matemáticas de nivel intermedio en Puerto Rico, definitivamente no le puede huir a la tarea de enseñar a demostrar en geometría. El maestro de matemáticas se ve comprometido a implementar, en su práctica pedagógica, actividades que contribuyan al desarrollo de dicha destreza.

En nuestra opinión, esto exige para el profesor formador de maestros, el conocimiento de elementos básicos de la lógica proposicional, de la geometría plana, del sistema axiomático euclidiano, y de las formas de demostración. También implica para los futuros maestros que, su formación universitaria complemente y enriquezca los conocimientos y destrezas en el área de la geometría, y sean expuestos a situaciones de aprendizaje que contribuyan a la apropiación de los mismos.

El estudiante futuro maestro de matemáticas de nivel intermedio necesita experiencias de aprendizaje que promuevan: el uso recurrente de conceptos previamente aprendidos, el uso de razonamiento deductivo, el análisis de demostraciones y de la experimentación propia haciendo verificaciones y demostraciones geométricas.

En nuestra experiencia como profesores de matemáticas, y más aún de candidatos a maestros de matemáticas de nivel intermedio nos enfrentamos al problema que representa para ellos estudiantes el desarrollar la destreza de demostrar, y particularmente de hacer demostraciones geométricas que es un requisito para su desempeño profesional.

Se hace evidente la necesidad de entender la complejidad de desarrollar la destreza de realizar demostraciones geométricas por parte de quienes enseñarán ésta. Es necesario reconocer las estrategias que contribuyen a desarrollar un mejor aprendizaje del mismo.

Particularmente, en los cursos de geometría que impartimos a estudiantes de bachillerato en educación con especialidad en matemáticas de nivel intermedio, nos sentimos comprometidos a reflexionar sobre el propio quehacer pedagógico, y propiciar el entorno pedagógico apropiado para enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las demostraciones geométricas.

Reconociendo esta dificultad de desarrollar la destreza de demostrar en geometría, como un problema vigente en la comunidad de educación matemática y la responsabilidad como profesores, nos propusimos analizar esta problemática en el salón de clase con los protagonistas de este problema, los estudiantes y el profesor de la clase.

Este informe de investigación da cuenta de un proceso de sistematización de experiencias de enseñanza aprendizaje obtenidas en un curso de geometría euclidiana ofrecida a estudiantes de un programa de bachillerato en educación matemática nivel secundario de una universidad privada de Puerto Rico, que responde a los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué estrategias contribuyen a la adquisición de la destreza de desarrollar demostraciones geométricas, probar y proveer justificaciones?
2. ¿Qué conocimientos, destrezas y/o habilidades son necesarias para realizar una demostración geométrica?
3. ¿cómo incide el uso de las demostraciones geométricas en la apropiación de conceptos geométricos?
4. ¿Cómo incide el trabajo colaborativo en el desarrollo de destrezas de verificación y demostración geométrica?
5. ¿Cómo inciden los procesos de autoevaluación y coevaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje?

Objetivo de la investigación

Este estudio se propuso observar, analizar y reflexionar sobre las prácticas pedagógicas de una clase de geometría euclidiana con el fin de enriquecer, de una manera crítica y reflexiva, la apropiación de algunos conceptos de geometría euclidiana y sus propiedades, y mejorar el desarrollo de la destreza de demostrar en geometría en los estudiantes futuros maestros de matemáticas.

Método

Este estudio se inscribe en el paradigma constructivista, se utiliza una metodología cualitativa investigación-acción. En el proceso de una docencia exploratoria, nos propusimos analizar y enriquecer las prácticas pedagógicas que se llevan a cabo en una clase de geometría euclidiana que hacen estudiantes de un programa de bachillerato en educación con concentración en matemáticas en Puerto Rico.

La investigación-acción surge para promover la autoreflexión y autoevaluación de los desempeños profesionales. Esta estrategia brinda el espacio para que los educadores reflexionemos durante la ejecución de las acciones y nos demos permiso de modificar y transformar aquellas experiencias en unas más eficaces.

A nuestra investigación subyace el hecho de considerar la docencia como un proceso continuo de búsqueda de mejoramiento de la práctica profesional. El espacio de desempeño profesional como uno para integrar el trabajo intelectual y la reflexión sobre las experiencias que se realizan.

Así la investigación-acción, se constituye en una orientadora de la acción educativa fruto de la exploración reflexiva que el profesional hace de su quehacer docente para que progresivamente sea capaz de mejorar su desempeño.

En esta investigación es de interés identificar aquellas prácticas pedagógicas que contribuyan a que los estudiantes alcancen: (1) una actitud más asertiva frente a la tarea de demostrar en geometría; (2) una mayor apropiación y profundidad de algunos conceptos de geometría euclidiana y sus propiedades; y (3) adquisición de la destreza para desarrollar, probar y proveer justificaciones basadas en el método deductivo.

Este proceso de identificación de prácticas educativas eficaces es uno participativo, en el cual todos los integrantes del grupo propenden por el mejoramiento individual y colectivo. Además se enriquecen en la vivencia de una experiencia de investigación que induce a un proceso sistemático de aprendizaje y autocrítica orientado a la práctica profesional.

Participantes

Los participantes en esta investigación fueron los seis integrantes de un curso de geometría euclidiana II (estudiantes que participaron eran de bachillerato en educación con concentración en matemáticas de una universidad privada de Puerto Rico) y la profesora-investigadora.

Los participantes, tres mujeres y tres varones, ya habían cursado las asignaturas de precálculo I-II, cálculo I-II y álgebra lineal. Cinco de los participantes habían tomado la primera parte del curso de geometría euclidiana.

Instrumentos de recopilación de información

Las estrategias de recopilación de información que se implementaron fueron:

⇨ Sistematización de experiencias: se utilizaron los diarios reflexivos, los portafolios y los exámenes realizados en la clase. Se incluyó el diario reflexivo del profesor investigador.

⇨ Narrativo: Terminada la experiencia de la clase, al finalizar el semestre, los participantes escribieron un narrativo reflexivo, que incluyó los siguientes aspectos: creencias, aprendizaje de conocimiento geométrico y estrategias de aprendizaje. El protocolo utilizado para el narrativo final puede verse en el apéndice A.

⇨ Grupo reflexivo: Reflexión final sobre contenido y proceso de aprendizaje, estrategias de aprendizaje y enseñanza y conocimiento de su propio conocimiento. Luego de obtener el consentimiento de los participantes para hacer uso de la información recopilada en el desarrollo del curso, se convocó a los participantes a la realización del grupo reflexivo sobre contenido y proceso de aprendizaje, estrategias de aprendizaje y enseñanza y conocimiento de su propio conocimiento.

El procedimiento que se implementó fue un conversatorio en torno a las mismas cinco preguntas que se incluyeron en el narrativo reflexivo (ver apéndice A). Este grupo reflexivo se llevó a cabo después de nueve meses de terminado el semestre en el que se dio el curso. Participaron en el grupo reflexivo cinco de los seis estudiantes que hicieron parte de la investigación.

Es relevante señalar que tres de los participantes que asistieron al grupo reflexivo en este momento se encuentran trabajando, desempeñándose como profesores de matemáticas, uno de ellos como “coach” de un profesor de matemáticas de grado octavo. Otro de los participantes se encuentra haciendo práctica docente y está asignado a un grupo de grado noveno que está trabajando la clase de geometría.

Procedimiento

En la dinámica normal de clase la profesora-investigadora implementó una rutina que podemos describir de la siguiente forma:

<u>Primera parte</u>**:**

Los primeros minutos de la clase se dedican a discutir en la pizarra aquellos ejercicios que los estudiantes no hayan podido realizar o tengan la duda de haberlos realizado correctamente. En este punto debe tenerse en cuenta que frecuentemente la asignación de tareas es diferente para cada uno de los estudiantes.

El estudiante que trae la pregunta la presenta al grupo y menciona sus intentos de solución, a veces el mismo estudiante es quien lo trabaja en la pizarra, en otras ocasiones el profesor es quien va escribiendo en la pizarra y organizando la información dada por los estudiantes, cuestionando de forma socrática para llegar a la solución del problema. Según los obstáculos epistemológicos que se presenten en esta fase, se implementan estrategias como revisión y aclaración de conceptos, desde diferentes formas de representación.

En algunas clases, luego de corregida la asignación, se intercambian los trabajos entre los estudiantes y se evalúan por lo menos dos de los ejercicios. Una condición para esta parte de la ejecución es que el estudiante no puede consultar al autor del trabajo.

Segunda parte**:**

Discusión del contenido nuevo que se quiere estudiar en la clase, desde la manipulación concreta (construcciones con regla y compás) hasta la consecución de demostraciones.

Se hace revisión previa de los conceptos requisito para abordar la nueva problemática, y luego se procede a realizar ejercicios prácticos en los que utilice los nuevos conceptos. Por último se incluyen los ejercicios de demostraciones sobre el tema.

La forma de abordar el contenido se ejemplifica con el constructo triángulo en la figura 1.

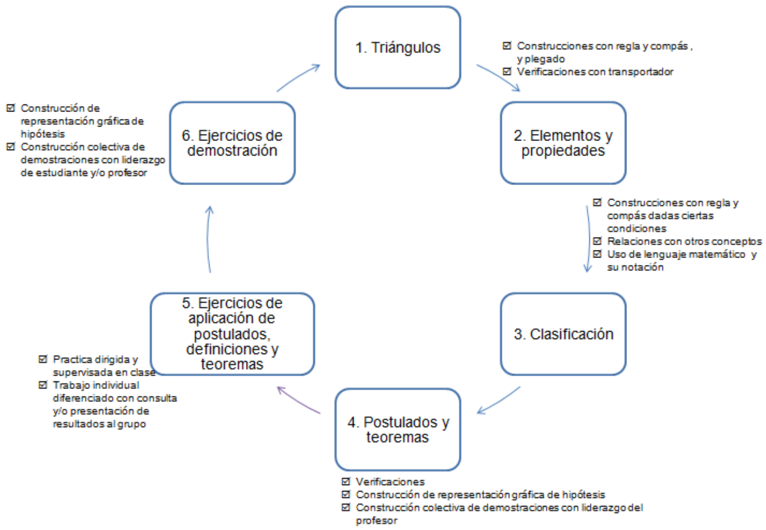


Figura 1. Ejemplo modelo de la forma como se abordaron los conceptos geométricos en el curso de geometría euclidiana II.

Tercera parte**:**

Se realizan los acuerdos sobre la asignación de tareas y/o el tema de la siguiente reunión, con frecuencia las tareas son elegidas por los mismos estudiantes. Un acuerdo de la clase es leer el material nuevo que se discutirá en la próxima reunión.

Análisis de datos

El análisis de la información se llevó a cabo mediante el modelo de Harry F. Wolcott (Lucca & Berríos, 2009). Los tres componentes principales de este modelo son: la descripción, el análisis y la interpretación.

Para lograr la triangulación de la información se integran los siguientes elementos: sistematización de experiencias, narrativo autoreflexivo y el grupo de reflexión. En el desarrollo de la discusión de los resultados se utilizó las preguntas que guiaron el estudio como referentes.

Conclusiones

Los hallazgos revelados por esta investigación permiten identificar los diferentes niveles de reflexión que emergieron en el desarrollo de la clase.

Reflexión sobre la acción social en el proceso de aprendizaje

En el desarrollo de la destreza de demostrar es altamente recomendado el ejercitar inicialmente la construcción colaborativa de las demostraciones, como un ejercicio interactivo entre profesor y estudiantes.

En nuestro estudio, los momentos de construcción colaborativa de demostraciones geométricas, contribuyeron a desarrollar la capacidad de argumentar y justificar desde un marco teórico, en la medida en que cada afirmación dada por el estudiante tiene que ser justificada de manera convincente para la comunidad en que se discute, en este caso la comunidad establecida por los estudiantes del curso. El clima que genera este primer reto colectivo, contribuye a generar confianza y solidaridad entre los miembros de la comunidad. La identificación de fortalezas y debilidades en el desempeño es enriquecida por la propia mirada autoreflexiva, así como por la mirada de los otros miembros de la comunidad de aprendizaje.

Ese generar confianza y conocimiento a través de enfrentar el reto colectivo de hacer una demostración, da herramientas de autorregulación para cada participante, que va creciendo a su propio ritmo a medida que la comunidad como colectivo crece tanto social como académicamente.

El paso por este proceso de construcción colaborativa de una demostración contribuye a incrementar el nivel de confianza y seguridad de cada uno de los integrantes de la comunidad de aprendizaje. Este hallazgo confirma lo que señala D`Angelo (2002) respecto a los incrementos significativos en autoconfianza, madurez emocional y autocomprensión, que se observan en un miembro de una comunidad de aprendizaje reflexiva-creativa.

En esta comunidad de aprendizaje, esta actividad de experiencia creadora conjunta desarrolla la creatividad y el pensamiento reflexivo, crea un espacio de dialogo que enriquece y potencia el desarrollo de razonamiento.

Este espacio creado para el dialogo argumentado se fundamenta en la honestidad intelectual, reconocimiento de las ideas propias y de los demás, reconocimiento también de las diferentes interpretaciones que producen en el esfuerzo por una construcción conjunta de conocimiento. Las ideas individuales son evaluadas, revaluadas y enriquecidas por el grupo, y viceversa el grupo crece y se fortalece en la interacción de los aportes individuales.

Podemos afirmar, que en nuestro estudio conformamos una comunidad de aprendizaje que satisface las características para denominarla una comunidad de indagación reflexiva y creativa en construcción, a la luz de D`Angelo (2002). A continuación se reportan la principales características de una comunidad de indagación reflexiva y creativa en construcción, según D`Angelo (2002), y en la tabla 1 se identifican los instrumentos de recopilación de información en los que se reportan evidencias sobre el aspecto señalado.

Tabla 1

Instrumentos de recopilación de información que contienen evidencias de cada uno de los aspectos de las dimensiones de la metacognición según Brown

		Diarios Reflexivos	**Narrativo autorreflexivo**	**Grupo reflexivo**
Dimensión del conocimiento de la cognición	Conocimiento Declarativo: conocer nuestro estilo de aprendizaje propio y los factores que influyen en nuestro rendimiento.	✓	✓	✓
	Conocimiento procedural: conocer las estrategias cognitivas para realizar el aprendizaje.	✓	✓	✓
	Conocimiento condicional: saber cuándo o cómo utilizar una estrategia.	✓	✓	✓
Dimensión de la regulación de la cognición	Planificación: selección de estrategias y ubicación de recursos disponibles	✓	✓	✓
	Regulación: supervisar y autoevaluar las habilidades necesarias para controlar el Aprendizaje			✓
	Evaluación: evaluar los productos y los procesos reguladores del propio aprendizaje.			✓

La implementación de estrategias reflexivo-creativas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la demostración en geometría propició la formación de un espacio de aprendizajes que son transferidos al quehacer pedagógico de quienes conformaron la comunidad reflexiva creativa.

Reflexión sobre el desarrollo de la destreza de hacer demostraciones geométricas

Sobre este punto podemos afirmar que identificamos en el desarrollo del curso diversos elementos tanto conceptuales, como didácticos y metodológicos que presentamos más adelante con un esquema.

Primero quisiéramos señalar que la implementación de esta propuesta está enmarcada principalmente, pero no de manera exclusiva, en cursos de geometría euclidiana dirigidos a estudiantes de educación matemática nivel secundario. De hecho nos atrevemos a sugerirla para cursos de matemáticas dirigidos a esta población, en consideración de la necesidad prioritaria de estos estudiantes de adquirir conocimiento de contenido y conocimiento pedagógico del contenido.

El esquema presentado en la figura 2 sintetiza nuestra propuesta metodológica a nivel de contenido que deriva de este estudio.

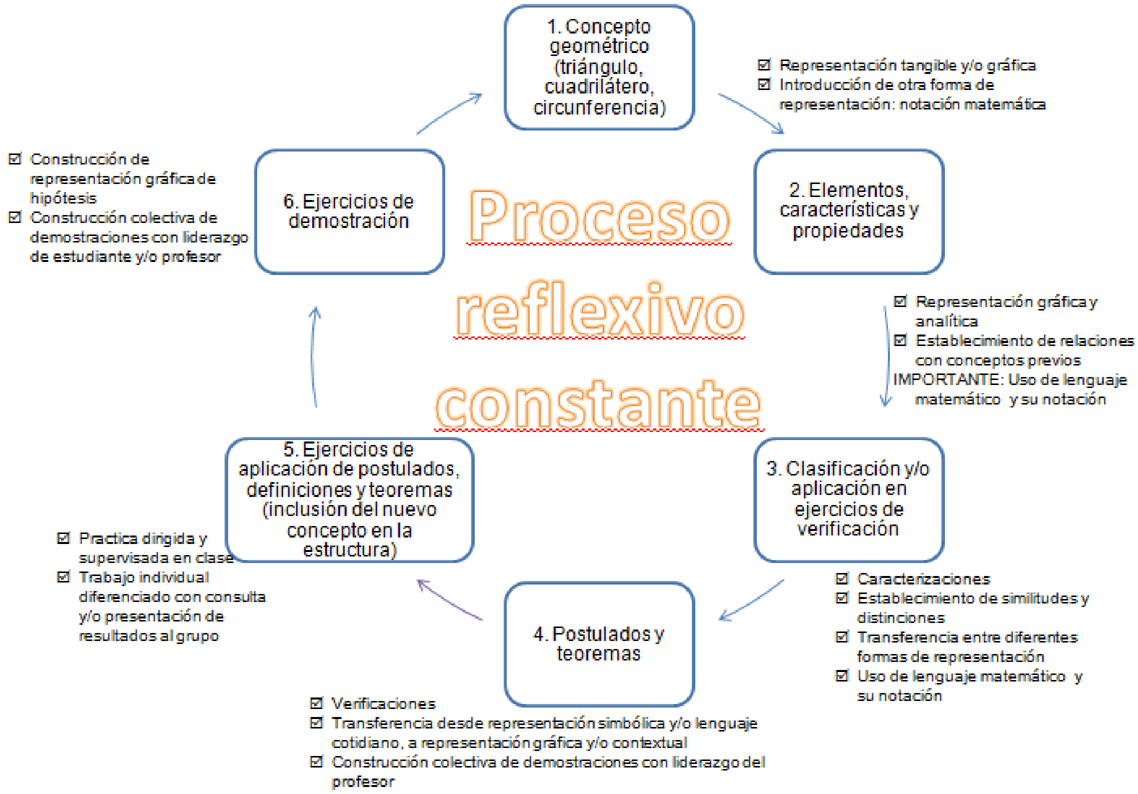


Figura 2. Metodología para la enseñanza de conceptos geométricos para futuros maestros de matemáticas de nivel intermedio.

En esta propuesta consideramos que:

- ✓ En cada concepto geométrico la exploración y conocimiento de todas las formas de representación del concepto son relevantes en la apropiación del mismo
- ✓ El estudio de la matemática implica el aprendizaje de un lenguaje intrínsecamente regulado, y universalmente conocido
- ✓ Los niveles de Van Hiele proporcionan un referente teórico a cualquier práctica de enseñanza de la geometría

En nuestra propuesta metodológica, consideramos especialmente relevante para la formación de los estudiantes de educación, la implementación de estrategias de estímulo permanente de la reflexión sobre el estilo propio de aprendizaje, la observación crítica de las propias acciones, las de los pares y de las características del proceso de enseñanza.

En el desarrollo de la destreza de demostrar, específicamente, queremos señalar que la implementación de la práctica sobre ejercicios de verificación y aplicación de proposiciones condicionales (teoremas y ejercicios de la forma si… entonces…) contribuye a adquirir un nivel más profundo de los conceptos, y estimula el desarrollo de habilidad para transitar entre diferentes formas de representación del concepto. También contribuye a afianzar el conocimiento del lenguaje matemático involucrado.

Reflexión sobre la reflexión

Para un estudiante de un bachillerato en educación, tener la habilidad y capacidad de reconocer las diversas variables que intervienen en el quehacer pedagógico, el poder evaluarlas y proponer transformaciones, enriquece su desempeño profesional. Desde este punto de vista, la actitud metacognitiva frente a las acciones en el salón de clase potencia la adquisición de esa habilidad y capacidad que mencionamos.

La metacognición hace referencia al conocimiento de los propios procesos cognitivos, de los resultados de esos procesos y de cualquier aspecto que se relacione con ellos. Flavell (1979) afirma que la metacognición se refiere, entre otras cosas, a la continua observación de estos procesos en relación con los objetos cognitivos sobre los que se apoyan, generalmente al servicio de alguna meta concreta u objetivo.

Con esta perspectiva en mente, la actitud que nosotros como educadores deberíamos tener es una actitud reflexiva, autocrítica, autoevaluativa y autorreguladora, antes durante y después de la práctica instruccional. Esto fue lo que implementamos en esta investigación acción.

Recomendaciones

Respecto a investigaciones futuras, una recomendación es la realización de ejercicios de investigación en el aula a nivel secundario, implementando la metodología sugerida en grupos de grado noveno que son los que incluyen en su currículo el desarrollo de la destreza de hacer demostraciones geométricas.

Otra alternativa que nos atrevemos a recomendar es la implementación de los procesos de reflexión permanente en los cursos de especialidad para los estudiantes de bachillerato en educación. Esto se vería favorecido si para estos cursos de especialidad se tienen en cuenta aspectos como: (1) su ofrecimiento debería ser como cursos regulares, (2) deberían incluir horas de laboratorio. Es muy conveniente en los cursos de especialidad ofrecidos a futuros maestros de matemáticas tener horas de laboratorio que permitan la experimentación de formas de enseñanza de los conceptos matemáticos estudiados. Crear el espacio para la creatividad y creación colectiva de formas e instrumentos de enseñanza, la reflexión y discusión sobre los mismos.

Los dos aspectos antes mencionados apuntan al enriquecimiento del conocimiento de contenido y a la exploración de estrategias de enseñanza de los contenidos, esto mediado por procesos de reflexión permanente, de estrategias metacognitivas.

Así pues estamos recomendando una revisión curricular de los programas de bachillerato en educación matemática de nivel secundario, con el propósito de mejorar la calidad profesional del maestro de matemáticas incrementando el conocimiento de contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

Referencias

D`Angelo, O. (2002). La acción grupal como base para los aprendizajes reflexivos-creativos. Centro de investigaciones sicológicas. Revista cubana de psicología, volumen 19, número 1, 2002

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2003). *Proyecto de renovación curricular fundamentos teóricos y metodológicos*. San Juan, PR: Author.

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2010). *Prontuario y mapa curricular grado octavo*. Programa de Matemáticas MATE 121-1408. San Juan, PR: Author.

Flavell, J. H. (1979). Metacognitive and cognition monitoring. *American Psychologist* (34), 906-911

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J., y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405 - 414.

Lucca, N. & Berríos, R. (2009). *Investigación cualitativa en educación y ciencias sociales*. San Juan, PR: Publicaciones Puertorriqueñas.

Apéndice A

Demostrar y hacer demostraciones geométricas algo de lo cual ocuparse en la formación de maestros de matemáticas en puerto rico

PROTOCOLO NARRATIVO AUTORREFLEXIVO

CURSO GEOMETRÍA EUCLIDIANA II

Reflexiona sobre cada uno de los siguientes aspectos, y haz un escrito que explique tus consideraciones y aprendizajes.

UTILIZA TODO EL ESPACIO QUE REQUIERAS PARA CONTESTAR A CADA UNO DE ESTOS ASPECTOS

Describe estrategias que tu consideras que contribuyen al logro de aprendizaje significativo en geometría

Haz una lista de los conocimientos, destrezas y/o habilidades que consideras necesarias para realizar una demostración geométrica

Describe según tu experiencia, ¿cómo incide el uso de las demostraciones geométricas en la apropiación de conceptos geométricos?

Según tu experiencia, ¿Cómo incide el trabajo colaborativo en el desarrollo de destrezas de verificación y demostración geométricas?

Qué opinas sobre la inclusión de procesos de autoevaluación y coevaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje

Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas

María Elina Díaz Lozano
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
mdiazlo@gmail.com
Egle Elisabet Haye
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
elihaye@gmail.com
Fabiana Montenegro
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
montenegrofabiana@yahoo.com.ar
Luis Córdoba
Universidad Nacional del Litora
Argentina
lmcordoba@hotmail.com

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación en curso, destinada a estudiar la incidencia de las representaciones visuales de los conceptos en el aprendizaje de matemática universitaria. Se reportan aquí los resultados de un estudio descriptivo y exploratorio sobre las dificultades en la articulación de registros gráficos y algebraicos que se observaron en 109 estudiantes de reciente ingreso a carreras de ingeniería. Se describen las actividades de conversión propuestas y se presenta el análisis de los resultados obtenidos, que se realiza sobre cada una de las variables de los dos sistemas de representación intervinientes. Los datos revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes no logró establecer una articulación exenta de errores de sus representaciones.

Palabras clave: matemática, funciones lineales y cuadráticas, registros de representación, variables gráficas y algebraicas, alumnos universitarios

Introducción

El estudio que aquí se presenta es parte de una propuesta más amplia, tendiente a buscar alternativas de solución a problemas detectados en la enseñanza de matemática en el primer año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Aunque las causas que originan tal situación obedecen, sin dudas, a aspectos sociales y económicos diversos, es una cuestión de larga data la preocupación sobre la relación entre las dificultades de adaptación de los alumnos a los estudios de matemática en el nivel superior y sus condiciones previas, referidas a las competencias cognitivas en matemática con las que inician su vida universitaria.

Una de las observaciones más frecuentes que realizamos los docentes de matemática al analizar las evaluaciones parciales o finales de las asignaturas es la incidencia que tienen en los resultados negativos, los errores provenientes de etapas anteriores y atribuibles a deficiencias de aprendizaje no relacionadas directamente con los temas propios de la materia.

Las encuestas y pruebas diagnósticas realizadas todos los años a los ingresantes, indican que los mismos comparten un marcado déficit en su formación matemática.

Referido a ello, uno de los aspectos a ser considerado es la posible ausencia de articulación entre distintos registros de representación de los conceptos.

Para determinar condiciones previas en ese sentido, se realizó una prueba, pensando en que los problemas de coordinación entre las diversas representaciones de los objetos matemáticos podían verse reflejados en los resultados de la misma.

Mediante la administración de cuestionarios destinados a alumnos que iniciaban su carrera universitaria en nuestra Facultad, que incluían cuestiones relacionadas con conjuntos del plano y de la recta real, se pudieron registrar muchas de las dificultades relacionadas con la problemática planteada. En este artículo se analizan los ítems referidos a rectas y parábolas.

En el punto 2 a continuación, se presentan los lineamientos teóricos sobre los que se apoyó el trabajo. En el punto 3 se describen y fundamentan las actividades propuestas a los estudiantes, cuyas respuestas se analizan en el punto 4.

Finalmente se exponen algunas reflexiones y primeras conclusiones.

Lineamientos teóricos

Este trabajo se encuadra en la Teoría sobre registros de representación semiótica de Duval (1998), a los cuales el autor define por medio de las tres actividades cognitivas que se pueden realizar en ellos. (pp. 177-178)

1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.

2) El *tratamiento* de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

3) La *conversión* de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.

Desde un punto de vista ontológico, la particularidad de los objetos matemáticos, carentes de una existencia física o material, da lugar a que sólo sea posible su conceptualización y alguna actividad sobre ellos a través de sus representaciones semióticas y las actividades de conversión entre ellas (Duval, 1998).

"Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación". (Hitt, 2003, p. 214)

En ese marco, el nivel de conceptualización de un objeto se analiza en base a las posibilidades de articulación de las diferentes representaciones del mismo, por lo que las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente, ya que, como lo afirman Blázquez y Ortega (2001) "la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto" (p. 221).

En los últimos años, muchas investigaciones en educación matemática pusieron el acento en la valoración de estrategias para el aprendizaje basadas en la coordinación y tránsito entre los diferentes contextos en los cuales los conceptos son presentados (Cantoral y Farfán, 1998; Blázquez, S. y Ortega, 2001; Hitt, 2003). Las nociones de registros de representación, tratamiento y conversión de representaciones y la tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos son fundamentales para su comprensión (Duval, 1998 y 1999), han sido objeto de estudio por numerosos investigadores que sostienen, como puede apreciarse en Lupiañez y Moreno (2001), para el caso particular de la matemática, que no existe actividad cognitiva al margen de la actividad representacional.

En distintos trabajos (véase, por ejemplo, Castro y Castro, 1997), se señala el tema de la pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto, enumerando los diversos sistemas de representación mediante los cuales los objetos matemáticos pueden expresarse. Así, se mencionan representaciones verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, gráficas, geométricas y, últimamente, representaciones ejecutables, en referencia a las posibilidades de procesar y manipular las representaciones de los objetos matemáticos sobre la pantalla de la computadora.

De entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a funciones lineales y cuadráticas, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática.

Como se dijo anteriormente, cada tipo de representación evidencia ciertas propiedades de los objetos que representa, al mismo tiempo que deja de lado otras. Ello ocasiona que las características de cada sistema de representación guarden relación con las posibilidades que ofrecen para las actividades cognitivas en matemática en general, lo que involucra, en particular, a los temas abordados en este trabajo.

En lo que se refiere al sistema algebraico, el mismo muestra un aspecto formal, que ofrece un alto grado de precisión en los procedimientos. Sin embargo, puede pensarse que el nivel de abstracción que lo caracteriza puede ser un inconveniente en la comprensión de los conceptos.

Por su parte, el sistema gráfico, aún cuando limitado ya que sólo permite visualizar una parte de lo expresado en el algebraico, posibilita la formación de representaciones con una apariencia menos formal, más atractiva y posiblemente más amigable para los alumnos.

En relación con ello, la representación visual de las nociones ha sido muchas veces jerarquizada como herramienta para la construcción de significados en el proceso de aprendizaje y recibió tratamiento desde diversos enfoques.

Al respecto, se analizaron, entre otros aspectos, su relación con las representaciones internas y modelos mentales (Johnson Laird, 1996; Nersessian, 2007), las limitaciones y beneficios de la enseñanza por medio de lo visual y sus posibilidades en la enseñanza de Matemática (Castro y Castro, 1997; Davis, 1993; Dreyfus, 1994; Duval, 1999), propuestas y experiencias en la aplicación de estrategias didácticas con el uso de recursos visuales, tales como, por ejemplo, las que se detallan en Hitt, 2001; Buteler y Gangoso, 2001; Díaz Lozano, Haye y Macías, 2012; Otero, Greca y Silveira, 2003.

Pese a ello, varias investigaciones en Educación Matemática señalan que en general el sistema algebraico es el privilegiado por los profesores de matemática en su práctica docente: "…en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico…" (Blázquez y Ortega, 2001, p. 231).

Tal vez debido a eso, como se expresa en el trabajo de González-Martín y Camacho (2005), "…se observa la preponderancia del pensamiento algebraico en los alumnos. Aunque el registro algebraico ocasiona grandes dificultades a veces, es el que están acostumbrados a trabajar" (p. 91). Una conclusión similar es manifestada por Guzmán Retamal (1998), en un estudio referido a funciones en general realizado sobre alumnos de primer año con conocimientos elementales de Cálculo.

En el caso de las funciones lineales y cuadráticas, lo anterior se manifiesta usualmente en el aula por medio de la preeminencia de actividades de tratamiento en el contexto algebraico, mientras que las representaciones gráficas se presentan como complemento de las anteriores. Sin embargo, la teoría de Duval postula que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo dentro de un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar las actividades de conversión de una representación a otra, en ambos sentidos.

Tal como lo manifiestan Castro y Castro (1997) "Consideramos que la comprensión alcanzada mediante procesamiento de información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos se complementan, por lo que el aprendizaje debe lograrse integrando ambos tipos de códigos" (p. 100)

Teniendo en cuenta los lineamientos expresados precedentemente, resultó de interés averiguar si los alumnos que ingresan a los estudios universitarios en nuestra facultad, pueden, al momento de iniciar dichos estudios, realizar sin problemas tareas de conversión de representaciones entre registros gráficos y analíticos. Y en caso de no ser así, conocer las dificultades que se manifiesten. Con ese objetivo general, se llevó a cabo la experiencia que se describe en el punto siguiente.

Metodología

El estudio respondió a un enfoque descriptivo y exploratorio. Con el fin de obtener elementos de juicio sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes en la articulación de los sistemas algebraico y gráfico, se elaboró una prueba que se administró a 109 alumnos, de entre 17 y 20 años, de reciente ingreso en las distintas carreras de ingeniería, en la primera clase de matemática de sus carreras.

El instrumento a utilizar fue sometido a diversas instancias de evaluación, tanto por integrantes del equipo de investigación como por especialistas a cargo de investigaciones relacionadas. El resultado de las reestructuraciones y reformulaciones de diseño fue la versión final del cuestionario aplicado a los alumnos.

El cuestionario

Las tareas cuya ejecución se solicitó a los estudiantes se referían a temas de nivel secundario, que los alumnos, además, habían revisado en el curso introductorio que la universidad organiza previo al comienzo del año académico. Se elaboraron 12 ejercicios alrededor de conceptos relacionados con conjuntos del plano y de la recta: intervalos, rectas, parábolas, figuras y regiones. La prueba se centró en la conversión entre distintos sistemas de representación, si bien algunas actividades apuntaban también a la tarea de transformación en el interior de un registro determinado.

En este reporte se describen cuatro de las actividades propuestas: las relativas a la articulación de representaciones de conceptos relacionados con las funciones lineal y cuadrática. Para su resolución, los alumnos debían realizar procesos de conversión en los que debían poner en juego el cambio, en ambos sentidos, entre dos representaciones de dichos conceptos: gráfica y algebraica.

Las actividades propuestas

Las actividades se estructuraron en el seno de un plano determinado por dos ejes, que se denominaron *eje conceptual* y *eje contextual*, los cuales establecían las perspectivas desde las que se desarrolló el estudio.

Según el primero, se trabajó sobre las nociones de función lineal (L) y función cuadrática (C). Siguiendo el segundo, las acciones estuvieron dirigidas a inscribir las cuestiones en los dos contextos sobre los cuales se llevó a cabo el estudio: el algebraico (A) y el gráfico (G). Con base en los cruzamientos de ambos ejes, las actividades se denominaron según lo indica la Tabla 1.

Tabla 1

Denominación de las actividades.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Eje Contextual: orientación</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>algebraico a gráfico</td><td>gráfico a algebraico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Eje conceptual</td><td>función lineal</td><td>A→G (L)</td><td>G→A (L)</td></tr>
<tr><td>función cuadrática</td><td>A→G(C)</td><td>G→A (C)</td></tr>
</table>

Actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A→G). En la figura que sigue se muestra la propuesta realizada a los alumnos.

Ejercicio A→G (L)
Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax + b$, en donde $a > 0$ y $b < 0$, sin dar valores numéricos a *a y b*.
Ejercicio A→G (C)
Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, en donde $a > 0; c < 0$ y $b \neq 0$, sin dar valores numéricos a *a, b* y *c*.

Figura 1. Ejercicios de conversión del registro algebraico al registro gráfico

En estos dos primeros ejercicios, se buscó saber si el alumno puede interpretar geométricamente los signos de los parámetros que intervienen en ecuaciones lineales y cuadráticas. A tal fin, las ecuaciones propuestas se presentaron en forma totalmente literal: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, agregándose, en cada caso, las condiciones sobre el signo de los coeficientes que los estudiantes debían considerar.

Previendo que una posible manera de encarar el ejercicio por parte de los alumnos fuera reemplazar los parámetros literales por números concretos, se les indicó expresamente que no asignaran valores numéricos a los literales *a, b* y *c.* Con ello se buscó conocer si los alumnos podían establecer una relación directa entre las variables intervinientes en los registros gráfico y algebraico, evitándose la mediación del registro tabular. Al respecto, refiriéndose a la regla que asocia puntos y pares de números, Duval (2006) afirma que: "…usar esta regla para trazar cualquier representación gráfica no puede llevar a notar las características visuales que corresponden a las características de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales." (Duval, 2006, p. 150).

Dado que en la escuela secundaria la función $y = ax + b$ es trabajada en varios aspectos, se esperaba que los alumnos no tuvieran mayores dificultades en vincular la ecuación con la gráfica de una línea recta e identificar sus elementos *a* y *b* como pendiente y ordenada al origen respectivamente. Sin embargo, era de interés conocer hasta qué punto los estudiantes evidenciarían interpretar gráficamente, de acuerdo con los signos estipulados, cuál puede ser la inclinación de la recta y en dónde puede encontrarse la intersección con el eje *y*.

Análogamente, para la función $y = ax^2 + bx + c$ se deseaba indagar, en principio, si los alumnos identificaban la ecuación con la gráfica de una parábola, y por otro lado, si podían establecer correctamente las relaciones de los signos del coeficiente cuadrático y del término independiente con la concavidad y la ordenada al origen, respectivamente, de la parábola, como así también interpretar gráficamente la condición $b \neq 0$. Se previó que las tareas de conversión al sistema gráfico tendrían mejores resultados para los coeficientes *a* y *c* que en el caso del parámetro *b*, teniendo en cuenta la frecuente focalización de la enseñanza previa en parábolas con eje de simetría en el eje *y*.

Actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A).

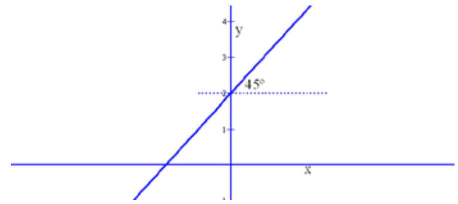
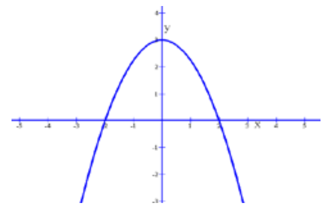
Ejercicio G→A (L). Escribe la ecuación explícita de la función cuya representación gráfica es la siguiente:	
Ejercicio G→A (C). Escribe la ecuación de la función cuadrática cuya representación gráfica es la siguiente:	

Figura 2. Ejercicios de conversión del registro gráfico al registro algebraico.

En estos ejercicios, se presentaron las gráficas de una recta y una parábola que contenían los datos suficientes para que las correspondientes expresiones algebraicas pudieran ser determinadas.

En el caso de la recta, se proporcionaron como datos el punto de intersección de la misma con el eje vertical y el ángulo que la recta determina con el semieje positivo de las x.

Es posible que la relación de la pendiente de una recta con la tangente trigonométrica del ángulo mencionado sea uno de los aspectos más dificultosos al intentar determinar la expresión algebraica de la función. Por ello, en este ejercicio, se pretendió averiguar si los estudiantes relacionaban el valor de la pendiente con la posición relativa de la recta con respecto al eje horizontal. Respecto de la obtención del parámetro *b*, se esperaba que las dificultades fueran menores, dado que la asociación de *ordenada del punto de intersección con el eje vertical – ordenada al origen* es un aspecto más trabajado (o trabajado con mejores resultados) en la escuela secundaria.

En el caso de la parábola también se apeló a pares ordenados de la gráfica que usualmente los alumnos no logran relacionar con los parámetros de la ecuación. El objetivo era ver si el alumno, a partir de un gráfico en el que se indican los valores de las intersecciones con los ejes, podía interpretar y extraer los datos que le servirían para determinar los parámetros en la construcción de la ecuación algebraica correspondiente. En ese ejercicio, se previó que la mayor dificultad estribaría en el reconocimiento del coeficiente del término cuadrático, dado que para ello los alumnos deberían realizar un procedimiento que haga uso de la conversión *punto de la gráfica – par ordenado que verifica la ecuación*. Pese al carácter congruente de esa conversión, se pensó como posible que los alumnos no tuvieran claro el sentido y posibilidades de dicha congruencia.

Análisis de las respuestas

Los resultados se presentan en tablas, diseñadas para exponer las respuestas de los estudiantes. A continuación de cada tabla, el análisis respectivo.

La primera columna de cada tabla refiere al registro de representación de partida, es decir, el registro en el que fue enunciado el ejercicio. En ella se distinguieron las variables correspondientes a la pregunta formulada en cada caso. La segunda columna corresponde al registro de llegada; en ella están especificadas las respuestas expertas para cada una de las conversiones solicitadas. En la última columna se muestran las cantidades de respuestas correctas obtenidas de los estudiantes para cada uno de los aspectos parciales que fueron analizados, aunque las respuestas no fueran necesariamente correctas en su totalidad.

Resultados de actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A → G)

Tabla 2

Respuestas al ejercicio A → G (L)

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (algebraico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (gráfico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: $y = ax + b$</td><td colspan="2">Representación: una recta</td><td>68</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valores de las variables algebraicas</td><td>$a > 0$</td><td>ángulo agudo con el eje x</td><td rowspan="2">Valores de las variables visuales</td><td>35</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>intersección con la rama negativa del eje y</td><td>38</td></tr>
</table>

Resulta significativo que casi el 40% de los estudiantes no reconoció a $y = ax + b$ como la expresión algebraica de una recta.

En términos absolutos, sobre el total de los 109 alumnos interrogados, sólo 35 relacionaron la condición $a > 0$ con un ángulo agudo con el eje x.

En lo que se refiere a la relación de la condición $b < 0$ con la intersección de la recta con el semieje negativo de y, casi las dos terceras partes del total de alumnos dio una respuesta equivocada o no respondió. Se observaron así dificultades que se presuponía no se harían tan presentes en la noción de ordenada al origen.

Tabla 3

Respuestas al ejercicio A → G (C)

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (algebraico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (gráfico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: $y = ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td>76</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Valores de las variables algebraicas</td><td>$a > 0$</td><td>Concavidad hacia arriba</td><td rowspan="3">Valores de las variables visuales</td><td>47</td></tr>
<tr><td>$b \neq 0$</td><td>eje de la parábola distinto del eje y</td><td>22</td></tr>
<tr><td>$c < 0$</td><td>intersección con la rama negativa del eje y</td><td>46</td></tr>
</table>

Se observa que aproximadamente el 70% de los alumnos asoció la gráfica de una parábola con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, aunque las características de la gráfica dibujada no estuvieron, en la mayoría de los casos, de acuerdo con el signo de los coeficientes de la expresión algebraica de la función. En relación con ello, el 43% de los alumnos pareció conocer que el signo del coeficiente cuadrático indica el sentido de la concavidad de la curva.

Los mayores desaciertos se produjeron en relación a la condición $b \neq 0$ pues la mayoría graficó parábolas con eje de simetría en el eje y. Si bien es de suponer que los alumnos habían aprendido a calcular las coordenadas del vértice dada la ecuación de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, no vincularon este conocimiento con la ubicación del vértice y con las condiciones $b = 0$ o $b \neq 0$

Del cotejo de las tablas 2 y 3, puede pensarse que el concepto de ordenada al origen de una función está más arraigado en lo alumnos en relación a funciones cuadráticas que a funciones lineales.

Resultados de actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A)

Tabla 4

Respuestas al ejercicio G → A (L)

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una recta</td><td colspan="2">Representación: $y = ax + b$</td><td>50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valores de las variables visuales</td><td>intersección con el eje y en $(0,2)$</td><td>$b = 2$</td><td rowspan="2">Valores de las variables algebraicas</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Ángulo con el eje x: 45°</td><td>$a = 1$</td><td>9</td></tr>
</table>

Todos los alumnos que lograron expresar la representación algebraica de una recta (45,9% del total), lo hicieron usando la forma explícita solicitada $y = ax + b$.

Sólo el 8,3% del total de alumnos relacionó el ángulo señalado en la gráfica dada con el parámetro correspondiente a la pendiente de la recta. En términos relativos al total de aquéllos que sí escribieron la ecuación en la forma $y = ax + b$, únicamente la quinta parte logró obtener el valor del coeficiente *a*. Podría conjeturarse que esto se debe a que en la enseñanza usual, el énfasis puede estar puesto en saber cómo calcular el valor de la pendiente, relegando la interpretación de los distintos significados que aquélla posee.

También se detectaron dificultades, aunque en menor medida, en la actividad de conversión en lo que refiere a la relación entre el punto en el que la recta interseca al eje y con el valor de b en la ecuación, ya que el 64% de los alumnos que propuso la ecuación en la forma solicitada no pudo estimarlo correctamente.

Ejercicio G→A (C). En este caso, los alumnos recurrieron a dos formas de la ecuación: general ($y = ax^2 + bx + c$) y factorizada ($y = a\ (x - r_1).(x - r_2)$), por lo que se vuelcan los resultados obtenidos en dos tablas, distinguiendo el pasaje del registro gráfico al algebraico en dos casos según el tipo de representación: Caso I (ecuación general) y Caso II (ecuación factorizada). En cada caso se contabilizó el número de quienes pudieron establecer la relación entre el dato otorgado por la gráfica (valor de la variable visual) y el parámetro (valor de la variable algebraica) correspondiente en la ecuación escogida.

Tabla 5

Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso I

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td colspan="2">Representación: $y = ax^2 + bx + c$</td><td>56</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Valores de las variables visuales</td><td>intersección con el eje y en $(0,3)$</td><td>$c = 3$</td><td rowspan="4">Valores de las variables algebraicas</td><td>48</td></tr>
<tr><td>eje de simetría el eje y</td><td>$b = 0$</td><td>33</td></tr>
<tr><td>puntos sobre la gráfica: $(-2,0)$ y $(2,0)$</td><td>pares (x, y) que verifican la ecuación</td><td>3</td></tr>
<tr><td>concavidad hacia abajo</td><td>$a < 0$</td><td>40</td></tr>
</table>

El 51.4% de los alumnos vinculó la representación de la curva en forma de parábola con la representación algebraica $y = ax^2 + bx + c$

Para obtener el valor de c, se esperaba que el alumno observe del gráfico el valor de la intersección con el eje y asignándole dicho valor. Para obtener el valor de b, se pretendió que observe que, dado que las raíces de la parábola son números opuestos, el eje de simetría es el eje y, en consecuencia, $b = 0$. Los aciertos de estas correspondencias fueron del 85.7 % en la obtención de c y del 58.9 % en la de b. La concavidad hacia abajo de la parábola indicando que el coeficiente a es negativo, resultó en que el 71.4 % hiciera esta correspondencia. Aquí se buscó que el alumno determine un valor para este coeficiente recurriendo a la búsqueda de un punto (x, y) que verifique la ecuación, siendo los más evidentes las intersecciones con el eje x o con el eje y. En las respuestas se observó que este parámetro fue el que más costó determinar y se evidencia ello en el escaso porcentaje de aciertos (5.4%). Es de hacer notar que estos porcentajes corresponden al total de alumnos que propusieron la forma $y = ax^2 + bx + c$ de la expresión algebraica de la parábola y no referido a la totalidad de los alumnos que realizó la prueba.

Tabla 6

Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso II

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td colspan="2">Representación: $y = a\ (x - r_1).(x - r_2)$</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Valores de las variables visuales</td><td>intersecciones con el eje x en $(-2,0)$ y $(2,0)$</td><td>$r_1 = -2$ y $r_2 = 2$</td><td rowspan="3">Valores de las variables algebraicas</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Punto sobre la gráfica: $(0,3)$</td><td>pares (x, y) que verifican la ecuación</td><td>1</td></tr>
<tr><td>concavidad hacia abajo</td><td>$a < 0$</td><td>3</td></tr>
</table>

En este caso, sólo el 9.2 % de los alumnos representaron algebraicamente con la ecuación $y = a\ (x - r_1).(x - r_2)$ a la parábola dada en el gráfico. Todos esos alumnos acertaron en asignar a los parámetros r_1 y r_2 los valores de los puntos donde la parábola interseca al eje x.

La determinación del parámetro a presentó mayor dificultad. El 30 % interpretó que el signo de a es negativo ya que la concavidad de la parábola es hacia abajo pero sólo el 10 % pudo determinar un valor específico utilizando un punto (x, y) que verifique la ecuación; por ejemplo, se esperaba que se utilice el punto de intersección con el eje y, ya que conducía a cuentas más sencillas para hallar a.

Aquí, la mayoría de los alumnos que no escribieron correctamente el valor de *a*, mostraron la ecuación factorizada de la parábola con un valor de *a* arbitrario pero negativo y otros lo dejaron indicado con las expresiones literales "-*a*" o "*a* ".

Conclusiones y reflexiones

Los datos obtenidos en este estudio revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes encuestados no logró establecer una articulación espontánea y exenta de errores de sus representaciones, lo cual proporciona indicadores de la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos en estudio considerados.

En lo que se refiere a la función lineal, los errores en la coordinación de los registros se observan tanto en la noción de pendiente como en la de ordenada al origen. Si bien se había previsto la dificultad de los alumnos en conectar el parámetro a de la expresión $y = ax + b$ con la inclinación de la recta, resultó un tanto sorpresivo que los problemas de articulación se manifestaran también, en un porcentaje similar, con respecto al concepto de ordenada al origen.

Respecto de las dificultades en articular representaciones en el caso de la función cuadrática, también es claro que se manifiestan en todas las variables en juego. Una de las más notorias resultó la relación entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola. También fue claro que los alumnos no acertaron a establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.

Los problemas se revelan con mayor fuerza cuando el registro de partida es el gráfico. Aparecen manifiestos los inconvenientes que habitualmente también se observan en el trabajo de los alumnos en el aula y que es posible que les dificulten el realizar generalizaciones, formalizaciones y abstracciones.

En ese sentido, es notoria la diferencia que existe, tanto en el caso de la función lineal como de la cuadrática, entre el número de respuestas correctas en la conversión del registro algebraico al gráfico con la cantidad de aciertos cuando se trata de realizar la conversión en sentido contrario. Por ejemplo, llama la atención que el porcentaje de alumnos que en el registro algebraico reconocieron que el signo de la ordenada al origen de una función lineal refiere a que ésta interseca al semieje y positivo o negativo (aproximadamente el 34,8%), duplica con creces al que representa a los estudiantes que en el registro gráfico identificaron el valor 2 dado en el eje y con el valor del parámetro b en la ecuación de la función (aproximadamente el 16,5%).

Es posible que las diferencias observadas se deban al desigual abordaje que se realiza en la enseñanza entre las formas en que se expresan en ambos registros las funciones polinómicas de primer y segundo grado. A pesar de que existe abundante investigación y resultados en

Educación Matemática sobre el tema expuesto, que expresan la potencialidad de pensar e implementar acciones en torno a las bondades del cambio de registros como una competencia a desarrollar, pareciera que, en el marco contextual en el que se desarrolló este estudio, aún es insuficiente la presencia de esos procedimientos tanto en las actividades áulicas como en los materiales de enseñanza utilizados.

Los datos obtenidos y las observaciones y conclusiones que pueden derivarse de los mismos, permiten formular interrogantes acerca del grado de incidencia de los errores provenientes de conocimientos previos, en los resultados conseguidos por los alumnos en el primer año de su vida universitaria. En este sentido, se prevé continuar el estudio con el análisis de la persistencia de los distintos tipos de errores en la primera materia de matemática de la carrera, relacionando la información obtenida en este trabajo con los resultados de los estudiantes en evaluaciones que incluyan la propuesta de problemas en los que se inserten posibles fuentes de error proveniente de dificultades de articulación de representaciones.

Referencias y bibliografía

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. (4), 3, 219-236.

Buteler, L. y Gangoso, Z. (2001). Diferentes enunciados del mismo problema: problemas diferentes?. *Investigações em Ensino de Ciências*. (6)3, 269-283.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, 42,353-369.

Castro E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (comp.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 95-124. Horsori, Barcelona, España.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24, 333-334.

Díaz Lozano, M., Haye, E., y Macías, M. (2012). Estrategias didácticas en la elaboración de un módulo destinado a la enseñanza a distancia de Trigonometría. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina*. (27),nro.1.

Dreyfus T. (1992) Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics. *Education. ICME-7 Selected Lectures*, Les Presses de l'Université Laval, 107-123

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME, 23*, 3-26.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, (9),1, 143-168.

González-Martín, A. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 81-94.

Guzmán Retamal, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. (1), 1, 5-21. México, D.F.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, Universidad de Granada. 165-178.

Hitt, F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, (X), 2, 213- 223.

Johnson-Laird, P. N. (1996). Images, Models and Propositional Representations. 90-127. En De Vega, M; Intons-Peterson, M. J.; Johnson-Laird, P. N.; Denis, M. y Marschark, M. *Models of Visuospatial Cognition*. Oxford. University Press. 230.

Lupiañez, J. y Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática .Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. 291-300.

Nersessian, N. (2007) Razonamiento basado en modelos y cambio conceptual. *Rev. Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.* (4), 3, 563-570.

Otero, M. R., Greca, I. M. y Silveira, F. L. (2003). Imágenes visuales en el aula y rendimiento escolar en Física: un estudio comparativo. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, (2), 1, 1-30.

Dificultades de profesores de bachillerato en México para implementar cambios curriculares en su práctica docente

María de Lourdes **Miranda** Quintero
Cinvestav – IPN
México
mmiranda2002@hotmail.com
Ana Isabel **Sacristán** Rock
Cinvestav - IPN
México
asacrist@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados de una investigación cuyo objetivo era detectar de qué manera la reforma educativa llevada a cabo en México en la década de los 90s, ha trascendido sobre la didáctica de los profesores de matemáticas del nivel medio superior. Para ello, se encuestaron 180 profesores, de los cuales se seleccionaron 20 profesores para ser entrevistados y observados durante su práctica; se identificaron diversas problemáticas que muestran la falta de claridad en lo que se espera de su labor docente en el proceso de reforma educativa del país. De esta investigación, en este artículo nos enfocamos en los resultados relacionados con algunas de las dificultades que están enfrentando los profesores en su práctica para lograr la implementación de las recomendaciones y propuestas planteadas en el currículo escolar, observando lo que están haciendo y cómo se relaciona esto con los cambios educativos propuestos en dicha reforma.

Palabras clave: reforma educativa, currículo, práctica docente, matemática.

Introducción

En este artículo se presentan resultados relacionados con algunas dificultades mostradas por los profesores de matemáticas para incorporar a su práctica docente, propuestas de la reforma educativa. Estos resultados se obtienen de una investigación más amplia, que contemplaba observar la didáctica del profesor (lo que está haciendo, para qué lo está haciendo y cómo lo debería de hacer de acuerdo a la reforma educativa).

En la actualidad formamos parte de la llamada era de la sociedad del conocimiento, lo que ha traído como consecuencia la transformación de los procesos productivos de las diversas actividades de la población mundial (Jara, 2008); este hecho debería impactar de diferentes maneras en la práctica profesional del profesor y consecuentemente en su didáctica. La manera como han ido cambiando las propuestas educativas en otros países, en particular en aquellos “de primer mundo”, trae como consecuencia que esta cadena de cambios se vea directamente reflejada en la modificación de la actividad docente en nuestro país. En México, en la década de los noventas, se llevó a cabo un importante proceso de reforma educativa. Fullan (2006) señala que la palabra reforma se utiliza cuando se pretende provocar cambios a gran escala, que fue el caso en esa época, donde se dieron sugerencias de cambios educativos considerables en diferentes áreas de interés para la didáctica del profesor. Cabe señalar que en el 2008 se realizó otra reforma curricular en el país, aunque ella se ciñe a la reforma anterior y sólo se complementan algunos aspectos.

Entre las motivaciones que han propiciado cambios en las formas de producción y divulgación del conocimiento, se observa una acelerada transformación producida por los avances y procesos de modernización de la ciencia y la tecnología, lo que impulsa, a su vez, necesidades de cambio en los paradigmas educativos. En particular, muchas de las propuestas realizadas recientemente por organismos internacionales, apuntan a las teorías y paradigmas constructivistas del aprendizaje, así como a la implementación del uso de tecnologías digitales (TD). La reforma educativa en nuestro país tiene clara influencia de las necesidades de la sociedad así como de las propuestas internacionales; por ende, los profesores de matemáticas, además de implementar otros cambios propuestos en la reforma, debieran utilizar las TD como apoyo didáctico.

Para entender cómo está conformada la didáctica actual de los profesores de matemáticas del nivel medio superior en las escuelas del país, se realizó una revisión documental en dos sentidos; primero, sobre algunas de las teorías de aprendizaje, que consideramos han tenido mayor impacto y han influenciado de manera significativa las formas y procesos de implementación de dichas propuestas educativas en la actualidad; y segundo, sobre los lineamientos y las políticas, propuestas como parte de la reforma educativa, llevada a cabo en la década de los noventas en México. En esa parte de la investigación, se deseaba observar cuáles fueron las modificaciones realizadas en el currículo escolar, a propósito de esta reforma. De esta revisión se detectó que en México la teoría educativa que prevalece desde hace algunas décadas en el currículo escolar, se basa en las propuestas constructivistas.

Al respecto de la labor docente, Shulman (1987, 2001) menciona que, como parte de la profesionalización del profesor, es importante integrar, en su práctica, diferentes tipos de conocimientos. En su investigación sobre los orígenes del conocimiento del contenido pedagógico (*Pedagogical Content Knowledge o PCK*) se describen los elementos constitutivos de cada unos de los conocimientos que forman parte de PCK. Entre los elementos propuestos por Shulman, considerados como parte de esta investigación están: el conocimiento de los contenidos, del currículo y de la pedagogía. Más recientemente, Mishra y Koehler (2006) propusieron otro tipo de conocimiento para complementar el trabajo de Shulman, el cual definen como Conocimiento Pedagógico del Contenido Tecnológico (*Technological Pedagogical Content Knowledge – TPCK*); éste está constituido por tres tipos de conocimiento: el tecnológico, el pedagógico y el del contenido, lo que implica que se necesita tanto de un conocimiento de la tecnología *per se*, como de un conocimiento pedagógico de la tecnología, además de los conocimientos pedagógicos y de contenido de la materia. Todos estos elementos fueron considerados como parte de nuestro marco teórico.

Metodología

Primeramente, se aplicó una encuesta a 180 profesores en el país, de la que se realizó un análisis estadístico cuantitativo. Posterior a esta encuesta, se hizo una selección de 20 profesores, de cinco diferentes instituciones educativas públicas, indagando sobre los siguientes aspectos: i) si los profesores tienen conocimiento de que, como parte de los procesos de globalización, se han llevado a cabo cambios en todos los niveles educativos; ii) si los profesores dicen haber modificado su práctica, como parte de las propuestas en la reforma educativa; y iii) si lo profesores utilizan algún tipo de tecnología digital (TD) como apoyo didáctico durante sus clases. El instrumento para esta selección de 20 profesores fue una entrevista y la observación de dos de sus clases. De los datos de estas observaciones se realizó un análisis cualitativo, utilizando una metodología cercana al estudio de casos. En general queríamos saber si los profesores están enterados de las propuestas educativas internacionales, si conocen las modificaciones realizadas al currículo después de la reforma, y cómo perciben y llevan a cabo éstas en su didáctica cotidiana y con el uso de las tecnologías digitales (TD) que se les sugiere utilicen como apopo didáctico.

Para el análisis de los datos se llevó a cabo una triangulación metodológica entre los distintos tipos de investigación mencionados, con el objetivo de obtener una estructura de las relaciones incluyentes entre lo cualitativo, lo cuantitativo y lo documental (Denzin, 1990; Bryman, 2007). De esta forma, el interés se mantuvo en observar las relaciones existentes que forman una parte esencial en la didáctica del profesor y lo que debería estar sucediendo como consecuencia de una década de implementación de la reforma educativa en las escuelas del país. Nosotros consideramos que estos elementos esenciales están formados por las creencias y entendimientos del profesor sobre: los cambios educativos y curriculares que se han realizado en la última década; de las metodologías de enseñanza y aprendizaje; y del uso de la herramienta tecnológica como apoyo didáctico.

Resultados

A partir de la revisión de la documentación oficial de las instituciones, se ha observado que se han modificado de manera constante los documentos oficiales donde están plasmadas las propuestas actualizadas que reflejan este interés, y los procesos de cambio se han dado de manera continua durante las últimas dos décadas. Durante la revisión curricular de la materia de matemáticas de varias escuelas, se identificó que en todas ellas se han adoptado elementos de reforma hacia la teoría constructivista, mencionando en todos los casos: que el estudiante será el responsable de su aprendizaje, que el profesor deberá modificar su rol en el aula fomentando trabajo colaborativo, que el conocimiento ya no será por transmisión, ni memorístico, entre otras.

Resultados de la encuesta

De la encuesta a los 180 profesores, el 91% dijo estar enterado de los cambios educativos a nivel mundial. Sin embargo, el 48% considera que el cambio ha sido más notorio en el área metodológica; aún cuando durante las observaciones a su clase no mostraron elementos claves de las “nuevas” sugerencias curriculares en su didáctica.

Para poder identificar si los profesores incorporaban las sugerencias de didáctica de corte constructivista en su práctica docente, construimos una serie de criterios a identificar durante las observaciones en el aula de los profesores de nuestra investigación.

Un primer resultado fue que, aun cuando los profesores se muestran enterados y conscientes de los cambios educativos a nivel internacional, observamos que:,

- Que el profesor no parece conocer el objetivo final de las necesidades de cambio para el estudiante en términos de competencias matemáticas y tecnológicas y lo proyecta en su didáctica.
- Que el material didáctico y el contenido en la temática del profesor no contiene elementos de las problemáticas actuales, relacionando la matemática y el entorno cotidiano (como se menciona en los programas curriculares) para despertar el interés en el estudiante y lograr un desarrollo integral atendiendo las complejidades de una sociedad globalizada.

Esto muestra la carencia de un objetivo claro para que el egresado desarrolle competencias matemáticas y tecnológicas necesarias para una sociedad globalizada y en cambio constante.

A continuación, en la Tabla 1, se muestra un resumen de algunas de las preguntas relacionadas con el proceso de reforma y cómo percibe el profesor de matemáticas su didáctica como consecuencia de ésta.

Tabla 1

Resumen del cuestionario.

Pregunta	Tipo de respuesta del profesor			
	Nada	Poco	Medianamente	Mucho
¿Los lineamientos y políticas educativas están acordes a la época actual?	12%	48%	36%	4%
¿Conoce el objetivo de la reforma curricular?	8%	30%	48%	14%
¿Ha modificado su práctica a raíz de la reforma curricular?	4%	18%	58%	20%
¿Utiliza propuestas de la reforma curricular al planear sus cursos de matemáticas?	5%	18%	57%	20%

Estos resultados muestran que los profesores dicen estar enterados de los cambios que se han dado y consideran que han tenido impacto en su didáctica. Un porcentaje importante dice haber hecho cambios en su práctica, como consecuencia de los cambios en la sociedad y en los programas escolares. Sin embargo admiten conocer sólo algunas de las propuestas curriculares, aun cuando todas están plasmadas en el programa con el que laboran cotidianamente.

Otra de las cosas que observamos durante la entrevista y las observaciones en el aula, en relación con el conocimiento de los cambios curriculares, es que la actividad que los profesores desarrollan en su práctica, sí es acorde con las temáticas sugeridas en los programas oficiales. Sin embargo, la didáctica de los profesores pone énfasis en la temática, más que en las sugerencias de aprendizaje propuestas; esto da evidencia del bajo impacto de las reformas sobre el conocimiento, tanto curricular, como pedagógico, lo que evita que se aborden dichas temáticas con el enfoque (de tipo constructivista) sugerido en las propuestas curriculares, contradiciendo su respuesta de que han modificado “mucho” su didáctica.

En relación al uso de las TD, el 38% de los profesores encuestados sienten que el cambio más importante de la reforma es la incorporación de las TD en los procesos de enseñanza-aprendizaje y 130 dicen estar utilizando las TD en su práctica docente. Sin embargo, en las observaciones, a pesar de que los 20 profesores seleccionados decían en el cuestionario que utilizan TD en el salón de clase, y 16 de ellos lo reiteraron en la entrevista, sólo a 8 se logró observar utilizándolas. Más aún, 6 profesores sólo la utilizaron con fines poco significativos a los aprendizajes. Por ejemplo, mostrar un video, comparar gráficas realizadas en el salón de clase a papel y lápiz o mostrar presentaciones de cierto tema realizadas por los alumnos.

Resultados de las entrevistas y las observaciones

Durante la entrevista, se comprobó que todos los 20 profesores seleccionados sabían que durante los últimos 15 años se han realizado modificaciones curriculares a los programas de matemáticas. A continuación se enlistan los enfoques que ellos consideran son recientes:

- Desarrollo de competencias y de habilidades técnicas para trabajar en la empresa, la problematización de situaciones reales, uso de propuestas constructivistas, uso de las TD en el aula, trabajar a base de proyectos y resolución de problemas.

Todos estos profesores identificaron algunas de las propuestas metodológicas contenidas en los programas de la reforma. No obstante se observaron pocas evidencias de su utilización.

Los profesores comentaron que los cambios no están funcionando principalmente debido a que:

- Solo se están copiando modelos de otros países y que en nuestro país no sirven
- Que los cambios sólo se han visto reflejados en los niveles básico y medio
- Que los programas están saturados de contenidos por lo que es difícil usar esas propuestas, les toma mucho tiempo implementarlas en clase
- Todavía no está bien establecido el cambio, no se tiene una adecuada estructura de las cosas y se ésta improvisando mucho
- Todos los conocimientos adquiridos en cursos y diplomados no son llevados al aula porque los maestros no pueden (o no quieren) aplicarlo
- Consideran que la matemática no se puede enseñar de otra manera a como se ha enseñado tradicionalmente

Resultados del uso de la tecnología digital

En relación con el uso de las TD, sólo el 38% de los profesores encuestados mencionó que los cambios han sido notorios. Esto muestra un bajo impacto sobre la didáctica del profesor, en áreas tales como el conocimiento de la pedagogía y el uso de las TD como apoyo didáctico.

Los 20 profesores seleccionados fueron aquellos que coinciden en que el uso de las TD se ha convertido en parte esencial de la formación de los estudiantes, y que es importante su incorporación en la didáctica como herramienta de apoyo. Esto es, todos los profesores entrevistados mencionaron en el cuestionario que utilizan las TD como apoyo en su práctica; entre los tipos de tecnología que mencionaron utilizar están: las TIC´s, medios electrónicos de información, laptop, iPod, celulares; material del internet, Software de matemáticas, videos, y películas; graficadores como Geogebra, Cabrí, Graphmatic, Winplot y Excel. Sin embargo, en las entrevistas se notó que los profesores utilizan las TD, en su mayoría, como herramienta de comparación y verificación.

Resulta interesante que aunque todos los profesores entrevistados decían utilizar las TD en su práctica, solamente un profesor comentó que el uso de la tecnología le ha facilitado bastante el desarrollo de su actividad docente y que los cambios han sido muy benéficos para el estudiante.

De manera específica se les preguntó cuál era el objetivo que perseguían al utilizar las TD con sus alumnos, de lo que obtuvimos algunas de las siguientes respuestas:

- Si se le ve como un método de solución o de forma de cambiar el razonamiento está mal, es simplemente una herramienta
- Se les facilitan a los estudiantes los aprendizajes, provoca que tengan que adquirir los conocimientos con la ayuda de esa herramienta
- Un poco más de versatilidad y de rápidez en lo que se enseña.
- Que el alumno visualice de una forma más atractiva, más divertida… pero se usa más que nada para rectificar
- El principal objetivo es que los alumnos aprendan o traten de entender lo que se les está diciendo
- Que los alumnos realicen gráficas en papel y lápiz y luego se utilicen el software para observar ciertos comportamientos de las gráficas y después verifiquen gráficamente que los resultados obtenidos dentro del salón de clase son verdaderos

De las respuestas de los profesores se aprecia que entre las cosas que buscan es ahorrar tiempo y comprobar lo realizado en el pizarrón. Nos es claro que las TD son una herramienta, sin embargo, no la están entendiendo como una herramienta que puede modificar los procesos cognitivos de aprendizaje, y aun si la institución tiene las herramientas y el empeño por cumplir con lo establecido en los lineamientos institucionales, el profesor no tiene claro qué hacer con la TD al trabajar con sus estudiantes.

Como ya se señaló arriba, de los 20 profesores que habían sido seleccionados por decir que utilizaban TD en el salón de clase, sólo se pudo observar a 8 de ellos utilizándola. Entre los profesores que no se pudieron observar utilizando TD, fue debido a que en algunas escuelas los salones de clase no tienen toma corriente y varios expresaron argumentos que impedían el uso de las TD en clase, tales como: la dificultad para solicitar un proyector o una extensión de luz para tomar la corriente de otro lado; así como de llevar su computadora al colegio. También mencionaron que ellos no les enseñaban a los estudiantes a utilizar las TD, solamente les solicitaban la tarea elaborada en computadora (por ejemplo, investigaciones en internet, envío de tarea por email o elaboración de las mismas graficas realizadas en su cuaderno durante la sesión en el aula).

De los 8 profesores que se observaron, se encontró que 5 de ellos llevaron un proyector del colegio y su propia computadora al salón de clase. Uno de estos 5 profesores tuvo que colocar el proyector en una pila de mesa y silla sobre otra silla para que se proyectara “mejor” la imagen. La TD se utilizó para que cada estudiante mostrara un trabajo final de Estadística elaborado por ellos en Power Point. Esta fue la única clase en la que la profesora utilizaría TD en el semestre, según lo comentó en la entrevista; y su objetivo expresado fue hacer presentaciones y optimizar tiempo al elaborar gráficas.

Solamente un profesor mostró más familiaridad con las TD en el aula. La actividad que desarrolló en clase fue para observar y analizar el comportamiento de las funciones cuadráticas en problemas de aplicación, mostrando problemas bien diseñados en los que el estudiante debía comprender para qué valores del dominio de la función la solución adquiere o no sentido. Se observó que el profesor comprendía el contenido de la matemática presentada, logrando llevarla adecuadamente a una actividad apoyada con la computadora. Sin embargo, cuando presentó la actividad frente al grupo, se detectó deficiencia del conocimiento de la pedagogía en torno a la teoría constructivista y en cuanto a la pedagogía de las TD (el conocimiento pedagógico de las tecnologías digitales – parte constitutiva del TPCK) ya que el profesor simplemente proyectó la función, lo cuál ni siquiera le permitió ver si los alumnos estaban comprendiendo el objetivo de la actividad.

De los tres profesores que llevaron a su grupo al laboratorio de cómputo observamos lo siguiente: una profesora durante su sesión en pizarrón trabajó con el llenado de una tabla con los datos de un problema de aplicación estadístico para determinar la correlación entre ellos; posteriormente cuando llevó a los estudiantes al laboratorio de cómputo les enseñó a capturar las formulas de la tabla en Excel y a elaborar gráficas relacionadas con los datos. Otro profesor también utilizó Excel para graficar las funciones seno y coseno en una actividad que se observaba bien diseñada y más trabajada en el aula con los estudiantes. La tercera profesora llevó a sus estudiantes a realizar graficas de funciones irracionales para identificar comportamientos de parámetros y definir el dominio y codominio de cada una de ellas; esta actividad fue mayormente algorítmica, casi con un objetivo de optimizar tiempo más que de lograr aprendizajes significativos en el estudiante.

A partir de estas observaciones podemos decir que aunque los profesores están al tanto de los cambios en torno a las TD y de la urgencia que representa su uso en la sociedad y la vida cotidiana, en su didáctica no se ven reflejados. Se observa que el proceso de implementación de las TD en el aula es casi nulo. Aquellos pocos profesores que dicen estar actualizados al utilizar las TD, la están subestimando como apoyo didáctico, sin atender a la responsabilidad y las dificultades que implica su implementación durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Es importante notar que aunque algunos profesores han intentado adaptarse a los cambios educativos, la falta de capacitación y acompañamiento puede estar propiciando, confusión, desinformación, desinterés o falta de compromiso.

Comentarios finales

A partir de nuestro estudio nos percatamos que, aún cuando los programas de todas las escuelas de nivel medio superior realizaron procesos de actualización durante la década de los noventas, y que los profesores se dan cuenta de los cambios educativos a nivel mundial y que varios de ellos están conscientes de que se requiere llevarlos al aula, las sugerencias para la implementación son insuficientemente explícitas; y, en consecuencia, muchos docentes no saben cómo llevar dichas modificaciones al aula. Es decir, aunque las instituciones sí contemplan objetivos comunes de cambios, no sólo de contenido, sino pedagógicos, con enfoques que consideramos de corte constructivista, los profesores que dicen estar al tanto de esos cambios, en la práctica no dan evidencias de haber asimilado dichos cambios. De las observaciones que se realizaron de los profesores en el aula, se deduce que la incorporación de los cambios sugeridos en las reformas se ha dado de manera lenta, y en la mayoría de los casos observados, las formas cómo el profesor está llevando a cabo sus actividades en el aula no son congruentes con las propuestas de cambio. La cultura escolar y de los maestros del nivel medio superior en México, no parecen favorecer la incorporación de los cambios propuestos en las reformas, en cuanto a metodologías y de uso de las TD en el aula. Incluso, algunos profesores dan razones como las enlistadas arriba, para justificar la ausencia en la implementación de los cambios en su didáctica, o bien simplemente prefieren ignorar las propuestas manteniendo el formato de su clase como estaban acostumbrados.

El profesor tiene una gran responsabilidad en cuanto a la reflexión de los conocimientos que debe poseer para un desempeño adecuado de su práctica; no obstante, consideramos que las instituciones también tienen responsabilidad en reflexionar sobre la necesidad de ampliar y mejorar las propuestas curriculares así como propiciar las condiciones adecuadas para una formación y profesionalización de calidad, donde los profesores logren desarrollar actividades más acordes a las propuestas (como son aquellas con el uso de TD).

Referencias Bibliográficas

Coll, C. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre de la misma perspectiva epistemológica.

Díaz-Barriga, F. & Hernández, G. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. Mcgraw Hill. México.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge. A Framework for Teacher Knowledge. *Teacher College Record 108 (*6): 1017-1054.

Jara, I. (2008). *Las políticas de tecnología para escuelas en América Latina y el Mundo: visiones y lecciones*. Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). Retrieved from http://www.eclac.org/ddpe/publicaciones/xml/8/34938/W214.pdf

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching. Foundations and the New Reform. *Harvard Educational Review.* 57 (1).

Shulman, L. (2001). Conocimiento y enseñanza. *Estudios Públicos.* Vol 83, pp. 163-196

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Dimensiones afectiva y ecológica del conocimiento didáctico-matemático del maestro

Hilduara **Velásquez** Echavarría
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
sarcavelasquez@gmail.com
Walter Fernando **Castro** Gordillo
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
wfcastro82@gmail.com

Resumen

Esta comunicación aborda el conocimiento didáctico-matemático del maestro en formación que realiza su práctica pedagógica; se asume el concepto de Idoneidad Didáctica (Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006) propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007). Se enfatizan las dimensiones afectiva y ecológica, involucradas en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: Maestro en formación inicial, Conocimiento didáctico-matemático, Dimensión afectiva, Dimensión ecológica.

Presentación

La comunicación informa sobre una investigación en curso en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Se aborda el estudio del conocimiento didáctico-matemático del maestro en formación, quien enseña matemáticas durante su práctica pedagógica. La práctica pedagógica se realiza durante cuatro semestres académicos, el primero consta de un proceso de observación y reconocimiento en una institución escolar para formular un proyecto de investigación en el aula, el cual se desarrolla en el segundo y tercer semestre; en el cuarto, se elabora el informe final de la práctica pedagógica. Este proceso es orientado por dos profesores de la Universidad, quienes se reúnen con los practicantes, cuatro horas semanales, durante las 16 semanas académicas, para planear y discutir sobre sus planeaciones de clase, las experiencias de clase y sus reflexiones.

En la investigación, sobre el conocimiento didáctico-matemático, se trabaja con seis estudiantes-practicantes (quienes en adelante serán referidos como “practicantes”) de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Las prácticas se realizan en la Institución Educativa Antonio Ricaurte, en los grados 3°, 4° y 5° de primaria, durante el segundo semestre del año 2012 y el primer semestre del 2013.

La Institución Educativa está ubicada en una de las comunas de la Ciudad de Medellín. Comuna es una subdivisión administrativa y geográfica de una zona urbana o rural; en Medellín, este término es utilizado en forma peyorativa para discriminar a la comunidad social y culturalmente. En esta zona se presentan conflictos entre grupos armados al margen de la ley. El sector sufre diversas problemáticas (pobreza, desempleo, violencia, descomposición familiar), las familias, en su mayoría, están conformadas por abuelas, tías, madrastras o padrastros; la población estudiantil de básica primaria es femenina, y pertenece a los estratos I y II. Los estratos están determinados por el poder económico e inmueble, y ayudan a determinar el monto de los impuestos a pagar, las tarifas de los servicios públicos domiciliarios, el acceso a los servicios de salud, las matrículas a pagar en los colegios y universidades estatales. Los estratos I y II están catalogados como nivel bajo.

La investigación es de corte cualitativo, bajo la metodología de estudio de casos, donde se busca analizar, comprender y reflexionar sobre las acciones de los maestros en formación inicial, durante el proceso de enseñanza.

Marco Teórico

El maestro en formación inicial, se asume como el futuro maestro que adelanta sus estudios de pregrado en un programa de licenciatura en Educación; quien en los cuatro últimos semestres de su formación, durante la práctica pedagógica, se enfrenta a los problemas asociados con la realidad de la escuela; el practicante experimenta la dicotomía entre la “formación” que recibió en la Facultad y la “práctica”, la realidad de la escuela con su complejidad. Esta dicotomía evidencia una brecha entre la teoría y la práctica (Jaramillo, 2008).

La formación del maestro de matemáticas tiene efecto en los procesos de enseñanza de los futuros maestros. Se aprende a ser maestro a partir de la actividad docente y de la reflexión que él hace de su propia práctica (Ponte, 2012). Esta reflexión articula la teoría con la práctica, lo cual contribuye con la formación de los maestros, “el futuro maestro pasa a concebirse a sí mismo como un sujeto productor de saberes, desde y para su práctica pedagógica” (Jaramillo, 2008, p. 6).

La pregunta ¿De qué conocimientos está constituida la formación inicial del maestro de matemáticas? ha sido objeto de investigación por varios autores, Shulman (1986-1987), Ball y sus colaboradores (2001- 2004 -2008), Godino y su equipo (2007-2009-2011), Ponte (2008-2012), entre otros; los cuales han propuesto diferentes modelos de análisis de los conocimientos que facultan al maestro para la enseñanza de las matemáticas.

La Idoneidad Didáctica, como concepto clave de una teoría de instrucción matemática, orienta la reflexión sobre la práctica del maestro hacia la intervención efectiva en el aula; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, (2006) consideran seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática (Godino, 2011): la epistémica, la cognitiva, la mediacional, la afectiva, la interaccional y la ecológica. La identificación de estas seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción, permite valorar la complejidad de los procesos de enseñanza y ayuda al maestro a asumir esta complejidad. Las dimensiones afectiva y ecológica son de interés en ésta investigación.

La enseñanza, en tanto que es un proceso social, involucra emociones, afectos, y sentimientos de alumnos y maestros, de tal suerte que las interrelaciones emocionales pueden generar frustración, motivación, desinterés o estados de estrés; "el profesor ideal para este nuevo siglo tendrá que ser capaz de enseñar la aritmética del corazón y la gramática de las relaciones sociales" (Extremera & Fernández, 2002, p. 374). Por ello, es conveniente conocer cómo evolucionan, cómo se expresan, cómo se controlan, y cómo se desarrollan las emociones positivas. Así mismo importa conocer cómo se previenen las experiencias negativas, cómo se promueve la automotivación, y cuál es el papel que juegan las emociones en el aprendizaje.

La dimensión afectiva está vinculada con las emociones, creencias y actitudes del ser humano; por lo que se adopta el término: afectiva-emocional. La dimensión afectiva-emocional tiene que ver con la habilidad del maestro para regular las emociones propias y la de sus alumnos (Extremera & Fernández, 2003), está relacionada con la forma en que el maestro se relaciona con el estudiante, las expresiones que utiliza para dirigirse a ellos, sus gestos, actitudes, la manera en que asume el rol como maestro. La dimensión afectiva se manifiesta en la práctica de manera compleja y se reconoce cuando el maestro identifica estados de angustia, depresión, enfado y los afronta. Así mismo se manifiesta la dimensión afectiva cuando el maestro anima a los estudiantes para que se involucren en la realización de una actividad matemática. El maestro en el quehacer docente debe asumir una actitud comprensiva ante las situaciones personales de los estudiantes y orientarles en circunstancias conflictivas; es decir, interesarse por lo que viven, por sus emociones, por lo que sienten, piensan y hacen.

Cuando se resuelve un problema matemático, se genera una situación afectiva para los sujetos que intervienen- maestro, estudiante-, quienes ponen en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino que también movilizan creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan, en mayor o menor grado y diferente sentido, la respuesta cognitiva requerida (Godino, 2011).

Al igual que la dimensión afectiva-emocional, la ecológica (entorno social y cultural) toma relevancia en tanto que favorece comprender la importancia del contexto en el aprendizaje de las matemáticas, además de valorar la adecuación del proceso de instrucción a la institución educativa, a las directrices curriculares y a las condiciones del entorno social.

Metodología

En la investigación se hace un análisis cualitativo de las acciones de los practicantes en diferentes situaciones y contextos: los seminarios de práctica, donde participan los dos asesores y la investigadora; reuniones para establecer diálogos antes o después de la clase que orientan; y el aula de clase, durante el proceso de enseñanza. Las acciones objeto de análisis, son: las situaciones y tareas propuestas a los estudiantes, representaciones y procedimientos utilizados, la forma de relacionarse con las niñas, las preguntas y respuestas que genera en el aula, las actitudes, valores y creencias que pone en manifiesto, la forma como organiza la clase, cómo motiva el aprendizaje de las matemáticas, las relaciones que establece entre las niñas y el conocimiento, los recursos mediacionales que utiliza.

Se hace un registro de la información, a través de grabaciones de audio y video; se aplican tres encuestas estructuradas, en tres momentos diferentes, para identificar las percepciones sobre la práctica pedagógica. Además, se hace un análisis de los planeadores de clase, de las situaciones propuestas en la clase, y de los diarios de los practicantes. Los planeadores son el registro de las actividades a desarrollar en la clase, contiene: fecha, nombre del maestro cooperador, de los practicantes, objetivo de la clase y los diversos momentos a desarrollar, incluyendo las situaciones, ejercicios y preguntas. Los diarios son un registro de lo acontecido en la clase, el practicante describe las debilidades y fortalezas que se presentaron en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a la vez que reflexiona sobre su práctica en el aula.

En esta comunicación se presenta el análisis de dos episodios de clase, de la planeación de una clase y de algunas percepciones de los practicantes; donde se identifican algunos indicadores de las dimensiones afectiva y ecológica del conocimiento didáctico-matemático de los maestros.

Resultados

La experiencia de la práctica pedagógica, ha permitido a los practicantes acercarse a la realidad de la escuela, convivir con los problemas del entorno escolar y social, e identificar, como este ambiente violento y de inseguridad del sector, afecta los procesos de enseñanza y aprendizaje. El practicante, al compartir este entorno, siente temor y angustia al darse cuenta de la realidad que viven las niñas, lo cual genera en ellos, tensiones y desmotivaciones; algunos de los temores manifestados son: ¿cómo manejar esas situaciones adversas, para que no afecte el aprendizaje de las niñas?, ¿cómo encausar las conductas y actitudes de las niñas, que en muchos casos se torna agresiva y violenta? Situación que lograron manejar de cierta manera, a través de un buen trato hacía las niñas, demostrándoles afecto, comprensión y un acercamiento que permitió generar confianza hacia el aprendizaje de las matemáticas.

En un fragmento de una de las entrevistas realizadas a los practicantes, uno de ellos expresa "*…nosotros desde la misma matemática uno se "estrella", uno va con muchos planes para la clase…, así sea como persona, yo me siento estrellado*…", manifiestan que la planeación es un ideal de clase, pero en la realidad del aula es muy diferente lo que sucede, la planeación es insuficiente, por las múltiples situaciones generadas en la interacción entre el maestro, el objeto de conocimiento y las niñas; para ellas hay otros intereses, otras necesidades, las cuales no han sido tenidas en cuenta en la planeación de las clases. Además, manifiesta "*…el solo hecho de hablarles, de verbalizar el conocimiento, de traducirles lo que uno está pensando, ya es una tarea totalmente difícil"*. El maestro al llegar al aula se encuentra con diversas situaciones que hacen que su planeación no sea la más adecuada, ni pertinente; por lo tanto, recurre a los conocimientos recibidos en la formación, a sus creencias y concepciones, se aleja de la realidad del aula, del contexto y de los intereses y necesidades de los estudiantes.

La planeación de la clase se constituía, en un ideal de enseñanza, porque al llegar al aula, detectaban otros intereses y necesidades de las niñas; inicialmente insistían en mantener sus planeaciones, pero con el paso del tiempo aprendieron a reconocer las "circunstancias" del aula y del entorno. Esto permitió un cambio en las planeaciones, que consideraba el contexto, la cotidianidad de las niñas, sus intereses y sus motivaciones.

Análisis de algunos datos

Registro de un planeador de clase. A continuación se muestra un segmento de una preparación de clase diseñada para 3° grado. El maestro practicante en el inicio de la clase plantea a las niñas, las normas y reglas de convivencia en el aula, parte de una actividad que denomina "rompe el hielo", con el objetivo de conocer las niñas, sus nombres, sus gustos, y de permitirles que se expresen libremente. Posteriormente plantea la actividad matemática.

Preguntas orientadoras: ¿Qué hacen en los descansos?, ¿A quiénes de ustedes les dan dinero en sus casas y en qué se lo gastan?, ¿Quiénes traen lonchera de la casa?, ¿Quiénes compran en la tienda del colegio?, ¿En los descansos comen su lonchera solas o acompañadas?, ¿Comparten sus loncheras?... Luego, en un segundo momento: le entrega a cada niña, una copia de la actividad "*De compras en la tienda del colegio*", con el propósito de identificar cantidades; resolver operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, repartos; y estudiar las diferentes formas de resolución de problemas cotidianos, por parte de las niñas.

En este segmento, se evidencia la dimensión ecológica del conocimiento didáctico-matemático; la primera parte de la clase le permite al maestro explorar la realidad de las niñas, conocer sus gustos y escucharlas, crea un ambiente propicio para el aprendizaje, a la vez que distensiona las niñas de cara a la clase de matemáticas. Las situaciones propuestas para la actividad matemática parten de la cotidianidad de las niñas, del contexto social y cultural; es en este tipo de situaciones donde las niñas reconocen las aplicaciones de las operaciones matemáticas y despiertan interés y motivación por resolverlas; además, hace ver las matemáticas menos complejas y al alcance de las niñas.

Episodio de clase en 5° grado. En el siguiente episodio se analizan las acciones, expresiones y gestos del practicante en su proceso de enseñanza.
Se toma, P: maestro-practicante; N1, N2, N3: niñas; Nt: voces del grupo de niñas; M: maestra cooperadora (Profesor titular de la clase).

P: Vamos a revisar en el tablero la tarea que habíamos dejado para la casa, ¿quiénes no pudieron hacer la tarea? N1: yo no la hice porque no entendí que había que hacer P: pero en la clase pasada habíamos explicado como se hacía, ¿entonces que paso? N2: a mí también me paso lo mismo, no supe y mi mamá tampoco P: ah!...entonces, levanten la mano, quienes no pudieron hacer la tarea<u>…..(al ver tantas manos levantadas, hace un gesto de sorpresa)…entonces voy a volver a explicar un sólo ejercicio y luego salen al tablero y resuelven los otros.</u> Nt: si, si profe *La practicante explica el proceso para descomponer los números 75 y 210 en sus factores primos, y luego halla el M.C.D entre ellos.* P: ahora sí, …¿quién quiere salir al tablero, para resolver el otro ejercicio? N3: yo salgo profe, ya entendí *La maestra cooperadora al ver distraída a Marisella, interrumpe la clase y le pide que sea ella quien salga al tablero y resuelva el ejercicio.* *Marisella, intenta pararse del puesto, pero manifiesta temor, inseguridad y mira fijamente a la practicante…* P: <u>Marisella, ven, tú eres capaz de hacerlo, haz estado distraída, pero yo te voy a ayudar, aquí en el tablero aprendemos las dos.</u> <u>*El maestro- practicante se dirige hasta el puesto de Marisella y toma la niña de la mano y la lleva hasta el tablero.*</u> <u>P: recuerdas que es lo que vamos hacer con estos dos números.</u> Marisella: los vamos a repartir en números más chiquitos. P: los vamos a descomponer en sus factores primos, es como dividirlos. Marisella: ah…ya entiendo, a 198, le puedo sacar la mitad

P: y ¿eso es dividirlo por cuánto?
Marisella: por 2
P: y ¿por qué por 2?
Marisella: por que termina en un número par.
P: Te das cuenta que si sabes, que si eres capaz. Sigue…
Continúa la niña realizando el ejercicio en el tablero y finalmente lo hace completo y bien.

En este episodio se identifican algunos de los indicadores de la dimensión efectiva-emocional del maestro; cuando las niñas manifiestan dificultad para resolver el ejercicio, el practicante comprende y atiende las dificultades que manifiestan las niñas, las escucha y motiva el aprendizaje. Cuando Marisella mira fijamente al practicante, busca apoyo y comprensión al sentirse en aprietos por la orden que da la maestra cooperadora; ante esto la practicante asume una actitud fraterna, brindando a la niña confianza y seguridad en sí misma, promueve la autoestima, evita el rechazo y trata de reducir el nivel de estrés.

La expresión del practicante "*aquí en el tablero aprendemos las dos*", muestra empatía por la niña, reconoce que el aprendizaje no es exclusivo de la niña, que en este proceso también interviene el maestro, a la vez que estimula las habilidades, promueve tanto la participación en las actividades como la perseverancia.

Episodio de clase en 3° grado. El practicante presenta la siguiente situación a las niñas. "En la organización de una fiesta de Halloween, debemos hacer algunos objetos decorativos, para hacer uno de ellos, necesitamos medio pliego de cartulina, si un pliego entero cuesta $1150; ¿Cuánto dinero necesitamos para comprar la cantidad de cartulina que necesitamos?

N1: Profe, no es posible saber cuánto cuesta el medio pliego.
P: ¿Por qué no es posible?
N1: No sé dividir bien
P: Pero sabes que tendrías que dividir
N1: Si, pero no sé hacer la división
P: ¿y por cuánto tendrías que dividir?
N1: por 2
P: Habrá alguna manera de saber cuánto cuesta la mitad de esa cartulina, ¿cómo harías para resolver esto?
N1: Bueno, yo creo que si lo parto así: la mitad de 1000 es 500, la mitad de 100 es 50, pero la mitad de 50 (*hay un silencio en la niña*)… no tiene,… entonces no sé
P: ¿por qué dices que 50 no tiene mitad?
N1: no hay monedas menos que las de 50, por eso no se puede
El practicante sorprendido por la respuesta de la niña, guarda silencio un instante y le responde.
P: El número sí tiene mitad, es solo dividirlo por 2, lo podemos hacer así (*aplica el algoritmo de la división y resuelve 1150÷2)*

En la solución de situaciones como ésta, los estudiantes tienden a alejarse de los algoritmos matemáticos y las resuelven desde su experiencia en la cotidianidad del contexto. Las niñas efectúan transacciones financieras con monedas, y por esto, la niña afirma que no hay monedas de menor denominación que 50. Si ésta misma situación se presentara a estudiantes en un contexto de estrato alto, donde es cotidiano para los niños el manejo de billetes, es posible que encuentren la mitad de 50, asociando con billetes de 50.000, 20.000 y 5.000, lo cual permitiría resolver la situación desde el contexto y la cotidianidad de los niños.

Este episodio evidencia como el contexto determina las acciones matemáticas desarrolladas por las niñas; de aquí que las situaciones de enseñanza y aprendizaje propuestas a los estudiantes, deben corresponder al entorno social y cultural en que se desenvuelven.

El practicante al sentirse desconcertado por la respuesta de la niña, no ve otra opción que recurrir a sus conocimientos matemáticos, acude al algoritmo de la división, como única alternativa de solución, centrada en la matemática misma, desconoce el contexto y la realidad de las niñas.

El practicante experimenta una situación de ruptura entre la teoría y la práctica, porque la formación que recibió en la licenciatura estaba descontextualizada de la realidad de la escuela, de ahí que la formación recibida en la facultad se torna insuficiente. El practicante recurre al conocimiento matemático para dividir el "número cincuenta" en dos, lo cual es válido matemáticamente, sin embargo la niña no considera la división matemática, que es imposible en el contexto de la nomenclatura de las monedas, dado que la menor denominación posible es 50: no hay monedas de 25 centavos por tanto no se puede dividir.

Conclusiones

Los procesos de enseñanza y aprendizaje no están ajenos a la realidad social en que está inmersa la escuela; tanto el maestro, como los estudiantes resultan afectados por las adversidades del entorno escolar; de ahí que el maestro debe asumir posturas comprensivas y actitudes que favorezcan el acto educativo. La formación de maestros, como proceso complejo, requiere de momentos para la reflexión y para la investigación, en torno a los conocimientos que componen el plan de formación de las facultades de educación; además de los conocimientos del saber didáctico, pedagógico y disciplinar, se requiere de momentos y programas que permitan al maestro, el fortalecimiento de la dimensión afectiva-emocional para adquirir habilidades que le posibilite actuar asertivamente en la complejidad de la práctica.

La sociedad actual requiere de sujetos autónomos, asertivos, responsables, respetuosos de sí mismos y de los demás, lo cual, se adquiere a lo largo de la vida, de la formación, en la interacción con los otros seres humanos; y es aquí donde la escuela toma relevancia; el maestro puede contribuir al desarrollo de la dimensión afectiva-emocional de los estudiantes; por lo tanto él debe estar preparado para asumir este reto personal y social.

Referencias

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. *Research on teaching mathematics*, *Handbook of research on teaching, (*4th ed), 433–456.

Ball, D. (2004). What are teachers learning?. National Council of Supervisors of Mathematics, Philadelphia, PA.

Extremera, N., & Fernández, P. (2002). "*Educando emociones. La educación de la inteligencia emocional en la escuela y la familia*". Barcelona, España: Kairós.

Extremera, N. & Fernández, P. (2003). Inteligencia emocional en el contexto educativo: Hallazgos científicos de sus efectos en el aula. *Revista de educación.* Malága. 332, 97-116

Fernández, M., Palomero, J., & Teruel, M. (2009). El desarrollo socioafectivo en la formación inicial de los maestros. *Reifop*, 12(1), 33-50.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2009). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2)

Jaramillo, D. (2008). Hacia la reflexión y la investigación en la formación inicial: Un camino de formación. Conferencia. Universidad de Antioquia.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, (1-2), 127-135.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM. Recife, Brasil.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* 93-98. Barcelona: Graó.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

El Análisis Didáctico y el estudio de los cambios curriculares en la enseñanza de la aritmética: la implantación del Sistema Métrico Decimal en España

Miguel **Picado** Alfaro
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
mpicado@una.cr
Luis **Rico** Romero
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
España
lrico@ugr.es
Bernardo **Gómez** Alfonso
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia
España
gomezb@uv.es

Resumen

Presentamos los resultados de un estudio histórico sobre los cambios curriculares en libros de texto de matemáticas con la introducción del Sistema Métrico Decimal en España durante la segunda mitad del siglo XIX. El estudio se orientó por el método histórico y el Análisis Didáctico como herramienta para el estudio de libros de texto históricos. Esto ha permitido caracterizar la inclusión de este sistema metrológico en libros de texto para primaria, secundaria y la formación de maestros mediante la identificación y descripción de la estructura conceptual, los procedimientos, representaciones y contextos con que se incluyó a las unidades de pesas y medidas métrico-decimales en los tópicos de aritmética. El estudio proporciona antecedentes históricos e información relevante para comparar y caracterizar la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética enfocando el SMD en el currículo español desde su implantación hasta la actualidad.

Palabras clave: aritmética, análisis didáctico, cambios curriculares, libros de texto, Sistema Métrico Decimal.

Introducción

Al igual que otros países, España adoptó el Sistema Métrico Decimal (SMD) en el siglo XIX. La Ley de Pesas y Medidas de 19 de Julio de 1849 estableció el nuevo sistema metrológico. La norma dictó con firmeza que, a partir de 1° de enero de 1852, en todos los establecimientos en que se enseñaban las matemáticas se debía incluir el SMD como parte de este proceso de instrucción derivando que el Sistema Educativo español incluyera dentro de sus disposiciones curriculares la enseñanza de las nuevas pesas y medidas como parte de los contenidos de aritmética.

Esto generó una serie de cambios que repercutieron de manera directa en la manera de enseñar la aritmética en los establecimientos de enseñanza diferente a las actividades comunes fuera de estos recintos. La progresiva adopción del SMD favoreció la extensión de los cálculos con decimales, e influyó en los procesos de enseñanza de los decimales y las fracciones, marcando significativamente la organización didáctica de esta temática desde entonces.

Para dar cumplimiento inmediato a la disposición oficial que mandaba introducir el SMD en el sistema educativo, los libros de texto más reconocidos de la época se reeditaron insertando el SMD como un apéndice o complemento, sin alterar lo más mínimo el resto del contenido.

En cambio, los libros de texto que se publicaron con la intención explícita de enseñar el SMD, y no como un apartado aislado, promovieron un cambio en la enseñanza de la aritmética que supuso un avance en el sistema educativo español aunque, como toda innovación educativa, los cambios en la enseñanza fueron de difícil tratamiento para profesores y alumnos, por la falta de práctica y de estrategias para su implementación.

Presentamos en esta contribución los resultados de un estudio sobre el tratamiento dado al SMD en el sistema educativo español en la segunda mitad del siglo XIX. Resaltamos la utilidad del Análisis Didáctico en la definición de categorías y unidades de análisis para el estudio de libros de texto históricos de matemáticas y, a partir de éstas, describimos las características de los libros de texto de matemáticas utilizados como instrumentos didácticos para llevar a cabo la reforma educativa ante la adopción de un nuevo sistema de pesas y medidas y su incorporación en la enseñanza de la aritmética.

Sobre el estudio y la metodología

El estudio constituye una investigación cualitativa-descriptiva en el campo de la historia de la educación matemática orientada por el método histórico (Picado y Rico, 2011a; Picado y Rico, 2011b). Su propósito consiste en estudiar el tratamiento dado al SMD en el Sistema Educativo español durante la segunda mitad del siglo XIX. La información se obtuvo mediante el análisis de libros de texto de matemáticas para la enseñanza de la aritmética y el SMD en primaria, secundaria y la formación de maestros editados en el periodo 1849-1892 (Picado, 2012). Este periodo constituye una etapa en la historia de la metrología española delimitada por la promulgación de dos leyes de pesas y medidas: la ley de 19 de julio de 1849 que promulga la adopción del SMD en España y la ley de 8 de julio de 1892 que oficializa la legalidad y obligatoriedad de uso de la unidades métrico-decimales en todas las actividades políticas, educativas, económicas, científicas, comerciales, técnicas y sociales de los españoles. Razones propias de la historia de España permitieron identificar y definir, dentro del periodo, tres etapas históricas que caracterizan la implantación del SMD (Figura 1).

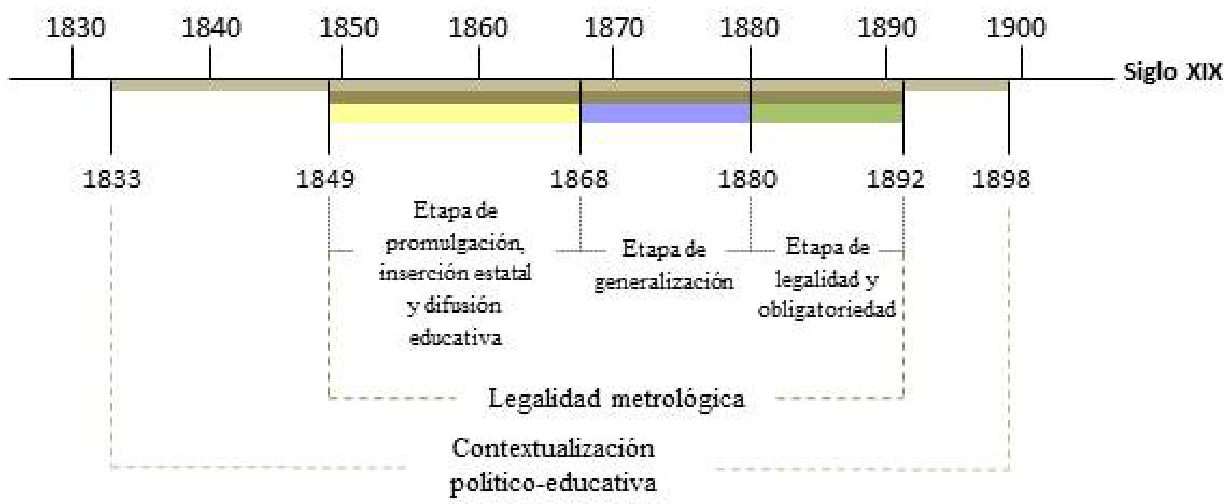


Figura 1. Etapas históricas.

Las etapas posibilitaron en la fase de selección de las fuentes una presencia de libros de texto a lo largo del periodo. Estas son:

- Etapa de promulgación, inserción estatal y difusión educativa (1849-1867)
- Etapa de generalización (1868-1879)
- Etapa de legalidad y obligatoriedad (1880-1892)

Los textos fueron seleccionados mediante la aplicación de criterios que contemplaron la finalidad educativa del documento, el vínculo con la enseñanza del SMD y el año de edición, entre otros. Como parte de este proceso se revisaron 92 de 114 documentos elegidos en la primera de dos fases de selección (el acceso a algunos documentos fue restringido por su estado de deterioro). Finalmente, el estudio contó con 13 libros de texto, de los cuales seis habían sido utilizados en la instrucción primaria, tres para la segunda enseñanza y cuatro para la formación de maestros en las Escuelas Normales del periodo considerado.

Seleccionadas las fuentes, se procedió al análisis de su contenido. Este proceso incluyó la aplicación de técnicas como el análisis conceptual (Rico, 2001), el análisis de contenido (Bardin, 1977; Berelson, 1952; Krippendorff, 1990) y dos de los componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007; Rico, 1997; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008): el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

El Análisis Didáctico es una herramienta poderosa para el estudio de documentos históricos (Picado, Gómez y Rico, 2013). Las componentes del ciclo de Análisis Didáctico facilitan la identificación y descripción de conceptos y procedimientos, de estructuras conceptuales matemáticas, los modos en que se representan y los fenómenos que las hacen presentes en el entorno. Aunado a esto, admiten reconocer aspectos cognitivos y de la instrucción sobre un tema específico. La tabla 1 muestra un resumen de algunos de los principales aspectos que caracterizan estos análisis.

Tabla 1

Componentes del Análisis Didáctico para el estudio de libros de texto históricos.

Componente	Aspectos en estudio	Categorías para el análisis de libros de texto históricos
Análisis de Contenido	Sistemas de representación	Representaciones simbólica, verbal, gráfica, icónica, tabular, instrumentos
	Fenomenología	Situaciones en contextos natural, matemático, técnico-científico, comercial, social
	Estructura conceptual (conceptos y procedimientos)	Conceptos y procedimientos destacados, orden lógico, enlaces y relaciones de inferencia en el texto
Análisis Cognitivo	Expectativas de aprendizaje	Propósitos del autor: objetivos planteados
	Limitaciones	Dificultades y errores de los estudiantes mostrados por el autor
	Oportunidades	Tipos de tareas presentadas: ejemplos, ejercicios
Análisis de Instrucción	Secuencia de tareas	Gestión de aula: secuencia en la presentación de tareas
	Materiales y recursos	Materiales y recursos propuestos por el autor

Fuente: Picado, Gómez y Rico, 2013.

Estas técnicas de análisis posibilitaron, por una parte, el estudio de una variedad de aspectos conceptuales y didácticos, relacionados a las matemáticas escolares, que caracterizaron la incorporación del SMD en libros de texto para la instrucción primaria y los otros niveles considerados; por otra, la definición de categorías de análisis a partir de las características propias de estas técnicas y el propósito de la investigación.

En Picado, Gómez y Rico (2013), ampliamos la descripción de las categorías y unidades de análisis para el estudio de libros de texto históricos de matemáticas desde las componentes del Análisis Didáctico.

Resultados

La incorporación del SMD supuso una modificación de la organización (el orden y enlace en la presentación de las nociones) y extensión de los apartados habituales, pero no de los conceptos y definiciones dominantes en la época, ni tampoco una desaparición automática del sistema antiguo de pesas y medidas. Como se indica en uno de los libros de texto sometidos a estudio:

> La práctica de la enseñanza nos ha convencido de que es posible obtener buen fruto sin hermanar el sistema antiguo con el métrico decimal; y nuestro objeto es reunir en un solo tratado ambas doctrinas” (Dos profesores, 1860, p. 4).

En relación con el contenido matemático, el SMD se incorporó tras la explicación de la numeración decimal. Sin embargo, algunos autores, como se aprecia en Avendaño (1852), incorporaron esta temática de manera previa a la presentación de los quebrados o fracciones comunes cuya exposición es posterior a la de las operaciones propias del cálculo aritmético con números enteros. Otros autores, más modernos, lo hicieron tras presentar los quebrados comunes y decimales como una consecuencia del sistema décuplo de valor de posición.

Colocamos la esplicación del sistema métrico despues de las cantidades decimales y números complejos [denominados], porque aunque hubiéramos deseado esplicar desde el principio para que el alumno se familiarizase con su uso en los ejemplos, es imposible comprender bien sin el conocimiento de los decimales, ni puede hacerse reducción alguna entre nuestras medidas y las métricas sin saber el cálculo de los números complejos. (Picatoste, p. VII).

Esta organización combinó una presentación en paralelo de teoría y práctica, mostrando las operaciones ordinarias del cálculo aplicadas al SMD. La Figura 2 muestra esta particularidad en el texto de Trauque (1854), uno de los textos analizados correspondientes a la educación primaria.

Con el objetivo declarado de erradicar las dificultades de comprensión del nuevo sistema por su cualidad de innovador y los nombres desconocidos que le dan forma, una parte importante de los textos analizados incluyen tareas (ejemplos y ejercicios numéricos) que son el complemento práctico a la exposición de las unidades básicas del SMD, sus múltiplos y divisores, sus equivalencias con sus homólogas del sistema antiguo y el medio para presentar el uso y aplicación de las unidades métrico decimales en las actividades comunes de los pobladores.

Sobre los conceptos matemáticos

La exposición de contenidos aritméticos comienza con la presentación de algunas definiciones preliminares. Destaca en algunos textos la exposición de las nociones de número y unidad, y en otros la de cantidad y magnitud como sinónimo que, como estas últimas, ponen de manifiesto la inclinación por las concepciones de Euler.

El número se concibe en términos de la antigua concepción Griega de número natural como la totalidad de unidades que componen una cantidad, o de la concepción Newtoniana que lo vinculo a la expresión de la relación entre una cantidad y la unidad. La unidad se concibe de forma ecléctica, se combina la vieja concepción griega: unidad unitaria, generadora del número por adición, que es “elemento primero de toda cantidad” (Trauque, 1854, p. 12); con la concepción Newtoniana de unidad relativa: una cantidad constante utilizada en la comparación con otra cantidad. Entendemos este matiz necesario según las concepciones de los autores para comprender el concepto de unidad de medida, que es divisible, y requerido para extender el campo numérico y definir las fracciones y las fracciones decimales.

ÍNDICE.

	Pág.
Definiciones preliminares y axiomas.	9
De los números y sus divisiones	11
De la numeracion hablada y escrita.	14
De los ceros.	23
Escribir cantidades.	25
Objeto de la Aritmética y sistema metrico.	27
Del metro	31
Diferentes maneras de considerar el metro.	32
Del área.	36
Del litro.	38
Del gramo.	39
Del real.	40
De la adicion.	42
Problemas de adicion.	47
De la Multiplicacion.	49
Tabla de multiplicar.	58
Problemas de multiplicar.	59
Elevacion á potencias.	60
Problemas de potencias.	62
De la sustraccion	62
Tabla de restar.	66
Problemas de restar.	67
De la Division.	68
Tabla de partir.	78
Problemas de partir.	79
Estraccion de raices.	80
Tabla de Potencias.	81
Problemas de raices.	84
De las pruebas.	84
Cálculo de los quebrados.	85
Valuacion de los quebrados.	87
Problemas de valuacion.	89
Propiedad de los quebrados,	90
Reducir á un comun denominador.	92
Simplificar quebrados.	94
Reducir enteros á la especie de su quebrado.	96
Poner enteros en forma de su quebrado.	97
Sumar quebrados.	98
Restar quebrados.	100
Multiplicar quebrados.	102
Partir quebrados.	104
Quebrados de quebrados, y estraccion de raices.	105
Problemas.	106
Cálculo antiguo.	108
Razones y Proporciones.	116
Regla de tres.	121
Problemas.	125
Regla de compañia.	128
Problemas.	133
Regla de Interés.	135
Id. tanto por ciento y por mil.	139
Descuento.	140
Problemas.	142
Regla de Aligacion.	144
Problemas.	147
Reglas de Época comun.	149
Regla conjunta.	151
Trueques.	152
Taras.	153
Cambios.	154
Reducciones.	155
De las Progresiones.	158
De los Logaritmos.	165
Del complemento aritmético.	167
Uso de los logaritmos.	168
Reglas de Anuidad.	172
Calcular el logaritmo que dé un número que no esté en las tablas.	177
Calcular el número de un logaritmo que no esté en las tablas.	178
De las fracciones periódicas.	179
Regla de tarifa ó reparto.	182

Objetivo de la Aritmética y sistema métrico…
Del metro…………...……………………….
Diferentes maneras de considerar el metro…..
Del área………..……………………………..
Del litro…………….……………………………...
Del gramo………….…………………………
Del Real……….……………………………..
De la adición….…………..………………….
Problemas de adición.………………………..
De la multiplicación……..…………………...

Figura 2. Contenidos del texto de Trauque (1854).

De la clasificación numérica destacan tres clases de números: entero, quebrado y mixto. El entero, entendido como número natural, se compone de unidades exactas y se clasifica en simple y compuesto. El número quebrado, entendido también como fracción, se asocia a “todo número que representa un valor menor que uno” (Profesores, 1860, p. 115), “cualquier cantidad menor que la unidad” (Avendaño, 1852, p. 31) cuyo origen se sitúa en la división inexacta de números (la división con resto); ó de otro modo, “todo número que solo representa parte ó partes de la unidad” (Profesores, 1860, p. 115). Esto resalta la tradición de enseñanza alejada de las ideas de Newton que las plantea como uno de los resultados de la medida.

Destaca de los textos la distinción entre fracción (o quebrado) y número fraccionario. Este último se entiende como la denominación para los números mixtos (composición de un entero y un quebrado) concebidos como la expresión fraccionaria de un número que no es expresamente un quebrado (Vallejo, 1855).

A partir de su relación con el sistema décuplo, la fracción se clasifica en decimal o común. El primero se concibe desde dos perspectivas: como “aquel cuya unidad está dividida en partes que son diez en diez veces más pequeñas”; ó como “aquel que tiene por denominador tácito la unidad seguida de tantos ceros como notas tenga el numerador” (Trauque, 1854, p. 12). Es decir, “unos quebrados que tienen por denominador 10; 100; 1000; etc. y en general la unidad seguida de ceros” (Vallejo, 1855, p. 61) que genera los conceptos de décima, centésima, milésima, diezmilésima, etc. Esta concepción de número coexiste con la más avanzada que tiene su génesis en la noción de número de Newton y que toma como referencia la especie que lo define.

> Cuando la cantidad que se compara contiene exactamente á la unidad de medida cierto número de veces, éste número se llama entero; número quebrado ó fracción, si espresa una cantidad menor que la unidad, y número mixto ó fraccionario, si espresa enteros y quebrados, ó lo que es lo mismo unidades y partes de la unidad. (Profesores, 1860, p. 6)

La numeración se aborda desde la exposición del sistema décuplo, con acento en la escritura, lectura y formación de números (órdenes). Destaca el tratamiento de las diferentes clases de unidades que lo conforman (simples, de millar, de millón, de millar de millón, de billón,…) y los órdenes (unidades, decenas y centenas) que repiten en cada clase de unidad.

> El principio fundamental de esta enumeración es que diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden superior inmediato. La base de este sistema es diez, y su nombre sistema decimal (Avendaño, 1852, pp. 8-9)

El SDN se expone a partir de su nombre, entendido como decimal "porque diez es su base, y todas sus combinaciones van de diez en diez" (Trauque, 1854, p. 21). Esta presentación introduce los quebrados decimales, concebidos también como números decimales, obtenidos de disminuciones progresivas de los números de diez en diez.

El SMD se define desde el significado de los términos métrico y decimal; y se crea una ligazón entre los términos medida, unidad y cantidad. Las medidas y sus distintas especies dan pie a la presentación de este sistema a partir de la necesidad de denominaciones diversas para su designación. Con esta idea se introducen cuatro características del sistema: el origen común de todas las unidades, su legalidad, la convención con el SDN y su invariabilidad. Las magnitudes o especies de medida que se presentan son seis: longitud, superficie, solidez, volumen ó capacidad, peso y moneda (Figura 3).

metro. . . . . unidad de longitud.
área. . . . . . unidad de superficie.
metro cúbico. . unidad de volúmen para sólidos.
litro. . . . . . unidad de volúmen para liquidos y áridos, dicha de *capacidad*.
gramo. . . . . unidad de peso.
real. . . . . . unidad monetaria.

Figura 3. Unidades del Sistema Métrico Decimal (Trauque, 1854, pp. 27-28).

Las unidades básicas se destacan desde los enfoques científico e instrumental para resaltar su fundamento científico-matemático y su utilización más práctica. Éstas reciben una atención diferenciada: se presentan en apartados independientes que incluyen su definición formal, significado y utilidad, las medidas del sistema antiguo que remplazan y explicaciones sobre los múltiplos y divisores.

Las unidades fundamentales definidas son el metro y el gramo (o el kilogramo según quien sea el autor) que conforman los prototipos básicos para el establecimiento de las demás. El metro, como unidad fundamental del sistema, se expone desde las perspectivas etimológica, instrumental y científica: es la palabra griega que significa medida; es la unidad básica para las medidas de longitud; y, es equivalente a la diezmillonésima parte de la longitud del cuadrante de la circunferencia terrestre desde Polo Norte al Ecuador.

Los múltiplos y submúltiplos se presentan a partir de la aplicación de las operaciones de multiplicar y dividir por/entre diez (utilizando para expresar sus nombres el significado de determinadas voces griegas y latinas: Deca, Hecto, Kilo y Miria; deci, centi y mili) y su equivalencia con cada una de las unidades básicas, complementado con explicaciones y ejemplos para cada uno.

La exposición del metro, sus múltiplos y divisores, sienta la base para la presentación de las unidades metro cuadrado y metro cúbico, utilizables para las ampliaciones de la dimensión lineal que lo vinculan con las magnitudes superficie y volumen. El área, el litro y el gramo reciben una presentación similar, profundizando en aspectos como la singularidad de algunos múltiplos y divisores, la lectura de estas cantidades y la existencia de convenciones para la utilización de múltiplos y divisores no decimales (doble, mitad, quíntuplo, entre otros).

La riqueza conceptual del libro de texto se complementa con la variedad de procedimientos, representaciones y fenómenos con que son presentadas las ideas. La lectura y escritura de números métricos, la formación de unidades superiores e inferiores para las distintas especies de medidas, cómo efectuar operaciones aritméticas y equivalencias entre unidades de medida son los procedimientos comunes en el libro de texto. Las representaciones simbólica, tabular y gráfica son un complemento ideal para la representación predominante: la verbal (Figura 4).

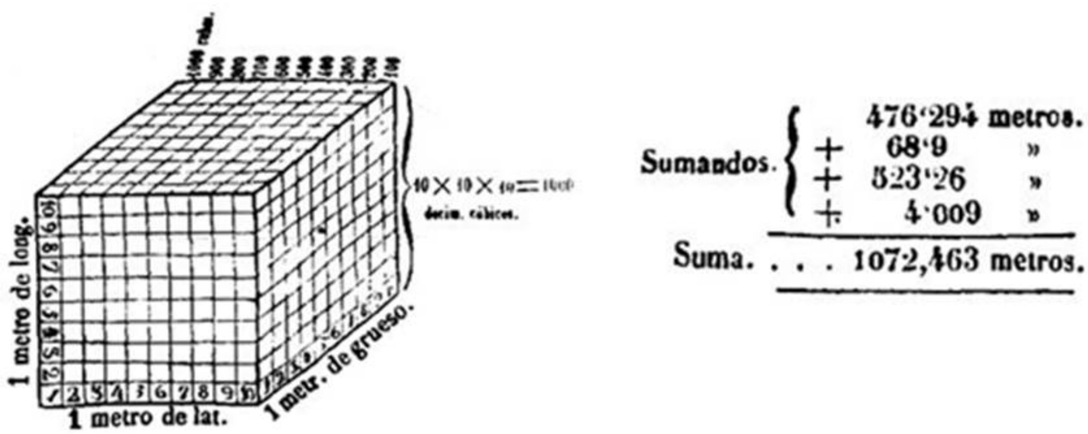


Figura 4. Modos de representación gráfica y tabular (Trauque, 1854, pp. 34-35).

Las representaciones tabulares incluidas en el texto, además de las propias del cálculo de columnas, se usan para la exposición de múltiplos y submúltiplos, equivalencias y correspondencias entre pesas y medidas métricas y las antiguas españolas y las de algunas naciones con vínculos comerciales con España.

Para ilustrar la aplicabilidad de las nuevas unidades de pesas y medidas del SMD, éstas se muestran a partir de situaciones y fenómenos característicos de los contextos matemático, comercial, físico-natural, social y técnico. Así, por ejemplo, en el contexto matemático solo se realizan cálculos netamente aritméticos sin un contexto físico particular como el paso unidades superiores a inferiores. En el contexto comercial se incluyen situaciones como la compra y venta de vino, textiles y madera, el precio del producto. En el contexto físico - natural se hacen referencias a la pureza de sustancias o la temperatura. Desde un contexto técnico se utilizan situaciones de topografía, construcción y agrimensura como el cálculo de distancias y superficies de terrenos (Figura 5). Y, en el contexto social, situaciones como el cálculo de edades o vinculadas a determinados grupos sociales.

XI. Un agrimensor midió el terreno siguiente: 345 hectáreas 27 áreas (345'27 hectár.) de una parte; 845 hectár. 09 áreas de otra; 25 hectár. 12 áreas de otra; y 469 hectár. 27 de otra. Cuanto terreno midió?=1684 hectár. 75 áreas.

Figura 5. Medición de terrenos con la unidad métrica área (Trauque, 1854, pp. 48).

Los ejemplos para ilustrar las situaciones más comunes que requieren de la utilización de las nuevas unidades métricas, suelen referirse a los modos para llevar a cabo las operaciones básicas con las nuevas unidades métricas y a la reducción de las antiguas medidas españolas a las del sistema métrico legal y al contrario. Estos últimos, muestran el procedimiento para efectuar los cambios de unidad, en dos pasos: uno es la reducción a una sola unidad y el otro es la aplicación del factor de cambio dado en una tabla de equivalencias.

Otro método sería el reducir los 2 pies, 5 pulgadas y 3 líneas á líneas; los que daría 351 líneas; y como la vara se compone de 423 líneas, el número propuesto equivale á 40 varas y 351/432 de vara. Si este número lo quisiéramos reducir, así como está, á metros, multiplicaríamos el valor 0,83590575 primero por 40 y luego por 351/432, y sumariamos después los resultados. (Vallejo, 1855, p. 16)

Consideraciones finales

Los libros de texto editados para la incorporación del SMD en la enseñanza de la aritmética en España durante la segunda mitad del siglo XIX dejan entrever una serie de indicadores para caracterizar la reforma curricular en matemáticas.

Los cambios curriculares mantuvieron la memorización y el automatismo como las bases metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la nomenclatura métrico-decimal y su implementación y utilización en las prácticas cotidianas. La enseñanza del SMD, su nomenclatura y estructura matemática, se definió a partir de la presentación del metro desde tres enfoques: etimológico, instrumental y científico. Estas últimas perspectivas, caracterizan la presentación de los términos que conforman el sistema a partir de la nomenclatura adoptada por Francia y las relaciones con sus homólogas castellanas.

La presentación de las unidades principales de medidas se derivó de su vínculo con la unidad fundamental del sistema: el metro. De esta forma, las unidades para longitud, superficie, volumen o solidez, capacidad y peso se mostraron invariables, uno de los beneficios del sistema presentado por los autores de los textos. Esto se acompañó de la aplicación de relaciones decimales entre cada unidad principal y las unidades superiores e inferiores (múltiplos y submúltiplos) que fue, en la mayor de los casos, el enlace entre el sistema metrológico y los contenidos en el libros de texto referidos al Sistema Decimal de Numeración, y otra de las razones expuestas para adoptar el nuevo sistema metrológico.

El modo más común de organizar las equivalencias decimales entre unidades de la misma especie, al igual que las correspondencias con las unidades del sistema de pesas y medidas de Castilla (vigente desde 1801 como uno de los últimos intentos para unificar la metrología tradicional en España), lo constituyeron las tablas de equivalencias, uno de los complementos del modo verbal en la presentación de conceptos y procedimientos.

La incorporación del SMD en la enseñanza de las matemáticas, específicamente del aritmética, destacó un modelo de instrucción basado en la presentación teórica de conceptos y procedimientos seguida de ejemplos para ilustrar el modo de proceder ante determinadas situaciones propias de contextos matemáticos, comerciales y técnicos vinculadas a las distintas unidades de medida y sobre todo, a los usos más comunes de la cotidianeidad española.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el apoyo de la Junta de Becas de la Universidad Nacional (UNA) y el Fondo de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la República de Costa Rica. Se ha realizado dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico, (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Referencias

Avendaño, J. (1852). *Elementos de aritmética*. Madrid, España: Imprenta de Araujo.

Bardin, L. (1977). *L'Analyse de contenu* [El análisis de contenido]. París, Francia: PUF.

Berelson, B. (1952). *Content analysis in communication researches* [Análisis de contenido em las investigaciones sobre comunicación]. New York, NY: Free Press.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Recuperado de http://documat.unirioja.es/servlet/listatesis?tipo_ busqueda=INSTITUCIONYTEXTOCOMPLETO &clave_busqueda=819043

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Picado, M. y Rico, L. (2011a). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.

Picado, M. y Rico, L. (2011b). La selección de textos en la investigación histórica. *Épsilon, 28*(1), 99-112.

Picado, M., Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del Sistema Métrico Decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de professores* (pp. 403-414). España: Comares

Picatoste, F. (1861). *Principios y ejercicios de aritmética y geometría*. Madrid, España: Imprenta y Librería de D. Eusebio Aguado.

Profesores. (1860). *Aritmética para uso de los niños*. Huesca, España: Imprenta y Librería de Lucas Polo.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria* (pp. 377-420). Madrid, España: Síntesis.

Rico, L. (2001). El Análisis Conceptual. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Trauque, L. (1854). *Aritmética decimal y demostrada para uso de las escuelas primarias*. Gerona, España: Imprenta y Librería de Grases.

Vallejo, J. M. (1855). *Compendio de matemáticas puras y mixtas*. Madrid, España: Imprenta de los herederos del autor.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones

Sergio Damián **Chalé** Can
Centro de Investigación y de Estudios Avanzado, Cinvestav
México
schalecan@gmail.com

Claudia Margarita Acuña Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav
México
claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen

En este trabajo, presentamos los resultados de investigación de una tesis de maestría realizada en México. Nuestro objetivo fue indagar cómo los estudiantes del Nivel Medio Superior, analizan secuencias de crecimiento visual, con base en representaciones gráficas, así como la forma en que expresan algebraicamente el patrón que subyace a una secuencia; teniendo como supuesto que el análisis visual organizado de las secuencias puede contribuir a la detección, formulación y generalización de patrones. Con base en nuestros resultados, afirmamos que la visualización juega diferentes papeles dentro del proceso de generalización, los cuales identificamos y clasificamos a la luz de la Teoría de la Objetivación y la Teoría de la Representaciones Semióticas. Proponemos una herramienta para discutir el papel y funcionamiento de la visualización en la generalización de patrones.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización, visualización, patrones geométricos.

Introducción

En el currículum actual mexicano de educación media básica (12-15 años) y educación media superior (15-18 años), la introducción al álgebra se sugiere a partir de la generalización de secuencias numéricas y geométricas (Secretaría de Educación Pública, 2010). La generalización de patrones es usada como una ruta de aprendizaje hacia al álgebra y la idea principal que subyace a esta aproximación es que cierta experiencia con la exploración de los patrones podría llevar al desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2008).

En este tipo de tareas, a los estudiantes se les pide predecir el elemento siguiente en un conjunto ordenado de figuras o números. Posteriormente, hay que establecer la regla que subyace a la secuencia, la cual permite encontrar la cantidad total de elementos que la conforman y finalmente generalizar, esto es, escribir tal regla con palabras o símbolos algebraicos para determinar el valor de un elemento de la secuencia en una posición arbitraria.

El tratamiento dado a las representaciones gráficas o figuras suele ser superficial, debido a que rara vez se pone atención a las interpretaciones que los estudiantes hacen de la representación gráfica, se da por hecho que el estudiante rápidamente observa cuáles son los cambios entre dos figuras consecutivas. Uno de los problemas que enfrentan los estudiantes, es que el proceso de detección del patrón que subyace a una secuencia a partir del análisis de figuras no es espontáneo. Existe una desconexión entre lo que se ve y lo que se está generalizando, lo cual consideramos se debe a que durante el abordaje de este tipo de tareas, no se interpreta de manera adecuada los elementos gráficos involucrados. En nuestra opinión, el análisis visual de la organización de una secuencia de figuras es de suma importancia, puesto que la relación existente entre la posición de los objetos y la razón de crecimiento de la secuencia, podría emerger del análisis visual de los elementos de la secuencia. Suponemos que se requiere desarrollar cierta habilidad para realizar esta tarea y que ésta puede ser adquirida.

En este trabajo, indagamos concretamente sobre cómo los estudiantes analizan secuencias de crecimiento desde el punto de vista visual, con base en las representaciones gráficas, así como la forma en que expresan algebraica o aritméticamente los patrones involucrados. Deseamos también detectar los problemas que tienen los estudiantes cuando interpretan bajo esta modalidad una secuencia y tratan de encontrar la expresión algebraica que la modela.

Antecedentes

La enseñanza y aprendizaje del álgebra ha sido siempre un tema relevante en la investigación dentro de la Educación Matemática, se ha tratado de dar respuesta a la pregunta ¿cómo se construye el significado de los conceptos algebraicos? y ¿cuál es la naturaleza del pensamiento algebraico? Los acercamientos a estas preguntas han sido realizados a través del análisis de la construcción de los conceptos y los procedimientos relacionados con ellos, así como la manera en que los estudiantes construyen simbolizaciones de los objetos algebraicos (Kieran, 2006).

A lo largo del tiempo, se han identificado varias tendencias de investigación dentro de la temática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, por ejemplo la desarrollada en los años 80's, en la cual la generalización llegó a ser el centro de atención de las investigaciones realizadas en ese periodo. El uso de la notación algebraica fue visto como una herramienta para expresar pruebas, patrones figurales y para justificar las formas simbólicas equivalentes de las relaciones entre patrones. Desde entonces diversas investigaciones se han realizado bajo la hipótesis de que la generalización de patrones numéricos y la formulación simbólica de relaciones entre las variables podrían llevar a los estudiantes a desarrollar las capacidades necesarias para el desarrollo de la generalización algebraica (Rinvlod, 2011; Stylianou, 2011; Bell, 2011; Smith, Hillen & Catania, 2007; Ling & Yang, 2004; Noss, Hely & Hoyles, 1997).

En los trabajos anteriormente citados, notamos que son analizados aspectos didáctico, los cuales involucran a los profesores (Bell, 2011), experiencias empíricas de los estudiantes que cuentan con material manipulable (Smith, Hellen & Catania, 2007) así como el análisis de los procesos de solución y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se desarrollan este tipo de tareas (Lin & Yang, 2004; Stylianou, 2011; Rinvold, 2011; Noss, Hely & Hoyles, 1997). Notamos que pocos trabajos tratan los fenómenos de tipo cognitivo que se hacen presentes cuando se resuelven este tipo de tareas, como por ejemplo la visualización.

Por otro lado, en otras investigaciones se identifican que algunas de las secuencias visuales propuestas no son susceptibles de ser analizadas fácilmente; algunos estudiantes, que son capaces de articular un patrón general o relación en lenguaje natural, tienen dificultades para expresar el patrón o relación en forma simbólica y la formulación algebraica de dichas relaciones es desconectada de la actividad de análisis que la precede. La atención tiende a estar centrada en los atributos numéricos de los patrones, y los profesores recurren a los estereotipos para resolver estos problemas mediante la construcción de tablas de datos numéricos, sin comprender las estructuras que sustentan sus razonamientos o tratamientos (Noss, Healy & Hoyles, 1997).

Fundamentación teórica

Para fundamentar nuestra investigación recurrimos a elementos teóricos que se han desarrollado dentro de la Teoría Cultural de la Objetivación y de la Teoría de las Representaciones Semióticas. Estas dos posturas nos proporcionaron elementos para discutir acerca de la construcción del pensamiento algebraico con apoyo en la generalización de patrones incluyendo actividades de visualización.

La Teoría de la Objetivación

La Teoría de la Objetivación, es una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se inspira en escuelas antropológicas e histórico culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología que dan lugar, por un lado a una aproximación antropológica del pensamiento, y por otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje.

En esta teoría, el aprendizaje se concibe como una adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo, guiadas por modos epistémicos culturales históricamente formados, es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social. De manera más precisa el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. Particularmente está guiada por modos epistémicos-culturales históricamente formados (Radford, 2006a).

De acuerdo con la ideas desarrolladas por Radford (2000) el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. La naturaleza del pensamiento algebraico emergente en los estudiantes, es una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas.

Son tres las características que hacen distintivo al pensamiento algebraico, siendo estas no exhaustivas, la primera se refiere a un sentido de *indeterminación,* la segunda es la *analiticidad* y la tercera es el *modo simbólico* en la cual se designa a los objetos en el álgebra (Radford, 2006b).

La generalización de patrones

Para realizar la generalización de un patrón, en la etapa inicial del análisis de éste, los estudiantes deben centrarse en una propiedad invariante o relación dentro del patrón, tomar algo en común o una regularidad, notar y llegar a ser conscientes de sus propias acciones en relación con el fenómeno sometido a generalización (Rivera & Rossi, 2008).

Se han identificado diferentes niveles de generalización en los patrones, los cuales “consisten en grados de manifestación de lo general y son caracterizados por los símbolos a los que los estudiantes recurren para conseguir sus generalizaciones” (Radford, 2006b, p. 16).

Son tres los niveles de generalización que el autor identifica: 1) La *generalización factual,* en la cual el discurso no vas más allá de ejemplos particulares, sólo se tiene un grado elemental de generalidad. 2) La *generalización contextual,* es aquella que ocurre cuando aparecen gestos que ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón, en combinación con el discurso y la visión. Por último, 3) La *generalización simbólica,* se refiere a expresar la generalización a través de símbolos alfanuméricos, el cual es un proceso complejo en el que se decide acerca del significado de las letras.

La visualización

Nuestro interés está centrado en entender la forma cómo los estudiantes analizan las secuencias de crecimiento desde el punto de vista visual, siendo para nosotros un factor muy importante la actividad cognitiva de la visualización, la cual juega un rol principal en la resolución de este tipo de tareas.

La visualización es una organización de una cadena de unidades (palabras, símbolos y proposiciones), que implica tomar toda una estructura y comprender sus relaciones (Duval, 1999). Este autor propone cuatro tipos de aprehensión y tres procedimientos visuales sobre las figuras: la mereológica, la óptica y la relacionada con el lugar.

Para analizar la detección visual de los patrones nos ocuparemos especialmente de la forma mereológica, la cual consiste en dividir toda una figura dada en sub-figuras que pueden ser reorganizadas, dando lugar a nuevas figuras distintas a la figura original.

En adelante discutiremos el papel de la visualización en la generalización de patrones, propondremos una herramienta para caracterizar a la visualización cuando aparece en los diferentes niveles de generalidad sugeridos por Radford y las formas como ella actúa en la generalización de patrones.

Diseño y metodología

Diseñamos una investigación cualitativa que llevamos a cabo en el nivel medio superior en la Ciudad de México. Las actividades fueron propuestas a 36 estudiantes de este nivel, a los cuales se les pidió analizar las secuencias que les presentamos, poner por escrito la regla que seguían tales secuencias y expresar en símbolos algebraicos esa regla. En el tipo de secuencias presentadas, el elemento visual jugaba un rol central y cada vez más importante conforme se avanzaba en la solución de las actividades propuestas.

El objetivo general de las actividades, fue investigar cómo los estudiantes organizan la información visual, cuando deben encontrar el patrón de una secuencia de representaciones gráficas, además de investigar la influencia de la representación gráfica en la resolución de la actividad propuesta.

Para mostrar la manera en la cual se desarrolló esta actividad, así como el uso del instrumento que considera los niveles de generalización antes mencionados, referiremos a la actividad de un estudiante que reportamos a continuación.

Resultados y discusión

A partir de los niveles de generalización propuestos por Radford y las operaciones visuales propuestas por Duval, detectamos tres formas de cómo influye la visualización en el proceso de resolución de secuencias gráficas en la introducción al álgebra. Las cuales organizamos en tres momentos estratificados: visualización de estructuras numéricas, visualización de relaciones contextuales y visualización de organizaciones simbólicas.

Enseguida mostraremos el tratamiento dado a la Actividad mostrada en la *Figura 1* por parte de los estudiantes. En ella, se pedía al estudiante continuar la sucesión que se mostraba al inicio de la misma, calcular la cantidad de cuadros para los elementos siguientes, y explicar con un mensaje escrito el patrón que sigue la secuencia, para finalizar con la expresión algebraica que modela ese patrón.

5. Analiza la sucesión representada en la **Figura 5** y responde las preguntas que se plantean a continuación.

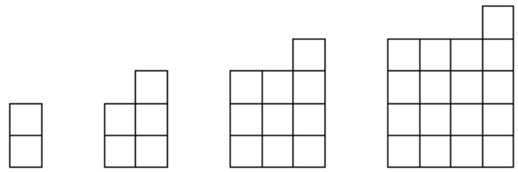


Figura 5

a. Dibuja el quinto y sexto elemento, ¿cuántos cuadritos tiene cada uno?

Quinto elemento	Sexto elemento
Cantidad de cuadritos:	Cantidad de cuadritos:

b. ¿En la figura hay algo que siempre permanezca constante? Señala en las figuras marcando con tu lápiz.

c. ¿Qué varía en la figura? Señala en las figuras pintando de otro color diferente a tu lápiz.

d. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

e. Escribe una fórmula para calcular la cantidad de cuadritos en cualquier elemento de la sucesión.

Figura 1. Actividad

En un primer momento, como se muestra en la *Figura 2,* el estudiante usa marcas sobre el conjunto de figuras presentadas, además de realizar un análisis numérico entre los elementos de las figuras que corresponde a las diferencias entre los elementos de la secuencia. El estudiante analizó las diferencias numéricas para encontrar relaciones entre ellas y a partir de esto, llegar a expresar de manera simbólica la regla del patrón. Por medio del uso del método numérico, es posible hallar la expresión algebraica que modela el crecimiento de la secuencia presentada, sin embargo los estudiantes no pudieron hallarlo a partir del análisis numérico.

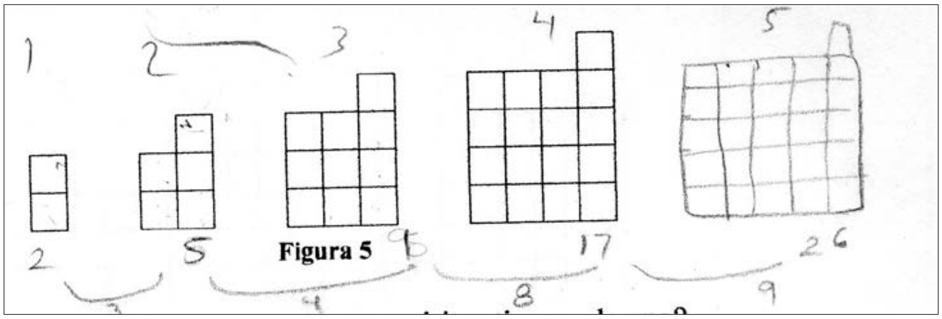


Figura 2. El método de las diferencias usado por los estudiantes

Aquí, el estudiante está en un nivel básico de la generalización de patrones, lo que Radford ha llamado la generalización factual, el estudiante en este nivel fue capaz de predecir elementos cercanos de la secuencia de figuras, pero aun no llega a un nivel de generalización avanzado. La actividad visual emerge como una base para analizar y verificar propiedades numéricas; y es usada como entorno de experimentación y validación de lo supuesto sobre la secuencia gráfica. El estudiante discrimina los elementos gráficos de la secuencia en una especie de reconfiguración con una parte fija y una variable, a partir de propiedades que pueden ser numéricas o no, como se muestra en la *Figura 3*.

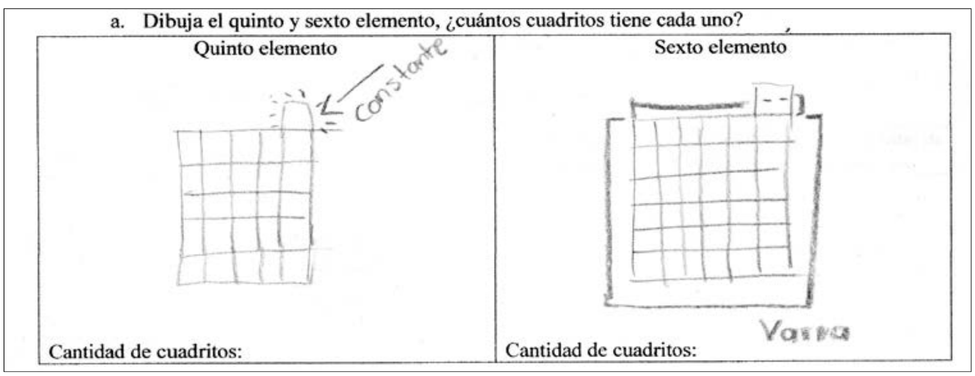


Figura 3. Discriminación de subfiguras constantes y variables

En un segundo momento, como puede notarse en el extracto que presentamos líneas abajo, el recurso aritmético fue abandonado (líneas 6 al 7) y se recurrió al análisis visual para construir la fórmula que modela el crecimiento de la secuencia (líneas 4 y 9).

1 **I (Investigador):** A ver, ¿cómo lo contaste?

2 **A (Alumno):** Yo lo relacioné, porque aquí la diferencia es de… uno y aquí es cuatro, la diferencia es de tres cuadros (*cuenta la cantidad de cuadros en el primer elemento y el segundo elemento y realiza la diferencia*). Aquí la diferencia es de cinco cuadros (*entre el segundo y tercer elemento de la secuencia*). De aquí para acá la diferencia sería 7, y de aquí para acá la diferencia sería 9. La diferencia va aumentando en dos.

3 **I**: ¡Ajá! Son números impares. ¿Y la fórmula?

4 **A**: La fórmula sería, C es la cantidad de cuadritos, que es igual a n, que es el número de la posición, por n, que es igual al número de la posición, más uno. Que nos daría la cantidad de cuadritos.

$$C_{\blacksquare} = n \times n + 1$$

5 **I**: ¿Qué tienen que ver esas diferencias con tu fórmula?

El estudiante se queda pensativo, no responde.

6 **I**: Entonces estas diferencias ya no te sirvieron para tu fórmula o ¿qué pasó?

7 **A**: Ya no.

8 **I**: ¿Ya no?

9 **A**: Ah bueno, lo que pasó, es que nada más fueron las diferencias que nosotros encontramos, pero ya para sacar la fórmula nosotros sólo nos basamos en los lados de la figura.

10 **I**: ¿Los lados?

11 **K**: Ajá, o sea el número de la posición que daba. Supongamos que es cuatro (*la posición*) por el número de cuadritos en el lado de la figura, más uno.

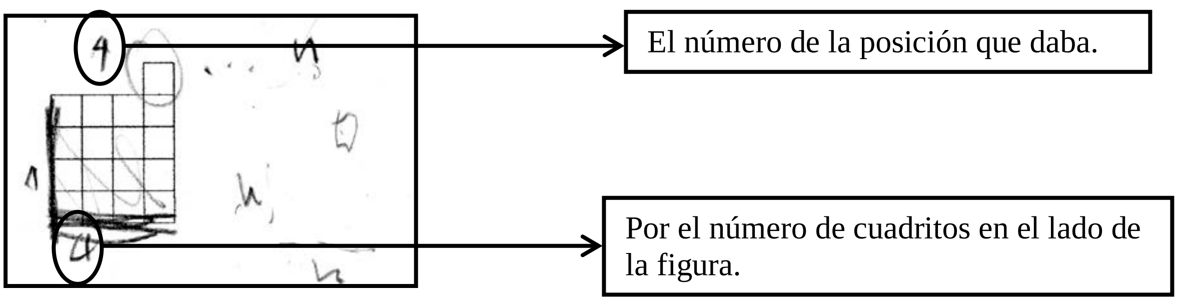


Figura 4. Interpretación de un alumno

En este caso, para el estudiante, fue más útil el análisis visual y la descomposición de las figuras, como se muestra en la *Figura 4*, que el método de diferencias ensayado antes. El análisis visual le permitió construir argumentaciones y explicaciones, y no solamente realizar avanzadas técnicas aritméticas que lo llevaran a la solución de la actividad planteada.

En un tercer momento y como resultado de todo el proceso de reflexión realizado por el estudiante, emerge la expresión de la regla que sigue el patrón en un lenguaje alfanumérico. La expresión de la regla surge de un análisis que primero tomó en cuenta los elementos numéricos del patrón, posteriormente se abandonó esta postura y el análisis visual llevó a identificar los elementos necesario para expresar la regla del patrón en términos algebraicos (Líneas del 1 al 4). Además, notamos una necesidad constante de los estudiantes por transitar entre lo numérico y las representaciones geométricas, para darle forma a la idea que organiza lo constante y lo variable de la secuencia.

Discusión

Como se ha mencionado líneas arriba, el primer acercamiento del estudiante a ésta actividad que propusimos fue por medio de un análisis numérico, el cual posteriormente fue abandonado, puesto que no permitió construir relación alguna que modelara el crecimiento de la secuencia presentada. Consideramos que lo anterior se debió a que hubo una desconexión entre lo que ocurría en los elementos de la secuencia y los números que se analizaban. Posteriormente, el abandono de éste método por parte del estudiante, dio lugar a un análisis visual.

En la primera etapa de la resolución de la actividad, afirmamos que la visualización emergió como una herramienta que permite discriminar algunas partes de los elementos de la secuencia, a partir de propiedades numéricas, lo que nosotros hemos llamado visualización de estructuras numéricas.

En una segunda etapa, conforme el estudiante avanzó en el análisis de la secuencia, el recurso visual fue tomando importancia como elemento que evidencia, da forma y justifica sus argumentaciones, ayudando a describir la variación presente en la secuencia. La aplicación de operaciones visuales, ayuda a establecer un orden y a organizar una forma de visualizar la secuencia.

En esta etapa, el estudiante aplica una forma de análisis mereológico, donde la descomposición de la figura en partes lo lleva a una comprensión más profunda de las relaciones que existen entre los componentes de la secuencia. Notamos que el argumento aritmético, no es abandonado totalmente por el estudiante, aparece siempre en combinación con los argumentos visuales, para dar sentido y justificar las argumentaciones que explican el crecimiento de la secuencia. La actividad visual emerge como algo que liga la posición de los elementos de una secuencia con la numerabilidad de ellos mismos. Esta asociación tiene la característica de conservar cierta particularidad, pese a utilizar expresiones generales. A esta forma de analizar viendo, la hemos llamado visualización de relaciones contextuales.

En la última etapa que reconocemos, el estudiante enajena las cualidades numéricas de los objetos observados para centrarse en una metodología que le permite organizar y relacionar los subconjuntos identificados en las etapas anteriores, para destacar y abstraer totalmente la regla que sigue la secuencia. Da sentido y significado a sus símbolos por medio de lo analizado visualmente, lo que hemos llamado visualización de organización simbólica.

Conclusiones

En esta actividad que presentamos, podemos notar cómo la generalización va emergiendo en un constante dialogo con el análisis de las figuras. Lo que varía fue notado (generalización factual), fue hecho lingüísticamente explícito, de manera que fue puesto por escrito en algunas ocasiones y en otras no (generalización contextual) y posteriormente la variación fue representada por medio de símbolos (generalización simbólica).

Consideramos que lo anterior se debió a la forma de usar la información gráfica, ya que el proceso de visualización fue más allá de sólo notar la organización de los elementos. No solo se tiene un acercamiento a la figura de manera local, sino que los estudiantes logran una apreciación local-global dentro de la secuencia, es decir, lo que ocurre dentro de la estructura de un elemento de la secuencia, lo local, es extendido a todos los elementos siguientes, para ser visto como una característica global de todo el patrón de crecimiento. Esto, para nosotros es un paso importante que todos los estudiantes deben dar, y damos evidencia de que es posible realizarlo a partir de procesos de visualización.

La forma como participa la visualización en el proceso de generalización de secuencias gráficas, es variada. En cada nivel de generalización propuesto por Radford, la visualización apareció de diferentes maneras, las cuales llamamos: visualización de estructuras numéricas, visualización de relaciones contextuales y visualización de organizaciones simbólicas, las cuales emergen según el tipo de análisis visual que realice el estudiante.

La visualización de estructuras numéricas, observada en esta investigación, está relacionada con la verificación de las propiedades aritméticas de las secuencias directamente sobre la representación gráfica. Por lo que la gráfica, es usada como entorno de experimentación y validación de lo supuesto sobre las secuencias gráficas. Por ejemplo, en los primeros acercamientos los estudiantes solamente cuentan los elementos de los términos de las secuencias sin relacionarlos.

La visualización de relaciones contextuales, la cual está ligada al grado de generalización contextual, se establece entre las expresiones simbólicas que empiezan a ser generales y los atributos de la representación gráfica. Por ejemplo, el número del lugar que ocupan los elementos y su numerabilidad, se relaciona con la expresión en palabras de la regla que subyace al patrón. El estudiante aun no puede abstraer totalmente la idea general que describe el crecimiento de la secuencia, para hablar de ella necesita de números, esto lo podemos notar cuando el estudiante explica su fórmula.

En la visualización de organizaciones simbólicas, primero se pasa por una interpretación en la que se detectan claramente los elementos que forman las estructuras gráficas, por ejemplo constantes y variables, y se da sentido a diferentes organizaciones de la representación gráfica de la secuencia, conectando de manera adecuada o inadecuada las relaciones generales.

En la *Tabla 1* describimos de manera general cómo nuestros niveles de generalización visual quedan enmarcados dentro de los niveles de generalización descritos por Radford y las formas como los estudiantes analizan las figuras, desde el punto de vista de Duval.

Tabla 1.

El papel de la visualización en la generalización

Operación visual / Grado de generalización	Mereológica	Óptica	Lugar
Factual	Visualización de estructuras numéricas		
Contextual	Visualización de relaciones contextuales		
Simbólica	Visualización de organizaciones simbólicas		

Consideramos que bajo esta perspectiva, trabajos futuros podría dirigirse a analizar éste último tipo de visualización que hemos llamado de organizaciones simbólicas. El modelo de análisis que proponemos debe ser revisado y evaluado en cuanto su pertinencia y generalidad. El marco conceptual debe analizarse profundamente en cuanto a sus fundamentos.

Bibliografía

Bell, C. (2011). Lining up Arithmetic Sequences. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(1),* 34-39.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra. A Broadening of sources of meaning. A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Lin, F. & Yang, K. (2004) Differentiation on student's reasoning on linear and quadratic geometric number patterns. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4 (pp 457-464). Berguen, Norway.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics 33,* 203-233.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa, 9(Número especial),*103-129.

Radford, L. (2006b). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1),* 83-96.

Rinvoold, R. (2011). *Multimodal derivation and proof in algebra.* Recuperado el 20 de octubre del 2012 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7-WG1-Rinvold-Lorange.pdf

Rivera, F. & Rossi, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11(4),* 198-203.

Rivera, F. & Rossi, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 65-82.*

Secretaría de Educación Pública (2010). *Serie: Programas de Estudio. Dirección General de Bachillerato.* México: SEP. Recuperado el 21 de marzo del 2013 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS_I.pdf

Smith, M., Hillen, A. & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understanding and Set Classroom Norms. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(1)*, 38-44.

Stylianou, D. (2011). The Process of Abstracting in Students' Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17(1)*, 8-12.

El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas

Ferney **Tavera** Acevedo
Universidad de Medellín (Estudiante Maestría en Educación Matemática)
Colombia
ftavera827@yahoo.es
Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Universidad de Antioquia (Docente de la facultad de Educación)
Colombia
javo@une.net.co

Resumen

En el presente documento reportamos parte de los resultados obtenidos de una investigación que centró su atención en el estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana presente en los libros de texto de matemáticas de la Educación Media (15 - 18 años). En particular, nos propusimos interpretar la manera en que los libros de texto de matemáticas ponen de relieve los aspectos variacionales en estos tópicos. A través de la técnica del análisis de contenido pudimos observar que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular "datos fijos y desconocidos" de un triángulo; los resultados del estudio muestran que la necesidad de diseñar propuestas alternativas, en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones "dinámicas" y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Palabras clave: pensamiento variacional, libros de texto, relaciones trigonométricas, uso de la tecnología.

Introducción

Esta investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación Matemática en la Universidad de Medellín-Colombia y tuvo su génesis en una revisión de la literatura a la luz del pensamiento variacional asociado al estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana. Desde dicha revisión encontramos que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia ha señalado que este pensamiento está en relación con *"el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos"* (Colombia, 1998, p. 73).

El pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento; por esta razón, el MEN recomienda que desde la Educación Básica primaria se debe construir *"distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico"* (Colombia, 2006, p. 66).

De acuerdo con lo establecido por el MEN (Colombia, 2006; 1998) consideramos que el desarrollo del pensamiento variacional conlleva al reconocimiento de fenómenos de cambio y variación, por tal motivo, es necesario propiciar en el aula de clase actividades para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a las relaciones dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos, en este caso, aquellos que se originan con el estudio de las relaciones trigonométricas.

Algunos antecedentes

Investigadores como Brown (2006) y Fiallo (2010) han señalado que son pocas las indagaciones que existen en relación a la trigonometría escolar; de igual modo, estos autores también revelan la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de algunos tópicos de la trigonometría, en la cual ponen en evidencia una desconexión entre las diferentes formas de abordar el estudio de las razones trigonométricas; puesto que esta temática usualmente se trabaja en el aula de clase como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, como coordenadas de un punto sobre el círculo unitario y como funciones (Brown, 2006) de manera independiente, trayendo como consecuencia que los estudiantes adquieran una compresión incompleta o fragmentada de los conceptos allí tratados (Fiallo, 2010).

Desde esta perspectiva, consideramos que por la falta de una conexión entre las temáticas antes mencionadas, es posible afrontar algunas dificultades y limitaciones en la interpretación variacional del estudio de las relaciones trigonométricas, puesto que, tanto la noción de razón como la de función, tienen en común una "naturaleza variacional". En este sentido, nos preocupamos por observar la manera en que los libros de texto han integrado o no aspectos variacionales o dinámicos en los desarrollos que presentan de la trigonometría, en particular, en la trigonometría del triángulo.

La idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida a través de algunos estudios e investigaciones que resaltan las implicaciones que tiene este tipo de recurso en los ejercicios y problemas que plantea habitualmente el docente en clase de matemáticas. Al respecto Selva y Borba (2013) señalan que en muchos casos el libro de texto se considera como el principal referente del trabajo propuesto en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores en relación con lo que debe enseñarse y cómo debe hacerse.

A causa de los diferentes argumentos encontrados en esta revisión inicial de literatura, nos interesamos en valorar algunos libros de texto de matemáticas con la intención de observar e interpretar de qué manera estos libros propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas. En la siguiente tabla se muestran los libros de texto que se seleccionaron para realizar un primer análisis sobre la manera como este tipo de recurso sugieren abordar la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones trigonométricas, y de esta forma, consolidar el problema de investigación que queremos tratar en este estudio.

Tabla 1. Libros de texto seleccionados para realizar un primer análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Londoño, N; Bedoya H	1988	*Serie Matemática Progresiva "Geometría Analítica y Trigonometría"*	Tercera	Norma
Uribe, J	1998	*Matemática Experimental* 10	Primera	Uros Editores
Zill, D; Dewar, J	2000	*Álgebra y Trigonometría*	Segunda	Mc Graw–Hill
Swokowski. E; Cole, J	2002	*Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*	Decima	Thomson Learning
Mejia F; Álvarez R; Fernández, H	2005	*Matematicas previas al cálculo*	Primera	Sello Editorial Universidad de Medellín
Grupo Editorial Santillana	2010	*Hipertexto, Matemáticas* 10	Primera	Santillana

De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) libros de texto como los presentados en la Tabla 1 parecen desaprovechar los contextos de los ejercicios y problemas allí planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen, puesto que las medidas a encontrar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se puede establecer ciertas relaciones funcionales. Estos resultados nos motivaron a ampliar la búsqueda en otros libros más actualizados y puestos en el mercado posterior a la publicación de los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006); de esa manera nuestra indagación se centro en la pregunta: *¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de los libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?*

Referente conceptual

Desde finales de la década de los noventa, en el campo de la Educación Matemática se ha observado el interés por analizar e interpretar los trabajos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional y sus implicaciones didácticas a través del proceso de modelación. Al respecto, investigadores como: Cantoral y Farfán, 1998; Reséndiz, 2006; Vasco, 2006; Villa-Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012; han planteado sus puntos de vista, con la intención de que el concepto de variable sea percibido a través de fenómenos de cambio y variación, pues han ofreciendo algunas reflexiones sobre la necesidad de desarrollar este tipo de pensamiento en el aula de clase.

Una mirada a la variación, variable y demás nociones asociadas al pensamiento variacional, no puede ser ajena a las interpretaciones y significados en los contextos en los cuales están inmersos. De ahí que el pensamiento variacional tenga una estrecha relación con el proceso de modelación matemática; según Dörfler (1991) *"generalizar significa construir variables"* (Traducción propia de Dörfler, p. 84) y esto conlleva necesariamente a formular modelos; al menos por dos razones: la primera porque hace énfasis en determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a otra u otras, y la segunda porque tiene la intención de encontrar la expresión algebraica que permite la variación mediante un modelo funcional.

Otras consideraciones del pensamiento variacional articulado a la modelación matemática pueden encontrarse en Vasco (2006) quien considera que este pensamiento va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra, para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, este autor propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

> […] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con esta mirada, consideramos que en el desarrollo del pensamiento variacional, además de la modelación, se puede (y debe) integrar las tecnologías digitales, pues estas juegan un papel fundante para *visualizar* el dinamismo que caracteriza a algunos conceptos del análisis matemático (e.g.: el concepto de función, derivadas, integrales, etc.). De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) y con Villa-Ochoa y Ruiz (2010) a través de software dinámico como el Geogebra se puede producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos.

Desde el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010) puede inferirse que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, porque cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias e incluso mediante las mismas matemáticas. Por tal razón, estos autores consideran que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Como consecuencia de lo anteriormente expresado, consideramos que el uso de la tecnología a través del Software Geogebra se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos. Según Leung (2008) se entiende por *dinamismo* *implícito* aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprehender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Desde esta perspectiva, se deduce que es posible analizar visualmente la variación de algunos elementos que intervienen en el estudio de las relaciones trigonométricas, mientras otros se mantienen constantes, es por esta razón, que Leung (2008) asume la variación como una *esencia epistémica* de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de *generar estrategias de arrastre para descubrir propiedades invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración, representación o construcción geométrica*.

En este sentido, es importante mencionar que los problemas que habitualmente se plantean en los libros de texto sobre el estudio de las relaciones trigonométricas permiten explorar el potencial de Geogebra, porque este software puede establecer simulaciones vinculadas a situaciones del “mundo real” y, por lo tanto, recrear maneras de producir conocimiento articulado, de alguna manera, a procesos de modelación de situaciones que permitan la identificación de regularidades y razonamientos *dinámicos* (covariacional en términos de Villa-Ochoa, 2012).

Metodología

La presente indagación está enmarcada en un *enfoque cualitativo de investigación* y el método que utiliza para ello, es el *análisis de contenido*, dado que es una *“técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto”* (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, se deduce que esta técnica intenta generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese una comunicación (e. g: verbal, gráfico, simbólico), por tal razón, consideramos que sea posible analizar cómo algunos libros de texto del grado décimo presentan el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta investigación, adicional al conjunto de textos presentados en la Tabla 1, realizamos otra búsqueda de textos de grado décimo; los libros seleccionados debía atender a los siguientes criterios: (i) que aparezcan en el Portal Colombia Aprende[1], el cual ha sido diseñado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para que cualquier agente educativo pueda consultar información sobre las diferentes características que poseen los libros de texto que se comercializan en el país para la Educación Básica y Media, (ii) que se tenga evidencias de uso por parte de profesores que dictan el área de matemáticas en el grado décimo y, finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna manera, los tópicos de la trigonometría que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.

[1] El sitio web al cual se puede acceder al catálogo de textos escolares, recomendado por el MEN es: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html Última consulta Enero 10 de 2013.

Con base en estos criterios se seleccionó el siguiente conjunto de textos:

Tabla 2. . Libros de texto seleccionados para realizar un segundo análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Editorial
Buitrago, L; Romero, J; Ortiz, L; Gamboa, J; Morales, D; Castaño J.	2013	*Los caminos del saber Matemáticas 10*	Santillana
Sotero, F; Donaire, J; Hernández, J; Moreno, M; Serrano, E; Vízmanos, J.	2010	*Código Matemáticas 10*	Ediciones SM
Vergara, G; Rojas, C; García, O.	2009	*Misión Matemática 10*	Grupo Educar
Galindo, E; Cely, J.	2009	*Fórmula 10*	Voluntad S.A
Bautista, M; Ramírez, C; Chamorro, A; Romero, J; Torres, W.	2007	*Trigonometría, geometría Analítica y estadística*	Santillana
Moreno, V.	2006	*Conexiones Matemáticas 10*	Norma

El análisis al segundo conjunto de libros mostró que los textos escolares seleccionados presentan patrones similares en sus secuencias de actividades, de esa manera, inician con una serie de lecturas para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, después introducen cada temática con una presentación general de la misma, para luego mostrar las definiciones y propiedades con algunos ejemplos, posteriormente se destina un espacio para resolver ejercicios y problemas de aplicación, y, finalmente, algunos hacen un comentario informativo de cómo utilizar la tecnología para algunos conceptos matemáticos, no necesariamente relacionados con el tema que se está trabajando en esos momentos.

De acuerdo a lo expresado en el apartado anterior, la variación está en relación con los contextos y estos a su vez, se observan reflejados en ejercicios y problemas que generalmente se presentan en los libros de texto. Desde esta perspectiva, se planteó la necesidad de resolver todo el conjunto de ejercicios propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que permitieran identificar el contexto al cual dicho ejercicio o problema hace referencia, posibilitando así, establecer la frecuencia de las categorías y subcategorías encontradas.

Es de anotar, que los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto analizados hacen un uso recurrente de enunciados verbales que pertenecen a un contexto matemático o a un contexto evocado, en los cuales hay una aplicación (casi) inmediata de los procedimientos y expresiones algebraicas previamente abordadas en el contenido de los capítulos. Esta situación crea la necesidad de proponer otro tipo de actividades y hacer alusión a otros contextos, en los cuales estos sean más “auténticos” y de esta forma, poder abordar la complejidad que implica el estudio de la variación asociada a la temática de las relaciones trigonométricas.

Algunos hallazgos

La investigación se desarrolló dos momentos, a saber: un análisis inicial, que estaba fundamentado en examinar la manera como algunos libros de texto, que son utilizados en el grado décimo y en determinados cursos, los primeros semestres de Universidad, propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas, dado que estos son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Randahl, 2012), y un segundo análisis se realizó para observar e interpretar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo emanado por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la trigonometría plana y los desarrollos propuestos en los libros de texto del grado décimo.

Los resultados encontrados en el primer análisis, muestran que los libros de textos seleccionados, proponen pocas actividades, ejercicios y problemas donde se evidencie el desarrollo de un pensamiento variacional; de igual manera, observamos un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y que, en ocasiones, tal situación desatiende el reconocimiento de las nociones variacionales que se presentan en esta temática.

En el análisis del primero conjunto de textos, también observamos que la mayoría de ejercicios y problemas se fundamentaban en rutinas para calcular el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados; esta situación se presenta porque las medidas a encontrar se muestran como incógnitas, es decir, cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales podemos establecer ciertas relaciones funcionales, además se desaprovechan los contextos de los problemas planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen (Tavera y Villa-Ochoa, 2012).

Los resultados encontrados en análisis del segundo conjunto de textos dan cuenta que los libros seleccionados, generalmente para abordar el estudio de las relaciones trigonométricas privilegian un contexto matemático seguido de un contexto evocado, lo cual permite deducir que estos textos también descuidan algunos elementos del pensamiento variacional, debido a que los ejercicios y “problemas” allí propuestos se solucionan a través de expresiones algebraicas para calcular datos “fijos” y desconocidos de un triángulo. Este análisis también permitió identificar que los libros de texto del grado décimo dejan relegado el uso de variables y funciones al estudio de posteriores temáticas como por ejemplo en la trigonometría de la circunferencia o en la trigonometría analítica. Las dos apreciaciones antes mencionadas, se convierten en una evidencia de la brecha existente entre el estudio geométrico y analítico de la trigonometría según lo ha mencionado Montiel (2005).

En los libros de texto del grado décimo analizados encontramos que la mayoría de ejercicios y problemas propuestos sobres las razones trigonométricas se resuelven empleando la *tangente*, puesto que en ellas se establece una relación directa entre el cateto opuesto, el cateto adyacente y el ángulo de estudio; donde el valor numérico de la primera cantidad actúa por lo general, como incógnita y las otras dos cantidades están determinadas por la tarea planteada.

En este sentido, es importante aclarar que en los libros de texto seleccionados también aparecen algunos ejercicios y problemas que para ser solucionados requieren de la razón trigonométrica *seno*, donde hay que hallar el valor de la hipotenusa, que igualmente se muestra como incógnita, pues la tarea propuesta expone el valor numérico al que equivale el cateto opuesto y el ángulo de estudio; es de anotar, que en ambos casos, las cantidades que allí intervienen son datos fijos y constantes, descuidando el uso de variables, parámetros y funciones.

La solución de ejercicios y problemas propuestos por los libros de texto seleccionados sobre el estudio de las relaciones trigonométricas que hacen alusión a un contexto evocado (Font, 2007), que permite establecer de manera mancomunada la relación que puede existir entre las diferentes formas que se emplean en el aula de clase para representar un concepto matemático (e.g.: verbal, numérica, geométrica, algebraica), dado que los estudiantes deben *entender y comprender el problema que se plantea*, para luego tratar de *graficar lo allí expuesto*, de tal manera que logren visualizar en qué lugar se encuentran los datos proporcionados por dicha tarea y aquel(los) que debe hallar, y, finalmente, determina una *expresión algebraica* que a través del manejo *apropiado de algunas propiedades* le permite calcular el valor numérico que satisface completamente la tarea planteada.

De este análisis surgiere la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar algunos elementos para superar la idea de que el estudio de las relaciones trigonométricas son "fórmulas" para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

En la siguiente tabla presentamos una comparación de los principales hallazgos en los análisis realizados a los dos conjuntos de libros de texto.

Tabla 3. Principales hallazgos encontrados en los dos conjuntos de libros analizados, antes y después de conocerse.

Conjunto de los libros de textos analizados	Publicados antes de conocerse los Lineamientos o los Estándares	Publicados después de conocerse los Lineamientos y los Estándares
Estructura y presentación de los contenidos	Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como: • Enumeración de las temáticas y objetivos que se desean alcanzar en cada unidad. • Lectura de situaciones históricas que permitieron dar origen a los conceptos que se abordan en cada unidad. • Cada concepto matemático es abordado a través de una serie repetitiva de ejemplo, seguido de ejercicios que fortalecen la parte procedimental y memorística del estudiante, para que luego éste los aplique en los problemas propuestos. • Los ejercicios y problemas planteados tienen sus respectivas respuestas. • Se recomienda la utilización de la calculadora científica o la calculadora graficadora.	Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como: • Lectura y análisis de situaciones históricas dieron origen a los conceptos que se abordan en cada unidad. • La presentación de la temática a trabajar se hace mediante ejemplos ilustrativos, luego se plantean algunos ejercicios y problemas de aplicaciones, para que el estudiante observe de qué forma puede utilizar este concepto en la "vida cotidiana". • Cada unidad trae en su parte final un resumen de los conceptos abordados; algunos de ellos, plantean simulacros tipo pruebas SABER. • Recomiendan utilizar el computador en el aula de clase, a través de algunos software de geometría dinámica como: Geogebra, Cabri Geometry II, Wx máxima, regla y compas, entre otros.
Contextos más usados, según lo propuesto por Font (2007)	• Contexto matemático • Contexto evocado	• Contexto matemático • Contexto evocado
Tipos de tareas	Hay un predominio de tareas con una	Hay un predominio de tareas con una

presentadas por Tavera y Villa-Ochoa (2012)	interpretación estática.	interpretación estática y seudo-dinámica.

Conclusiones

Los libros de texto son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en este estudio se evidenció que existe cierto distanciamiento entre lo emanado por el MEN, asociado a los resultados obtenidos en las indagaciones realizadas sobre la variación y lo que usualmente presentan los libros de texto del grado décimo; dado que las editoriales para publicar sus textos, no siempre acogen las recomendaciones planteadas en los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencia (2006) y lo propuesto por algunas investigaciones, sobre algunos elementos que intervienen favorablemente en el desarrollo del pensamiento variacional. Esto se puede inferir, porque los ejercicios o problemas propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas omiten de cierta manera centran la atención en el reconocimiento y la matematización de la variación.

Los resultados encontrados en el análisis de ambos conjuntos de textos escolares permiten observar que los contextos simulados y reales como los descritos por Font (2007) aparentan estar invisibles en el estudio de las relaciones trigonométricas, según las actividades, ejercicios y problemas propuesto en los libros de texto seleccionados; esto es coherente con la complejidad que implican este tipo de contextos que exigen de cierto dinamismo no solo a nivel de los conceptos matemáticos mismos, sino de las relaciones entre las matemáticas y las situaciones extraescolares; sin embargo, consideramos una vez más que con la integración de las tecnologías pueden aparecer nuevas sugerencias para el desarrollo de tareas en estos contextos que impliquen el estudio variacional de las relaciones trigonométricas.

Los estudios previos consultados en esta investigación reportan que el uso de la geometría dinámica (e.g.: Software Geogebra) permite estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, ya que incorpora el movimiento en forma de variable para que el estudiante identifique los fenómenos de cambio y variación allí expuestos, de tal manera que analice e interprete las relaciones producidas por éstas en una situación determinada, sin embargo en ambos conjuntos de textos escolares, se observa cierto descuido sobre el rol de la tecnología y, en algunos casos, su uso está enmarcado en comprobaciones o alivio de cargas operacionales más que promover la comprensión conceptual (Selva y Borba, 2013). En este sentido, este estudio llama la atención de los autores de los libros de texto para que promuevan el uso de herramientas de *visualización* puesto que incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de propiedades invariantes, posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

El uso de la tecnología en los libros de texto para el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, se tejen a partir de una interpretación geométrica, lo que implica una *reorganización* de los formatos establecidos para la publicación de estos textos escolares; esta situación puede producir ciertos cuestionamientos a las empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos escritos, porque el papel impreso presenta de forma estática los fenómenos de cambio y variación, trayendo como consecuencia que haya discordancia frente a lo que se propone sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

Bibliografía

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "'contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 367 - 390.

Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer.

Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 1 - 228. Prague: PME.

Cantoral Uriza, R., & Farfán Márquez, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon, 14*(3), 353 - 369.

Colombia. MEN. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de matemáticas.* Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia.* Bogotá: Magisterio.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen, *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (Vol. 10, págs. 63 - 85). Netherlands: Springer.

Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10*(2), 427 - 422.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 135 - 157.

Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socio - epistemológico de la función trigonométrica.* México: Tesis doctoral del Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada.

Pino Ceballos, J., & Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38,* 63 - 88.

Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(7), 881 - 896.

Reséndiz Baldera, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa, 9*(3), 435 - 458.

Selva, A., & Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad.* Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Tavera Acevedo, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Códoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.

Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis, 31,* 9 - 25.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista Virtual "Universidad Católica del Norte", 27,* 1 - 21.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 514 - 528.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años

Diana **Zakaryan**
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
diana.zakaryan@ucv.cl

Resumen

Esta comunicación presenta resultados parciales de un estudio de dos casos (en España y Armenia), que ha tratado de conocer la importancia que tienen las oportunidades de aprendizaje (OTL)[1] que ofrece el profesor en su aula (particularmente, en este documento tratamos el tipo de tareas que éste selecciona y propone) a la hora de facilitar la adquisición de las competencias matemáticas (CM) de sus estudiantes. Tomamos la información de observaciones de clases y entrevista (a dos profesores de Educación Secundaria) y de prueba (a los estudiantes de 15 años) y realizamos análisis de datos combinando técnicas cualitativas y cuantitativas. Los resultados de nuestra investigación, relativos al tipo de tareas, han constatado una fuerte relación de las CM de los estudiantes con la oportunidad de resolver cierto tipo de tareas (demanda cognitiva y situaciones/contextos en las que se plantean).

Palabras clave: oportunidad de aprendizaje, competencia matemática, tipo de tareas, profesor de matemáticas, estudiantes de 15 años.

Introducción

La motivación de este estudio es comprender la importancia que tienen las oportunidades de aprendizaje (OTL) que ofrece el profesor en su aula a la hora de facilitar la adquisición de las competencias matemáticas de sus estudiantes (CM). Partimos de la realidad mostrada por las sucesivas pruebas PISA (OECD, 2004; 2007; 2010) y de los análisis y reflexiones de varios especialistas (entre otros, Pajares, Sanz y Rico, 2004; Rico, 2007; Recio y Rico, 2005) que han venido a confirmar que los estudiantes de educación secundaria obligatoria presentan evidentes deficiencias en las competencias matemáticas: tienen dificultades a la hora de comprender

[1] Del original ingles "Opportunity-to-learn"

enunciados de los problemas, tampoco son capacez de emplear estrategias adecuadas para resolverlos.

De acuerdo con Hiebert y Grouws (2007), consideramos que la naturaleza de la enseñanza en el aula afecta significativamente a la naturaleza y al nivel del aprendizaje de los estudiantes, y de ahí nos centramos en el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje (Stevens y Grymes, 1993), particularmente, en las actividades del profesor en el aula, que condicionan la naturaleza de la enseñanza que lleva. Por otra parte, estudiamos las competencias matemáticas de los estudiantes, basándonos en el marco del proyecto PISA 2003 (OCDE, 2004) y tratamos de comprender las relaciones entre las OTL y CM a través de un modelo teórico que elaboramos (Zakaryan, 2011; Carrillo, Contreras y Zakaryan (en prensa)).

Dentro de los indicadores asociados a la actividad del profesor, que determinan las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, es destacable la relevancia que varios autores atribuyen al **tipo de tareas**[2] que éste selecciona y propone. Así, las tareas se consideran "el principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje" (Lupiáñez, 2009, p.113) y una cuidadosa selección de éstas por parte del profesor le permite planificar actividades que potencian la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje (Lo y Wheatly, 1994; Ponte, 2004). En la misma línea, Kilpatrick et al. (2001), Watson y Sullivan (2008), Sullivan et al. (2010), consideran que el tipo de tareas que emplean los profesores en las clases de matemáticas está relacionado con sus percepciones de las matemáticas e influye directamente en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, señala Polya (1989) que

> "…un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos y ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello" (p. 5).

En las tareas propuestas por el profesor, distinguimos los diferentes grados de complejidad (demanda cognitiva) de las mismas por el tipo de *procesos cognitivos* que se activan en los estudiantes para llevarlas a cabo[3]. La demanda cognitiva de una tarea puede reconocerse por las características de la tarea que incluyen: número y tipo de representaciones, número de estrategias de solución y exigencias de comunicación (la extensión de explicación o justificación requerida del estudiante) (Stein et al., 1996). Otro aspecto importante al tratar las tareas propuestas por el profesor son *situaciones* y *contextos* en los cuales se plantean las tareas, que permiten a los estudiantes acceder a las matemáticas de una manera natural y motivadora; proporcionan un fundamento sólido para el aprendizaje de operaciones formales, procedimientos, notaciones, reglas y algoritmos; permiten utilizar la realidad como recurso y dominio de aplicaciones; y realizar la ejercitación de las habilidades específicas en situaciones aplicables (De Lange, 1987; Treffers y Goffree, 1985).

---

[2] Entendemos que las tareas son demandas que el profesor plantea a los estudiantes, que activan sus conocimientos acerca de un tema matemático concreto, e implican una determinada actividad matemática por parte de los estudiantes (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009).

[3] La demanda cognitiva (o nivel cognitivo) de una tarea se refiere al tipo de procesos cognitivos que necesita estudiante para llevarla acabo (Doyle, 1988). Éstos pueden variar dentro de un continuo desde la memorización, la aplicación de procedimientos y algoritmos (con o sin comprensión) hasta el uso de estrategias de pensamiento y razonamiento complejas, que pueden ser prototípicos de lo que llamamos "hacer matemáticas" (conjeturar, justificar, interpretar, generalizar, etc.).

Asimismo, seguimos la noción de *competencia matemática* determinada por Niss (1999), que es la "capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticas en las cuales la matemática desempeña o podría desempeñar un papel" (p. 6). Esta noción, junto a otras ideas de este autor, ha sido adaptada en el proyecto PISA para la construcción de un amplio marco de trabajo de competencias. El proyecto OCDE/PISA 2003 ha centrado en ocho competencias matemáticas características que se basan en su forma actual, en el trabajo de Niss (1999): *pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, emplear soportes y herramientas tecnológicos*[4](OCDE, 2004, p. 40). A su vez, los resultados de análisis de las respuestas de los estudiantes a distintas tareas con grado de complejidad diversos han permitido establecer empíricamente seis niveles distintos de dominio en las actuaciones de los estudiantes (Ibid.).

En las siguientes líneas presentamos la metodología que seguimos para acercarnos a la realidad objeto de estudio.

Metodología

Abordamos nuestra investigación a través de un estudio de casos (Stake, 2007), combinando distintos métodos cualitativos y cuantitativos (Bericat, 1998). Los dos casos estudiados (en España y en Armenia) corresponden a dos contextos y tradiciones de enseñanza diferentes, hecho que nos ha permitido obtener información diversa y rica en significados. Al estudiar dos casos, respectivamente nos centramos en el estudio de dos aulas, una de ellas se ubica en un centro IES de Huelva (España) y la otra en una escuela de Ereván (Armenia). Elegimos los dos casos según el criterio que nos interesaba, aulas a las que acuden estudiantes entre 15-16 años (la edad en la que la mayoría de estudiantes termina la enseñanza obligatoria).

De este modo, el "Caso 1" comprende a los 15 estudiantes del aula de 4º ESO de un centro de Huelva y al profesor de Matemáticas (Pablo)[5] del aula, el "Caso 2" a los 25 estudiantes de 9º grado de una de las escuelas de Ereván y a su profesora de Matemáticas (Mery).

Proceso e instrumentos de obtención de la información

A la hora de construir la realidad objeto de investigación recurrimos a diferentes técnicas de obtención de los datos dependiendo del informante.

La fuente principal de los datos relativos a las OTL ha sido la *observación de aula* (Cohen y Manion, 2002). En ambos casos, aplicamos el método de *observación no participante*, que ha supuesto la presencia de la investigadora en el aula, sin intervención alguna. Durante las grabaciones en vídeo, nos interesaba captar tanto las intervenciones del profesor como las de los estudiantes, por lo que la cámara ha sido colocada en la parte trasera del aula. Después del análisis previo de las observaciones de aula, realizamos una *entrevista semiestructurada* en soporte audio a los profesores de ambas aulas.

La técnica de recogida de la información acerca de las competencias matemáticas de los estudiantes, ha sido una *prueba* de matemáticas. Dicha prueba de papel y lápiz, con la duración de 1 hora y 40 minutos ha consistido en 39 problemas liberados de los de PISA2003 (INECSE, 2005). Decidimos realizar la prueba al final del año académico correspondiente en cada caso con

---

[4] Esta última competencia ha sido descartada finalmente en el análisis de los resultados de PISA2003, debido a la imposibilidad de establecer comparaciones internacionales entre países que usan diferentes herramientas en el aula (Rico y Lupiáñez, 2008).

[5] Todos los nombres son pseudónimos, para preservar sus identidades reales.

el propósito de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de cursar la mayor parte posible de la programación establecida para el curso.

Proceso e instrumentos de análisis de la información

Analizamos las observaciones de aula dividiendo las sesiones en episodios que representan las oportunidades dadas a los estudiantes. Entendemos por episodio un fragmento de la sesión en el que la intención relativa a los objetivos de aprendizaje del profesor ha sido constante (p.ej. trabajo en tareas, introducción de conceptos, ejercitación de fórmulas). Los objetivos del profesor los identificamos a partir de las actividades que realiza en el aula. De este modo, analizamos cada episodio según las categorías determinadas en el proyecto METE: foco matemático, estrategias didácticas, materiales didácticos y tipo de agrupamiento (Andrews, Carrillo y Climent, 2005). Además de estas categorías, establecemos otra, relacionada al *tipo de tareas* propuestas por el profesor.

Debido a que en esta comunicación exponemos los datos relativos a ésta última, describimos tan solo esta categoría, que en conjunto con las demás presenta el instrumento de análisis de las observaciones de aula. La Tabla 1 recoge los descriptores de tareas que estudiamos.

Tabla 1

Discriptores de tareas

Procesos cognitivos	
Reproducción	Reproducción del material practicado y realización de las operaciones rutinarias.
Conexión	Integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
Reflexión	Razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.
Situación	
Personal	Es la relacionada con las actividades diarias de los alumnos (p.ej. cuando se pide representar gráficamente la altura de los pies por encima del suelo mientras se columpia).
Educativa/ profesional	Es la que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo (p.ej. cuando se plantea calcular la nota media de los exámenes en una asignatura determinada).
Pública	Es la que se refiere a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observan un aspecto determinado de su entorno (p.ej. un problema donde se pide calcular el interés que ofrece una cuenta bancaria).
Científica	Es más abstracta y puede implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático (p.ej. calcular el aumento absoluto y relativo de las emisiones de CO_2 de varios países, representadas mediante dos diagramas en porcentaje y en millones de toneladas).
Contexto	
Auténtico	Es el que se dirige directamente a la resolución del problema, aunque las preguntas de matemáticas no sean necesariamente verdaderas y reales (p.ej. la situación pública que ejemplificamos puede resultar parte de la experiencia del estudiante, por lo que presenta un contexto autentico).
Hipotético	Es el que se presenta como pretexto para hacer prácticas de operaciones matemáticas (son las que encontramos frecuentemente en los libros de texto, p.ej. se dan hipotéticas dimensiones de un campo para que los estudiantes practiquen el cálculo

	del área del rectángulo).

Por otra parte, para organizar los datos en unidades de información, modelizamos la enseñanza basándonos en el modelo propuesto por Schoenfeld (1998), y adaptado a nuestra meta de identificar los indicadores de las OTL (Ilustración 1).

[i.j] **Designación del episodio** (línea de inicio – línea de fin)
Evento desencadenante: Evento que funciona como desencadenante de las secuencias de actividades.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Identificación de las oportunidades de aprendizaje subyacentes en esta secuencia de actividades.
Foco matemático
Estrategias didácticas
Materiales didácticos (libro de texto, diapositivas, Internet, etc.)
Tipo de agrupamiento (individual, en pareja, en grupo, toda-clase)
Tipo de tareas (procesos cognitivos, situaciones y contextos)
Evento de término:
Evento que funciona como causa de término de la secuencia de actividades.

Ilustración 1. Representación del modelo de análisis de las sesiones.

La fuente principal para análisis de las competencias matemáticas son los resultados de la prueba aplicada. En primer lugar, realizamos el análisis de protocolos de resolución de cada ítem desde el enfoque de análisis de contenido (Bardin, 1996), a la luz de las CM (los procesos cognitivos) que han sido capaz de activar y/o las que han resultado imposible poner en marcha durante sus actuaciones. Por último, corregimos los trabajos de los estudiantes según los criterios y códigos establecidos para los ítems liberados de la prueba PISA2003, analizamos cuantitativamente según el modelo de Rasch y categorizamos por niveles de dominio.

Análisis de información

Análisis de las OTL

En el Caso 1, observamos en total 23 sesiones, de las que grabamos las 7 relacionadas a los tópicos de “Elementos de geometría”. A continuación presentamos un ejemplo del análisis del séptimo episodio de la tercera sesión [3.7].

[3.7] Trabajo en tareas [687-700]
Evento desencadenante: Pablo propone realizar una actividad del libro de texto.
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE:
Foco matemático
Procedural – Pablo promueve el desarrollo de técnicas de cálculo de la ecuación de la circunferencia [687-700].
Estrategias didácticas
Entrenamiento – Pablo explícitamente da consejos e indicaciones para realizar la actividad [691-696].
Tipo de tarea
N3. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C (7, 1) y radio r=5 (p.164).
Procesos cognitivos**:** Reproducción
Situación: Científica
Contexto: Hipotético
Evento de término: Fin de la sesión.

Ilustración 2. Análisis del séptimo episodio de la tercera sesión de Pablo.

El análisis de las sesiones ha mostrado que Pablo ha manejado en sus sesiones tareas, la mayoría de las cuales son ejercicios tipo (tareas de grupo de reproducción) y otras más complejas, de más de un paso de procesamiento, donde se requiere identificación y conexión de conceptos y sus propiedades (tareas de grupo de conexión). No se han contemplado la ejecución de tareas del grupo de reflexión durante el abordaje de este bloque. Dentro de estas tareas la mayoría son planteadas en situaciones *científicas* (matemáticas) y tan solo dos tareas en situaciones *públicas*, todas ellas en contextos *hipotéticos*.

En el Caso 2, observamos en total 20 sesiones (de las que grabamos 6); una unidad didáctica del tema “Concepto de logaritmo” de Álgebra y Elementos de Análisis Matemático, y una de “Vectores en el espacio” de Geometría.

En las sesiones de Mery se destaca el trabajo en tareas de los tres grupos de complejidad, con el predominio de las del grupo de conexión. Asimismo, la profesora propone realizar tareas del grupo de reproducción y del grupo de reflexión. Cabe subrayar que todas las tareas son planteadas, exclusivamente, en situaciones *científicas*, matemáticas, en este caso, en contextos *hipotéticos*.

Análisis de las CM

El análisis de los protocolos de los estudiantes de ambos Casos ha revelado sus dificultades y carencias a la hora de resolver problemas realistas, dificultades que en principio, reflejan, o bien un vacío importante en los conocimientos matemáticos básicos, o bien la incapacidad de aplicarlos en situaciones de la vida real. Como consecuencia, los procedimientos y operaciones respectivas se han llevado a cabo erróneamente o no han llegado a realizarse. Asimismo, han mostrado dificultades en el uso del lenguaje simbólico, esto es, en identificar los datos con las variables de una fórmula dada o traducir el lenguaje simbólico al lenguaje coloquial. Del mismo modo, han sabido hacer inferencias directas y explicar asuntos matemáticos sencillos, sin llegar a formular supuestos o explicar asuntos matemáticos complejos que implican relaciones.

Así, en el Caso 1, por ejemplo, de la sub- área *espacio y forma*, la mayoría de los estudiantes (13 de los 15) ha sabido realizar el ítem siguiente, que requería descodificar e interpretar la representación de los objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar y realizar la operación sencilla de resta o suma para encontrar las variables desconocidas:

Pregunta 3: **CUBOS** *(Reproducción)*
En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:
La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.
Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Sin embargo, el ítem 34 igualmente relacionado con los dados pero más complejo, ya solo han sido capaces de realizarla los 7 de 15 estudiantes.

Pregunta 34: **DADOS 1** *(Conexión)*
A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.

¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

En este ítem los estudiantes podrían llegar a la solución siguiendo dos estrategias diferentes: calculando los puntos de las caras que no se pueden ver, deduciendo de los puntos de las que se ven y sumándolos o bien razonando que si la suma de las caras opuestas es siete y hay tres cubos, en total dan 21 puntos y restándole los cuatro puntos de la cara de arriba obtendrían el resultado. Seis estudiantes han realizado esta tarea empleando la primera estrategia, más estándar, y un estudiante aplicó la segunda.

Por otra parte, en el Caso 2, por ejemplo, de la sub-área *cantidad*, todos los estudiantes han realizado correctamente el ítem "El tipo de cambio 1":

EL TIPO DE CAMBIO 1 *(Reproducción)*
Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de: 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Este ítem proporciona toda la información pertinente con claridad, requiere reconocer equivalencias, aplicar procedimientos estándar (regla de tres) y realizar cálculos rutinarios.

Sin embargo, sólo cinco estudiantes han contestado correctamente la pregunta planteada en el ítem "El tipo de cambio 3" y han dado una explicación adecuada.

EL TIPO DE CAMBIO 3 *(Reflexión)*
Al cabo de estos 3 meses el tipo de cambio había cambiado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD. ¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese de 4,0 ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Da una explicación que justifique tu respuesta.

La mayoría ha contestado la pregunta erróneamente ya que la ha explicado como si hubiera sido realizado el cambio al revés, los dólares de Singapur a rands sudafricanos, aunque correctamente para este caso; más bien, por el malentendido del enunciado del problema.

En ambos Casos observamos la evidente preferencia de los estudiantes a la hora de resolver los ítems de la prueba por buscar los ítems que proporcionan explicitamente la operación o procedimiento matemático requerido (p.ej. aplicar porcentaje directo), evitando abordar los ítems donde había que interpretar un diagrama y explicar o argumentar su respuesta, lo que refleja la seguridad y familiaridad en unos e inseguridad en otros tipos de exigencias del enunciado.

Resultados y discusión

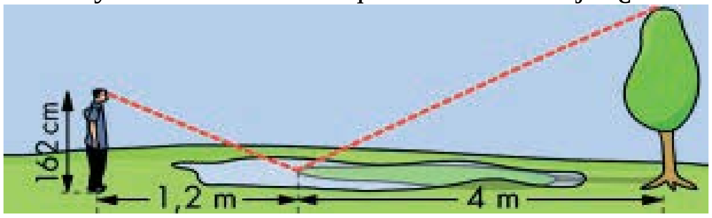
Según el análisis del tipo de tareas propuestas por los dos profesores estudiados y las competencias matemáticas de los estudiantes, hemos documentado los siguientes resultados.

Resultados y discusión Caso 1

En el Caso 1, el profesor ha proporcionado la oportunidad de trabajar, mayormente, en tareas del grupo de reproducción. No se ha dado la oportunidad de resolver problemas con demanda cognitiva de alto nivel. Esto implica que los procesos de pensamiento, que utilizan los estudiantes durante la resolución de este tipo de tareas, abarcan tan solo la elección de los datos, la aplicación de fórmulas y algoritmos estándar, el uso de una sola estrategia de solución, la identificación de representaciones sencillas y de una única manera, y la comunicación de los resultados de forma cerrada.

Por otra parte, las tareas son planteadas, prioritariamente, en situaciones matemáticas, aunque como regla se presentan unas cuantas actividades en situaciones de la vida real en contextos hipotéticos, o sea, “camufladas” con el pretexto de realizar alguna operación matemática. El ejemplo que sigue, es una de las dos tareas planteadas en situaciones de la vida real, que Pablo ha propuesto para resolver durante sus sesiones dedicadas al bloque “Elementos de Geometría”.

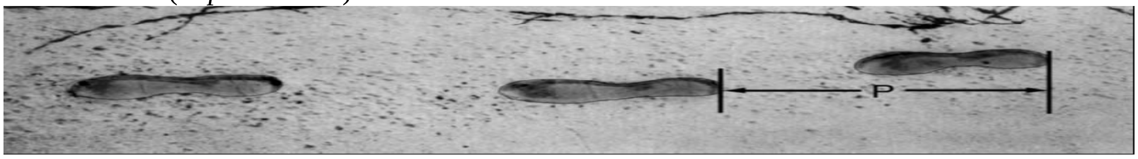
N40 (Reproducción). Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



Pablo mismo traduce esta imagen al lenguaje matemático, o sea, representa dos triángulos sobre la pizarra, e invita a una estudiante resolver la tarea. La proporción que forma la estudiante es $\frac{162}{120} = \frac{h}{4}$, de ahí obtiene h=5,4 **cm**; no cuestiona el resultado ni se da cuenta de que es difícil que la altura de un árbol sea poco más de cinco centímetros, sobre todo cuando en el dibujo es más alto que la estatura de una persona, bien porque en la primera proporción ha pasado a centímetros y se ha fijado en ello, dejando en la segunda proporción los valores en metros y porque no interpreta el resultado. Este hecho confirma los resultados de varios estudios que han indicado que una vez elegida la operación a realizar, los estudiantes la aplican mecánicamente sin volver al enunciado para verificar si la respuesta tiene sentido en el contexto de la pregunta planteada (Verschaffel et al., 2000; Vicente et al., 2008).

Otro ejemplo de ello podemos observar en el ítem “Caminar 1” de la prueba.

CAMINAR 1 (*Reproducción*)



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso *P* es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas. Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre *n* y *P* donde:

n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

En sus cálculos observamos un error común ($P = \frac{140}{n}$) en despejar la incógnita de la fórmula dada. Aparte de la carencia en la técnica de cálculo, este hecho además subraya el acercamiento mecánico a la resolución.

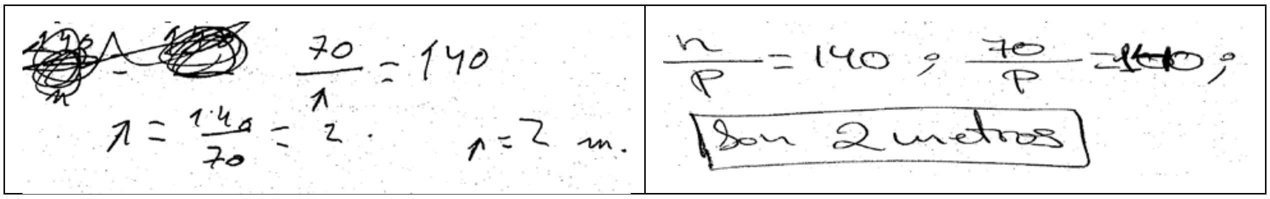


Ilustración 3. Soluciones de dos estudiantes, extraidos de los protocolos de resoluciones de la prueba.

El error que cometen puede ser debido a que el resultado en este caso da un número "limpio" (entero pequeño), lo que les hace proceder de una manera mecánica, sin entrar en detalles y sin una interpretación adecuada de los resultados. En caso contrario, al obtener una longitud del paso de dos metros, según sus cálculos, los estudiantes podrían cuestionar el resultado y volver a repensar la solución.

De este modo, siendo únicamente dos las tareas planteadas en situaciones de la vida real en contextos hipotéticos, no se ha dado la oportunidad de desarrollar habilidades de la matematización, las que precisamente necesitaban los estudiantes para abordar problemas realistas de la prueba.

A su vez, los estudiantes han tenido dificultades en entender los enunciados de problemas realistas. Durante la prueba, en varias ocasiones, se dirigían a la investigadora para aclarar sus dudas al respecto, en otros casos, lo expresaban en el papel mismo, así como se han sentido inseguros con algunos ítems de la prueba que contenían información irrelevante para la solución, que se debe a que los ejercicios y problemas del libro de texto presentan todos los datos necesarios para su resolución y normalmente se usan todos los que están, y indica a la falta de familiaridad con este tipo de problemas.

Las dificultades y carencias de los estudiantes, que observamos tanto a la hora de trabajar en el aula como al resolver problemas realistas, resultado plausible de una enseñanza en la cual los estudiantes han tenido escasas oportunidades para el aprendizaje significativo de las matemáticas.

Resultados y discusión Caso 2

En el Caso 2, la profesora ha proporcionado a los estudiantes la oportunidad de trabajar, mayormente, en tareas del grupo de conexión, pero también en las del de reproducción y reflexión. Por tanto, los estudiantes han tenido la oportunidad de resolver problemas con demanda cognitiva diversa, por ejemplo:

N 340 (Conexión) Se da un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$. Indica el vector X que tiene su origen y extremo en los vértices del prisma y que:

a) $AA_1+B_1C-X=BA$
b) $AC_1-BB_1+X=AB$
c) $AB_1+X=AC-X+BC_1$

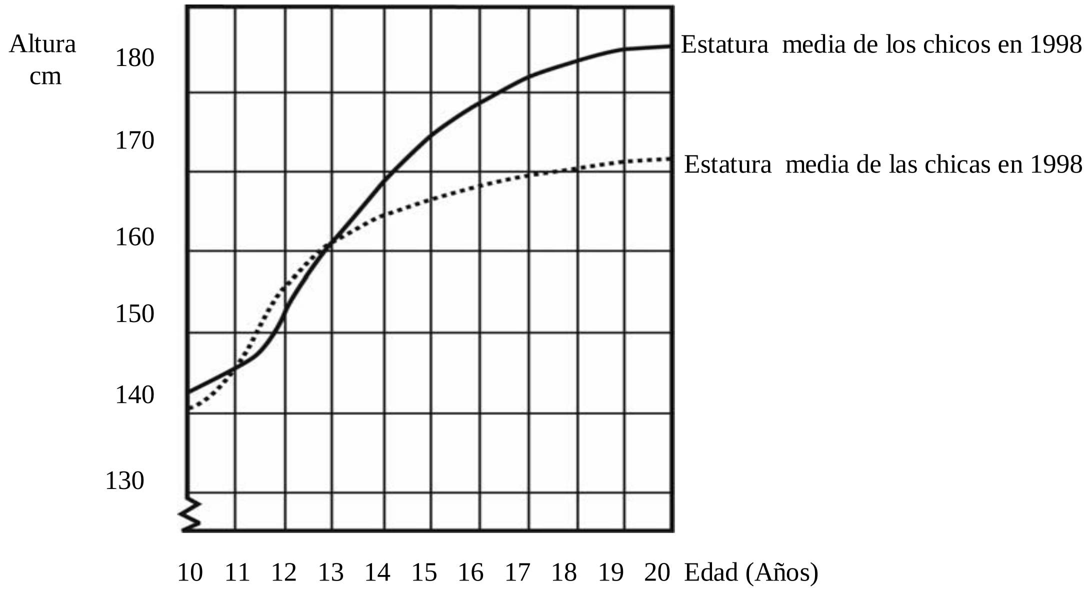
N 323 (Reflexión) Se da una pirámide con un triangulo equilátero en la base. Los puntos M, N, P y Q son puntos medios de las aristas AB, AD, DC, BC.

a) Halla todos los pares de vectores iguales,
b) Determina qué cuadrilátero se ha formado con los puntos MNPQ.

Como hemos documentado, todas las tareas son planteadas, exclusivamente, en situaciones matemáticas y no sólo las que se relacionan con los tópicos grabados u observados, sino las tareas que manejan durante todo el curso.

La dificultad que han tenido los estudiantes en resolver problemas realistas, incluso algunos sencillos, puede deberse a ese formalismo. Así, por ejemplo, el ítem "Crecer 3" de la prueba, en el que a partir de la representación gráfica de dos funciones que describen la estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 han de señalar durante qué periodo de su vida son las chicas más altas que los chicos de su misma edad, la mayoría de los estudiantes no lo ha sabido abordar.

CRECER 3 (*Reproducción*)
La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998, está representada en el siguiente gráfico. De acuerdo con el gráfico, como promedio, durante qué periodo de su vida son las chicas más altas que los chicos de su misma edad.



La incapacidad de descodificar e interpretar la representación gráfica refleja la falta de experiencia en establecer relaciones entre el fenómeno y la función que permite describir su cambio. Cabe destacar que todo un curso de la asignatura “Álgebra y Elementos de Análisis Matemático 9” ha sido dedicado a las funciones (función, gráfico de la función y su transformación, monotonía y extremos, periodicidad, etc.; funciones trigonométricas, potenciales, exponenciales y logarítmicas). Resulta que el hecho de que los estudiantes puedan construir gráficos de las funciones más sofisticadas, determinar su dominio, intervalos de monotonía, etc., no implica que sepan aplicar sus conocimientos a una situación contextualizada mucho más sencilla.

En el Caso 2, la manera de presentar las Matemáticas está totalmente desconectada y alejada de la experiencia y de la realidad del estudiante que, a pesar de que le permite actuar con cierta seguridad en el campo puramente matemático, le hace sentir impotente y confuso ante los problemas contextualizados y no familiares.

Conclusión

A modo de conclusión, se ha confirmado una fuerte relación de las CM de los estudiantes con la oportunidad de resolver cierto tipo de tareas, particularmente, es evidente la importancia tanto de la demanda cognitiva de la tarea como su presentación en diferentes situaciones y contextos.

Además, es importante intentar modificar los sistemas de creencias de los estudiantes acerca de los problemas escolares, rompiendo sus expectativas de que todo problema aritmético se resuelve aplicando las cuatro operaciones o sus diferentes combinaciones, proponiendo problemas cuyo enunciado contiene datos superfluos, problemas sin solución o con múltiples soluciones y potenciando el uso de distintos sistemas de representación (Callejo, 2008).

En esta línea, Malaty (2004) indica que una de las causas del éxito de los estudiantes finlandeses en las pruebas PISA, es que las tareas utilizadas en los estudios PISA se parecen extremadamente a las que se utilizan en las escuelas finlandesas. Mientras, como observamos en nuestro estudio, los estudiantes en ambos casos han tenido dificultades incluso en entender la forma de presentación, el enunciado de los problemas, se han quedado confusos ante los datos irrelevantes, porque no están presentadas de esta manera en el libro de texto y no han practicado en sus clases de matemáticas. Asimismo, estos resultados reflejan una realidad documentada por varios estudios (Greer, 1993; Verschaffel et al., 2000; Yoshida et al., 1997) acerca de la dificultad que presentan los estudiantes a la hora de resolver problemas realistas semejantes a los de PISA.

Los resultados obtenidos sugieren que para promover el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, es preciso prestar más atención a las actividades que movilizan estas competencias, particularmente, a los procesos de matematización a través de la resolución de problemas originales y creativos en diferentes situaciones y contextos, con estrategias, procedimientos y soluciones múltiples; a la búsqueda de regularidades entre matemáticas y situaciones del mundo real que atribuya sentido a los conceptos impartidos.

Referencias y bibliografía

Andrews, P., Carrillo, J., & Climent, N. (2005). *Proyecto "METE": El foco matemático.* Comunicación presentada al IX Simposio de la SEIEM, Córdoba, septiembre, 2005.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Bericat, E. (1998). *La integración de los métodos cuantitativos y cualitativos en la investigación social*. Barcelona: Ariel.

Callejo, M. L. (2008). Desarrollo de competencias y resolución de problemas realistas. En M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 63-74). Madrid: MEC.

Carrillo, J., Contreras, L.C. & Zakaryan, D. (en prensa). Avance de un modelo de relaciones entre las oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas. *Bolema*.

Cohen L. & Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of student's thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23 (2), pp. 167-180.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

Greer, B. (1993). The modelling perspective on wor(l)d problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, pp. 239-250.

Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Tteaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Madrid: MEC.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW&OC. Rijksuniversiteit.

Lo, J. & Wheatly, G. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 27(2), pp. 145-164.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Malaty, G. (2004). *What are the reasons behind the success of Finland in PISA?* Finlanda: University of Joensuu.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, pp. 21-29.

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world. First Results from PISA 2003*. Paris: OECD.

OCDE (2007). *PISA 2006. Informe español*. Madrid: MEC.

OCDE (2010). *PISA 2009. Informe español*. Madrid: MEC.

Pajares, R., Sanz, A. & Rico, L. (2004). Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula*, pp. 25-34. Barcelona: Graó.

Recio, T. & Rico. L. (2005). El Informe PISA 2003 y las matemáticas. *El País* 24.01.2005.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1 (2), pp. 47-66.

Rico, L. & Lupáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Schoenfeld, A. (1998). On modeling teaching. *Issues in Education, 4*(1), 149 - 162.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stein, M., Grover, B, Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: analysis of mathematics tasks used in reform classroom. *American Education Research Journal*, 33 (2), pp. 455-488.

Stevens, F. & Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. & O´Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4 (4), pp. 133-142.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 97-121). Utrecht: PME.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Yoshida, H., Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Realistic consideration in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7, pp. 329-338.

Vicente, S. Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación,* 20 (4), pp. 391-406.

Zakaryan, D. (2011). *Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. Un estudio de casos*. Tesis Doctoral.

Em Busca da Dimensão Teórica da Etnomatemática

Roger **Miarka**
Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp)
Brasil
romiarka@gmail.com

Resumo

Esta comunicação tem como objetivo discutir a dimensão teórica da Etnomatemática a partir do discurso de cinco proeminentes pesquisadores dessa área, a dizer, Bill Barton (University of Auckland, Nova Zelândia), Eduardo Sebastiani Ferreira (Universidade Estadual de Campinas, Brasil), Gelsa Knijnik (Universidade do Vale do Rio Sinos, Brasil), Paulus Gerdes (Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique) e Ubiratan D'Ambrosio (Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil). A pesquisa foi realizada de uma perspectiva fenomenológica com uma metodologia que envolveu uma entrevista com cada um desses pesquisadores, que foram transcritas e analisadas hermeneuticamente (Autor, 2011). Em seguida, por meio de um movimento de *redução fenomenológica*, buscamos constituir grandes categorias temáticas, dentre elas, a apresentada nesta comunicação chamada de "A Dimensão Teórica da Etnomatemática".

Palavras-chave: educação matemática, teoria em etnomatemática, matemática e cultura, fenomenologia, pesquisa em etnomatemática, metapesquisa.

Introduzindo o tema ao leitor

A Etnomatemática apresenta-se como um campo diversificado, com grupos de pesquisa que a tomam como foco de estudo distribuídos por todo o Brasil, de maneira que encontramos cadastrados na base de Diretórios de Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) 57 grupos de pesquisa que a assumem como frente de trabalho (CNPq, 2012).

Ainda que dentre esses grupos haja diferenças conceituais, metodológicas e epistemológicas, seja qual for a forma pela qual a etnomatemática que estudam é tomada, palavras como cultura, encontro cultural, poder e inclusão a ela são caras.

De uma maneira geral, a etnomatemática vem trazer à matemática a preocupação com sua dimensão cultural, discutindo o papel político da matemática e a desnaturalização de uma concepção hegemônica de ciência matemática como aquela que procede atemporalmente por meio de verdades que se mantêm "acima de qualquer suspeita".

Para isso, toma a matemática como produção cultural humana e, por conseguinte, dada temporal e espacialmente. Ainda que baseada neste preceito, a etnomatemática apresenta-se como um campo bastante diversificado, com concepções e metodologias distintas.

Nesta comunicação, atentando ao discurso de cinco pesquisadores nessa área, apresentamos resultados da tese de doutorado "Etnomatemática: do ôntico ao ontológico" (Autor, 2011), que analisou, de uma perspectiva fenomenológica, o discurso de cinco proeminentes pesquisadores em etnomatemática, buscando por seus fundamentos metodológicos, filosóficos e epistemológicos, apontando suas diferenças, semelhanças e complementaridades.

O tratamento metodológico

A tese "Etnomatemática: do ôntico ao ontológico" (Miarka, 2011) nasceu visando auxiliar a comunidade de etnomatemática a pensar criticamente sobre certas características internas que fomentam discussões em torno da seguinte problemática: A etnomatemática trata-se de um campo de pesquisa com uma nomenclatura comum amplamente utilizada, mas com diferentes significados, que dependem das concepções dos pesquisadores que a utilizam.

No rastro dessa discussão, tornou-se inerente ao trabalho aprofundar o debate compreensivo sobre alguns temas caros à etnomatemática, tal como a concepção de cultura, sua dimensão ética e a concepção de matemática envolvida na pesquisa, que, por vezes, não são aprofundados ou apresentam uma diversidade muito grande de uso nas diferentes pesquisas.

Para discutir tais questões, desenvolvemos uma metodologia que pudesse ser significativa para a etnomatemática, suscitando discussões e abrindo possibilidades de compreensão, assim como explicitando solicitações de pesquisa para a área.

O desenvolvimento dessa metodologia se deu de uma perspectiva fenomenológica, atitude que se mostrou importante devido a algumas características próprias da fenomenologia, vistas como centrais para este trabalho, tais como:

- seu rigor metodológico ao lidar com descrições, entendida como um discurso que diz do modo como se percebe o *fenômeno* estudado (Bicudo, 2005);
- tomar a percepção como primado na compreensão do *fenômeno* (Merleau-Ponty, 2000), compreendido como um encontro entre aquele que vê e aquilo que se mostra (Miarka, 2008);
- a compreensão do fenômeno é perseguida indo-à-coisa-ela-mesma, mote fenomenológico que diz que, para compreender algo, devemos perceber a *coisa* ao invés de ir a conceitos ou ideias que falam sobre a *coisa*. É solicitado ir aos indivíduos que a percebem para perguntar a eles qual é o significado que atribuem *à coisa*, tendo como meta a compreensão do fenômeno (Bicudo, 2010).

Assumindo essa postura, e buscando compreender modos em que a pesquisa em etnomatemática é realizada e entendida - nosso fenômeno - analisamos as referências bibliográficas dos artigos escritos por brasileiros nas três edições da *International Conference on Ethnomathematics*, destacando os autores quantitativamente mais citados nos textos. Assim, por meio desse movimento, selecionamos cinco pesquisadores em etnomatemática como sujeitos significativos desta pesquisa: Bill Barton (University of Auckland, Auckland, Nova Zelândia), Eduardo Sebastiani Ferreira (Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, Brasil), Gelsa Knijnik (Universidade do Vale do Rio Sinos – UNISINOS, São Leopoldo, Brasil), Paulus Gerdes (Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique) e Ubiratan D'Ambrosio (Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Esses pesquisadores foram entrevistados, tendo suas entrevistas transcritas, de modo a serem tomadas como textos. Em seguida, selecionamos excertos desses textos que nos ajudavam a compreender o fenômeno, guiados por nossa pergunta de pesquisa "Quais são os modos como a etnomatemática se apresenta em sua região de inquérito?". Esses trechos foram, então, analisados hermeneuticamente, com o objetivo de abrir possíveis compreensões do dito pelo entrevistado e explicitar o modo como entendemos o discurso proferido.

Os excertos analisados foram articulados tematicamente, por meio de um processo chamado de *redução fenomenológica*, um movimento em que o pesquisador busca deixar em destaque e suspeição seus julgamentos e crenças, focando sua atenção nos modos pelos quais o *fenômeno* se mostra, formando categorias abertas a interpretações em termos de significados, discussões e possíveis desdobramentos.

Após essa análise individual dos discursos, tomamos todos os discursos conjuntamente, agora buscando por suas convergências, divergências, complementaridades etc. entre os modos de pesquisar dos sujeitos abordados nessa investigação, constituindo novas categorias articuladas tematicamente, em um movimento de distanciamento dos discursos individuais em direção a uma compreensão de etnomatemática entendida em sua complexidade.

Procedendo de tal maneira, nossa análise articulou a categoria "A Dimensão Teórica da Etnomatemática", cuja interpretação e discussão será explicitada na próxima seção.

A dimensão teórica da Etnomatemática

Nesta categoria, a etnomatemática mostra sua abrangência teórica, apresentando conceitos que direcionam o seu pensar e as ações de pesquisa em sua região de inquérito, as concepções de matemática que se articulam nos seus modos de investigar e a sua movimentação em termos de teorização ao longo de sua historicidade.

Os pesquisadores entrevistados enfatizam a importância do pronunciamento de D'Ambrosio na Conferência Internacional de Educação Matemática (ICME), em Adelaide, em 1984, considerando-o um marco para o advento da etnomatemática, por ter sido o responsável pelo lançamento acadêmico desse movimento na comunidade matemática. Essa ocorrência conduz a desdobramentos importantes para tal área de pesquisa que a essa época está surgindo, criando um espaço de debates, em que são trazidos à tona discussões sobre o tema, preocupações de caráter teórico e metodológico, bem como, de críticas.

D'Ambrosio indica que a base para o programa se deu em uma articulação entre o conceito de ser humano, de vida e de existência da diversidade. Sebastiani enuncia que um disparador para o surgimento da etnomatemática se deu nas constantes conversas que mantinha com

D'Ambrosio sobre os estudos culturais que já realizava e sobre outras etno-X, como etnoastronomia, etnobotânica etc.

Embora possamos assinalar essa conferência como o marco político para a etnomatemática, estudos culturais envolvendo cultura e matemática já existiam ao longo do século XX, como pode ser exemplificado pelas obras de Gay e Cole (1967) e de Zaslavsky (1973). Barton frisa que o espaço criado para a etnomatemática só foi possível por conta de uma mudança social na concepção de matemática, vista então como uma produção humana em expansão, que, em outra via, tem sido reforçada pelas pesquisas em etnomatemática.

Também Gerdes já era envolvido em estudos culturais e matemática na África desde a década de 70. Contudo, evitava assumir-se como etnomatemático por considerar que algumas das pesquisas sobre matemática e cultura surgidas na África do Sul tinham um cunho racista, ao incentivarem a segregação de determinadas culturas em nome de seu fortalecimento, de modo a manter características do regime do *apartheid*. Essa problemática foi trazida novamente duas décadas mais tarde pelos pesquisadores Vithal e Skovsmose (1997), ao elaborarem uma crítica à etnomatemática. Gerdes, conforme seu depoimento, apenas assumiu-se na etnomatemática ao conhecer a base filosófica indicada por D'Ambrosio em uma conferência no Suriname na década de 80, ainda que já fosse considerado como um membro desse campo de pesquisa por outros pesquisadores.

Existem concepções mais abrangentes e mais restritivas de etnomatemática. D'Ambrosio é um exemplo modelar do primeiro grupo, com sua famosa definição, que envolve *ticas*, *matema* e *etno*.

Tal concepção abrangente é criticada por Sebastiani ao considerar que, ao assumi-la, o objetivo da etnomatemática se perde sem um foco específico. Seu modo de ver etnomatemática encontra-se no outro extremo. Para Sebastiani, a matemática deve ser nuclear e etnomatemática é o estudo da matemática de grupos específicos.

Gerdes concebe a matemática de modo universalizante, mas em constante expansão. Para ele não faz sentido falar em matemáticas no plural. Vê a etnomatemática como um modo de expandir a matemática ao atentar-se para práticas culturais. Barton considera que, para trabalhar com ideias matemáticas diferentes daquelas que já conhecemos, é importante que se expanda a própria concepção de matemática. Ele busca por ações que englobam algumas características que gostaria de chamar de matemáticas convencionadas por ele como o Sistema QRS, em que as iniciais QRS significam, respectivamente, modos de lidar com quantidades (Q), com relações (R) e com o espaço (S).

Knijnik, respaldada por um referencial wittgensteiniano, trabalha nas relações que podemos perceber como semelhantes às práticas que chamamos de matemática. Para a pesquisadora, a etnomatemática é uma caixa de ferramentas com a qual pode teorizar sobre os dados produzidos.

O termo *etnomatemática* foi cunhado por D'Ambrosio, assumindo a nuclearidade da matemática naquele momento por conta de sua formação, ainda que sua concepção tenha se alterado com o tempo. Esse pesquisador indica que se pudesse, teria escolhido outro termo, pela deturpação com que frequentemente interpretam-no, ao tratarem etnomatemática como o estudo de matemáticas étnicas.

Como D'Ambrosio, outros depoentes buscaram nomear investigações a respeito da relação entre matemática e estudos culturais. Sebastiani criou o termo *matemática materna*¸ como a matemática própria de um grupo cultural, uma matemática de berço cultural, possivelmente em consonância com o termo *língua materna*.

Gerdes considera que o termo *etnomatemática* não é claro em relação ao seu objeto de estudo. Para o pesquisador, tal palavra não traz indicações sobre a concepção de matemática subjacente. Por isso, forjou no início de sua carreira o vocábulo *etnomatematicologia*, para indicar o pensar e o estudo de matemática, tomando como pano-de-fundo o contexto cultural de um grupo, o que condiz com seu modo de ver matemática como uma ciência única e em expansão construída pelo ser humano.

Tanto Sebastiani quanto Gerdes acabaram por abraçar o termo *etnomatemática*, ao perceberem que aqueles criados por eles não obtiveram repercussão acadêmica. Ainda assim, a concepção que cada um dos pesquisadores apresenta sobre o campo de pesquisa permanece. Para Gerdes, *etnomatemática* vem sempre no singular. Matemática é única, se expandindo com contribuições das mais diversas culturas. Nessa perspectiva caem por terra adjetivações como "matemática ocidental". Além de impróprias, desmerecem as contribuições das diversas culturas na construção da matemática. Sebastiani, por sua vez, assume a possibilidade da *etnomatemática* no plural, enfatizando a existência de matemáticas interiores a determinados grupos.

Todos os discursos, no entanto, possuem uma base comum: o respeito e a necessidade ética de compromisso com o *outro* estudado. Esse compromisso pode ter sido criado ou fortalecido em consonância com o movimento que estava se dando à época da criação da etnomatemática como região de pesquisa na matemática, entre as décadas de 70 e 80, quando a antropologia passa a se preocupar com a *restituição* de um benefício às culturas investigadas (Fabietti, 2010).

A potencialidade da etnomatemática é discutida pelos sujeitos da pesquisa de uma maneira bastante diversa. Gerdes fala dessa diversidade de modo positivo, apontando que os projetos dos diferentes pesquisadores se diferenciam, muitas vezes, por conta do contexto em que trabalham.

De uma maneira geral, os discursos proferidos apontam para a etnomatemática como uma ferramenta de compreensão histórica, social e da própria matemática; como um instrumento de criação de novas ideias e conceitos; como possibilidade de auxílio ao sistema educacional; e como forma política de combate e de fortalecimento de grupos.

A dimensão educacional da etnomatemática é enfatizada por Sebastiani, na medida em que esse pesquisador assume seu trabalho a partir de um foco bem delineado: trabalha etnomatematicamente com indígenas ao ser convidado pela comunidade destes para formar professores de matemática nativos.

O aspecto criativo - no sentido radical da palavra - da etnomatemática é marcado por Gerdes e por Barton. Gerdes busca a inovação e expansão do conhecimento matemático, no caso de Barton, ir além do núcleo desses conhecimentos, expandindo o próprio conceito de matemática. A dimensão social da etnomatemática se mostra de maneira mais focada nos discursos de Knijnik e D'Ambrosio. A primeira pesquisadora busca compreender as relações que se observam em matemáticas alternativas àquela acadêmica e as relações de poder constituídas envolvendo matemática.

D'Ambrosio vê a etnomatemática como uma possibilidade de entendermos a nós mesmos no mundo como seres humanos, trazendo de volta a humanidade à matemática e criando estratégias de abertura ao diálogo ao almejar uma co-existência entre diversos grupos pautada no respeito mútuo.

Barton evidencia uma mudança do conceito de matemática, que tem se tornado cada vez mais aberto, contextualizado, humano e social. Entretanto, esse panorama não parece ter sido criado pela etnomatemática, apesar de sua notável contribuição, mas ter sido o responsável pela possibilidade de criação de seu espaço. Aspectos como a independência de uma série de países colonizados e uma busca pelo fortalecimento de culturas caladas podem ter contribuído para essa ocorrência. O mesmo pode ser entendido em termos de avanços dos mecanismos de comunicação, que facilitaram o diálogo, antes limitado por questões geográficas.

Quanto às necessidades para a pesquisa em etnomatemática, encontramos três aspectos invariantes nos discursos dos cinco depoentes ouvidos: o *respeito ao outro*, a *presença do diálogo* e a *importância do conhecimento da língua* do grupo cultural investigado.

O *respeito ao outro* é considerado fundamento para todos os trabalhos que envolvem outros grupos. É uma postura ética básica para a etnomatemática.

A *presença do diálogo* se mostra em dois vieses. Nos trabalhos de Sebastiani e de D'Ambrosio a situação dialógica visa à compreensão do *outro*, enquanto que nas pesquisas de Barton, Knijnik e Gerdes, o objetivo se refere a algum tipo de produção. Knijnik busca teorizações do compreendido; Gerdes, o reforço à criação de uma unidade nacional e o desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos; e Barton, um horizonte de compreensão da matemática com maior abrangência e disparadores de produção importantes para os grupos estudados.

A *importância do conhecimento da língua* é apontada por todos os pesquisadores. Sebastiani e Gerdes não dominam a língua de alguns dos grupos que estudam, mas buscam recursos metodológicos para superarem esse obstáculo à investigação que procedem: procuram trabalhar em conjunto com orientandos e praticantes da cultura estudada que sejam bilíngues. Barton aponta a vantagem de o pesquisador em etnomatemática ser proveniente da comunidade que estuda e ter formação matemática, tornando-se a reunião de dois grupos, conhecedor da língua, das práticas que pesquisa, das suas relações e dos processos de legitimação presentes na cultura do grupo estudado e na academia.

Gerdes e Barton apontam o conhecimento de matemática como importante para o pesquisador em etnomatemática. O primeiro indica a profundidade de conhecimentos matemáticos como relevantes e o segundo, uma compreensão expandida que vá além dos currículos matemáticos do Ensino Básico e Superior. Para ambos, uma compreensão restrita de matemática afeta o trabalho do pesquisador, em termos de profundidade do estudo e de visão de como avançar com novos conhecimentos.

Gerdes e Barton indicam a importância de a etnomatemática deixar de tomar apenas a educação matemática como base, ainda que tenha se originado em preocupações educacionais. Um dos problemas desse forte vínculo se mostra na formação de educadores matemáticos, que visa geralmente à educação matemática de base, de modo a trazer para a área concepções de matemática direcionadas ao currículo da Escola Básica e Superior e, assim, tornando-se restritivas. Além disso, vincular a etnomatemática exclusivamente à educação matemática tolhe seu potencial criador de novos conhecimentos matemáticos.

Knijnik frisa a necessidade de adotar-se uma postura filosófica no trabalho em etnomatemática, por considerar que um dos grandes objetivos do pesquisador é uma teorização do material recolhido, dizendo mais do não dito, e expandindo possibilidades de compreensão daquilo que se mostra. Assim, referenciais teóricos tornam-se importantes.

Gerdes indica que há certa superficialidade dos críticos, que não se aprofundam nas leituras teóricas da área, baseando suas argumentações em trechos não contextualizados. Além disso, aponta que muito de etnomatemática é escrito em português, língua não dominada por muitos dos críticos.

Os sujeitos da pesquisa citam-se mutuamente em seus discursos, apontando aproximações e divergências entre suas concepções. Esse aspecto mostra-se importante ao destacar modos como as pesquisas e a comunidade se articulam, apresentando um grupo dialógico atento às pesquisas de seus pares.

Os sujeitos da pesquisa apontaram frequentemente a articulação da etnomatemática com outras teorias como a psicologia, a antropologia e a sociologia, apresentando sua dimensão interdisciplinar.

D'Ambrosio e Sebastiani falam da importância da psicologia da cognição para a compreensão dos modos de fazer e pensar matematicamente e para possíveis avanços na compreensão de etnomatemática. Sebastiani menciona que, com Piaget e Vergnaud, tem compreendido como um conceito e suas representações se constituem. Knijnik, por sua vez, destaca a referência sociológica de seu trabalho e ao falar da antropologia a associa à pesquisa de campo e à diversidade entre as culturas.

Considerações finais

Na complexidade da etnomatemática como se mostrou neste trabalho, alguns aspectos se destacaram, tal como em sua raiz se encontrarem a preocupação com o *outro* e a importância do *respeito*. A preocupação com o *outro* e com o seu cuidado – focalizando a radicalidade da palavra ligada ao *cuidar* – também se apresenta como formas de preocupar-se e cuidar de si mesmo, possibilitando situações dialógicas em que grupos e indivíduos se realizem em termos de co-existência, compartilhamento de espaço e produção de conhecimentos com o *outro*. O *respeito* nesse viés teórico torna-se uma garantia de espaço para si mesmo. Respeita-se e se é respeitado, em uma dinâmica conjunta que visa à abertura de possibilidades no trato com o *outro*. É a base para o diálogo, que não parte do pressuposto do embate, mas da possibilidade de, com o *outro* e suas experiências e concepções, produzir, compreender, ampliar o que já se conhece e os modos de fazer da própria tradição.

Todos esses aspectos destacam a etnomatemática como posição e atitude de conhecimento que assume a realidade e as necessidades relacionadas a um panorama cultural e aos indivíduos que o compõem.

Referências e Bibliografia

Barton, B. (2008) *The Language of Mathematics: telling mathematical tales.* New York: Springer.

Bicudo, M.A.V. (2005) Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. *Revista Pesquisa Qualitativa,* 1(1), 7-26.

Bicudo, M. A. V. (2010) *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas.* São Paulo: Editora UNESP.

CNPq. (2012) *Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil.* Recuperado de http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/

D'Ambrosio, U. (2002) *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

Fabietti, U. (2010) *Elementi di Antropologia Culturale.* Milano: Mondadori.

Ferreira, E. S. (1991) Por uma Teoria da Etnomatemática. *Bolema,* (6)7. 30- 35.

Gay, J. & Cole, M. (1967) *The New Mathematics and an Old Culture: a study of learning among the Kpelle of Nigeria.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Gerdes, P. (2010) *Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas.* Belo Horizonte: Editora Autêntica.

Knijnik, G. (1996) *Exclusão e Resistência: educação matemática e legitimidade cultural.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Merleau-Ponty, M. (2000) *O Primado da Percepção e suas Conseqüências Filosóficas.* Campinas: Papirus.

Millroy, W. (1992) An Ethnographic study of the mathematical ideas of a group of Carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph.* Nº5. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Miarka, R. (2008) *Concepções de Mundo de Professores de Matemática e seus Horizontes Antevistos.* (Trabajo de investigación de maestría no publicado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Miarka, R. (2011) *Etnomatemática: do ôntico ao ontológico.* (Trabajo de investigación de doctorado no publicado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Tylor, E. B. (1903) *Primitive Culture: researches into the development of mythology, philosophy, religion, language, art, and custom.* London: John Murray.

Vithal, R. & Skovsmose, O. (1997) The End of Innocence: a critique of 'ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics,* 34(2), 131-158.

Zaslavsky, C. (1973) *Africa Counts: number and pattern in African culture.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria
Brasil
leivasjc@unifra.br
Erilúcia Souza da **Silva**
Secretaria Municipal de Educação de Manaus
Brasil
erilucia_souza@yahoo.com.br

Resumo

A comunicação tem por objetivo apresentar resultados de uma pesquisa com professores em ação continuada, a qual foi realizada com alunos participantes de um mestrado profissionalizante em ensino de Física e de Matemática no Brasil, em uma disciplina de Geometria. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada na aplicação de uma oficina envolvendo atividades topológicas voltadas ao ensino básico, na qual se buscou verificar como os indivíduos redescobrem propriedades importantes para a formação de pensamento geométrico. Os dados foram registrados em escritas dos participantes, em vídeo e áudio e nas observações do pesquisador. Os resultados da investigação comprovaram a pertinência de realização dessas atividades para a formação dos professores de Matemática, atuais e futuros, sendo recomendado que o tema seja abordado em reformulações curriculares.

Palavras chave: intuição, topologia, educação matemática, formação de professores, ensino de geometria.

Introdução

Para Dienes e Golding (1977) as primeiras noções geométricas não são euclidianas, já que não levam em conta as questões relativas a medidas. Por sua vez, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a geometria da criança não é a de Euclides, sua intuição geométrica é mais topológica do que euclidiana. A uma criança interessam primeiramente as relações de estar dentro ou estar fora, pertencer e não pertencer, estar perto ou estar longe, estar junto ou estar separado, por exemplo.

Essas relações elementares, nem sempre são tratadas na formação inicial, seja nos cursos de Pedagogia ou na Licenciatura em Matemática. Se por um lado os que cursam a primeira possuem limitada formação matemática, para os da segunda, o assunto geralmente não consta dos currículos. Quando aparece na grade curricular da formação inicial do professor de Matemática, o assunto Topologia, em geral, é feito de forma teórica, sem que haja conexão com a escola básica.

Entendemos ser necessário introduzir novos conhecimentos na formação do professor de Matemática bem como na formação do pedagogo pelas razões anteriores, o que é recomendado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura da seguinte forma:

> [...] a formação do matemático demanda do aprofundamento da compreensão dos significados matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. [...] É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor. (Brasil, 1999, p. 4)

A partir dessas considerações preliminares, foi feita uma pesquisa realizada num mestrado profissionalizante brasileiro para desenvolver, por meio da intuição e utilizando recursos materiais de baixo custo, noções de topologia geométrica. Nesta comunicação apresentamos um recorte da pesquisa realizada.

A respeito de intuição, podemos verificar que ela está engendrada em uma das correntes filosóficas da Matemática no transcorrer dos séculos. Para Hersh (1997), a corrente intuicionista surgiu após a logicista, enquanto que Davis e Hersh (1995) apresentam algumas definições e usos para a palavra intuição, das quais destacamos as que se seguem.

> Intuitivo significa visual. Assim, a topologia ou geometria intuitiva diferem da topologia ou geometria rigorosa em dois aspectos. Por um lado, a versão intuitiva tem uma referência no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que é excluído da versão rigorosa (isto é, formal ou abstrata). Nesse aspecto, a intuitiva é superior; tem uma qualidade que falta à versão rigorosa. Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerarmos óbvias ou evidentes afirmações que são dúbias ou mesmo falsas. [...]
>
> Intuitivo significa confiarmos num modelo físico, ou em alguns exemplos importantes. Nesse sentido é quase o mesmo que heurístico. (p. 361)

Por sua vez, Fischbein (1987) classifica, inicialmente, as seguintes intuições: intuições afirmativas são representações ou interpretações de fatos aceitos como certos, evidentes e consistentes, que podem se referir a determinado conceito ou relação; intuições conjecturais estão associadas a um sentimento de dúvida; intuições antecipatórias representam uma visão preliminar de uma determinada solução de um problema, uma hipótese formulada, a qual, desde o início, está intimamente ligada a um sentimento de certeza e de evidência; e intuições conclusivas, as que fornecem uma visão definitiva, conclusiva e global da solução do problema.

Posteriormente, Fischbein (1987) as classifica em primárias, que se desenvolvem nos indivíduos, independente de qualquer instrução sistemática como um efeito de sua experiência pessoal e, as secundárias, que são as que recebem influência de instruções novas e, a partir daí, novas crenças cognitivas podem ser criadas. Por sua vez, para Davis e Hersh (1995) intuição é a consequência na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos. Segundo os autores, temos intuição porque trazemos representações mentais de objetos matemáticos e, estas são adquiridas, não através da memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas, seja no nível elementar, com a manipulação de objetos físicos, seja no nível avançado, através de experiência de resolver problemas e descobrir coisas por nós mesmos.

A fim de compreender os efeitos da manipulação de objetos físicos, didáticos, manipuláveis, encontramos a indicação, feita por Nacarato (2005, p.1), da maneira descrita a seguir.

> O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920. (p. 1)

Entendemos que, aliar recursos materiais explorando intuição, pode ser um caminho para introduzir conceitos topológicos geométricos de forma agradável e acessível a diversos níveis de escolaridade o que pode ser feito por simples propriedades até noções mais avançadas, por exemplo, na construção da faixa de Möebius ou na Garrafa de Klein, objetos de descrição da presente comunicação. Essas duas superficies têm propriedades relevantes, não triviais, e bem ilustram o ramos da Topologia Geométrica.

Segundo Courant e Robbins (2000), a Topologia estuda as propriedades das figuras geométricas que persistem mesmo quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas e todas as suas propriedades métricas e projetivas sejam perdidas. De fato, em uma transformação topológica, as propriedades métricas, como forma e tamanho, podem ser destruídas, mas propriedades como interior e exterior, ou vizinhança, não o são. Por isso, esta parte da Matemática também pode ser conhecida como “Geometria da Natureza”, “Geometria Elástica” ou “Geometria das Deformações”.

A comprovação da falta de conteúdos de Topologia na formação dos professores foi constatada em pesquisa realizada por Leivas (2009, p.46), junto a oito universidades gaúchas que oferecem curso de formação de professores de Matemática, comprobando o que segue.

> [...]. Em apenas dois projetos aparecem itens que contemplam minimamente Geometrias Não Euclidianas. Dois programas tratam de Geometria Fractal e cinco fazem uso de recursos tecnológicos para o ensino, nem sempre explicitando que sejam para a Geometria. Três cursos trazem indicativos de abordagem de Topologia e Geometria Diferencial e quatro indicam tratamento de tendências atualizadas para o ensino.

A palavra Topologia originou-se do grego topos, lugar, e logos, estudo, e é considerada uma das geometrias que estuda as transformações contínuas. Entretanto ao falarmos em Topologia nos vêm à mente assuntos relacionados ao estudo da Matemática Pura, geralmente constante dos cursos de Análise, mais especificamente, a topologia da reta. Conforme Papas (1995), a Topologia surgiu, no século XVIII, a partir da solução do problema das pontes de Königsberg, resolvido por Euler (1707-1783), que usou a parte da Topologia conhecida hoje por teoria dos grafos para solucionar o problema, a qual constou da pesquisa de mestrado mas não será abordado no presente trabalho.

Courant e Robbins (2000, pp. 292-293) apresentam a definição de um importante conceito para a o estudo de Topologia, como segue:

> [...] uma transformação topológica de uma figura geométrica A em outra figura A' é dada por qualquer correspondência
>
> $$p \rightarrow p'$$
>
> entre os pontos p de A e os pontos p' de A', e que tem as duas propriedades seguintes:
>
> 1. A correspondência é bijetora. Isto significa que a cada ponto p de A corresponde apenas a um ponto p' de A', e vice-versa.
> 2. A correspondência é contínua em ambas as direções. Isto significa que se tomarmos dois pontos quaisquer p e q de A e deslocarmos p de modo que a distância entre ele e q se aproxime de zero, então a distância entre os pontos correspondentes p' e q' de A' também se aproximará de zero, a recíproca é verdadeira.

Podemos exemplificar uma transformação topológica usando um balão cheio de ar, se o achatarmos levemente sem furá-lo, a vizinhança dos pontos será preservada. Porém, se furarmos o balão, deixaremos de ter uma transformação topológica, já que as propriedades acima expostas não serão respeitadas. Outro exemplo de transformação topológica é apresentado na figura1.

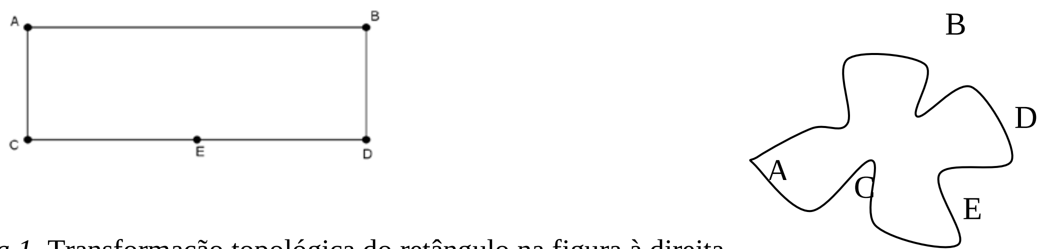


Figura 1. Transformação topológica do retângulo na figura à direita.

Observamos que, apesar de os lados e os ângulos do retângulo terem sofrido alterações, em ambas as figuras, os pontos C, E e D permanecem, respectivamente, entre os pontos A e E, C e D, E e B. Embora a distorção sofrida pela transformação, o ponto E, que se encontra entre os pontos C e D, permanece entre A e D, após a transformação, mostrando que "estar entre" é propriedade topológica, ou seja, o que é caracterizado como "relação de ordem".

A Faixa de Möebius é uma superfície importante para a Topologia e foi descoberta pelo matemático alemão Augustus Möebius (1790-1868), daí a origem de seu nome. Segundo Courant e Robbins (2000), aos 68 anos de idade, Möebius realizou uma apresentação concisa à Academia de Paris sobre superfícies unilaterais, porém este trabalho foi abandonado por anos nos arquivos da Academia até ser tornado público pelo próprio autor.

A faixa é extraordinária por ser uma superfície que apresenta apenas uma face, construída em um tira retangular de papel com as pontas colocadas após uma torção de 180º, como ilustrada na figura 2. Para verificar sua unilateralidade basta percorrer toda ela com um lápis sem o levantar do papel e iremos ver que conseguimos realizar todo o percurso sem enfrentar nenhuma fronteira. Esse procedimento ilustra de forma intuitiva a relação topológica de continuidade. Para percorrer uma faixa comum, que apresenta duas faces, é necessário atravessar uma fronteira para percorrê-la.

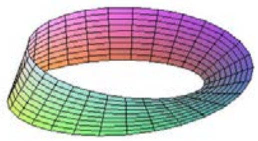


Figura 2. Faixa de Möebius.

A Faixa de Möebius, também é encontrada na literatura como Banda de Möebius e, de acordo com Pappas (1995, p. 45), "A banda de Möebius tem aplicações interessantes na indústria, tal como no caso das correias de ventoinha dos carros ou em correias de outros dispositivos mecânicos, visto que sofrem um desgaste mais uniforme do que as correias convencionais".

A Garrafa de Klein (figura 3) é outra superfície topológica e foi inventada pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1925). A garrafa tem a propriedade de não ter distinção entre o seu exterior e o seu interior, da mesma forma que a Faixa ou Banda de Möebius, e poderíamos verificar isso derramando água em um dos furos, que sairia pelo mesmo lugar por onde entrou.

Figura 3. Garrafa de Klein.

Estas duas superfícies topológicas estão relacionadas, pois podemos formar uma Garrafa de Klein com duas Faixas de Möebius, ou dito de outra forma, a partir de uma Garrafa de Klein obter duas Faixas de Möebius. Para tal, basta cortar a garrafa ao meio no sentido longitudinal. O presente artigo aborda como essas duas superficies foram construídas e exploradas suas propiedades junto ao grupo focado na pesquisa, o que será descrito no próximo ítem.

A pesquisa

A pesquisa realizada teve cunho qualitativo no sentido apontado por Alves-Mazzotti (1999), a partir da sua diversidade e flexibilidade, pois tais pesquisas "não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla quantidade de casos. Além disso, as pesquisas qualitativas diferem bastante quanto ao grau de estruturação prévia, isto é, quanto aos aspectos que podem ser definidos já no projeto" (p. 147). Por sua vez, para Lüdke e André (1986, p.11), "a pesquisa qualitativa supõe contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo".

Seguindo esses passos, a pertinência do tema e do levantamento bibliográfico realizado, elaboramos o seguinte problema de pesquisa: quais são as contribuições que noções de Topologia Geométrica, abordadas de forma intuitiva, podem trazer para o ensino de Geometria na formação de um grupo de mestrandos de Matemática do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática?

A fim de responder ao problema de pesquisa propusemos um questionário inicial, no qual buscamos informações a respeito do conhecimento dos indivíduos sobre o assunto; elaboramos uma oficina pedagógica utilizando recursos manipulativos construídos com material de baixo custo pelos participantes; realizamos atividades exploratórias com base na intuição, buscando a descoberta de propriedades topológicas elementares tais como: vizinhança, separação, ordem, circunscrição ou envolvimento, continuidade, etc. Finalmente, realizamos a análise dos instrumentos coletados, por meio das respostas dos questionários, da análise de áudios e vídeos e da observação direta do pesquisador.

Além disso, em pesquisas qualitativas, a observação participante é a estratégia mais utilizada pelos pesquisadores, e extremamente valorizada, segundo Alves-Mazzotti (1999). Conforme esta autora, “Na observação participante, o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação” (p. 166). Dessa forma, a análise da realização das atividades tem como foco principal nossa interpretação dos fatos ocorridos durante o processo das oficinas.

Outro instrumento utilizado na pesquisa, importante para nossas conclusões, foi a análise de fichas entregues aos participantes da oficina para que formulassem hipóteses nas atividades propostas e realizadas. Segundo Alves-Mazzotti (1999), “considera-se como documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação.” (p.169).

Os participantes da pesquisa foram 12 alunos da turma de 2011 do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática de uma instituição particular do estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Os participantes responderam a um questionário inicial e a outro final e participaram da oficina durante duas sessões de quatro horas realizadas em dias de aula da disciplina Fundamentos de Geometria do curso, ministrada pelo segundo autor, no ano de 2012. Dividimos a oficina em três módulos, dos quais os dois primeiros foram aplicados no primeiro encontro e o terceiro ficou para o segundo encontro.

Foi construída a Faixa de Möebius, sem lhe dar o nome, apenas a pesquisadora orientava sua construção, acompanhando o processo e fazendo registros. Alguns mestrandos apresentaram dificuldades em realizar a torção na tira retangular para sua posterior colagem. Pelos relatos orais durante a realização e pelos registros obtidos em vídeo, pudemos constatar problemas na construção em si. Utilizando marcas tracejadas em um dos lados, como na figura 4, chegamos à pretendida superficie.

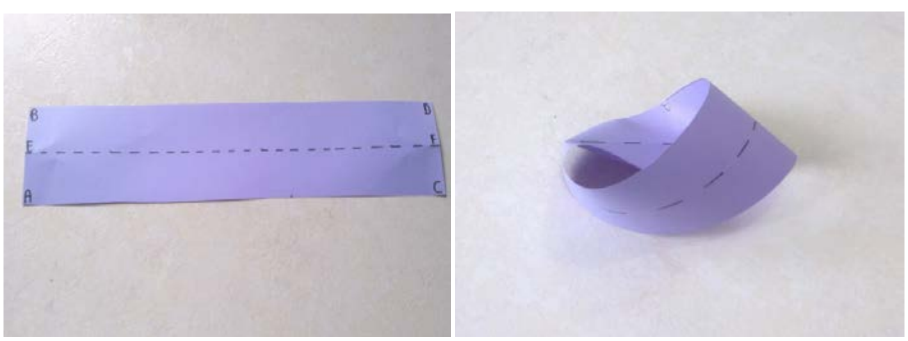


Figura 4. Faixa de Möebius construída pela pesquisadora.

A fim de não identificar os alunos investigados, os mesmos foram nomeados por M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}.

Na sequência, lançamos a primeira questão: *escreva sua hipótese a respeito de quantos lados possui a nova superfície* e solicitamos fosse feito o registro na ficha. Emergiram quatro categorias de respostas. Categoria de respostas com quatros lados: M_8; respostas com três lados: M_4, M_{10}, M_{12}; respostas com dois lados: M_1, M_2, M_3, M_5, M_7, M_{11} e resposta com um lado: M_6.

Dessa categorização e das justificativas, destacamos as seguintes:

M_{12}: “dois lados, um liso e outro com a linha desenhada”. Podemos perceber nessa resposta que M_{12} não tem uma intuição da alteração ou transformação da figura, mantendo-se presa aos dois lados da faixa plana em virtude de um conter a linha tracejada e o outro não.

M_6 respondeu que a superfície tinha infinitos lados e M_8 que tinha “4 lados”. Tais respostas comprovam o que afirmam Courant e Robbins (2000) “É raro alguém que não esteja familiarizado com a faixa de Möebius preveja este comportamento, tão contrário à intuição do que ‘deveria’ ocorrer” (p. 316).

A partir das hipóteses registradas pelos estudantes nas respectivas fichas, solicitamos que percorressem a faixa, com uma caneta pincel sem levantá-la do papel para que comprovassem ou não a hipótese feita. O registro em vídeo identificou a dúvida de M_3 quanto a percorrer os dois lados da faixa. Alguns apresentavam dificuldades em conservar o pincel na folha ao percorrê-la e/ou, percorriam até onde havia a colagem, paravam e perguntavam se deveriam seguir. Podemos perceber aqui, a intuição conjectural, uma das classes de intuição propostas por Fischbein (1987) e que se refere a intuições que estão associadas a um sentimento de dúvida, segundo o autor. Apesar da intuição inicial ser correta para muitos, ainda apresentaram certo conflito devido à colagem, ou seja, sua intuição está associada a um sentimento de dúvida, como coloca o autor.

A segunda questão investigada foi a seguinte: *compare com hipótese que você escreveu no item anterior. Ela se comprova ou não?*

M_1, M_2, M_3, M_5, M_7 e M_{11} registraram e comprovaram suas hipóteses, já que anteriormente haviam registrado que a figura construída possuia apenas um lado. Por sua vez, M_4, M_9, M_{10} e M_{12} não confirmaram suas hipóteses de que a figura possuia dois lados. Também, M_6 que havia anotado que a figura tinha infinitos lados e M_8 que a figura tinha quatro lados.

Podemos perceber aqui intuição antecipatória, outra das classes de intuição sugeridas por Fischbein (1987). A categoria na qual enquadramos as respostas acima comprovou que suas hipóteses nesta atividade foram superiores, se comparadas às outras categorias, pois suas conjecturas apresentaram uma visão preliminar da solução do problema.

Apresentamos o nome da superfície construída: Faixa de Möebius e exploramos sua principal propriedade, a saber, a unilateralidade. Mostramos que uma superfície tridimensional com um único lado e sem fronteiras foi construída a partir de uma figura plana com dois lados ou faces, com fronteiras. Expusemos algumas aplicações e utilizações da faixa, como por exemplo, em correias de carros e na psicanálise.

A terceira atividade consistiu da seguinte proposta: *levante uma segunda hipótese – se a nova superfície, a Faixa de Möebius, for recortada no sentido longitudinal, que tipo de superfície se obtém? Ela é unilateral?*

Feitos os registros nas fichas, verificamos que M_1, M_3, M_8, M_{10}, M_{11}, realizavam esse caminho de forma imaginária, usando sua intuição, para poder levantar suas hipóteses. Houve discussões entre os participantes a respeito da superfície que seria formada. Obtivemos as cinco seguintes categorias de respostas aos questionamentos:

1. uma superfície, mais alongada e estreita: M_1, M_4;
2. uma superfície unilateral: M_5, M_{11}, M_{12};
3. duas superficies: M_3, M_7, M_9, M_{10};
4. figura plana: M_6, M_8;
5. três superfícies semelhantes: M_2.

M_{10} afirmou: “acho que ela se abre formando uma faixa como a inicial, e uma superfície com dois lados”. Notamos que apenas M_1 continuou apresentando uma intuição antecipatória, da mesma forma que apresentou nas atividades anteriores. A intuição antecipatória de M_2, M_3, M_5, M_7 e M_{11} não emergiu nesta questão.

Logo a seguir foi feito o recorte indicado, obtendo uma única superfície em forma de oito e bilateral, como era esperado. A superfície encontrada, com o recorte, não confirma a hipótese feita por M_3, M_7 e M_9, pois registraram que encontrariam duas superfícies ou, por M_6, M_8 e M_{10}, que registraram que a superfície voltaria a ser plana ou, ainda, por M_2 que conjecturou que encontraria três superfícies. Entretanto, com esta atividade os participantes verificaram que, ao recortarem longitudinalmente a faixa obtiveram uma superfície bilateral, diferente da Faixa de Möebius que foi construída inicialmente.

M_1 fez o seguinte relato:

> Nas questões 1 e 2, pude compreender intuitivamente, pois quando tinha 9 anos, um primo estava brincando de mágica, sem compreender o processo que envolvia nos recortes realizados falava: com esta argola, vou recortar e vejamos o que vamos obter. Eu achava que a argola se “desmancharia”, mas formava uma única argola, a seguir fez novamente outro recorte, e obteve duas argolar entrelaçadas. Fiquei intrigada até hoje com esta situação.

A intuição que esta participante apresenta está contida em duas das classes que Fischbein (1987) propôs, a das intuições antecipatórias, já citada anteriormente e, a das intuições conclusivas, uma vez que, na sua infância, já havia tido contato com a faixa. Porém, somente na oficina pode vislumbrar a solução definitiva do problema proposto por seu primo.

Após a realização de outras atividades exploratórias com a Faixa de Möebius, as quais não caberiam para nossos propósitos nesta comunicação, passamos a descrever a pesquisa realizada em sua segunda parte, a saber, com a construção e representação simétrica da Garrafa de Klein. Neste momento da pesquisa os participantes M_9 e M_{12} não estavam presentes.

Entregamos o material a ser utilizado para a construção e solicitamos que marcassem os vértices A, B, A’ e B’ na tira retangular e os pontos médios C e C’ dos lados AB e A’B’, respectivamente, conforme a figura 5.

Figura 5. Tira retangular. Foto da pesquisadora.

Concluídas as marcações pedimos que dobrassem as tiras ao meio e colassem somente os pontos BC’, AC’, B’C e A’C, conforme a figura 6. Notamos que, se fosse colada toda a extremidade e não somente os pontos indicados, a boca da garrafa não teria a entrada.

Figura 6. Garrafa de Klein. Foto da pesquisadora.

Nesta segunda parte da construção da Garrafa de Klein alguns participantes tiveram dificuldades em alinhar e colar os pontos indicados pela investigadora. Após todos concluírem a construção de suas garrafas, apresentamos seu nome e passamos à seguinte questão investigativa: *O que acontece se cortarmos a Garrafa de Klein longitudinalmente ao meio? Formule suas hipóteses nas fichas.*

Notamos que os participantes idealizavam o que aconteceria com o corte. Transcrevemos as hipóteses dos sujeitos presentes na realização dessa atividade, uma vez que, sendo uma pergunta de resposta livre, cada um apresentou sua forma específica de resposta, dificultando uma categorização das mesmas.

M_1: o líquido da garrafa escapará.
M_2: se cortar na linha pontilhada acredito que a garrafa se abrirá.
M_3: se cortar na linha pontilhada vai formar duas Faixas de Möebius.
M_4: acredito que a garrafa irá se abrir.
M_5: longitudinalmente ficará uma superfície unilateral.
M_6: transformasse em duas linhas de Möebius.
M_7: poderá originar uma superfície bilateral.
M_8: se cortarmos longitudinalmente a figura se desmancha.
M_{10}: cortando na linha pontilhada a garrafa vai ficar aberta.
M_{11}: se cortarmos a garrafa na linha pontilhada a figura se dividirá em duas faixas de Möebius.

Registradas as hipóteses, solicitamos que os participantes realizassem o corte e comprovassem, ou não, as mesmas. Apenas M_3, M_6 e M_{11} intuiram que seriam obtidas duas novas superfícies ao cortarmos a Garrafa de Klein longitudinalmente ao meio, como as da figura 7. Esperávamos com esta questão que os participantes conjecturassem que conseguiriam duas novas superfícies distintas com o recorte. Notamos que apenas M_3, M_6 e M_{11} intuiram que seriam obtidas duas peças e, ainda, que fossem Faixas de Möebius.

Figura 7: Faixas de Möebius obtidas a partir do corte da Garrafa de Klein. Foto da pesquisadora.

A intuição percebida pela pesquisadora nas construções de M_3, M_6 e M_{11}, confirma o que afirmam Davis e Hersh (1995). Para esses autores a intuição é consequência na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos.

Podemos perceber aqui que os estudantes têm em mente certa ideia global oriunda do material que os levou à solução do problema objeto da investigação. A esta forma de intuição Fischbein (1999) denomina intuição antecipatória, algumas vezes denominada 'iluminação', pois o que a caracteriza é o esforço que o indivíduo produz para a resolução bem como um sentimento de convicção, de certeza, mesmo sem uma demonstração formal.

Ao finalizarmos esta etapa da pesquisa e que nos proposemos apresentar no artigo, enunciamos a seguinte questão: *as duas peças obtidas na atividade anterior são Faixas de Möebius? Formule suas hipóteses na ficha.*

Nesta atividade, com exceção do participante M_2, todos os outros concluíram que as superfícies obtidas eram faixas de Möebius. A participante M_{11} afirmou "as duas são faixas de Möebius porque imaginei fazendo o trajeto com uma caneta e consigo fazer sem tirar a caneta do papel". Assim, podemos comprovar o que afirmou Leivas (2009), quando o pesquisador afirma que a imaginação, aliada à intuição e à visualização, complementa a tríade fundamental do pensamento geométrico.

Deste modo, atingimos o propósito da atividade, na qual os participantes da oficina deveriam verificar, por meio do recorte, que as duas peças obtidas eram Faixas de Möebius. Ao responder a esta questão exploramos a relação da Garrafa de Klein com a Faixa de Möebius, ou seja, com uma garrafa podemos obter duas faixas.

Resultados e conclusões

Apresentamos neste artigo um recorte de uma pesquisa na qual investigamos sobre intuição envolvendo atividades de Topologia Geométrica, realizadas com alunos de pós-graduação numa instituição brasileira. Particularizamos para analisar as atividades da pesquisa que envolveram Faixa de Möebius e Garrafa de Klein.

Por meio de um questionário final foi possivel analisar a validade da pesquisa realizada em função de que no questionário inicial foi comprobada a ausência quase que total de conhecimentos sobre a área de Topologia, oriunda da formação inicial dos investigados. Os que apontaram já terem estudado alguns aspectos relacionados à Topologia da reta real, entretanto, afirmaram não se lembrarem e, ao final, indicaram não terem ideia de posibilidades de conexão de um conteúdo, tido como de Matemática de nível avançado, estar diretamente ligado à formação inicial de um pensamento geométrico desde a infancia.

Ao serem questionados: *você acredita que as atividades de Topologia Geométrica realizadas na oficina contribuirão para sua vida profissional? Por quê?*, os dados comprovaram que a maioria dos participantes acredita que sim, que as atividades desenvolvidas na oficina contribuirão para a sua atividade profissional e nenhum dos participantes assinalou a alternativa não. Expomos algumas justificativas dos participantes.

M_1: porque as atividades instigam o professor a buscar atividades diferenciadas das comumente apresentadas em sala de aula.
M_3: me deu uma visão mais ampla sobre a geometria. Novos conceitos foram adquiridos e posso levar esses conceitos até os alunos.

M_5: pois foram trabalhados nas atividades conceitos como unilateral, etc. de uma forma prática, onde pode ser trabalho com qualquer aluno.
M_8: acredito que como professores da educação básica devemos mostrar aos nossos alunos esta geometria não euclidiana
M_{11}: Contribuíram muito, acredito que as atividades geraram um novo olhar sobre a geometria.

No olhar e na fala desses participantes podemos notar a importância atribuída às atividades de Topologia Geométrica na sua formação e que foram exploradas durante a oficina. Podemos, também, concluir que a oficina contribuiu para o surgimento de uma nova que visão no ensino da geometria nestes participantes. De acordo com Costa (2005) as novas percepções de formação dos professores, sejam elas inicial ou continuada, não podem mais tratar teoria e prática separadamente como partes estanques do processo de formação e, neste sentido, a oficina vem contribuir na formação dos mestrandos/professores participantes da pesquisa.

Ao serem perguntados: v*ocê pretende partilhar as experiências que teve ao participar da oficina com seus colegas de profissão? Por quê?*, todos os participantes responderam que pretendem partilhar as experiências obtidas com as oficinas, porém com algumas ressalvas daqueles que assinalaram ‘em parte’, cujos argumentos prendem-se à necessidade de aprofundar o assunto, emprego de tempo maior do que para realizar atividades rotineiras e convencionais, insegurança em partilhar novas experiências. Quanto aos participantes que responderam sim, destacamos a justificativa de M_4: ‘É muito importante compartilhar os conhecimentos, apesar de algumas pessoas serem resistentes é muito bom, pois algum dia será aproveitado de alguma forma as experiências’.

Como todos os participantes são professores da escola básica perguntamos: *você acredita que haveria melhoria na aprendizagem em Geometria se os conteúdos de Topologia Geométrica fossem inseridos nas grades dos cursos de mestrado e/ou licenciatura?*

A maioria respondeu que sim, apenas M_{11} respondeu ‘em parte’ e registrou a seguinte justificativa: ‘Acredito que são importantes e fazem parte da Geometria. Porém causam algumas dúvidas, e isso compromete a aprendizagem caso não haja um bom embasamento teórico e metodológico’. Dentre os que responderam que sim, exibimos a seguir algumas justificativas:

M_3: certamente haverá melhoria, mas acredito que a própria geometria euclidiana deveria ser trabalhada com mais detalhes nesses cursos, o aluno sai sem preparo das universidades.
M_4: os conteúdos só são vistos de forma estática e através da arte de decorar, com a topologia isto mudaria sim.
M_5: claro, pois a nossa graduação tem muitas lacunas, os conteúdos (a maioria) não tem uma parte prática e uma ligação de uma disciplina com a outra.
M_8: não se admite continuarmos estudando apenas a geometria de Euclides, precisamos conhecer novos conceitos.
M_9: trazendo conteúdos de Topologia Geométrica estaríamos fornecendo um novo olhar a um conteúdo por vezes tido como complicado, ou uma nova forma de ver a própria Geometria.

Ao analisar estas justificativas notamos a importância da inserção de conteúdos de Topologia Geométrica nas grades de cursos de licenciatura e/ou mestrado, na opinião destes participantes.

Concluirmos indicando que as atividades realizaram proporcionaram verificar que a maioria dos investigados apresentou intuição antecipatória, uma das classes de intuição proposta por Fischbein (1987). Isso vem corroborar o que Davis e Hersh (1995) afirmam de que temos intuição não por memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas, com a manipulação de objetos físicos e por meio da resolução de problemas. Comprovamos também que uma das principais contribuições da oficina foi o novo olhar sob a forma de ensinar a Geometria e um novo conhecimento além da Geometria Euclidiana.

Referências e bibliografia

Adair Mendes Nacarato. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática***.** v. 9, n. 9-10, p. 1-6.

Alda Judith Alves-Mazzoti. (1999). O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira.

Brasil, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. (1999). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura***.** Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2011.

Efrain Fischbein. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Efrain Fischbein. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38: 11-50.

Jean Piaget; Bärbel Inhelder. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

José Carlos P. Leivas (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. (Tese de Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 294 p.

Menga Lüdke; Marli André. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Philip J. Davis; Reuben Hersh. (1985). *A experiência matemática*. tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves.

Reginaldo R. da Costa. (2005). *A formação continuada do professor de matemática a partir da sua prática pedagógica*. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

Reuben Hersh. (1997). *What is Mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Richard Courant; Herbert Robbins. (2000). *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda.

Theoni Pappas. (1995). *Fascínios da Matemática: a descoberta da matemática que nos rodeia*. Lisboa: Editora Replicação.

Zoltan P. Dienes; Edward W, Golding. (1977). *Exploração do espaço e prática da medição*. São Paulo: E.P.U.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Enseñanza de las matemáticas. Plan de Estudios 2011

Edith **Arévalo** Vázquez
Normal "Miguel F. Martínez"
México
edith.arevalov@gmail.com

Resumen

Durante décadas y en diversos niveles educativos, las clases de Matemáticas se han caracterizado porque la participación más visible y directa la tiene el profesor, al trabajar la asignatura como una cátedra compleja, abstracta y difícil de aprender. En atención a ello, en México, al igual que en otros países, en los últimos tiempos se han implementado diversos Planes de Estudio, con la finalidad de mejorar formas de enseñanza y desarrollar competencias para la vida de los educandos; pretendiendo asimismo estar acorde con los requerimientos de una sociedad globalizada. La presente investigación pretende identificar si la enseñanza que ofrecen los profesores en la escuela primaria y particularmente en primer grado, se ha modificado atendiendo al enfoque didáctico propuesto desde el Plan de Estudio 2011. Para su estudio se ha hecho uso de un método mixto; obteniendo información que ha posibilitado conocer el estado actual sobre la enseñanza de docentes en servicio.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje matemático, profesores, Plan de Estudios.

Introducción

A través de los tiempos y en diversos contextos, el tratamiento de las matemáticas ha sido valorado por un elevado sector como complejo y difícil de aprender; observándose conforme avanza la escolaridad de los estudiantes, un distanciamiento cada vez más profundo en el que difícilmente se puede incidir para lograr auténticos aprendizajes. Asimismo la propia literatura y diversas investigaciones en el área han comunicado que a través de los años, la enseñanza en los espacios áulicos, se ha basado en la transmisión de conocimientos para ser memorizados por los educandos; paradigma pedagógico que ubica al docente frente a sus estudiantes dirigiendo el discurso y a éstos últimos como sujetos cuya actividad esencial es la escucha (Freire, 2007; Lee, 2010; Rico y Lupiáñez, 2008).

Modelo que sin duda, ha prevalecido en determinas prácticas cotidianas y en diferentes niveles educativos; en las que la participación más visible y directa la tiene el docente, al trabajar la asignatura como una cátedra en la que se estudian algoritmos, conceptos y definiciones prescritas y ya elaboradas desde la teoría matemática, los cuales sólo es cuestión de reproducir.

Con la finalidad de mejora, la Secretaría de Educación Pública (SEP) del país, ha implementado en las últimas décadas diversos Planes de Estudio en Educación Básica, con el propósito de renovar la enseñanza y así, elevar la calidad de la educación ofrecida por el sistema pretendiendo dotar a los educandos de mejores competencias para la vida, y estar acode con los requerimientos de una sociedad globalizada.

Plan de Estudios 2011

El actual Plan de Estudios que comprende a los niveles de Preescolar, Primaria y Secundaria, se fundamenta en un paradigma constructivista, en donde se considera al estudiante como centro del proceso educativo, intentando promover una formación matemática que le posibilite enfrentar y resolver problemas en su quehacer cotidiano a través de la adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la promoción de actitudes que este proceso formativo le proporcione. Se requiere necesariamente la participación activa del docente y los alumnos, en un contexto donde se plantea el aprendizaje como un proceso activo de construcción y de re-construcción del conocimiento (SEP, 2009).

Queda manifestado a través de su enfoque didáctico, la promoción del planteamiento de situaciones problemáticas para que los estudiantes los resuelvan con sus propios recursos, que discutan en grupo y analicen sus procedimientos y resultados con la finalidad de que expresen sus ideas y las enriquezcan con las opiniones de sus compañeros de clase. Con la pretensión de que se pongan en juego las cuatro competencias matemáticas a desarrollar a través de la educación básica, como son: *Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, y Manejar técnicas eficientemente,* tal como se enuncia en el Plan de Estudios 2011.

Con respecto a la acción del docente, se expresa que el actuar con apego a la metodología propuesta, asegura en buena medida cambios significativos en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Su actividad central, es decir la enseñanza, habrá de ir mucho más allá de la transmisión de conocimientos y ser concebida como “la creación de las condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes” (Cantoral y Farfán, 2008, p.25); de ahí la relevancia que ofrece su desempeño, al ser valorado como un factor clave en este proceso.

Ya no será mejor porque “enseñe bien”, su labor es ahora la de diseñar y facilitar tareas didácticas en las que sus estudiantes actúen empleando su potencial conforme a los aprendizajes esperados desde los Programas de Estudio, con el firme propósito de que lleguen a ser matemáticamente competentes. Que se vea no como la única persona que sabe lo que hay que hacer en la clase (Isoda, 2011). Su función de mediación supone ocuparse de la enseñanza y ayudar a sus estudiantes en su proceso de aprendizaje para que progresivamente se hagan cargo de él; ofreciendo los espacios para que piensen, resuelvan con sus propios recursos actividades planteadas, comenten con libertad y discutan formas de solución a las cuales llegaron.

Esta perspectiva, compromete al docente a seguir transformando y mejorando su práctica día a día. Le implica modificar sus paradigmas sobre lo que representa abordar esta asignatura en los espacios educativos, dejar de lado la postura rígida y cuadrada, en la que se sostiene un riguroso control de lo que acontece en la clase (SEP, 2009b); en la que se dicta una cátedra con base a definiciones y "resolución" de expresiones que distan mucho de ser realmente situaciones de aprendizajes.

Ante los citados retos, la presente investigación se centra en el estudio sobre la enseñan de esta asignatura en la escuela primaria, particularmente desde el primer grado de educación primaria (niños de 6 años en promedio); en la que se pretende dar respuesta a ¿Cómo organizan y desarrollan los profesores de primer grado de primaria la enseñanza de las matemáticas, conforme al Plan de Estudios 2011, para lograr aprendizajes en sus estudiantes? Planteando como objetivo "Identificar las formas en las que los profesores organizan y desarrollan la enseñanza, para favorecer los aprendizajes de sus alumnos conforme al Plan de Estudios 2011". Buscando con ello describir los tipos de planeaciones que elaboran los profesores, las formas de enseñanza que desarrollan, y los tipos de instrumentos y producciones que utilizan para recuperar los aprendizajes de sus estudiantes en las clases; en virtud de que la enseñanza no se limita a lo que sucede en clase. Involucra toda una gama de actividades, que van desde la preparación y sus implicaciones (Fase preactiva/*antes*), la relación con los alumnos (Fase interactiva/*durante*) y una valoración de los resultados obtenidos (Fase posactiva/*después*), tal como lo refiere Saint-Onge (1997). La primera hace referencia al momento previo a la intervención didáctica, en la que se consideran los procesos de pensamiento del profesor, la planeación de la clase y las expectativas que tiene respecto de los resultados a alcanzar. La segunda comprende la interacción que se genera entre el profesor y sus estudiantes al interior del aula, y la tercera considera los resultados alcanzados, en el contexto de lo ocurrido en las dos fases que le anteceden.

La investigación se centra en primer grado debido al efecto e impacto que tendrá lo aprendido desde los primeros años en la escuela, en la vida académica futura de los alumnos, quienes continuarán interactuando durante ocho años más por lo menos, con las matemáticas escolares. Investigadores como Rico y Castro (1997) y Chamorro (2003) han manifestado que la etapa infantil es de vital trascendencia para la educación matemática posterior del educando; ya que en ella se van formando los conceptos básicos o primarios y los primeros esquemas matemáticos conceptuales sobre los que posteriormente, se construirá toda una serie de aprendizajes cada vez más abstractos y complejos. Si estos esquemas básicos están mal formados o son frágiles, pueden llegar a impedir o a dificultar, aprendizajes posteriores. Razón por la que desde los primeros años, la escuela tiene la responsabilidad de encauzar acciones de enseñanza efectiva, para que los estudiantes evolucionen hacia procesos más abstractos de pensamiento.

El Método

La presente investigación es de tipo descriptivo. A lo largo de su desarrollo se promovieron diferentes rutas en la búsqueda de información, y se aplicaron instrumentos que dieron cuenta del uso de los dos enfoques para el estudio, como lo son el cuantitativo y el cualitativo; ya que a través de una serie de hallazgos se ha demostrado que ambos enfoques en conjunto, enriquecen una investigación.

La recolección de dato se hizo con base a la revisión de documentos y materiales escritos, tales como las planeaciones efectuadas por los profesores sobre algunas clases de matemáticas y las producciones de los alumnos para recuperar los aprendizajes en cada una de ellas. Asimismo se utilizó la observación cualitativa en ambientes naturales (Hernández, 2006), con apoyo de videos de clases y una guía de observación, para el estudio de la enseñanza de los profesares. Fueron seleccionados porque son elementos esenciales del proceso de la enseñanza y el aprendizaje, y debido a que existe de manera natural una estrecha vinculación entre ellos; su tratamiento posibilitó el conocimiento sobre cómo el profesor organizó y desarrolló su quehacer docente en el aula.

La guía de observación está conformado por veinte categorías, mismas que fueron estructuradas conforme a la revisión de los fundamentos pedagógicos y metodológicos para abordar esta asignatura en primer grado en educación primaria, los cuales están expresados en los documentos normativos editados por la Secretaría de Educación Pública del país. De igual manera se recuperaron y contrastaron otras más de Arévalo (2007) y Zabala (2000) utilizadas en sus respectivas investigaciones. Para su tratamiento y análisis, la información se concentró en matrices de datos (profesor/categorías), efectuando registros descriptivos en cada una de las celdas en torno a lo identificado en las observaciones y videos.

Con respecto al estudio de las planeaciones se elaboró una rúbrica, que posibilitara evaluar de manera más objetiva dichos documentos, en virtud de que es una herramienta que se estructura con la finalidad de medir el nivel y la calidad de una tarea o actividad. Los rubros se integraron en apartados que hacen referencia a *datos generales de la institución, información sobre la asignatura y tema, tipo y cantidad de actividades, ajustes al programa, recursos didácticos/bibliográficos y evaluación*. Se hizo una descripción de los criterios a evaluar, así como el puntaje otorgado a cada uno, efectuando posteriormente el conteo, para finalmente hacer un concentrado de los mismos. Con respecto a las producciones de los alumnos, se elaboró una tabla de cotejo como un mecanismo de revisión, conteniendo indicadores prefijados para el reconocimiento del logro o de la ausencia de los elementos a considerar como necesarios en estas evidencias de trabajo en el aula. Se consideraron aspectos como el *tipo de recurso/instrumento, tipo de producción, tipo de actividad(es), organización para su resolución, tiempo de dedicación para su solución y momentos para la revisión*; concentrando los resultados en una tabla para su conteo.

Para la estructuración de los mismos se tomaron como referencia, diversas fuentes bibliográficas y materiales de apoyo que integran el acervo que debe poseer el docente para organizar su enseñanza, ente ellos Plan de Estudios, Programa de Matemáticas y Libro para el Maestro. Fueron elaborados a partir de las propuestas y sugerencias de los autores revisados en el marco teórico de este trabajo y validados por un grupo de experto en la materia.

La muestra para la investigación está integrada por doce profesores que llevaron a cabo su práctica docente en primer grado de educación primaria, de diez escuelas primarias públicas y dos institutos particulares, ubicadas en los municipios de Monterrey, Santiago y Cadereyta en el estado de Nuevo León. Se buscaron escuelas pertenecientes a diferentes contextos y población, así como con diversas condiciones de trabajo. Una institución es escuela de Tiempo Completo y de tipo rural, la cual trabaja doble jornada en horario de 8:00 am a 5:00 pm. Los institutos laboran de 8:00 am a 2:00 pm. El resto de las escuelas trabajan un turno, seis en matutino (de 7:30 am a 12:30 pm) y tres en vespertino (de 1:00 pm a 6:00 pm); una de ellas es escuela rural tridocente, el profesor observado atendió a alumnos de primero y quinto grado, otra más ofrece educación a niños de comunidad indígena (otomíes procedentes del sur del país). Tres escuelas cuentan con alta demanda educativa y reconocimiento social. El número de alumnos por grupo de diez instituciones oscila entre 28 y 35 niños. En la escuela rural tridocente, el maestro trabajó con 3 alumnos y un instituto con 20.

Se integró con sujetos voluntarios debido al tipo de investigación, ya que en ella se involucraron procesos dinámicos e interactivos dentro de espacios áulicos y donde se requirió que los participantes, sobre todos los docentes, mostraran disposición para ser observados y colaboraran con una actitud abierta ante la misma. Diez son maestros de base y dos de contrato, con una antigüedad que oscila entre los 3 y 26 años en el servicio docente. Dos son de sexo masculino y 10 de femenino; ya que es una práctica recurrente en el país, ubicar a profesoras en el primer ciclo de escolaridad (1º y 2º grados) de la educación primaria. Para garantizar el anonimato y la confidencialidad de los participantes, todos fueron identificados bajo el rubro de *profesor,* evitando mencionar su sexo.

Resultados

A manera de síntesis se presentan los siguientes resultados preliminares con una interpretación más de tipo cualitativo, esperando en la siguiente etapa de la misma, ofrecer resultados lo suficientemente explícitos y profundos en torno a cada uno de los instrumentos recuperados para el análisis de la información.

Sobre las Planeaciones de clase

Toda vez recuperados y concentrados los resultados en torno a las planeaciones, se expresa que el 90% de los profesores presentaron un formato de planeación al momento de la observación. Los menos, le consideran como un trámite burocrático solicitado desde la dirección de la escuela al no efectuarla en tiempo y forma para cada una de sus clases.

Se recuperaron ocho formatos diferentes con organización propia para cada uno, debido a que las instituciones establecen la estructura que se da a este instrumento de trabajo. En la información incluida se destaca: Datos generales de la institución, Nombre de la asignatura, Bloque, Eje temático, Ámbito de aprendizaje, Aprendizajes esperados, Competencias, Actividades, Recursos Didácticos y Evaluación. Algunos más organizan la información en “Componentes de las Competencias”, en ellos se pretenden desglosar los Contenidos, Procedimientos y Actitudes. La información correspondiente a estos aspectos, fue recuperada del *Programa de Estudio 2011*, *Guía para el Maestro* y del *Libro de Texto de Matemáticas* para primer grado.

La mayoría de las planeaciones incorporó un listado de entre tres y seis actividades a desarrollar, tanto por el profesor como por los alumnos. No todas dan cuenta de que las actividades propuestas consideran al estudiante como centro del proceso y tampoco reflejan la promoción de nuevos aprendizajes y la construcción de los mismos; se remiten más a ejecuciones mecánicas, ejercitaciones y procesos guiados por el profesor. No hay una secuencia lógica en las actividades expresadas en algunas de ellas.

Dentro de las actividades que propusieron, se identifican con reducida claridad, los tres elementos que se solicitan considerar prioritariamente desde los documentos normativos para la planeación de contenidos y la generación de un verdadero ambiente de aprendizaje en el aula, como lo son *actividad de estudio, pensamiento matemático de los alumnos y gestión de la clase* (SEP, 2009)*;* se pronosticaría por consiguiente (durante su implementación), un limitado logro de competencias matemáticas a las cuales se aspira en el grado. Dentro de las recomendaciones expresadas en el Plan de Estudios, se espera que la planeación sea útil, concisa y que posibilite la mejorara del desempeño docente, características identificadas en la minoría de ellas.

Todos registraron en sus planeaciones el uso de material didáctico ya fuera visual o manipulable, pese a que en el desarrollo de algunas clases no se observó su tratamiento, tanto por el profesor como por los alumnos. Con respecto a la evaluación, la mayoría registró en este rubro, el uso de fichas de trabajo, de ejercicios en el cuaderno o libro de texto y la observación del desempeño de los alumnos; aunque para la valoración de este último caso, no se incorporaron a las planeaciones instrumentos como rúbricas, listas de cotejo o escalas estimativas. La bibliografía registrada en todos los formatos sólo hace referencia a los materiales de apoyo editados por la SEP. El 20% de las planeaciones tienen firma y sello del director de la institución; es decir, que fueron requeridas, previamente al trabajo de aula. Ello implica suponer que fueron valoradas y aprobadas por los directivos de la institución, ya que ninguna presentó registro sobre observaciones/sugerencias con la finalidad de ser mejoradas.

Sobre la enseñanza de los profesores

La cantidad de clases observadas a cada profesor osciló entre 3 y 4. Se efectuaron durante cinco meses del ciclo escolar. Las observaciones fueron agendadas en función de los tiempos establecidos por los profesores, y conforme al horario de cada una de sus instituciones. En ellas se identificaron categorías recuperadas de la revisión efectuada al enfoque didáctico de los materiales a los que ya se hizo referencia. Entre ellas se destacan:

- **Tiempo de la clase**: La duración fue muy variada, osciló entre 35 y 80 minutos. Las más de las clases tuvieron una larga duración, propiciando distracción en los niños al momento de realizar ejercicios, aburrimiento, somnolencia, desorden al transitar por el aula y conversaciones entre compañeros en determinados momentos de la sesión. Se invirtió excesivo tiempo en algunas actividades, lo cual generó desinterés en la mayoría de los alumnos; sin embargo, el profesor no atendió estas visibles señales para optimizar los tiempos con la finalidad de favorecer la enseñanza y generar en consecuencia mejores aprendizajes. Pocos profesores organizaron y distribuyeron los tiempos de la clase en función de los aprendizajes esperados y de los propósitos del tema a tratar, tal como se sugiere en las recomendaciones del Libro para el Maestro y Guía para el Maestro.

- **Inicio de Clase**: La mayoría de los profesores buscaron iniciar sus clases con una actividad atractiva para los alumnos, una pregunta generadora, un relato sobre él o algún compañero, preguntas sobre alguna situación cotidiana o un breve juego que despertara su interés y contextualizara el contenido a abordar . Esta parte de la clase fue cuidada en la mayoría de las sesiones observadas.

- **Actividades de aprendizaje**: En tres clases, los profesores trabajaron solamente con una actividad; la mayoría organizó de dos a cuatro actividades, aunque en su planeación se incluyeron algunas más. Entre ellas se han de citar la implementación de juegos sugeridos para el grado como *El cajero, La Tiendita, El Dominó, Los dados y Atínale,* trabajados tanto de forma grupal como en pequeños equipos; contestar en grupo ejercicios presentados en el pizarrón; resolver ejercicios manipulando algún material concreto, contestar actividades del libro de textos; hacer uso del material recortable del libro; resolver ejercicios en los cuadernos en lo individual, armado de rompecabezas, entre otras. En un instituto se organizaron equipos para la venta de productos en el recreo, con la finalidad de reunir fondos para beneficencia de una institución de salud; en ese espacio, los alumnos tuvieron la oportunidad de hacer uso de sus conocimientos matemáticos durante la compra/venta. Se identificaron sólo algunas actividades que favorecieron el aprendizaje de los alumnos, pese a que el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el tratamiento de la matemáticas consiste en utilizar *secuencias de situaciones problemáticas* que despierten el interés de los estudiantes y los involucren en la reflexión, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a formular argumentos que validen sus resultados, implicando justamente los conocimientos y las habilidades que se pretenden desarrollar (SEP, 2011b).

- **Material didáctico/manipulable**: Hubo limitado uso de material didáctico por parte del profesor, como dibujos o carteles con imágenes. Asimismo se observó que los alumnos utilizaron en algunos momentos material manipulable/concreto. Entre los manipulados se pueden citar monedas del material recortable del libro de texto, el Tangram, fichas de colores, corcholatas para el conteo, regletas, productos de uso diario para compra-venta, dados, ábaco, “El caminito”; pese a que dentro de las recomendaciones expresadas en el Libro para el Maestro de Matemáticas se hace referencia a que en los primeros grados de educación primaria, la mayor parte de los contenidos matemáticos se deben introducir con actividades que impliquen el uso de material concreto, pues la forma en que los alumnos utilizan dichos materiales determina, en gran medida, la posibilidad de comprender/aprender el contenido que se trabaja (SEP, 2000).

- **Participación de los estudiantes**: Los más de los profesores ofrecieron pocos espacios para que los alumnos participaran de forma activa en clase. Su intervención giró en torno a responder preguntas cerradas, participar en juegos matemáticos, resolver ejercicios en el pizarrón y trabajar en binas para resolver problemas. Poco se socializó en torno a los procesos de solución de las situaciones planteadas, más se focalizó sobre los resultados obtenidos.

- **Tipo de preguntas**: Fueron limitadas las preguntas que llevaban a los alumnos a contestar con base a la reflexión sobre una situación problemática o bien expresar sus argumentos, las más llevaban a contestar de forma afirmativa o negativa o bien una palabra para completar la frase manifestada por el docente. Difícilmente se generaron preguntas en las aulas que condujeran a momentos de reflexión en voz alta. Se esperaría encontrar preguntas “de demanda de información al profesor, de construcción de significados compartidos con el profesor y con otros alumnos, y de acompañamiento de procesos de reflexión en voz alta”, tal como lo sugieren Planas (2009), para promover mejores y mayores aprendizajes matemáticos en clase.

- **Trabajo en equipo**: Limitado trabaja en equipo consistente en participación durante las actividades en torno a un juego. Tres aulas disponen de mesas de trabajo como mobiliario para los alumnos, en donde se comparte el espacio de cuatro a seis estudiantes, situación que facilitó la comunicación entre ellos, pero sin ser valorado totalmente como trabajo en equipo. Los profesores subutilizaron esta forma de organización, pese a que está incorporada dentro de las recomendaciones expresadas desde el enfoque metodológico, con la finalidad de generar aprendizajes sociales. Este tipo de trabajo es importante porque ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus opiniones y enriquecerlas con las de sus iguales; explicando sus razonamientos, intercambiando y contrastando ideas ante situaciones planteadas (SEP, 2009).

- **Participación del profesor**: Todos tuvieron una amplia "participación" durante las clases. La mayor parte del tiempo comunicaban verbalmente a sus estudiantes, bien para dar instrucciones, para dar definiciones, formas de solución, solicitar respuestas concretas, indicar cómo resolver problemas, anotar respuestas en el pizarrón expresadas por ellos o por sus estudiantes, llamar la atención, coordinar juegos; sin embargo, algunos intentaban ser acompañantes del proceso de construcción de saberes matemáticos. Como se identifica, uno de los momentos más difíciles de su hacer profesional y con base a su experiencia, es saber seleccionar el momento oportuno de su intervención de tal manera que no sustituya el trabajo de los alumnos (SEP, 2000).

- **Observa el trabajo efectuado por los alumnos**: La mayoría de los profesores transitaban por las filas, con la finalidad de observar lo que realizaron los niños durante la ejecución de actividades o ejercicios; sin embargo, en limitados momentos se observó retroalimentación por parte de los profesores hacia lo que efectuaban sus estudiantes, o planteamiento de cuestionamientos que los llevaran a una verdadera reflexión sobre lo realizado para buscar nuevas formas de solución o corregir desaciertos. Para algunos profesores, la observación constituyó una fuente valiosa de información que les facilitó la toma de decisiones en cuanto a la modificación de actividades, ajustes en el tratamiento de las actividades conforme a los intereses de los niños y reajustes en los tiempos de clase. Asimismo, mantuvieron una actitud observadora respecto a las reacciones de sus alumnos.

- **Creación de ambiente adecuado de clase**: No todos los profesores propiciaron un ambiente agradable de trabajo en el que los alumnos trabajaran con confianza y seguridad. La mayoría dio excesiva formalidad al tratamiento de las matemáticas en el aula, solicitando a sus alumnos en diversos momentos de la clase prestar atención a las explicaciones, permanecer callados, observar al frente, indicar en silencio para participar; las más de las actividades limitaban la participación activa de los estudiantes, pese a que la edad de los alumnos y el tipo de contenidos a adquirir, requieren la creación de entornos de aprendizajes contextualizados y más prácticos para generar mejores condiciones de aprendizaje. Algunos, favorecieron el ambiente de trabajo haciendo uso de una comunicación efectiva, gestionando su clase de Matemáticas como espacio de comunicación y de relación con unos objetivos pedagógicos determinados, haciendo uso de una comunicación más horizontal y entre iguales(Sánz, 2005); en ellos, en consecuencia, los alumnos manifestaron mayor apertura e interés ante las actividades propuestas.

- **Permite que resuelvan con sus propios recursos**: Los más de los profesores dieron la oportunidad de resolver situaciones problemáticas a sus estudiantes, con diferentes recursos/procedimientos. En el caso de los problemas aditivos, hacían referencia a encontrar la solución a través del conteo, uso de fichas, trazo de dibujos/palitos o algoritmos, atendiendo las recomendaciones expresadas desde el enfoque metodológico para el tratamiento del eje temático *Sentido numérico y pensamiento matemático* (SEP, 2011c).

- **Socialización de los aprendizajes**: Limitadas oportunidades para que los estudiantes comunicaran a sus pares las formas de solución utilizadas o bien los resultados obtenidos, con la finalidad de construir y reconstruir procesos. En algunos casos se solicitaba a algunos alumnos manifestar en voz alta las soluciones o bien al existir dificultad entre los estudiantes para encontrar respuestas pertinentes, los profesores finalizaban expresando al grupo, las soluciones de los mismos; situación que presenta desapego conforme a lo propuesto desde el enfoque para el tratamiento de las matemáticas en la escuela primaria, en donde se expresa que "vale la pena insistir en que los estudiantes sean quienes encuentran las soluciones… compartan sus ideas, en las que quizá habrá acuerdos y desacuerdos, pero la finalidad es que se expresen con libertad y aprendan" (SEP, 2009, p. 79).

- **Organización de los espacios y mobiliario de trabajo**: La mayoría de las aulas contaban con reducido espacio para el tránsito libre, debido a la cantidad de alumnos por grupo y las dimensiones de las aulas. Se observó el tradicional acomodo de alumnos en rígidas filas con sillas individuales; como ya se refirió, sólo tres aulas disponen de mesas de trabajo, en donde se comparte el espacio entre cuatro y seis alumnos, situación que propicia interacción entre ellos, sin ser aprovechada para promover el trabajo colaborativo.

- **Uso de tecnología**: Sólo dos aulas cuentan con proyector, mismo que fue utilizado para proyectar ejercicios a resolver o bien para mostrar imágenes ampliadas de las páginas del libro de texto y ser contestadas de forma grupal. En uno de los institutos observados, los alumnos utilizaron su computadora personal durante las sesiones para resolver ejercicios propuestos por la profesora o para contestar los propuestos en las ligas a las que tenían acceso desde la plataforma de la institución; en esta actividad los alumnos se concretaron a contestarlos, sin generarse una confrontación de procedimientos, sólo de resultados. En este espacio educativo no se trabaja con libro de texto, se sustituye por la computadora personal que los estudiantes llevan diariamente al aula.

Sobre los instrumentos/recursos para recuperar los aprendizajes

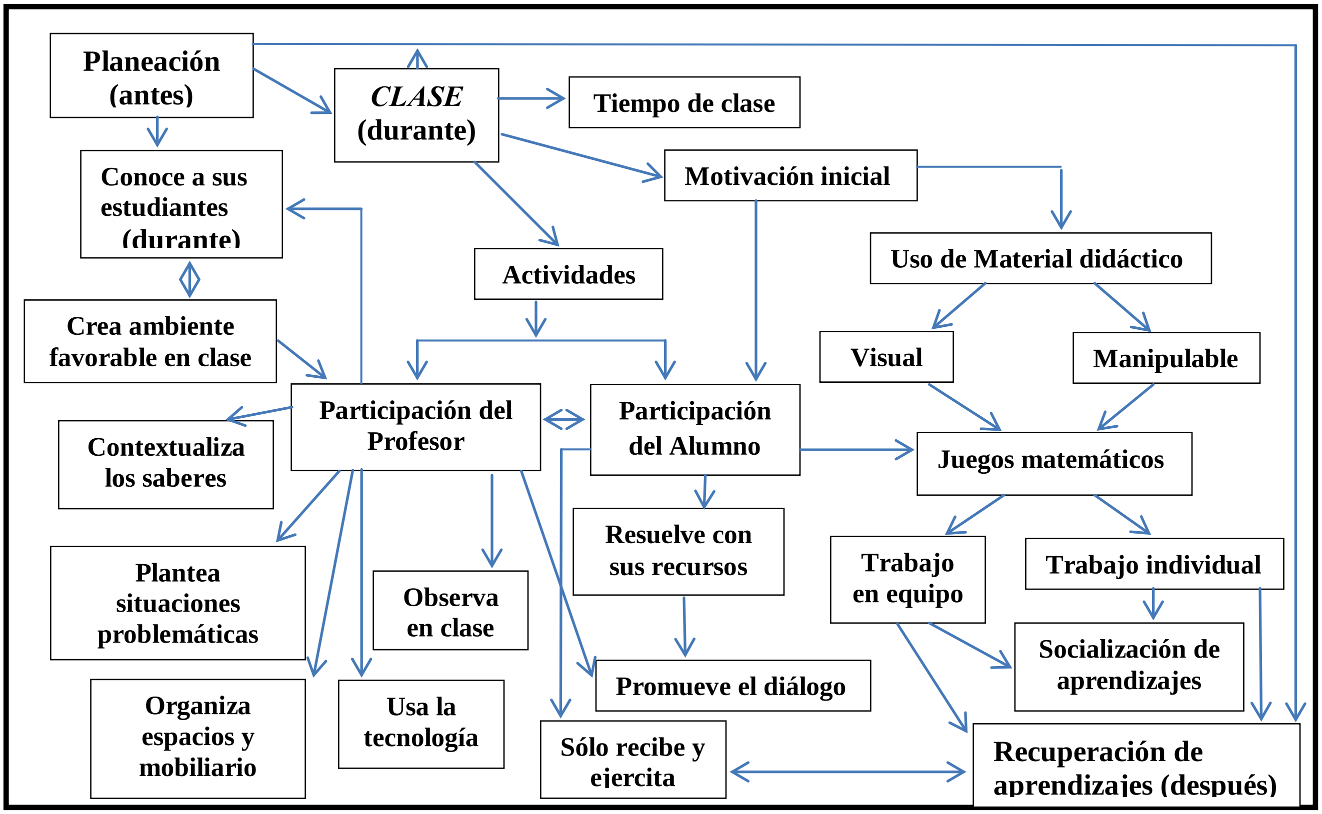
Otro de los componentes importante en el proceso educativo es la recolección de información sobre el estado de los saberes de los alumnos, la cual debe proporcionar al profesor elementos para la toma de decisiones en pro de la mejora de la calidad de su enseñanza y en consecuencia de los aprendizajes de los estudiantes. Asimismo, las producciones de los éstos últimos, deben dar cuenta tanto de los resultados derivados de las estrategias de enseñanza empleadas, así como de lo que aprendieron y de las dificultades a las que se enfrentaron.

En los casos observados, la mayoría hizo uso frecuente del *cuaderno especial para Matemáticas* (de cuadro) en el que se trabajó durante todo el ciclo escolar; en él se efectuaron mecanizaciones, comparación de cantidades, trazo de imágenes y números, series numéricas, copiado de ejercicios que se realizaron colectivamente, trazos de números y figuras geométricas, entre otros. Los más de los profesores hicieron énfasis sobre la formalidad de la presentación de las producciones, requiriendo que los estudiantes registren la fecha, el valor del mes, nombre de la actividad y el ejercicio a resolver. La cantidad de alumnos generó una revisión acelerada de los mismos, debido a que se efectuó en tiempos de la clase.

Las Fichas de trabajo elaboradas por el docente, fueron otro de los instrumentos que se utilizaron durante las clases. En ellos, los alumnos resolvieron ejercicios como descomposición de cantidades, colorear objetos, colorear monedas y billetes para formar cantidades, unir puntos siguiendo una serie numérica, completar espacios vacíos con números, algoritmos para la suma y la resta y pocos problemas de aplicación; en concreto, se identificaron ejecuciones rígidas en torno a acciones mecánicas. La mayoría de las fichas aplicadas no fueron revisadas en clase, el profesor las solicitó para ser revisadas en otros espacios. Algunos docentes optaron por integrarlas al cuaderno de Matemáticas.

El Libro de texto fue contestado recurrentemente de forma grupal, donde el profesor daba lectura a la introducción al tema, a las instrucciones y las situaciones planteadas en cada actividad, solicitando posteriormente a un alumno, manifestar en voz alta la respuesta para que el resto de los compañeros tomaran nota en el espacio correspondiente. Este tipo de práctica habilitó la distracción y desinterés de los alumnos por participar en el reforzamiento y la construcción de nuevos aprendizajes; se invirtió asimismo un alto porcentaje del tiempo de la clase en su resolución. Práctica que fue recurrente en la mayoría de las clases observadas, dejando de lado la recomendación que ofrece el Libro para el Maestro de Matemáticas al referir que es necesario dar al Libro de texto la función de material de enseñanza, el cual debe ser usado como una culminación de una serie de actividades organizadas por el maestro, y realizadas por el alumno, con el apoyo del profesor (SEP, 2000). Asimismo se recomienda que para que los alumnos puedan comprender y resolver las lecciones del libro, sea necesario que previamente se trabaje en actividades donde se haga uso de material concreto.

La mayoría de los instrumentos fueron revisados en clase, invirtiendo tiempo de la misma, revisándose de forma convencional correcto (√) o incorrecto (x). Pocas ocasiones se cuestionó a los niños sobre cómo se resolvió para llegar a la solución, sobre todo en las situaciones donde se detectó algún desacierto; sólo se solicitó al alumno en la mayoría de los casos, regresar a su lugar a corregir. Estas formas de “recuperar saberes” y las formas de hacer la revisión de los mismos, no dan total cuenta de los logros alcanzados por cada uno de los alumnos; sin embargo, se esperaría que los profesores en tiempos y espacios posteriores hicieran una valoración sobre ellos y otros recursos más, con la finalidad de identificar con claridad, fortalezas y áreas de oportunidad en los temas abordados en el tratamiento de las matemática escolares.



Toda vez presentado este primer encuentro con los instrumentos utilizados para la organización y análisis de los datos, se muestra en la *figura 1* las interrelaciones tan estrechas que se guardan unas categorías con respecto a las otras, dejando claro el impacto que se genera desde la planeación, la puesta en marcha y hasta la conclusión de la misma.

A manera de Conclusión

Pese a la puesta en marcha desde el 2011 del Plan de Estudios actual, se ha de reconocer que las formas de enseñanza de la mayoría de los profesores observados, independientemente del contexto, del tipo de organización de las instituciones, de la antigüedad en el sistema y el tipo de contratación, reflejan escaso apego a lo establecido desde el enfoque metodológico propuesto. Sus prácticas recurren frecuentemente a transmisión de información y control casi estricto sobre lo que sucede en el aula, dejando pocas oportunidades a que los estudiantes compartan ideas y las enriquezcan con las opiniones de sus compañeros, resuelvan problemas, desarrollen habilidades para argumentar y comuniquen e interpreten ideas tanto las propias como las de sus pares.

Este tipo de enseñanza conduce de manera natural hacia una comunicación unidireccional la mayoría de las veces, sin posibilidad de réplica por parte de los estudiantes. El alumno sigues siendo un receptor de información y un ejecutor de acciones que el docente indica, generándose por consiguiente, una enseñanza instructiva. Los paradigmas positivistas y conductistas siguen orientando muchas de sus prácticas cotidianas, mezcladas contradictoriamente con los discursos derivados de los cambios realizados en planes y programas de estudio que promueven enfoques constructivistas, reflexivos y críticos.

Asimismo, es importante y necesario trabajar desde los primeros grados con apego a los fundamentos pedagógicos y metodológicos propuestos, pues ello garantizará sin duda, mejores resultados en los subsiguientes ciclos escolares; ya que las primeras experiencias que vivan los alumnos al estudiar matemáticas en la escuela primaria traerá como consecuencia el gusto o el rechazo, la creatividad para encontrar soluciones o la pasividad para escuchar y reproducir patrones, la búsqueda de explicaciones o bien la sujeción de éstos al criterio de su profesor como ha sucedido durante décadas en los espacios educativos.

Por otra parte, no es suficiente efectuar una planeación cuidando las formas en que se presenta, el profesor debe elegir actividades para favorecer que sus alumnos pongan en juego los conocimientos que poseen o bien que generen nuevos aprendizajes; para ello se requiere de un conocimiento profundo sobre los aspectos involucrados desde el antes y el duarte de la clase. Se concluye que las planeaciones reflejan un desapego a las formas requeridas de enseñanza conforme al Plan de Estudios actual, pues no se planea con base a situaciones verdaderas de aprendizaje, como se requiere para el desarrollo de competencias matemáticas. Sin embargo, son visibles algunos buenos intentos de ciertos profesores. Se identifica a la planeación como una de las áreas más débiles del trabajo del maestro; lo que se refleja de manera natural en el desarrollo de las clases.

El tipo de recursos/instrumentos/ejercicios utilizados por los profesores para recuperar saberes, los tiempos dedicados a la revisión de los mismos y la cantidad de alumnos deja poca posibilidad al maestro de reflexionar sobre los procesos y formas de pensamiento que los estudiantes utilizaron en clase para aprender, dejándole incertidumbre quizá sobre si se aprendió o no en su momento. De acuerdo a lo observado podría concluirse que siguen preocupados más el resultado correcto que los procesos de aprendizaje. Se esperaría que se hiciera uso de otras formas de valoración que involucraran tanto procesos cualitativos como cuantitativos.

Finalmente, habría que considerar que los cambios en el diseño curricular no tendrían efecto en el aula a menos que fueran acompañados de un conocimiento profundo sobre los fundamentos pedagógicos y didácticos del enfoque actual para el tratamiento de las matemáticas, un conocimiento sobre los procesos cognitivos por los que atraviesan los niños de esta edad y un cambio en la concepción sobre su nuevo rol de docentes, concibiendo y concretando así, formas diferentes de enseñanza a las que cotidianamente han realizado a lo largo de su profesión.

Bibliografía y Referencias

Arévalo, E. (2007). Evaluación del dominio de propósitos, contendidos y enfoques del Plan de Estudios 1993 de los egresados de la Normal “Miguel F. Martínez”, Centenaria y Benemérita. Generación 2002 - 2006. Tesis de Maestría en Escuela de Graduados ENSE NL. México

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (2008). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. México: Trillas

Coll, C. (2009). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. México: Siglo XXI Editores

Chamorro, M. Del C. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: PEARSON

Freire, P. (2007). *¿Extensión o comunicación?* México: Siglo Veintiuno Editoriales

Hernández, R. (2006). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill

Imbernón, F. (1994). *La formación y El desarrollo Professional Del profesorado.* Barcelona: Graó

Isoda, M. (2011). ¿Cómo podemos desarrollar La comunicación en El aula? Recuperado el 20 de octubre de 2012, de www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/.../8.Masami_Isoda_Japan.pdf.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata

Planas, N. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior*. España: Editorial GRAÓ

Rico, L. & Castro, E. (1995). *Estructuras matemáticas y su modelación.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano

Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico, pero ellos… ¿aprenden?* España: Bilbao

Sánz, G. (2005). *Comunicación efectiva en el aula*. España: Editorial GRAÓ

SEP. (2000). *Libro para el Maestro. Matemáticas Primer grado. Educación Básica, Primaria*. México: SEP

(2009a). *Plan de Estudios 2009. Educación Básica, Primaria*. México: SEP

(2009b). *Programa de Estudio 2009. Primer grado de Educación Primaria*. México: SEP

(2011a). *Libro de texto. Matemáticas Primer grado de Educación Primaria*. México: SEP

(2011b). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica, Primaria*, México: SEP

(2011c). *Programa de Estudio 2011. Guía para el Maestro, Educación Básica Primaria Primer* grado. México: SEP

Zabala, A. (2000). *La práctica educativa. Cómo enseñar*. España: Editorial Graó

Especialização a distância para professores de matemática: um projeto SEEDUC/CECIERJ/UFF

Sandra Maria Nascimento de **Mattos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Universidade Aberta do Brasil
Brasil
smnmattos@gmail.com

Celso José da **Costa**
Universidade Federal Fluminense
Universidade Aberta do Brasil
Brasil
correiocelso@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho analisamos os desdobramentos e impactos do curso de especialização para a qualificação dos professores que ensinam matemática da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, Brasil, na modalidade a distancia. O foco das análises incide sobre a formação em serviço e a implantação do curso, como política pública do governo estadual, visando melhorar a qualidade do ensino de matemática e dos professores. Na análise dos dados fica evidente que os professores buscam a formação continuada por necessidade de qualificação profissional, melhoria da prática docente e do processo de ensino e de aprendizagem, por meio da utilização de recursos tecnológicos, foco do curso, como nova forma de ensinar e de aprender. Desse modo, os resultados apontam que o curso proporciona repensar a prática docente, dinamizando-a, e contextualizar conteúdos de matemática na cultura do aluno, enriquecendo e contribuindo para a melhoria da educação no Estado.

Palavras chave: especialização a distancia; professores de matemática; formação continuada; política pública, recursos tecnológicos.

Introdução

Atualmente a busca pela qualificação profissional dos professores, em especial os de matemática, é interesse tanto dos professores como das instituições de ensino. A Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC), Brasil, implantou um Currículo Mínimo, que descreve competências e habilidades por ano/bimestre, para preparar e facilitar a operacionalização do cotidiano escolar e preparar os alunos para as avaliações de larga escala. Após a implantação deste currículo mínimo, a SEEDUC e a Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro (CECIERJ) em convênio com as Universidades do Consórcio CEDERJ, propuseram um projeto que contemplasse o preenchimento de lacunas do conhecimento e a qualificação dos professores para a utilização deste currículo no cotidiano da sala de aula, por meio de diferentes ações, que os tornem autônomos. No que diz respeito aos professores de matemática, este projeto, além de elevar o nível de conhecimento dos conteúdos matemáticos, visa também melhorar a prática pedagógica.

Existe pressão das políticas públicas, através dos sistemas de avaliação de massa, desenvolvidas pelo governo brasileiro, para que a qualidade do ensino, bem como a qualificação dos professores, melhore e adéque-se às rápidas transformações do processo de trabalho e de produção. Entretanto, esta qualificação precisa ser pensada de acordo com a prática que o professor vai desenvolver em sala de aula. Este foi o objetivo para a implantação do projeto referido acima e um desafio, aliando a prática docente à efetiva condição de aprender, para consagrar à pesquisa um lugar de destaque. Além disso, estimular o professor para, com a pesquisa e o uso da tecnologia, transformar o ensino e a aprendizagem.

Não poderia ser pensado melhor projeto. Os professores estavam querendo uma proposta efetiva, com qualidade corroborada por instituições renomadas, o que fica evidenciado nos resultados encontrados. Este iniciativa deu oportunidade aos professores qualificarem-se, inovar e renovar a prática em sala de aula.

A relação teoria e prática é um aspecto que compromete as mudanças e transformações que possam ocorrer na atuação do professor. Focar um destes eixos significa deixar de fora uma parte importante da formação profissional inicial ou continuada. Historicamente a formação docente foi construída privilegiando um ou outro eixo. Sendo a formação um processo que se constitui em estreita relação entre teoria e prática, esta dicotomia precisa ser revista e analisada, para que possa haver uma reflexão crítica por parte de todos os envolvidos este processo. É necessário pensar que professor está sendo formado e se este professor está sendo preparado para reproduzir ou para transformar a realidade em que atua.

A preocupação com a teoria não implica relegar a prática a um segundo plano e nem tão pouco esquecer a teoria em favor de uma prática. Existem contribuições de ambas para a formação docente. As reflexões sobre as mudanças que ocorrem na formação docente reforçam a ideia que o professor está atrelado, de um lado a uma teoria sistematizada e reprodutora e por outro lado, a uma prática que não condiz com a realidade em que atua. Entretanto, o professor luta para modificar esta situação, porque mudando este contexto consegue mudar a própria prática.

No desenvolvimento deste trabalho será tratado o projeto em si, bem como, será explanado sobre a formação e prática do professor de matemática, no sentido de ressignificar a atuação docente cotidianamente. Por último, os resultados serão desenvolvidos, tomando por base o referencial teórico e as respostas adquiridas por meio do questionário. Na conclusão fica constatado que o projeto assume características importantes para a qualificação profissional dos professores de matemática e para a melhoria da qualidade de ensino e de aprendizagem.

O projeto SEEDUC/CECIERJ/UFF

O projeto de formação continuada para professores de matemática da rede estadual de ensino da SEEDUC em convênio com a Fundação CECIERJ e a Universidade Federal Fluminense (UFF) tem como objetivo promover a formação continuada de professores de Matemática para a melhoria do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) no Estado do Rio de Janeiro, Brasil. O projeto incide sobre a formação em serviço dos professores que ensinam matemática para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio. Portanto, um projeto sobre o ensino baseia-se em um “diálogo fecundo com os professores, considerados não como objetos de pesquisa, mas como sujeitos competentes que detêm saberes específicos ao seu trabalho” (Tardif, 2002, p.230).

A SEEDUC implantou o Currículo Mínimo, que descreve competências e habilidades por ano/bimestre, para preparar e facilitar a operacionalização do cotidiano escolar e preparar os alunos para as avaliações de larga escala. Entretanto, este novo currículo não está incluído na prática pedagógica dos professores nas escolas. Assim, no projeto de formação continuada de professores, a temporalidade do Currículo Mínimo de Matemática foi colocada como eixo central de um Curso de Aperfeiçoamento. Neste período, os professores cursistas foram estimulados a complementação da carga do aperfeiçoamento para a realização de uma Pós-graduação *Lato Sensu.*

Mais que qualquer outra profissão, a docência se traduz hoje como tendo a necessidade de uma formação continuada dos professores, para o enfrentamento das dificuldades encontradas por eles e por seus alunos. Segundo Lelis

> só uma cultura de cooperação, de parceria entre as escolas, o Estado, as universidades e os organismos existentes no seio da sociedade civil, que respeite os instrumentos didáticos dos quais os docentes dispõem no espaço escolar, poderá contribuir para a gestão dos problemas [...] (Lelis, 2009, p.60).

A proposta do projeto foi desenvolvida, inicialmente, em um curso de aperfeiçoamento, que coube à Fundação CECIERJ a realização de disciplinas, com carga horária total de 180 horas, obedecendo rigorosamente à sequência dos conteúdos do Currículo Mínimo da rede estadual de ensino. Foram oferecidos 4 módulos de 40 horas, na modalidade semipresencial, além de uma disciplina sobre Questões Curriculares em Matemática, de 20 horas. Estes módulos foram desenvolvidos sob o diagnóstico de lacunas do conhecimento, seguido de capacitação em conteúdo e de oferta de um plano de trabalho com um conjunto de elementos para dinamizar o processo cotidiano da sala de aula. O professor foi acompanhado por uma rede de discussão, debatendo os desafios do ensino e da aprendizagem do módulo trabalhado bem como o plano de trabalho sugerido.

A etapa seguinte, complementar para o curso de especialização Lato Sensu, ficou a cargo da UFF, que após a defesa da monografia, versando sobre o processo de ensino e de aprendizagem vivenciado pelo professor e seus alunos, certificará os professores com o título de Especialista em Ensino de Matemática. Esta etapa é desenvolvida em parceria com a Universidade Aberta do Brasil (UAB), através do Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (Lante), na modalidade a distancia.

A possibilidade da entrada das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) no curso de especialização vem legitimar Lessard & Tardif (2009, p.268) quando afirmam que "as TIC parecem completamente inevitáveis e os docentes devem aprender a utilizá-las para fins pedagógicos" e ainda quando afirmam que as TIC "podem ser aliadas quando tornam acessíveis a todos informações de qualidade, permitem a pesquisa, a criação e a interação". Essa abertura às novas tecnologias pode transformar a prática docente, tornando-a mais adequada com o desenvolvimento de atividades mais autônomas, possibilitando a assimilação e a incorporação dos conteúdos pelos alunos de forma prazerosa e significativa.

Formação e prática dos professores de matemática

É um desafio para os professores de matemática refletir sobre sua formação e sua prática como forma de gerar a autonomia dos alunos. Esta reflexão deve ser crítica e fazer uma análise criteriosa - ratificando saberes e competências e, ao mesmo tempo, retificando outros - é exigência de um modelo educativo centrado na qualificação profissional do professor e na melhoria da aprendizagem dos alunos. Tardif (2002, p.230) afirma que "um professor de profissão não é somente alguém que aplica conhecimentos produzidos por outros", mas, é antes, "um sujeito que assume sua prática a partir dos significados que ele mesmo lhe dá".

Ensinar é um processo implícito ao processo de aprender e ambos são inseparáveis da pesquisa. Freire (2003, p.29) anunciava essa premissa: "Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino". Para isso, não é necessário que o professor se torne um pesquisador, ou seja, aquele que se consagra a pesquisa científica, mas que adquira competências para fazer do ato de ensinar em um ato de aprender. O professor conquista sua autonomía, adquirindo o que está sendo produzido. Além disso, ele passa a compartilhar seus saberes e suas experiências aos demais profesores. Desse modo, o professor consegue transformar e desenhar sua própria prática.

Para Fiorentini o professor assumindo esta postura passa a se constituir:

> [...] um *professor interativo* que procura acompanhar (recebe, contribui e troca) o desenvolvimento de seu campo profissional e científico (no caso, a Educação Matemática); que procura participar do debate público sobre as inovações curriculares; que participa coletivamente de grupos ou projetos de estudo dentro ou fora da escola; é a aquele que tenta buscar, no outro e com o outro, novas experiências e saberes da profissão. (Fiorentini e Costa, 2002, p.319-320).

Consequentemente, não basta socializar o conhecimento, nem trata-se de construir um conhecimento novo, trata-se de reconstruir o conhecimento, partindo do que já existe, com o compromisso de fazer o aluno aprender. O importante é propiciar ao aluno saber pensar e como afirmava Paulo Freire (2003) levar o aluno a pensar certo, pois permite que ele aprenda a fazer certo. E para pensar certo é necessário que haja uma prática docente que aceite o novo preservando o velho, que valida o novo.

Tanto Freire (2003) como Tardif (2002) concordam que existem saberes que proporcionam um agir com seres humanos e que estes saberes são produzidos socialmente, incorporando a própria prática como um saber individual. Portanto, seus saberes estão servindo-lhe para que constitua-se modelado no e pelo trabalho. Há, portanto, que refletir criticamente sobre a prática em um movimento dinâmico, dialético e dialógico entre o saber fazer e o pensar sobre o fazer, pois, saber implica assumir a condição de ensinar.

O professor precisa reconhecer que sua tarefa não é simplesmente transmitir o saber sistematizado, mas, implica estabelecer diferentes maneiras de difundir o conhecimento, entendendo a prática pedagógica como um processo, que vai construindo-se na e pela ação perpassada pela relação entre teoria e prática. Assim, de acordo com André et al:

> [...] o trabalho docente é entendido como a práxis que constitui a atividade profissional. O professor, ao mesmo tempo que desenvolve a sua atividade profissional, contribui para que mudanças ocorram ao seu redor e, simultaneamente, reconstrói-se pelas experiências. Nesse processo, ele não só constitui a sua identidade, mas também colabora com ações, valores e práticas para a constituição identitária dos estudantes que o circundam. (André et al, 2010, p.126)

E de acordo com Dominicé:

> Devolver à experiência o lugar que merece na aprendizagem dos conhecimentos necessários à existência (pessoal, social e profissional) passa pela constatação de que o sujeito constrói o seu saber ativamente ao longo do seu percurso de vida. Ninguém se contenta em receber o saber, como se ele fosse trazido do exterior pelos que detêm os seus segredos formais. A noção de experiência mobiliza uma pedagogia interativa e dialógica. (Dominicé, 1990, pp. 149-150).

A teoria sistematizada, produzida por diferentes estudiosos, embasa e dá suporte a prática do professor. Entretanto, há uma teoria reconstruída pelo próprio professor, que traz consigo as experiências vividas pessoal e durante sua trajetória acadêmica e profissional. Assim, ao entrar em contato com a teoria, o professor precisa ressignificá-la para o contexto em que vai atuar.

Ao ressignificar a teoria, o professor permite que esta teoria tenha relevância para os alunos. Consequentemente, a prática é a ação do professor, com a finalidade de modificar o conhecimento para transformar a realidade que atua. Exercer a docência exige preparo, comprometimento com a melhoria constante do ensino para torná-lo eficaz. A aquisição do aluno é influenciada pela forma que o docente organiza e gerencia sua aula, incluindo planejamento das tarefas, clareza das explicações subsidiadas por base teórica consolidada e ressignificada. A aquisição eficaz passa pela oportunidade de práticas compartilhadas entre as teorias e um processo reflexivo do docente sobre sua ação.

O que não se pode fazer é isolar a prática da teoria e nem a teoria da prática. Ambas caminham de mãos dadas. A separação entre teoria e prática impregna a ação pedagógica do professor, impedindo-o de compreender a complexidade que é o ato de ensinar e de aprender. Se o professor der prioridade à teoria, toma o conhecimento sistematizado como algo imutável, definido e consolidado, incapacitando-se da compreensão dos fenômenos humanos, que transcorrem em um contexto social e que são produzidos historicamente. Se o professor der prioridade à prática, enfatiza a ação, tornando-a espontânea e sem refletir na e sobre esta prática, consolida-a como reprodutora da realidade existente. Esta prática torna-se vazia e sem compromisso com as mudanças que ocorreriam se houvesse interrelação entre a teoria e a prática.

O discurso do prático a respeito de sua prática faz com que ele fique sempre contestando o que é escrito sobre a prática, como se só ele soubesse ou tivesse as condições de falar sobre a prática. A prática é um meio de o pesquisador procurar resolver alguns problemas, só assim, poderá ocorrer mudanças na sala de aula. O professor só se sente recompensado quando o aluno obtém resultados satisfatórios, que lhe traz reconhecimento. Assim, ele reconhece que seu trabalho, realizado na prática e pela prática é algo que somente ele pode discutir e achar saída.

O professor deve passar da função solitária a de acompanhante do aluno. Não é tanto passar os conhecimentos, mas ajudar o aluno a encontrá-los, organizá-los e manejá-los, tornando a prática aliada da teoria.

Pérez Gómez afirma que:

> O profissional competente atua refletindo na ação, criando uma nova realidade, experimentando, corrigindo e inventando através do diálogo que estabelece com essa mesma realidade. Por isso, o conhecimento que o novo professor deve adquirir vai mais longe do que as regras, fatos, procedimentos e teorias estabelecidas pela investigação científica. (Pérez Gómez, 1997, p.110).

Assim, o professor precisa assumir a função de ser o dinamizador e o mediador da incorporação dos conhecimentos pelo aluno.

Resultados

Foi realizado um survey, no Google docs à população existente em um curso de especialização à distância para professores de matemática, realizado pelo Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (Lante), da Universidade Federal Fluminense (UFF) em convênio com a Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro (CECIERJ) e a Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC), Brasil. O Objetivo deste survey foi verificar a aceitação do curso por estes professores e analisar o desenvolvimento da formação em serviço.

Dos 168 professores que responderam ao questionário, 68 são professores do nono ano do ensino fundamental e 100 são professores do primeiro ano do ensino médio, de escolas da rede estadual de educação do Estado do Rio de Janeiro. A título de identificação desses professores foi utilizado referências de P1 a P168. Cabe ressaltar que os professores tinham a possibilidade de dar mais de uma resposta às perguntas propostas.

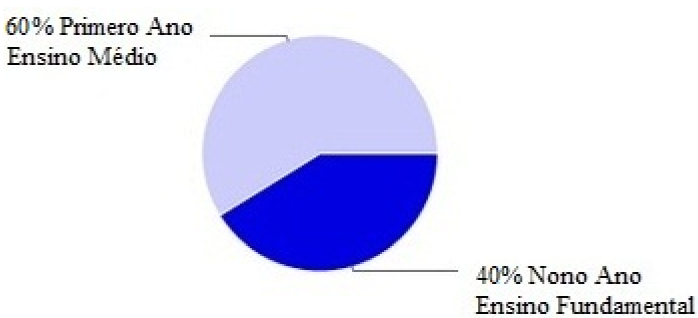


Figura 1. Ano que lecionava em 2011.

O tempo de serviço dos professores pesquisados mostra que 32% estão no início da carreira. É a primeira fase em que Gonçalves (como citado em Nóvoa, 2000, p.164) afirma que “oscila entre uma luta pela sobrevivência, determinada pelo choque do real, e o entusiasmo da descoberta de um mundo novo”. Huberman (como citado em Nóvoa, 2000) afirma que é a fase da entrada na carreira, em que a sobrevivência traduz o tatear constante, que é a confrontação inicial com a complexidade da situação profissional.

Na segunda fase (estabilidade) Huberman (como citado em Nóvoa, 2000, pp.39-40) designa pelo "estádio do comprometimento definitivo", acompanhado pela pertença ao grupo profissional e de competência pedagógica crescente. Fase também proposta por Gonçalves (como citado em Nóvoa, 2000), que vai dos 5 anos aos 7 anos, podendo chegar aos 10 anos de profissão, estão 43% dos professores, que já adquiriram certa confiança na atividade docente. Por esta margem de experiência profissional fica constatado que a formação continuada é uma necessidade, da qual esses professores se constituirão e terão um repertório pedagógico seguro. Observando o gráfico vemos que 75% dos professores se encontram nestas duas fases.

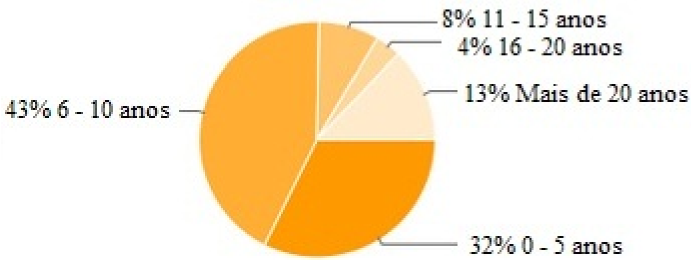


Figura 2. Tempo de serviço.

A grande maioria dos professores que procuram a formação continuada sente a necessidade de buscar novas formas de ensinar e de proporcionar o aprendizado dos alunos. Dos professores pesquisados 25% já têm outra especialização.

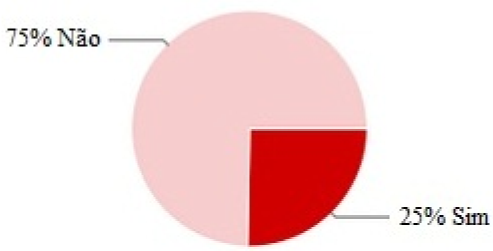


Figura 3. Outra especialização em educação.

Constatamos que 98% desses professores fariam outros cursos de especialização pela UFF/UAB, comprovando a necessidade de qualificação profissional e a busca incansável para tornar a prática mais dinâmica, contextualizada e agradável para os alunos.

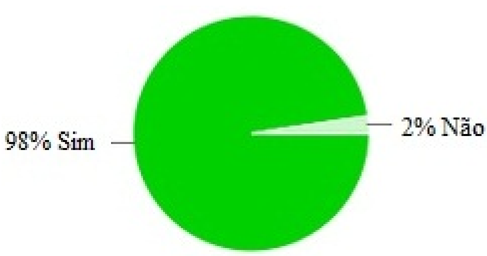


Figura 4. Faria outro curso de especialização pela UFF/UAB.

Estes dois itens citados na figura 3 e 4 corroboram com Freire (2003, p.92) quando afirma que:

> O professor que não leve a sério sua formação, que não estude, que não se esforce para estar à altura de sua tarefa não tem força moral para coordenar as atividades de sua classe. [...]. O que quero dizer é que a incompetência profissional desqualifica a autoridade do professor.

Na análise dos motivos que levaram os professores a fazer a especialização foi mencionado por 123 professores a qualificação profissional, o que equivale cerca de 73% dos entrevistados. Melhorar a prática docente foi a resposta de 69 professores, equivalendo cerca de 41% dos entrevistados. 41 professores responderam que foi a melhoria do processo ensino e aprendizagem, cerca de 24% dos entrevistados. Constatamos como Tardif (2002, p.234) que "o trabalho dos professores de profissão deve ser considerado como um espaço específico de produção, de transformação e de mobilização de saberes e, portanto, de teorias, de conhecimento e de saber-fazer específicos ao ofício de professor."

Podemos constatar isto nas seguintes respostas de alguns dos professores entrevistados:

P1: Aprender sobre como analisar, classificar e trabalhar com novas tecnologias, além de melhorar o meu grau de instrução.

P10: Procurar um aperfeiçoamento, para enriquecimento de minha prática pedagógica.

P35: (a) Atualizar minha prática de ensino da matemática escolar, (b) Conhecer métodos de ensino diferentes dos que utilizava e (c) Atualização cultural.

Temos também que 17 professores responderam que foi o crescimento profissional. Isso equivale cerca de 10% dos entrevistados. Cabe ressaltar que no tema crescimento profissional foram incluídas as categorias "crescimento profissional", "melhoria salarial" e "enquadramento funcional". Como podemos observar no gráfico abaixo:

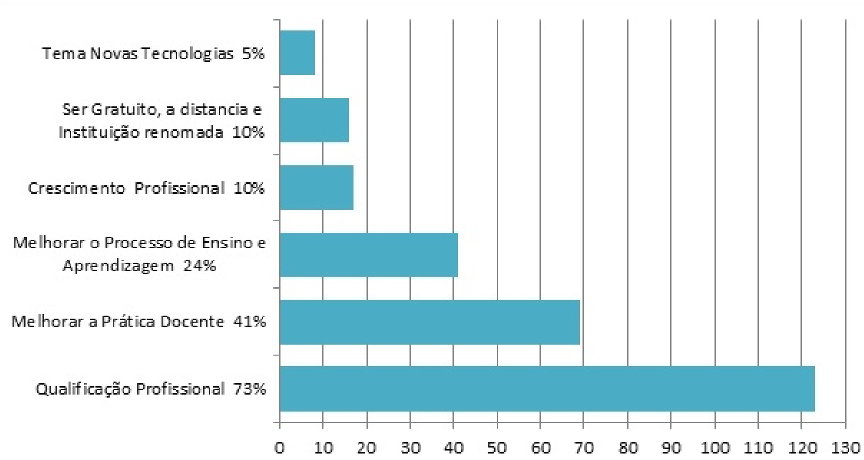


Figura 5 - Qual o motivo que o levou a fazer a especialização?

Na análise a respeito do que o curso mudou na prática profissional 49% dos entrevistados, ou seja, 83 professores responderam que passaram a utilizar recursos tecnológicos para desenvolver conceitos matemáticos. O que podemos constatar nas seguintes respostas de alguns dos entrevistados:

P16: Melhorou as minhas aulas usando as Tics adequadamente.

P47: Eu desejava muito incluir nas minhas aulas o uso das tecnologias para torná-las mais atrativas e não sabia como.

P157: Foi o aperfeiçoamento na parte tecnológica para o ensino de Matemática!

Corroborando com Imbernón (2006, p. 17) quando afirma que: “aprender para pôr em prática uma inovação supõe um processo complexo, mas essa complexidade é superada quando a formação se adapta à realidade educativa da pessoa que aprende”. Esta formação desenvolvida por meio do curso de especialização tornou-se significativa e útil aos professores, pela maneira de adaptação à realidade e pela capacidade de colocá-la em sala de aula com práticas habituais.

Além disso, os professores voltaram-se para a prática docente, pois, 26% dos entrevistados (43 professores) responderam que tornou a prática mais dinâmica, 30% dos entrevistados (51 professores) responderam que passaram a buscar novas formas de aprender e de ensinar, 18% dos entrevistados (31 professores) responderam que passou a repensar a prática. O que fica evidenciado nas seguintes respostas:

P24: A maneira de conduzir as aulas, a minha didática está sendo modificada.

P40: Hoje procuro ministrar aulas mais dinâmicas focando o resultado final. Procuro introduzir as atividades diferentes e que possam chamar mais atenção do aluno. Tento trazer aulas mais próximas do cotidiano do aluno utilizando recursos tecnológicos, sempre que possível.

P109: Estou preparando aulas mais motivadoras, melhorando assim a minha prática de ensino.

Bem como, 8% dos entrevistados (13 professores) responderam que ficaram motivados a pesquisar, 5% dos entrevistados (8 professores) responderam que ajudou na elaboração do planejamento e 4% dos entrevistados (7 professores) responderam que ajudou a contextualizar o conteúdo. Perpassando tudo isso, 8% dos entrevistados (13 professores) responderam que foi a troca de experiências com os colegas que propiciou essa mudança. Como podemos observar no gráfico abaixo:

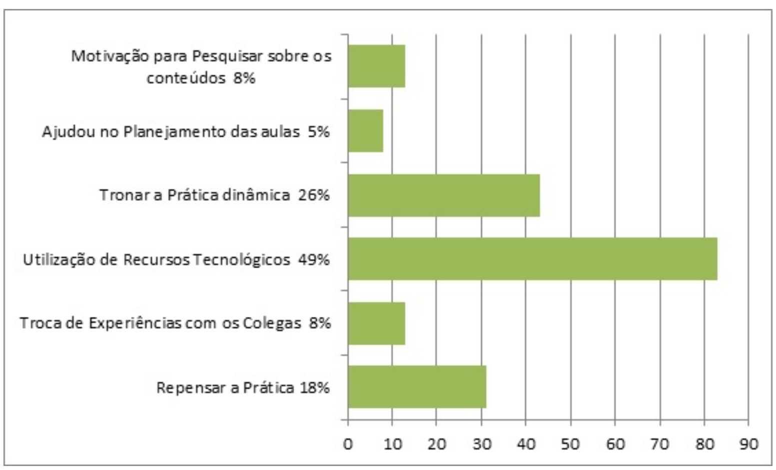


Figura 6 – O que o curso mudou na sua prática profissional?

De acordo com Imbernón:

> Em uma sociedade democrática é fundamental formar o professor na mudança e para a mudança por meio do desenvolvimento de capacidades reflexivas em grupo, e abrir caminho para uma verdadeira autonomia profissional compartilhada, já que a profissão docente precisa partilhar o conhecimento com o contexto. (Imbernón, 2006, p.18).

Isto significa maior comprometimento com a dinâmica do seu trabalho. Implica constituir-se de competências, habilidades e qualidades que se constroem e reconstroem cotidianamente em sala de aula.

Na análise a respeito da importância da iniciativa do projeto SEEDUC/RJ em convênio com a Fundação CECIERJ e a UFF/UAB para a formação continuada dos professores do Estado, 147 professores (cerca de 88% dos entrevistados) responderam que foi a oportunidade de qualificação, 68 professores (cerca de 40% dos entrevistados) responderam que foi contribuir para a melhoria da educação no Estado e 9 professores (cerca de 5% dos entrevistados) deram respostas que não atenderam a pergunta. Como podemos observar no gráfico abaixo:

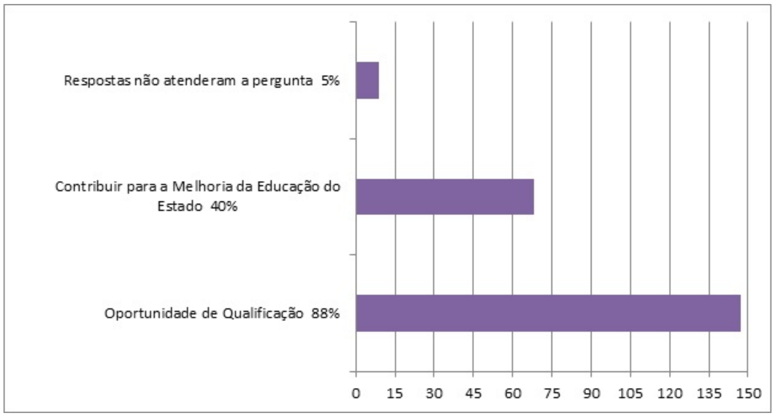


Figura 7 – Qual a importância da iniciativa do projeto SEEDUC em convênio com a Fundação CECIERJ e a UFF/UAB para a formação continuada dos professores do Estado?

Isto pode ser constatado através das respostas a seguir:

P8: Acredito que esta iniciativa tenha sido fundamental para a melhora da prática pedagógica dos professores do estado do Rio de Janeiro, pois proporcionou aos professores a oportunidade de inserir recursos tecnológicos em suas aulas e para muitos que não tinham muita intimidade com o computador e com a tecnologia, a oportunidade de aprender a lidar com esta nova ferramenta.

P18: No meu ponto de vista, a formação continuada veio, não só como um projeto a mais, mas sim como uma forma de reflexão para os professores, mudança na prática pedagógica, crescimento profissional. A formação foi e está sendo excelente!!!!

P44: Uma ótima iniciativa, pois facilitou muito a vida de todos nós profissionais que não temos muito tempo para aulas presenciais e além de tudo nos deu a chance de aprendermos a ensinar de modo diferenciado, através de todos os recursos disponibilizados. No meu ponto de vista excelente iniciativa!!

P53: Acho que tal iniciativa foi um grande estímulo para os profissionais, pois a partir de tais disciplinas que tivemos durante esse período, nós professores tivemos oportunidade de assistir ao crescimento dos alunos que tiveram o privilégio de ter um professor mais atualizado, dinâmico dentro de uma aula de matemática. O que era muito penoso passou a ser prazeroso. Sem falar na experiência que nós professores, de diversos colégios, pudemos adquirir uns com os outros através dos fóruns e discussões com os Tutores. Atualmente, sinto-me uma profissional da área de Educação muito mais consciente e preparada em relação à disciplina Matemática.

A aceitação do projeto ficou comprovada, conforme figura abaixo, quando a grande maioria dos professores do curso, isto é, 99% dos entrevistados, disse que indicaria o curso para outros professores.

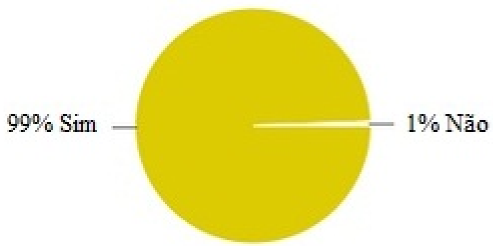


Figura 8. Indicação do curso para outros professores.

Conclusões

A formação continuada é foco da atenção dos governantes e das políticas públicas. Implementar cursos de aperfeiçoamento e de especialização são propostas das mais diferentes instituições, o que requer um rigor na escolha desta formação, por parte dos professores. Entretanto, quando esta mobilização parte da secretaria de educação de um Estado, com respaldo de instituições renomadas e confiáveis esta escolha tem efeito catalisador, no sentido de produzir reação e aceitação, pela anuência da própria secretaria do Estado, facilitando a entrada no curso de aperfeiçoamento e posterior entrada na especialização.

Nas análises realizadas sobre as respostas obtidas por meio da pesquisa com os professores cursistas ficou evidenciado que o curso possibilita a qualificação profissional, permitindo e possibilitando a utilização de novos recursos na prática docente, uma necessidade constatada pela grande maioria dos entrevistados. Essa mudança da prática implica comprometimento, não só com o ensino realizado em sala de aula, bem como, com a melhoria da qualidade da educação do Estado.

Dinamizar a prática docente torna essencial respeitar os saberes dos alunos que são construídos socialmente, bem como entender que estes alunos têm competências para aprender os conteúdos matemáticos de forma diferenciada e atrativamente construídos. A análise aponta para a necessidade de buscar novas formas de ensinar e de aprender, partindo inicialmente da proposta da SEEDUC e instituições conveniadas, para tornar o professor de matemática autônomo e seguro de suas atividades pedagógicas.

Em suma, o projeto de aperfeiçoamento, e posterior especialização, desenvolvidos pela SEEDUC e instituições conveniadas são de suma importância para a melhoria de qualidade da formação dos professores de matemática, bem como, para a melhoria da qualidade do ensino no Estado. Portanto, pensar em Educação requer iniciativas como esta, que necessita ser expandida e desenvolvida nos diferentes Estados e cidades brasileiras.

Referências bibliográficas

André, M.E.D.A., Almeida, P.C.A., Hobold, M.S., Ambrosetti, N.B, Passos, L.F. & Manrique, A.L. (2010). O trabalho docente do professor formador no contexto atual das reformas e das mudanças no mundo contemporâneo. *RBEP*, 91(227), 122-143.

Dominicé, P. (1990). *L'histoire de vie comme processus de formation*. Paris: Édition L'Harmattan.

Fiorentini, D. & Costa, G.L.M. (2002). Enfoques da formação docente e imagens associadas ao professor de matemática. *Contrapontos*, 2(6), 309-324.

Freire, P. (2003). *Pedagogia da autonomia*: *saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Gonçalves, J.A.M. (2000). A carreira das professoras do ensino primário. In Nóvoa, A. (org.), *Vidas de professores* (pp. 141-169). Porto: Porto.

Huberman, M. (2000). O ciclo de vida profissional dos professores. In Nóvoa, A. (org.), *Vidas de professores* (pp. 31-61). Porto: Porto.

Imbernón, F. (2006). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. São Paulo: Cortez.

Lelis, I. (2009). A construção social da profissão docente no Brasil: uma rede de histórias. In Tardif, M. & Lessard, C. (Org.), *O ofício de professor: história, perspectivas e desafios internacionais* (pp. 54-66). Rio de Janeiro: Vozes.

Lessard, C. & Tardif, M. (2009). As transformações atuais do ensino: três cenários possíveis na evolução da profissão do professor? In Tardif, M. & Lessard, C. (Org.), *O ofício de professor: história, perspectivas e desafios internacionais* (pp. 255-277). Rio de Janeiro: Vozes.

Pérez Gómez, A.I. (1997). O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional. In: NÓVOA, A. (org.), *Os professores e sua formação* (pp. 93-114). Lisboa: Dom Quixote.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Rio de Janeiro: Vozes.

Tardif, M. & Lessard, C. (2005). *O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas.* Petrópolis: Vozes.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Estrategias cognitivas para resolver problemas matemáticos en alumnos de Profesorado en Enseñanza Básica

María Rita **Ciucci**
Escuela Normal Superior "Dr. José B. Gorostiaga"
Argentina
mrciucci@hotmail.com
Yesmín **Nassif**
Escuela Normal Superior "Dr. José B. Gorostiaga"
Argentina
yesnassif@yahoo.com.ar
Liliana Graciela **Larcher**
Escuela Normal Superior "Dr. José B. Gorostiaga"
Argentina
lililarcher@yahoo.com.ar
Liliana Belkis **Monzón**
Escuela Normal Superior "Dr. José B. Gorostiaga"
Argentina
lilianamonzon_80@hotmail.com

Resumen

El objeto de investigación en este trabajo estuvo constituido por **las estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos** que ponen en juego los estudiantes del Profesorado de Enseñanza Básica. Se focalizó en las secuencias de procedimientos que eligen para llegar a solucionar problemas, cómo las planifican, las formas de validación y el modo en que defienden los resultados logrados. La aproximación desde la investigación sistemática a estos procesos, permite una mejor comprensión de los mismos, posibilitando procesos meta-cognitivos a los sujetos, estudiantes-futuros docentes; y por otra parte, ajustar dispositivos de intervención

más adecuados, tanto a los formadores de formadores, como a los propios sujetos y a los maestros de las escuelas impactadas.
Para ello se trabajó con una combinación de enfoques cuali-cuantitativos. Los primeros análisis parecieran confirmar las anticipaciones iniciales respecto a las dificultades que manifiestan los estudiantes.
Palabras claves: formación docente, estrategias cognitivas, resolución de problemas.

Introducción

La condición de docentes de una institución formadora de los miembros del equipo, fue determinante a la hora de otorgar relevancia a la temática y en la decisión de explorar en profundidad lo atinente a los procedimientos que, los estudiantes del Profesorado de Enseñanza Básica de la Escuela Normal “Dr. José B. Gorostiaga” de La Banda (Santiago del Estero), ponen en juego para resolver problemas en matemática, con el supuesto de que la resolución de problemas es clave para la construcción de estrategias cognitivas eficaces. Así, el equipo se conformó con la participación de dos docentes de matemática y dos especialistas en Educación.

La experiencia cotidiana con los estudiantes, futuros docentes, posibilitaba advertir ciertos obstáculos para resolver problemas sencillos en el plano formal. Lo cual deriva en una dificultad importante para la posterior construcción de estrategias de enseñanza, cuando cursan la residencia. A partir del análisis de trabajos prácticos y registros de exámenes, tales dificultades se ponían de manifiesto en la falta de una lectura comprensiva de los enunciados, falta de pertinencia en la formulación de hipótesis, apego a la utilización mecánica de algoritmos convencionales, imposibilidad de comunicar resultados y de explicar fundadamente los criterios usados para la selección de procedimientos.

La aproximación desde la investigación sistemática a estos procesos, permitiría una mejor comprensión de los mismos, posibilitando procesos meta-cognitivos a los sujetos, estudiantes-futuros docentes; y por otra parte, ajustar dispositivos de intervención más adecuados y pertinentes, tanto para los formadores de formadores, como a los propios sujetos y a los maestros de las escuelas impactadas.

En ese sentido, el objeto de investigación en este trabajo estuvo constituido por **las estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos** que ponen en juego los estudiantes que durante el segundo cuatrimestre de ese año cursaban el segundo año del Profesorado de Enseñanza Básica, y durante el siguiente, cursaron la residencia. Se focalizó en las secuencias de procedimientos que elegían para llegar a solucionar problemas, las que podían variar en los modos de lectura comprensiva del enunciado, en la organización de los datos planteados en los mismos, en el planteo de hipótesis, en las distintas formas de cálculo (convencional y no convencional), en la utilización o no de algoritmos, en la manera de verificar y de comunicar los resultados.

El supuesto que, en tanto punto de partida, orientó y dio sentido al trabajo es la consideración de que **la intervención específica sobre las diferentes habilidades implicadas en**

las estrategias cognitivas de los estudiantes del Profesorado de Enseñanza Básica en la resolución de problemas, incrementa sus posibilidades para acceder a la lógica inherente al pensamiento matemático.

El trabajo fue pensado en **dos etapas:**

1º.- En esta etapa, el objeto de indagación fueron las estrategias cognitivas que ponían en juego los estudiantes, futuros docentes (que cursaban el segundo cuatrimestre del segundo año) para la resolución de problemas matemáticos. Para abordarlo se utilizó una metodología que combina aspectos cuantitativos y cualitativos.

2º.- La segunda etapa, durante el primer cuatrimestre del año siguiente, se configuró como una instancia participativa, con modalidad de taller y con una doble función:

- Utilizar el insumo producido en la primera etapa en los talleres de residencia con participación de los maestros propiciando procesos meta-cognitivos.
- Una instancia de triangulación respecto de la primera etapa.

Se pensó, además, en la realización de talleres para comunicar, sometiendo a discusión, los avances del estudio a los formadores de formadores.

Cabe aclarar que el propósito de la segunda instancia fue pensado para - mediante los procesos cognitivos propiciados - impactar en los procesos de intervención de los residentes a la hora de proponer planteos de problemas a los niños de EGB 1 y 2 en sus prácticas.

En virtud de todo ello, se propusieron los siguientes objetivos:

a) Analizar las estrategias cognitivas que ponen en juego los alumnos de segundo año del Profesorado de Enseñanza Básica, de la Institución X para resolver problemas, en el período X.
b) Identificar la secuencia que asumen y los modos en que la planifican para llegar a una solución
c) Detectar las formas de validación y el modo en que defienden los resultados logrados

Se trabajó con una combinación de enfoques cuali-cuantitativos. Una instancia exploratoria, cualitativa, en la que se focalizó en la identificación de recurrencias y regularidades en el tipo de estrategias que ponen en juego los alumnos para resolver problemas. Luego de la discusión de las mismas, se resolvió diseñar una matriz de datos en la que se organizaron las respuestas de cada alumno en función de las estrategias puestas en juego.

El procesamiento de datos se realizó, en un primer momento, de modo cuantitativo, dando lugar a un cuadro-síntesis y gráficos que permiten visualizar las estrategias puestas en juego en relación al total de alumnos, cantidades y porcentajes. En un segundo momento, se discutió la interpretación en función de criterios de consistencia y coherencia teniendo en cuenta las relaciones entre los diferentes grupos de estrategias.

En lo que respecta a la selección de los problemas y los niveles para los que están pensados por quienes publican este tipo de material, se discutieron los criterios y se explicitaron los mismos, antes de su presentación a los alumnos. El insumo analizado, identificando elementos que presentaban alguna regularidad en relación con las estrategias cognitivas, fue organizado y sistematizado para su presentación en la segunda etapa.

Durante la segunda etapa, dicha sistematización les fue presentada a los alumnos, propiciando procesos metacognitivos y, al mismo tiempo, contrastando las interpretaciones del equipo con la de los estudiantes. Luego se incorporó a los maestros de dos escuelas en las que se realiza la residencia, trabajando con talleres de reflexión, y utilizándolos a su vez, como instancia de triangulación.

El **Universo de Estudio** estuvo constituido por todos los alumnos que cursaron durante ese año el 2º año del Profesorado de Enseñanza Básica de la Institución X y que, al año siguiente, se encontraban cursando la residencia.

Desarrollo

Algunas precisiones conceptuales

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter" (Pólya; 1945)

El párrafo precedente pertenece a George Pólya, matemático de origen húngaro, uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y su enseñanza, en su libro *"Cómo Plantear y Resolver Problemas"* en el cual introduce su método de los cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas. Ahora bien, ¿Qué es un problema?, ¿qué supone la resolución de problemas en términos de actividad cognitiva?, ¿qué tipos de conocimiento quedan involucrados en la resolución de problemas?

Un **problema** es una situación que implica un no saber, o bien, una incompatibilidad entre dos ideas. Desde ya, también debe existir una necesidad por resolverlo, pues si no, no sería un problema, y, por lo tanto, éste tiene que tener un carácter de obstáculo para alcanzar una meta, que es su resolución. En el caso de la escuela, es preciso tener presente que la misma situación puede ser un problema para el docente y otro distinto para el alumno, pudiendo existir una gran distancia entre ambos.

Asimismo, se entienden por problemas aquellas situaciones que son mediadoras entre lo que los alumnos saben y lo que tienen que aprender, además de tener el potencial para crear un entorno que motive a expresar lo que se piensa y, crear el camino que conduzca hacia los conceptos matemáticos. Estos deben servir de medio para lograr el desarrollo del pensamiento matemático, al producir algún tipo de conflicto cognitivo para la búsqueda de una solución.

Concretando, para que una situación se denomine **problema** es necesario que exista:

- una persona que desea resolverla (resolutor),
- un estado inicial y un estado final (meta a alcanzar), y
- algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro.

Cuando se habla de problemas, no sólo se refiere a los que contienen enunciados sino también a aquellos que como un juego, una pregunta, un gráfico, no responden a las clásicas formulaciones, pero que permiten la puesta en juego de aquellas estrategias cognitivas que aportan a la construcción de la racionalidad matemática. Es posible clasificarlos en: abiertos, cerrados, de acuerdo al número de soluciones, etc. En la enseñanza de la matemática, pueden tener distintos objetivos: de construcción, de afianzamiento, y de evaluación.

El sentido dado a la resolución de problemas en este trabajo, de este modo, conlleva la posibilidad de que los alumnos avancen en la construcción de un determinado concepto o procedimiento, partiendo del supuesto de que para enseñar a comprender matemática en la escuela, es imprescindible la selección y utilización de los mismos, como herramienta didáctica para el aula.

La idea de **estrategias cognitivas** para la resolución de problemas reconoce su filiación epistemológica en la psicología cognitiva. Cuando se habla de estrategias cognitivas se alude a secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, el almacenamiento y/o la utilización de información o conocimientos.” (Sanjurjo y Vera, 1994)

Para el caso de las matemáticas, las estrategias diferenciales, ante la resolución de problema como situación básica que se consideraron, son:

Estrategias de organización: leer comprensivamente enunciados, Identificar el problema, organizar datos, establecer prioridades, buscar relaciones.

Estrategias de formulación: explorar caminos de solución, concebir un plan, realizar gráficos.

Estrategias de ejecución: cálculos mentales, convencionales y no convencionales, exactos y aproximados.

Estrategias de validación: comunicar resultados en distintos lenguajes.

En lo que respecta a las **estrategias meta cognitivas,** que se consideraron durante la segunda etapa del Proyecto, la investigación en meta cognición en el área de Resolución de Problemas ha tratado de identificar procesos estratégicos que pueden aplicarse a todo tipo de problemas. Brown (1978) identificó varios procesos estratégicos que los estudiantes deben adquirir para ayudarlos a convertirse en resolutores efectivos de problemas. Estos son:

- Conocer las propias limitaciones como aprendiz.
- Estar consciente de las estrategias que uno sabe cómo usar y cuándo cada una de ellas es apropiada.
- Identificar el problema a resolver.
- Planificar las estrategias apropiadas.

- Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema.
- Evaluar la efectividad de los pasos anteriores de manera que el resolutor de problemas sepa cuando finalizar de trabajar en el problema.

Descripción del proceso

Se procedió a distribuir, entre los miembros integrantes del equipo, el material bibliográfico seleccionado para realizar la revisión de bibliografía específica. De este modo, en cada reunión, se ponía en común la lectura realizada por cada uno de los miembros del grupo. En ese marco, se dieron las discusiones vinculadas al concepto de "estrategias cognitivas" y "resolución de problemas". La bibliografía específica difiere en las asignaciones de sentidos en ambos casos y las mismas resultan lo suficientemente ambiguas y divergentes como para generar algunos problemas a la hora de precisar indicadores.[1]

Se acordó, entonces, continuar con la utilización de ambos conceptos y retomar la discusión al momento de realizar el análisis de los datos aportados por la aplicación de los instrumentos.

Primer instrumento

Elaboración

Las primeras discusiones giraron en torno a si era necesario y/o conveniente una primera aplicación de un instrumento-prueba: implicancias en términos de tiempo, relevancia de los posibles aportes, etc. Se discutió, entonces, si el instrumento debía o no tener en cuenta los contenidos desarrollados en primero y segundo año del profesorado o focalizar en las estrategias cognitivas, apelando a conocimientos muy básicos. Del mismo modo, se consideraron los criterios a tener en cuenta para seleccionar el tipo de problemas que se debía proponer. Si éstos debían contemplar los formatos conocidos o presentar situaciones problemáticas al margen de la familiaridad que implican ciertos formatos escolares.

---

[1] BROITMAN, Claudia, Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula. Edic. Novedades Educativas, Bs. As.1999, sostiene que en la enseñanza de las estrategias de cálculo, no se plantean de manera independiente el campo de problemas y la construcción de las estrategias de cálculo, ya que ambos aspectos están interrelacionados y están implicados en la construcción del sentido de las operaciones (suma y resta, multiplicación y división).

En el marco de una crítica a la enseñanza de algoritmos tradicionales, propone la enseñanza de procedimientos reflexivos (estrategias).

Ahora bien, cuando habla de la resolución de problemas por parte de los niños, usa el concepto de procedimientos, como un estadio previo a la creación o elección de estrategias. Sin embargo, en el desarrollo del texto, utiliza ambos conceptos de manera indistinta (pág. 23).

RIVERÓN PORTELA y otros (Universidad de Ciego de Ávila, Cuba)

Por procedimiento lógico del pensamiento entiende aquellos procedimientos más generales, que se utilizan en cualquier contenido concreto del pensamiento, se asocian a las operaciones lógicas de éste y se rigen por reglas y leyes de la lógica. De aquí se desprende la amplitud de su aplicación. Sostiene que, en la práctica, los procedimientos lógicos siempre aparecen ligados a un contenido concreto, que depende del campo de aplicación y que le añade un componente específico, en una estrecha interrelación con el componente general. Aunque existe un estrecho nexo entre estos dos componentes, ellos son relativamente independientes, lo cual se expresa en la posibilidad del individuo que domina el procedimiento, de aplicarla parte lógica a cualquier contenido específico. Los procedimientos lógicos no dependen del contenido concreto mientras que los procedimientos específicos pueden ser utilizados sólo en una esfera determinada.

Finalmente, se decidió elaborar el instrumento seleccionando problemas de Nivel II (EGB 2º ciclo). Se formularon 3 problemas en total: uno fundamentalmente aritmético, otro geométrico y el último lógico. A continuación se realizó una prueba con auto aplicación y anticipaciones de posibles respuestas. En esa instancia el equipo advirtió la dificultad que entraña el abordaje de procesos internos y la necesidad de formación previa para la realización de entrevistas en profundidad. Se tomaron los recaudos que resultaban materialmente posibles en ese sentido.

Aplicación

Se reunió a los estudiantes y se explicó el sentido de la investigación, poniendo especial énfasis en que no se trataba de una evaluación. Cada una de las integrantes del equipo entrevistaba a uno de los estudiantes (a quien se le entregaba una hoja con los problemas), acompañándolo durante la resolución de los problemas planteados, preguntando e interviniendo. Esto es, se tomaron entrevistas de modo simultáneo (una por cada miembro del equipo). Inmediatamente después de la aplicación del instrumento, se realizaron entrevistas individuales a los sujetos.

Análisis

El primer análisis de los resultados consistió en buscar la presencia de "estrategias", con mucha dificultad para identificarlas. En esta instancia se advirtieron, claramente, diferencias entre los miembros del equipo, tanto en el modo de realizar la entrevista como en las intervenciones durante la aplicación del instrumento. La lectura y discusión colectiva permitieron advertir una serie de dificultades tanto teóricas como metodológicas en la aplicación del instrumento (diferencia en los posicionamientos, pertinencia de los problemas, ambigüedad de las variables en juego).

Se decidió, entonces, un segundo análisis de los resultados en dos momentos: primero, la elaboración de un informe personal por parte de cada una de las entrevistadoras y luego, la discusión colectiva de los mismos. Resulta evidente así, la "ausencia" de estrategias en los análisis y la recurrencia de la sensación de encontrarse frente al "vacío de contenidos" que se convertía en obstáculo para la utilización de éstas.

Segundo instrumento

Elaboración

Teniendo en cuenta los obstáculos encontrados como consecuencia de la aplicación del instrumento-prueba, se decidió elaborar el instrumento definitivo, de acuerdo a los siguientes criterios:

a) Que fueran problemas de Nivel I (EGB 1º Ciclo). Se fundamentó esta decisión en el hecho de que los estudiantes trabajan en el aula con problemas de Nivel I y II destinados a los niños de 1º y 2º ciclo de EGB. Estos problemas, trabajados por ellos mismos, les ofrecen dificultades a la hora de su resolución. En ese sentido, las expectativas eran de que este nivel de problemas posibilitaran el despliegue de las estrategias que se buscaba identificar.

b) Que no pusieran en juego contenidos de la disciplina de modo evidente, buscando evitar que el vacío de contenidos operara como un obstáculo en su resolución.

c) Que estuvieran vinculados a la vida diaria, de manera tal, que les posibilitara utilizar estrategias y que – aún cuando no pudieran apelar a formalizaciones – intentaran resolverlos intuitivamente.

Aplicación

Se distribuyeron las hojas con tres problemas a cada uno de los alumnos de la comisión. Se les explicó claramente que no se trataba de una evaluación y el sentido de la investigación. Se manifestó la necesidad de que explicitaran cada una de las decisiones que fueran tomando durante el proceso de resolución de cada problema, dejando constancia aún de los intentos que se abandonaran. Los miembros del equipo estuvieron presentes durante el desarrollo de la actividad. Al finalizar un alumno, pasaba a un aula contigua con una de las docentes para la realización de la entrevista.

Análisis

Al comenzar el análisis, se advirtieron las diferencias en el abordaje de las entrevistas. Aún cuando se realizaron los acuerdos explícitos previos, el modo en que se trabajó con los alumnos fue diferente. Algunas colegas confrontaron y repreguntaron, otras simplemente registraron la explicación de los alumnos.

Se decidió realizar una primera organización en un cuadro de doble entrada en el cual se volcaron la resolución de cada uno de los problemas por parte de cada uno de los alumnos. En un segundo momento, se discutieron las estrategias y se resolvió diseñar una matriz de datos en la que se organizaran las respuestas de cada alumno en función de las estrategias puestas en juego.

El procesamiento de estos datos se realizó, en un primer momento, de modo cuantitativo, dando lugar a un cuadro-síntesis y gráficos que permiten visualizar las estrategias puestas en juego en relación al total de alumnos, cantidades y porcentajes.

En un segundo momento, se discutió la interpretación en función de criterios de consistencia y coherencia teniendo en cuenta las relaciones entre los diferentes grupos de estrategias.

Segunda etapa

Tal como estuvo planteado inicialmente, la segunda etapa, durante el primer cuatrimestre del año siguiente, durante la residencia, se configuró como una instancia participativa, con modalidad de taller, con la doble función de – por una parte – propiciar procesos meta cognitivos en los estudiantes que se encontraban cursando la residencia y – por otra – como una instancia de triangulación respecto a la primera etapa. Se pretendía, de ese modo, impactar en los procesos de intervención de los residentes a la hora de proponer planteos de problemas a los niños de EGB 1 y 2 en sus prácticas.

Lo trabajado durante la **segunda etapa** puede ser organizado en **dos momentos** a efectos de facilitar su comprensión:

***1º Momento**:*

Se concretaron tres encuentros con los estudiantes, en el marco del espacio curricular denominado Taller de Residencia, en los que tuvieron acceso a sus producciones, a las notas realizadas en ellas durante las entrevistas y posteriormente, a la sistematización e interpretación de los datos.

En el primer encuentro se propuso a los estudiantes trabajar con sus respectivas producciones y las anotaciones que cada una de ellas contenía, así como la descripción de las mismas realizada por el equipo y organizada por problemas. La consigna propuesta fue que comentaran lo que la revisión del material les sugería. Las primeras intervenciones de los estudiantes estuvieron orientadas a "justificar" su desempeño con afirmaciones del tipo: *"Yo siempre he tenido dificultad con estos contenidos…"…"...en la escuela no nos enseñaron a resolver problemas.."*. Se les sugirió, entonces, que trataran de establecer los contenidos que, a su juicio, estaban en juego en los tres problemas.

En el segundo encuentro, el equipo explicó a los estudiantes el concepto de estrategias con el que se trabajó y entregó a cada uno de ellos el cuadro que le correspondía en la matriz de datos a efectos de su análisis. A continuación, se analizaron cada uno de los grupos de estrategias en relación al primer problema. Los estudiantes solicitaron resolver colectivamente el problema en el pizarrón. Este proceso operó estimulando la participación y comenzaron a intervenir "aclarando" sus decisiones. En general, se reconocieron en las descripciones y explicitaron sus dificultades tales como *"…me resultaba muy difícil identificar el problema"*.

En el tercer encuentro, los estudiantes se mostraron más familiarizados con el concepto de estrategias, se analizaron el segundo y tercer problema. Salvo en un caso, todos se reconocieron en las interpretaciones. Algunos planteaban que su desempeño hubiese variado si el instrumento se hubiera aplicado después de su examen de matemática de 1º año (la mayoría la rindió luego de cursado el 2º año). Otros manifestaron sentirse avergonzados al leer sus producciones, porque…. *"ahora estamos en otro lugar"…" estamos más entrenados"*.

2º Momento:

Se realizaron tres talleres, dos de ellos con los docentes de primaria de dos escuelas en las que los alumnos realizan la Residencia y el último con los docentes y los alumnos participantes en el estudio.

El **primer Taller** consistió en informar a los docentes acerca de las características de la investigación, su encuadre teórico, objetivos y estrategia metodológica. Se relataron las diferentes instancias del proceso, las dificultades enfrentadas y, en general, la "cocina" del estudio. Se pusieron a su consideración los criterios adoptados para las decisiones conceptuales y metodológicas. Por ejemplo, cómo llego el equipo a definir problema y estrategias.

Se realizó la presentación del instrumento-prueba, planteando las discusiones para la elección y selección de los problemas, que se dieron al interior del equipo. Se propuso su análisis por parte de los docentes, poniendo a consideración de los mismos a efectos de que anticiparan posibles estrategias a utilizar por los alumnos del profesorado. A continuación, se mostró la descripción de los caminos que tomaron los estudiantes del profesorado para resolver los problemas. La mayoría de los docentes se identificó con alguno de ellos. Se trabajó del mismo modo con el 2º y 3º problema, confrontando las anticipaciones de los docentes. Antes de que se retiraran, se entregó a cada docente una copia del instrumento definitivo aplicado a los estudiantes, solicitándoles su análisis para el próximo encuentro.

En el **segundo Taller** se comenzó proyectando las descripciones de las estrategias desplegadas por los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas. Algunos docentes manifestaban reconocerse en los recorridos de los alumnos. Hipotetizaban respecto de las dificultades, poniendo, alternativamente, como protagonistas a sus alumnos y a ellos mismos. En general, consideraron que las estrategias seleccionadas para el estudio *"no están desarrolladas, se debe trabajar para ello".* Las propuestas del equipo para poner en cuestión la matriz de estrategias, mediante planteos y preguntas, no obtuvo respuesta.

Para el **tercer Taller** se incorporaron los estudiantes. Los intercambios resultaron escasos, no se logró instalar el clima de debate. Al mismo tiempo, todos consideraban positivo al espacio y necesario que se realizara con mayor frecuencia. La proyección de las matrices de datos fue observada con atención, pero frente a los planteos de los miembros del equipo no hubo cuestionamientos, sólo algún comentario que no resultó retomado por el resto.

Primeras reflexiones provisorias

El camino recorrido hasta aquí si bien habilita algunas reflexiones, no permite aún expresarse en términos de conclusiones.

En lo que respecta a los objetivos propuestos, se advierte que se trabajó en esa línea y que los mismos resultaron orientadores durante el todo desarrollo del estudio. Fueron determinantes para el diseño de los instrumentos y permitieron lograr cierta coherencia en la organización y análisis de los datos.

Los primeros análisis parecieran confirmar las anticipaciones explicitadas respecto a las dificultades que manifiestan los estudiantes y que se expresan en la falta de una lectura comprensiva de los enunciados, falta de pertinencia en la formulación de hipótesis, apego a la utilización mecánica de algoritmos convencionales, imposibilidad de comunicar resultados y de explicar fundadamente los criterios usados para la selección de procedimientos. Con lo cual, pareciera cerrarse el círculo en términos de sus imposibilidades.

Ahora bien, focalizando en el proceso del equipo de docentes-investigadores, resulta interesante advertir la dificultad manifestada por los mismos, a la hora de identificar las estrategias puestas en juego por los estudiantes para resolver los problemas propuestos. Esto es, centrarse en lo que los estudiantes *hacen*, y no en lo que *no pueden hacer.*

Del mismo modo, se advirtió una gran dificultad para hipotetizar respecto a los caminos recorridos por los estudiantes y las diferencias que entrañan cada una de sus opciones. A medida que se avanza en la reflexión y el análisis de las respuestas de los estudiantes a las entrevistas – y más recientemente – a sus conductas en el marco de los talleres, comienzan a aparecer algunas cuestiones que lo complejizan y abren a nuevas relaciones.

Es posible observar una recurrencia en las respuestas de los estudiantes consistente en la disyunción entre conocimiento intuitivo y conocimiento de sentido común. La resolución de problemas en el ámbito escolar, parece operar como un contexto aislado, independiente de la vida cotidiana. Parecieran suprimir su conocimiento acerca de números y ámbitos y, en su lugar, intentan seguir un conjunto de reglas aplicadas rígidamente para resolver problemas.

Los estudiantes evidencian, en general, desconocimiento acerca de qué es lo que realmente está en juego cuando se les plantea un problema. Pareciera que de lo que se trata es de “identificar el algoritmo”. Pensar que las matemáticas son un modo de comprender el mundo, que alguien puede participar significativamente en esta suerte de “conversación” no parece frecuente. Ahora bien, sin esta actitud… ¿es posible una comprensión genuina?

En relación a estas cuestiones es posible preguntarse si las intervenciones docentes están pensadas atendiendo a estos hechos o tienden a reforzarlos. Se plantea esto, porque al comenzar el trabajo en los talleres y, ante la ansiedad de los estudiantes por conocer la solución “correcta” de los problemas propuestos, los docentes del área se sentían “tentados” a mostrar el camino y costaba promover verdaderos procesos meta cognitivos.

Finalmente, se considera importante señalar la relevancia de las dimensiones formativas que este proceso asume para el equipo docente. Esto, en lo que respecta no sólo a la instrumentación conceptual y al enriquecimiento mutuo que posibilitan las discusiones al interior de un grupo interdisciplinario; sino en cuanto a los aspectos lógicos y metodológicos del proceso.

A lo largo del estudio, se posibilitó la reflexión sobre los propios desempeños a la hora de construir un marco teórico de referencia. Asimismo, fue posible advertir la heterogeneidad en las concepciones y puntos de partida en diferentes momentos del proceso.

Bibliografía general

Broitman, C. (1999) Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula. Edic. Novedades Educativas, Bs. As.

Brousseau, G. (2007) Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del zorzal, Bs.As

Brown, J.S. y Burton, R.R. (1978). “Diagnostic models for procedural bugs in Basic mathematical skills. Cognitive Science” citado por Hernandez, H. (1993) Folleto *Didáctica de la Matemática.* Quito, Ecuador.

Castorina, J.A. y Fernández, S. (1.984) Psicología Genética: aspectos metodológicos e implicancias pedagógicas. Miño y Dávila Editores. Bs. As.

Ferreira, H. y Peretti, G. (2006) Diseñar y gestionar una educación autentica. Desarrollo de Competencias en Escuelas situadas. Edit. Novedades Educativas.

Gallego Lazaro, C (2007) Repensar el aprendizaje de las matemáticas. Grao Editorial. Madrid

Gaskins, I y Elliot, T. (2005) Como enseñar estrategias cognitivas en la escuela. Paidós Editorial. Bs. As.

Gimenez, J. y otros (2007) Educación matemática y exclusión. Grao Editorial. Madrid

Hernandez Fernandez, H., Delgado Rubi, J. y otros (2000) Cuestiones de didáctica de la Matemática. Homo Sapiens Edic. Bs. As.

Maza Gomez, C. (1989) Sumar y Restar. El proceso de enseñanza-aprendizaje. Visor Editorial, Madrid

Panizza, M. (2005) Razonar y Conocer. Libros del zorzal, Bs.As.

Parra, C. Sadovski, P. y Saiz, J. (1994) Matemática y su enseñanza. Ministerio Educación de la Nación. Documento curricular. PTFD

Piaget, J. (1985).Seis estudios de psicología. Biblioteca Ariel. Sudamericana Planeta,

…….……Inhelder, B. (1978): Psicología del niño. Edit. Morata, Madrid.

………….(1991) Introducción a la epistemología genética (El pensamiento matemático) Tomo I. Paidós Mexicana.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ed. Trillas, México.

Riverón Portela y otros (1995) Citado por Campistrous, L. en "*Enseñanza de la Matemática. Reflexiones polémicas*" Instituto Central de Ciencias Pedag

Sadovski, P. (2005) Enseñar matematica hoy. Libros del zorzal, Bs.As.

Sanjurjo L. y Vera M. (1994) Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior. Editorial Homo Sapiens. Bs. As.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Estrategias comunicativas en la clase de matemáticas

Nury Yolanda **Suárez** Avila
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Santo Tomas de Tunja
Colombia
nsuarez@ustatunja.edu.co

Resumen

El propósito de esta ponencia es presentar los resultados de una investigación que tuvo como objetivo analizar aspectos destacados para una comunicación apropiada en clase de matemáticas; entendida esta como la que ocurre en un espacio donde se promueve la interacción, la participación de los sujetos, la argumentación, el debate y la negociación de significados, teniendo en cuenta como aspecto central en la obtención de significados. Se desarrolló trabajando con dos poblaciones, una en el nivel básico y otra en educación superior. Se hizo un diagnóstico inicial sobre la forma como habitualmente se da la comunicación, estableciendo los patrones de interacción de esos docentes en sus clases. Se diseñaron y desarrollaron actividades específicas de clase, implementando una dinámica novedosa para el trabajo en grupo, como espacio de conjeturación, argumentación y debate hasta llegar a consensos. La investigación mostro cómo, con este tipo de estrategias la clase se convierte en una comunidad que hace, discute y aprende matemáticas.

Palabras Clave: Clase de matemáticas, comunicación, trabajo en grupo, pregunta, patrones de interacción.

Introducción

La comunicación se considera fundamental para el conocimiento de las cosas y para la relación y comprensión entre los seres humanos; de ahí la importancia que cobra en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, la investigación analizó aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza en la clase de matemáticas, teniendo como foco central la comunicación, entendida como un proceso de interacción social en el que se favorecen la negociación de significados, el diálogo, el debate y el consenso; acciones mediante las cuales se alcanzan procesos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático, como la conjeturación y la argumentación. Este texto resume algunos resultados de las estrategias y los tipos de interacción que los docentes utilizan a la hora de orientar la clase y por último muestra una estrategia que permitió convertir el aula de clase en un ambiente vivo de interacciones, donde el sujeto se dota de significado en su interrelación con la cultura del grupo; dichas estrategias se basaron en el uso de espacios para el trabajo en grupo, en el debate y la confrontación de interpretaciones y en los cuestionamientos permanentes del profesor.

La investigación

Es bien conocido que la forma tradicional del trabajo en la clase de matemáticas no es la más apropiada para el desarrollo de procesos matemáticos por la estructura que tiene, ya que esta metodología genera problemas como desconexión entre la matemática y el mundo real, muchas veces manejo excesivo de lenguaje abstracto formal, desmotivación del estudiante, y en últimas rechazo hacia las matemáticas. Según la UNESCO (1998) el rechazo o el gusto por las matemáticas pueden ser entendidos como la valoración promedio de un conjunto de variables de naturaleza emocional tales como el autoconcepto matemático, la percepción de dificultad o las emociones asociadas más frecuentes con esta materia. Al respecto Jiménez, Suárez & Galindo (2010) afirma que la concepción que se tenga de la matemática tiene consecuencias directas, a veces dramáticas, en el accionar del profesor en su clase; así, por ejemplo, cuando el profesor cree que la matemática es un conjunto de verdades absolutas, la comunicación es simplemente un monólogo del profesor, transcribiendo unos contenidos. La situación descrita se confirma con los resultados en las distintas pruebas que el propio Estado u otros organismos realizan a estudiantes de diferentes niveles de la educación.

Los resultados de pruebas Nacionales e Internacionales como SABER, ICFES (Saber 11), ECAES (Prosaber), PISA, TIMSS han demostrado el bajo nivel académico de Latinoamérica en las diversas áreas del conocimiento evaluadas y específicamente en el área de matemáticas. Estudios realizados por UNESCO (1998) indican que Colombia ha sido de los países con mayor retraso respecto a la medición de competencias en matemáticas, ciencias y lenguaje en relación a los países de la OCDE (la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). Respecto a la matemática, según este análisis, los estudiantes no alcanzan los niveles de análisis y comprensión establecidos por los países globalizados. Los métodos expositivos y memorísticos y la matemática enseñada mediante definiciones y conceptos no son los requeridos en la competencia académica internacional. Lo anterior ha ocasionado en los estudiantes profundo desinterés y desmotivación hacia el aprendizaje del área. Se estudia para aprobar exámenes y no para aprender, ya que para el estudiante es evidente la desconexión entre la matemática y la vida real; en los centros escolares se dedica mayor tiempo a las actividades donde se privilegia la repetición y la ejecución sistemática de los contenidos curriculares y se deja de lado aquellas que estimulan el razonamiento matemático.

A las dificultades mencionadas anteriormente se suman la falta de estrategias novedosas usadas por el docente para orientar su clase y la poca utilización de recursos que susciten y faciliten el aprendizaje. El maestro de matemáticas en muchos casos se ha dedicado a explicar y explicar infinidad de ejercicios en el tablero y el estudiante trata de descifrar este lenguaje lejano a él y a sus intereses; en muchos casos esto se reduce la interacción entre el docente, el estudiante y el conocimiento.

Los sujetos se relacionan directamente mediante la comunicación, la cual juega un papel indispensable en las relaciones afectivas, emotivas y cognoscitivas, de ahí la importancia que las personas se interrelacionen mediante una apropiada comunicación, en un clima que privilegie el dialogo y el respeto por las ideas, así seguramente se posibilita un aprendizaje construido personal y colectivamente.

De esta forma la investigación buscó dar respuesta a la pregunta ¿De qué manera centrar la clase en estrategias específicas comunicativas beneficia el aprendizaje y dinamiza la clase de matemáticas?

Frente a la complejidad de esta problemática, la investigación que aquí se describe tuvo como objetivo analizar la incidencia de estrategias de comunicación en la dinámica de la clase y en el aprendizaje de las matemáticas. Se hizo investigación en el aula, que según Stenhouse (1986) es la práctica sistemática, rigurosa y detallada de las actividades de clase que desarrolla el profesor. La investigación en el aula es la forma natural para transformar el currículo prescrito en un currículo en acción. Según este autor la investigación debe ser la base de la enseñanza, como medio idóneo de diversificar y adaptar propuestas para y, en consecuencia, elevar la calidad educativa, tuvo un enfoque cualitativo el cual no mide ni compara variables, interpreta e intenta comprender situaciones en profundidad. Sin embargo se usó un instrumento de tipo cuantitativo, para tener una visión más completa de la situación estudiada.

La población de estudio con la que se trabajó fueron estudiantes de primer semestre de las facultades de las diferentes ingenierías, los docentes investigadores y algunos docentes que no pertenecían al grupo de investigación, la población de estudiantes es heterogénea ya que en el primer semestre ingresan estudiantes de diferentes lugares y con un nivel de educación un poco aceptable.

En la argumentación teórica se desarrollaron aspectos como las dificultades en el aprendizaje de la matemática, la comunicación, el interaccionismo simbólico, la comunicación en matemáticas según algunas teorías de aprendizaje, la pregunta como técnica de enseñanza y como objeto de estudio y la respuesta como técnica de apoyo. El método que se desarrollarlo para la recolección de información se hizo con instrumentos diseñados por las investigadoras y otros como cuestionarios de pregunta abierta a profesores y estudiantes, ficha de observación directa basada en las categorías de Flanders (1977) y actividades específicas de clase los cuales analizaron aspectos generales de la clase, estrategias de comunicación y tipos de interacción, el análisis de la información se hizo a través de categorías establecidas desde la teoría, y desde una primera lectura cuidadosa de las respuestas a los cuestionarios de pregunta abierta a docentes y estudiantes, las cuales quedaron establecidas así: Patrones de interacción, estrategias de comunicación y ambiente de la clase.

En la categoría Patrones de Interacción se tuvo en cuenta específicamente si el docente desarrollaba el tema por exposición, o si lo hacía de forma colectiva con sus alumnos. En las estrategias de comunicación se tuvo en cuenta aspectos como el tipo de pregunta que hacía el docente y su intención con la misma, así como si realizaba trabajo en grupo o no. En la categoría Ambientes de la Clase se tuvo en cuenta el gusto o disgusto que manifestaban los alumnos, el interés o el desinterés y en últimas el ambiente de la clase.

Algunos elementos teóricos

De acuerdo con Mathematics (1989), se establecen cuatro ingredientes de la competencia comunicativa en matemáticas: organizar y consolidar las propias ideas matemáticas mediante la comunicación, explicitar de manera clara y coherente las propias ideas matemáticas ante otras personas, analizar y evaluar las estrategias e ideas matemáticas de otras personas, y usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Para Menezes & Ponte (2006) la naturaleza y el papel de la comunicación en la clase de matemáticas hacen que el espacio de esta sea sustancialmente diferente al propuesto en otras teorías de aprendizaje. Ponte

Sierpinska (citado en Godino & Batanero, 1994) contrasta los diferentes papeles que la comunicación puede desempeñar en las clases de matemáticas que adoptan una orientación constructivista, socio-histórica o interaccionista. Para describir una clase de corte constructivista, inspirada en la escuela piagetiana, propone la siguiente metáfora: *los alumnos hablan, el profesor escucha;* esta clase adopta una pedagogía centrada en el alumno, donde el profesor asume el papel de oyente atento y también de cuestionador, dispuesto a clarificar las diversas interpretaciones de los estudiantes; de este modo, Sierpinska cree que "la comunicación es un problema, en el sentido de que es difícil explicar cómo es que se hace posible" (p. 3), señalando que el salón de clase puede ser un punto de encuentro de un conjunto de mentes que a través del lenguaje vinculan sus pensamientos individuales. En una clase basada en la orientación socio-histórica, la comunicación matemática puede ilustrarse por la siguiente metáfora: *los profesores hablan, los estudiantes escuchan;* en esta perspectiva, inspirada en la Escuela de Vigoski, el aprendizaje es una *enculturación* sobre estructuras sociales preexistentes, siendo el lenguaje un medio de transmisión cultural de conocimientos y valores a las nuevas generaciones; así, el lenguaje es fundamentalmente un instrumento de comunicación unidireccional, y esta es entendida como un hecho cultural. Para caracterizar la perspectiva interaccionista de la comunicación en la clase de matemáticas, Sierpinska presenta una tercera metáfora: *profesores y alumnos en diálogo;* en esta perspectiva, tanto en los procesos individuales de atribución de sentido como en los procesos sociales, la comprensión personal se da a través de su participación en la negociación de las normas y los significados en clase (Jimenéz E., Galindo, & suárez, 2010)

Según Ponte (2007) el discurso del profesor constituye, en la perspectiva interaccionista, una práctica social, y como tal, el sistema lingüístico es el medio de comunicación social y cognitivo. Hacer preguntas es una de las principales formas que el profesor tiene para dirigir su clase, manteniendo control sobre el proceso de comunicación.

Para Menezes (2004) los beneficios que se obtienen al hacer preguntas son, entre otros, detectar dificultades de los estudiantes, ayudar al alumno a pensar, obtener información que no se tiene, provocar indirectamente la realización de acciones, orientar a los estudiantes a organizar la información relativa a un saber, validar la cantidad y calidad de conocimiento de los alumnos y motivar.

En cuanto a Polya (1992) Presenta una visión sobre la solución de problemas en la clase de matemáticas, según la cual el papel cuestionador del profesor es extremadamente importante, pues con sus preguntas, que pudieran haber surgido en el propio estudiante, ayuda a sus alumnos a salir de los bloqueos.

Para Menezes (2004) al momento de hacer preguntas se debe tener cuidado en aspectos como la claridad y la concisión; variar el nivel de dificultad, involucrando a la mayoría del grupo; formular las preguntas a todo el grupo y después individualizarlas; evitar responder el mismo profesor las preguntas; luego de la respuesta de un alumno preguntar por qué y hacer preguntas abiertas, brindando un tiempo de pausa después de la pregunta. Es de destacar que es la calidad de las preguntas formuladas por el profesor, y no la cantidad de ellas, lo que puede dinamizar las clases. Por otro lado, también es importante que el profesor plantee situaciones problémicas para propiciar espacios de mayor discusión.

Menezes (1995) Señala dos razones para que el profesor centre la atención en las preguntas. La primera, porque inhibe que el profesor hable por largo tiempo, y la segunda, porque dadas las potencialidades la pregunta se puede aumentar y mejorar la participación de sus alumnos en clase. Teniendo en cuenta la primera razón, se considera que los profesores, en la mayoría de las veces, hablan más que los alumnos –en verdad, a veces solo hablan ellos– y cuando se dirigen a ellos lo hacen en forma de preguntas, cuya respuestas requieren de memorización y, muchas veces, del desarrollo de algoritmos, entre otros. Teniendo en cuenta la segunda razón acerca de las potencialidades de la pregunta, se considera que los docentes, por lo general, cuando formulan preguntas no saben cuál es el objetivo, no dan el tiempo necesario para la respuesta o las utilizan como norma de conducta para aquellos estudiantes que se encuentran distraídos; pero es indiscutible que el profesor debe evitar realizar preguntas dirigidas a herir susceptibilidades o a poner de manifiesto la ignorancia de algún alumno interrogado.

Resultados de los instrumentos diagnósticos por docente

Docente 1. Teniendo en cuenta el análisis de los tres instrumentos se puede afirmar que la docente no propicia ambientes de aprendizaje diferentes a la exposición directa de los temas, ya que los estudiantes manifiestan que el desarrollo de todas las clases siempre se da de la misma forma. De acuerdo con las estrategias utilizadas por la docente, el patrón de interacción que se evidenció es el unidireccional, ya que la profesora se empeña en ser la principal protagonista de la clase y el estudiante se convierte simplemente en un receptor de información. La interacción que se evidenció entre Docente –Estudiante se reduce sólo a la repetición de los contenidos por parte del estudiante en el momento de contestar las preguntas formuladas por la docente. Por lo tanto, se puede afirmar que la docente tiene características de un profesor tradicional.

Docente 2. Teniendo en cuenta el análisis de los tres instrumentos se evidenció que la docente utiliza gran parte del tiempo para explicar los contenidos. La profesora afirmó utilizar las preguntas para hacer reflexionar a sus estudiantes sobre su aprendizaje, y que a la vez, propiciaba espacios para la discusión; sin embrago, el análisis del instrumento 1 y 3 muestra que el objetivo de las preguntas es verificar constantemente lo que expone, además no hubo evidencias sobre alguna posible socialización de las conjeturas de cada estudiante, de esta forma el papel del estudiante consiste en repetir un monologo de definiciones o conceptos y realizar ejercicios de aplicación.

Ante las dificultades evidenciadas en los alumnos la docente se limitó a contestar simplemente las dudas o confusiones. Siguiendo a Sierpinska (citado en Godino & Batanero, 1994), La docente no aprovecha estas dudas como herramienta para suscitar procesos analíticos, reflexivos y argumentativos; limitándolos a dar sus propias soluciones. Cuando conforma grupos de trabajo, se niega la posibilidad al estudiante de presentar sus puntos de vista, de controvertirlos y de llegar a consensos.

En conclusión, el lenguaje que utiliza la docente es un instrumento de comunicación unidireccional, ya que deja de lado la negociación y la concertación de significados entre estudiante-estudiante y docente-estudiante y grupo-estudiante. Se evidenció que los cuatro docentes inician la clase con el desarrollo de los contenidos temáticos, una diferencia encontrada en el docente 4 se relaciona que en el momento de iniciar las clases utiliza la pregunta. Una similitud encontrada entre los docentes 1 y 2 se refiere a que emplean la pregunta para verificar contenidos, mientras que el docente 3 y 4 utilizan la pregunta para hacer reflexionar a sus estudiantes y para conocer los conceptos previos de los estudiantes.

Docente 3. De acuerdo con las respuestas, la docente utiliza la pregunta como estrategia de interacción entre docente- estudiante al iniciar la clase, teniendo como propósito evaluar la tarea de la clase anterior. En cuanto a las estrategias de comunicación se evidenció que la docente, utiliza una tercera parte del tiempo de la clase para exponer los contenidos y otra tercera parte de la clase para proponer problemas con cierto grado de dificultad. El papel de los estudiantes se convierte en intentar dar solución al problema y ante una dificultad, ésta será resulta por el docente, de este modo el interés del estudiante se convierte solo en encontrar la respuesta. De igual manera se evidenció que los espacios de discusión que se propician en el aula de clase son para comparar resultados de los ejercicios o para aclarar dudas, la docente no tuvo en cuenta la pregunta como herramienta para suscitar procesos analíticos, reflexivos y argumentativos.

Docente 4. De acuerdo con análisis se evidenció que el profesor propicia espacios para el análisis, la reflexión y la argumentación. De igual manera permitió que los estudiantes participaran en la construcción de significados. El docente utilizó la pregunta como herramienta de aprendizaje, ya que a través de cuestionamientos hizo que sus estudiantes replantearan sus preconceptos mediante, la conjeturación y la argumentación. Se evidenció que el patrón de interacción que más se dio en el aula de clase fue el patrón de discusión, siguiendo a Godino & Llinares (2000) el profesor basó su enseñanza en un aprendizaje interaccionista, el que tiene en cuenta o atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso, la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones problémicas.

En conclusión se evidenció que los cuatro docentes inician la clase con el desarrollo de los contenidos temáticos, una diferencia encontrada en el docente 4 se relaciona que en el momento de iniciar las clases utiliza la pregunta. Una similitud encontrada entre los docentes 1 y 2 se refiere a que emplean la pregunta para verificar contenidos, mientras que el docente 3 y 4 utilizan la pregunta para hacer reflexionar a sus estudiantes y para conocer los conceptos previos de los estudiantes. En conclusión los cuatro docentes en general utilizó la exposición en el tablero, se encontró una diferencia en el docente cuatro que se vale de otras herramientas didácticas para el desarrollo de la misma. Por lo tanto para la docente, el reflexionar sobre el aprendizaje no es considerado.

Una experiencia

Teniendo en cuenta el análisis de los resultados de los instrumentos aplicados a docentes y estudiantes se diseñaron algunas actividades basadas en estrategias comunicativas en la clase de matemáticas, con el fin de fortalecer aquellas deficiencias que se estaban dando en el aula de clase, a continuación se muestra una experiencia de clase y la metodología diseñada.

Metodología de clase. La actividad se desarrolla en tres momentos: uno de trabajo individual; otro de trabajo grupal y la última socialización en plenaria.

Rol del estudiante. En el momento del trabajo individual cada estudiante interpreta y analiza la situación problémica presentada; a continuación conjetura y plantea soluciones; y por último intenta validar y comprobar su solución, el segundo momento tiene las mismas tres etapas del trabajo individual y en el tercero se realiza una plenaria donde se comparan las soluciones y justificaciones encontradas en el trabajo grupal.

Rol del docente. El rol del docente juega un papel muy importante en las tres etapas: El papel del docente en el primer momento es orientar al estudiante para que haga una adecuada lectura de la situación problémica y estar dispuesto a aclarar terminología, en caso de ser desconocida por el estudiante, en el segundo momento el papel del docente es estar atento a las discusiones que se lleven a cabo en cada grupo, y si es el caso hacer preguntas que hagan replantear las discusiones que se desarrollan y en el tercer momento el docente promueve la concertación y la negociación de significados a través de la discusión argumentada que presentará cada uno de los grupos sobre la solución de la situación problémica.

Tema: Solución de Ecuaciones
Objetivo: Plantear y solucionar ecuaciones a través del análisis y discusión de situaciones problemas.
Problema: se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle, sus dimensiones serán de 6 por 12m. Un cobertizo rectangular de 40metros cuadrados de área estará en el centro de la plataforma, y la parte no cubierta será el pasillo de anchura uniforme ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?

Trabajo individual: Para el análisis del problema individual se dio un tiempo de 20 minutos. Durante los primeros minutos se percibió silencio, se observó que algunos estudiantes leyeron el problema dos, tres y hasta cuatro veces. Pasados 10 minutos los estudiantes intentaron dar una posible solución a la pregunta. En el desarrollo de ese primer momento se presentaron interacciones como la siguiente:

Pablo: profesora
Docente: señor
Pablo: profe, será que puedo sacar mi cuaderno?
Docente: y para qué?
Pablo: lo que pasa es que no entiendo el problema
Docente: sacando el cuaderno no va a entender el problema, cuántas veces ha leído el problema?
Pablo: dos
Docente: intente leer nuevamente el problema.
Docente: si desconocen algún término, me dicen por favor.

La docente informó que se había terminado el tiempo asignado; la mayoría de estudiantes pidieron 10 minutos más. Se observó que en este tiempo algunos estudiantes plasmaron mediante una gráfica la situación descrita en el problema.

Durante este tiempo la docente fue orientador, además de incentivar a los estudiantes para que hicieran una correcta lectura del problema; de igual forma aclaró varios términos que para algunos estudiantes no eran conocidos, como el de cobertizo.

Trabajo grupal: De acuerdo con lo programado, la segunda parte del trabajo consistió en que cada estudiante explicara a sus compañeros lo que entendió del problema, confrontaran sus interpretaciones y soluciones y sacaron conjeturas, ahora del grupo, llegando a una posible solución. Veamos algunas interacciones que se dieron en los grupos (muestro solamente la interacción de un grupo):

Grupo 2

Paula:¿ cómo analizaron el problema?
Maritza: hice está gráfica (la muestra a sus colegas del grupo), para interpretar mejor el problema, pero no me acordé cómo se halla el área de un rectángulo.
Andrea: yo lo analicé sin tener en cuenta la fórmula [del área] del rectángulo
Maritza: cómo?
Andrea: también hice una gráfica, pero como el ancho de la plataforma es 6, entonces digamos que el cobertizo tiene un ancho de 4 metros, por lo tanto el pasillo tendría un ancho de 1 metro.
Paula: pero, en el problema no dice que el ancho del cobertizo es 4, de dónde sacó el 4?
Andrea: lo deduje de la gráfica. Paula ¿cómo lo analizó?
Paula: La verdad, no lo alcancé a desarrollar
Andrea: ¿por qué no lo hizo?
Paula: tengo claro qué dice el problema, y qué es lo que tengo que hallar pero no sabía cómo plantearlo
Maritza: yo creo que lo podemos seguir analizando teniendo en cuenta la gráfica.
Paula: sabemos que el ancho de la plataforma es 6 y el largo es 12, estos datos nos pueden estar sirviendo para plantear una ecuación.
Andrea: pero es que cómo sabemos cuánto hay entre el borde de la plataforma al cobertizo?
Paula: eso es lo que tenemos que hallar al plantear la ecuación.

Obsérvese cómo ante el interrogante planteado por Paula "¿cómo analizaron el problema?", Maritza contesta "hice está gráfica (la muestra a sus colegas del grupo), para interpretar mejor el problema, pero no me acordé cómo se halla el área de un rectángulo", ante esta respuesta Andrea respondió "también hice una gráfica, pero como el ancho de la plataforma es 6, entonces digamos que el cobertizo tiene un ancho de 4 metros, por lo tanto el pasillo tendría un ancho de 1 metro".

Esta intervención fue acertada, sin embargo para Paula un dato no podría usarse si no está dentro del problema, en éste caso el 4, ya que ella argumenta "pero, en el problema no dice que el ancho del cobertizo es 4, de ¿dónde sacó el 4?", ante éste interrogante Andrea contestó "lo deduje de la gráfica". Después de otras intervenciones Paula propone lo siguiente "sabemos que el ancho de la plataforma es 6 y el largo es 12, estos datos nos pueden estar sirviendo para plantear una ecuación". Teniendo en cuenta esta afirmación, se puede ver cómo Paula está condicionada a que todos los datos que se dan en un problema deben ser utilizados para la solución del mismo; esto es fruto de una enseñanza tradicional donde lo importante es la solución por un algoritmo, mientras que Maritza da una solución haciendo estimaciones, pone en juego capacidades o habilidades matemáticas.

Es de destacar que Andrea es una de las estudiantes que poco participa en clase y obtiene bajas notas, esto hace que el docente tenga una percepción de que siempre su rendimiento es bajo; se resalta que este tipo de trabajo permitió que Andrea mostrara habilidades que de otra forma no lo podría hacer, lo cual hizo que la docente cambiara su percepción respecto a las capacidades de la estudiante. Siguiendo a Voigt (citado en Godino & Batanero, 1994), a través del patrón de discusión se pueden ver competencias que en el estudiante están escondidas; a través del análisis de diversas situaciones estas puedan aflorar en aquellos estudiantes que normalmente se consideran por el docente son malos académicamente.

Plenaria

Para el desarrollo del tercer momento, se les pidió escoger un coordinador por cada grupo para hacer la socialización de las posibles soluciones encontradas en cada grupo.

A partir del análisis presentado en el tablero por Fernando surgió la siguiente interacción: Fernando "el rectángulo representa el área del cobertizo [lo dibujo en el tablero], lo que hicimos fue encontrar una posible respuesta asignándole una variable al ancho del pasillo"; ante ésta afirmación Paula pregunta ¿cómo?", pues dijimos, si el área del cobertizo es de 40 metros cuadrados, entonces restemos a cada lado de la plataforma un metro"; Paula se cuestiona y pregunta ¿por qué no empezaron por ejemplo con un medio?, porque nosotros lo interpretamos como una unidad entera , ante esta discusión Sebastián cuestiona la respuesta dada "pero 11 por 5 da 55 y esa no es el área del cobertizo" , Fernando pide el favor para que lo dejen terminar con la explicación , lo que pasa es que si le restamos uno a cada lado del rectángulo, pues las nuevas medidas de éste quedan de 10 por 4 y otro compañero le termina la frase diciendo "y pues 10 por 4 es el área del cobertizo", Fernando termina afirmando tener la posible solución.

En cuanto a la solución presentada por Paula ella afirma haber utilizado un mismo razonamiento, sólo que no empezaron dando valores, "al ancho le colocamos una variable llamada x". Ante esta afirmación Pedro pregunta "cuál es el valor de la x", Fernando contesta diciendo "igual, la x vale uno", sin embargo Paula afirma "sí, vale uno, pero este valor lo encontramos de multiplicar $(12-2x)(6-2x)=\ 40$ metros cuadrados (desarrolló la operación en el tablero)". La solución a este problema dio x=8 y x=1, pero ante esta respuesta, Pedro interpreta rápidamente y dice "no puede ser ocho, porque ese valor es más grande que el del ancho de la plataforma, en cambio el uno Sí cumple con las condiciones dadas en el problema, ese es el razonamiento matemático que nos hizo falta".

La docente elogia la participación a sus estudiantes con la frase "muy bien". Cabe destacar que Pedro estaba curioso por saber cómo sus compañeros le habían dado solución al problema, ya que el razonamiento que había hecho durante el trabajo en grupo, no había logrado convencer a sus compañeros. Pedro esperó hasta el final para hacer su participación "nosotros partimos teniendo en cuenta el área del cobertizo; 40 es el producto de 8 por 5, de 10 por 4 y de 20 por 2. Entonces, cada uno de estos números los relacionamos con la medida de la plataforma. (…) de estos números el 10 y el 4 son dos unidades menores que 12 y 6, ósea que él ancho del pacillo es uno [un metro]". Ante esta afirmación Fernando pregunta "cómo así que 10 y 4 son dos unidades menores a las medidas de la plataforma"; Paula le contesta, "sí, creo que lo que hicieron fue relacionar el 4 con el 6 que es la medida del ancho de la plataforma, ¿cierto?"(30), Pedro "precisamente ese fue el análisis que se hizo y como el pacillo es uniforme, entonces el ancho del pasillo a lo largo pues es el mismo, o sea uno" (31). Paula lo felicita diciendo "Interesante ese razonamiento, muy bien pedrooooo" [Pedro] (32). Pedro muestra una cara de alegría (dejando ver en su rostro satisfacción de haber podido desarrollar el problema).

Es de destacar que el grupo tres fue el único que dio la solución mediante el planteamiento de una ecuación, los otros dos utilizaron un proceso numérico, pero al final todo el curso entendió las dos soluciones, tanto la numérica, como la encontrada por el planteamiento y solución de la ecuación.

Conclusiones

A través del análisis de los cuestionarios de pregunta abierta aplicados a docentes y estudiantes y de las fichas de observación directa, se lograron identificar los diferentes patrones de interacción y comunicación a los que se recurre frecuentemente en la en la clase de matemáticas. De acuerdo con este análisis se evidenció que dentro de la población de docentes analizados, la mayor parte utiliza el patrón de interacción unidireccional, centrado en el discurso del profesor, donde la comunicación se da en una sola vía. Una minoría utiliza patrones de discusión, centrados en construir el aprendizaje de la matemática a partir de la interacción generada a través de la argumentación y discusión.

Con respecto, al uso de estrategias de comunicación tales como el trabajo en grupo, las narrativas orales y la intencionalidad de la pregunta para el desarrollo de las clases, se confirma que la construcción de significados se da mediante la interacción con el otro, formulando conjeturas, haciendo reelaboraciones con el acompañamiento de colegas y docentes, cuestionando los constructos de otros y promoviendo acuerdos. Lo anterior puede notarse durante en el trabajo en grupo o las plenarias realizado y analizado.

Cuando el aprendizaje es fruto de la interacción y el estudiante tiene la oportunidad de ser partícipe de la construcción de su conocimiento, los conceptos matemáticos se dan de forma natural producto de la negociación de significados; como ocurrió en el taller sobre medición de la cancha de deportes, o en otro sobre solución de ecuaciones. De esta manera el estudiante empieza a hallar sentido en lo que hace y piensa y su actitud frente a la matemática puede verse de una manera diferente a la que genera temor, rechazo y desinterés, que en algunos casos aparece debido a la desconexión de la matemática con el mundo real del alumno.

Por medio del desarrollo de clases basadas en estrategias comunicativas específicas, comenzando con trabajo individual, luego trabajo en pequeños grupos, para finalizar en plenarias, se perciben cambios motivacionales en los estudiantes respecto a la matemática, debido a que esta forma de trabajo permite que el alumno comunique sus ideas, se sienta en libertad y confianza de preguntar a un colega o al docente, y construya los conceptos con el acompañamiento de sus compañeros; además porque se empieza a percibir la matemática como algo cercano al mundo del estudiante, como se evidenció en talleres desarrollados como el de la medición del campo deportivo, y no simplemente como una transcripción de símbolos, formulas y procedimientos sin sentido.

En cuanto a los resultados obtenidos en el desarrollo de clases basadas en las estrategias comunicativas ya mencionadas, se puede resaltar que los estudiantes de nivel básico y medio enfrentan la solución de un problema haciendo uso de la creatividad, el ingenio y la experiencia; mientras que en el nivel superior se observa que los alumnos van siempre en búsqueda de fórmulas y algoritmos, sin tener en cuenta otros caminos para hallar la solución. Este es un aspecto que necesita ser investigado, pues parece que entre mayor es el tiempo de escolarización, el alumno tiende siempre a buscar procedimientos algorítmicos para justificar sus respuestas, aspecto por el que no se preocupan los alumnos de nivel medio; ellos están más empeñados en encontrar solución al problema.

De acuerdo con los resultados obtenidos a partir del análisis de las estrategias de comunicación y de interacción, se puede concluir que la mayoría de docentes tanto del nivel básico y medio como del superior utilizan un mismo patrón de interacción para el desarrollo de las clases, el cual se basa fundamentalmente en la exposición de contenidos y la resolución de ejercicios de aplicación; y la comunicación se centra en que el estudiante responda pequeñas preguntas de regulación del aprendizaje; el discurso de centra en el profesor.

El cambio de concepción epistemológico de la matemática como un conjunto de objetos abstractos y acabados, hacia una visión de la matemática como construcción social e interligada con la cultura se hace imprescindible para dinamizar las clases y mejorar los aprendizajes.

Bibliografía

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significato institucional y personal de los objetos matemáticos . *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-255.

flanders, N. (1977). Análisis de la interacción. *Anaya*, España.

Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 70-92.

Jimenéz E., A., Galindo, S., & suárez, N. (Diciembre de 2010). La comunicación eje central en la clase de matemáticas. *Práxis y Saber, 1*(2), 173-202.

Mathematics, N. C. (1989). Normas profissionais para o ensino da matemática. *APM e IIE*.

Menezes, J. (1995). Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta. *tese de Mestrado*.

Menezes, L. (2004). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. *Escola Superior de Educação de Viseu*.

Menezes, L. (s.f.). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. *Escola Superior de Educação de Viseu* .

Menezes, L., & Ponte , J. (2006). Da reflexão à investigação: Percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na área de Matemática. *Escola Superior de Educação de Viseu e Centro de Investigação em Educação*.

Polya, G. (1992). Cómo plantear y resolver problemas.

Ponte, J. (2007). “A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática". *Revista Portuguesa de Educação*, 39-74.

Stenhouse, L. (1986). La investigación como base de la enseñanza. *Morata*.

UNESCO. (1998). *unesdoc.unesco.org/images/0014/001492/149268s.pdf*. Recuperado el 10 de 11 de 2010, de Primer estudio Internacional Comparativo sobre Lenguaje, Matemática y Factores Aociados en tercero y cuarto grado: nesdoc.unesco.org/images/0014/001492/149268s.pdf

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Estrategias de solución de problemas matemáticos en estudiantes preuniversitarios

Andrés Hernández Córdova
Universidad Simón Bolívar
Venezuela
anhernan9@gmail.com

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar las estrategias de solución de problemas matemáticos de los estudiantes del Ciclo de Iniciación Universitaria (CIU) de la Universidad Simón Bolívar sede del Litoral y cómo el docente apoya este proceso. Se pretende realizar una investigación descriptiva. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas esto es, que desarrollen o consoliden sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas. Y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso.

Palabras clave: solución de problemas, estrategias didácticas para apoyar la solución de problemas, rol del docente.

La solución de problemas es una actividad que desarrollamos en nuestra vida cotidiana, ya que constantemente estamos buscando soluciones a problemas del día a día. Entre los objetivos de la educación matemática está el desarrollar habilidades que permitan a los estudiantes adquirir herramientas para resolver problemas tanto escolares como del contexto.

Históricamente los problemas han ocupado un lugar central en el currículum de Matemática, no así su resolución. Stanic y Kilpatrick (1988) aseguran que "los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas no". Generalmente, la resolución de problemas ha sido objeto de aprendizaje y no de enseñanza, profesores evalúan con problemas cuando nunca en sus clases han trabajado en su resolución

De la revisión de los estudios que ponen énfasis en la aplicación de la resolución de problemas al campo de la enseñanza, sobresalen dos tendencias. En primer lugar, la que se centra en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente. En segundo término surge el papel de la resolución de problemas como instrumento de diagnóstico de errores conceptuales y concepciones alternativas, así como para la evaluación del propio aprendizaje adquirido o del cambio conceptual. En cualquier caso, la realidad pone en evidencia la ausencia de prácticas de metodologías específicas para la resolución de problemas en los programas oficiales y en los libros de texto educativos (Dumas-Carré citado por Perales, 1993).

En nuestro caso se hará énfasis en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente, por considerarlo una importante meta didáctica, que busca la comprensión de los problemas planteados y el desarrollo de estrategias para alcanzar sus soluciones.

El proceso de resolución de problemas en el aula debe considerar cuatro aspectos importantes: 1) la comprensión del problema; 2) los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución del problema; 3) el uso de estrategias para la resolución del problema y 4) el papel del docente como mediador del proceso de solución de problemas

Por otra parte, el docente debe ser mediador del proceso de resolución de problemas, ya que la experiencia de resolver problemas se convierte en una oportunidad de aprendizaje, dándole mayor alcance y posibilitando la toma de conciencia por partes de los estudiantes, acerca de aspectos relevantes del proceso de resolución de problemas.

Campistrous (1996) afirma: “Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.”

La definición anterior es muy importante, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de estudiantes hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que la persona requiere para su solución y las motivaciones para realizarla. En ambos casos, lo antes planteado significa que lo que puede ser un problema para una persona puede no serlo para otra, o bien porque ya conozca la vía de solución o porque no esté interesado en resolverlo (Campistrous, 1996).

En consecuencia es importante desarrollar, en clases, problemas donde los estudiantes discutan cómo comprenden el problema y desarrollen estrategias para su resolución. Para que el estudiante logre realizar este tipo de tareas, las actividades del docente deben estar orientadas a que los estudiantes aprovechen todo su potencial en vías no sólo de obtener respuestas correctas, sino que a su vez vayan construyendo el conocimiento matemático, y desarrollen estrategias de aprendizaje.

Algunas de las dificultades que tienen los estudiantes con el planteamiento de ecuaciones y sistemas de ecuaciones son: aprenden parcialmente una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizaje aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela (MacGregor, 2004), tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión y una manipulación adecuada del uso de las letras en álgebra (Ursini y otros, 2005), la manipulación simbólica (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

En cuanto al concepto de incógnita según el Grupo Azarquiel (citado por Serres, 2010) el primer paso para aprender álgebra es adquirir el concepto de variable y en este sentido expresan que éste es un proceso muy lento, que se desarrolla a muy largo plazo, y al que no se le pueden poner límites iníciales. Para ellos adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos:

Generalización: que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.

Simbolización: que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

Socas y otros (1996) proponen comenzar la enseñanza del concepto de variable basándose tanto en contextos intramatemáticos de la aritmética y de la geometría, como extramatemáticos de situaciones reales. La solución de problemas propicia el trabajo en contextos tanto intramatemáticos como extramatemáticos.

En cuanto al uso del protocolo de modelación con ecuaciones, esta investigación desarrollará el siguiente protocolo:

Comprender el problema: En este paso se debe hacer una descripción de lo que se plantea en el problema, identificar cuáles son los datos y que variables podemos definir

Plantear la ecuación: En este paso se traduce del lenguaje formal al lenguaje algebraico lo que el problema plantea

Resolver la ecuación: Utilizar la técnica adecuada para resolver una ecuación

Comprender la solución: Verificar si la solución es acorde con la conclusión que se debe dar al problema

En el proceso de resolver la ecuación es importante verificar que estrategias utilizaran los estudiantes para obtener la solución del problema. Además de la verificación de la solución; es decir, si la solución obtenida corresponde con los datos y la solución del problema.

Es por esto que el objetivo de esta investigación es describir el proceso de solución de problemas dirigido a estudiantes de nivel preuniversitario, quienes realizan cursos de iniciación para obtener ingreso a la universidad, en carreras administrativas y tecnológicas de la Universidad Simón Bolívar. Esto está planificado para analizar el proceso de solución de problemas matemáticos de los estudiantes, el rol del docente en este proceso y el tipo de problemas que deben resolver estos estudiantes. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas esto es, que desarrollen o consoliden sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas. Y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso.

En cuanto al proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes este trabajo parte del protocolo original de Polya, el cual otros autores han utilizado como base para generar otros protocolos (Schoenfeld (1992)), este es el modelo de los cuatro pasos para la resolución de un problema: 1) Comprender el problema: Aquí se resume toda la información dada y que deseas determinar. En este paso los estudiantes se pueden hacer las siguientes preguntas, ¿Entiendes lo que se dice?, ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?, ¿Distingues cuales son los datos?, ¿Sabes a qué quieres llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña?, ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes? 2) Concebir un plan: En este paso se expresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Aquí es en donde el estudiante diseña una estrategia, entre las cuales tenemos: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, resolver una ecuación, usar casos, buscar una fórmula. 3) Ejecución del plan: en esta fase se implementa la o las estrategias que se escogieron para solucionar completamente el problema o hasta que la misma te sugiera utilizar otra estrategia. 4) Examinar la solución obtenida o mirar hacia atrás: consiste en examinar a fondo cálculos y razonamientos matemáticos utilizados, y que la solución corresponde al problema propuesto.

La formación de la actitud científica mediante la resolución de problemas

La resolución de problema es una actividad relacionada con el proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática, la misma se concibe como un conjunto de acciones y operaciones que el sujeto realiza sobre el objeto; es decir, el alumno, en interrelación con otros sujetos, realiza acciones por medio de las operaciones implicadas en el aprendizaje y el quehacer científico de la resolución de problemas matemáticos. Esta actividad transita por tres momentos, fases o etapas fundamentales: orientación, ejecución y control. Estos momentos son considerados, en la dirección del proceso de aprendizaje enseñanza de la resolución de problemas, para propiciar la formación de la actitud científica de los estudiantes. Destacamos además que estas etapas no son excluyentes, ya que en cada etapa también pueden intervenir las otras dos, pero en determinado instante predomina una de ellas (Barrientos, 2010).

Es por esto que la resolución de problemas genera un aprendizaje desarrollador ya que promueve el desarrollo integral de la personalidad del estudiante a través de la apropiación activa, consciente e intencional de los conceptos, proposiciones, procedimientos y actitudes, potenciando el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, y desarrollando su capacidad para una autoeducación constante a lo largo de su vida (Barrientos, 2010).

En esta investigación vamos a estudiar las diferentes estrategias que aplican los estudiantes del CIU a través de la resolución de problemas, con el fin de que el conocimiento matemático se construya y que el estudiante sea partícipe de su propio aprendizaje.

Otro aspecto importante de esta investigación es considerar la actitud científica en los estudiantes del CIU. Barrientos interpreta la definición de actitud científica como la propuesta general de enseñanza actitudinal planteada por Guitart (2002) que señala:

“La enseñanza actitudinal docente se entiende como un proceso llevado a cabo en la interacción entre el profesorado y el alumnado, en el que el profesorado es un mediador entre las actitudes que hay que aprender y cada escolar, lo cual exige que la función del enseñante sea la de ayudar a cada alumno o a cada alumna a elaborar y construir sus actitudes, hacer conscientes las que no lo sean, replantear lo que sea necesario mostrando nuevos caminos por explotar, reafirmar aquellos procesos infantiles o juveniles, o aquellas situaciones concretas , y propulsar cambios en aquellas actitudes que no sean beneficiosas desde el punto de vista personal y colectivo, para buscar otras actitudes que sean mejores y hagan posibles equilibrios individuales y grupales más estables”.

Entonces la enseñanza de la actitud científica se da en la interacción entre profesores y estudiantes, es decir, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Según Guitart (2002) citado por Barrientos: “esta ayuda no debe consistir únicamente en la interacción que se establece con el estudiante, sino fundamentalmente en la organización de la actividad que lleve a cabo el profesor, que permita al estudiante realizar sus tareas y resolver problemas de manera adecuada, le facilite la recepción de la ayuda que se le brinda y al mismo tiempo pueda también dar ayuda a sus compañeros que así lo requieran.

Para la estrategia didáctica, identificamos los eslabones del proceso de aprendizaje enseñanza de la matemática mediante el ciclo de tres fases, de acuerdo con los tres momentos principales de cualquier actividad: orientación, ejecución y control. Se consideran así las siguientes fases: preparación, dinámica del proceso y evaluación. La primera fase, preparación, considera el diseño y proyección del proceso de aprendizaje enseñanza; la segunda fase corresponde a la dinámica del proceso, consiste a su vez de los eslabones: conocimiento y análisis de la actitud científica, la tercera fase, evaluación, está presente durante todo el proceso y expresa la relación entre el proceso y su resultado (Barrientos, 2010).

En la fase de preparación se considera los aspectos de la estrategia didáctica tales como: la característica de la enseñanza de actitud científica, en la que se enmarca la estrategia, los requisitos para la aplicación de la estrategia, el diagnóstico sobre el estado actual de la actitud científica de los estudiantes, y la preparación metodológica de la asignatura (Barrientos, 2010).

Características de la enseñanza de la actitud científica en las que se enmarca la estrategia (Barrientos 2010)

El profesor es el mediador entre la actitud científica que se debe aprender al resolver un problema y el estudiante.

El tipo de ayuda que brinda el profesor, de manera directa en la interacción que se establece con el estudiante, o a través de la organización social que haga el profesor para la resolución de un problema, coincida la formación adecuada de la actitud científica.

Para que se cumplan estas características se debe tener los siguientes requisitos:

Formación adecuada de los profesores sobre metodología de la enseñanza de la matemática y conocimientos matemáticos generales y específicos de la asignatura, así como sobre la resolución de problema y actitud científica.

Empleo de métodos y medios que permitan propiciar un ambiente de trabajo científico-matemático en el aula, donde:

Se aplica diferentes estrategias para abordar y resolver problemas, posibilitando la reflexión autocrítica, la elaboración cognoscitiva, la rigurosidad, la metacognición y el pensamiento flexible.

Los estudiantes actúan con curiosidad y se sienten motivados e interesados en proponer e intentar probar ideas con confianza y seguridad.

Los medios son fuente de información para el aprendizaje.

Implicar a los estudiantes en el propio contenido del problema a resolverlo basados en sus intereses y su deseo de aprender.

El profesor debe facilitar a los estudiantes que se responsabilicen individualmente de la formación de su propia actitud científica.

Combinar adecuadamente el trabajo individual y el grupal.

Tomar en cuenta, para la evaluación, la forma en que el estudiante aborda y se implica en el problema durante el proceso de resolución, facilitándole que exprese lo que piensa y siente, y pueda adoptar decisiones para desarrollar sus ideas.

Ahora para apoyar a los estudiantes de nivel preuniversitario en su proceso de solución de problemas es importante que el docente tenga un rol de observador participante, que permita a las y los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático, probar, hacer inferencia, identificar conceptos, procesos y resultados de la matemática del bachillerato necesarios para resolver el problema, sacar cuentas con casos sencillos, y, en caso de que el estudiante no avance en el proceso, entonces el docente hace preguntas abiertas que estimulen la explicación, el ordenamiento de las ideas, el razonamiento, en fin, desarrollar la actitud científica.

En este sentido plantea Barrientos (2010) que el docente es el mediador entre la actitud científica que se debe aprender al resolver un problema y el estudiante; el tipo de ayuda que brinda en la interacción que se establece con el estudiante, o a través de la organización social que haga para la resolución de un problema, debe promover la formación adecuada de la actitud científica y el aprendizaje significativo haciendo que los estudiantes relacionen en su experiencia de resolución de problemas lo que ya saben con lo que tienen que aprender. El docente debe facilitar aprendizajes funcionales, prácticos y conscientes de la actitud científica por parte de los estudiantes, orientándoles para hacer explícito lo que parece tácito o implícito, en otras palabras para que desarrollen sus procesos metacognitivos.

Resultados

Criterios de escogencia de los problemas: problemas que pueden resolverse a través del planteamiento de una ecuación o de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Según el programa de la asignatura Matemáticas II del Ciclo de Iniciación Universitaria de la Universidad Simón Bolívar.

Caso problema las páginas de un libro: conocimiento de números consecutivos, de descomposición en factores primos, factorización simple, fórmula cuadrática. Estrategias de solución: ensayo y error, modelación con ecuaciones, comparación con problemas resueltos anteriormente.

Se analizaron los procesos de cuatro estudiantes del CIU encontrando que: - un estudiante descompuso el número 992 (producto de las páginas del libro) en factores primos, que resulta $992 = 2^5 .31 = 32.31$, con esto el estudiante responde que las páginas son 31 y 32; - un segundo estudiante resolvió el problema de forma algebraica realizando los pasos para resolver un problema que son: a) comprender el problema; b) plantear la ecuación; c) resolver la ecuación, y d) comprender la solución. Esta persona utilizó la fórmula de la resolvente para resolver la ecuación cuadrática correspondiente al problema. Una tercera persona utilizó el ensayo y error como su estrategia. Este estudiante iba realizando multiplicaciones de números consecutivos y se fue dando cuenta que el producto de los números consecutivos que tomaba era mayor a 992, es por esto que fue bajando y probó con el producto de 24 x 25 = 600, ahí noto que debían ser por los 30, hasta que llegó al resultado de 31 x 32. Y el otro por factorización simple: $x(x+1) = 992; x^2 + x - 992 = 0; (x+32)(x-31) = 0$

Caso problema jaula de animales. Conocimiento acerca del número de patas de los canarios y los conejos. Estrategias de solución: ensayo y error, modelación con ecuaciones. Para este problema se noto una dificultad para plantear la ecuación que relaciona el número de patas y en consecuencia aplican ensayo y error, pero una característica importante es que sabían que el problema se podía resolver con un sistema de ecuaciones pero no pudieron plantear las ecuaciones.

Conclusiones

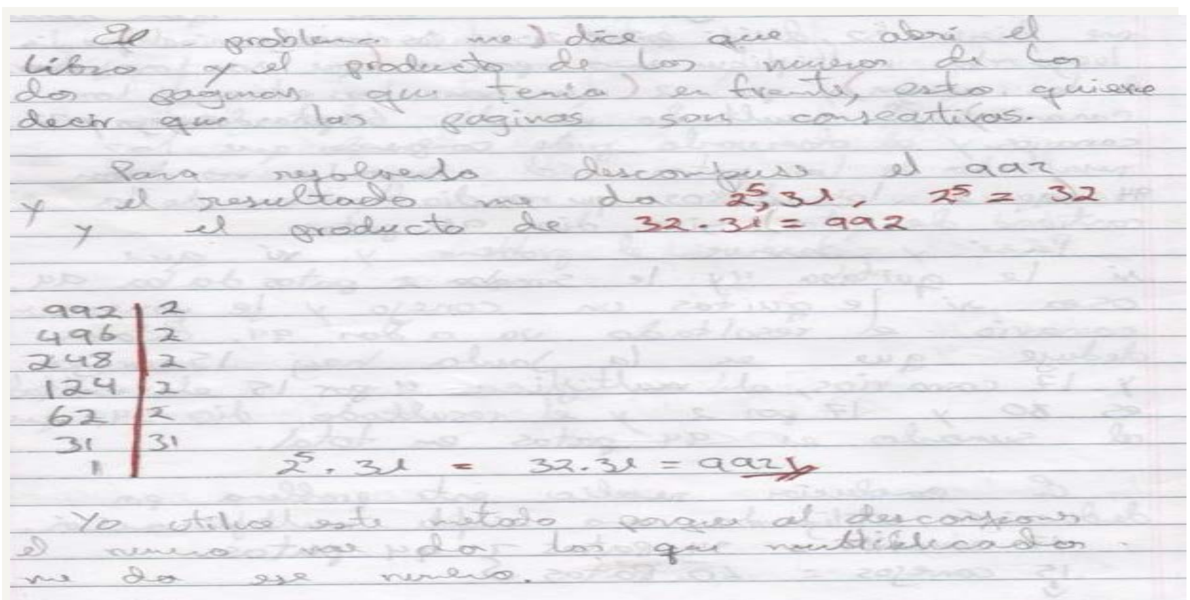
Los estudiantes se iniciaron en la estrategia resolución de problemas y por la carencia de recursos cognitivos y otros factores no llegaron a desarrollar el módelo de Polya.

Por otra parte, se observó que previo a la aplicación de la estrategia de resolución de problemas los estudiantes utilizaron el ensayo y error como su estrategia didáctica para dar respuesta al problema. Aunque algunos estudiantes desarrollaron los problemas aplicando el método.

Planificar el tipo de problema ayuda a estar alerta de estimular la actitud científica.

Elaborar un banco de problemas resueltos por los estudiantes permite apoyar la comprensión del problema e ilustrar las distintas estrategias que pueden usarse para resolver un mismo problema.

Figuras



El problema me dice que abrí el libro y el producto de los numeros de las dos paginas que tenia en frente, esto quiere decir que las paginas son consecutivas.

Para resolverlo descompuse el 992 y el resultado me da $2^5, 31$, $2^5 = 32$ y el producto de $32 \cdot 31 = 992$

992	2
496	2
248	2
124	2
62	2
31	31
1	

$2^5 \cdot 31 = 32 \cdot 31 = 992$

Yo utilice este metodo porque al descomponer el numero [illegible] los que multiplicados me da ese numero.

Figura 1. Problema resuelto por factorización simple

① Comprensión del problema =

Para llegar a la comprensión del problema fue algo difícil con la ayuda del profesor lo pude comprender un poco, supe que necesitaba saber el número de las paginas que multiplicadas entre sí de de el Nº 992.

② Plantear la Ecuación =

x = Que es la incognita

999 = El número de paginas

$x(x+1) = 992$

③ Resolver la ecuación =

$x(x+1) = 992$

$x^2 + 1x = 992$

$x^2 + 1x - 992 = \cancel{992} - 992$

$x^2 + 1x - 992 = 0$

A B C

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4(a.c)$

$= 1^2 - 4(1)(-992)$

$= 1 + 3968 = 3969$

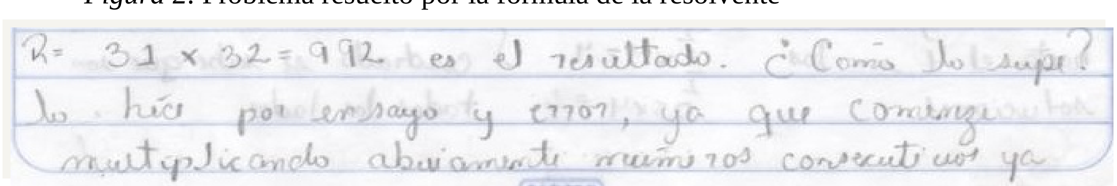
$\frac{-1 \pm \sqrt{3968}}{2}$

$x_1 = \frac{-1+63}{2} = \frac{62}{2} = 31$

$x^2 = \frac{-1-63}{2} = \frac{-64}{2} = -32$

④ El numeros de las pagina son 31 y 32 y la multiplicación de ambos números da 992 Exacto.

Figura 2. Problema resuelto por la fórmula de la resolvente



R= 31 × 32 = 992 es el resultado. ¿Como lo supe? lo hice por ensayo y error, ya que comencé multiplicando obviamente números consecutivos ya

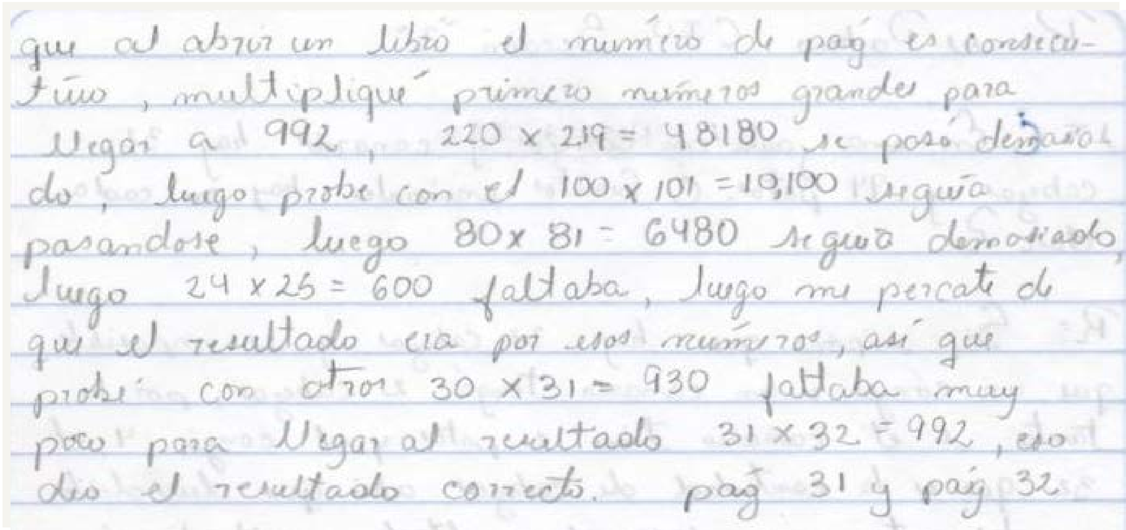

que al abrir un libro el número de pág. es consecu-
tivo, multipliqué primero números grandes para
llegar a 992, 220 x 219 = 48180 se pasó demasia-
do, luego probé con el 100 x 101 = 10,100 seguía
pasandose, luego 80 x 81 = 6480 seguía demasiado,
luego 24 x 25 = 600 faltaba, luego me percaté de
que el resultado era por esos números, así que
probé con otros 30 x 31 = 930 faltaba muy
poco para llegar al resultado 31 x 32 = 992, eso
dio el resultado correcto. pág 31 y pág 32

Figura 3. Problema resuelto por ensayo y error

Referencias y bibliografía

Barrientos, O. (2010). *La actitud científica ante la resolución de problemas matemáticos*. La Paz: IIICAB.

Campistrous, L y Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial pueblo y educación.

Charles, R., Lester, F., O`Daffer, P. (1994). *How to evaluate progress in problem solving*, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. Enseñanza de las Ciencias. 11(2). 170-178.

Polya, G. (1957). How to solve it. New Jersey: Princeton University.

Serres, Y. (2000). *Aspectos a considerar en un diseño de instrucción centrado en el proceso de solución de problemas matemáticos. Caso del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la UCV.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 13.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Editorial Trillas, ISBN 968-24-6752-7, 165 páginas, México.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Etnomatemática e Discurso Performático: a construção de identidades na escola

Júlio César Augusto do **Valle**
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo
Brasil
julio.valle@usp.br

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar as reflexões decorrentes de uma pesquisa, realizada com mais de sessenta alunos em uma escola privada da cidade de São Paulo, que procurou avaliar como concebem diferentes povos africanos e indígenas, com a hipótese de que a escola, bem como a Educação que propõe, contribua para construção de representações incompletas dessas identidades. Além disso, o discurso *descritivo* apresentado pelos alunos foi entendido a partir do conceito de *performatividade* de Butler (1993), segundo o qual alguns discursos supostamente descritivos seriam capazes de, além de descrever um indivíduo ou um grupo, criar sobre tal indivíduo ou grupo uma representação de identidade vinculada à descrição feita. Associa-se tal construção às perspectivas de Vergani (2007) sobre exclusão, observando o modo como a Educação articula discursos e ideias provenientes do senso comum no cotidiano escolar para refletir sobre suas possíveis consequências, sob a perspectiva da Etnomatemática de D'Ambrosio (1999; 2011).

Palavras chave: Etnomatemática, Identidade Cultural, Performatividade, Discurso Performático, Comunidades Indígenas e Africanas.

Não é tarefa fácil compreender as maneiras por meio das quais certos discursos e concepções provenientes do senso comum são articulados no cotidiano escolar de modo a produzir, muitas vezes, um ambiente propício a algumas formas de exclusão (Vergani, 2007; Meyer, 1999). Esse é o caso daqueles buscam descrever, por exemplo, as identidades das mais variadas comunidades indígenas e africanas. Pode-se observar, afinal, que existe, de fato, um conjunto de discursos e concepções bastante *limitados* a respeito destas identidades que impregnam o cotidiano escolar dos alunos, corroborando situações de exclusão e preconceito.

A partir dessa constatação, é relevante, portanto, que se procure compreender como os alunos – na posição de indivíduos inseridos neste contexto – constroem suas próprias concepções dessas identidades culturais específicas, a fim de avaliar em que medida a escola – bem como o próprio modelo de Educação que propõe – influi nas concepções de identidade de seus alunos.

Sob essa perspectiva, realizou-se, na primeira etapa deste trabalho, uma pesquisa com alunos de uma escola particular, que objetivou obter as formas como estes alunos concebem as identidades de comunidades indígenas e africanas. Para que se possa compreender o modo como os resultados da pesquisa realizada serão utilizados durante a reflexão posterior, é interessante descrever determinados aspectos tanto sobre a própria metodologia da pesquisa, quanto sobre a estrutura da escola e algumas características dos alunos.

A pesquisa consistiu-se de um questionário de três questões, em que os alunos deviam descrever primeiro o que têm *ouvido* sobre povos africanos, depois o que têm *ouvido* sobre povos indígenas e, explicar, posteriormente, qual sua impressão sobre os modos/condições de vida e das culturas destes povos[1]. É relevante observar que, para descrever suas impressões sobre os modos/condições de vida e a cultura dos povos africanos e indígenas, os alunos contavam com a seguinte ressalva no enunciado da terceira questão: “se for preciso, descreva-os separadamente”. Tal ressalva – bem como o objetivo em explicitá-la – será recuperada adiante na reflexão. Os alunos puderam responder ao questionário no tempo que considerassem necessário e suficiente de modo que não precisaram entregá-lo com algum tipo de urgência ou pressa.

A escola onde se realizou a pesquisa chama-se Colégio Nicolau Kerpen, situa-se na Zona Oeste de São Paulo em um bairro majoritariamente residencial de classe média. É frequentada por alunos que, em sua maioria, residem nas proximidades da escola e, por isso, possuem a mesma caracterização socioeconômica. A escola, que atua em todos os níveis de educação básica, tem aproximadamente 300 alunos, caracterizando – comparativamente a outras escolas da cidade de São Paulo – uma escola de pequeno porte.

Os alunos que receberam/responderam o questionário foram 64 alunos distribuídos entre três séries do atual Ensino Fundamental II (mais especificamente, 16 alunos do sexto ano, 23 alunos do sétimo ano e 25 alunos do oitavo ano), compreendendo as idades de 10 a 13 anos. É importante mencionar que não receberam qualquer ajuda ou orientação que pudesse induzi-los à produção de determinados enunciados.

Assim, nos minutos que sucederam a entrega do questionário, os alunos de cada uma das turmas produziram – sem qualquer comando que os orientasse rumo às expectativas do pesquisador/educador com aquela atividade – valiosos relatos de suas concepções das identidades africanas e indígenas, constituindo ponto de partida essencial para a reflexão que se segue. Para evitar qualquer ambiguidade, é importante sublinhar que o entendimento que se tem a respeito das “concepções dos alunos” é a partir do *olhar* do aluno. Isto é, sempre que houver menção a essa expressão, a intenção é avaliar de que maneira os alunos crêem ser a vida desses grupos. Vale sublinhar também que o entendimento que se assume é o de que esses relatos são

[1] As questões foram enunciadas das seguintes formas: “O que você tem ouvido sobre povos africanos?”; “O que você tem ouvido sobre povos indígenas?”; e “o que **você** pode dizer sobre esses povos? Qual sua impressão sobre seus modos/condições de vida e sua cultura? Se for preciso, descreva-os separadamente.”

descrições das **representações** *elaboradas* – ou internalizadas, quando meras reproduções – pelos alunos. De fato, concebe-se representação como

> o resultado de um processo de produção de significados pelos discursos, e não como um conteúdo que é espelho e reflexo de uma "realidade" anterior ao discurso que a nomeia. Segundo essa concepção, representações são noções que se estabelece discursivamente, instituindo significados de acordo com critérios de validade e legitimidade estabelecidos segundo relações de poder. (Costa, 1999, p. 40)

Observa-se, na maneira como descrevem comunidades africanas e indígenas, que a maior parcela dos alunos recorre em todo momento a um sistema de explicações que, por alguma razão, é tomado como referência. Afinal,

> a representação não é simplesmente um meio transparente de expressão de algum suposto referente. Em vez disso, a representação é, como qualquer sistema de significação, uma forma de atribuição de sentido. Como tal, a representação é um sistema linguístico e cultural: arbitrário, indeterminado e estreitamente ligado a relações de poder. (Silva, 2012, p. 91)

Logo, observar o modo como se expressam certas representações significa considerar essencialmente os próprios conceitos de *identidade* e *diferença*. Isso porque são conceitos que passam a existir por meio da representação (Silva, 2012).

Dito isso, pode-se passar a segunda etapa deste trabalho: a descrição dos dados que foram coletados com a pesquisa. Primeiramente, cabe informar que, dado o conjunto de respostas obtidas, seria indiferente, do ponto de vista analítico, fazer diferença entre as respostas dos alunos pelas turmas as quais cada aluno pertence, justamente porque a maior parte das respostas apresentam consonâncias bastante acentuadas, enquanto as dissonâncias são observadas apenas pontualmente em cada uma das turmas. Esse fato parece ser um importante indicativo de que pouco fez a escola para alterar as concepções que os alunos têm a respeito desses grupos culturalmente distintos. Ademais, as três questões propostas pelo questionário foram avaliadas em conjunto nas análises que seguem.

Logo, a primeira distinção que pode ser observada é entre os alunos que foram, em suas descrições, absolutamente sintéticos – quase simplistas – e os alunos que se destacaram por apresentar algum elemento discursivo mais crítico, incisivo ou reflexivo. Este último grupo é formado por 13 alunos, enquanto o primeiro é formado pela grande maioria: 51 alunos. O critério que permitiu essa primeira divisão foi o seguinte: seriam considerados simplistas os alunos que não apresentassem descrições que, em essência, divergissem de características socioeconômicas simples como *pobres* e suas implicações cotidianas (como passar fome ou sede) ou *sem moradia* e enunciados análogos, bem como características étnicas como o *ser negro* ou *ser mulato*.

São exemplos bastante ilustrativos desse grupo as seguintes respostas sobre os africanos: "eles são negros, pobres e estão passando fome, falam outra língua", "são povos sem dinheiro, sem tecnologia, sem saneamento" e mesmo respostas aparentemente mais completas como "eu ouvi falar que em alguns lugares da África como a Etiópia as pessoas passam fome, não tem onde morar e muitos trabalham catando lixo para ganhar dinheiro". Para as comunidades indígenas, exemplos ilustrativos de respostas são "que são pobres e não tem acesso a escolaridade", "foram povos escravizados" e mesmo respostas como "tem cultura diferente que os povos da cidade". Um subgrupo de 4 alunos ainda observou a participação da África na Copa das Confederações, que ocorreria no Brasil nas vésperas da entrega do questionário. No entanto, em nenhuma das quatro respostas fica claro se os alunos faziam menção à participação de países da África enquanto continente africano ou à participação do país África do Sul nos jogos. Algumas respostas ainda eram "complementadas" com a recorrente *falta de vestimenta* dos índios ou a *escravização* dos negros.

Ademais, entre os 51 alunos considerados simplistas em suas respostas, é possível identificar cinco alunos que afirmam não ter ouvido absolutamente nada a respeito destas comunidades. Todavia, estes mesmos cinco alunos elaboraram respostas para a terceira pergunta afirmando que suas impressões sobre as condições/modos de vida das comunidades indígenas e africanas são pobres, vítimas de miséria...

O enunciado acima revela uma importante hipótese de como os discursos apresentados anteriormente podem ter sido construídos, justamente porque sugere que representar significa produzir significados a partir de um sistema claramente comparativo, em que o mais *fraco* será representado por meio de descrições depreciativas. De fato, é bastante evidente, a partir da análise dos conteúdos dispostos acima, que

> não há realidade intrinsecamente verdadeira, pois os enunciados tomados como verdades são construídos discursivamente segundo um regime ditado por relações de poder. Representar é produzir significados segundo um jogo de correlação de forças no qual grupos mais poderosos – seja pela posição política e geográfica que ocupam, seja pela língua que falam, seja pelas riquezas materiais ou simbólicas que concentram e distribuem, ou por alguma outra prerrogativa – atribuem significado aos mais fracos e, além disso, impõem a estes seus significados sobre outros grupos. (Costa, 1999, p. 42)

Os demais 13 alunos elaboraram descrições que se destacaram, de algum modo, das concepções do senso comum apresentadas pelo grupo anterior de alunos. O primeiro conjunto de respostas que deve ser colocado em evidência entre esses alunos revela uma preocupação apenas com a situação dos índios brasileiros que, conforme algumas respostas, "estão invadindo fazendas", "estão tentando tomar terras de fazendeiros", "estão perdendo suas moradias para o governo construir indústrias", ou que "tem lutado contra o governo para recuperar suas terras". Um aluno ainda afirmou "que suas terras estão sendo tomadas sem sua autorização". Essas respostas revelam, de fato, um conhecimento relativamente maior quando comparado às características étnicas e socioeconômicas apresentadas pelos alunos do grupo anterior.

Entretanto, é importante observar que o modo como os alunos constroem suas respostas, nesses – e em outros – casos, parece revelar, implicitamente, seus juízos de valor. Isso significa que, apenas por meio da leitura de suas respostas, é possível identificar um esboço da opinião do aluno a respeito de quem está certo ou errado em cada situação (este tópico será retomado na discussão que segue). Trata-se efetivamente do reflexo de uma "realidade" (Costa, 1999), da realidade na *perspectiva* do aluno. Os demais alunos pertencentes a este grupo dissertaram sobre o preconceito vivenciado por indivíduos de ambos os povos, que devido às condições precárias de vida que possuem, são "**excluídos do mundo**".

Para que a reflexão sobre os resultados obtidos não se restringisse apenas à distinção apresentada anteriormente – que poderia revelar pouco das informações como um todo – existem outras duas distinções interessantes, do ponto de vista analítico. A primeira delas diz respeito à descrição da cultura em si ou das diferenças culturais entre os povos mencionados. Considerando como parâmetro para outra divisão a descrição de aspectos culturais, estabelece-se o seguinte quadro: 24 alunos abordaram a questão das diferenças culturais enquanto 40 alunos sequer tangenciaram-na. Ainda assim, entre os alunos que abordaram a questão da cultura, alguns se limitaram apenas a qualificar as culturas africanas e indígenas como *diferentes, simples* ou mesmo *atrasadas*.

Existem, entretanto, algumas respostas que se tornaram ilustrativas para aqueles alunos que abordaram a questão cultural como, para os indígenas, “sofrem preconceitos do estado que não dá espaço para a cultura”, “eu apoio eles continuarem sua cultura, mas a história ainda é muito triste”, “sua cultura está sendo destruída aos poucos”, “sua cultura é rica”, “muitos deles preferem a simplicidade”, “fazem remédio com plantas e pintam o rosto” e, sobre os africanos, “cantar ritual, fazer rodas e cantar música africana” ou “eles são a base de nossa cultura”. Embora, algumas respostas revelem o esforço para reconhecer a riqueza em um contexto onde os alunos estão “acostumados” a identificar aspectos negativos, os alunos que abordaram a questão cultural em sua resposta, decididamente, identificaram nela elementos relevantes para suas descrições.

A terceira e última distinção feita diz respeito à ressalva presente no enunciado da terceira questão. A última questão solicitava que cada aluno descrevesse o que pode dizer sobre os povos mencionados nas questões anteriores, refletindo sobre sua impressão a respeito dos modos/condições de vida e da cultura destes povos. A ressalva consistia, portanto, no seguinte enunciado: “se for preciso, descreva-os separadamente”. Tal distinção permitiu, novamente, dividir os alunos em dois grupos: aqueles que descreveram qualidades de povos africanos e indígenas separadamente e aqueles que não o fizeram. O primeiro grupo, minoritário, constitui-se, agora, de 14 alunos. Todos os demais (50 alunos) elaboraram uma única resposta que, em sua concepção, abordaria qualidades de maneira abrangente. É necessário dizer, assim, que, para este grupo de alunos, as características descritas, na tentativa de abranger os povos mencionados, tornavam-se vagas. Exemplos disso são “eles não vivem em cidades”, “são diferentes de nós”, “ambos sofrem preconceito por ser negro”, “não tem condições de viver uma vida melhor”, “vivem com pouca coisa”, “não tem nenhum acesso a nossa cidade”, “são povos comuns e tem culturas parecidas”, “os dois vivem da caça e são pobres”...

Debe-se ressaltar uma observação relevante: não existe interseção entre os três recortes feitos que permitisse uma conclusão mais específica a respeito do próprio perfil dos alunos. Encontra-se, dessa maneira, alunos que oscilam entre os grupos majoritários e minoritários dos três recortes. Em outras palavras, o mesmo aluno caracterizado como simplista em um primeiro momento pode ter optado por descrever povos indígenas e africanos separadamente na terceira questão. Desse modo, na primeira divisão, esse aluno integrou o grupo majoritário, enquanto na última, o mesmo aluno integrou um grupo mais seleto.

Restam, portanto, algumas respostas que podem inspirar a reflexão deste e de outros artigos que venham a tratar da mesma temática e, portanto, é interessante que estejam dispostas aqui. Esse é o caso de asserções como, a respeito dos africanos, “tenho pena dos africanos”, “eles sofreram muito” e “alguns são tristes”. Enquanto, a respeito dos indígenas, é o caso de asserções como “eu não sei sobre eles, sei sobre os índios do passado, mas hoje não sei”, “as pessoas vem tentando muda-los para se parecerem com as pessoas da cidade” ou “vivem com coisas antigas como é sua cultura”. Existem asserções semelhantes que abrangiam ambos os povos: “sua cultura permanecia intacta, apesar das várias tentativas do povo de muda-las”, “seus modos de vida é simples, condições ruins e são satisfeitos com isso”, “ambos são povos sofredores que lutam pelos seus direitos” e até mesmo “acho que todos eles precisam de amor e ajuda pois sofrem muitas dificuldades”.

Para introduzir a reflexão a partir do conteúdo disposto anteriormente, é essencial observar que

> os relatos sobre o outro, nos mais variados campos da cultura, têm fabricado identidades nem sempre tacitamente acolhidas por seus protagonistas. Mesmo assim, as identidades contestadas circulam e produzem seus efeitos na política cultural. Além disso, o poder, na política da representação, transita pluridirecionalmente, produzindo configurações inusitadas nas múltiplas possibilidades da correlação de forças. (Costa, 1999, p. 47)

Assim, é preciso reconhecer e compreender "a existência de um jogo de correlação de forças que estabelece critérios de validade e legitimidade segundo os quais são produzidas representações, sentidos, e instituídas 'realidades'" (Costa, 1999, p. 41). Ademais, quando se considera conceitos relativos à etnias determinadas, deve-se evidenciar que estes

> constituem formas pelas quais se instituem e legitimam variadas práticas de inclusão, exclusão, subordinação, privilegiamento e exploração com base em supostas diferenças biológicas, fisionômicas, culturais, morais, históricas e/ou territoriais que se transmutam em origens e destinos comuns e que podem ser construídas no interior dos grupos, ser impostas do exterior ou se produzirem na interconexão desses movimentos e dessas relações. (Meyer, 1999, p. 71)

Existem, portanto, variados fenômenos e relações de poder que corroboram a construção – aparentemente de maneira subjetiva – de certas concepções e discursos a respeito de grupos sociais, étnicos e, para o efeito das considerações deste trabalho, culturalmente distintos, em geral. Isso porque "a cultura está implicada com a forma pela qual estes fenômenos manifestos são produzidos por intermédio de sistemas de significação, estruturas de poder e instituições" (Meyer, 1999, p. 76).

No entanto, quais seriam os efeitos de representações que, como aquelas apresentadas acima, além de depreciar certos grupos culturalmente distintos, são incapazes de lhes reconhecer qualquer *valor*? Para sugerir *uma* possível resposta, isto é, que contemple um dos efeitos das representações descritas pelos alunos, é necessário observar o seguinte: algumas vezes, discursos que pretendem ser somente descritivos podem corroborar a construção efetiva do sentido que pretendiam apenas descrever (Butler, 1993)[2]. É importante compreender que,

> em seu sentido estrito, só podem ser consideradas performativas aquelas proposições cuja enunciação é absolutamente necessária para a consecução do resultado que anunciam. Entretanto, muitas sentenças descritivas acabam funcionando como performativas. Assim, por exemplo, uma sentença como "João é pouco inteligente", embora pareça ser simplesmente descritiva, pode funcionar – em um sentido mais amplo – como performativa, na medida em que sua repetida enunciação pode acabar produzindo o "fato" que supostamente apenas deveria descrevê-lo. É precisamente a partir desse sentido ampliado de "performatividade" que a teórica Judith Butler analisa a produção da identidade como a questão da performatividade. (Silva, 2012, p. 93)

Sob essa perspectiva, a imensa maioria – para não dizer todos – dos discursos construídos pelos alunos, que tinham apenas a intenção de descrever uma situação socioeconômica, podem ser considerados como discursos performáticos. Isso porque

> ao dizer algo sobre certas características identitárias de algum grupo cultural, achamos que estamos simplesmente descrevendo uma situação existente, um "fato" do mundo social. O que esquecemos é que aquilo que dizemos faz parte de uma rede mais ampla de atos linguísticos que, em seu conjunto,

---

[2] O texto foi traduzido e incorporado na obra *O corpor educado – Pedagogias da sexualidade* de Guacira Lopes Louro.

> contribui para definir ou reforçar a identidade que supostamente apenas estamos descrevendo. (Silva, 2012, p. 93)

Desse modo, o excerto acima aponta para a observação de que é preciso conceber tais discursos inseridos em uma rede mais ampla de significações, sejam sociais, culturais ou mesmo puramente políticas. Esse olhar para a identidade, do ponto de vista político, chama a atenção para o fato de que identidades também podem ser construídas de maneira negativa, de modo a descaracterizar – excluir, marginalizar – grupos políticos e socioculturamente distintos. Tal asserção se torna evidente quando consideramos um importante ensinamento de Foucault: “descrever ‘o outro’ como carente e, então, suprir o que supostamente lhe falta é uma forma de governo” (Costa, 1999, p.55). De fato, quando se tem consciência do que é enunciado por Foucault nas palavras da autora, torna-se mais fácil compreender como surgem nas respostas dos alunos frases como “tenho pena dos africanos” ou “acho que todos eles precisam de amor e ajuda pois sofrem muitas dificuldades”.

Todavia, classificar os discursos dos alunos como **discursos performáticos**, mesmo quando pretendiam ser descritivos, não significa afirmar, em qualquer instância, que sejam/estejam equivocados. Afinal, toda representação é legítima, justamente porque, como dito anteriormente, não existe realidade intrinsecamente verdadeira. Ademais, a identidade é relacional (Woodward, 2012). Isso significa que,

> podemos dizer que a identidade é uma construção, um efeito, um processo de produção, uma relação, um ato performativo. A identidade é instável, contraditória, fragmentada, inconsciente, inacabada. A identidade está ligada a estruturas discursivas e narrativas. A identidade está ligada a sistemas de representação. A identidade tem estreitas conexões com relações de poder. (Silva, 2012, p. 96)

Entretanto, se não se pode qualificar qualquer um dos discursos apresentados pelos alunos como equivocados ou distorcidos, qual é o interesse de classificá-los quanto à *performatividade*? O objetivo de tal classificação é ressaltar sua incompletude ou sua parcialidade quando se considera a maneira como se construíram tais concepções/discursos bem como os atores dessa construção. Nesse sentido, o seguinte pode ser bastante elucidativo: em seu texto, Costa (1999) conta sobre a dificuldade de pesquisadores e artistas da época ao tentar “enquadrar” Frida Kahlo nos movimentos artísticos conhecidos até então – mais especificamente, o surrealismo – enquanto a própria artista não se considerava surrealista.

Além disso, a autora enuncia “recortes” da identidade de Frida Kahlo: que pode ser concebida como a artista surrealista ensinada nas escolas de arte; ou a mulher mexicana que inspirou movimentos étnicos e feministas; ou mesmo, a Frida Kahlo “que explorava e problematizava a relação entre a arte e a experiência numa tentativa de inventar sua própria identidade como um gesto político de afirmação cultural e de resistência à captura de sua identidade pelos colonizadores” (Costa, 1999, 50). Após construir uma descrição análoga para os índios brasileiros, a autora afirma que

> o mais importante é compreender que todas elas são identidades inventadas, socialmente construídas. Nenhuma corresponde a uma “verdadeira” Frida Kahlo ou ao “verdadeiro” índio, simplesmente porque as identidades não têm uma essência, e o acesso a qualquer identidade é sempre mediado pelos discursos, pela linguagem. **Mas o que podemos e devemos reivindicar é o direito dos grupos e dos indivíduos de descreverem a si próprios, de falarem do lugar que ocupam, de contarem sua versão da história de si mesmo, de inventarem as narrativas que os definem como participantes da história.** (Costa, 1999, p. 50) Grifos do autor.

Do mesmo modo, é importante compreender que as identidades africanas e indígenas para as quais os alunos tentaram construir representações são socialmente construídas, absolutamente inventadas. No entanto, quando poucos alunos conseguem, com muita dificuldade, reconhecer *valor* nas identidades que procuram descrever, deve-se questionar o quanto têm **ouvido** e o que têm **ouvido** – e aqui se torna evidente o motivo pelo qual tal constrói-se as questões a partir desse verbo – a respeito desses povos, justamente porque é essencial “olhar um pouco para dentro da escola e do currículo e ver que histórias estão sendo produzidas aí e como se constroem os sentidos de pertencimento e exclusão” (Meyer, 1999, p. 81). Deve-se compreender, ademais,

> que tais representações são completamente justificadas numa lógica cristalina. A “ordem da razão” tem sexo, etnia e projeto político-filosófico – o sujeito da racionalidade ocidental que produziu os conhecimentos identificados como patrimônio cultural da humanidade foi concebido na filosofia ocidental moderna, é unitário, centrado, masculino, branco e europeu. Tudo o mais são “outros”. (Costa, 1999, p. 60)

Além disso,

> é também por meio da representação que a identidade e a diferença se ligam a sistemas de poder. Quem tem o poder de representar tem o poder de definir e determinar a identidade. É por isso que a representação ocupa um lugar tão central na teorização contemporânea sobre identidade e nos movimentos sociais ligados à identidade. Questionar a identidade e a diferença significa, nesse contexto, questionar os sistemas de representação que lhe dão suporte e sustentação. No centro da crítica da identidade e da diferença está uma crítica das suas formas de representação. Não é difícil perceber as implicações pedagógicas e curriculares dessas conexões entre identidade e representação. (Silva, 2012, p. 91)

É possível perceber, portanto, no encadeamento dos excertos acima, a íntima relação entre a escola – e suas práticas pedagógicas, bem como os discursos que as sustentam – e as concepções dos alunos a respeito de, por exemplo, povos indígenas e africanos. Afirma-se, a partir disso, que “professores e professoras estão bastante implicados/as na produção e reprodução dos discursos e práticas que configuram as fronteiras e os sujeitos e que constituem suas múltiplas identidades culturais” (Meyer, 1999, p. 81). Contudo, como é possível que, por meio da educação – ou mesmo por meio do ensino de uma disciplina específica, como a Matemática – professores e professoras possam contemplar tais expectativas? Sobre essa questão, a Etnomatemática[3] tem formulado respostas bastante interessantes que devem ser consideradas.

De fato, a Etnomatemática

> se propõe a resgatar as manifestações culturais que ficaram subordinadas e que pouco a pouco vão sendo perdidas. Por exemplo, ao se estudar as culturas indígenas, a matemática escolar se apresenta com uma roupagem de superioridade, com o poder de deslocar, de eliminar a “matemática do índio”. Mas o mesmo se dá com outras formas culturais, como comportamento, medicina, arte, religião. Em particular essas duas últimas são reduzidas a folclore. Não é incomum levar aspectos do culto religioso indígena a espetáculos circenses. Isto tem como efeito eliminar o próprio índio como entidade cultural. (D’Ambrosio, 1999, p. 85)

[3] Embora o título sugira um enfoque específico na matemática, trata-se de um estudo da evolução cultural da humanidade no seu sentido amplo, baseado na dinâmica cultural que se nota nas manifestações matemáticas. (D’Ambrosio, 1999)

Outra característica importante da Etnomatemática é o fato de que

> atenta às especificidades sociocultural, debruça-se sobre a alteridade dos processos cognitivos, psicoemocionais, comportamentais e práxicos. Esta inserção na antropologia cognitiva e sociocultural é uma fonte inesgotável de descoberta das intersecções reais entre diferentes disciplinas em cada situação vivencial, a partir da experiência e do saber matematizantes. A etnomatemática conhece e “fala” diversas “linguagens” humanas. Compreende, assim aspectos linguísticos, semânticos e simbólicos envolvidos na prática da racionalidade, o que leva a etnomatemática a atender simultaneamente a processos heurísticos e a processos hermenêuticos. (Vergani, 2007, p. 36)

Sob a perspectiva apresentada nos últimos excertos, é possível afirmar que ter consciência das preocupações que movimentam a Etnomatemática pode fornecer ao educador um conjunto de recursos que o torne agente ativo na produção de sentidos e significados, possibilitando que seus alunos ouçam, mais vezes, o outro lado da história. Afinal,

> o currículo “fala” de alguns sujeitos e ignora outros; conta histórias e saberes que, embora parciais, se pretendem universais; as ciências, as artes e as teorias trazem a voz daqueles que se auto-atribuíram a capacidade de eleger as perguntas e construir as respostas que, supostamente, são de interesse de toda a sociedade. (Louro, 1999, p. 88)

Assim, a Etnomatemática permite uma abertura bastante ampla ao entendimento de que o mundo é maior do que a Europa (D’Ambrosio, 1999) de modo que se torna absolutamente questionável a prerrogativa de a escola – ou a Educação em si – selecionar determinados ambientes de reflexão – bem como sistemas de explicação, modos de conhecer, saberes e fazeres culturalmente distintos – em detrimento de outros. Efetivamente, esse conjunto de ideias permite questionar mesmo o lema de que a escola serviria para transmitir, isto é, passar adiante o conhecimento acumulado pela humanidade. Afinal, trata-se de que humanidade? Evidentemente, a preocupação torna-se, portanto, questionar os próprios critérios que permitiram a “seleção” dos valores, costumes e, consequentemente, dos conteúdos e métodos. Essa preocupação se associa também à constatação de que

> uma forma, muito eficaz, de manter um indivíduo, grupo ou cultura inferiorizado é enfraquecer suas raízes, removendo os vínculos históricos e a historicidade do dominado. Essa é a estratégia mais eficiente para efetivar a conquista. A remoção da historicidade implica na remoção da língua, da produção, da religião, da autoridade, do reconhecimento, da terra e da natureza e dos sistemas de explicação em geral. (D’Ambrosio, 2011, p. 40)

Em suma, é preciso *encarar* a performatividade dos discursos apresentados pelos alunos de maneira a buscar que elementos reflexivos que indiquem em que profundidade a escola tem contribuído para a formulação de determinadas respostas. Parece evidente, a esse respeito, que

> a produção dessas identidades e de suas intricadas relações dá-se, é claro, em muitas instâncias e espaços. São múltiplas as práticas sociais, as instituições e os discursos que cercam os sujeitos, produzindo e reproduzindo identidades, produzindo e reproduzindo diferenças, distinções e desigualdades. **A escola é uma dessas importantes instituições**. (Louro, 1999, p. 87) Grifos do autor.

Ademais,

> parece que é possível começar a admitir que, se os grupos hegemônicos se valem dessa estratégia discursiva para justificar as falhas e redirecionar sua política, poderia ser mediante a formulação de diferentes narrativas, localizadas e singulares, que outros grupos e identidades poderiam começar a contestar e subverter as histórias inventadas sobre eles. Os discursos edificados sobre a lógica da

> carência e da defasagem poderiam ser colocados face a face com as narrativas sobre opressão e as lutas das identidades colonizadas, subjugadas e silenciadas. (Costa, 1999, p. 62)

Por esses motivos, é relevante – e talvez, necessário – considerar todo o potencial da Etnomatemática para corroborar a elaboração dessas – e de outras – respostas que advenham de perguntas ou problemáticas que aflijam a Educação, de um modo mais amplo. Afinal, deve-se sempre ter consciência do fato de que

> hoje reconhece-se que ignorar e tentar eliminar manifestações culturais de grupos minoritários e dominados através de um processo equalizador baseado em padrões dos grupos dominantes tem como resultado a discriminação e a perversão social e cultural. (D'Ambrosio, 1999, p. 74)

Considera-se, portanto, que a escola constitui importante instituição social em que se podem desconstruir certos discursos e concepções que, em certa medida, favoreçam situações de preconceito ou exclusão. Assim, é função da escola estar atenta à maneira como seus alunos estão construindo suas próprias concepções a respeito do *outro* – seja o outro étnico, o outro estrangeiro, o outro sexual...

Além disso, alguns excertos apresentados anteriormente orientam para a necessidade de uma crítica às atuais propostas curriculares que, da maneira como são concebidas, parecem contribuir à unilateralidade na construção humana, onde prevalecem determinadas características *normais*. Tudo parece indicar, então, que tal crítica pode ser formulada a partir da preocupação com a educação **cultural**, uma vez que mesmo disciplinas *supostamente* neutras como a Matemática parecem se contaminar com uma orientação fortemente eurocêntrica. Nesse contexto de distorções, os alunos constroem suas próprias narrativas sobre o *outro* sem sequer **conhecê-lo** de fato.

Sob essa perspectiva, a Etnomatemática pode ser concebida como fonte de respostas interessantes às questões descritas acima, justamente porque sua maior pretensão é resgatar a dignidade cultural do homem: contar o outro lado da história. Assim, é essencial refletir sobre a seguinte questão: apresentar determinado grupo culturalmente distinto como produtor de conhecimento – matemático – permitiria aos alunos um *olhar* diferenciado para este grupo? Nesse sentido, os alunos poderiam construir narrativas diferentes das que foram apresentadas no início do texto, uma vez que contemplariam aspectos que só podem ser descritos por um *olhar* amplo, uma visão, efetivamente, holística.

Conclui-se, finalmente, com a expectativa de que este artigo motive, inspire ou mesmo provoque reflexões e discussões que busquem aproximações entre a Educação/escola e a cultura do educando, justamente porque se acredita que é por meio de aproximações assim que a escola poderá trilhar um caminho consistente rumo aos valores dos quais a *humanidade* precisa.

Referências e Bibliografia

Butler, J. (1993) *Bodies that matter.* Londres: Routledge.

Costa, M. V. (1999) *O currículo nos limiares do contemporâneo.* Rio de Janeiro: DP&A, 2, 37-68.

D'Ambrosio, U. (1999) *Educação para uma sociedade em transição.* Campinas: Papirus.

D'Ambrosio, U. (2011) *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Louro, G. L.(1999) O currículo e as diferenças sexuais e de gênero. In Costa, M. V. (org.) *O currículo nos limiares do contemporâneo.* Rio de Janeiro: DP&A, 4, 85-92.

Meyer, D. E. (1999) Etnia, raça e nação: o currículo e a construção de fronteiras e posições sociais. In Costa, M. V. (org.) *O currículo nos limiares do contemporâneo.* Rio de Janeiro: DP&A, 3, 69-84.

Silva, T. T. (2012) *Identidade e diferença: a perspectiva dos estudos culturais.* Petrópolis: Vozes, 2, 73-102.

Vergani, T. (2007) *Educação etnomatemática: o que é?* Natal: Flecha do Tempo.

Woodward, K. (2012) Identidade e diferença: uma introdução teórica e conceitual. In Silva, T. T. *Identidade e diferença: a perspectiva dos estudos culturais.* Petrópolis: Vozes, 1, 7-72.

Vergani, T. (2007) *Educação etnomatemática: o que é?* Natal: Flecha do Tempo.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Etnomatemática em três dimensões na educação escolar indígena

José Roberto Linhares de **Mattos**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
jrlinhares@vm.uff.br

Geraldo Aparecido **Polegatti**
Instituto Federal de Mato Grosso
Brasil
geraldo.polegatti@jna.ifmt.edu.br

Resumo

Neste trabalho destacamos a Educação Matemática com etnias indígenas em três dimensões da etnomatemática: a atuação política de valorização cultural, a pedagógica de visão holística na educação matemática e a antropológica que promove o elo com outras culturas. Através do método observacional, pesquisando a etnia indígena Rikbaktsa, no Brasil, percebemos que ela possui uma Educação Escolar bem organizada com escolas alocadas nas suas aldeias e com professores indígenas da própria etnia. Porém, no que se refere ao ensino da matemática, seus professores têm encontrado dificuldades em contextualizar o modo como eles matematizam seu cotidiano e em trazer esse processo para suas aulas. Nesse sentido, focando as três dimensões da etnomatemática, citadas acima, relacionamos os tamanhos de suas flautas, medidas por eles em palmos, com o crescimento de uma função afim da matemática formal.

Palavras chave: etnomatemática, educação escolar indígena, Rikbaktsa, flautas, função afim.

Introdução

Os Rikbaktsa são uma etnia indígena brasileira, localizada na região noroeste do Estado de Mato Grosso, no Brasil, com aproximadamente 1300 indivíduos alocados em 32 aldeias distribuídas ao longo de três terras indígenas homologadas pelo governo brasileiro. A maioria das aldeias está à margem direita do rio Juruena. Esta pesquisa foi desenvolvida na *aldeia Terceira da Cachoeira* localizada na *terra indígena Erikpatsa*, com 110 moradores divididos em 26 núcleos familiares. Essa é uma das aldeias que recebem menos recursos, ou como seus moradores costumam dizer, “menos atenção”. Nessa aldeia há uma escola com turmas de alunos indígenas, no ensino fundamental e médio, e com professores indígenas rikbaktsa atuando em suas salas de aulas. Esses professores são formados no curso de Licenciatura Intercultural no campus da Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT) localizado na cidade de Barra do Bugre, no Estado do Mato Grosso, Brasil.

A Etnomatemática surge a partir do reconhecimento de que muitas coisas importantes do saber e do fazer matemático são criadas por “matemáticos não formais”. Nesse contexto o conhecimento matemático é visto como um produto cultural independente entre cada grupo e ao mesmo tempo interligado. “A matemática é um produto cultural porque a cada momento suas produções são impregnadas de concepções da *sociedade* da qual emergem e porque condicionam aquilo que a *comunidade de matemáticos* concede como *possível e relevante*” (Sadovsky, 2007, p. 22).

Entendemos que se dois ou mais grupos culturais vivem contextos completamente diferentes um do outro, isso torna a “Cultura Matemática” de cada grupo, mais ou menos “desenvolvida”, dependendo das necessidades de cada grupo, o local onde eles estão inseridos, o clima, o tipo de vegetação, a quantidade de água enfim os recursos disponíveis, que levam às produções diferentes de “Cultura Matemática”. Percebemos que os Rikbaktsa têm uma cultura que pode ser contextualizada em suas aulas dando mais sentido ao que é ensinado nas suas aulas de matemática nas escolas de suas aldeias.

A abordagem etnomatemática de conteúdos da matemática escolar se torna imprescindível nas escolas indígenas, pois nela há um resgate e valorização cultural dos atores envolvidos no processo (dimensão política), uma atuação pedagógica que permite o diálogo constante trazendo o aluno para o centro das atenções (dimensão pedagógica) e uma capacidade de interagir com as demais áreas do conhecimento escolar contextualizando as culturas passeando pelo campo de atuação da Antropologia Cultural (dimensão antropológica).

Os professores rikbaktsa de matemática nos informaram que eles precisavam encontrar elos entre conceitos da matemática escolar do “branco” com “coisas” de sua cultura, para que sejam providos encontros culturais nas suas aulas de matemática tornando a compreensão desses conceitos matemáticos relacionais mais significativos para os alunos indígenas. Olhando um artefato da cultura rikbaktsa, que é a sua flauta, vislumbramos que poderíamos relacionar os comprimentos das mesmas, medidas por eles em palmos, com suas medidas em centímetros, dando origem a uma função linear, que eles passaram a chamar de *função das flautas*.

Etnomatemática em três dimensões

O enfoque etnomatemático na Educação Matemática não considera o pensamento grego como a única maneira de abordagem da realidade, pois ele reconhece e destaca que há outros sistemas culturais que desenvolvem técnicas, habilidades e práticas de lidar com a realidade e em diferentes níveis de realidade. A realidade em que o indivíduo está inserido é a primeira motivadora, mas não é a única, pois neste enfoque há um processo de ensino e aprendizagem da matemática que vai da realidade à ação. É na busca pela compreensão desse processo que a etnomatemática intensifica seu campo de pesquisa.

> Diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é o estudo apenas de matemáticas das diversas etnias. Mais do que isso, é o estudo das várias maneiras, técnicas, habilidades (*technés* ou *ticas*) de explicar, entender, lidar e conviver (*matema*) nos distintos contextos naturais e socioeconômicos, espacial e temporariamente diferenciados, da realidade (*etno*). A disciplina identificada como matemática é na verdade uma etnomatemática (D'Ambrósio, 2009, p. 125).

Vemos aqui toda "dimensão pedagógica" da etnomatemática, o que lhe dá todo um "alcance" pedagógico perante o ensino e aprendizagem da matemática, provocando em seu pesquisador uma visão holística de educação matemática, aproximando as ciências exatas, em especial a matemática, das ciências humanas, principalmente a Antropologia Cultural. E que ainda traz para a discussão a arte, a música, a poesia, a literatura, a experiência espiritual e as mais diversas culturas ditas não formais. É uma verdadeira humanização da matemática contextualizando-a com o ambiente que a molda por meio de seus criadores, nesse caso os Rikbaktsa, em um processo dinâmico do conhecimento matemático. Vemos essa característica da abordagem etnomatemática em Educação Matemática como determinante para seu emprego na Educação Escolar Indígena.

> O processo educacional na perspectiva da Etnomatemática reivindica transformações que superam aspectos metodológicos. Para mim, a proposta da Etnomatemática direciona nosso olhar para questões socioculturais e exige, de nós professores, uma pedagogia de inclusão de espaços para a diversidade e para a valorização dos saberes presentes nos diferentes contextos (Monteiro, Orey, & Domite, 2006, p. 19).

Um conceito básico da abordagem etnomatemática que nos reporta à sua dimensão política está interligado à ideia de ensino contextualizado da matemática que não depende só da aplicação dos conteúdos curriculares e conceitos matemáticos considerados. Nela procura-se evitar uma simples reprodução de conhecimento que ocorre quando não se opera a reforma do conhecimento. Acumular conhecimento sem a sua reflexão crítica para reconstruir esse conhecimento não cabe no enfoque etnomatemático. Observar sim os detalhes, mas sempre procurar contemplar o quadro todo em sua complexidade cultural, para contextualizar uma vez mais e procurar responder as perguntas que surgem desta reflexão. Temos que considerar todo conhecimento matemático que está presente na prática cotidiana de um povo, etnia, ou seja, o modo como eles matematizam a sua realidade, quais são suas práticas matemáticas.

Temos uma idealização da "dimensão política" que a abordagem etnomatemática proporciona naturalmente na valorização cultural dos envolvidos no processo, valorização essa que vai de encontro ao conhecimento dominante que marginaliza os saberes populares desvinculando esses saberes do currículo escolar. Destacamos também que a "dimensão política" na proposta da etnomatemática, lhe proporciona uma maior "área" de atuação, pois na sua abordagem, a cultura da sociedade em estudo vem à tona na sala de aula, e faz bem a prática escolar e à sociedade que esta sendo referida. A cultura é valorizada por seus professores e, consequentemente, por seus alunos nela presentes e pelos futuros alunos desta mesma sociedade, neste caso a Sociedade Indígena Rikbaktsa.

> E é nessa relação sala-de-aula↔Escola↔Sociedade que o político explicita-se no pedagógico. Não se trata aqui de política partidária, mas do político enquanto uma ação que visa a fins relacionados à formação do homem, do cidadão e de uma Sociedade humana justa em termos de ser organizada de maneira a possibilitar o fluir pleno das possibilidades do modo de ser desse homem no mundo (Bicudo, 2005, p. 56).

A abordagem etnomatemática promove o elo entre as demais etnociências servindo de ponte entre elas, assumindo naturalmente o que denominamos de "dimensão antropológica", passeando pelos demais conhecimentos étnicos no âmbito da Antropologia Cultural. Essa articulação transcultural promovida pela abordagem da etnomatemática, no processo de ensino e aprendizagem em Educação Matemática, gera uma aprendizagem mais significativa, com maior afetividade educacional, dando sentido ao que esta sendo proposto pelo professor em uma verdadeira educação sustentável.

"Esta inserção na antropologia cognitiva e sociocultural é uma fonte inesgotável de descoberta das intersecções reais entre diferentes disciplinas em cada situação vivencial, a partir da experiência e do saber matematizantes. A etnomatemática conhece e 'fala' diversas 'linguagens' humanas" (Vergani, 2007, p. 36).

É em busca de toda essa diversidade, desses preciosos tesouros culturais, que a etnomatemática se aventura pelo campo de atuação da Antropologia Cultural ganhando "volume" com sua "dimensão antropológica", rompendo fronteiras disciplinares, promovendo o encontro entre essas diversificadas culturas, articulando os variados saberes étnicos e integrando toda essa complexidade humana.

Através do exemplo da "Cultura Matemática" dos Rikbaktsa pesquisado por nós, os professores indígenas podem trabalhar conteúdos curriculares da matemática do não indio por meio de uma abordagem etnomatemática com suas três dimensões metodológicas corforme a figura 1: a "dimensão pedagógica" que dá o "alcance" necessário para que a abordagem de conteúdos curriculares de matemática, pela ótica da etnomatemática, seja crucial na educação escolar indígena; a "dimensão política" que acontece principalmente na valorização cultural de quem a pratica, trazendo essa cultura para a sala de aula e que, na interação com a "dimensão pedagógica", fornece à etnomatemática uma base de sustentação e uma maior "área" de atuação; e a "dimensão antropológica" que promove o elo entre os demais conhecimentos étnicos, produzindo uma verdadeira articulação antropológica, tornando o processo ensino e aprendizagem mais significativo, e esta em consonancia com as outras duas dimensões dá o "volume" educacinal consistente que a etnomatemática proporciona em sua abordagem.

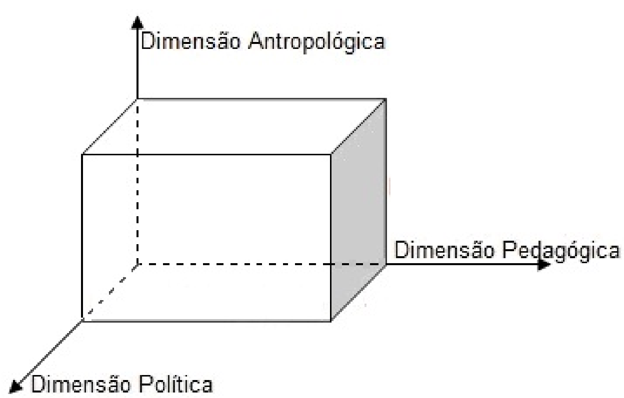


Figura 1: Etnomatemática em três dimensões.

A função afim das flautas rikbaktsa

Os Rikbaktsa produzem flautas que podem ser utilizadas em agrupamentos de quatro (flautas pã) ou isoladamente, além de diferentes tipos de assobios e apitos. Algumas flautas, quando mais finas e que pretendem produzir um som mais “fino”, são confeccionadas em taquara. Outras flautas, como a da figura 2, são feitas com bambu que são colhidos nos brejos, podendo variar sua espessura e seu comprimento. Se quiserem um som mais ou menos “grosso” eles variam então tanto no tamanho quanto na espessura. Quanto mais comprida e grossa o som será mais grave. Elas podem ter de três a cinco orifícios e são tocadas no cotidiano da aldeia.

Figura 2: Imagem de um Rikbaktsa tocando flauta na época de sua pacificação.
Fonte: http://img.socioambiental.org/d/226637-1/rikbaktsa_2.jpg.

Os apitos são feitos de cerâmica, cabacinha ou ouriço de castanha que na língua deles é denominado por *byrykkwy*. Já os assobios, que eles chamam de *sapyutsa*, e as flautas pã – *jokpepeheta* – são feitas de raques de pena do gavião-real. Há ainda flautas menores compostas por três ou quatro orifícios confeccionadas a partir de ossos de aves como o gavião-real ou o tuiuiú, que são tocadas pelos mais velhos e durante o período da estação chuvosa. Já os apitos e assobios são mais tocados pelas crianças para também poderem participar dos rituais, já que não podem tocar algumas flautas e não sabem tocar outras (Athila, 2006). Os Rikbaktsa permitem que suas mulheres toquem flautas. “O ‘tocar flautas’ e outros aerofones, os mesmos produzidos e também tocados pelos homens, é o *locus* da peculiaridade mais comentada com relação às mulheres Rikbaktsa em contraste com a maioria das ‘ameríndias’” (Athila, 2006, p. 338).

As *sizezebyitsa* são as flautas mais curtas e compostas por um grupo de quatro com tamanhos e tons diferenciados, elas podem ser tocadas sozinhas, ou em duplas ou ainda as quatro se relacionando como um todo. Já a *izowy* é a mais comprida e também a mais grave do conjunto, como já antecipamos o comprimento interfere em o som ser mais grave (grosso).

Quanto mais comprido é mais grave. Logo em seguida vêm outras três flautas menores ficando cada vez mais agudo (fino) o som, quanto menor o seu tamanho. Chamam-nas em ordem de tamanho decrescente de *tsapukte, iharaiktsa* e *izowytsik*.

A afinação das flautas de bambu e de taquara é feita pela afinação de suas paredes internas em cada uma delas. Eles usam uma taquarinha para inserir dentro do corpo da flauta para irem raspando suas paredes internas tornando-as mais finas a fim de conseguirem a tonalidade do som desejado. Tem aqueles que colhem as taquaras ou bambus nos brejos para que outros os peguem e confeccione as flautas para que outros as toquem. Portanto nem sempre aquele que confecciona a flauta é quem vai tocá-la.

As flautas feitas do osso da tíbia do gavião-real são consideradas sagradas e só podem ser tocadas pelos homens mais velhos e em certas ocasiões de seus rituais. Quando não são usadas ficam guardadas nas casas em giraus nas paredes. Os furos nas flautas são feitos por flechas específicas utilizadas na caça do próprio gavião-real.

De acordo com os Rikbaktsa os tamanhos das flautas variam em função do palmo de quem as está confeccionando. Considerando o palmo de um dos construtores em aproximadamente 17 cm, podemos chegar à tabela 1, com os valores em palmos (medida padrão na "Cultura Matemática" dos Rikbaktsa) e os seus correspondentes valores em centímetros (medida na matemática formal).

Tabela 1

O tamanho das flautas Rikbaktsa.

Nome da flauta	Medida na "Cultura Matemática" Rikbaktsa	Medida na Matemática Formal
Sizezebyitsa	Variando de meio palmo da mão a um palmo e meio.	Variando de 8,5 cm a 25,5 cm
Izowytsik	4 palmos da mão	Aproximadamente 68 cm
Iharaiktsa	4 palmos e meio	Aproximadamente 76,5 cm
Tsapukte	5 palmos	Aproximadamente 85 cm
Izowy	5 palmos e meio	Aproximadamente 93,5 cm

A partir da tabela 1 podemos equacionar os seus valores com o intuito de construirmos uma função que irá relacionar o tamanho de cada uma das flautas rikbaktsa, medida em centímetros (medida da matemática formal), com a medida em palmos (medida da "Cultura Matemática" dos Rikbaktsa). A função matemática construída é conhecida como função afim. "Uma função f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais **a** e **b** tais que $f(x) = a.x + b$, para todo $x \in \mathbf{R}$" (Dante, 2008, p. 54).

Sendo assim basta partimos dos valores da tabela acima, fazendo a substituição em x para calculamos os valores de a e b, pois com esses valores encontraremos a equação matemática que representará a "função afim" que modela o tamanho das flautas rikbaktsa. Nesse sentido primeiramente precisamos fazer $f(x) = y$ e depois escolhemos duas flautas, pois são dois valores (a e b) a serem encontrados, neste caso escolhemos *Izowytsik* e *Tsapukte* por terem medidas com valores inteiros que facilitam os cálculos.

De um modo geral temos: $f(x) = y \rightarrow y = a.x + b$

Izowytsik → (x = 4 e y = 68) → 68 = a.4 + b → 4.a + b = 68 → b = 68 – 4.a (1)

Tsapukte → (x = 5 e y = 85) → 85 = a.5 + b → 5.a + b = 85 → b = 85 – 5.a (2)

Trabalhando com as equações (1) e (2) em um sistema de equações podemos utilizar os métodos da soma ou o da substituição para calcularmos os valores de a e b, e assim chegarmos a equação matemática que representará a variação linear do tamanho dessas flautas rikbaktsa que utilizamos como modelo. Aqui faremos uma igualdade entre as duas equações pela variável b.

(1) = (2) → 68 – 4.a = 85 – 5.a → – 4.a + 5.a = 85 – 68 → a = 17

Sendo b = 68 – 4.a → b = 68 – 4.17 → b = 68 – 68 → b = 0

Então, se y = a.x + b → y = 17.x + 0 → **y = 17.x**

Dessa maneira chegamos a “função afim” **y = 17.x** (que era de se esperar) como sendo a função matemática que faz variar em centímetros os tamanhos das flautas utilizadas nessa modelagem, a variável x pode ser trocada pelo número de palmos na contagem dos Rikbaktsa para cada uma delas. O número 17, na verdade, representa o valor aproximado em centímetros do tamanho do palmo do índio Rikbaktsa que fabricou essas flautas, assim para outro construtor deve-se medir em centímetros o tamanho do seu palmo e substituí-lo no lugar do número 17.

Com essa função o professor indígena rikbaktsa pode introduzir o conceito de “função afim” para seus alunos indígenas e depois explorar os conceitos dessa função matemática como: domínio, imagem, crescente e decrescente. A construção do seu gráfico também é de suma importância para outras áreas do conhecimento matemático e outras áreas mais gerais. Nesse sentido construímos os gráficos a seguir na figura 3, sendo um deles no formato de colunas cilíndricas por ser esta a forma das flautas e outro em gráfico de linha sobreposto ao de colunas, para os alunos visualizarem o seu crescimento linear e também por esse tipo de gráfico ser o mais utilizado na matemática formal. No eixo horizontal estão os valores de cada uma das flautas em palmos e no seu eixo vertical colocamos os valores correspondentes para cada uma das flautas em centímetros de acordo com a função **y = 17.x**.

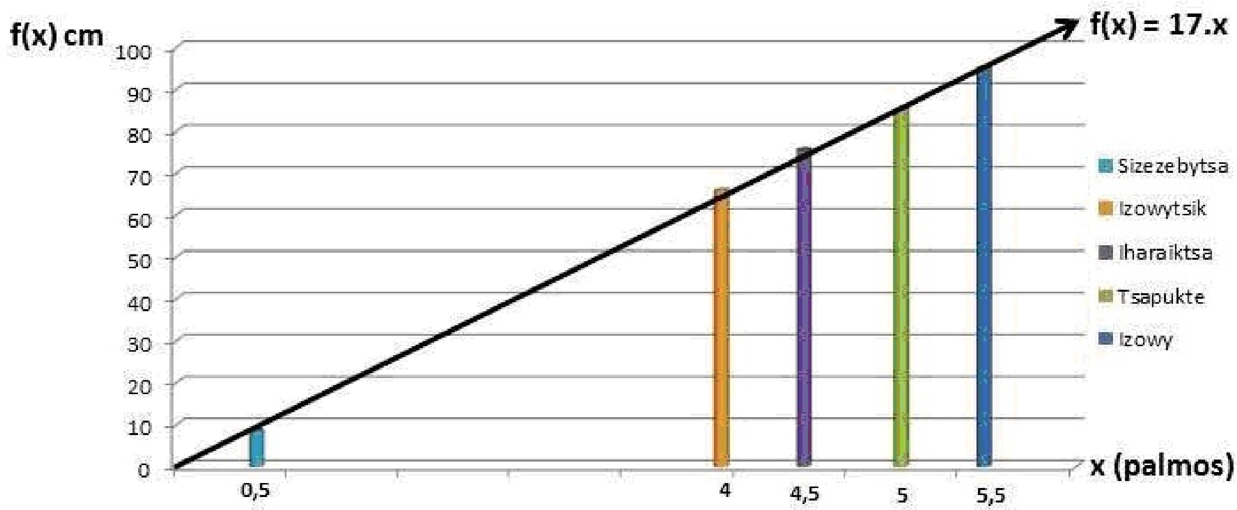


Figura 3: Gráfico de colunas da função afim das flautas rikbaktsa.

Conclusões

O professor indígena rikbaktsa pode comentar com seus alunos que o quarteto de flautas que eles costumam utilizar em conjunto tem um crescimento de meio palmo de uma para a outra, e um crescimento em centímetros, que aparece na figura 3, na linha traçada acima das colunas que representam as flautas dos rikbaktsa. Ele pode comentar que esse tipo de crescimento é comum para outras funções matemáticas como, por exemplo, a função que determina juros simples, a função horária do espaço para o movimento uniforme e a função horária da velocidade para o movimento uniformemente variado. Ainda temos também a força, dada pela 2ª Lei de Newton, e o peso, entre outras, que são exemplos de "funções afins".

Também, o professor indígena Rikbaktsa pode enfatizar a cultura deles, presente intrinsecamente na confecção de suas flautas, com o ensino e aprendizagem em sala de aula, ao relacionar os comprimentos e as espessuras das mesmas com o seu som ser mais grave ou menos grave, ser mais agudo ou menos agudo. Isso também envolve conceitos de Física, no estudo do som. Conceitos de Biologia, ao pesquisar pelo nome científico dos tipos de taquaras e dos bambus utilizados na confecção das flautas, no estudo dos ossos de aves, na preocupação em controlar a caça do gavião real. Pode relacionar também com conceitos de História, relatando que para a humanidade a utilização de flautas é bem antiga. Relacionar com as Artes, na própria confecção das flautas. No estudo da Música com a pesquisa de outros tipos de instrumentos de sopro e no ritmo. Na Sociologia, pois a utilização das flautas ocorre, geralmente, em ritos festeiros ou sagrados unindo toda a comunidade. O professor pode destacar que na cultura dos não índios a música também se faz presente nos ritos sagrados (música religiosa), que em nossas festas é fundamental ter música, bem como, em nossas cerimônias oficiais onde são tocados os hinos, com ênfase no Hino Nacional Brasileiro.

Portanto, temos o estudo de uma função afim, contextualizada na confecção de um artefato da cultura dos Rikbaktsa, focado nas dimensões política, pedagógica e antropológica da etnomatemática.

Referências e bibliografia

Athila, A. R. (2006). *"Arriscando Corpos" Permeabilidade, Alteridade, e as Formas da Sociedade entre os Rikbaktsa (Macro-Jê) do Sudoeste Amazônico.* **(**Tese inédita de doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, BR.

Bicudo, M. A. V. (Org.). (2005). *Educação Matemática*. São Paulo: Centauro.

D'Ambrósio, U. (2009). *Transdisciplinaridade.* (2ª ed.). São Paulo: Palas Athena.

Dante, L. R. (2008). *Matemática.* **(**1ª ed.). São Paulo: Ática.

Monteiro, A., Orey, D. & Domite, M. C. S. (2006). Etnomatemática: papel, valor e significado. In Ribeiro, J. P. M., Domite, M. C. S. & Ferreira, R. (Orgs.). *Etnomatemática: papel, valor e significado.* (pp. 13-37). Porto Alegre: Zouk.

Sadovsky, P. (2007). *O Ensino de Matemática Hoje – Enfoques, Sentidos e Desafios*. São Paulo: Ática.

Vergani, T. (2007). *Educação Etnomatemática: O que é?* Natal: Flecha do Tempo.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Evaluación de docentes y estudiantes de bachillerato mediante pruebas objetivas y estandarizadas de matemáticas

Laura Alejandra **Bonilla** Ramos
Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa
México
laurabonilla@uas.edu.mx
Faustino **Vizcarra** Parra
Dirección General de Escuelas Preparatorias, Universidad Autónoma de Sinaloa
México
faustinovizcarra@uas.edu.mx
José Vidal **Jiménez** Ramírez
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa
México
vidaljr@uas.edu.mx

Resumen

En este estudio participaron profesores de matemáticas y estudiantes de tercer grado de bachillerato, a los cuales se les aplicó una prueba de matemáticas, con tres propósitos: primero conocer sus fortalezas y debilidades ante una prueba objetiva y estandarizada de matemáticas; segundo, determinar cursos de actualización para los docentes que conviertan sus debilidades en fortalezas; y tercero, que los profesores conozcan las debilidades de los estudiantes y apliquen las estrategias pertinentes para potenciar su aprendizaje. De los datos obtenidos, se detectaron los reactivos de mayor dificultad, en el caso de los docentes, los reactivos con un porcentaje menor o igual al 90% de respuestas correctas; y en el caso de los estudiantes, los de un porcentaje de respuestas correctas menor o igual al 60%. Los resultados señalan que las debilidades de los docentes, son las debilidades de los estudiantes.

Palabras clave: educación, matemática, evaluación, formación, tecnología y lenguaje matemático.

Introducción

En México, cada año se aplica la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), que es una prueba del Sistema Educativo Nacional aplicada en planteles públicos y privados del País.
En el bachillerato, la prueba se aplica a jóvenes que cursan el último grado, para conocer en qué medida son capaces de poner en práctica en situaciones del "mundo real" las competencias disciplinares básicas de los campos de Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar (SEP, 2013).

ENLACE es una prueba objetiva y estandarizada, que proporciona un diagnóstico del estudiante a nivel individual y está alineada al Marco Curricular Común de los diferentes sistemas de bachillerato, en particular a las competencias disciplinares básicas de los campos de Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas, planteadas en el acuerdo 444 (SEP, 2009).

El instrumento está conformado por preguntas de opción múltiple: 50 preguntas están dedicadas al campo disciplinar de Comunicación (Comprensión lectora) y 60 al de Matemáticas (ver tabla 1). Los resultados son dados en cuatro categorías: insuficiente, elemental, bueno y excelente.

Tabla 1.
Distribución de reactivos de Matemáticas en la prueba ENLACE 2012, por grupos de procesos a evaluar y por contenido matemático.

Contenidos	Procesos a evaluar			
	Reproducción	Conexión	Reflexión	Total
Cantidad	6	7	7	20
Cambios y relaciones	5	8	7	20
Espacio y forma	6	8	6	20
Total	17	23	20	60

Fuente: Secretaría de Educación Pública. 2012.

Para los fines de este estudio, consideramos el caso de matemáticas, en el que participaron estudiantes y profesores de matemáticas de 38 Unidades Académicas y 41 extensiones de bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa.
En el ciclo escolar 2011-2012, la Secretaría de Educación Pública (SEP), aplicó por quinta ocasión la prueba ENLACE, en la que participaron 921578 estudiantes de tercer grado de bachillerato, y de estos, 9496 estudiantes corresponden a las 38 Unidades Académicas y a sus 41 extensiones, las cuales forman parte del estudio.
Los resultados obtenidos en la quinta aplicación y en las cuatro anteriores se muestran en la figura 1.

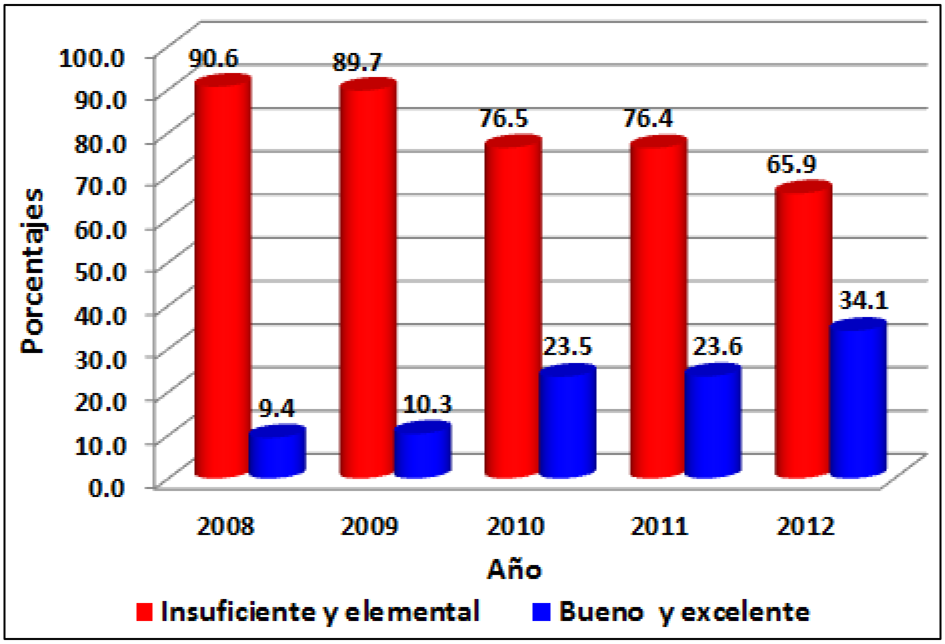


Figura 1. Porcentajes de alumnos por nivel de desempeño en la prueba ENLACE matemáticas del 2008 al 2012.

En un periodo de 5 años, hay un incremento en el porcentaje de bueno y excelente. Sin embargo, los resultados no son alentadores, ya que aproximadamente el 66% se ubicó entre el nivel insuficiente y elemental.

La prueba ha sido diseñada de tal forma que no permite derivar conclusiones sobre el sistema de Educación Media Superior, los subsistemas, las escuelas, los docentes ni sobre el desempeño de las entidades federativas. Pero si es posible analizar el desempeño en cada uno de los reactivos, para contrastarse de una generación a otra, y esto permite detectar los reactivos de mayor dificultad para los estudiantes y los reactivos recurrentes de una aplicación a otra.

Metodología

Como punto de partida, en el caso de matemáticas se reestructuró la prueba ENLACE 2012 por asignatura del área de matemáticas y se puso en línea, bajo el nombre de PreENLACE 2013. Tanto docentes como estudiantes, la resolvieron bajo las mismas condiciones, para así obtener una radiografía de su desempeño en cada uno de los reactivos.

Para detectar los reactivos de mayor dificultad partimos de los siguientes criterios: en el caso de los docentes, los que tengan un porcentaje de respuesta correcta menor o igual al 90%, y para los estudiantes los que tengan un porcentaje menor o igual al 60%. Así, bajo estos criterios determinamos las debilidades y fortalezas de ambos, de donde se desprenden las propuestas para la formación docente y en el caso de los estudiantes, para la nivelación y prevención en las futuras generaciones.

Resultados y conclusiones

Los resultados del PreENLACE 2013 en línea, en la que participaron 4668 estudiantes de tercer grado de la generación 2012-2013 y 170 profesores de matemáticas, se muestran en la figura 2.

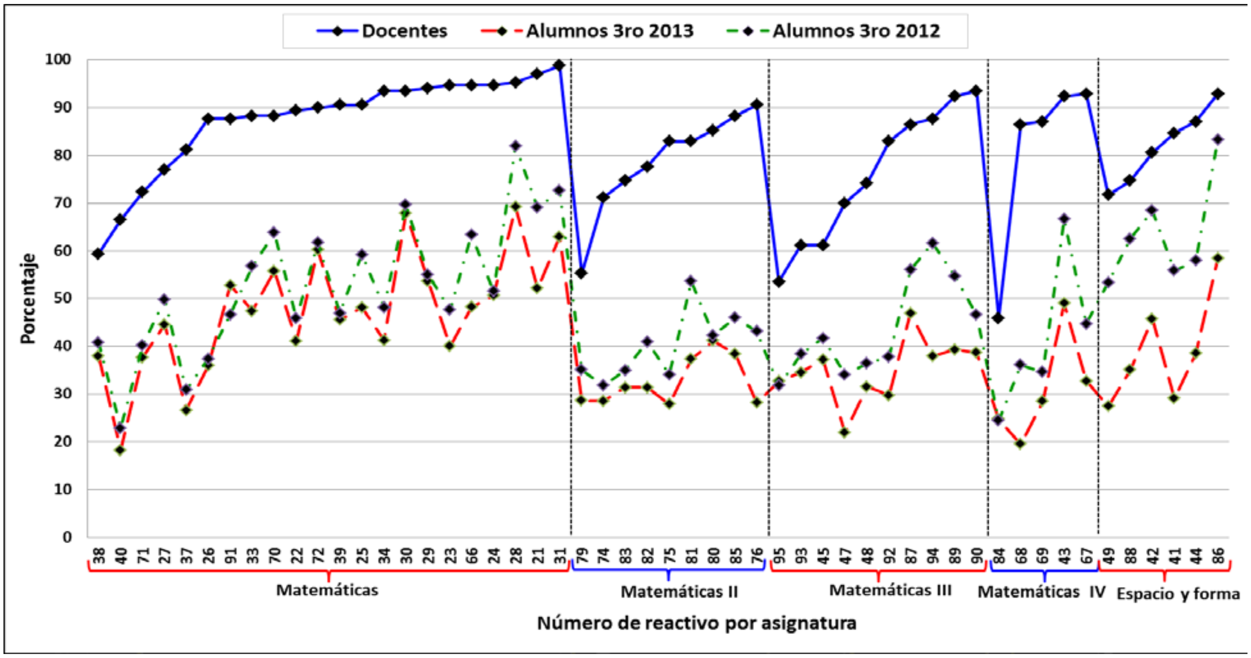


Figura 2. Porcentajes de respuestas correctas de docentes de matemáticas, alumnos 3ro del periodo 2012-2013 y alumnos 3ro del periodo 2011-2012, ordenados de lo menos a lo más complejo de acuerdo a los resultados de los docentes por asignatura.

Entre los reactivos de mayor complejidad para los estudiantes, en el orden en que aparecen en la figura 2, son: 40, 37, 79, 74, 83, 75, 95, 47, 84 y 69. Y para los docentes, son: 38, 40, 79, 95, 93, 45 y 84. Y de estos, los comunes para profesores y estudiantes son: 40, 79, 95 y 84.

Por mencionar algunas de las dificultades, de acuerdo a lo que observamos en la figura 2, el manejo de las fracciones (reactivo 37) es un problema que ha persistido por muchos años, y a la fecha no se ha podido erradicar, como lo señala Lerman (1990).

Lo mismo sucede en la resolución de problemas (reactivos38, 40, 74, 75 y 79). Como lo menciona Santos Trigo (2007), la mayoría de los estudiantes experimentan serios problemas para reconocer y usar ciertas estrategias en la resolución de problemas. En particular con la modelación, sabemos que los estudiantes presentan dificultades para expresar situaciones que se le presentan en lenguaje común, en lenguaje matemático, desde aquí radica parte del problema de la modelación. Además, de acuerdo con Lee (2006), el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los alumnos debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar sus ideas matemáticas.

En el caso de las diagonales de un polígono (reactivo 47), Pimm (1990) menciona que en los estudiantes es común concebir la diagonal como un lado inclinado de una figura en relación con la orientación natural de la página.

En cálculo de áreas (reactivo 95) y perímetros (reactivo 93), detectamos que estos contenidos frecuentemente no son abordados en clase por darle mayor prioridad a trigonometría.

Y en el caso de representar un objeto matemático en sus diferentes representaciones (reactivo 69, 83 y 84) como lo sugiere Duval (1998), no se le da la debida importancia por parte de los profesores de matemáticas, para ellos, es de mayor relevancia el darle prioridad a los procedimientos y algoritmos algebraicos (Macnab y Cummine, 1992). Además, nuestra experiencia en la enseñanza de la materia nos proporciona elementos para señalar que el enfoque tradicional de fórmulas, procedimientos y cálculos ocupa aún un lugar importante en la práctica de muchos profesores.

Lo mencionado en párrafos anteriores son algunas de las debilidades de los docentes y estudiantes.

Las fortalezas y debilidades con respecto al instrumento aplicado, cuyos resultados se reflejan en la figura 2, se muestran en el apéndice A.

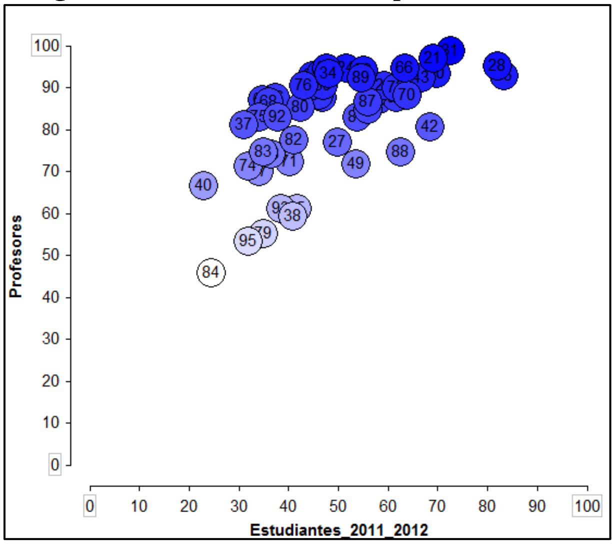


Figura 3. Cruce de porcentajes de respuestas correctas de los estudiantes del ciclo escolar 2011-2012 vs profesores de matemáticas.

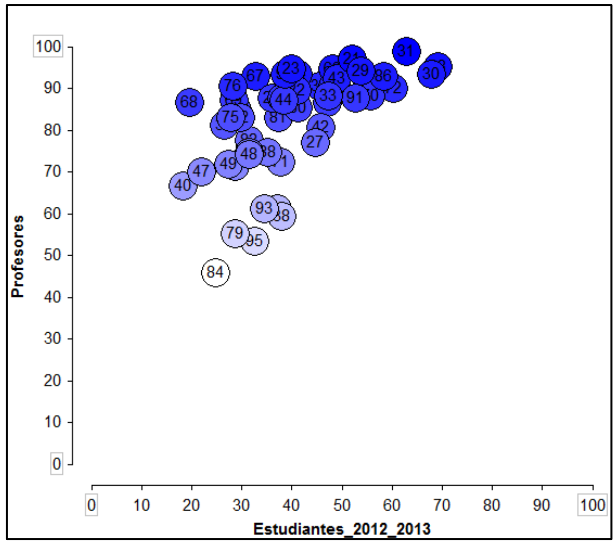


Figura 4. Cruce de porcentajes de respuesta correcta de los estudiantes del ciclo escolar 2012-2013 vs profesores de matemáticas.

Ahora, en la figura 3, observamos el comportamiento de los resultados de estudiantes del ciclo escolar 2011-2012 y de profesores, de donde podemos decir que, debido al patrón que muestran los datos, los estudiantes y los docentes presentan fortalezas y debilidades similares.

Y en el cruce de estudiantes del ciclo escolar 2012-2013, con docentes de matemáticas, observamos al igual que en la figura 3, que las fortalezas de los docentes son las fortalezas de los estudiantes (ver figura 4). Sin embargo, observamos en la figura 4, que los porcentajes de respuesta se acercan más al eje vertical. Esto significa que los estudiantes del ciclo escolar 2012-2013, en general presentaron más dificultades para resolver los reactivos. Esto también se refleja en la figura 2, ya que los porcentajes de respuesta de los estudiantes del ciclo escolar 2011-2012, están por arriba que los del ciclo escolar 2012-2013.

Por último, en el cruce de los estudiantes que presentaron el PreENLACE 2013, con los que presentaron la prueba ENLACE 2012, observamos consistencia en los resultados de una generación a otra, esto se deduce del comportamiento de los datos de la figura 5. Es decir, que los estudiantes presentan en general las mismas fortalezas y deficiencias. Aclaramos que los estudiantes del ciclo escolar 2012-2013, presentaron mayor dificultad para resolver los reactivos.

En conclusión, las debilidades que observamos en los docentes, están más relacionadas con la resolución de reactivos en los que se tiene que obtener un modelo matemático para darle solución y con las diferentes representaciones de un objeto matemático, estos reactivos son de conexión o de reflexión de acuerdo a la clasificación dada en la tabla 1.

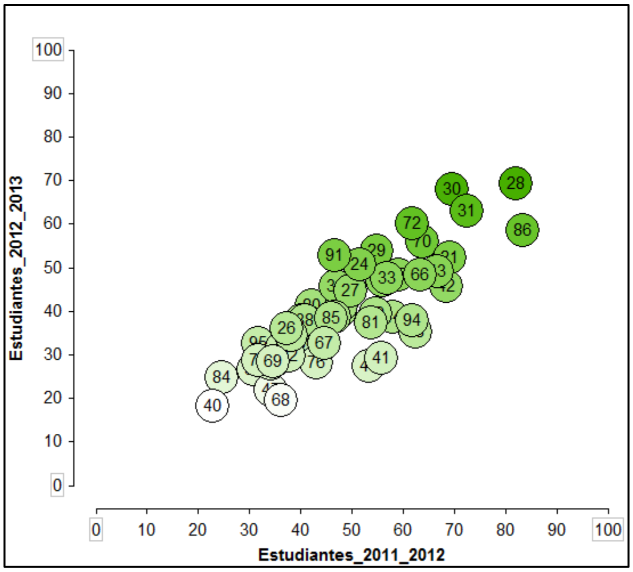


Figura 5. Cruce de porcentajes de respuesta correcta de los estudiantes del ciclo escolar 2011-2012 vs estudiantes del ciclo escolar 2012-2013.

Cabe resaltar, que los docentes, al igual que los estudiantes, muestran debilidades en el tema de las fracciones, que por muchos años ha frustrado la vida académica de generaciones. Así que, dadas las deficiencias que mostramos los docentes (ver apéndice A), ante este tipo de evaluaciones, en los cursos de formación docente, proponemos que aparte de los cursos de pedagogía y de didáctica, se incluyan cursos de contenidos, que conviertan nuestras deficiencias que se muestran en el apéndice A, en fortalezas. Esto a su vez, tendrá un impacto en el desempeño de los estudiantes.

Otra sugerencia para el profesor, en el sentido que la menciona Finkel (2008) "de dar la clase con la boca cerrada", es decir: hay que dejar que los libros hablen, que los estudiantes hablen, indagar juntos; el arte de escribir; crear esquemas para el aprendizaje; separar poder y autoridad en el aula; dar la clase con un colega de observador; y por último, proporcionar la experiencia y provocar la reflexión.

De igual manera la propuesta que hace Bain (2006) la consideramos importante para los docentes, que se resume en: conocer bien nuestra materia (asignatura) para promover el buen desarrollo de la capacidad de reflexionar (metacognición); brindarles a los estudiantes una educación que les proporcione un influencia positiva, sustancial y duradera en la forma en que razonan, actúan y sienten; desafiar intelectualmente a los alumnos; y plantear a los estudiantes preguntas de su interés. Sabemos que se han desarrollado muchas propuestas, pero las proporcionadas por Finkel y Bain, cautivaron nuestra atención.

Para finalizar, la sociedad, las instituciones educativas y las instituciones gubernamentales, dan por hecho que, al ser uno profesor de matemáticas, dominamos los contenidos que impartimos. Pero la realidad es otra, en muchos casos, ni dominamos al 100% los contenidos, y tampoco tenemos la formación didáctica-pedagógica necesaria y suficiente para estar frente a un grupo de estudiantes como profesores de matemáticas. Estas son algunas de las deficiencias que tenemos que subsanar, y por lo general depende de nuestra actitud y disponibilidad que tengamos para ser mejores docentes.

Referencias y bibliografía

Bain, K. (2006). *Lo que hacen los mejores profesores universitarios.* España: Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Finkel, D. (2008). *Dar la clase con la boca cerrada.* España: Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Lee, C. (2006). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas.* España: Ediciones Morata.

Lerman, S. (1990). Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. *British Educational Research Journal.*, *6*(1), 53-61.

Macnab, D. S., & Cummine, J. A. (1192). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad.* España: Visor.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* España: Ediciones Morata.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

SEP (2009). Acuerdo Secretaríal No. 444. Obtenido de Secretaría de Educación Pública: http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/work/sites/riems/resources/FileDownload/291/Acuerdo444.pdf

SEP (2013). Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Obtenido de Secretaría de Educación Pública: http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/

Apéndice A

Fortalezas y debilidades de los docentes por asignatura

Tabla 2.

Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas I.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
21	Identificar una fracción equivalente.	F	F
22	Calcular el resultado de una suma o resta de fracciones en su forma más simple.	D	D
23	Calcular el resultado de una multiplicación de fracciones en su forma más simple.	F	D
24	Calcular el resultado de operaciones combinadas con signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves).	F	D
25	Calcular el resultado de una división de fracciones en su forma más simple.	F	D
26	Identificar un número real que se encuentra dentro de un intervalo.	D	D
27	Determinar la solución de un problema de la vida cotidiana mediante la representación de una cantidad en la recta numérica.	D	D
28	Seleccionar la opción que satisfaga un criterio establecido	F	F

Tabla 2.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas I.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
	después de considerar un conjunto de características de distintos productos.		
29	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique el uso de una fórmula y la conversión de unidades.	D	F
30	Resolver un problema de la vida cotidiana que involucre el manejo de una razón o una proporción.	F	F
31	Resolver un problema de la vida cotidiana que involucre el cálculo de un porcentaje.	F	F
33	Calcular la cardinalidad de un subconjunto para resolver un problema de la vida cotidiana que involucra razones o relaciones dentro de una población.	D	D
34	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique manejar información numérica representada de dos formas distintas.	F	D
37	Obtener la solución en forma gráfica de un problema de la vida cotidiana que implique realizar operaciones con números racionales.	D	D
38	Resolver un problema de la vida cotidiana que requiera calcular el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo.	D	D
39	Estimar un resultado para solucionar un problema de la vida cotidiana que implique conversión de unidades de medición y proporciones, razones o porcentajes.	F	D
40	Estimar un resultado para solucionar un problema de la vida cotidiana que implique conversión de unidades económicas y proporciones, razones o porcentajes.	D	D
66	Identificar el enunciado que corresponde a una expresión algebraica o viceversa.	F	F
70	Identificar la gráfica que representa una ecuación cuadrática con dos variables.	D	F
71	Realizar cálculos utilizando datos de una gráfica de la relación física de dos variables.	D	D
72	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique reconocer el elemento faltante en una de dos sucesiones numéricas directamente relacionadas.	D	F
91	Calcular el número máximo de paralelepípedos iguales entre sí y de menor dimensión que quepan dentro de otro paralelepípedo representado de forma gráfica.	D	D

Tabla 3.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas II.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
74	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique generar y resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$.	D	D
75	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique generar dos ecuaciones de la forma $ax+by = c$ y calcular el valor de una incógnita.	D	D
76	Identificar la regla de correspondencia de una función cuadrática representada de manera gráfica o tabular.	F	D
79	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique identificar un punto de intersección a partir de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	D	D
80	Obtener la expresión algebraica lineal que represente una situación de la vida cotidiana.	D	D
81	Estimar los valores de una variable independiente dada una situación de la vida cotidiana que implique una relación entre una función lineal y una cuadrática.	D	D
82	Identificar la expresión algebraica que representa la variación lineal de una cantidad dentro de un intervalo representado gráficamente.	D	D
83	Calcular un valor a partir de la relación entre dos funciones lineales.	D	D
85	Identificar el punto de intersección que resuelva un problema de la vida cotidiana y requiera la lectura de dos modelos lineales representados en formas diferentes.	D	D

Tabla 4.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas III.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
45	Identificar la combinación de operaciones y técnicas matemáticas que resuelven un problema de la vida cotidiana.	D	D
47	Determinar el número de rectas notables de un polígono después de sufrir un cambio.	D	D
48	Calcular el área de una composición geométrica plana.	D	D
87	Calcular el volumen de prismas o cilindros convexos a partir de su representación gráfica.	D	D

Tabla 4.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas III.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
89	Obtener el valor de uno de los lados de un paralelogramo o un trapecio utilizando el teorema de Pitágoras.	F	D
90	Resolver un problema de la vida cotidiana que implique determinar la figura geométrica con volumen máximo o superficie total mínima.	F	D
92	Determinar el número de caras o puntos notables después de un cambio en un poliedro.	D	D
93	Calcular el perímetro de una composición geométrica.	D	D
94	Identificar la figura que se obtiene al modificar una imagen bidimensional.	D	F
95	Calcular el área de dos o tres caras de una figura tridimensional a partir de su representación gráfica y los valores de algunos de sus lados.	D	D

Tabla 5.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en matemáticas IV.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
43	Determinar las coordenadas de dos puntos en un plano cartesiano.	F	F
67	Identificar la gráfica que represente la expresión algebraica de una función.	F	D
68	Calcular el valor de una operación mediante una función algebraica después de haber evaluado la regla de correspondencia de dicha función.	D	D
69	Identificar la gráfica que representa una ecuación cuadrática con dos variables.	D	D
84	Identificar la gráfica de la recta perpendicular o paralela que pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal.	D	D

Tabla 6.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en espacio y forma.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
41	Identificar la representación gráfica que corresponda con una descripción de los cuerpos que componen una figura tridimensional.	D	D

Tabla 6.
Debilidades (D) y Fortalezas (F) de profesores de matemáticas y estudiantes de bachillerato en espacio y forma.

No. de Reactivo	Indicador de logro	Profesores	Estudiantes
42	Identificar las figuras que conforman una composición tridimensional de figuras geométricas.	D	F
44	Identificar una figura tridimensional a partir de su vista frontal, lateral y superior.	D	D
49	Identificar la figura que complete una figura tridimensional cortada sobre uno de sus ejes de simetría.	D	D
86	Identificar la imagen que completa la serie de una figura tridimensional que gira sucesivamente sobre su eje transversal o longitudinal.	F	F
88	Identificar la posición de un observador al presentar una vista panorámica tomada desde esa perspectiva.	D	F

Evaluación del cambio en la producción de numerales arábigos

Diego Alonso **Medina** Rodríguez
Facultad de Psicología, Universidad Cooperativa de Colombia
Colombia
diego.medinar@ucc.edu.co

Resumen

El presente estudio busca caracterizar el cambio en la producción de numerales arábigos de 29 niños que cursan el 1º grado de primaria. Se utiliza un diseño microgenético que plantea la aplicación de una tarea de escritura de numerales al dictado. En total se realizan cuatro aplicaciones con un intervalo de una semana y en cada una se propone a los niños 32 numerales diferentes –que corresponden a 5 tipos distintos–. Los resultados revelan que los mayores índices de variabilidad se encuentran en la producción de numerales *dieces Tipo 1* y *numerales de 2 dígitos sin cero*, esto indica que el conocimiento que los niños poseen para la escritura de este tipo de numerales es inestable. Igualmente, los patrones de variabilidad identificados en las sesiones plantean que los procesos significativos de cambio relativos al aprendizaje ocurren entre la primera y las dos últimas sesiones.

Palabras clave: numerales arábigos, variabilidad, número, escritura numérica, comprensión, transcodificación numérica

Introducción

Algunas investigaciones (Orozco, 2003; Orozco y Hederich, 2000; Medina, 2012; Otálora, 2009), evidencian la necesidad de abordar desde perspectivas diferentes la observación y exploración de la actividad de escritura de numerales arábigos, con el propósito de abandonar la visión tradicional como reduccionista del aprendizaje de la notación numérica que considera esta actividad como un procedimiento aislado de carácter instrumental y automático, que excluye los procesos complejos participantes en el aprendizaje y en la comprensión de los números.

La escritura de numerales arábigos exige a los niños acceder al conocimiento de formas de representación gráfica que expresan cantidades básicas y posibilitan representar cualquier número cuando se combinan entre sí. Estas cantidades básicas son denominadas *primitivos* *léxicos* y comprenden los dígitos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], así como también el [0], el cual indica ausencia de cantidad (Noël y Turconi, 1999). Por otra parte, los niños también deben comprender que el sistema numérico verbal se compone de palabras número, las cuales se utilizan para expresar de manera individual cualquier cantidad. Estas expresiones numéricas corresponden a *palabras unidad* ("uno", "dos"... "nueve"), *palabras decena* ("diez", "veinte"... "noventa"), *palabras multiplicadoras* ("ciento" y "mil"), es decir, palabras que expresan potencias de diez y finalmente, la palabra "cero" (Noël y Turconi, 1999).

Hughes (1986), propone que el proceso de aprendizaje de los primitivos léxicos del [1] al [9], no constituye una gran dificultad para los niños y afirma que el verdadero problema radica en la comprensión del digito [0]. Al respecto Brysbaert (1995), así como Wellman y Miller (1986), establecen que esta dificultad se debe a que dicho digito no tiene un equivalente directo en las expresiones numéricas verbales.

Según Hederich y Camargo (2002), la escritura de numerales de dos cifras confronta a los niños con las características sintácticas del formato arábigo; el valor de posición. Así, cuando ellos no comprenden esta regla invierten las cadenas de dígitos o establecen correspondencias biunívocas entre las expresiones verbales y las representaciones arábigas. No obstante, estos autores proponen igualmente, que a los niños se les facilita la producción de numerales finalizados en cero –denominados nudos– como una consecuencia que su aprendizaje ocurre de manera independiente al rango de los mismos.

Nunes y Bryant (1998), plantean que los numerales de 3 y 4 cifras proponen un incremento en la dificultad sintáctica para la composición de expresiones numéricas. Cuando los niños se enfrentan a numerales de este tipo, ellos parecen operar sobre dos sistemas diferentes: uno para los numerales de dos cifras y otro para los que tienen más de dos cifras. Así, los niños escriben correctamente los numerales redondos de 3 dígitos y de 2 dígitos sin cero, pero escriben incorrectamente los numerales con más dígitos (por ejemplo por *tres mil quinientos ocho*, los niños escriben 30005008). Igualmente, los numerales de 3 y 4 cifras proponen una novedad para la comprensión de los niños; los ceros intermedios, los cuales generan un grado de mayor dificultad para la producción de numerales arábigos. En síntesis, los formatos de representación numérica arábiga y verbal proponen una serie de exigencias que los niños deben solventar y que se encuentran en función del rango numérico que identifica la expresión numérica con la cual se opera.

La escritura de numerales desde la perspectiva del procesamiento numérico

Desde la perspectiva del procesamiento numérico la escritura de numerales a partir de una tarea de dictado se concibe como la traducción de un número representado en un código numérico inicial a otro de diferente (Medina, 2012). Esta traducción de un formato numérico a otro se denomina proceso de transcodificación numérica (Barrouiellet, Camos, Perruchet y Serón, 2004).

Las investigaciones que aportan evidencia empírica sobre el procesamiento numérico en niños normales se apoyan en el modelo de naturaleza semántica de McCloskey, Caramazza y Basili (1985), para realizar el análisis de las producciones numéricas que los sujetos generan. Así, este modelo de procesamiento numérico plantea un sistema conformado por dos módulos funcionalmente autónomos. El primero de ellos, denominado *modulo de comprensión* y el segundo *modulo de producción*. A su vez, cada uno de estos componentes se subdividen en un *componente grafémico* que procesa los numerales arábigos (por ejemplo; *42*) y *un mecanismo* *fonológico* que procesa los numerales verbales (por ejemplo; *cuarenta y dos*). Igualmente, cada uno de estos subcomponentes se encuentra integrado por mecanismos de tipo *léxico* y *sintáctico*. De esta manera, el modelo de McCloskey et al., (1985), permite establecer dos categorías diferentes para el análisis de los numerales arábigos como verbales; las producciones que presentan dificultades léxicas y aquellas que presentan dificultades sintácticas; en el primer caso se encuentra involucrada la substitución o el intercambio de dígitos y en el segundo caso el incremento u decremento en la magnitud del numeral. Otros autores como Macoir, Audet y Breton, (1999), consideran una categoría adicional de análisis resultante de la combinación de los dos tipos de dificultades anteriormente mencionados y que denominan errores mixtos. Así, en este tipo de error se ve afectada simultáneamente la magnitud y la producción de los dígitos del numeral. Igualmente, algunos investigadores han propuesto un análisis más detallado de los errores léxicos, estableciendo que este tipo de producciones puede subdividirse en errores *léxicos de clase* y *dentro de la clase* (Macaruso, McCloskey y Alimosa, 1993). De acuerdo con Guerrero (2004), los primeros corresponden al cambio de posición de por lo menos uno de los dígitos de cantidad del numeral dictado y los segundos, al cambio de magnitud de por lo menos un digito en el numeral dictado.

Orozco y Hederich (2000) proponen un análisis morfo–fonológico como sintáctico para describir los componentes que integran las expresiones numéricas verbales y su carácter operatorio. Según estos autores, las palabras numéricas se componen de prefijos que marcan cantidades básicas (por ejemplo “mil”, “ciento”, “tres” y prefijos como “cuar”, “cinc”, etc.) y prefijos que expresan potencias de diez ó unidad en un orden dado (por ejemplo “tres”, “cientos”, “mil”, “millón” y el sufijo “enta”). De esta manera, en la composición de una expresión numérica verbal estas marcas se combinan unas con otras y generan la conformación de diferentes palabras número (por ejemplo “ochenta y cuatro”, etc.). En consecuencia, para traducir expresiones numérico verbales a numerales arábigos se debe comprender que las marcas que indican potencia de diez en la expresión verbal señalan la posición de los dígitos en el numeral como su magnitud numérica y las marcas que indican cantidad se codifican con dígitos. En este sentido, cuando en el formato verbal las cantidades y potencias de un orden dado no se explicitan se deben llenar con un “0” la correspondiente posición” (Orozco, 2003).

Las tareas que tradicionalmente utilizadas en los estudios que abordan la actividad de transcodificación, corresponden a tareas de dictado de numerales en voz alta para su escritura ó en la presentación de numerales arábigos para su lectura. Por ejemplo, Power y Dal Martello (1990) proponen a niños de 2º grado una tarea de escritura al dictado. Los resultados evidencian que los niños transcodifican correctamente numerales menores a 3 dígitos. Sin embargo, cuando escriben numerales de 3 y 4 dígitos aparecen en sus producciones errores sintácticos. Por ejemplo, cuando se dicta “*trescientos sesenta y cinco*”, los niños escriben “30065” ó “3065”. Tales errores parecen deberse a una aplicación errónea de los operadores que participan en la producción de la expresión numérica, consistente en la aplicación de un operador de concatenación en vez de uno de sobrescritura. De esta manera, para transcodificar “*doscientos cinco*” se requiere escribir el digito 5 sobre el último cero del 200; pero en vez de esto los niños aplican el operador de concatenación y añaden el 5 al 200 y escriben “2005”.

Seron, Deloche y Noël (1991), aplican una tarea de escritura de numerales a niños de 2º y 3º grado de primaria. Los resultados evidencian que los niños no dominan las reglas de combinación y por esto transcodifican cada palabra con su número correspondiente en el formato arábigo (por ejemplo, la expresión verbal “cuatrocientos cuarenta y ocho” se traduce como

400408), ó cuando comienzan a dominar progresivamente las relaciones aditivas y multiplicativas con la unidad, aparecen nuevos tipos de errores (por ejemplo, la expresión verbal “cuatrocientos cuarenta y ocho” se traduce como 4038).

Orozco, Guerrero y Otálora (2007), presentan a niños de 1º, 2º y 3º grado con edades entre 6 y 8 años una tarea de escritura de numerales al dictado, los datos resultantes establecen que en 1º y 2º grado los tipos de numeral que presentan mayor dificultad para los niños son los que no proponen ceros (por ejemplo el *325*) o ceros en las unidades (por ejemplo el *320*). En 2º y 3º grado los numerales más difíciles son los numerales que proponen cero en la posición de las centenas (por ejemplo el *3025*). De manera general, los numerales tipo nudo (por ejemplo el *200*) resultan los numerales más fáciles en todos los grados observados.

Como se ha establecido de manera previa, el estudio de la producción de numerales arábigos en niños desde una perspectiva de procesamiento numérico involucra generalmente investigaciones que responden a diseños transversales y longitudinales e incluso la aplicación de estudios de caso. Este tipo de estudios han permitido identificar condiciones y factores que participan en la transformación de las producciones numéricas que los niños generan, como por ejemplo: (1) Los tipos de errores observados en las producciones numéricas de los niños varían en función del grado escolar. Orozco et al., (2007) plantea que el porcentaje de aciertos aumenta de 2º a 3º, como consecuencia de la utilización de tipos de procedimientos de composición específicos y que en cada grado se observa la tendencia al predominio de un tipo de error. Igualmente, Power y Dal Martello (1990), así como Seron y Fayol (1994), establecen que los niños tienden a cometer más errores sintácticos que léxicos en cualquiera de los grados escolares que se observen. Orozco (2001), observó que los errores sintácticos disminuyen a medida que los niños avanzan en el grado escolar. (2) La estructura que identifica un numeral, influye en el nivel de logro evidenciado en la producción de numerales arábigos. En este sentido, Orozco et al., (2007) halló que el desempeño de los niños varía en función del tipo de numeral dictado. Por ejemplo, estos autores encontraron que en todos los grados los numerales tipo nudos –como el "300"– tienden a ser escritos correctamente y que los numerales con ceros intermedios tienden a ser escritos de manera incorrecta. (3) La coordinación entre las reglas inherentes a los formatos numéricos involucrados al momento de generar una composición numérica determinan igualmente el éxito en la producción de una expresión numérica. Así, Seron et al. (1991) y Seron y Fayol (1994), observaron que en los primeros grados los niños tienden a codificar de manera literal los componentes de la expresión numérica verbal, generando numerales arábigos por yuxtaposición –por ejemplo, cuando se dicta "veinticinco", los niños escriben "205"–.

No obstante lo anterior, la literatura revisada no reporta estudios que planteen una caracterización de las producciones arábigas de niños en términos de efectuar un seguimiento a nivel microgenético de los cambios en los desempeños que ellos evidencian durante su proceso de escolarización o incluso al interior de un mismo grado. Solo se identifico un estudio exploratorio (ver Ceballos, 2012) que combina el análisis microgenético y el método de estudio de caso con el objeto de caracterizar la relación entre el conteo, la composición aditiva y la equivalencia numérica en la comprensión del valor de posición en niños de 1º grado, a partir de un proceso de intervención pre y post–test el cual involucraba la aplicación de una tarea de escritura de numerales. Los resultados obtenidos en la tarea de escritura sugieren que la intervención efectuada genera un efecto directo sobre los desempeños evidenciados durante la producción de expresiones arábigas y que al parecer ocurre una generalización de las reglas de escritura de numerales que se utilizan en órdenes numéricos inferiores a órdenes superiores.

Por otra parte, la utilización a nivel metodológico de un diseño microgenético para la observación del proceso de aprendizaje de la escritura de numerales es prácticamente inexistente, algunos investigadores interesados en la comprensión numérica resaltan la importancia de la utilización de este tipo de análisis para lograr el acceso al funcionamiento cognitivo de los niños en periodos de tiempo breves y para la captura de cambios relevantes que se encuentran vinculados con la comprensión numérica que ellos poseen (ver Orozco, 1997; Otálora, 2009). Esto se debe a que el análisis microgenético permite efectuar la observación de fenómenos que ocurren en tiempo presente, los cuales pueden llegar a durar segundos, minutos o días y posibilitar con ello, el seguimiento riguroso de secuencias de micro–eventos para generar descripciones de los elementos de cambio que ocurren en los desempeños y procesos cognitivos de los sujetos (Aldunate, Infante, Carré y Cornejo; 2009). Siegler (2007), plantea que los patrones de variabilidad pueden ser identificados a través de las estrategias que usan los sujetos de cualquier edad en la resolución de un problema. El uso o no de una estrategia determinada ó de un grupo de ellas, permite establecer regularidades e identificar tales patrones. Así, la variabilidad refleja el cambio cognitivo y proporciona elementos tanto para su análisis, como para la formulación de los mecanismos que lo generan. Igualmente, permite explicar y comprender las relaciones entre los cambios que se evidencian en el uso de estrategias a lo largo de varios desempeños, cuando estas son medidas en periodos cortos de tiempo.

En consecuencia, en este documento se plantea la descripción de un estudio exploratorio que pretende evaluar los cambios que se generan en la escritura numérica de niños que cursan el 1º grado. Se utiliza un diseño de tipo microgenético que busca establecer si esta metodología de investigación es relevante para explicar los cambios en la producción de numerales arábigos generados por los niños, además de establecer las características de estos cambios y su significancia.

Metodología

Se utiliza un diseño microgenético para evaluar el proceso de cambio en la producción de numerales arábigos. Se efectúan cuatro aplicaciones sucesivas con un intervalo de una semana. La variable independiente corresponde a la estructura que identifica los numerales propuestos y la dependiente las producciones de los niños al escribir numerales al dictado. La unidad de análisis son las producciones erradas de los niños.

Participantes

Participan en este estudio 29 niños de estrato socioeconómico medio-bajo que cursan el 1º grado de básica primaria en una escuela pública de la ciudad de Cali, Colombia. La edad de los niños oscila entre 6,2 años y 6,9 años.

Tarea y procedimiento

Se utiliza una tarea que consiste en la escritura de numerales arábigos al dictado y que se aplica de manera individual. Antes de cada aplicación se proporciona a cada niño una hoja de papel para que escriba los numerales dictados. En sesión individual de 30 minutos en promedio, un entrevistador entrenado dicta aleatoriamente a cada niño los ítems seleccionados, proporcionado el espacio de tiempo necesario para que puedan escribirlos. En total se aplicaron 32 numerales arábigos diferentes que responden a 5 clases distintas. Así, para identificar las variaciones en las producciones de los niños se tomó como criterio básico el *tipo de numeral*, que hace referencia a la estructura numérica específica de cada ítem aplicado. Se consideran los siguientes tipos: a. *Dígitos* (por ejemplo; 9); b. *Dieces Tipo 1* (por ejemplo; *11 a 15*); c. *Dieces Tipo 2* (por ejemplo; *16* a *19*), d. *Nudos* (por ejemplo; *60, 70, 80, 90*), e. *Numerales sin cero* (por ejemplo; *89*).

Las producciones de los niños participantes se codifican en función de las siguientes categorías: (1) el nivel de logro; *acierto* y *error*; (2) El tipo de error identificado, según las categorías *sintáctico* y *léxico* que plantea McCloskey et al., (1985), la categoría *mixta* que propone Macoir et al., (1999). Igualmente, en los errores léxicos se considera la diferenciación de subcategorías establecida por Macaruso et al., (1993), respecto a los errores *de clase* y *dentro de la clase* léxica. Por otra parte, los dos primeros niveles de análisis propuestos involucran la aplicación de la prueba *Chi–Cuadrado* para establecer el nivel de significancia; (3) Tipo de numeral –que ya se han descrito en el párrafo inmediatamente anterior. (4) Procedimientos que emplean los niños para la escritura de los numerales dictados. Se identificaron cinco tipos de procedimientos: a. Recuperación de marca de cantidad en posición incorrecta; b. Recuperación de marca de cantidad en posición correcta; c. Recuperación de todas las marcas de cantidad en posición incorrecta; d) Recuperación solo de marca de potencia de 10. (5) Tipo de estrategias utilizadas, que corresponden a dos clases: La primera de ellas denominada *estrategia fonológica*, la cual involucra los procedimientos denominados *a*, *c* y *d*. En este tipo de estrategia los niños se guían por las marcas fonológicas que le proporciona el numeral verbal dictado. El segundo tipo de estrategia es denominado *estrategia posicional,* que involucra el procedimiento *b*. En este tipo de estrategia los niños parecen orientar la producción de numerales arábigos por reglas del sistema arábigo escrito, tales como el valor de la posición o de los dígitos. Finalmente, las categorías establecidas en los procedimientos como en las estrategias, son propuestas por el estudio que se soporta el presente documento.

Resultados

Logro

El acierto para la producción de numerales arábigos de 1 y 2 cifras, presenta una tendencia al aumento a lo largo de las cuatro sesiones de aplicación. Por otra parte, el porcentaje de niños que no genera algún tipo de producción ante los ítems propuestos disminuye de la primera a la tercera aplicación para aumentar nuevamente en la última (ver Tabla I). Los relación en la proporción de éxito en función de las sesiones de aplicación es significativa entre la primera y tercera sesión $X^2(1) = 7{,}787$; $< 0{,}016$, así como entre la primera y cuarta sesión $X^2(1) = 7{,}712$; $< 0{,}017$.

Tabla 1
Distribución de las producciones en función de logro

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4
Acierto	74.5%	79%	83.3%	84.2%
Error	12.1%	10.5%	8.7%	7.3%
Sin Producción	13.5%	10.5	8%	8.5%

***Fuente*:** El autor.

Tipo de numeral

Los *dígitos* y *dieces tipo 1*, presenten el mayor porcentaje de éxito a lo largo de las cuatro aplicaciones realizadas (Media = 93.1% y 89.5% respectivamente). El menor porcentaje de acierto lo evidencian los *numerales sin cero* y los *nudos* (Media = 75.6% y 75.2%).

En general, todos los tipos de numeral presentan un incremento progresivo en el porcentaje de acierto que se obtiene (ver Figura 1). El análisis de logro en función del tipo de numeral establece relaciones significativas entre los *dígitos* y *dices tipo 2*; $X^2(1) = 14{,}425$; $< 0{,}000$), *dígitos* y *nudos*; $X^2(1) = 19{,}522$; $< 0{,}000$), *dígitos* y *no nudos*; $X^2(1) = 19{,}899$; $< 0{,}000$. Igualmente, los datos evidenciaron relaciones significativas entre *dieces tipo 1* y *dieces tipo 2*; $X^2(1) = 8{,}922$; $< 0{,}019$, *dieces tipo 1 y numerales sin cero*; $X^2(1) = 14{,}019$; $< 0{,}000$, y entre los numerales *dices tipo 1 y los nudos*; $X^2(1) = 14{,}396$; $< 0{,}001$.

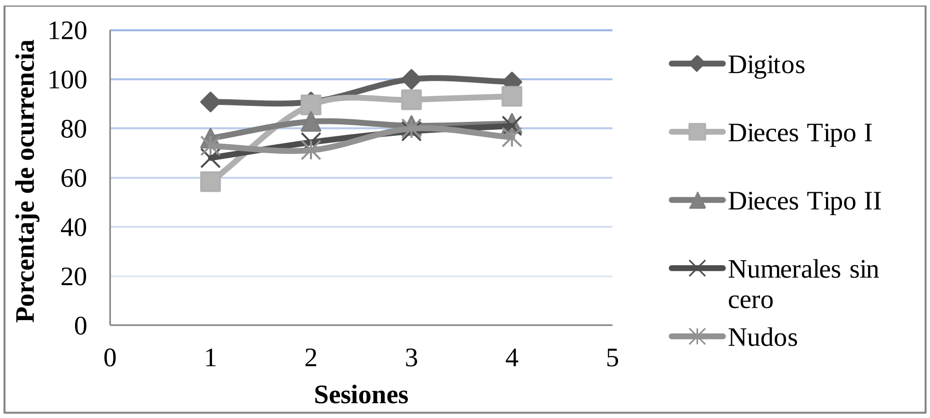


Figura 1. Variación en el porcentaje de ocurrencia en función de tipo de numeral.

Tipo de error

Las producciones erradas de los niños son principalmente de carácter *léxico* que de tipo *sintáctico*. En las sesiones de aplicación, se evidencia un patrón de variabilidad inverso entre los errores *léxico de clase* y *léxico dentro de clase* (Ver Figura 2). Así, cuando el primer tipo de error decrece el segundo aumenta y viceversa. Los errores tipo *mixto* aumentan progresivamente de la primera a la segunda sesión. En la última sesión este tipo de error decrece. Los errores de tipo *sintácticos* aumentan de la primera a la segunda sesión. En la tercera sesión este tipo de error disminuye hasta desaparecer. En la cuarta sesión aumenta nuevamente.

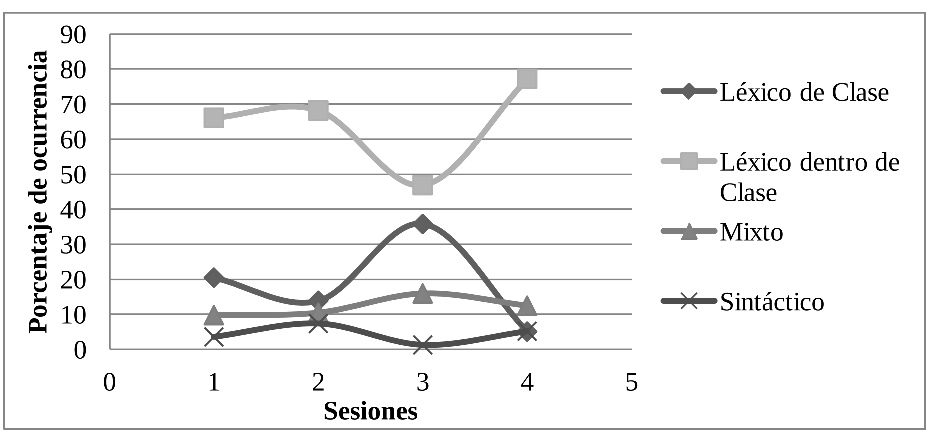


Figura 2. Variación en el porcentaje de ocurrencia en función del tipo de error.

Procedimientos

El análisis de los procedimientos empleados por los niños, evidencia principalmente una tendencia a la recuperación de marcas sintácticas y a su codificación en dígitos correctos en una posición igualmente correcta (ver Figura 3). Igualmente, se evidencia un patrón de variabilidad inverso entre el procedimiento denominado *recuperación de marca de cantidad en posición incorrecta* y *recuperación de todas las marcas de cantidad en posición incorrecta,* que constituyen los procedimientos que con mayor frecuencia los niños acuden a su utilización.

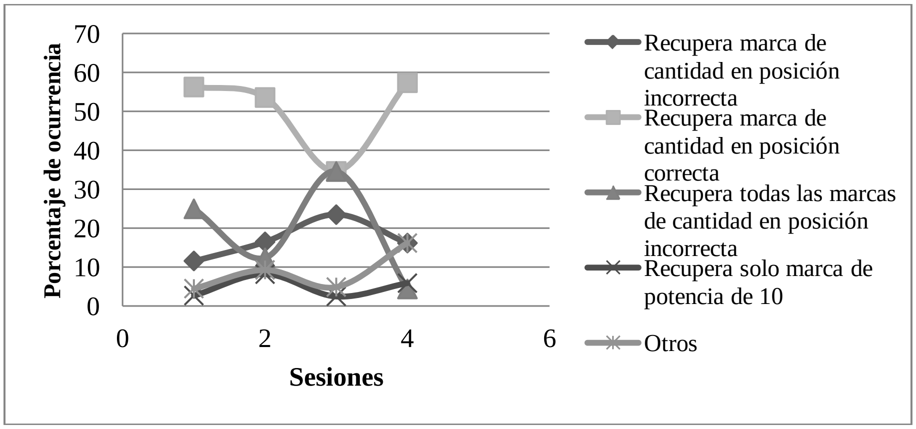


Figura 3. Variación en el porcentaje de ocurrencia en función del tipo de procedimiento.

Estrategias

El análisis de las estrategias empleadas por los niños, evidencia que la *estrategia posicional* presenta un mayor porcentaje de ocurrencia sobre la estrategia *fonológica*. Igualmente, ambos tipos de estrategias presentan patrones inversos de variabilidad. Así, la estrategia fonológica disminuye entre la primera y segunda aplicación, para luego aumentar de la segunda a tercera aplicación, disminuyendo nuevamente de la tercera a cuarta aplicación.
En la *estrategia posicional,* el porcentaje de ocurrencia aumenta de la primera a la segunda aplicación y disminuye de la segunda a tercera aplicación. Finalmente aumenta nuevamente de la tercera a la cuarta aplicación.

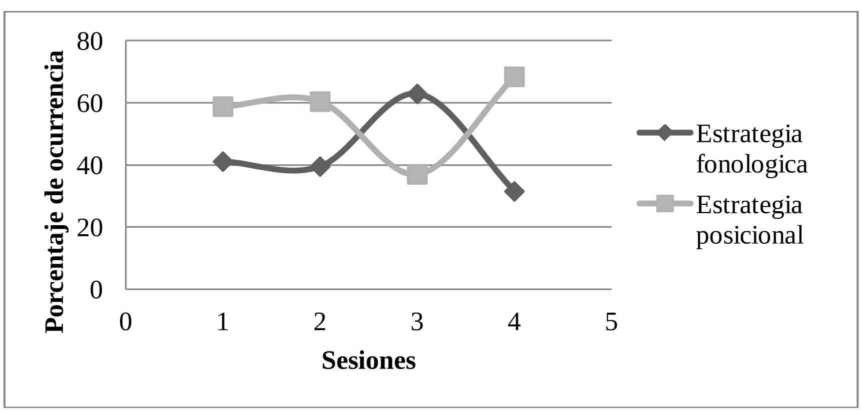


Figura 4. Variación en el porcentaje de ocurrencia en función del tipo de estrategia.

Discusión y conclusiones

El patrón de cambio identificado a lo largo de las cuatro sesiones de aplicación con relación a la categoría de logro; consistente en un progresivo aumento del éxito para la producción de numerales arábigos de 1 y 2 dígitos, sugiere –de forma preliminar– que el conocimiento de los niños se transforma y consolida a lo largo de cada una de las sesiones de trabajo hacía la producción de numerales arábigos sintáctica y léxicamente adecuados. Igualmente, los resultados proponen que los procesos significativos de cambio ocurren entre la primera y las dos últimas aplicaciones. Sin embargo, análisis complementarios –presentados más adelante en este documento– establecen que no obstante esto ocurre, el conocimiento de los niños es todavía inestable frente al dominio de las reglas de escritura de numerales arábigos.

Por otra parte, los datos obtenidos en función de la categoría tipo de numeral, evidencian que los ítems con mayor variabilidad –en términos del éxito en su producción– son los numerales *dieces tipo 2* y los *nudos*. Los numerales *dígitos, dieces tipo 1* y *numerales sin cero*, tienden a ser transcodificados con el tiempo en cada nueva aplicación con expresiones arábigas estables y convencionales, es decir, se vuelven cada vez más fáciles de ser producidos para los niños. Los resultados observados en los *dieces tipo 2*, concuerdan con lo propuesto por algunos autores (ver Hugues, 1986, Medina, 2012; Noel y Turconi, 1999, Orozco y Otálora, 2007) en lo concerniente que la naturaleza propia de estos numerales –palabras numéricas base que corresponden a raíces o primitivos léxicos no derivados o resultantes de combinaciones entre palabras numéricas– afecta de manera especial la comprensión y producción de los mismos en la medida que no proporcionan indicadores fonológicos para su escritura. Sin embargo, respecto a los *nudos* los resultados parecen no concordar con lo propuesto en la literatura en cuanto que los niños se les facilita su producción (ver Hederich y Camargo, 2002; Nunes y Bryant, 1998; Orozco et al., 2007). Así, este tipo de numeral presenta un cambio constante en el porcentaje de éxito similar e incluso a veces menor al de los numerales sin cero –que la literatura reporta como de mayor dificultad–. Lo anterior podría implicar que el aprendizaje de los nudos no ocurre de manera tan independiente al de los ítems en el rango numérico al que pertenecen como proponen algunos autores (ver Hederich y Camargo, 2002); o como expresan otros, que debido al contacto más frecuente de los niños con este tipo de estructura numérica son más fáciles (ver Lerner y Sadovsky, 1997). Una posible explicación alternativa podría ser que los niños durante su proceso de aprendizaje generan representaciones procedimentales que se van transformando progresivamente (ver Kamiloff-Smith, 1994) a medida que los niños se ven exigidos a tener que re–conceptualizar constantemente la comprensión que han logrado construir en el uso cotidiano y al tener que vincular este conocimiento con el dominio que se le exige realizar frente a las estructuras numéricas de los numerales que pertenecen a un mismo orden. Lo que explicaría la variabilidad observada en este tipo de numeral. Los análisis estadísticos establecen igualmente una relación entre el éxito para la escritura de los *dígitos, dieces tipo 1* con los *dieces tipo 2, numerales sin cero* y *nudos*. Esta relación podría interpretarse como un indicador que el conocimiento adquirido para notar los dos primeros tipos de numerales mencionados es más sólido e incide en la escritura de los *dieces tipo 2, numerales sin cero* y *nudos*.

El análisis de los tipos de error en las producciones de los niños evidencia un mayor predominio de *errores léxicos* sobre los de tipo *sintáctico*. Lo anterior, parece señalar que ellos ya se encuentran operando sobre la coordinación de reglas de traducción convencionales entre el formato arábigo y verbal, que les permiten identificar la cantidad de espacios que componen las cifras de 1 y 2 dígitos. Así, muy posiblemente ya logran identificar que las partículas "*enta*" en las expresiones numérico verbales se codifican con dos espacios en el numeral arábigo y su ausencia –en el caso de números de una cifra– con un espacio (ver Noël y Turconi, 1999; Orozco y Hederich; 2000). Por otra parte, respecto a la mayor ocurrencia de errores léxicos sobre los de tipo sintáctico es posible que sea una consecuencia originada de la exclusión en este estudio de numerales con estructuras más complejas que indujera a los niños a enfrentarse a numerales con un mayor grado de dificultad.

El predominio de errores *léxicos de clase*, *léxicos dentro de clase* y *mixtos*, evidencian que la comprensión de los niños se encuentra centrada en la codificación de marcas de cantidad y especialmente en las marcas de potencia de diez, otro claro indicador de la comprensión de reglas de coordinación para la traducción o transcodificación de expresiones numéricas verbales a numerales arábigos. En este sentido, el patrón de variabilidad inverso observado entre los errores *léxico de clase* y *léxico dentro de clase,* describe como ocurre el proceso de consolidación y dominio de estas reglas. Así, los niños parecen operar sobre dos ideas diferentes que se fundamenta en el *valor nominal* y *posicional* de los dígitos (por ejemplo, el digito 3 en el numeral "32" alude al valor nominal de "3" y al valor posicional de "30"; para una ampliación de estos dos conceptos ver Várelas y Becker, 1997); la primera corresponde a la idea que las marcas de cantidad indican el valor nominal de los dígitos y la segunda, que las marcas de potencia de diez indican el valor posicional del digito, en consecuencia, los niños parecen operar algunas veces sobre una u otra, pero se les presenta una gran dificultad conciliar de manera simultánea ambas conocimientos para la producción de un mismo numeral.

Lo anteriormente descrito guarda un estrecho vínculo con lo observado en el análisis de los datos relacionados con las categorías de los tipos de procedimientos, pues estos describen precisamente la dificultad entre la comprensión que poseen los niños sobre el valor nominal y posicional de los dígitos. Esto queda plasmado en el patrón inverso de variabilidad que evidencian los procedimientos: (1) *recupera marca de cantidad en posición correcta* y (2) *recupera todas las marcas de cantidad en posición incorrecta* (ver Figura 3). Así, cuando los niños codifican correctamente las marcas de potencia de diez de la expresión verbal, no logran codificar correctamente las marcas de cantidad de la misma expresión, o viceversa. La coexistencia de estas dos representaciones señala que los niños han construido reglas generales para la escritura de los numerales arábigos: 1) los espacios en el numeral son determinados por marcas de potencia de diez expresadas en el numeral verbal; 2) las marcas de cantidad en el numeral verbal expresan relación con un digito determinado; 3) los dígitos deben ubicarse en un lugar específico. Respecto a esta última regla, es claro que los niños participantes aún no la dominan totalmente, lo cual señala que todavía no hay una comprensión clara de la regla del valor de poción.

El análisis de los patrones de variabilidad observados en las dos tipos de estrategias que se consideran en el presente estudio; *fonológica* y *posicional*, evidencian claramente el fenómeno descrito por Siegler (2007), en cuanto que en la mente de los sujetos coexisten estrategias de diferente nivel de complejidad para la resolución de un problema. Así, los niños parecen enfrentarse al conflicto cognitivo de orientarse para la producción de numerales arábigos únicamente a partir de los indicadores que les proporcionan las expresiones numéricas verbales; lo cual los llevan a realizar fenómenos de codificación literal de los fragmentos que la componen, y en otros casos parecen orientarse por una concepción elemental fundamentada en la regla del valor de posición. Así, estos patrones de variabilidad observados describen avances y retrocesos en la coordinación de las reglas inherentes a los dos formatos de representación numéricos involucrados. Por otra parte, estos datos apoyan lo propuesto por Orozco et al., (2007), en cuanto que una de las mayores dificultades para dominar las reglas del sistema lo constituye el uso rudimentario de la regla del valor de posición. Finalmente, con relación al análisis microgenético, se puede establecer que su aplicación para el análisis en la producción de expresiones numéricas proporciona una oportunidad de profundizar en la comprensión que poseen los niños respecto a como ocurre el desarrollo y aprendizaje del proceso de transcodificación numérica.

Agradecimientos

Artículo de investigación derivado del proyecto: "Escritura de numerales arábigos en niños de 1º grado de primaria. Una aproximación microgenética", el cual se desarrolló en el marco de la realización del "Seminario Permanente en Matemática y Cognición" de la Universidad del Valle, 2011, con el apoyo del grupo de investigación "Estudios Psicológicos en Educación" de la Universidad Cooperativa de Colombia – Sede Cali y el grupo de investigación "Matemática y Cognición" del Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura de la Universidad del Valle.

Referencias bibliográficas

Aldunate, N., Infante, J., Carré, D., & Cornejo, C. (2009). Saber –como sin saber– qué. Estudio microgenético de la percepción de las caras. *Avances en Psicología Latinoamericana*, *22*, 2, 311–326.

Barrouillet, P., Camos V., Perruchet, P. & Seron X. (2004). ADAPT: A developmental, asemantic, and procedural model for transcoding from verbal to Arabic numerals. *Psychological Review, 111*, 2, 368–394.

Brysbaert, M. (1995). Arabic number reading: on the nature of numerical scale and the origin of phonological recoding. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*, 434–452.

Ceballos, F. A. (2012). *Comprensión del valor de posición a partir de la relación del conteo "a partir de", la composición aditiva y la equivalencia numérica. Un estudio exploratorio en niños de 2° de primaria* (Trabajo de Pregrado en Psicología). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Guerrero L., D. F. (2004). *Escritura de numerales arábigos en una tarea de dictado: La notación de los ceros* (Trabajo de Pregrado en Psicología). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Hederich, C. & Camargo, A. (2002). Hacia la construcción de un modelo de procesamiento numérico. El desarrollo de la transcodificación de numerales verbales a formato arábigo. Informe Técnico Final Presentado a COLCIENCIAS. Bogotá: CIUP, Universidad Pedagógica Nacional.

Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Malden: Blacwell Publishers.

Karmiloff–Smith, A. (1994). *Más allá de la modularidad*. Madrid: Alianza Editorial.

Lerner, D., & Sadovsky, P. (1997). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C. & Saiz, J. (Eds.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 95–184). Buenos Aires: Paidós.

Macaruso, P., McCloskey, M., & Aliminosa, D. (1993). The functional architecture of the cognitive numerical-processing system: Evidence from a patient with multiple impairments. *Cognitive Neuropsychology, 10,* 4, 341–376.

Macoir, J., Audet, T., & Breton, M. (1999). Code–dependent pathways for number transcoding: evidence from a case of selective impairment in written verbal numeral to arabic transcoding. *Cortex*, 35, 629-645.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. G. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, *44,* 107–157.

Medina R., D. A. (2012). Efecto de la comprensión del valor de posición en la escritura de numerales arábigos en niños de 1˚ grado (Tesis de Maestría en Psicología). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Noel, M., & Turconi, E. (1999). Assessing number transcoding in children. *European Review of applied psychology, 49*(4), 295–302.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Las Matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México: Siglo XXI Editores.

Orozco, M, (2001). *Los errores sintácticos cuando los niños aprenden a escribir numerales* (PaperBook). Cali; Centro de Investigaciones en Psicología. Universidad del Valle.

Orozco, M. (2003). *Estudio comparativo de errores de niños al escribir numerales*. Cali, COLCIENCIAS. Proyecto de investigación aprobado por la Universidad del Valle, con el auspicio de COLCIENCIAS.

Orozco, M. (1997). *Análisis microgenético y procesual de la construcción de la operación multiplicativa* (Tesis Doctoral en Psicología). Universidad de Barcelona, España.

Orozco, M., Guerrero, D. F., & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. *Infancia y Aprendizaje, 30*(2), 147–162.

Orozco, M., & Hederich, C. (2000). *Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: una relación posible*. Informe final de investigación. Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura. COLCIENCIAS. Universidad del Valle; Santiago de Cali.

Otálora, Y. (2009). *Cambio cognitivo en la comprensión numérica de niños en los primeros años escolares*. Informe final de investigación. Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura. Universidad del Valle: Santiago de Cali:

Power, R. & Dal Martello, M. (1990). The dictation of Italian numerals. *Language and Cognitive Processes, 5*, 237–254.

Seron, X., Deloche, G. & Noël, M.P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant: La production des chiffres sous dictée. En J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fisher (Ed.), *Les chemins du nombre* (pp. 303-328). Presse universitaire de Lille, France. Traduction anglaise: Pathways to numbers. Lawrence Erlbaum.

Seron, X. & Fayol, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, *12*, 281-300.

Siegler, R., S. (2007). Variabilidad Cognitiva. *Developmental Science, 10,* 1, 104–109.

Varelas, M. & Becker, J. (1997). Children´s Developing Understanding of place Value: Semiotic Aspects. *Cognition and Instruction, 15*, 2, 256–286.

Wellman, H., & Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: development of the concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology, 4*, 31–42.

Evaluación del desempeño profesional de docentes de matemática

Pablo José **Mena** Castillo
Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, Ministerio de Educación Pública
Costa Rica
pablo.mena.castillo@mep.go.cr

Resumen

Evaluar el desempeño profesional de los docentes de secundaria no es una tarea fácil, en especial cuando no se cuenta con instrumentos psicométricos cuyos resultados muestren evidencias de validez. Una de las aristas de evaluar la labor docente es quién o quiénes emiten criterios para fundamentar los juicios a los que se llegan en la evaluación. Con la presente evaluación se recabó la opinión del estudiantado que asistía a lecciones de sétimo año de tres colegios nocturnos, sobre el desempeño profesional de sus educadores de Matemática desde dos perspectivas: el perfil docente y la forma en cómo realizan la medición pedagógica los profesores.
Se visualiza la evaluación del desempeño docente como el principal insumo que tiene el profesor para retroalimentar su quehacer educativo, es decir, ella más que un mecanismo de control o de calificación del profesorado, debe servir como estímulo para incentivar los procesos de autoevaluación.

Palabras clave: educación, matemática, evaluación, desempeño profesional, prácticas pedagógicas, perfil.

Introducción

La realidad es una y cambia todo el tiempo debido a múltiples factores. El docente tiene como misión atender tal diversidad de factores, por lo cual se hace imposible e improcedente aplicar métodos y teorías preestablecidas en su tarea educativa. Él está llamado a conocer y dominar las diversas teorías educativas para así tenerlas como referente de su accionar, pero no debe aplicarlas sin antes juzgar su pertinencia a determinaos contextos. El educador lleva a cabo su labor en el aula, en dónde interactúa con seres humanos, cada uno con una personalidad y forma de ser y ver el mundo particular.

La presente evaluación tuvo como intención brindar insumos a los docentes sobre cómo los perciben los estudiantes y cómo los esfuerzos que ellos realizan en el proceso enseñanza y aprendizaje son percibidos por sus estudiantes. Así pues, se presenta una mirada a la Enseñanza de la Matemática en Educación Media desde la óptica estudiantil.

En el sector educativo, en contraposición a otros servicios, es necesario apuntar que los estudiantes no son meros receptores de un servicio, sino ante todo, son parte de este servicio, aunque en la práctica educativa costarricense no siempre es así. Considerar al estudiantado como receptores representa una visión tradicional de la enseñanza. Hoy en día existe mayor conciencia en el profesorado de que la educación es un proceso en el cual el estudiante construye el conocimiento, y que la labor del profesor está dirigida a guiar o mediar en el aprendizaje estudiantil.

En una visión limitada de la educación se tiende a considerar el rendimiento académico como el único indicador del éxito de los educandos, y aunque en efecto existe una relación entre ambos, el bajo rendimiento puede deberse a otros factores, como es el caso del desempeño profesional de los formadores. En esta dirección, también es erróneo evaluar el desempeño en términos de la eficiencia, porque resultados y eficiencia tienden a considerarse como el mismo concepto evaluativo y se privilegia la evaluación del producto en detrimento de una evaluación más integral. Se juzga la labor del maestro con base en los resultados de sus estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, es necesario analizar los distintos elementos que impactan en forma directa el rendimiento académico de los estudiantes, como lo es desempeño de los profesores, y no solo los resultados de los estudiantes. La evaluación docente representa un campo altamente productivo, en la cual a la comunidad educativa se le facilita la detección de elementos clave del éxito institucional.

Una institución educativa que realiza las acciones necesarias para elevar los niveles de opinión de sus estudiantes sobre sus docentes, no solo estará contribuyendo al logro de un mayor rendimiento académico y éxito escolar, sino también tendrá una repercusión social importante al mejorarse la percepción pública sobre la calidad de los servicios de la propia escuela.

En términos generales, es sumamente importante apuntar que un buen criterio estudiantil institucional es directamente proporcional al esfuerzo que haga el centro educativo, y propiamente el sector docente, en el desarrollo de un ambiente orientado al servicio, en el cual el estudiante se visualice como protagonistas con posibilidades reales de ser copartícipe de un proceso de evaluación.

En la conceptualización de educador, el criterio de los estudiantes es fundamental, pues es el estudiantado el que en última instancia está en mayor contacto con los docentes y tienen los criterios necesarios para juzgar su labor. Considerar que los estudiantes no tienen suficiente criterio para emitir un juicio fundamentado y responsable sobre sus educadores, es subestimar su capacidad.

Justificación

La importancia de esta investigación está estrechamente vinculada a despertar la curiosidad en los docentes de Matemática de indagar la opinión estudiantil de su labor profesional. Es decir, cada docente debería tener la posibilidad, a partir de los resultados de investigaciones como esta, de diseñar estrategias y medidas de refuerzo y crecimiento profesional pertinentes y ajustadas a las condiciones y necesidades reales propias.

Se apunta en el presente trabajo hacia una evaluación del desempeño docente que potencie el perfeccionamiento de las cualidades de los profesores. Por ello, cada docente debe estar en capacidad de visualizar, mediante un proceso ante todo de autoevaluación, cuáles son sus fortalezas y carencias y a partir de estas, trazarse caminos de superación y capacitación.

Las apreciaciones de los estudiantes respecto a las lecciones de Matemática en Educación Media pueden convertirse en un importante detonante en la procura de mejorar el rendimiento académico y otros importantes indicadores del éxito escolar. La vinculación de estas apreciaciones en el desempeño profesional docente es inevitable y por lo tanto, como los desempeños docentes son prácticas humanas, existe la necesidad de someterlos a evaluación. Para Chiroque (2006, pp. 2-3) en la evaluación de los desempeños profesionales del docente:

- Se debe recoger información confiable para los diversos aspectos o indicadores de desempeños;
- se emite juicio con base en la información recogida y teniendo como referencia algunos parámetros que nos permiten la valoración;
- la valoración debería posibilitarnos tomar decisiones sobre la situación encontrada en materia de desempeños docentes.

Es decir, se está en presencia de un proceso delicado en donde se juzga la calidad profesional de un educador. Por ello, el instrumento empleado para tal efecto debe ser el resultado de todo un proceso serio de construcción y validación, para que así los resultados obtenidos a partir de él, sean confiables y muestren evidencias de su validez.

Valdez (2000) invita a reflexionar más sobre el sentido de la evaluación del desempeño docente, debido a que para él, ella es una actividad de análisis, compromiso y formación del profesorado, que valora y enjuicia la concepción, práctica, proyección y desarrollo de la actividad y de la profesionalización docente. La evaluación, quiérase o no, orienta la actividad educativa y determina el comportamiento de los sujetos, no solo por los resultados que pueda ofrecer sino porque ella preestablece lo deseable, lo valioso y lo que debe ser.

Aunado a lo anterior, Vázquez & Galabán (2006, p. 1) enfatizan en que la evaluación del desempeño docente debe asumirse "como un proceso permanente enmarcado dentro de una concepción de calidad de la educación, enfocado hacia el perfeccionamiento de la docencia en una institución educativa". Para estos autores es importante utilizar diversas fuentes de información, como estudiantes, colegas, jefe inmediato y el mismo docente, entre otros, quienes facilitan identificar de una manera comprehensiva la labor del docente y, a partir de estas fuentes, se pueden establecer políticas de mejoramiento institucional, en pro de la calidad educativa.

Por consiguiente, como bien lo establece Reyes (2006), evaluar al profesorado no es proyectar en él las deficiencias o razonables limitaciones del sistema educativo, por el contrario, es asumir un nuevo estilo, clima y horizonte de reflexión compartida, para optimizar y posibilitar espacios reales de desarrollo profesional de los docentes, de generación de culturas innovadoras en los centros educativos. Por ello, Bretel (2002, p. 1) concibe "la evaluación del desempeño docente como un proceso, formativo y sumativo a la vez, de construcción de conocimientos a partir de los desempeños docentes reales, con el objetivo de provocar cambios en ellos, desde la consideración axiológica de lo deseable, lo valioso y el deber ser del desempeño docente".

La evaluación docente constituye una gran fuente de conocimientos que deben ser aprovechados por el docente para comprender más y mejor su actividad educativa, por lo que se convierte en un excelente aporte de información que, correctamente canalizado, genera comprensión, mejora, formación, responsabilidad, compromiso, dedicación (…) con la educación.

Dentro de las exigencias que debe satisfacer toda evaluación están las referentes al rigor metodológico, pues ellas determinan los procedimientos y modelos que se practican. Así, una aproximación específica define entre otras cosas los criterios metodológicos a seguir, el tipo de datos a recabar, la manera de obtenerlos y el procesamiento que se dará a la información. En la selección de una metodología específica es fundamental considerar las características de la entidad a evaluar, porque no existen recetas cuando se debe llevar a cabo una evaluación del desempeño docente.

Para efectuar la presente evaluación, se seleccionaron los tres colegios nocturnos de la Dirección Regional de Educación de San Ramón y específicamente el nivel de sétimo año, porque en estas instituciones y en ese nivel, se presentan indicadores educativos alarmantes. Este es un nivel en donde la deserción y la repitencia obtienen los primeros lugares institucionales, aunado a un rendimiento académico en general bajo. Además, sétimo es el año en donde los estudiantes ingresan por primera vez al colegio y se tienen que adaptar a nuevos elementos institucionales.

Uno de los argumentos de mayor peso que justifica la inclusión del criterio estudiantil en la evaluación del desempeño docente, tiene que ver con el hecho que son los estudiantes los principalmente afectados por los servicios educativos dados por el docente. Esto los ubica en una posición privilegiada para proporcionar información acerca de la efectividad de la docencia. Son los únicos que tienen información directa del tipo, naturaleza y calidad de las prácticas docentes que se realizan en el aula.

Para Bretel (2002, p. 7) "es cierto que los juicios de los estudiantes tienen que ver básicamente con los niveles de empatía y sintonía que los docentes han logrado o no con ellos". De ser así, la información del empleo de este procedimiento es absolutamente relevante, porque del nivel de empatía y comunicación afectiva logrado por el docente, dependen en buena parte de los resultados de aprendizaje de sus estudiantes.

Que el profesor conozca las percepciones del estudiante sobre su práctica docente y su actuación personal en el aula, independientemente de su valor formativo para estudiantes y docentes, es una importante plataforma de interacción y acercamiento entre los estudiantes y el docente. Por ello, se reconoce a la centro escolar como el encargado de propiciar un ambiente adecuado, donde estudiantes y profesores, que por constitución natural se encuentran cargados de valores subjetivos, se integren en la consolidación de un modelo de evaluación del desempeño docente acorde con las necesidades de cada uno de los actores, en donde el nivel de subjetividad de cada uno de los involucrados en el proceso, se constituya en factor fundamental en el momento de emitir una apreciación.

Si el centro educativo está interesado en brindar un servicio de calidad, entonces el establecimiento de un proceso de evaluación del desempeño docente es requisito indispensable, al lado de conceptualizar el rol de un "buen docente", en quien ineludiblemente, se deben concretizar, entre otros aspectos, el perfil deseable y las características de cómo debe liderar la mediación pedagógica.

Problemas

1. ¿Cuál es la opinión estudiantil sobre el perfil profesional de los docentes de Matemática que imparten lecciones de sétimo año en los colegios nocturnos de la Dirección Regional de Educación de San Ramón, durante III Periodo lectivo del 2009?
2. ¿Cuál es la opinión estudiantil sobre la mediación pedagógica de los docentes de Matemática que imparten lecciones de sétimo año en los colegios nocturnos de la Dirección Regional de Educación de San Ramón, durante III Periodo lectivo del 2009?
3. ¿El perfil de los docentes de Matemática de sétimo año y las características que presentan sus prácticas pedagógicas están relacionadas con la calificación que le asignan los estudiantes a sus docentes de Matemática?

Metodología

En el caso de la presente evaluación, se realizó un censo, es decir, se le aplicó un instrumento psicométrico a los 276 estudiantes que asistían a lecciones de sétimo año de Matemática de los tres colegios nocturnos de la Dirección Regional de Educación de San Ramón.

El instrumento que se utilizó para la recolección de la información es un instrumento psicométrico (cuestionario), pues es uno de los instrumentos que más se emplea cuando se trabaja con una muestra grande de individuos. Es importante acotar que este cuestionario construido por el evaluador, se consideró un instrumento psicométrico, pues más que una simple colección de preguntas, midió un constructo claramente preestablecido: desempeño docente y de este constructo, dos sub-constructos o factores, como lo fueron perfil docente y mediación pedagógica. Para garantizar lo anterior, el instrumento fue sometido a un proceso de validación antes de ser aplicado a los estudiantes que asistían a lecciones de sétimo año, en el cual se recolectaron evidencias de su validez que respaldaron la medición de estos dos sub-constructos.

Características de la muestra

Sexo del estudiantado encuestado. El 38% fueron mujeres y el 62% hombres, lo cual indica que la muestra seleccionada estuvo conformada principalmente por hombres y el porcentaje de mujeres indica que 4 de cada 10 estudiantes encuestadas fueron de sexo femenino.

¿Están trabajando los estudiantes? De la población estudiantil encuestada, solo un estudiante dejó en blanco esta pregunta, de los demás, el 71% manifestó que no trabajaba y el restante 29, sí lo hace, es decir, 7 de cada 10 estudiantes matriculados en sétimo año, no trabaja.

Repitencia de los estudiantes encuestados. El 62% del estudiantado se encuentra repitiendo sétimo y el restante 38% no, es decir, seis de cada diez estudiantes están repitiendo sétimo año. En el caso que en esta pregunta se marcara la opción “No”, se indicaba en el instrumento psicométrico que debía pasar a la pregunta 9, de lo contrario se debía responder la pregunta 8: “¿Cuántas veces se ha matriculado en sétimo?” Del 62% que respondió que sí repite sétimo año en la pregunta 7, un 48% lo ha hecho en dos o tres ocasiones y el restante 14% lo ha hecho en 4, 5, 6 o 7 ocasiones, es decir, casi la mitad de la población estudiantil se encuentra repitiendo sétimo por segunda o tercera ocasión. Estos datos demuestran que el nivel de repitencia en sétimo año es alto.

Análisis psicométricos

Con los resultados de la aplicación del instrumento, se realizaron una serie de análisis psicométricos para los dos factores o sub-constructos (perfil docente y mediación pedagógica), en el marco de la Teoría Clásica de los Test (TCT) y la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI).

A partir de lo anterior, se estableció que los resultados producto de la aplicación del instrumento psicométrico eran muy confiables, pues el valor del Alfa de Cronbach para el primer factor fue 0,960 y para el segundo factor fue 0,950. Es decir, este valor supera el 0,9, lo cual indica que el uso de estos resultados para la toma de decisiones es confiable.

Resultados

Calificaciones asignas por el alumnado a los profesores de Matemática

Las calificaciones asignadas al personal docente variaron desde 0 hasta 100 (a pesar que se indicaba que debía ser en una escala de 1 a 100), aunque estuvieron concentradas principalmente en calificaciones altas. Por ello, la calificación que más se repitió fue de 100 (moda). El 50% del estudiantado asignó una calificación de 95 (mediana) o menos, es decir, el otro 50% le asignó a su docente una calificación superior a 95 y menor o igual al 100. Al haber algunas calificaciones tan bajas, el promedio de las calificaciones fue de 85, no tan alto como la moda y la mediana.

Deseo de continuar recibiendo clases con su docente de Matemática

Una gran mayoría (83%) del estudiantado consultado sí deseaba continuar recibiendo lecciones con el docente actual de Matemática. El restante 17%, indicó que no lo deseaba.

Correlaciones entre los dos factores y las calificaciones para el profesorado

Un ítem del instrumento psicométrico consistió en la pregunta: “¿Qué nota global le daría usted a su profesor(a) de Matemática en una escala de 1 a 100?” Los resultados de este ítem se incorporaron al SPSS como una variable.

Como ya se indicó, en el instrumento psicométrico para medir el desempeño docente se formaron dos factores, por lo cual para cada factor se creó una nueva variable en el SPSS que consistió en la suma de las puntuaciones de los ítems que conformaban este factor. Así, para el primer factor, se sumaron las puntuaciones que reportaron los estudiantes para los 32 ítems que pertenecían a este factor y para el segundo factor, se hizo lo mismo con los 23 ítems.

A partir de esto, se calculó las correlaciones entre estas tres variables, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1

Correlaciones de Pearson entre los dos factores y la calificación para el profesorado de Matemática

	Calificación para el prof. de Mate	Factor 1: Perfil docente	Factor 2: Mediación pedagógica
Calificación para el prof. de Mate	1	0,72	0,66
Factor 1: Perfil docente	0,72	1	0,85
Factor 2: Mediación pedagógica	0,66	0,85	1

Fuente: Resultados del análisis de los datos con el SPSS, 2009.

De acuerdo con los datos de la tabla 1, se muestra que la correlación de Pearson entre los dos factores seleccionados es positiva y alta (0,85), es decir, los estudiantes que calificaban muy bien la docente por su labor en la mediación pedagógica (factor 2), también consideraron que tenían un perfil idóneo para dar clases (factor 1) y por eso le asignaron puntuaciones igualmente altas.

Lo realmente novedoso de la tabla anterior, es que una evidencia más de validez del instrumento psicométrico se muestra al correlacionar la calificación que le asignan los estudiantes a su profesor y la calificación dada a su desempeño docente mediante los dos factores ya mencionados, pues es de esperar que esta correlación sea positiva y alta. Situación que se confirma con el análisis de las correlaciones hechas, pues la correlación de Pearson entre el factor 1 y las calificaciones dadas por los estudiantes a su profesor de matemática fue 0,72 (alta y positiva) y la correlación de Pearson entre el factor 2 y las calificaciones dadas por los estudiantes a su profesor de matemática fue 0,66 (alta y positiva).

Análisis de regresión lineal múltiple

Para el presente estudio se estableció como variable dependiente "*Calificación para el prof. de Mate*", entendiéndose esta como la calificación asignada por el estudiantado a su docente de Matemática. En cuanto a las variables independientes, originalmente se estipularon trece, a saber, *sexo del estudiante*, *estado civil del estudiante*, *lugar donde terminó la escuela primaria*, *¿Tiene trabajo remunerado?*, *¿Está repitiendo sétimo año?*, *¿Le gustaría seguir recibiendo clases con su actual profesor(a) de Matemática?*, *el profesor(a) realizó evaluaciones diagnóstica*, *el profesor(a) comunicó los componentes de la evaluación, el profesor(a) tiene un registro de la puntualidad, la asistencia diaria y acumulativa, Factor 1: Perfil del docente, Factor 2: Medición pedagógica, ¿Cuántas veces se ha matriculado en sétimo? y edad en años cumplidos*.

Ecuación de la regresión múltiple. Con base en los resultados del análisis hecho en el SPSS, la ecuación de la regresión múltiple fue:

$$Y = -16{,}463 + 0{,}400Factor1 + 20{,}526ContinuarProf + 0{,}301Factor2$$

De la ecuación de la regresión múltiple anterior se puede interpretar lo siguiente:

- De las 13 variables independientes, tan solo 3 de ellas explican o predicen la calificación asignada por el estudiantado a su docente de Matemática. Recuérdese que esta calificación está dada de 1 a 100.
- Al valor -16,463 se le llama constante y representa el punto del hiperplano que interseca el *eje y*. Este valor denota el valor promedio de la variable dependiente cuando el valor de las variables independientes es cero.
- Las tres variables predictoras Factor 1, SeguirRecib y Factor 2 se encuentra positivamente relacionada con la calificación del docente de Matemática, pues su coeficiente es positivo.

Coeficiente de determinación múltiple. El coeficiente de determinación múltiple indica la proporción de varianza en la variable dependiente estadísticamente explicada por el conocimiento de las dos (o más) variables independientes. Él se define como el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple y constituye una medida de proximidad relativa empleada en el análisis de regresión múltiple para evaluar la bondad de ajuste del modelo.

El rango de valores que puede tomar el coeficiente de determinación múltiple oscila entre 0 y 1. Para Cea (2002) cuando es de uno, entonces se dice que el modelo de regresión explica completamente la varianza de la variable dependiente, en caso contrario, si su valor es 0, entonces denota que el modelo de regresión carece de poder predictivo. Para determinar el porcentaje de la variable dependiente que es explicada por las variables independientes, se multiplica el coeficiente de determinación múltiple por 100.

El coeficiente de determinación múltiple del análisis de regresión múltiple fue 0,705, lo cual indicaba que las 3 variables independientes seleccionadas en el modelo de regresión múltiple logran explicar aproximadamente el 71% de la variable dependiente. Este es un porcentaje bastante alto, sobre todo para análisis en las ciencias sociales, e indica que las variables predictorias son bastante buenas, es decir, son buenas predictorias de la calificación que los estudiantes les asignan a sus docentes de Matemática.

Conclusiones

En la presente evaluación se mostró la posición del estudiantado en torno al desempeño de sus docentes de Matemática. Esta postura genera muchas posiciones encontradas, pues para unos el estudiantado no tiene la suficiente madurez para evaluar a sus docentes y optan por “sacarse el clavo” de las malas calificaciones asignadas por sus educadores. Para otros, posición compartida por el evaluador, no se trata de un asunto de madurez, pues aunque es inevitable que algunos estudiantes decidan “sacarse el clavo”, no suele ser la mayoría, así se refleja en los resultados de la presente evaluación, por el contrario, el estudiantado es quien está en contacto directo con la labor docente y es quién tiene criterio para juzgar el trabajo de sus formadores.

La opinión estudiantil sobre el desempeño docente se conceptualiza en el actual trabajo como una posibilidad al alcance de los docentes para enrumbar su trabajo cotidiano en las aulas, es un insumo para reflexionar en el marco de la autoevaluación sobre la efectividad y el impacto de las acciones docentes en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes. No se trata de controlar, castigar o premiar al profesorado por sus actos, sino de poner en sus manos las opiniones y el sentir de quienes son su razón de ser en el sistema educativo, los estudiantes, todo con el fin retroalimentar las intervenciones educativas que ellos realizan.

La opinión del estudiantado sobre el perfil de sus docentes de Matemática y la forma en cómo se lleva a cabo la mediación pedagógica en las lecciones de Matemática es muy buena. Así lo confirman las puntuaciones de los ítems en cada factor, en donde en todos ellos la calificación que más se repitió fue 4 o 5 (moda) e igualmente, el 50% o más de alumnado calificó a sus docentes con un 4 o un 5 (mediana).

La mayoría del estudiantado tiene un excelente concepto de sus docentes de Matemática, debido a ello expresan su deseo de seguir recibiendo clases con su actual docente y por ello las calificaciones asignadas a sus educadores son muy altas. La calificación que más se repitió fue la 100 y el 50% le asignó a su docente una calificación superior a 95 y menor o igual a 100.

Se constató que el instrumento psicométrico utilizado en la evaluación mide el constructo: desempeño docente y dos de sus sub-constructos: perfil docente y mediación pedagógica. Además, se muestra que la correlación entre estos dos sub-constructos es alta, que cada uno de los ítems del instrumento solo mide uno de los dos sub-constructos y que son ítems con calibraciones muy buenas.

Los sub-constructos perfil docente y mediación pedagógica se encuentran bien medidos con el instrumento psicométrico empleado, pues entre más altos son los puntajes de estos, más alta es la calificación que le asignan el estudiantado a sus docentes y manifiestan querer seguir recibiendo clases con él (análisis de las correlaciones).

Los resultados producto de la aplicación del instrumento, son muy confiables, pues en ambos sub-constructos el coeficiente "alfa de Cronbach" supera el 0,9. Esto indica que el uso de estos resultados para la toma de decisiones es confiable, en términos que todos los ítems presentan altas correlaciones y en la misma dirección entre ellos y con el total de los ítems.

La población estudiantil seleccionada permitió la dispersión de los datos, al considerar estudiantes de tres colegios diferentes y a siete docentes de Matemática que les brindaban lecciones, lo cual es una evidencia más de validez del instrumento psicométrico.

El perfil de los docentes de Matemática de sétimo año y las características que presentan sus prácticas pedagógicas desarrolladas inciden en la calificación que le asignan los estudiantes a sus profesores de Matemática. Esto se constató mediante la realización de un modelo de regresión lineal múltiple.

La calificación global en una escala de 1 a 100 que le asignaría la población estudiantil matriculada en sétimo año de los tres colegios nocturnos de la Dirección Regional de Educación de San Ramón a sus docentes, se puede predecir en aproximadamente un 71% mediante las opiniones del estudiantado en cuanto al perfil y a la forma en cómo abordan sus docentes de Matemática la mediación pedagógica; aunado al interés estudiantil por seguir recibiendo lecciones con su actual profesor. Es decir, mediante un modelo de regresión lineal múltiple se pudo constatar que las anteriores tres variables independientes son buenas predictoras de la variable dependiente.

Bibliografía

Arias Tencio, F. (2005). *Propuesta para orientar el proceso de construcción y definición del perfil profesional fundamentado en competencias para el plan de estudios de bachillerato en enseñanza de la matemática de la Universidad de Costa Rica*. Informe final del proyecto para optar por el grado de Magister en Planificación Curricular, Universidad de Costa Rica, Facultad de Educación, Escuela de Formación Docente, Maestría Profesional en Planificación Curricular, San José, C.R.

Bernad, J. A. (2000). *Modelo cognitivo de evaluación educativa: escala de estrategias de aprendizaje contextualizado (ESEAC)*. Madrid, España: Narcea.

Brennan, R. (2006). *Educational Measurement (fourth edition)*. EE. UU.: Praeger Publishers.

Bretel, L. (2002). *Consideraciones y propuestas para el diseño de un sistema de evaluación del desempeño docente en el marco de una redefinición de la carrera magisterial*. Recuperado el 20 de octubre de 2008, de http://espanol.geocities.com/cne_magisterio/3/1.1.e_LuisBretel.htm.

Cea D´Ancora, M. (2002). *Análisis multivariable. Teoría y práctica en la investigación social*. Madrid, España: Síntesis.

Chiroque C., S. (2006). *Evaluación de desempeños docentes. Instituto de pedagogía popular, INFORME Nº 45*. Recuperado el 20 de octubre de 2008, de https://bibliotecavirtual.educared.org/index.php/site/default/descargar/id/00000000458/evaluacion-de-desempeno-docente

Dunn-Rankin, P. (1983). *Scaling Method*. Hilldale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hernández, C. A. (1999). Aproximaciones a la Discusión sobre el Perfil del Docente. *II Seminario Taller sobre perfil docente y estrategias de formación. Países de Centroamérica, El Caribe, México, España y Portugal*. San Salvador, El Salvador del 6 al 8 de diciembre de 1999.

Lacayo Arnuero, A. E. (1999). Evaluación del desempeño docente en el departamento de sistemas de la Facultad de Ciencias y Sistemas de la Universidad Nacional de Ingeniería de Nicaragua. *Revista Educación,* 23(1), 265-290.

Marchesi, A. (2007). *Sobre el bienestar de los docentes. Competencias, emociones y valores*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Moreira Mora, T. E. (2001). Percepciones sobre la formación docente y su posible articulación con la enseñanza de la matemática, un estudio de casos. *Revista Educación*, 25(1), 53-66

Pavez U., J. (2001). Profesionalización docente y calidad de la educación. *Seminario Perspectiva del Colegio de Profesores sobre el Profesionalismo Docente Internacional Santiago de Chile,* 8 y 9 de mayo de 2001.

Reyes O., L. (2006). *Estándares de desempeño docente Universidad Católica Silva Henríquez.* Recuperado el 20 de octubre de 2008, de http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/estandares_desempeno_docente_luis_reyes.pdf - 2006.

Sierra, G. (2000). Una aproximación pedagógica para formar competencias. *Revista Escuela de Administración de Negocios EAN*, 48, 28-39.

Valdez V., H. (2000). Evaluación del Desempeño Docente. *Ponencia presentada en el Encuentro Iberoamericano sobre Evaluación del Desempeño Docente.* OEI, México, 23 al 25 de mayo de 2000. Recuperado el 20 de octubre de 2008, de http://www.oei.es/de/rifad02.htm.

Vásquez R., F. E. & Gabalán C., J. (2006). *Percepciones estudiantiles y su influencia en la evaluación del profesorado*. Un caso en la Universidad Autónoma de Occidente, Cali – Colombia. *RELIEVE,* v. 12, n. 2. Recuperado el 20 de octubre de 2008, de http://www.uv.es/RELIEVE/v12n2/RELIEVEv12n2_3.htm.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Evolución de la competencia comunicativa matemática en un contexto de master de formación de profesores de matemática. La evolución de Ester.

Claudia Vargas Diaz
Universidad del Bío Bío
Chile
cvargas@ubiobio.cl

Resumen

En un contexto de master de formación de profesores de secundaria se encuentra Ester, una profesional que decide estudiar un Master de Formación del Profesorado de Secundaria en la especialidad de Matemática para ser profesor de matemática.
En la investigación analizamos los textos producidos por los estudiantes de este Master y en esta artículo queremos destacar las reflexiones de Ester en cuanto a lo que hemos definido como competencia comunicativa matemática en la formación de profesores. Por ello explicaremos el contexto de la investigación, cuáles fueron las tareas analizadas, específicamente, aquellas que se pensaron como desarrolladoras de reflexiones vinculadas a la comunicación de la matemática.
Se concluye que debido a los procesos de formación vividos en el master de formación de profesores las reflexiones de Ester sufrieron una evolución progresiva en cuanto a competencia comunicativa matemática.

Palabras clave: didáctica, formación, competencia comunicativa matemática

1. Introducción

Comunicar matemática requiere de un tratamiento especial tanto en la planificación como durante la sesión de clases en un aula de cualquier nivel de enseñanza. Bajo esta premisa, nos formulamos la siguiente pregunta en relación a la formación de profesores de matemática, ¿cómo se trata la comunicación de contenido matemático en la formación de profesores de profesores de

matemática? Por ello, nos preguntamos específicamente, ¿en qué situaciones y asignaturas de la formación matemática del profesor de secundaria se trata la comunicación? y ¿cómo se gestionan y articulan esas situaciones dentro de un programa de formación?.
La *comunicación de la matemática* es uno de los estándares recogidos por el *National Council of Teachers of Mathematics*[1] (NCTM), organismo que ha venido marcando la pauta de muchos de nuestros sistemas de educación. Para esta entidad, la comunicación de la matemática como estándar (NCTM, 2003) que implica:

- Organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación
- Expresar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás
- Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.

De este punto de vista, si se espera que los educandos sean partícipes de esta comunicación de la matemática, sería deseable que los profesores pudieran articular la manera óptima de alcanzarlo en sus aulas. Esto, lo sabemos, no necesariamente se da de manera automática.
Claramente, para formar profesores en este sentido, se debe considerar un programa de formación que incluya materias al respecto, en relación directa con el contenido a tratar y no sólo como un ente aislado o en forma genérica en asignatura foráneas a la didáctica de la matemática. Durante los últimos años, la mayoría de países desarrollados están otorgando mayor importancia a la formación de sus profesores de educación básica y secundaria. En efecto, estudios acerca de competencias profesionales en la formación de profesores de matemática de secundaria (Font, V. , Larios, V., Giménez, J. Zorrilla, J.F., 2012) dan pie a nuevas investigaciones en el área de Didáctica de la Matemática.
Resulta relevante considerar la problemática de formar profesores de matemática de educación secundaria competentes específicamente en el sentido de comunicar correctamente el contenido matemático. En efecto, consideramos la competencia de comunicar la matemática como una componente esencial en la formación de profesores de educación secundaria y por tanto, debe tener un tratamiento especial dentro de los programas de formación más que todo, por el beneficio esperado en el aprendizaje de la matemática por parte de los futuros alumnos del profesor titulado. Actualmente la comunicación de los contenidos de matemática se está comenzando a configurar como pieza fundamental del aprendizaje y está considerada como una competencia profesional indiscutida dentro de la formación inicial docente (Vargas, C. Giménez, J. , 2012).

2. La noción de competencia comunicativa matemática en la formación de profesores de matemática

En el área la enseñanza de la matemática se caracterizó la noción de competencia matemática como la *habilidad de entender, juzgar, hacer y usar la matemática en una variedad de situaciones y contextos intra y extramatemáticos en los cuales las matemáticas juegan o podrían jugar un rol* [traducción de (Niss, 2002)].

[1] *National Council of Teachers of Mathematics* Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, es la voz pública de la Educación Matemática y reúne miembros de Estados Unidos y Canadá y otras naciones.

En ese contexto, Niss[2] sitúa ***Comunicar en, con y acerca de las matemáticas,*** como una de las ocho competencias diferentes que describen las acciones, habilidades y destrezas en la actividad matemática. Destacamos que *en la comunicación matemática* se quiere dar importancia a:

> • *Entender lo que otros escriben, en cuanto a textos orales o visuales, en una variedad de registros lingüísticos acerca de materias que tienen un contenido matemático.*
> • *Expresarse en diferentes niveles de precisión teórica y técnica de forma, oral, visual y escrita acerca de tales materias.* [Traducción de (Niss, 2002)]

Con esta contextualización de Niss hemos sentado una base para hablar de una competencia matemática que involucra la comunicación como la pensamos en la investigación (Vargas, 2012).

Sin embargo, debemos considerar que desde la década anterior se ha incrementado la investigación, y más aun, la innovación, en base a la noción de *competencia* tanto en el currículo como en la formación. Por tal motivo es que consideramos la Competencia Comunicativa como una de las *competencias* que generan un nuevo enfoque y sentido en la formación profesional del profesorado. Esta se orienta a que el futuro profesor *sea capaz de…*, o *sea competente en…* sin perder de vista que buscamos el reconocimiento del valor de lo social comunicativo en la formación de profesores de matemática.

De este modo, estamos pensando en una Competencia Comunicativa Matemática en el plano de la formación profesional, lo cual es una constructo que aglutina a la competencia de ser competente profesionalmente y a la competencia de comunicar matemática. Es decir, el profesor se forma para ser competente en la comunicación de contenido matemático.

Por ello definimos ***Competencia Comunicativa Matemática*** *como la capacidad social comunicativa de enseñar matemática la cual se desarrolla cuando el profesor reflexiona acerca de la importancia de la comunicación para enseñar a un grupo de alumnos interesados en aprender matemática.*

Evidentemente, haría falta (y trabajamos en ello) un dispositivo para evaluar la calidad de las exposiciones orales de un profesor en varias sesiones, después de conocer las reflexiones de los futuros profesores.

El aporte está en adelantarnos a las reflexiones previas a la graduación o titulación del estudiante de master en torno a la comunicación de contenido matemático.

Y por otra parte, se debe trabajar en la manera en que los profesores puedan evaluar la competencia comunicativa de sus estudiantes (paralelamente trabajamos en ello).

A partir de esta idea centrada en la formación de profesores de matemáticas, es que analizamos los documentos concernientes al master que podrían orientar y dar respuesta a nuestras preguntas de investigación.

3. El contexto

Se analizaron las producciones escritas de los estudiantes que se graduaron en el Master de Formación del Profesorado de Secundaria para ser futuros profesores de secundaria en matemáticas en el curso del bienio 2009-2010 en la Universidad de Barcelona (UB).

En el master se inscribieron profesionales titulado en distintas áreas. Estos profesionales habían decidido desempeñarse como profesores de matemáticas en Institutos de Educación Secundaria (IES) que imparten la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

[2] Mogens Niss, investigador danés de Educación Matemática de la Universidad de Roskilde.

En el Master de Formación del Profesorado de Secundaria se forma a los futuros profesores en los conocimientos, en el desarrollo de habilidades y de actitudes necesarias para el ejercicio de profesor(a) de ESO y en el Bachillerato en la formación profesional y en la enseñanza artística, deportiva y de idiomas.
La orientación de este Master de Formación del Profesorado de Secundaria coordinado por la Facultad de Formación del Profesorado de la UB es netamente de profesionalización. Los estudiantes del Master de Formación del Profesorado de Secundaria deben poseer un título universitario oficial español o un título de educación superior del Espacio de Educación Superior Europeo (EEES) que faculte en el país de expedición para acceder al *Máster de formació del professorat de secundária (Master de formación del profesorado de secundaria).*
A la especialidad de matemáticas pueden acceder los profesionales que tengan el título profesional o grado académico correspondiente a diferentes carreras. Para optar a una de las especialidades es necesario que el título profesional (diplomatura, licenciatura) sea idóneo o esté en concordancia con la especialidad donde desea dictar clases en secundaria a futuro.
Fuera de los requisitos establecidos, lo más importante es que el postulante deseara ser un profesor de secundaria y que pueda ejercer posteriormente, como puede verse en la promoción más actual de él[3].
En el Máster hay un módulo de Practicum, de carácter obligatorio, en el cual los futuros profesores deben asistir a diferentes IES públicos o privados en donde deberán participar de las tareas especificadas en el Master de Formación del Profesorado de Secundaria y donde además contarán con un tutor del centro IES donde se realicen las prácticas.
Al final de su formación de master, el futuro profesor debe conocer los contenidos curriculares de la especialización docente y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje. También deberían ser capaces de planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Debería ser capaz también de concretar el currículo del centro docente donde se desempeñe a futuro pudiendo participar de la planificación colectiva del mismo. También se espera que el futuro profesor pueda hacerse cargo de conocer ampliamente las normativas del sistema educativo.
En el Master de Formación del Profesorado de Secundaria se han definido una lista de competencias profesionales que sería deseable que tuvieran los profesores, entre ellas, las transversales. Una de ellas es la de comunicación y se trata de una competencia transversal se intenta evaluar en el trabajo de fin de Master de Formación del Profesorado de Secundaria.
Sin embargo, en el momento de la investigación no existía un dispositivo para evaluar presentaciones orales o clases que realicen los profesores.
Un hecho importante que debemos comentar es que aún cuando los futuros profesores fueron exigidos en el sentido de lo comunicativo tampoco existían evidencias de que los tutores poseían instrumentos específicos para evaluar los aspectos comunicativos relevantes de su actuar y reflexión como futuro profesor. Luego, una de las aportaciones de la investigación (Vargas, 2012) fue justamente en este sentido, ya que se reconocieron y analizaron las reflexiones previas y posteriores a las práctica en torno a la comunicación de contenido matemática.
El Master de Formación del Profesorado de Secundaria consta de tres módulos:

- Módulo genérico 15 créditos (mínimo 12): Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, Procesos y contextos educativos, Sociedad, familia y educación.

[3] http://www.ub.edu/masteroficial/mastersecundaria/

- Módulo específico 25 créditos (mínimo 24): Complementos para la formación disciplinar, Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes, Innovación docente e iniciación a la investigación educativa.
- Módulo de Prácticum 20 créditos (mínimo 16): Prácticum en la especialidad, Trabajo fin de Master (TFM) de Formación del Profesorado de Secundaria.

Las competencias específicas de matemáticas y su didáctica en las tres materias que se contemplan en el máster (complementos para la formación matemática, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, e innovación docente e iniciación a la investigación educativa) se explican en Font (2009).

4. Sujetos de estudio

Para el estudio hemos considerado las producciones escritas (tareas del master) de seis estudiantes con residencia en la comunidad autónoma catalana y que se formaron en la primera versión del Master de Formación del Profesorado de Secundaria que partió en 2009-2010. Entre las formaciones previas de los actuales profesores tenemos profesionales de Licenciatura en Ciencias Económicas y Empresariales, Arquitectura, Ingeniería en Informática y Licenciatura en Matemáticas. Estos datos fueron proporcionados por los tutores del Master de Formación del Profesorado de Secundaria.

5 . Tratamiento de los datos

En la investigación debimos establecer criterios para analizar la competencia comunicativa desde la perspectiva del enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática[4] (EOS) que entiende la comunicación como una acción.

Nuestro propósito ha sido reconocer diferentes tipos de reflexión de los futuros docentes sobre el valor otorgado a lo socio-comunicativo en la construcción de ideas y relaciones matemáticas. Para ello, analizaremos las producciones de los estudiantes en base a categorías para determinar niveles parecidos a los de reflexión (Miller y Baker, 2001). Lo que hicimos fue seguir ideas de la investigación entorno a las competencias matemáticas para profesores de primaria. De esta manera pudimos intentar reconocer los diferentes niveles discursivos de los futuros profesores respecto de la comunicación de la matemática. Estos niveles los hemos organizado en categorías de nivel de reflexión sobre el valor otorgado a lo socio-comunicativo en la construcción de ideas y relaciones matemáticas. Y como niveles, es importante hacer notar que se encuentran definidos en orden ascendente. Las tres últimas categorías dan cuenta de un nivel superior de reflexión. Las categorías son seis y pasamos a describirlas a continuación:

Categoría 1. Alusiva: Muestra indicios de valorar la comunicación producida en la clase personalizando (en el profesor o en si mismo) como ejemplo. Aquí, quien alude, reconoce e identifica algo a partir de ejemplos de forma superficial como referencia, sin profundizar en lo que ocurrió como proceso comunicativo. Lo reconocemos en situaciones de explicaciones o diálogos en la construcción de significados en los que el futuro docente no deja claro qué elemento matemático está en juego, como tampoco qué tipo de comunicación.

En esta categoría, se incluyen los elementos relacionados con la ironía, el reconocimiento de interlocutores, atenuación dialógica mediante interrogantes, uso de entonaciones irónicas con diminutivos o aumentativos, uso de operadores discursivos atribuidos al otro con ironía, etc.

[4] Enfoque desarrollado por Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada.

Categoría 2. Valorativa. Valoración genérica: Reflexiona acerca del valor de comunicación matemática , aún de forma genérica (interacciones) en el aula. En este caso, se percibe el tipo de interacción subyacente aunque no siempre se explicita el elemento matemático en juego.
A ello contribuyen situaciones de disgusto, rechazo, indiferencia, desacuerdo, y desvinculación, expresiones de comparación para indicar nuevas informaciones o justificaciones.
Categoría 3. Descriptiva. Valoración descriptiva analítica: Hace indicaciones (de manera directa o indirecta) acerca de las formas o producciones de comunicación/ interacción de los alumnos, o relaciones alumno/profesor, enfatizando algún elemento de análisis sobre los efectos de la relación del estudiante con el contenido. El futuro profesor en su conclusión analiza alguna relación y describe el elemento analizado. No siempre se da explicitación del hecho comunicativo asociado.
Categoría 4. Actuativa: Establece indicaciones (de manera directa) del valor de acciones comunicativas desarrolladas explicitando el formato y la finalidad en el sentido de establecer inferencias. Así el futuro docente reconoce elementos de la actuación comunicativa del profesor como impulsor de la comunicación que lleva a la construcción de significados. Para que consideremos que un comportamiento o reflexión está en lo actuativo debe verse por lo menos indicios del efecto que tiene la acción comunicativa.
Categoría 5. Implicativa: Reflexiona y valora sobre los procesos comunicativos, enfatizando acerca de las consecuencias positivas o negativas de la comunicación realizada en el establecimiento de objetos o relaciones matemáticas, pero aún de forma general. En este caso puede tratarse de la comunicación profesor/alumno , alumno/medio/objeto matemático. Más allá de indicar acciones desarrolladas y su significado, está el reconocimiento de consecuencias en el desarrollo y construcción de procesos y objetos matemáticos. Quizás no siempre se explicitan las consecuencias en relación a la construcción de significado, pero si se establece una toma de decisiones que hace pensar en que se evaluaron las consecuencias.
Categoría 6. Implicación normativa: Asume que lo interactivo se relaciona con lo normativo como modelo cuasi-teórico en la construcción de significados. Reconoce implícita o explícitamente que un sistema de normas sirve para explicar las implicaciones y decisiones sobre el valor de lo comunicativo. Se da cuenta que lo cognitivo y/o epistémico no son suficientes para explicar el valor de lo comunicativo. En este nivel, quizás no hay explicitación de compromisos de re-planificación pero podemos imaginar que se dan en ciertas explicitaciones que justifican las tomas de decisión. Generalmente están relacionadas con el comportamiento de los alumnos en el aula.

6. Las tareas del Master

Las tareas analizadas fueron las siguientes:
Tarea 1. Análisis de una clase. Los futuros profesores debían escribir sus conclusiones y opiniones a partir de la transcripción del análisis didáctico de un episodio de clase en grupo en un establecimiento de secundaria en la ciudad de Barcelona (Font y Planas, 2008). En esta fase de su formación aún no conocían el enfoque EOS y no contaban con un esquema presupuesto teórico sobre cómo se hace un análisis didáctico. Los futuros profesores trabajaron en pequeños grupos de dos y tres personas para esta tarea.
Tarea 2. Análisis de un episodio de clase de ecuaciones. Esta tarea consistía en que los futuros profesores entregaran sus opiniones acerca de la trascripción de una clase de ecuaciones en un establecimiento de secundaria (Font, V. Pochulu, M. 2011). La sesión transcrita, se trata de una profesora que explica a su clase cómo se resuelve una ecuación Los futuros profesores realizaron

esta tarea en forma individual. Aquí se esperaba que los estudiantes hicieran observaciones sobre los aspectos comunicativos.

Tarea 3. Análisis de un artículo sobre evaluación de competencia comunicativa. Para esta tarea los futuros profesores debían leer, comprender y opinar acerca de los proyectos matemáticos en el artículo *Les competències en els treballs de projectes matemàtics per una educació equitativa a l'ESO* escrito por el investigador en didáctica de la matemática Manel Sol (Sol, 2007).

Tarea 4. Trabajo de Memoria del Practicum II. Durante el Master, los estudiantes deben realizar un periodo de práctica docente,. Después de ese periodo deben presentar una memoria

Tarea 5. Trabajo final de Master. Al término del proceso de formación, los estudiantes deben realizar un estudio de pequeña investigación. En él deben poner de manifiesto lo aprendido a lo largo de todo el proceso, y elaborar una nueva memoria.

6. La evolución de Ester

Ester es el nombre ficticio que damos en este artículo a un estudiante del master de formación sin distinguir género. Ester tiene estudios de administración y posee un master en su área. Entre los estudiantes que se consideraron en este estudio, Ester fue una estudiante participativa, bastante clara en sus descripciones. Muy organizada en sus escritos sobresaliendo por la estructura que da a sus producciones escritas.

En la investigación global, las reflexiones de las producciones, fueron citadas como ejemplificadoras de las distintas categorías, apareciendo siempre destacadas en todos los análisis de las diferentes tareas.

En un comienzo, las aportaciones de Ester son meramente alusiones. Como en la tarea 1, cuando Ester trabajó en conjunto con otros compañeros refiriéndose al profesor.

> *"Sólo está interesado en la resolución meramente matemática sin importarle la conexión con la realidad".*

Como se aprecia, Ester hace alusión a una situación e inmediatamente añade su visión. Interpretamos que para Ester, el profesor del episodio de la clase que los futuros profesores debieron analizar, no dio un significado de aplicabilidad a la matemática que se estudiaba. No obstante, está solamente aludiendo un hecho comunicativo.

En general, los estudiantes opinaron que el profesor solamente se preocupó de las operaciones involucradas en la solución más que de lo que subyace en la matemática misma.

También al principio, los estudiantes del master, Ester entre ellos, fueron bastante lapidarios en sus reflexiones con respecto al profesor de este episodio:

> *"Entre los alumnos existen fallos básicos conceptuales que el profesor no aclara inicialmente. Hay alumnos que no han entendido lo que se les pregunta y el profesor tampoco hace ninguna aclaración".*

Aquí Ester lee y analiza una transcripción, juzgando el actuar del profesor. Del mismo modo ocurre en la siguiente cita:

> *"El profesor muestra una clara falta de coherencia. Por ese lado le ríe la ocurrencia a Emilio para pasar luego a ignorarle y llamarle la atención. Es desmotivador para los alumnos".*

Aquí interpretamos que para Ester el profesor se centra en el contenido matemático sin cuidar en la comunicación la coherencia y consecución de los pasos del problema.

En las tareas siguientes (2 y 3), tanto Ester como sus compañeros, se centra en dar descripciones, realizan meras alusiones a la comunicación de contenido matemática, sin llegar a un nivel muy elaborado o superior de reflexiones en cuanto a competencia comunicativa matemática.

A partir de la tarea 4 se comienzan a vislumbrar competencia comunicativa matemática de parte de los estudiantes del master. Sin embargo, basados en las reflexiones de Ester, podemos decir en con la tarea 3 (artículo Sol (2007)) ha comenzado a dar sentido a la formación que recibió. Esto es:

> *"Es importante hacer hincapié en que el papel del profesor ha de variar, no ha de ser él, el único que tenga autoridad para hacer y dirigir la clase, sino que el alumno es imprescindible para que haya un diálogo, una participación."*
> *"En estos proyectos se ve este cambio significativo ya que el profesor tiene una mera figura de mentor y guía del alumno, mientras que el alumno es el protagonista, ya que es el que toma las decisiones, sabe lo que puede o no puede hacer, hasta donde quiere llegar, con lo que se ha de aproximar a dar una respuesta a lo que cree que está a su alcance."*

Debemos señalar que en este punto de su formación Ester aún no ha elaborado, según las reflexiones extraídas en sus escritos, la idea de evaluar la competencia comunicativa en sus futuros alumnos. Pero si ya es una competencia a valorar:

> "*Las competencias que valoraría en este sentido (en la exposición oral) serían:*
> - *Los medios/recursos que utiliza el alumno para transmitir la información;*
> - *Ser capaz de poder comunicar los objetos matemáticamente hablando;*
> - *Mostrar que domina el tema que presenta, que le da un significado al tema y que tiene un interés personal para su propio proceso educativo"*

En la tarea 4, Ester, asume más fuertemente su futuro nuevo rol como profesor, describiendo el actuar del profesor del centro donde hizo la práctica, destacando la actitud de la tutora del centro IES y además considerando la variable del clima de aula.

> *"El papel y el comportamiento de la profesora es muy bueno con los alumnos y estos también le tienen mucho respeto a su profesora, hay una buena interacción y buen ambiente entre ellos. Todo y que a veces se distraen, están cansados, no tienen demasiadas ganas de hacer el trabajo, en clase acostumbran a llevar bien todo y a ser un poco inquietos cuando hay cambios o sesiones diferentes a lo que están acostumbrados."*

Y también comienza a ser una preocupación para ella la planificación para lograr una comunicación fluida en la sesión de clases lo cual identificamos en la categoría Implicativa que es de mayor nivel.

> *"La profesora acostumbra a tener problemas para realizar los temas y con más profundidad, ya que a los alumnos les cuesta mucho centrarse y comenzar a trabajar y cuando uno se da cuenta ya se ha acabado el tiempo. Por lo que muchos de los objetivos que se propone al comenzar la sesión muchas veces no los puede cumplir, ya que puede ser que un alumno no entiende alguna cosa y tiene que ir a su aula a ayudarlo mientras otro no hace nada porque no tiene ganas o incluso puede ser que hay otro alumno que se aburre porque ha terminado muy rápido los ejercicios propuestos, por lo que no puede ser una clase magistral como lo harían en el aula del grupo ordinario, ya que los alumnos tienen más dificultades de aprendizaje y más de un nivel, por lo que ella ha de estar en constante observación y disposición para poder llevar a término su trabajo de la mejor manera posible."*

También, hacia el final de Master en la última tarea, a la hora de hacer propuestas de mejora son bastante críticos con los enunciados de los problemas y ejercicios que proponen, lo cual es parte de lo Valorativo que luego se reflejará en lo Actuativo de las reflexiones que hemos categorizado. Por ejemplo, Ester comenta:

> *"Octava pregunta: sumo palabras al enunciado para indicar lo que se quiere trabajar. Esta es la típica pregunta que ayuda al joven a relacionar los conceptos que se han ido trabajando durante el tema, ya que se pide razonar la respuesta todo indicando el por qué es un polígono, un cuadrilátero y un paralelogramo, conceptos muy importantes para avanzar en las Matemáticas y sobre todo profundizar en la materia."*

También, ella es consciente de que hay aspectos de los contenidos que no quedan claros antes y que se pueden mejorar con un repaso, lo cual es parte también de la categoría Implicativa, destacándose Ester en este sentido pese a la tendencia general del grupo estudiado.

> *"Normalmente los alumnos utilizan el tiempo de la sesión de repaso para tener una visión global de todo el tema, por lo que ellos, han de haberlo mirado antes. Es bueno que nos entretengamos en pequeños detalles, sino que hemos de contemplar la idea de verlo todo durante la sesión, se les ha de enseñar entonces, que si lo estudian antes la sesión les servirá para repasar los conceptos que no les han quedado claros.*

> *La actividad de repaso ha ser entonces, una ficha tal y como las que hemos preparado, ya que muestra y hace un repaso de lo que consideramos más importante del tema, de lo que el alumno ha de repasar y de lo que ha de recordar para avanzar en otros cursos."*

7. Conclusiones

El master de formación de profesores en el área de matemática es una formación breve pero intensiva que pretende alcanzar ciertos hitos que capaciten a profesionales de distintas áreas para ser profesores en especialidades diferentes.

De nuestros análisis pudimos concluir que hubo una evolución en las reflexiones de los estudiantes, destacándose Ester como una de las estudiantes que se podría decir, aprovechó mejor la formación del Master.

Las reflexiones de Ester fueron las más interesantes desde el punto de vista de nuestro estudio. Por ello, sus reflexiones fueron constantemente citadas como ejemplos durante la investigación, mostrando una clara evolución en cuanto a competencia comunicativa matemática tras finalizar el master.

En este artículo hemos querido mostrar cómo para una persona que se enfrenta a este master al menos ha podido lograr una base de lo que hemos definido como Competencia Comunicativa Matemática sin llegar a identificar cómo evaluar la competencia comunicativa en sus futuros alumnos.

Como conclusión general, el análisis de las tareas en cuanto a la competencia comunicativa en sentido profesional, nos entregó orientaciones para afirmar que las prácticas realizadas en los centros de educación secundaria son insuficientes. Por otra parte, sería deseable que los tutores de los centros tuvieran nociones de competencias comunicativas para desarrollar en sus alumnos que les signifique a los practicantes una orientación para el futuro.

No se trata de prácticas que directamente promuevan el diálogo entre el profesor y los estudiantes o que el futuro profesor tomara atención acerca de su actuar en tan corto plazo.

Por tanto, resultaría inadecuado, afirmar que se pudo desarrollar la competencia como parte fundamental a desarrollar dentro de la formación. Lo que es importante, es que a partir de estudio, se aportó una visión externa a este programa de master.

Aunque el caso de Ester fue un caso especial dentro de los estudiantes porque nos permitió ver que uno de los estudiantes realizó las reflexiones más interesantes, no sabemos si Ester trabajó dando clases en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO).

Referencias y bibliografía

Argyle, M. (1969) Social interaction. Chicago. Atherton Press.

Ball, D.L. (2009) The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Even, Ruhama; Loewenberg Ball, Deborah (Eds.) The 15th ICMI Study Series: New ICMI Study Series, Vol. 11 ISBN: 978-0-387-09600-1, 2009, XII, 280 p., Hardcover .

Begg, A. (1993) *Communication and Assesment in Mathematic Education.* Communicating mathematics: Perspectives from classroom practice and current research. ACER. Australian Association of Mathematics Teachers Inc. (AAMT)

Burgués, C. (2006) Niveles de implicación y competencias profesionales matemática. Estudio de Caso con futuros docentes de primaria. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Huesca, 6-9 de septiembre de 2006, 2006-01-01, ISBN 84-8127-156-X, pags. 127-144.

Clarke, D. (1992) The *role of assessment in determining mathematics performance.* Assesment and learning of mathematics. Edited by Gilah Leder. ACER. Australia.

Crouch, R. (1996) *Oral Presentations. Mathematics learning and assessment. Sharing Innovative* Practices. Communication. Arnold. London.

Davis, R. (1996) Mathematics education: Questions, rhetoric, and interpretations as we approach the year 2000 Journal of Mathematical Behavior, Volume 16, Number 1, 1997 , pp. 1-3(3)

Dolz et Ollagnier (2002) L'enigma de la compétence en éducation. Pp 77-94. Bruxelles: De Boeck.

Ernest, P. (1999) Forms of knowledge in mathematics education: Philosophical and rethorical perspectivas. Educational Studies in Mathematics 38: 67–83, 1999.

Espinoza, R. (1997) Teoria de la acción comunicativa en Jürgen Habermas : implicaciones educativas. UAB.

Fernández, C. y Galguera, L. (2009) Teorías de la comunicación. Mc Graw Hill. Educación. México. Font, V. Pochulu, M. (2011) Análisis del funcionamiento de una clase no significativa. Relime.

Font, V., Larios, V., Giménez, J., Zorrilla, J.F. (2012) Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato. ISBN 978-84-475-3558-3. Editorial Universidad de Barcelona.

Font, V., Pochulu, M. (2011) Análisis del funcionamiento de una clase no significativa. Relime.

Font, V.; Planas, N.; Godino, J. (2009) Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf (revisado el 1 de junio de 2013)

Font, V. (2009) Competencias profesionales en el máster de profesorado de secundaria. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, N.51, pp.9-18, abril 2009 .

Font, V. Planas, N. (2008) Mathematical Practices, Semiotic conflicts, and Socio-Mathematical norms. http://webs.ono.com/vicencfont/PM32.pdf

Forster, P. (2003) An investigation of communicative competente in an upper-secondary class where using graphics calculators was routine. *Educational Studies in Mathematics* 52: 57–77, 2003.

Giménez, J. (1999) El día a día y la comunicación matemática. (Un estilo que conecte al futuro maestro de primaria en matemáticas y al maestro en ejercicio). Modelos de formación de maestros en matemáticas. José Carrillo Yañez. Núria Climent (Eds.) Universidad de Huelva Publicaciones.

Giménez, J. (1997) Evaluación en Matemáticas: Una integración de perspectivas. Síntesis. Madrid.

Giménez, J.; Fortuny, J.M. (1996). *Explorando un modelo integrado de evaluación con profesores en formación.* En Giménez, Llinares y Sánchez, El proceso de llegar a ser un profesor. Cuestiones desde la educación matemática, 251-272. Granada: Pomares.

Godino, J. D. (2002) *La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas.* El proyecto Edumat-Maestros. En C. Penalva, G. Torreogosa y J. Valls (Eds.), Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 175-186). Universidad de Alicante. ISBN: 84-699-7201-4

Godino, J.D. (2007) Seminario virtual impartido por Juan Godino. En Internet: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/seminario_virtual_Lisboa_24nov07.pdf

Godino, J. D. (2008) Un enfoque del conocimiento y la instrucción matemática. En Internet: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J.D. (2009) Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. Revista Enseñanza de las Ciencias. ICE. UAB. http://ensciencias.uab.es/revistes/27-1/59-76.pdf (revisado 06/2013)

Greenes, C., Schulman, L. (1996) *Communication Process in Mathematical explorations and investigations.* 1996 Yearbook. Communication in mathematics K-12 and beyond. NCTM pág. 168.

Haines, C.P. & Crouch, R. (2005). Getting to grips with real world contexts: Developing research in mathematical modelling. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education,* in St. Feliu de Guixols, Spain, Feb 16-22, 2005.

Legendre, M.- F. (2001) Sens et portée de la notion de compétence dans le nouveau programme de formation. Revue de l'AQFLS, 2001, 23(1), pp.12-31.

Lee, C. (2006) Language for learning mathematics. Assesment for learning in practice. Open Universitity Press. McGraw-Hill Education. McGraw-Hill. Shoppenhangers road. England. Leou, S. (1998), Teaching Competencies Assessment Approaches for Mathematics Teachers. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(D)* Vol. 8, No. 3, 1998. pp. 102-107

Llinares et al. (2007) *Interacción y análisis de la enseñanza.* Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. Investigación en la Escuela.

Llinares et al (2010) Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line. Acts XIV Simposio de la Seiem. Investigación en Educación Matemática.

Meavilla (1997) *Algunas contribuciones al estudio de la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental.* Tesis Doctoral. UAB.

Miller, K., Baker, D. (2001) Mathematics and science as social practices, investigating primary student teacher

respoonses to a critical epistemology. Ways of knowing journal vol 1, n1 39-46.
Ministerio de Educación y Ciencia. (1989). *Diseño curricular básico secundaria,* Currículum Educación Secundaria Obligatoria. España: Ministerio de Educación y Ciencia.
Morgan, C. (2011) Communicating experience of 3D space: Mathematical and everyday discourse. Cerme. https://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/9/CERME7_WG9_Morgan.pdf (revisado 06/2013)
NCTM (1991) *Professional Standards for Teaching Mathematics.* National Council of teacher of mathematics.
NCTM (2003) *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project* (Proyecto KOM. The national academies: The national academies. Http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf
Olivares, R. (1996) *Communication in Mathematics for Students with Limited English Proficiency.* 1996 Yearbook Communication in Mathematics. K-12 and Beyond. National Council of teacher of mathematics. Pág. 219. OCDE (2003). *The pisa 2003 Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris:
OCDE (2006) PISA 2006. *MARCO DE LA EVALUACIÓN. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos.
Perrenaud, P. (2004) Évaluer des compétences. Paru dans l'Éducateur, nro. Spècial "La note en pleine évaluation", mars 2004.
Pimm, D. (1987) El lenguaje matemático en el aula. Ediciones Morata. Madrid. Pimm, D. (1987) "Speaking mathematically-Communication in mathematics classrooms" London: Routledge.
Planas, N. (2011) Revoicind in processes of collective mathematical argumentation amog studens. Cerme 7
Rico, L. (2006) *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. Revista De Educación,* (extraordinario) 275-294.
Romanville, M. (1996) L'Irrésistible ascensión du terme "competence" en éducation. Enjeux nro. 37/38, mars/juin 1996.
Saló, N. (2006) Estrategias de comunicación en el aula. El diálogo y la comunicación interactiva. CEAC. Barcelona.
Sekerak, J. (2008) Is Mathematics teaching developing learner's key competences? The Teaching of Mathematics, 2008, Vol. XI, 1, pp. 41–52 http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/20/tm1115.pdf
Shannon, C. (1948) *A mathematical theory of communication,* Bell System
Silvestre, R. (1997) A characterization of the leaf language classes. Information Processing, 63 (3), pp. 153-158.
Sol, M. (2008) *Les competències en els treballs de projectes matemàtics per una educació equitativa a l'ESO.* Memoria de Llicència d'estudis. Barcelona. Departament d'Educació Generalitat de Catalunya.
Sol, M. (2007) Les competències en els treballs de projectes matemàtics per una educació equitativa a l'ESO. Butlletí La recerca. Número 9. Octubre, 2007. ISSN: 1886-1946 / Dipòsit legal: B.20973-2006. Universitat de Barcelona Institut de Ciències de l'Educació Secció de Recerca. Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
Torralbo, M. (2003) Tesis Doctorales españolas en Educación Matemática. Revista Educación de las Ciencias. 2003, 21 (2).
Vargas, C. Giménez, J. (2012). Competencias del profesor de matemática de secundaria y bachillerato. Competencia comunicativa y formación docente. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona. ISBN 978-84-475-3558-3. Páginas 103-114.
Vargas, C. (2012) Evaluación de la competencia comunicativa en la formación de profesores de matemática. Tesis Doctoral. https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=961833
Vargas, C. (2011) Resolución de problemas de Matemáticas y Pensamiento Crítico APRENC-Mates: propuesta de innovación en formación inicial de maestros. Diciembre de 2011, Número 28, páginas117 - 128 ISSN:1815-0640.
Vargas, C. (2008). Resolución de Problemas y Pensamiento Crítico. APRENC-Mates y el método de Polya. Un estudio preliminar en formación inicial de profesores. Treball de Recerca de Doctorat de Didáctica de la Matemática de la Universitat Autònoma de Barcelona.
Vigotsky, L. (1963). Pensamiento y lenguaje. Bs. As.: La Pléyade.

Fatores que permeiam o comprometimento dos alunos na aprendizagem da Matemática

Lenice Mirandola da Rocha
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
mirandolarocha@hotmail.com
Marlise Gueller
Programa de Pós-graduação de Ensino em Ciências e Matemática, ULBRA
Brasil
marliseguelle r@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta resultados parciais da pesquisa de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil que está em andamento. Nesta investigação é proposto um estudo sobre o comprometimento dos alunos no processo de aprendizagem em Matemática. Objetivando determinar os prováveis fatores que permeiam este comprometimento aplicou-se um questionário a 128 alunos de cinco turmas do 3° ano do Ensino Médio de uma escola federal de Porto Alegre - Rio Grande do Sul - Brasil. Este instrumento se constituiu de um primeiro bloco, denominado Perfil, com propósito de elaborar o perfil dos alunos, um segundo, chamado Aprendizagem, buscando informações sobre o processo de aprendizagem em matemática e um terceiro intitulado, Dominio Afetivo, dados sobre os sentimentos expressados em relação à matematica. Com a análise estatística das respostas, pode-se compreender melhor este comprometimento e traçar alguns indicativos que influem na aprendizagem em Matemática destes discentes.

Palabras chave: Aprendizagem em Matemática, Comprometimento, Ensino Médio.

Introdução

Defende-se a ideia de que a questão do comprometimento dos alunos com relação a sua aprendizagem está impregnada de diferentes fatores dentre eles os citados Lester (1980): interesse, motivação, confiança e a perseverança que são componentes do domínio afetivo.

Neste trabalho, compactua-se com a convicção que o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem é de mediador e tem como objetivo promover ações para que os alunos construam ou reelaborem conhecimentos de acordo com suas possibilidades e ritmo. Para Fini (2008) citando Bzuneck (2001) o processo de ensino e aprendizagem pode estar envolvido por uma variedade complexa de fatores que podem contribuir para que aluno e professor se frustrem e fracassem. Este mesmo autor salienta a importância em atentar sobre os estados afetivos e motivacionais.

Por outro lado, de acordo com Fini e Calsa (2008) os problemas de aprendizagem dos estudantes com relação à Matemática podem ser mais bem entendidos e examinados quando os aspectos afetivos relacionados ao sucesso e fracasso em Matemática são considerados. Chacón (2003) reconhece a importância da dimensão afetiva no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e reflete sobre a urgência em construir propostas que incluam os aspectos afetivos efetivamente em sala de aula.

Delors (2001, p. 90) pondera sobre a complexidade educacional na atualidade definindo novas políticas educacionais e organizando-se ao redor de aprendizagens significativas que, no decorrer da vida, se constituirão nos pilares do conhecimento: “aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a ser”, garantindo que a educação propicie “a descoberta e o fortalecimento do potencial criativo, revelando o tesouro escondido em cada um de nós”.

Ao se considerar o processo de ensino e aprendizagem evidencia-se que este compreende três elementos: o aluno com o objetivo de aprender, o objeto do conhecimento e o professor que busca um ambiente que favoreça a aprendizagem. Para que sua orientação influa sobre os processos de construção do conhecimento, deve estar atento aperfeiçoando as relações interpessoais nas interações com o educando, sem esquecer que a ato pedagógico deve adequar-se ao interesse e às características de seus alunos. Nas considerações de Fernandes (2007, p. 50), a explicação da matéria ministrada vem acompanhada de atenção e paciência, de respeito à individualidade, com seus ritmos, erros e avanços, ingredientes importantes para que o aluno aprenda.

No que se refere ao educando, foco deste trabalho, tem-se como objetivo entender seu comprometimento no processo de aprendizagem da Matemática. Reforçando a ideia de se tomar o aluno como ponto central na aprendizagem, corrobora-se com o fato de que “nada nem ninguém pode forçar um aluno a aprender se ele mesmo não se empenhar no processo de aprendizagem.” (TARDIF, 2002, p. 132).

Para examinar a questão do comprometimento dos alunos do Ensino Médio compartilha-se com a opinião de Felicetti (2011, p. 47), uma vez que “compromisso é entendido e relacionado a tudo aquilo que é feito, enquanto que o comprometimento refere-se a como se faz, ou seja, este último é constituído do que se faz e como se faz. Portanto, o comprometimento é muito maior que o compromisso”.

A afetividade no processo de ensino e aprendizagem de Matemática

Neste trabalho optou-se pelo recorte envolvendo temáticas que contemplem o domínio afetivo. Chacón (2003) utiliza o termo dimensão afetiva de acordo com a definição de McLeod (1992), Krathwohl e outros (1973), como uma grande categoria de sentimentos e de humor (estados de ânimo) abrangendo como descritores básicos os sentimentos, as emoções, as crenças, as atitudes e os valores. Assim, em relação às crenças matemáticas dizem respeito às experiências vividas e aos conhecimentos subjetivos do aluno e do professor.

Chacón (2003) entende a atitude constituída por uma tendência avaliativa (que pode ser positiva ou negativa) determinando pressupostos pessoais influindo no comportamento. Portanto, a atitude admite três elementos: um cognitivo (explicitado nas crenças da própria atitude); um afetivo (onde aceita ou rejeita uma atividade matemática ou a disciplina como um todo) e um intencional determinando um comportamento específico.

Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, Callejo, 1994)* duas categorias podem ser consideradas: atitudes em relação à Matemática (mostra um aspecto afetivo demonstrado pelo interesse, valorização da matemática e de sua aprendizagem) e atitudes matemáticas (vinculam-se a um aspecto cognitivo explicitado pelo uso de capacidades como flexibilidade de pensamento, objetividade, espírito crítico, autonomia intelectual, interesse em pesquisar). Neste caso, as atitudes consideram os enfoques citados por Chacón (2003): atitudes em relação à matemática e aos matemáticos (questão social), importância no trabalho matemático (cunho científico), atitudes em relação à matemática como área curricular, atitudes em relação a partes específicas da matemática e atitudes relacionadas à metodologia de ensino. As atitudes matemáticas são predominantemente cognitivas, destacando-se: ter organização e hábitos de estudo, resolver problemas e pesquisar na área, ter autonomia na resolução de questões e propor novas soluções.

Já as emoções são manifestações que surgem em resposta a um evento que pode ser interno ou externo e, ainda, positivo ou negativo. Conforme Chacón (2003, p. 22), "emoções são respostas organizadas além da fronteira dos sistemas psicológicos, incluindo o fisiológico, o cognitivo, o motivacional e o sistema experiencial".

Autores da ciência cognitiva como Mandler (1989) e Weiner (1995) (citados por Chacón, 2003) influenciaram as pesquisas sobre Educação Matemática e afeto. Mandler (1989) construiu um modelo para explicar a emoção onde procura integrar o ato fisiológico e o processo de avaliação cognitiva considerando-a como uma influência complexa mútua entre os sistemas cognitivo e biológico. Mas, para Weiner (1995), os sujeitos tentam dar diversas explicações aos acontecimentos, isto é, atribuem suas realizações positivas ou negativas a alguma causa. O modelo cognição-emoção de Weiner (1995) funciona da seguinte forma: depois de uma situação cognitiva ocorre uma reação positiva ou negativa que é baseada no sucesso ou fracasso obtido sobre o resultado.

Metodologia

Os dados que dão suporte a este trabalho foram coletados através de um questionário constituído de três blocos com, respectivamente, nove, quinze e dezesseis questões. O primeiro bloco, denominado Perfil, apresentou cinco perguntas de escolha simples e as demais na escala *Lickert* com propósito de determinar o perfil dos alunos envolvidos nesta investigação. Os outros dois blocos apresentaram somente itens na escala *Lickert*. No segundo bloco, chamado

Aprendizagem, buscou-se informações sobre o processo de aprendizagem destes discentes em Matemática e o terceiro bloco intitulado, Dominio Afetivo, dados sobre os sentimentos que eles expressam em relação à Matematica. Para este artigo considerou-se apenas como respondentes os 128 alunos de cinco turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola federal de Porto Alegre - Rio Grande do Sul - Brasil e examinaram-se algumas perguntas deste questionário.

Fez-se uso do método quantitativo para avaliar as informações deste instrumento que é apropriado para medir opiniões, atitudes e preferências. De acordo com Richardson (1989), este método tem como característica o emprego da quantificação tanto para recolher dados quanto para seu tratamento que é efetivado através de técnicas estatísticas. A partir das respostas obtidas, pode-se obter uma melhor compreensão do comprometimento dos alunos com sua aprendizagem em Matemática e apontar indicativos de ações que identificam este comprometimento.

Perfil dos pesquisados

Foram 128 alunos que preencheram ao questionário. Pode-se observar, através da *Figura 1*, que 61% do grupo de estudantes são do sexo masculino, enquanto que 39% são do sexo feminino.

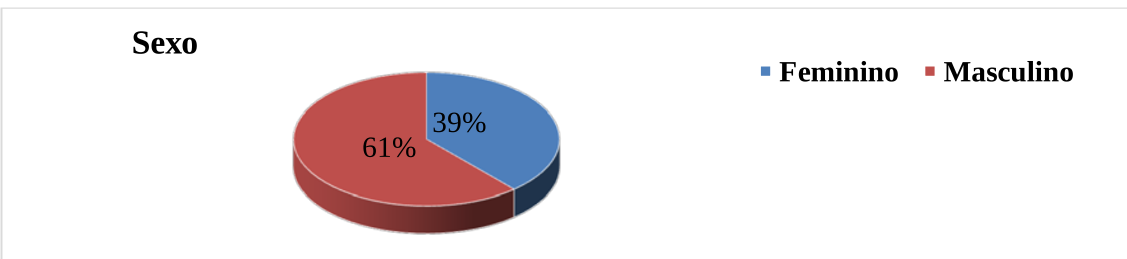


Figura 1. Sexo dos alunos

Em relação a idade dos estudantes comprova-se, ao analisar a *Figura 2*, que 71% da totalidade dos sujeitos engobla as idades de 16 ou 17 anos.

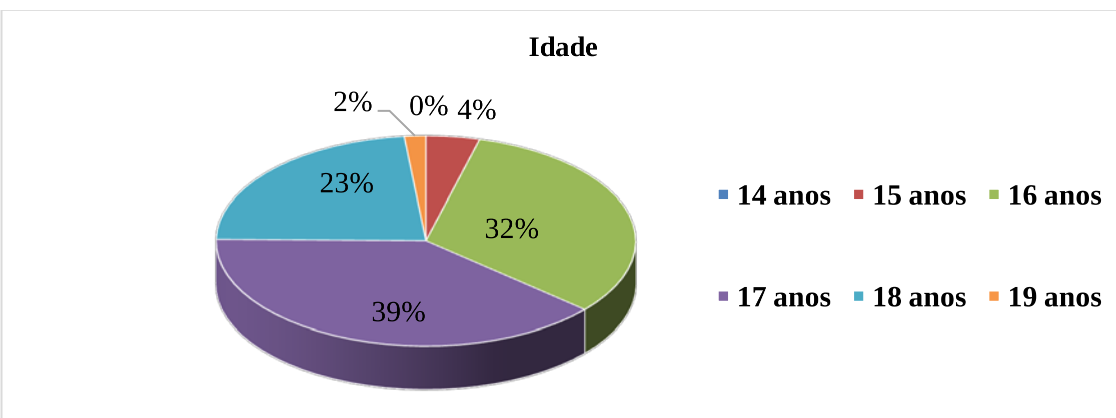


Figura 2. Idade dos alunos

Análise dos resultados

No que diz respeito a escolaridade da mãe, expressa pelo *Figura 3*, nota-se que 33% da totalidade concluiram Ensino Médio, 25% concluiram o Ensino Superior e 29% possuem especialização.

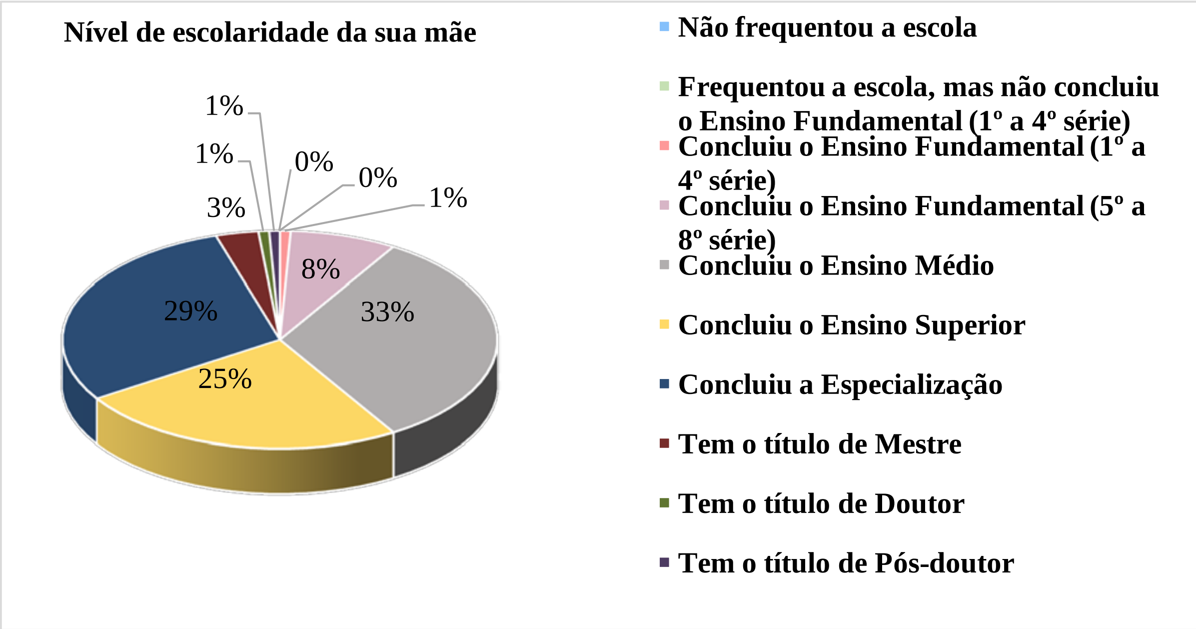


Figura 3. Escolaridade da mãe

Na *Figura 4*, correspondendo a escolaridade do pai destes estudantes, verifica-se que 39% concluiram o Ensino Médio, 34% terminaram o Curso Superior e 8% possuem Especialização.

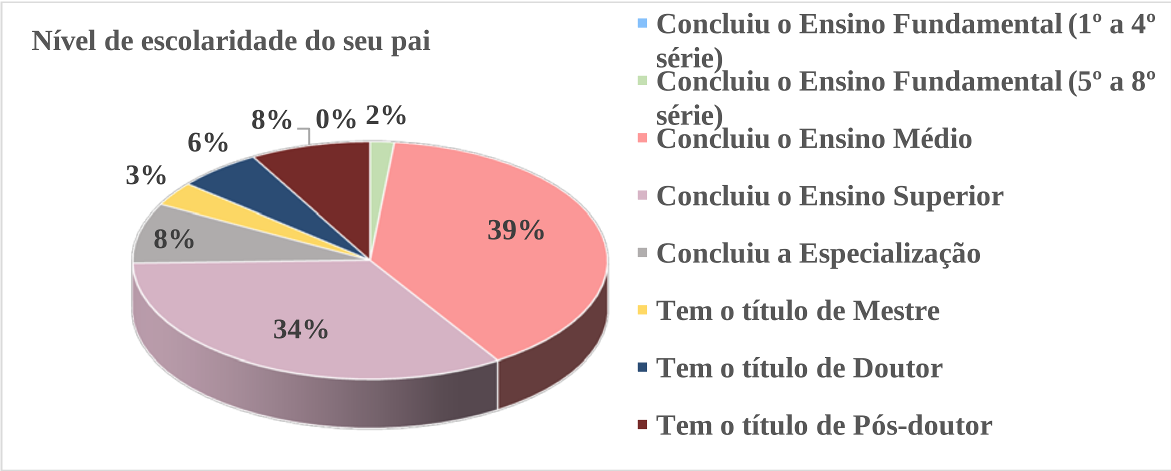


Figura 4. Escolaridade do pai

Tendo em vista que 25% das mães dos respondentes possuem curso superior e que 34% de seus pais concluiram o curso superior este fato pode indicar que a escolha destes pais por este colégio, a partir de tais percentuais, tenha sido em função da tradição e qualidade deste estabelecimento de ensino. Esta instituição é uma referência entre escolas do Rio Grande do Sul por suas excelentes notas alcançadas em classificações em geral e pelos resultados que seu corpo discente obtem em diferentes concursos.

Na *Figura 5*, observa-se que 37% dos pesquisados frequentemente entendem o porquê de estudar matemática e 36% sempre comprende tal atitude. O total de 73% reunindo estes dois itens pode indicar a valorização desta disciplina por estes alunos. O que corrobora com Chacón (2003), quando define as atitudes em relação à matemática como as que referem-se à valorização e a estima por esta materia.

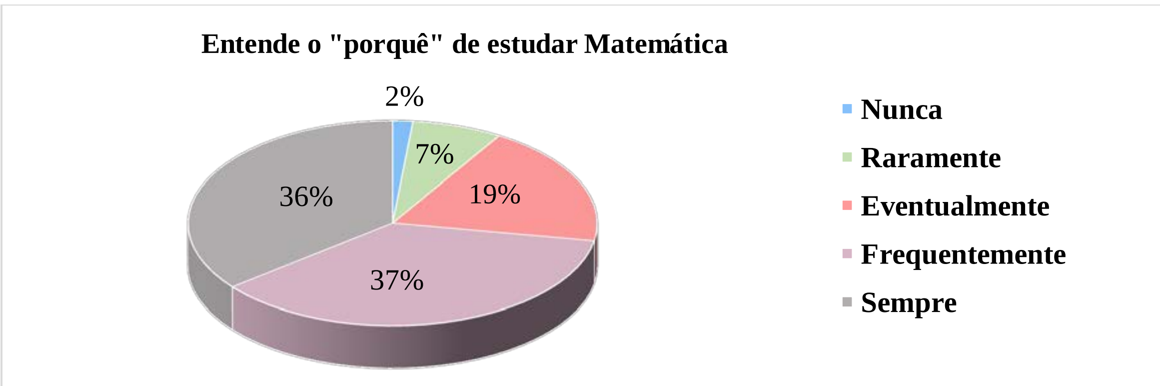


Figura 5. O porquê de estudar matemática.

Partindo-se do exame do tema ter um bom sentimento em relação à matemática, o que é representado na *Figura 6*, percebe-se que 25% dos alunos têm sempre um bom sentimento e 28% frequentemente possuem este sentimento. Provavelmente estes estudantes tenham uma crença positiva sobre a matemática tendo em vista o percentual elevado ao se computar estas duas abordagens. Conforme Chacón (2003, p.20), “as crenças matemáticas são um dos componentes do conhecimento subjetivo implícito do indivíduo sobre a matemática, seu ensino e sua aprendizagem”. A conduta do estudante em sala de aula está diretamente relacionada à como concebe a aprendizagem em Matemática. Assim, se um determinado aluno valoriza e tem consciência da qualidade e utilidade desta disciplina terá um sentimento positivo para com ela.

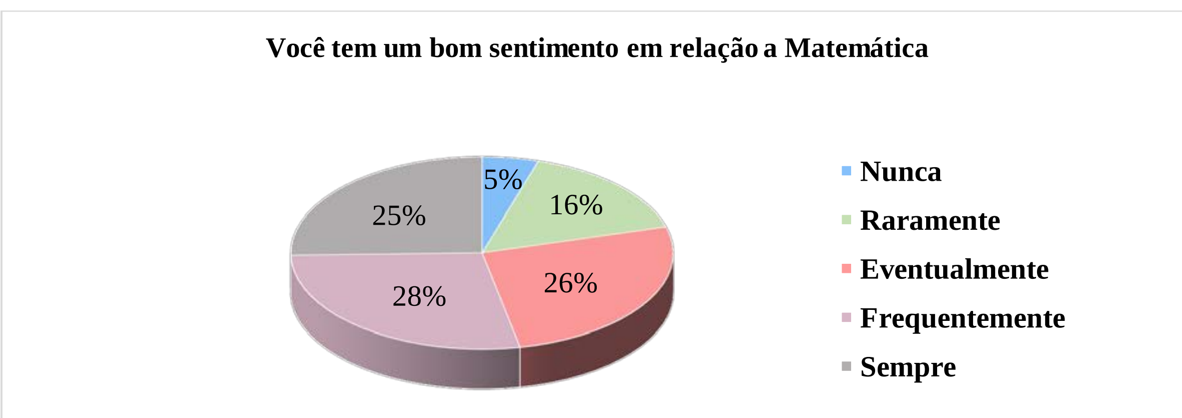


Figura 6. Sentimento em relação à matemática.

Na observação da *Figura 7*, nota-se que 41% dos respondentes raramente têm um sentimento de impotência quando tem que estudar Matemática e 23% nunca se sente desta forma frente ao estudo da mesma. Estes dados corroboraram com a questão anterior, pois anteriormente existia um indicativo destes estudantes possuírem um bom sentimento em relação à Matemática. Na visão de Chacón (2003) estes alunos poderiam estar seguros de que estão controlando a situação e familiarizados com o processo de resolução das questões matemáticas apresentadas.

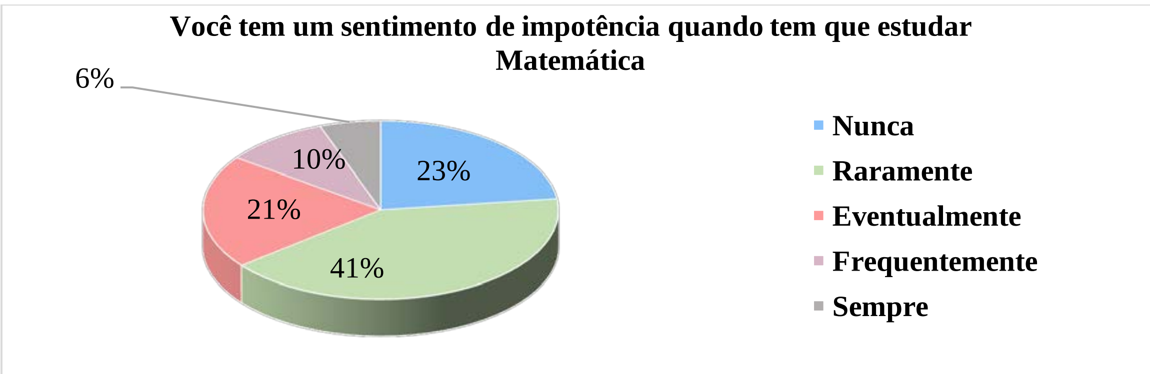


Figura 7. Impotência em relação à Matemática.

Na visualização da *Figura 8* apreende-se que 22% sempre gostam de estudar matemática e 20% frequentemente apreciam seu estudo. Neste caso, talvez se possa contemplar a ocorrência do componente afetivo constituinte das atitudes em relação à matemática manifestado em termos da satisfação e interesse. Poderiam estar demonstrando alegria e prazer com a atividade, pelo domínio dos procedimentos ou dos conhecimentos para resolver as tarefas propostas. Estariam apresentando um sentimento de tranquilidade que surge quando o problema está controlado, não ocorre pressa e nervosismo, a tarefa é realizada com serenidade e paciência. (Chacón, 2003).

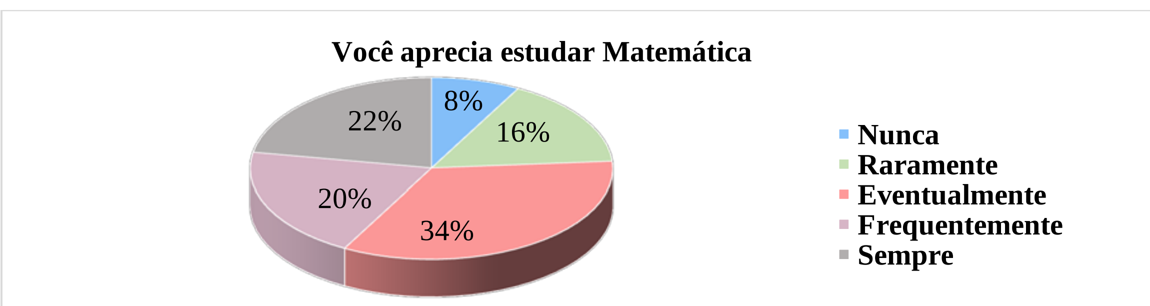


Figura 8. Apreciar matemática.

Na *Figura 9* tem-se que 49% dos discentes nunca odeiam a matemática e 26% raramente não gostam desta disciplina. Estas informações permitem talvez afirmar que este grupo de alunos possui crenças e atitudes positivas em relação à matemática.

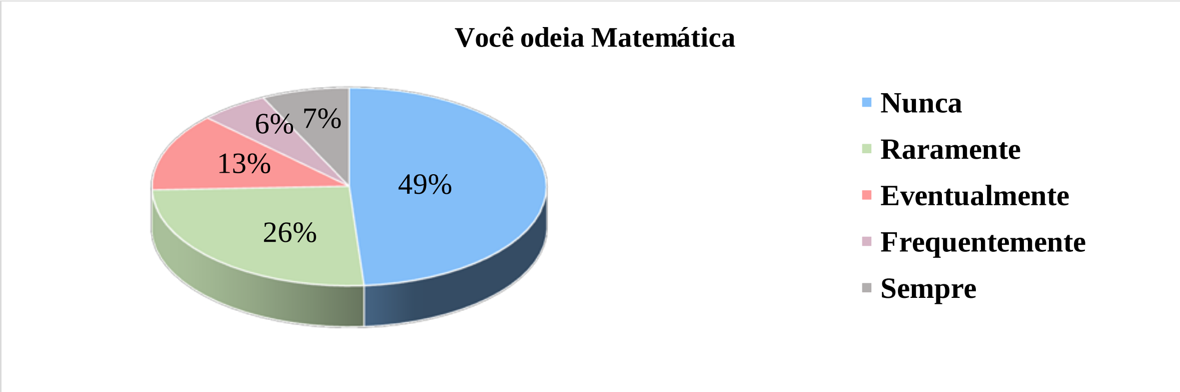


Figura 9. Odiar Matemática.

Ainda cabe se resaltar que, de acordo com Chacón (2003), as crenças desempenham um papel central no sucesso e no fracasso escolar. Por outro lado, a partir do modo como o aluno vê a matemática e como comunica suas crenças, obtêm-se indicativos de como foram suas experiências de aprendizagem e que espécie de ensino ele participou.

Quando se analisa a *Figura 10*, se infere que 18% dos alunos sempre tem prazer em estudar Matemática, 24% frequentemente e 24% eventualmente admitem ter prazer em seu estudo. Assim, tomando por base estas informações parece que grande parte dos alunos do terceiro ano tem prazer em se dedicar aos assuntos matemáticos. Provavelmente, este percentual retrate a importância que a Matemática tem para a aprovação no concurso vestibular já que a maioria destes alunos prestará esta seleção ao final deste ano.

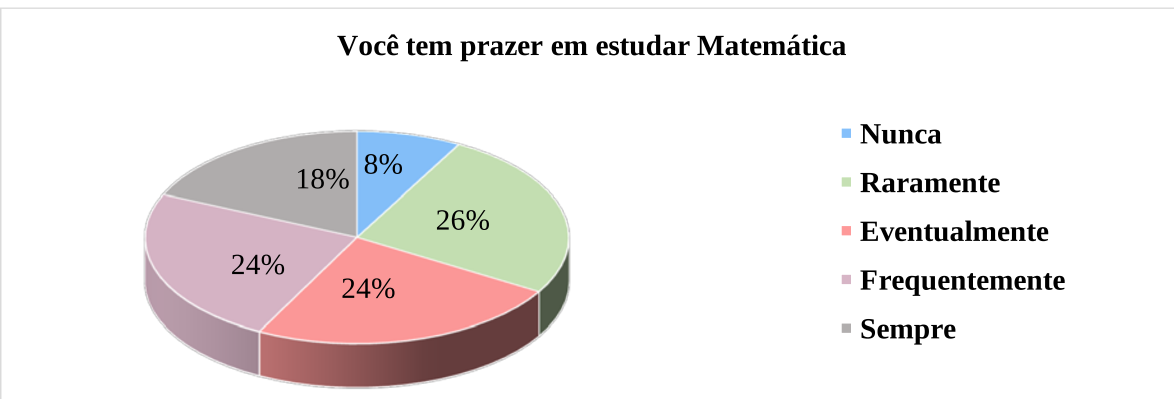


Figura 10. Prazer em estudar Matemática.

Por estes resultados, é provável que se possa admitir que a Matemática não seja a disciplina causadora destes problemas de ordem afetiva como ficar tenso, irritado ou impaciente. Na visão de Sisto e Martinelli, (2008, p.16),

> Os problemas de ordem afetiva podem tanto serem considerados causadores de outros comportamentos como causados por estes, o que de maneira bastante incisiva perturba o comportamento e as relações da criança.

No exame da *Figura 11*, obteve-se que 30% nunca ficam mais felizes na aula de Matemática do que em outra aula e que 24% raramente sentem-se mais felizes. Estas informações requerem uma análise mais detalhada por meio estatístico, o que está sendo desenvolvido ao longo desta pesquisa de doutorado, correlacionando com outras perguntas para entender melhor o que poderá estar ocorrendo.

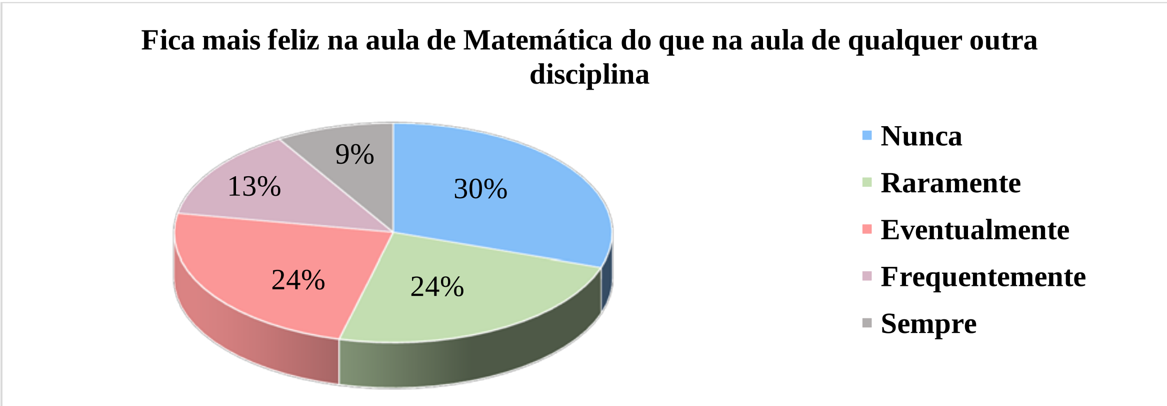


Figura 11. Ser mais feliz nas aulas de Matemática.

Conforme o *Figura 12*, 36% dos estudantes nunca ficam tensos, irritados e impacientes nas aulas de matemática e 41% raramente o ficam.

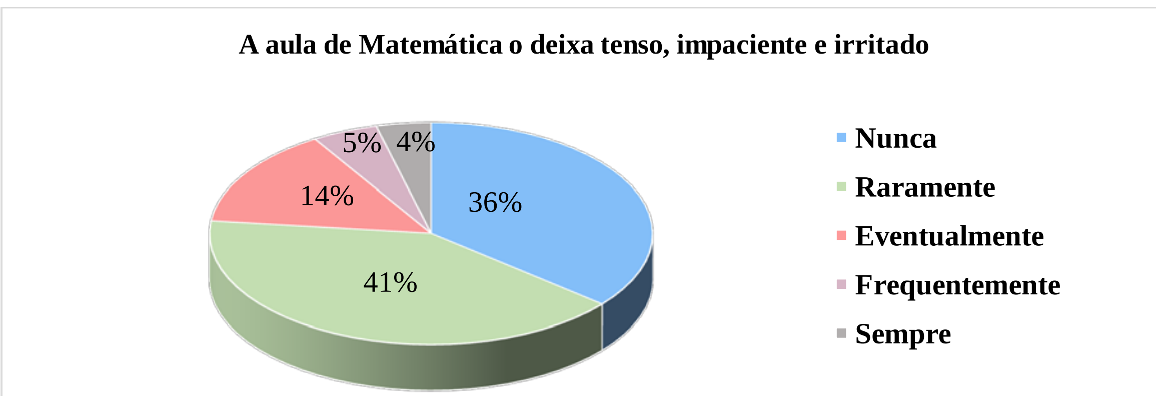


Figura 12. Ficar tenso, impaciente e irritado nas aulas de Matemática.

Visualizando a *Figura 13*, depreende-se que 19% dos estudantes frequentemente não vê o tempo passar nas aulas de matemática devido a seu envolvimento e tranquilidade, 9% sempre tem esta postura e 37% eventualmente admitem esta atitude. Neste caso, existe a possibilidade de que como é feito o trabalho em sala de aula esteja favorecendo a concentração dos estudantes e assim, contribuindo para que tenham este posicionamento. Na visão Walloniana quando se reconhece a expressão postural do aluno como sinal do que está afetando o desempenho da aprendizagem se pode compreender e encontrar estratégias mais eficazes para a particularidade de cada estudante. (GRATIOT-ALFANDÉRY, 2010).

O modo como a aula vai se efetivando tem relação direta com as crenças do professor, ou seja, com aquilo que ele acredita e defende de um modo geral e, portanto, não apenas evocando os aspectos cognitivos. O que concorda com Almeida (2004) quando afirma que o professor desempenha um papel ativo no desenvolvimento do aluno de forma integral.

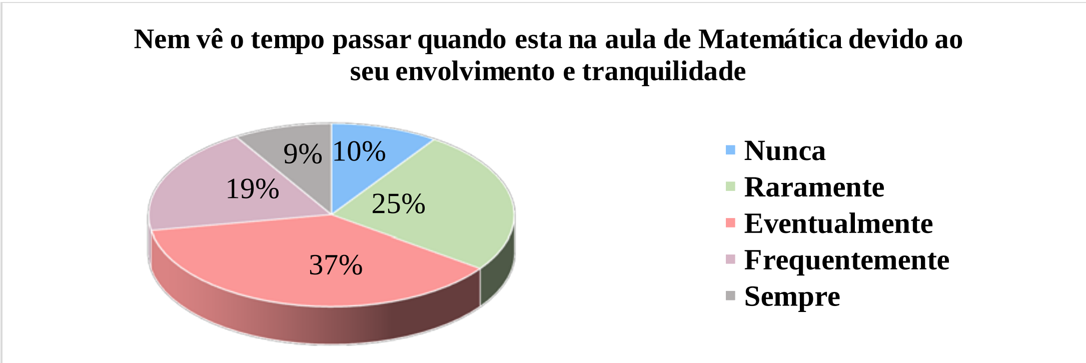


Figura 13. Tempo devido ao envolvimento.

No exame da *Figura 14*, nota-se que 48% dos discentes sempre consideram essencial para seu futuro estudar matemática e 25% frequentemente admitem sua importância. Estes percentuais determinam indícios de que a aprendizagem de conteúdos matemáticos é essencial para a maioria dos alunos. É possível que este fato possa ter a influência da família e/ou da escola. Convém, portanto um exame mais aprofundado considerando as demais perguntas do questionário, que neste recorte não foram contempladas.

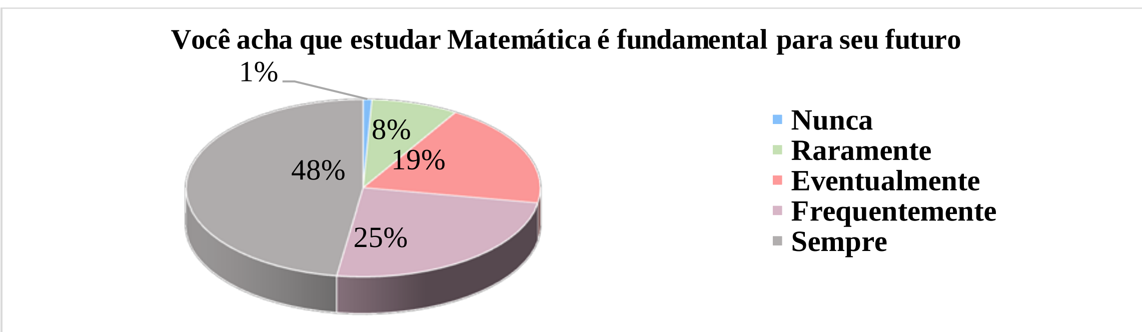


Figura 14. Estudo de Matemática para o futuro

Conclusões

Este trabalho, constituindo-se em um recorte de uma pesquisa de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, considerada a perspectiva em relação ao comprometimento na aprendizagem em matemática dos alunos dos terceiros anos do ensino médio de uma escola federal da cidade de Porto Alegre - Rio Grande do Sul – Brasil.

Devido aos dados relativos à escolaridade dos pais, a entender o porquê estudar Matemática e ter um bom sentimento em relação a esta disciplina é provável que a valorização e o interesse pela aprendizagem da matemática por estes discentes estejam sendo explicitadas.

Sabendo que 64% dos respondentes nunca ou raramente têm um sentimento de impotência quando estudam matemática e que 42% sempre e frequentemente apreciam seu estudo isto conduz a recomendar que esta disciplina não traga dificuldades a estes estudantes. A informação de que 75% dos alunos nunca ou raramente odeiam matemática vem ratificar com o item anterior.

Quando 18% dos alunos sempre tem prazer em estudar matemática, 24% frequentemente e 24% eventualmente talvez retrate o quanto a matemática é essencial para estes alunos, pois prestarão o concurso vestibular ao final deste ano.

Como 36% dos estudantes nunca ficam e 41% raramente ficam tensos, irritados e impacientes nas aulas de matemática este fato condiz com uma aula de matemática que proporciona tranquiladade aos discentes.

Se 19% dos estudantes frequentemente não vê o tempo passar nas aulas de matemática devido a seu envolvimento e tranquilidade em aulas de matemática, 9% sempre tem este comportamento e 37% eventualmente admitem este modo de se portar. Desta forma, existe a possibilidade de que como está sendo conduzido o trabalho em sala de aula favoreça a concentração dos estudantes contribuindo para que tenham esta forma de agir.

Destaca-se o fato de que os alunos admitem ser importante aprender matemática para seu futuro.

A análise realizada permitiu identificar fatores que podem auxiliar a desvendar o comprometimento dos estudantes no processo da aprendizagem em matemática e quais os aspectos envolvidos neste comprometimento.

Espera-se que com a apreciação de todas as assertivas do questionário e incluindo-se a totalidade dos alunos do Ensino Médio seja possível confirmar, o que neste momento são indícios, concluindo-se quais os fatores que realmente contribuem para o comprometimento dos alunos na aprendizagem em matemática.

Referências Bibliografias

Almeida, L., Mahoney, A. (2004). Afetividade e aprendizagem: contribuições de Henri Wallon. São Paulo: Edições Loyola.

Chacón, I. (2003). Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed.

Dellors, J. (2001). A educação para o século XXI: questões e perspectivas. Porto Alegre: Artmed.

Fini, L., Calsa, G. (2003). In: Sisto, F., Martinelli, S. (2008). Afetividade e dificuldades de aprendizagem: uma abordagem psicopedagógica. 2. ed. rev. São Paulo: Vetor.

Gratiot-AlfandérY, H. (2010). Henri Wallon. Recife: Massangana.

Felicetti, V. Comprometimento do estudante: um elo entre aprendizagem e inclusão social na qualidade da educação superior /Vera Lucia Felicetti. – Porto Alegre, 2011. 298 p.: il. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, PUCRS.

Fernandes, A. (2011). Quem tem medo de matemática? Sentimentos envolvidos no processo ensino-aprendizagem de matemática por alunos da Suplência. In: Mahoney, A., Almeida, L. (2011). 3ed. Afetividade e Aprendizagem. São Paulo: Edições Loyola.

Mandler, G. (1989). Affect and: Causes and consequences of emocional interactions. In: D, B. McLeod e V. M. Adsms (Eds) Affect and mathematical problem solving: A new perspective. Springer-

Verlag. Nova York, p. 3-19. In: Chacón, I. (2003). Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Assessment standards for school mathematics. Reston, Virginia: NCTM.

Richardson, R. (1989) Pesquisa social: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas.

Sisto, F., Martinelli, S. (2008). Afetividade e dificuldades de aprendizagem: uma abordagem psicopedagógica. 2. ed. rev. São Paulo: Vetor.

Tardif, M. (2002). Saberes Docentes e Formação Profissional. Petrópolis, RJ: Vozes.

Weiner, B. (1995). A theory of achievement motivation and emotion. Psychological Review, 92(4), 548-573. In: Martineli, S., Sisto, F. (2008). Afetividade e dificuldades de aprendizagem: uma abordagem psicopedagógica. 2 ed. São Paulo: Vetor.

Generalidades de un experimento de enseñanza desarrollado en la formación inicial de maestros de educación primaria

Gabriela **Valverde** Soto
Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
gabriela.valverde@ucr.ac.cr

Resumen

El propósito de la comunicación es describir los elementos centrales de una investigación que se ha desarrollado en el contexto de la formación inicial de maestros de educación primaria de la Universidad de Granada. Este estudio se centró en promover el desarrollo del conocimiento matemático sobre la razón y la proporcionalidad de estudiantes de magisterio como una forma de sustentar y favorecer el proceso de desarrollo de la competencia matemática de dichos estudiantes. Metodológicamente, la investigación consiste en un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. En esta contribución se presenta someramente el estudio a través de ejemplos procedentes de la planificación, implementación y análisis de una de las sesiones, a su vez se presentan resultados referentes al conocimiento matemático y competencias matemáticas promovidas en esa sesión.

Palabras clave: razón, proporcionalidad, competencias matemáticas, formación inicial de maestros, análisis didáctico, experimentos de enseñanza.

Abstract

The purpose of this report is to present characteristics of a study which objective was to improve both the mathematical knowledge (about ratio and proportionality) as mathematical literacy of pre-service elementary school teachers at the University of Granada. From a methodological perspective this study is framed within design research paradigm; particularly this is a teacher development experiment. We present briefly the phases of planning, implementation, and analysis from one session and we describe some results of the study related to mathematical knowledge and mathematical literacy of prospective mathematics teachers.

Key words: ratio, proportionality, mathematical literacy, prospective elementary school teachers, didactic analysis, teaching experiments

Introducción

Considerando que los nuevos planes de formación de maestros en España se han establecido en términos de competencias, siendo una de ellas la competencia matemática, el profesorado universitario se enfrenta al desafío de diseñar procesos instruccionales orientados al desarrollo de las mismas. La investigación realizada se centró en la competencia matemática como una expectativa de aprendizaje deseable de promover durante la formación inicial de los maestros de educación primaria, teniendo en cuenta que en su futura labor profesional asumirán el reto de gestionar procesos de enseñanza y de generar ambientes de aprendizaje cuyo fin será la alfabetización matemática de los escolares (MEC, 2007).

Una de las preguntas que guió el estudio ha sido ¿cómo promover el desarrollo del conocimiento matemático y las competencias matemáticas de los futuros maestros de educación primaria?, cuestión que se aborda desde los contenidos matemáticos razón y proporcionalidad. Se eligió centrar la investigaciones en estas nociones dado que ambas están implicadas en múltiples situaciones del entorno, motivo por el cual ofrecen condiciones propicias para concretar un trabajo de aula que se sustente en el enfoque funcional del conocimiento matemático (Rico y Lupiáñez, 2008) y en consecuencia es posible contar con diversos problemas, contextos y situaciones desde los cuales estimular la competencia matemática. Basándonos en las consideraciones descritas, para el desarrollo de este estudio se plantearon dos objetivos generales:

- Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.
- Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

Con el fin de abordar estos objetivos se decidió realizar un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas (Simon, 2000). Este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa a través del desarrollo de un diseño instruccional (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Una descripción detallada de las acciones realizadas en cada fase del experimento puede encontrarse en Valverde (2012). En esta comunicación se presentarán las generalidades relativas a las tres fases del experimento de enseñanza realizado, para esto se utiliza información procedente de la cuarta sesión de trabajo.

Planificación del diseño instruccional

En la preparación del experimento se realizaron distintas acciones, entre las que destacan: (a) un análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (Gómez, 2007) de la razón y la proporcionalidad, (b) negociación con los profesores de la asignatura, y (c) registro de las decisiones tomadas. Todos estos pasos culminaron en la planificación de 4 sesiones. Dado que el diseño instruccional elaborado se fundamenta en la perspectiva funcional del conocimiento matemático considerado en el estudio PISA (OCDE, 2004), se hizo necesario seleccionar y organizar un conjunto de tareas matemáticas que contemplaran diferentes tipos de problemas de razón y proporcionalidad.

La programación de las cuatro sesiones se describió a través de los componentes: objetivos de investigación e instrucción, contenidos y tareas. En la Tabla 1 se muestra, a modo de ejemplo, un extracto de la planificación de la cuarta sesión, la cual se centró en el estudio de la noción de escala y de las relaciones entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas o de volúmenes correspondientes.

Tabla 1
Extracto de la planificación de la cuarta sesión para ambos grupos

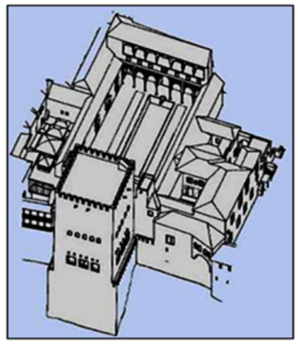
Objetivos de la investigación para la cuarta sesión	Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si los estudiantes incurren en la "ilusión de la linealidad" en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala.
Contenidos	Escala. Relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes. Relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes.
Objetivos instruccionales	Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala. Explorar la relación entre la razón de las medidas de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes.
Competencias matemáticas	Pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, plantear y resolver problemas.
Tarea	El palacio real de la Alhambra

Con el fin de facilitar la presentación del estudio, en adelante la información aportada se centra en la cuarta sesión y en la tarea matemática "El palacio real de la Alhambra" (Figura 1). Esta atiende ideas asociadas a los conceptos de escala y semejanza, de acuerdo con Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) este tipo de tareas es considerado como uno de los más difíciles pues en ellas se deben relacionar varios tópicos tales como la medida, visualización espacial, figuras y objetos en dos y tres dimensiones, escala lineal, cuadrática y cúbica, conversión de unidades, perímetro, área, volumen y en algunos casos cálculos complicados. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la tarea "El palacio real de la Alhambra" se considera un constructo.

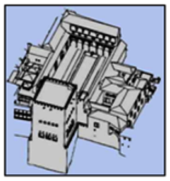
El Palacio Real de la Alhambra

Es un rico complejo palaciego que alojaba al monarca y a la corte del Reino de Granada Nazarí en el siglo XIV. A partir de una maqueta de la Alhambra, elaborada hace unos años (maqueta A), se va a construir otra (maqueta B) para un nuevo museo aplicando una escala de **1:5**.

B



A



I Fase

Uno de los atractivos, como en otras obras musulmanas de la época son los interiores, entre los que destaca el Patio de los Arrayanes que es de forma rectangular y la Torre de Comares cuya terraza superior es de forma cuadrangular.

En la tabla aparecen las dimensiones del Patio de los Arrayanes y de la terraza superior de la Torre de Comares en la maqueta A, completa la información que se te pide:

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B				
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

II Fase

En el Patio de los Arrayanes hay un estanque de almacenamiento de agua con forma de prisma rectangular, éste divide al patio longitudinalmente.
En la tabla aparecen las dimensiones del estanque en la maqueta A, completa la información que se te pide:

	Largo	Ancho	Profundidad	Volumen
Maqueta A	12 cm	3 cm	2 cm	72 cm^3
Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre los volúmenes de dos prismas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivas aristas. Explica con detalle cómo has razonado.

Figura 1. *Tarea "El palacio real de la Alhambra"*

De acuerdo con los indicadores de los niveles de complejidad de las tareas expuestos por Rico y Lupiáñez (2008) se tiene la parte (a) es de reproducción mientras que la parte (b) corresponde al nivel de reflexión.

Tabla 2
Descripción de la tarea "El palacio real de la Alhambra" según nivel de complejidad

		Tarea "El palacio real de la Alhambra"	
		Parte (a) I y II Fase	Parte (b) I y II Fase
Reproducción	Contextos familiares.		
	Conocimientos ya practicados.	X	
	Aplicación de algoritmos estándar.		
	Realización de operaciones sencillas.	X	
	Uso de fórmulas elementales	X	
Conexión	Contextos menos familiares		
	Interpretar y explicar		
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación		
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.		
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.		X
	Creatividad		
	Ejemplificación y uso de conceptos.		
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.		X
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.		X

Implementación del diseño instruccional

La implementación se realizó en condiciones naturales de desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica[1] durante el curso académico 2009-2010, el estudio se ha desarrollado con dos grupos (G1 y G2). En el G1 participaron 85 estudiantes y en el G2, 42 estudiantes.

Para el desarrollo de las sesiones se aplicó una adaptación de la metodología ACODESA (Hitt, 2007). Esta metodología de trabajo en el aula se basa en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista. Entre las características de esta metodología que han respaldado la elección de la misma están: la inclusión de tareas abiertas, complejas o no tradicionales que promuevan la reflexión y el debate, el interés por estudiar la evolución en la resolución de la tarea y en general evidenciar cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa. En síntesis, la experimentación se desarrolló en cuatro fases: trabajo individual en clase, trabajo colaborativo, puesta en común y trabajo individual fuera de clase.

[1] Asignatura troncal ubicada en el primer curso del plan de estudios de la titulación de Diplomado en Maestro: Educación Primaria de la Universidad de Granada, aprobado en BOE de 14 de febrero de 2001.

Análisis de datos de la investigación

En términos generales, el experimento de enseñanza utilizado se inclina por proporcionar una perspectiva dual sobre el desarrollo del conocimiento del profesor coordinando análisis sobre el conocimiento individual y grupal (Simon, 2000). En este sentido se han realizado dos tipos de análisis de la información, uno centrado en el gran y pequeño grupo y otro referente a casos individuales de estudiantes (Figura 2). Ambos son análisis cualitativos de corte interpretativo. El estudio de casos considera a 6 estudiantes y el análisis de las sesiones considera todos los equipos participantes, sobre este último se focalizan los aportes de esta comunicación.

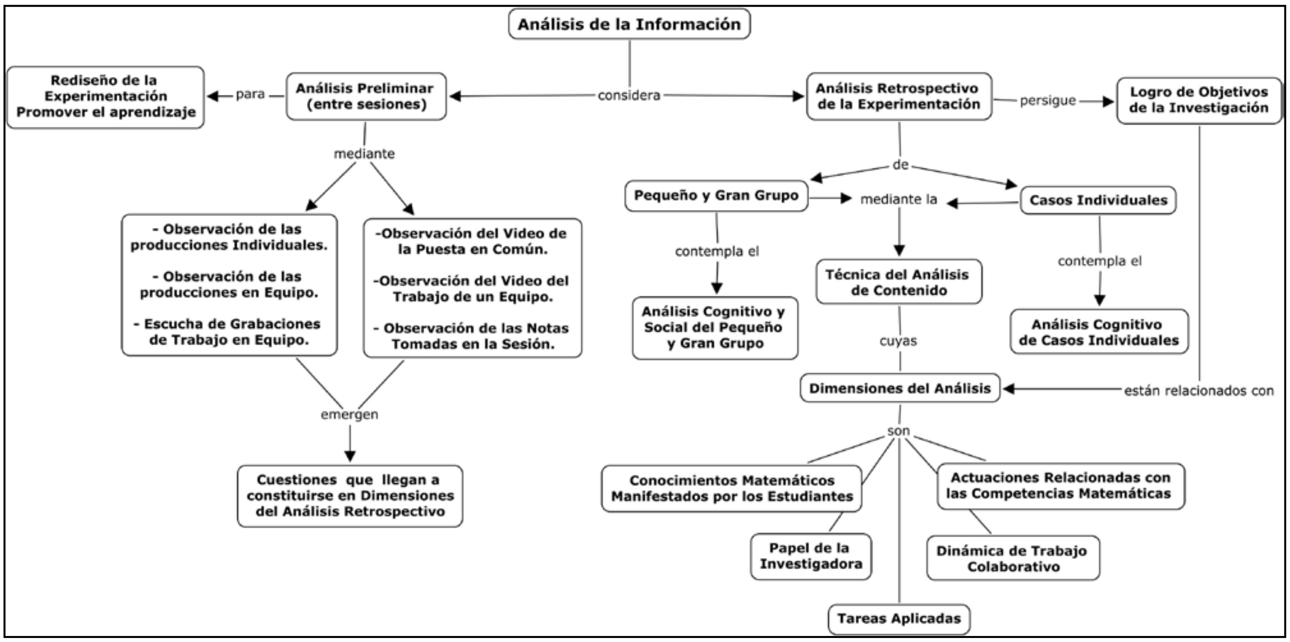


Figura 2. Tipos de análisis realizados en el estudio

Aspectos metodológicos del análisis de las sesiones

El fin del análisis de las sesiones es profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y generar supuestos sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se busca aportar “conocimiento” que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria. Además, detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de aula y de las tareas aplicadas, así como estudiar el papel de la investigadora durante la experimentación. En resumen, pretende dar información sobre el grado en que se han logrado los objetivos de investigación en cada sesión.

Para el análisis de cada sesión se delimitaron cinco dimensiones: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas realizadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula. Estas dimensiones se relacionan con los objetivos parciales de la investigación, los cuales son concreciones de los dos objetivos generales.

Para estudiar el conocimiento matemático se analizaron 118 transcripciones de los trabajos colaborativos y 8 transcripciones de las puestas en común. Las 124 producciones escritas de los equipos (78 del G1, 46 del G2) se han utilizado principalmente como material de respaldo de las producciones orales. Para este fin se ha aplicado la técnica de análisis de contenido (Cabrera, 2009).

En relación con el método de estudio de la competencia matemática se destaca que en la investigación desarrollada no se estudia el logro individual de las expectativas de aprendizaje ni se concluye acerca de la competencia como capacidad manifestada por un alumno particular. En este análisis se procura recuperar las actuaciones manifestadas en el trabajo colaborativo que evidencian el logro del objetivo instruccional, sin afirmar que todos los estudiantes del equipo mostraron esa capacidad y que en consecuencia se estimuló o promovió alguna de las competencias matemáticas en todos los miembros del equipo. En su lugar, con este análisis se pretende aportar una panorámica del porcentaje de los equipos en los que se mostraron actuaciones que evidencian el logro de las expectativas de aprendizaje planificadas. Con base en la observación del tipo de actuación, usando como marco de referencia los descriptores del estudio PISA para los grupos de competencia[2] (OCDE, 2004; Rico y Lupiáñez, 2008), se llega a concluir sobre el nivel con que se ha trabajado una u otra competencia.

Uno de los supuestos que ha guiado el análisis de las sesiones ha sido el considerar que el estudio del conocimiento matemático manifestado por los estudiantes aporta la información para observar el grado de consecución de los objetivos específicos de instrucción, lo cual hace posible valorar, si y en qué manera, se ha promovido la competencia matemática. En lo que sigue hacemos referencia a resultados de estas dos dimensiones de análisis, los mismos proceden del análisis de la cuarta sesión.

Resultados del análisis de la cuarta sesión: Dimensión conocimiento matemático.

Uno de los objetivos de la investigación para la cuarta sesión de trabajo se centró en conocer las concepciones[3] que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si los estudiantes incurren en la “ilusión de la linealidad” (Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005) en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala. Otro foco de interés ha sido describir y analizar las conjeturas que sobre las relaciones entre razones lograran mostrar los estudiantes.

En la Tabla 1, se presenta una síntesis de las actuaciones manifestadas por los estudiantes en la resolución de la tarea “El palacio real de la Alhambra”. Tales actuaciones corresponden a la dimensión de análisis relativa al conocimiento matemático. En la Tabla se indica la cantidad de equipos de cada grupo (G1 y G2) en los cuales se detectó cada concepción, después de la tabla se describe con detalle el indicador de actuación IE3.

[2] Reproducción, conexión y reflexión.
[3] En el estudio se adopta la idea de que una concepción es un conocimiento que ha sido construido por un individuo, ya sea de manera personal o en interacción con pares, y que no es necesariamente "equivalente" al conocimiento reconocido por una comunidad académica (Hitt, 2007).

Tabla 3
Actuaciones manifestadas en la resolución de la tarea "El palacio real de la Alhambra"

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Interpretaciones de la Escala	IE1	Afirmar explícitamente que la escala 1:5 indica que cada centímetro de la maqueta A corresponde a 5 centímetros de la maqueta B.	37%	33%
	IE2	Aplicar la escala para hallar las longitudes de los lados y del perímetro de la maqueta B.	81%	89%
	IE3	Aplicar la escala 1:5 para hallar el área y el volumen requeridos en la maqueta B. Esta aplicación es una manifestación de la *ilusión de la linealidad.*	19%	55%
Conjetura sobre las relaciones entre razones de longitudes, área o volumen de cuerpos o figuras semejantes	C1	No se enuncia la conjetura, se manifiesta desconocimiento de cómo abordar la tarea.	44%	0%
	C2	Enunciar la conjetura "deslizando el foco de atención" o con errores de expresión o con errores en la comunicación de la misma. Detectar la relación, pero no expresarla adecuadamente.	25%	44%
	C3	Enunciar la conjetura sobre la relación entre las razones correctamente.	25%	44%
	C4	Enunciar una afirmación cierta, pero no pertinente, sobre las cantidades y no sobre la relación entre las razones.	6%	33%
	C5	Expresar alguna relación o afirmación falsa sobre las cantidades.	12%	22%

Nota: Los porcentajes correspondientes a cada grupo sobrepasan el 100% dado que en algunos de los equipos se manifestó más de una actuación.

Descripción del indicador IE3: Aplicación de la escala para hallar el área y (o) volumen.

Uno de los casos más conocidos de uso indebido de la linealidad es el relacionado con los problemas sobre el efecto el agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El principio que gobierna este tipo de problemas es bien conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,…) por un factor r, multiplica las longitudes por un factor r, las áreas por un factor r^2 y los volúmenes por un factor r^3.

La inclusión del área y volumen como datos desconocidos en la primera parte de la tarea obedece a nuestro interés por conocer si los estudiantes utilizaban la misma escala para hallar las medidas de tales cantidades, esto es si incurrían en el fenómeno de la ilusión de linealidad o si por el contrario los estudiantes analizaban de alguna manera que el crecimiento del área o del volumen no seguía la misma razón de ampliación que relaciona las longitudes en las dos maquetas.

Tal fenómeno se evidenció en las producciones orales y (o) escritas de los equipos E2, E12 y E17 del G1 y en los equipos E1, E4, E5, E7 y E10 del G2. Se mostró en la resolución de la primera parte de la tarea (tablas) y en los intentos por enunciar la conjetura en la segunda parte de la tarea. Se muestra un fragmento del trabajo del equipo E12 del G1.

B14: a ver he dicho que sabiendo el largo y el ancho puedes calcular el área entonces la segunda figura va crecer en relación proporcional a la primera atendiendo a que la escala es uno, cinco
C14: ¿ponemos eso?
B14 y C14: sabiendo el largo el ancho…
B14: podemos hallar el área de la primera figura… ¿no?, podemos hallar el área, ya está… pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5…, parece conjetura ¿o no?

No obstante, se subraya que en el G2 el trabajo colaborativo y las intervenciones tanto de la investigadora como de la profesora colaboradora contribuyeron a que los estudiantes detectaran y reflexionaran acerca de esta interpretación. En la mayoría de los casos se les preguntó por la manera de calcular el área de un rectángulo, situación que les produjo un conflicto ya que al aplicar la fórmula usual obtenían un resultado distinto, a partir de este contraste se vieron motivados a reelaborar el trabajo realizado.

En la Figura 3 se presenta un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E10 del G2, en la misma se observa cómo los estudiantes inicialmente calcularon el área aplicando la escala lineal. Sin embargo, es evidente que durante el intercambio colaborativo corrigieron ese error.

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B	75cm	25cm	200 cm	~~375 cm^2~~ 1875cm^2
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B	30cm	30cm	120cm	~~180 cm^2~~ 900 cm^2

Figura 3. Actuación IE3 manifestada en el equipo E10 del G2

Se ha observado que los estudiantes participantes en el estudio que reflejaron la aproximación *IE3* aplicaron la proporcionalidad directa de forma espontánea y natural, además se ha detectado que las deficiencias de conocimiento relacionado con el uso razonado de las fórmulas para calcular el área del cuadrilátero limitaron la detección de las relaciones numéricas y en consecuencia esto entorpeció el enunciado correcto de la conjetura.

Resultados del análisis de la cuarta sesión: Dimensión competencia matemática.

En la planificación de la tarea “El palacio real de la Alhambra” se había previsto que, con base en las posibles actuaciones en esta tarea, se favorecieran las competencias *pensar y razonar*, *modelizar*, *comunicar*, y *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*.

En la Tabla 1 se indican las “Interpretaciones de la escala” mostradas por los estudiantes. La interpretación IE1 se ha detectado en aquellos equipos en los que ha mostrado explícitamente que la escala relaciona las longitudes de ambas maquetas, esta interpretación es reflejo del significado de la razón como relación funcional, en este caso modelizada por la expresión $f(x) = 5x$. Se hizo presente en el 37,5% de los equipos del G1 y en el 33,3% de los equipos del G2. Aunada a esta interpretación se ha señalado que más del 80% de los equipos de ambos grupos aplicaron la escala para determinar la medida de las longitudes correspondientes (Tabla

1). Con base en este dato consideramos que se ha logrado la expectativa de aprendizaje centrada en extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala. Las actuaciones que se han recogido en la aproximación IE1 muestran que se han trabajado las competencia *pensar y razonar*, y *modelizar* en un nivel de reproducción. Las actuaciones descritas en el acercamiento IE2 evidencian que los estudiantes han empleado las fórmulas de cálculo de área y las operaciones por lo que el tratamiento del primer ejercicio ha fomentado el trabajo sobre la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones* en un nivel de reproducción.

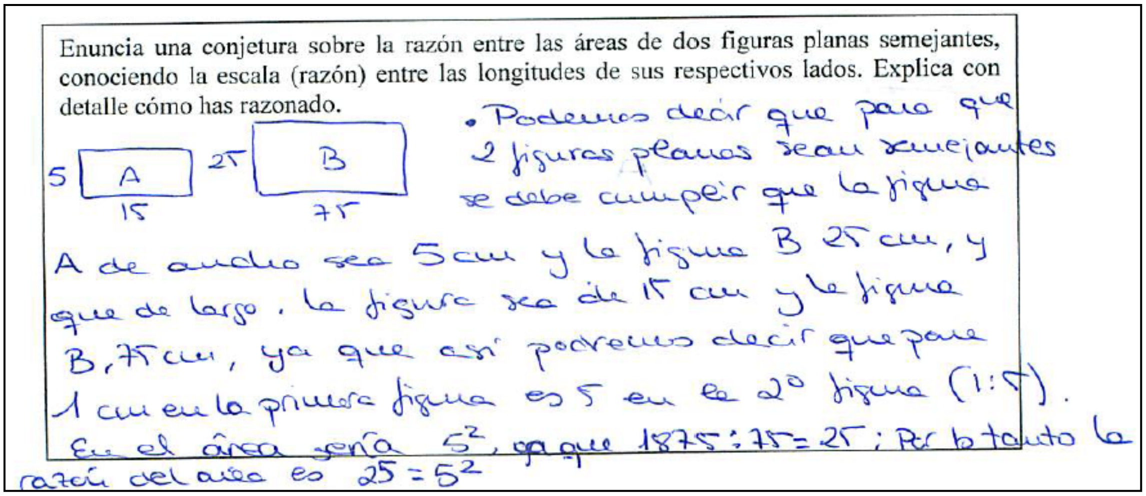
Las actuaciones mostradas en la tarea de elaborar una conjetura sobre la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes promovió indiscutiblemente la exploración de este principio, aunque esto no implica que los estudiantes hayan logrado elaborar y describir la conjetura. Por motivos de espacio se omite la descripción de las actuaciones manifestadas en los equipos, no obstante, destacamos que los acercamientos C2, C3 y C4 evidencian los esfuerzos de los estudiantes por detectar relaciones verdaderas entre las cantidades o entre las razones en cuestión.

En el G1, uno o varios de estos tres acercamientos se mostraron en nueve de los 16 equipos (56,25%) y en el G2 se manifestaron en siete de los nueve equipos (77,7%). La búsqueda de relaciones entre las cantidades o entre razones evidenció la puesta en escena de la competencia *pensar y razonar* en un nivel de reflexión debido a que se requirió una generalización de tales relaciones.

Durante el trabajo sobre la tarea “El palacio real de la Alhambra”, la variedad de acercamientos mostrados en el intento de enunciar la conjetura relativa a la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes, es una evidencia de la dificultad que esta demanda supuso para los futuros maestros.

En el G2, el 44% de los equipos logró describir adecuadamente una conjetura sobre la relación entre las razones. En todos los equipos identificamos intercambios productivos de ideas matemáticas que condujeron a la expresión de la conjetura. No obstante, reconocemos que tales intercambios y éxito en la tarea estuvieron determinados por las intervenciones de la profesora de la asignatura y de la investigadora quienes plantearon a los equipos preguntas orientadas a difuminar el fenómeno de ilusión de linealidad que obstruía la observación de las relaciones entre las razones y en consecuencia la expresión de la conjetura. En los equipos representados en el 44% indicado se trabajó la competencia *comunicar* en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación implicada en la conjetura.

En el G1, únicamente detectamos tres intercambios productivos de ideas matemáticas, es decir, aunque se hayan dispuesto las condiciones para trabajar la competencia *comunicar* hemos observado que en las producciones orales de este grupo no se reflejan actuaciones que la evidencien. Posiblemente la falta de familiaridad con este tipo de tareas ha incidido en las actuaciones manifestadas. No obstante, en los trabajos escritos de todos los equipos de este grupo se muestran intentos de enunciar la conjetura y esto nos motiva a pensar que la competencia *comunicar* se promovió en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación que debían expresar. Mostramos un ejemplo de la resolución escrita del equipo E15 del G1 (Figura 4).


Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

5 A 15 — 25 B 75

• Podemos decir que para que 2 figuras planas sean semejantes se debe cumplir que la figura A de ancho sea 5cm y la figura B 25 cm, y que de largo. la figura sea de 15 cm y la figura B, 75cm, ya que así podremos decir que para 1 cm en la primera figura es 5 en la 2º figura (1:5). En el área sería 5^2, ya que 1875 : 75 = 25 ; Por lo tanto la razón del área es $25 = 5^2$

Figura 4. *Resolución del ejercicio (b) de la I fase manifestada en el equipo E15 del G1*

A modo de conclusión

Las conclusiones del estudio abordan el logro de los objetivos del mismo y cuestiones relativas a la metodología de investigación desarrollada. Específicamente, se sintetiza el uso del análisis didáctico en las fases del experimento de enseñanza: planificación, implementación y análisis. Se argumenta a favor de la contribución de la metodología de trabajo en el aula y de la resolución de las tareas en el desarrollo del conocimiento matemático y de las competencias matemáticas de los estudiantes de magisterio. Además, se han generado conclusiones relativas al papel de la docente-investigadora durante el proceso de institucionalización de los conocimientos, así como conclusiones relacionadas con las fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo en el aula y de las tareas matemáticas realizadas (Valverde, 2012).

La investigación realizada aporta una rica descripción de actuaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio en el contexto de la razón y la proporcionalidad. Se destaca, como aporte del estudio, la descripción de actuaciones vinculadas al razonamiento proporcional y a la comprensión de la proporcionalidad en el contexto de la formación de maestros, pues en la literatura existente sobre el tema, consultada, se encuentra la descripción de una gran variedad de actuaciones manifestadas por niños o estudiantes de secundaria y muy poca de maestros en formación.

Por otro lado, se ha considerado que el marco teórico del estudio PISA ha resultado pertinente para la investigación, la caracterización de la competencia matemática y los principios del enfoque funcional recogidos en el mismo han determinado la toma de decisiones en el diseño, puesta en práctica y análisis de la intervención. El estudio del logro de las expectativas de aprendizaje permitió extraer información acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de las competencias matemáticas y el procedimiento seguido ha sido eficaz para lograrlo.

Referencias

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: The impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 333-340.

Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: Propuesta de fases. *Pedagogía Universitaria*, *14*(3), 71-92.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel. [Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia].

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (capítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto–réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Paris: Hermès.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, *312*, 53747-53750.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Historia del Álgebra y la Aritmética en la construcción de conocimiento pedagógico

Adriana **Gálvez** Socarrás
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
adrianam.galvez@gmail.com
Jairo **Triana** Yaya
Universidad Pedagógica Nacional. UPN
Colombia
jaty5051@gmail.com

Resumen

El presente escrito comunica algunos resultados de dos trabajos de maestría finalizados en el año 2012, en el marco de la línea de investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas[1] (CPPM), cuyo propósito era caracterizar el papel de la Historia de la Aritmética y del Álgebra en un curso de didáctica[2]. Para ello se abordó (entre otras) la relación entre el conocimiento histórico como parte del CPPM a partir de cuatro preguntas que según Guacaneme (2011) son necesarias al estudiarla, y tienen que ver con la racionalidad (los *porqué*), la intencionalidad (los *para qué*), el tipo de historia (el *qué*) y las estrategias (los *cómo*). La atención se centra en el qué y los para qué de la Historia de las matemáticas en la formación del profesorado, dado que para estas dos cuestiones los hallazgos permitieron ampliar o puntualizar algunas cuestiones tanto a nivel metodológico como teórico.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, conocimiento del profesor, formación inicial de profesores de Matemáticas, Álgebra y Aritmética

---

[1] Línea de investigación adscrita al departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Bogotá, Colombia

[2] Este curso hace parte de la formación inicial de profesores de matemáticas y es ofrecido por la UPN

Presentación del problema

La preocupación por implicaciones y posibles relaciones entre la Historia de las Matemáticas (HM) y el CPPM ha permeado el ámbito de investigación en la formación inicial de profesores de matemáticas (FIPM) configurando un campo de investigación que pretende caracterizar formas de integrar la HM en la FIPM. Este hecho pone de manifiesto un interés por aspectos relacionados con la HM en la formación de profesores, en particular sobre el potencial de la primera en la segunda para el desarrollo de *conocimiento didáctico de los profesores* (Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000).

Dentro del campo de investigación de las relaciones HM-CPPM puede considerarse la formación de profesores como una línea de investigación en la que los estudios han girado en torno a la forma como la HM hace parte de la formación de los profesores (Fauvel & Van Maanen, 2000), las implicaciones que puede llegar a tener su uso en las concepciones de los profesores (Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000, Furinghetti & Pehkonen, 2002) y los argumentos que sustentan el uso de la HM en la formación en matemáticas (Guacaneme, 2011; Jankvist, 2009, Radford y otros, 2000). Si bien en la literatura se pone de manifiesto posibles utilidades de la HM en la FIPM, no es claro hasta el momento, el tipo de historia que se debe proponer, pues de acuerdo con Guacaneme (2010) bajo diferentes propuestas de indagación este tipo de historia que se propone es variable. Este hecho, junto con el llamado que hace Jankvist (2009) a desarrollar estudios de tipo experimental que permitan corroborar los resultados teóricos, configuran un espacio de indagación en la FIPM.

Es así como se realizó una investigación de carácter empírico para caracterizar el papel que se le asigna a la HM en la FIPM a través de dos tesis de maestría que indagaron por **¿Cuál es el papel asignado a la Historia de las Matemáticas en el curso *enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el álgebra,* cuando se construyen ideas en torno al Álgebra y la Aritmética?** El interés por este curso radicó en que su propuesta de formación pretende innovar en la formación de profesores al abarcar el conocimiento pedagógico de contenido (Shulman, 1986) usando la HM como una herramienta para tal fin. En dicho curso se usan algunos elementos históricos para i) reflexionar sobre la naturaleza de los objetos Aritméticos y Algebraicos, (ii) abordar aspectos curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje y (iii) estudiar propuestas de enseñanza.

Durante la realización del estudio se analizaron 26 registros de video, correspondientes a las clases del curso durante un semestre, a la luz de unos referentes conceptuales y de la discusión permanente entre los miembros de la línea de investigación. Esto permitió una descripción organizada analíticamente, haciendo uso del software Atlas ti, del conjunto de episodios de clase en los que se evidenciaba el uso de la historia de la Aritmética y el Álgebra. Aunque contábamos con unas categorías y unos referentes a priori, el ejercicio sistemático y una mirada fuertemente relacional (mediada por el software) posibilitó la emergencia de sistemas de categorías más detallados e incluso algunas categorías nuevas que proponemos.

Análisis de resultados

A continuación se han organizado, de forma general, los resultados en torno a cuatro preguntas que fueron delimitadas a partir de la propuesta de Guacaneme (2011) y las sistematización y análisis de la información recolectada: a) ¿Qué tipo de historia fue usada en el curso?, b) ¿Qué de la historia del podía ser estudiado y qué se estudió?, c) ¿Para qué se proponía el estudio de la Historia? y d) ¿Cómo se abordó su estudio?

Para la primera pregunta es importante destacar que si bien Guacaneme (2010) propone 10 posturas historiográficas, éstas fueron reorganizadas en tres grandes grupos atendiendo a la generalidad de algunas posturas sobre otras así como las relaciones entre ellas. Dicha organización se ilustra en la figura 1 en la cual además de proponer los tres grandes grupos que abarcan las posturas historiográficas (tipo de fuentes, objetos estudiados, y la forma como son abordados los objetos históricos de estudio), se sintetizan los tipos de historia que fueron trabajados en el curso.

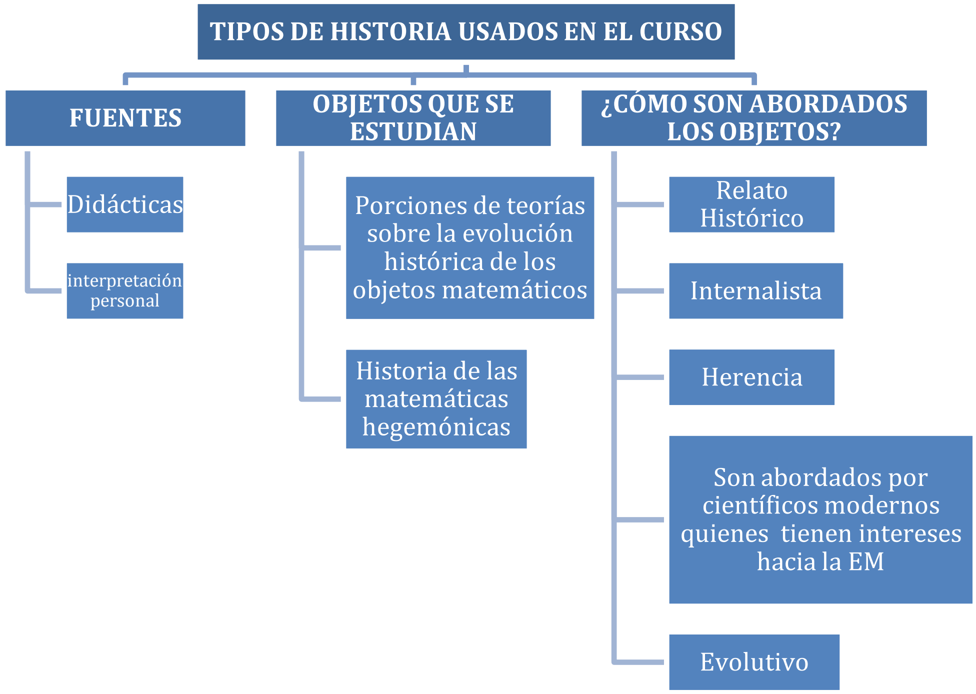


Figura 1. Síntesis de resultados para los tipos de historia usados en el curso.

En relación con el *tipo de historia* que se promovió en el espacio de formación las fuentes consultadas en el curso fueron de *tipo didáctico*. Lo anterior junto con el hecho que el curso no es de Historia sino de Didáctica del Álgebra y la Aritmética, permite afirmar que la Historia es usada como una herramienta para hacer análisis comparativos entre los objetos y/o temas de estudio de la Aritmética y del Álgebra, entre diversas concepciones históricas del Álgebra y de la Aritmética y entre los desarrollos históricos y las propuestas de enseñanza y aprendizaje. De este modo no sería posible hablar de la Historia como un fin sino de la Historia como un medio ya que la finalidad no es el estudio de la Historia del Álgebra por sí misma. Es así como la Historia es un medio para abordar problemas propios de la didáctica de la matemática.

Sin embargo, la postura historiográfica que se refiere al tipo de fuentes (originales, didácticas, secundarias) no logra cubrir todas las intervenciones que hacen alusión a asuntos históricos, ya que en ocasiones las intervenciones de la HM hacen parte del discurso usado por la profesora, (y en contadas ocasiones de los estudiantes) por lo cual no es evidente de qué tipo de fuente se obtuvo esa apropiación o ese dominio de la historia de la Aritmética o del Álgebra. Por ello, podría considerarse que aparece una nueva subcategoría que tiene que ver con la *interpretación personal* que hace un personaje (puede ser la profesora o los profesores en formación), y que no se remite directamente a una fuente original, secundaria o didáctica. Esta subcategoría se moviliza en el aula de clase constantemente, ejemplo de ello es un episodio en el que se alude a una fuente original, la obra Elementos de Euclides y se hace una descripción de ella, pero esta alusión se encuentra cargada de la *interpretación personal* de quien hace la descripción.

En relación con el nivel de profundidad con el que se estudia la HM podemos decir que en el espacio académico, las intervenciones de la Historia de la Aritmética y del Álgebra, no pasan de un nivel descriptivo de los hechos históricos (relato histórico) a un nivel analítico (análisis histórico) que permita tener posturas fundamentadas para participar en las discusiones que eran propuestas por la profesora. En algunos casos se cuestiona a los estudiantes sobre las menciones históricas que se hacen, pero no se analiza el hecho histórico; por ejemplo, en algún momento la profesora se refiere la idea de número en los egipcios y pregunta acerca de por qué los egipcios no utilizaron el sistema posicional, si en las operaciones que hacían de fondo estaba ese sistema. La profesora hace este cuestionamiento pero en ningún momento se pasa a hacer un análisis o estudio de por qué sucedía aquello, sino que la pregunta queda allí sin respuesta y no se retoma para profundizar en el tema.

Se considera que de cierta forma el análisis histórico no participa en el curso por dos motivos, primero, no hace parte de los propósitos del espacio académico, porque como ya se mencionó antes, es un curso de didáctica no de Historia y por tanto no se busca hacer un estudio exhaustivo de la misma. Aún así, nos preguntamos qué sucedería si se incluye el análisis histórico en un curso de didáctica, si eso podría llevar a integrar de manera más potente la historia de la Aritmética o del Álgebra. Segundo, por el tipo de fuentes que se utilizan, ya que en el curso se utilizan fuentes didácticas y el análisis histórico se encuentra en mayor medida en las revistas especializadas de HM, o en algunas secciones de libros de HM en que se realiza algún análisis como eje central.

Pero si bien es cierto, que no se considera el análisis histórico, si podría pensarse en un *análisis histórico-curricular*, es decir un tipo de análisis (realizado por la profesora) que relaciona y contrasta asuntos de la Historia de la Aritmética y del Álgebra con el currículo escolar. Un ejemplo de ello es cuando se pretende hacer una comparación entre el desarrollo histórico de los sistemas numéricos y la forma como estos son abordados en el currículo escolar.

¿Qué de la Historia se estudió en el curso?

La caracterización que se realizó de los temas y procedimientos tanto del Álgebra como de la Aritmética desde una perspectiva histórica fue necesaria dado que, en el caso del Álgebra, las presentaciones históricas que se consultaron abordaban el panorama histórico desde el desarrollo del lenguaje, desde la separación entre Álgebra clásica y moderna, desde los periodos de simbolización (retórico, sincopado y simbólico), desde una secuencia cronológica de hechos que corresponden a la historia del álgebra, o desde una cultura específica.

Lo anterior, dado el recorrido que sobre la historia se hizo en el curso, no era suficiente o no era lo suficientemente específico. Por esto, se consideró necesario buscar una forma de presentación que abarcara tanto el Álgebra clásica como el Álgebra moderna atendiendo a los objetos de estudio en cada una de ellas y a los procesos de simbolización y generalización de procedimientos que desde nuestro punto de vista brindan un panorama amplio del desarrollo histórico del Álgebra.

De este modo, la organización de la Historia del Álgebra en Objetos y Procesos trasversales, además de brindar un panorama general del desarrollo del Álgebra en la Historia, se convirtió en una herramienta analítica que brindó un *sistema de categorías* para responder a la pregunta *¿Qué Historia del Álgebra se estudiaba en el curso?* Sistema de categorías, que en los análisis presentados pone en evidencia su potencialidad para identificar los asuntos que fueron tratados en el curso, así como aquellos que eran estudiados en mayor o menor medida. Es así como en el caso del Álgebra, los asuntos históricos se organizaron en *objetos de estudio y procesos transversales a estos objetos* (Figura 2).

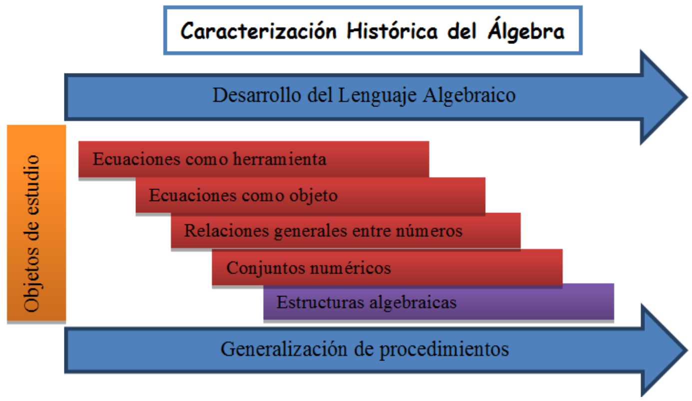


Figura 2. Objetos y procesos históricos en el desarrollo del Álgebra

Para el caso de la Aritmética, se requería precisar aquello que constituye y define la Historia de la Aritmética, asunto por demás problemático dado que, por un lado, no es tan sencillo establecer qué es Aritmética y, por otro lado, en su historia parecen entremezclarse las historias del concepto de número, de los numerales, de los conjuntos numéricos, de las propiedades de los números, de las operaciones y algoritmos aritméticos. Para contar con un marco de referencia para el estudio realizado, y sin ninguna pretensión de escribir una nueva historia de la Aritmética, desde un enfoque analítico se configuraron cinco trazas de la historia de la Aritmética (Figura 3) a través de las cuales observar sistemáticamente el lugar de ésta en el curso de formación mencionado.

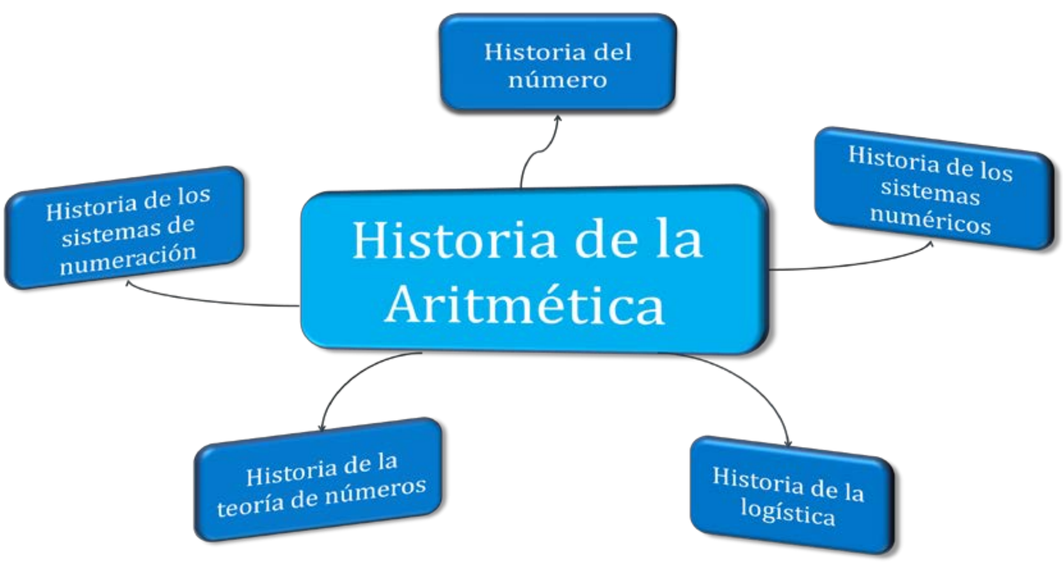


Figura 3. Trazas de la historia de la aritmética

Si bien es cierto que aparecen todas las trazas en algún momento en el espacio académico, no todas aparecen con la misma frecuencia, hay algunas que solo son mencionadas en pocas ocasiones, mientras que otras son estudiadas en mayor medida como se muestra en la figura 4.

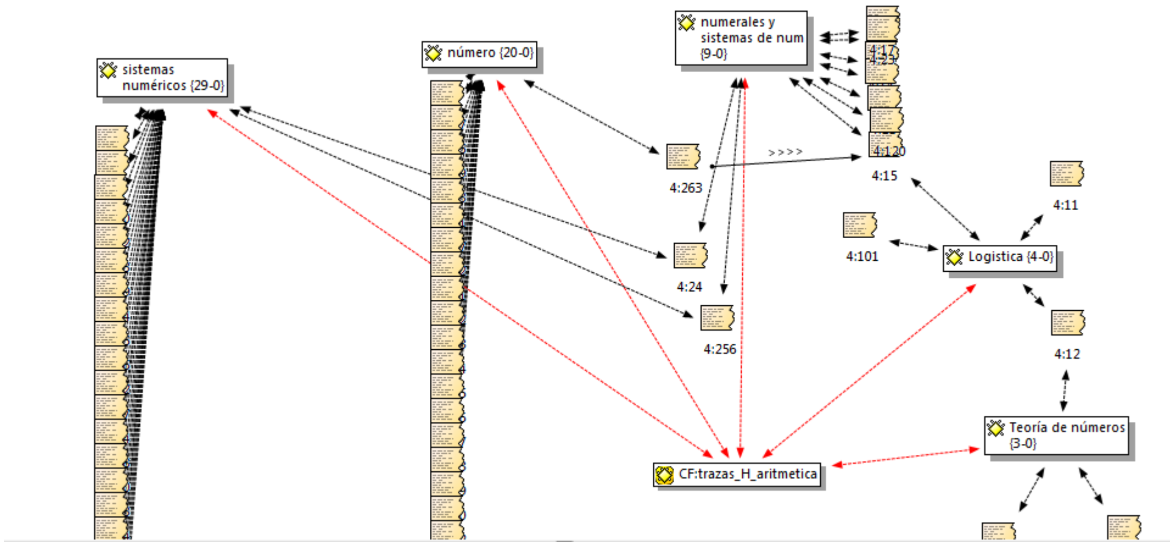


Figura 4. Ocurrencia de Episodios en relacion a las trazas de la Historia de la Aritmética.

Se puede observar que los asuntos que hacían parte de la Historia de los sistemas numéricos y la Historia del número son altamente tratados o por lo menos hay varios episodios que los abordan, mientras que los episodios relativos a las otras tres trazas son más bien escasos.

Estas dos organizaciones, configuraron un marco de referencia y una herramienta analítica que posibilitó identificar *qué de la Historia* fue abordado en el curso. Esta organización se propone para la discusión pues se reconoce que es necesario puntualizar tanto los objetos como los procesos y las trazas, así como validar mediante otros estudios dichas organizaciones y categorías.

Intencionalidades de uso de la historia del Álgebra y de la Aritmética

En cuanto al *para qué* proponer la apropiación del conocimiento histórico por los profesores en formación, podemos afirmar que las intencionalidades con las que se introdujo la Historia estuvieron en correspondencia parcial con las propuestas por Guacaneme (2011). Dicha correspondencia se estableció a través del análisis y discusión sobre 83 episodios o momentos de clase en los que se hizo uso de la Historia. Cada uno de los episodios fue codificado en el Atlas ti. de acuerdo con tres tipos de categorías, las que referían al tipo de Historia (ver apartado anterior), las que referían a la organización histórica del Álgebra y de la Aritmética (figuras 2 y 3) y las que hacen referencia a la intencionalidad con la que aparecía un cierto discurso que involucraba aspectos históricos. Este último grupo de categorías (que se abordan más adelante) se contrasto por medio de redes con cada uno de los otros grupos de categorías de modo que además de las intencionalidades fue posible identificar que objetos, procesos o trazas tuvieron un mayor nivel de uso dentro de la clase. Un ejemplo de estas redes se ilustra en las figura 4 y 5.

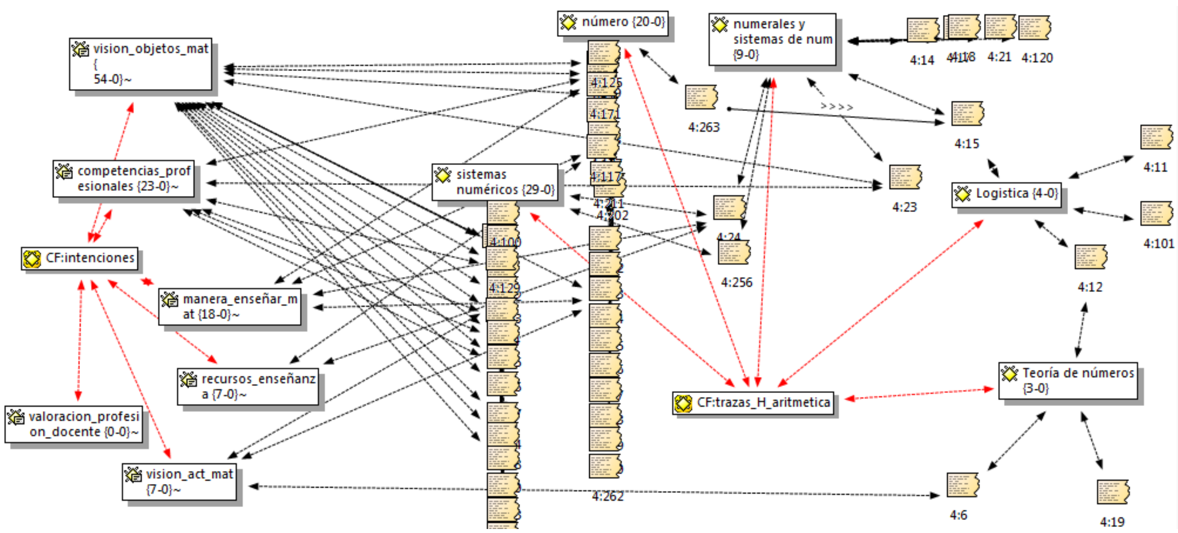


Figura 5. Red relación entre Intenciones y Trazas de la historia de la Aritmética

En esta red se muestra, por un lado, la categoría trazas de la aritmética con sus respectivas subcategorías y, por otro lado, las seis intenciones propuestas por Guacaneme (2011), y los respectivos episodios de clase que relacionan estos dos sistemas de categorías. En estos episodios encontramos que en gran parte la intención de usar la historia de la Aritmética es generar o propender por un cambio en la visión, no solo de los objetos matemáticos, sino también, un cambio en la visión de lo que se considera Aritmética y Álgebra. Algunos de los segmentos tienen la intención de dotar al profesor de competencias profesionales, de modificar la manera de enseñar al tener mayor consciencia de lo que se hace en la clase, proveer de recursos para la enseñanza. Son muy escasos los episodios que consideramos dan evidencia de la intención de cambiar la visión de la actividad matemática. Por otra parte, los registros no dan evidencia de que la historia de la aritmética se use con la intención de promover valoración de la profesión docente.

Tratamientos sobre los datos como el anteriormente ilustrado permitieron los siguientes hallazgos:

Se propone diferenciar la intencionalidad teórica denominada "*promover competencias profesionales*" de las intencionalidades (emergentes) que promueven *reflexiones de tipo didáctico.* Es importante resaltar que el hallazgo de asuntos de tipo didáctico que pretendían vincular el conocimiento histórico y el currículo o el aula de matemáticas, permite identificar el potencial de la HM para el desarrollo del CPPM. Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo retomado de los datos analizados.

En la sesión 17, luego de haber construido elementos teóricos alrededor de lo que en el curso se denominó concepciones históricas del álgebra (generalización de la aritmética, estudio de las estructuras, herramienta para la solución de ecuaciones, herramienta para manipular expresiones, álgebra como lenguaje y estudio de relaciones entre cantidades recurriendo a fuentes de tipo didáctico que abordan la historia del álgebra y concepciones curriculares del álgebra la profesora afirma: *"… quiero que antes de dar el cierre como tal veamos si esas que aparecen aquí [refiriéndose concepciones curriculares del álgebra] estaban, como les decía al principio, relacionadas con las concepciones históricas o no"*. En este episodio es explícita la intencionalidad de la profesora en establecer vínculos entre propuestas curriculares y desarrollo histórico; de modo más general, podría decirse que la historia se introduce como objeto para comprender las propuestas curriculares actuales. Este es un aspecto que no está contemplado en Guacaneme (2011) y que los autores de este escrito, consideran, hace parte de las competencias profesionales que debería desarrollar un profesor de matemáticas.

Así como lo afirman Radford y otros (2000) “cualquier uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas requiere de un acompañamiento de la reflexión didáctica” (p. 152), en el curso analizado se identificaron importantes episodios de clase en los que el conocimiento histórico, que sobre el Álgebra y la Aritmética se había logrado, era puesto en juego por parte de la profesora (en la mayoría de las ocasiones) o por parte de los profesores en formación para referirse a asuntos de tipo didáctico tales como el currículo, el aula de clase a la que se enfrentaran los profesores en formación o el aula en la que se han formado como profesores o la posibilidad de usar la HM para la elaboración de unidades didácticas.

Un uso tal del conocimiento histórico da cuenta de lo propuesto por Fauvel & Van Maanen (2000) y Anacona (2003) para quienes la HM puede ser una fuente para ayudar a identificar pasos cruciales, dificultades y obstáculos en la evolución de un tema; Anacona además de la identificación de dificultades asegura que puede ser fuente para la comprensión de las mismas.

Ahora bien, consideramos que la intencionalidad descrita en este apartado no hace parte de la intencionalidad promoción de competencias profesionales ya que la definición que hace Guacaneme (2010) no precisa cuáles pueden ser las aptitudes y actitudes hacia la docencia y en los ejemplos presentados por el autor se centra la atención en habilidades que no son propias de un profesor de matemáticas sino que atienden a asuntos generales de la profesión como las habilidades de lectura y escritura. De acuerdo a lo anterior y planteando la discusión más que asumiendo una postura definitiva, podría optarse por dos caminos:

a. El primero de ellos que contempla la intencionalidad “generar reflexiones didácticas” como un complemento a la intencionalidad “promoción de competencias profesionales” y por tanto es necesario extender la idea de competencia propuesta por el autor. En este caso, consideramos que la propuesta de Rico (2004) podría enriquecer y sobre todo puntualizar cuáles serían esas habilidades (aptitudes y actitudes) de los profesores y particularmente de los profesores de matemáticas. Evidencia de esta potencialidad de la propuesta de Rico ha sido señalada en los vínculos presentados en el análisis de los datos.

b. El segundo, un poco más radical y que se acerca más a lo presentado en el presente trabajo, contempla que la intencionalidad “promoción de competencias profesionales” se reserve para los asuntos de tipo pedagógico, es decir las habilidades profesionales que no requieren necesariamente de la existencia de un objeto matemático; por su parte la intencionalidad “generar reflexiones didácticas” estaría reservada para los asuntos que además de una habilidad profesional requieran la existencia y el estudio de un objeto matemático.

Además, para las intencionalidades propuestas en Guacaneme (2010): *modificación de las visiones sobre las matemáticas y la actividad matemática* y *modificación de las visiones de los objetos matemáticos* se puntualizaron subcategorías para cada una de ellas de acuerdo a lo sucedido en el curso. Para la primera intencionalidad es posible hablar por separado de la intención de modificar la visión sobre las matemáticas y de forma mucho más particular hablar sobre la modificación de la visión sobre la actividad matemática, si bien puede pensarse que la modificación de una de las dos debería generar cambios en la otra no es posible brindar evidencia empírica de este hecho a partir de lo indagado. Para la segunda intencionalidad que refiere a la modificación de la visión sobre los objetos matemáticos se puede decir que en el curso indagado se abordó desde tres aspectos: la caracterización de los objetos de estudio de la Aritmética y del Álgebra desde una postura histórica, la diferenciación entre aritmética y álgebra y la interpretación personal.

Algunas estrategias de clase. Cómo se promovió el uso de la HM para el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido.

Acerca de *cómo se promovió el uso de la HM*, es posible afirmar que existieron varios momentos de estudio de algunos aspectos históricos del Álgebra con diferentes finalidades. El primero de ellos permitió *la identificación de los objetos de estudio del Álgebra y los de la Aritmética.* En el segundo se realizó un *estudio comparativo entre los objetos de estudio del Álgebra y los de la Aritmética*. Y un tercer momento en el que los *objetos de estudio del Álgebra y de la Aritmética fueron puestos en comparación con desarrollos curriculares del Álgebra* en la escuela. Los momentos no son lineales, se desarrollan de forma paralela y en ellos la reflexión de tipo didáctico es reiterativa por lo que consideramos que no se pretendió un estudio de la HM sino un estudio acerca de la HM en relación con la enseñanza y el aprendizaje. Por otro lado las estrategias que se tienen en cuenta en el espacio académico para involucrar la historia incluyen exposiciones, discusiones, socializaciones, lecturas, mapas conceptuales y cuadros comparativos que relacionan la historia de la aritmética y el álgebra con el currículo escolar.

Para finalizar hay que decir que el trabajo realizado en las tesis permitió el reconocimiento de la HM como un asunto de interés en la investigación sobre el CPPM, que la HM tiene el potencial para desarrollar Conocimiento Didáctico acerca del Álgebra y la Aritmética y que el conocimiento del desarrollo histórico de un determinado concepto puede brindar valiosas herramientas a un profesor para cuestionar el para qué enseñar, por qué enseñar y cómo enseñar. Así mismo, queda mucho trabajo por realizar en el campo de investigación pues como se mencionó los estudios de tipo empírico son escasos y es necesario realizarlos para corroborar, refutar o puntualizar los planteamientos teóricos que se han venido desarrollando en las últimas décadas.

Referencias y bibliografía

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1), 30-46.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). Historical support for particular subjects. En *History in mathematics education: the ICMI Study* (págs. 241-243). Kluwer: Dordrecht.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leader, E. Pehkonen, & G. Torner (Edits.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (págs. 39-57). Suiza: Kluwer Academic Publishers.

Gálvez, A. M., & Maldonado, A. F. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas.* Bogotá: Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT , 2*.

Guacaneme, E. (2011). La historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM*. Recife Brasil.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. , 12(1)*, 67-101.

Manrique, J. F., & Triana, J. A. (2012). *El papel de la Historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de Matemáticas* . Bogotá: Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L., M, B., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J., Katz, V., y otros. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. En *History in mathematics education. The ICMI study* (págs. 143-170).

Rico , L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado,, 8(1).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher , 15* (2), 4-14.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Niss, M., & al, e. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maamen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticos con un enfoque crítico

Maytte Lorena **Fernández** Arteaga
Escuela Bolivariana "10 de Marzo"
Venezuela
maytte_fernandez@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo utiliza el enfoque de la primera etapa de resolución de problemas de Polya, para atender las deficiencias y dificultades que surgen en la comprensión lectora de un problema matemático. Particularmente, la investigación se orienta hacia los estudiantes del nivel de educación primaria, a los fines de que emprender la compresión lectora de un problema matemático, desde un enfoque crítico que permita abordarlo por diferentes caminos y mostrar que todas las soluciones obtenidas son matemáticamente válidas. Además se fundamenta en la teoría, Ausubel, Freire, Polya y Schoenfeld y los trabajos propuestos por Rosenblatt y Morán. La investigación se llevó a cabo en un grupo de estudiantes de 5to grado de la Escuela Bolivariana "10 de Marzo" Estado Vargas, Venezuela. Se mostraran estrategias y ejemplos que permitan afrontar los problemas de una manera distinta, sin temor y apatía, generando cambios de estructura tradicionalistas como la de dato-operación-respuesta.

Palabras clave: Resolución de Problema, comprensiónlectora, pedagogía crítica, soluciones múltiples.

Introducción

Venezuela, durante los últimos diez años, ha respondido a las transformaciones globales, iniciándose cambios cualitativos en la enseñanza, revitalizando la escuela no sólo en su estructura curricular sino también en su relaciones con los diferentes actores que hacen vida en las comunidades, materializando un tipo de planificación con los recursos del medio y con la integración escuela-comunidad, bases primordiales para el desenvolvimiento de la acción educativa.

Es importante destacar, que el estado venezolano sustenta la Educación bajo un nuevo paradigma, donde se concibe al docente como un facilitador de aprendizajes, orientador, mediador, promotor, agente democrático, participativo y respetuoso de los intereses y necesidades de los educandos. Igualmente, visualiza la formación del estudiante bajo un perfil crítico, democrático, participativo, tolerante y científico, es decir, para que adquiera un aprendizaje integral donde se aglutinen competencias que le permiten desenvolverse en la sociedad donde vive. Por tal razón, el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela, se vio en la imperiosa necesidad de transformar y reestructurar la práctica pedagógica a través del Currículo Nacional Bolivariano (CNB) con fundamentación humanista social e histórico cultural, lo cual le permite al niño, niña y adolescente la organización integral del conocimiento.

En este sentido, las escuelas, deben proveer a sus ciudadanos las herramientas necesarias para acceder en forma efectiva a los retos que ella plantea, de allí el Docente está llamado a idear y desarrollar estrategias que optimicen la calidad del proceso educativo para que pueda cambiar, mejorar y hacerse más efectiva y eficiente en el cumplimiento de los objetivos y metas que se asignan a la escuela moderna, sustentada en la necesidad cada vez más apremiantes de desarrollar proyectos integrales, que logren superar las debilidades existentes en los y las estudiantes en las diferentes áreas de aprendizaje, con la finalidad de optimizar la calidad de los estudiantes como futuros talentos humanos.

En busca de dar repuesta al planteamiento anterior, con el Currículo del Sistema Educativo Bolivariano para el Subsistema de Educación Primaria en Venezuela, tiene como uno de sus principios fundamentales la formación: "(…) niños y niñas activos, reflexivos, críticos e independientes;…; con un desarrollo de la comprensión, confrontación y verificación de su realidad por sí mismos y sí misma; con una conciencia que les permita aprender desde el entorno (…)", (MPPE, 2007, P.12). Para ello una de las características que debe poseer un egresado de las Escuelas Bolivarianas es tener habilidades de lecturas interpretativas y críticas, que se potencia con la mediación de las áreas de aprendizaje.

El Subsistema de Educación Primaria atiende a niños y niñas de los seis a doce años de edad, etapa de las operaciones concretas, en donde debe adquirir todo lo necesario para que se consoliden y posteriormente pasar a la fase de las operaciones formales. Surge la interrogante ¿los estudiantes adquieren realmente las habilidades necesarias para pasar a este estadio y desarrollar su potencial completamente? Este trabajo pretende, dar respuesta a esta interrogante, que corresponde a una las características sugeridas en el perfil del egresado de las escuelas Bolivarianas. Haciendo énfasis en la importancia de la compresión lectora, cuando los estudiantes abordan el planteamiento de un problema matemático, que corresponde a la primera etapa de los planes de resolución de problema de Polya (1989), indicando que lo principal de un problema es comprenderlo y para esto es necesario tener una buena comprensión lectora, que le permita visualizar y desglosar el planteamiento para realizar la resolución de problema.

Planteamiento de Problema

Unas de las principales deficiencias y dificultades que enfrentan actualmente los estudiantes del nivel de educación primaria, es que existe una tendencia de abandonar los hábitos de lectura, sustituyéndolos por otras fuentes de información o de recreación, lo que ha repercutido negativamente en su formación integral, dentro y fuera del ámbito educativo formal. Además se encuentra el bajo rendimiento escolar que continúa siendo un problema a resolver. Una de las causas de este problema es el deficiente dominio en los diferentes niveles de la lectura (literal, reorganizacional, interpretativa, Inferencial, crítico-evaluativo) por parte de los estudiantes, produciendo, que no comprendan el planteamiento del problema matemático y por tanto, no le permita avanzar en la resolución.

Por otra parte, tenemos los docentes que no distinguen cual es la diferencia entre un ejercicio y un problema. Un ejercicio por lo general se aplican procedimientos rutinarios, que lo lleva a la solución del mismo, con el objeto de reforzar: teorías, conceptos, procedimientos e incluso algoritmo, entre otras. Un problema son situaciones no cotidianas, que lo obliga hacer una pausa, con el fin de hacer reflexiones de: ¿cómo abordarlo?, ¿cómo buscar un camino entre las múltiples alternativas que existe para resolver un problema? Trayendo como consecuencia: a.- que el docente no busca estrategias o alternativas para atacar esta problemática; b.- frustraciones, bloqueo y apatía hacia la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes, c.- las clases son aburridas, monótonas, por no trabajar la resolución de problema en el contexto diario del estudiante.

Los estudiantes expresaron, que por lo general los docentes anuncian el planteamiento del problema, de la misma manera que un mago anuncia la aparición de un conejo dentro del sombrero de copa, dejando así al estudiantado insatisfechos, como un espectador que observa un acto de magia. Generando, hacia los estudiantes, que conciban la matemática como una materia llena de retos, mitos, creencias y enigmas. Cuando se le preguntó ¿cómo resolver un problema?, los estudiantes sacan la receta mágica dato-operación-respuesta. Produciendo resultados infructuosos en la resolución de problemas. Lo que lleva a detectar que existe una disociación entre la comprensión lectora y el planteamiento de un problema matemático. Considerando lo antes expuestos es importante, redefinir las estrategias de enseñanza en la resolución de problemas, que se expondrán en este trabajo.

Justificación

Esta investigación se justifica, por dos grandes razones: La compresión lectora, surge como un tema principal dentro de la propuesta Curricular del Sistema Educativo Bolivariano del Subsistema de Educación Primaria, para tener niños y niñas, formados con habilidades de lectura interpretativa, con pensamiento crítico, reflexivo, e independiente. Que va de la mano con lo que plantea, el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE) de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), que ha definido a la lectura comprensiva en una macrohabilidad para la vida: “la de interpretar y resolver de manera acertada problemas comunicativos a partir de información escrita situada en diversos textos auténticos”, (UNESCO/SERCE, 2008, pp. 87). Además el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA); la competencia lectora es entendida como “la capacidad que tiene un individuo de comprender, utilizar y analizar textos escritos con objeto de alcanzar sus propias metas, desarrollar sus conocimientos y posibilidades y participar en la sociedad” (OCDE, 2002, pp. 22).Por otra parte la UNESCO en la declaración mundial sobre educación para todos: la Satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje, indica de forma explícita que la resolución de problemas es una las herramientas esenciales para el aprendizaje, (UNESCO, 1990a). El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos de América ha identificado la resolución de problemas como una de las metas más importantes en el aprendizaje de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, 2009).

Österholm, (2005) destaca que la lectura juega un papel importante en la educación matemática, enfocado a resolver problemas; y los textos por lo general se utilizan principalmente como una colección de problema, pero lo contrario no puede suceder, es decir, que un texto no puede ser visto como un problema matemático, pero si puede ser visto como la resolución de tareas. De este modo, la lectura en sí misma también puede ser vista como parte esencial de las matemáticas y la comprensión lectora podría ser incluida de manera más explícita en la educación matemática para resolver problemas.

Fundamentación Teórica.

La comprensión lectora se enmarca en el proceso de elaborar un significado por la vía de aprender las ideas relevantes de un texto y relacionarlas con los conceptos que ya tienen un significado para el lector, como proceso de interacción entre el pensamiento y el lenguaje. Rosenblatt (2002), plantea un modelo teórico que intenta explicar cómo se desarrolla la lectura, que comprende: lector, texto y contexto que están interrelacionados unos con otros. En este sentido la lectura da la posibilidad de una experiencia que se percibe como una actividad transaccional muy compleja, que a medida que avanza, despierta distintas líneas de pensamiento. La teoría transaccional de la lectura, que reconoce la participación indisociable entre el lector, texto y contexto en el acto de leer, que priman los vínculos personales y los aspectos más idiosincrásicos del significado. Es decir, no tiene distinción ni el conocimiento del lector, ni lo que contiene el texto, ya que cuando ambos intersectan se produce un proceso que crea un significado distinto del contenido formal del texto y de los conocimientos previos del sujeto.

Paulo Freire (2008), afirma:

Relación entre texto y contexto. Para entender la importancia y el sentido de esta categoría, es necesario tomar en cuenta que el aprender a leer las letras no implica el desarrollo de la capacidad reflexiva. De igual manera que la sociedad capitalista consagra la separación antinatural entre las funciones de las manos y las funciones propias de 1a cabeza, existe una separación entre el texto y el contexto: el texto se desarrolla como si fuese un ente metafísico, como un discurso abstracto sin vinculación con la realidad. (p.17)

De esta manera, lo expresa Freire, se relaciona muy bien con lo que plantea la autora, Gadotti (2007) afirma: el acto de aprender a leer y escribir no implica por sí mismo desarrollo de la capacidad de reflexión. Una lectura no crítica separa texto y contexto, transformando el texto en un discurso abstracto, sin lazos con la realidad. Por el contrario, leer es pronunciar el mundo, codificarlo para, al final, nos conozcamos internamente. El vínculo entre el acto de leer y la realidad permite que acontezca un proceso genuino de conocimiento, transformador del hombre y del mundo. (p.107).

Morán (2012), plantean tres estrategias interesante, para lograr alcanzar la compresión lectora en matemática y así abordar: (a) la lectura como contenido técnico matemático, (b) la lectura con elementos matemáticos publicados en revista dirigidas a público general, (c) la lectura como texto narrativo cuyo contenido se refiere a la matemática. Se usaran estas tres estrategias para motivar la compresión lectora y así llegar a abordar la comprensión del planteamiento de la primera etapa propuesta por Polya, (1989), y reforzarlas con las que plantea Schoenfeld, (1985), proponiendo que cada problema tiende a emplear heurísticas particulares y sistemas de creencias. Además, Schoenfeld, (1996), señala que existen fuertes analogías entre el desempeño competente en matemática y el desempeño competente en lecto-escritura. Así como no se puede aprender a leer sin aprender a decodificar las palabras, no se puede aprender matemática sin decodificar su lenguaje propio, ni se puede resolver un problema sin comprender su enunciado. Queda muy entrelazado esto, con lo que plantea, Österholm, (2006), que el proceso de lectura, parece algo obvio, y su carencia afecta y limita implícitamente el intento por resolver problemas; en particular analiza una perspectiva, como la comprensión lectora influye notablemente en la solución de problemas, y las enlaza con planes de resolución de problemas de Polya (1989), en particular con la primera etapa de resolución, que tiene que ver con entender bien un problema matemático.

Visto desde la óptica de que para muchos estudiantes, el objetivo de cada clase, es completar todos los ejercicios lo más rápidamente posible, lo que impide utilizar ciertas habilidades que poseen, como por ejemplo, el dibujo, (Meaney&Flett 2006). En este estudio se propuso que los estudiantes dibujaran, como una de las estrategias de lectura, con lo cual, se induce a transformar el texto en representaciones relacionadas con matemáticas. Considerando que un texto se traduce a una palabra, oración, párrafo, imagen, u otras como forma de comprender la lectura. Si se promueve que los estudiantes hablen, escriban, dibujen y comuniquen lo que leen en un texto matemático; se amplía el repertorio de acciones que ayude a los estudiantes a tomar eficazmente decisiones, discutir y razonar sobre las cuestiones de naturaleza matemática contenidas en los textos.

Para detectar el nivel de comprensión lectora de los estudiantes, se usó los resultados expuestos por la investigación de García, (2012), el cual reagrupa cinco niveles de comprensión lectora, propuesto por a.- Català, Català, Molina, & Monclus (2007); b.- Méndez, (2006) c.- Sacristán, (2007). Estos niveles de comprensión lectora abarcan la comprensión: literal, reorganizacional, interpretativa, Inferencial, crítico-evaluativo. Aunque la visión de los autores no denomina cada nivel de la misma forma, cada uno de ellos converge de acuerdo a las características distintas, que permitió concluir de forma global cinco niveles de comprensión lectora.

Metodología empleada

En la primera fase se diseñaron y se aplicaron los instrumentos de recolección de datos, que corresponden para realizar el diagnostico de los estudiantes. En una segunda fase, se le solicito al estudiante que trajera algún tipo de lectura que le pareciera interesante. En la tercera fase se aplicaron tres estrategias propuesta por Moran (2012), para iniciar la compresión lectora, con la intensión de motivarlos a la compresión del planteamiento de problemas matemáticos. En la cuarta fase se desarrollará la comprensión lectora de los problemas matemáticos. En esta última fase corresponde a la observación directa que se aplicara a los estudiantes durante las fases tres y cuatro para realizar, identificar y registrar a los estudiantes durante la fase tres y en la cuarta es durante la resolución de problema para clasificar los estudiantes que usaron estrategias distintas.

Sujeto de estudio. El estudio, se realizó por dos años escolar consecutivos 2011 – 2012 y 2012 – 2013, en una escuela pública, que comprende los turnos de: 7:30 am hasta 3:30 pm. El plantel educativo corresponde a la Escuela Bolivariana “10 de Marzo”, adscrita a la Zona Educativa del Estado Vargas – Venezuela.

Se trabajó con un grupo 30 estudiantes correspondientes a una sección de 5to grado del subsistema de educación primaria, con edad promedio de 9 a 11 años. Se escogió ese grado, porque los estudiantes tienen cierta madures en cuanto a: 1.- poseer ciertas "técnicas" y "habilidades" en la lectura para afrontar textos relacionadas con contenidos matemáticos; 2.- Manejar las operaciones aritméticas que le permita interpretar y extraer información del planteamiento de problemas matemático.

Los Instrumentos. Corresponde a la utilidad de cada uno de las herramientas y las estrategias, que se llevaron a cabo en las cinco fases:

Fase I. El cuestionario de prueba diagnóstico: Se consideró el diagnóstico como uno de los métodos que se utilizan, para indagar en las causas de diversas situaciones. Así conocer las necesidades, carencias o facilidad de los estudiantes para realizar sus diversas actividades, con relación a la comprensión lectora, para abordar planteamientos matemáticos. De allí, la importancia de plantear el diagnostico como una forma que permite evaluar y planificar métodos que asienten como bases para fortalecer las habilidades y potencialidades reflejadas en ellos.

Fase II. Realizar lectura para ser discutida en clase. Se le solicito al estudiante que identificaran lecturas de: revista, periódicos, cuentos, entre otros, que fueran de su interés para ellos y abordar las lectura en clase.

Fase III. Tres tipos de texto impreso: En esta parte se describe el tipo de texto seleccionado como estrategias para abordar la lectura: la Revista Tricolor: es una revista editada por el Ministerio del Poder Popular para la Educación (2008), de Venezuela, desde 1949, con una frecuencia mensual, que va dirigida a los Centros de Recursos para los Aprendizajes, (CRA) de las escuelas públicas con más de 350 números. El Meridianito es una revista editada por El Bloque Dearmas, dirigida a público general, con una frecuencia semanal con más de 1.500 números. La Serie y Guía Aprendo de la Colección Nuevos Lectores, editada por el Banco Centra del Venezuela (BCV), dirigido a público general con la finalidad de estimular la curiosidad y el interés por temas de economía:

a. Con relaciónal contenido técnico matemático: desde una perspectiva atractiva, interesante y motivadora; y con deseos de mejorarla forma de abordar la lectura en los estudiantes, donde determinen su aprendizaje imperando la reflexión–acción. Se incorporó en laplanificación, la Revista Tricolor, ediciones disponibles, en la sección "El baile de las Neuronas", "Cocina con tricolor", para incorporar en el quehacer de los estudiantes con elementos matemáticos, apropiándose de ellos a partir de la lectura, y su interacción contextual de las propuestas.
b. Con elementos matemáticos publicados en revista dirigidas a público general, sumergidos en el afán de fortalecer losprocesos de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes, se consideró El Magazine con el nombre Meridianito.
c. Texto narrativo cuyo contenido se refiere a las matemáticas, suponer como objeto de atracción la Coleccióndel BCV, impartida con una pauta de lectura y actividades que permitan facilitar la comprensión de planteamientos matemáticos, estimulando la curiosidad y el interés de lo que allí se plantea en cuestiones económica.

Fase IV. La resolución de problemas en el aula de clase. En esta fase se plantean problemas matemáticos, para ser discutido en el aula de clase y tratar de identificar el nivel de compresión lectora que manejan los estudiantes después de haber aplicado las estrategias anteriores.

Fase V. Observación directa. Se realizó la observación para identificar y registrar: (a) durante las fases III y IV en que nivel de comprensión lectora se encuentran cada estudiante, de acuerdo a su participación ya sea en el cuaderno, de forma verbal, o participación en la pizarra, entre otras. (b) en la fase IV el número de estrategias en común que usaron los estudiantes para abordar el planteamiento de un problema matemático.

Análisis de Resultados

Los resultados de la prueba diagnóstica arrojaron que más del 60 %, de los estudiantes, tuvieron bajo rendimiento. Porque no se sienten identificados con la lectura, identifican la lectura como aburrida, no le gusta leer, no entienden lo que leen, entre otras. Esto llevo a realizar una concientización de lo que significa la lectura, su comprensión y más aún cuando pueden dar opinión de lo leído.

La problemática arrojada en el diagnóstico, nos compromete cada día más en la búsqueda de herramientas como seres investigadores. Desde una visión colectiva, mediadora y de expansión en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para brindarles los recursos necesarios que proporcionen vías múltiples, y así fortalecer la comprensión de la lectura, vista desde un enfoque crítico del texto y su contexto como asociación permitida en la búsqueda de soluciones del aprendizaje significativo. Convertir la problemática diagnosticada, en una fortaleza, que nos invita a la aplicación de dinámicas motivadoras para generar lluvias de ideas en los estudiantes.

Para esto se motivó, a los estudiantes que ubicaran lectura que les fuera interesante en su casa, para que trajeran al aula de clase, todo esto con la intensión de originar en el estudiante de que su lectura sea interesante y se sintiera protagonista, y así mismo, sean lectura, atractiva, emocionante, entre otras, generando clases participativas en cada estudiantes, y ocasionando debates atrayentes, porque dependiendo de la óptica del estudiante, ellos le daban un matiz distinta, de acuerdo a su cultura, su contexto y su realidad, como es; el aprendizaje significativo propuesto por Ausubel (1978).

En la tercera fase, todos los estudiantes ya estaban motivados, haciendo referencia uno más que otros, de acuerdo a su aprendizaje y sus habilidades, la pluralidad para abordar las mismas. El análisis de las estrategias que se les presentaron a los estudiantes fueron: (a) una lectura técnica referida a una receta de cocina con tricolor, en la cual los estudiantes asociaban cantidades, fracciones y por supuesto los pasos o procedimientos para preparar la receta y asociarlo al resultado final, y verificar si estaba acorde a la receta. Esto trajo como consecuencia, que los estudiantes estuvieran motivados con la lectura y la compresión de la misma. (b) La segunda lectura, presente en la revista para el público general, el Meridianito; se desarrollaron actividades referidas: Armar los ramos de flores, con un precio determinado, que tiene indicado cada tobo, además donde cada flor tiene un precio y el objetivo es armar un tobo con un ramo de flores, considerando el valor de cada flor, al sumar cada flor debe coincidir con el precio del tobo. Esta actividad fue interesante, porque los estudiantes armaban diversos ramos de flores, que coincidieran con el precio del tobo, obteniendo así diferentes ramos de flores al mismo precio. De esta manera se les recalcó a los estudiantes, que no existe, una única manera de resolver un problema, y lo interesante es que matemáticamente todas las soluciones son válidas. Esto corresponde a soluciones múltiples que puede presentar un problema. (c) La última lectura estaba asociado a dos textos de la Colección Nuevos Lectores del BCV, la primera explicaba de una manera muy sencilla, incesante y curiosa ¿que son los bancos? Y la segunda corresponde a la guía de actividades. En esta actividad se enseña a los estudiantes a elaborar una tabla de sus gastos diarios y lo que se gasta cuando se sale a pasear. Esta actividad ayuda al estudiante a realizar operaciones aritmética sencilla, en cuanto a su realidad y su contexto.

En la fase cuatro, correspondió a la resolución de problemas matemáticos en el aula de clase. En esta parte los estudiantes ya tienen cierta experiencia para abordar diferentes situaciones que se les presentará, para abordarlas de una manera matemática y tratar de identificar a posterior el nivel de compresión que tiene el estudiante para enfrentar el planteamiento de un problema.

En estos tipos de situaciones, el planteamiento del problema juega un papel fundamental en la resolución de problemas, donde se pudo observar, en base a la experiencia, la experiencia propuesta por, Rosenblatt y Morán, y se obtuvo como resultados, muchos avances para hacer la interpretación del problema, y lo interesante del trabajo es que se aplicaron las interrogantes que plantea, Polya, para comprender un problema, y se constató con lo que afirma, Schoenfeld, que cada estudiantes emplea heurísticas particulares. Llevando a todos estos estudiantes a plantear el problema a resolver, por diferentes caminos que lo llevan a una misma solución, donde se activa el pensamiento lateral, para aquellos estudiantes que resuelven problemas de una forma original, creativa e ingenua.

La última Fase corresponde a la observación directa, para realizar un registro que permita identificar en los estudiantes, en qué nivel se encuentra, de acuerdo al criterio propuesto por García, (2012). Que se muestra en la siguiente:

Tabla Nº 1.

Estudiante identificado de acuerdo a su nivel de comprensión Lectora en las Fase II y III.

	Nivel de Comprensión				
Año Escolar	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Nivel 5**
	Literal	**Reorganización**	**Comprensión**	**Inferencial**	**crítica**
2011 – 2012	59,94 %	23,31 %	16,65 %	0 %	0 %
2012 – 2013	33,33 %	26,64 %	23,31 %	9,99%	6,66 %

En el segundo registro, se identificó el número de estrategia usadas por los estudiantes en el planteamiento del problema. Durante el año escolar 2011–2012, se usó un tipo de problema similar colocado al año 2012– 2013. Con la única diferencia de que el problema usado en el año escolar 2012– 2013, estaba contextualizado, como se puede mostrar en la siguiente:

Tabla 2.

Estudiantes que usaron diferentes estrategias en la resolución de Problemas.

Año Escolar	Estrategia 1	Estrategias 2	Estrategia 3
	Forma Grafica	Reconocimientos de Patrones	Tabla
2011 – 2012	100 %	0 %	0 %
2012 – 2013	89,91 %	6,66 %	3,33%

Observe que en el año escolar 2011–2012, la mayoría de los estudiantes no usaron estrategias alternativas para resolver el problema y al siguiente año fueron consideradas, porque se contextualizan los enunciados en la resolución de problema y la asocian con experiencias obtenidas para así resolver los problemas.

Estrategias Propuesta

En esta parte, es sumamente primordial, tener en cuenta, las tres primeras fases, antes de abordar la resolución de problema. Se pretende mostrar un problema, que permitirá, observar como los estudiantes realizaron el análisis, en base a su comprensión lectora, realizada en el planeamiento de problema matemático.

Problema 1. En un río hay dos ranas; las ranas se mueven hacia la derecha. Cuando la rana de la derecha salta una piedra la otra salta 2 piedras, esto lo hacen al mismo tiempo. ¿Identifique en que piedra las ranas coinciden? Observe la siguiente imagen 1.

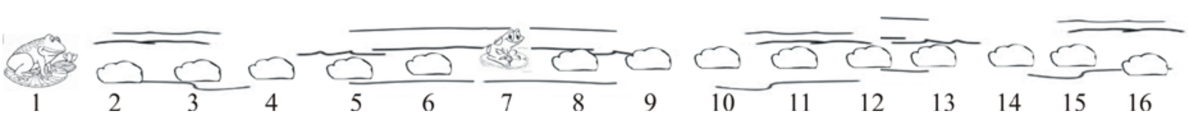


Imagen 1. El salto de rana.

Estrategia 1. La mayoría de los estudiantes hizo uso del recurso gráfico para realizar la modelación y verificar en que piedra, es que coinciden las dos ranas. Ésta es la que cualquier estudiante haría para tratar de encontrar la solución del problema.

Estrategia 2. Esta estrategia, es interesante, porque este estudiante construyó una secuencia para la rana de la izquierda y otra para la que está a la derecha, es decir, asignar a cada rana una secuencia, por cada salto un número que corresponde a la piedra. La secuencia para la rana de la izquierda (ri) sería la siguiente:

$$ri = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots$$

y para la rana de la derecha (rd) le asigno la siguiente serie:

$$rd = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,14, 15, 16, \ldots$$

si colocamos las dos secuencia, una debajo de la otra:

	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	16, ….
rd =	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16, ….

En esta parte, se observa, que las dos secuencia coinciden exactamente en el número 13, queriendo decir, que en ese punto las dos ranas se encuentra, por lo tanto, si se cuenta el número de salto desde el primer número hasta el número 13, se verificará que son seis pasos.

Estrategia 3. En este caso, al estudiante se le ocurrió la brillante idea de darse cuenta, de lo siguientes: x representa un salto. Entonces la rana se encuentra ubicada en la posición uno y posteriormente da dos saltos, es decir, que se puede representar de la siguiente manera:

$$ri = 1 + x + x = 2x + 1,$$

esto determina el movimiento de la rana de la izquierda (ri). Ahora la otra rana de la derecha (rd) es más sencilla, porque si x representa un salto y está ubicada en la posición Nº 7, entonces la rana de la derecha queda representada por:

$$rd= 7 + x = x +7$$

Ahora, las colocó en una tabla y empezó a darle valores hasta que coincidan las dos expresiones:

Tabla 3.

Tabla de evolución de valores.

Valores	Expresión	Resultado
1	$2x + 1 = 2(1) + 1$	3
	$x+ 7= 1 + 7$	8
2	$2x+1 = 2(2) + 1$	5
	$x+ 7= 2 + 7$	9
3	$2x+1 = 2(3) + 1$	7
	$x+ 7= 3 + 7$	10
………..	………………..	…………..
6	$2x + 1 = 2(6) + 1$	13
	$x + 7= 6+ 7$	13

Para que un estudiante llegue a este nivel de razonamiento, es un estudiante muy bueno y hace uso de representar un problema matemático, en un modelo que describa lo planteado, aunque le tomó mucho tiempo hacerlo, y usó herramientas del algebra para llegar a la solución del problema, pero esto coincide, con lo planteado, de que este estudiante vio ésta situación como un problema y no como un ejercicio.

De esta manera se observa que, todos los razonamientos son, totalmente válidos, generando soluciones matemáticamente validas, por cualquier camino que use, con tal, de que los razonamientos sean correctamente lógicos

Conclusiones

Estas estrategias, permiten atender la deficiencia y dificultades, que tienen los estudiantes de grados anteriores, tratando de tener clases participativas, que generen el debate crítico dentro del aula de clases, propiciando el pensamiento reflexivo y generar interés por la resolución de problemas, y así tener estudiantes, competitivos cuando sean promovidos de grado. Se pretende extender este trabajo a las demás Escuelas Bolivarianas del Estado Vargas, en Venezuela, con la intención de brindarle a las docentes herramientas que le permita abordar una clase de matemática de una manera estimulante y crítica.

Manteniendo este cúmulo de ideas, en nuestras diversas formas de planificación de los aprendizajes: Clases Liberadoras, Plan Integral, Proyectos de Aprendizajes y otros que surjan, desde el aprender haciendo. Ello trajo como consecuencia, que los estudiantes participaran e integraran en las actividades, sin temor a escalar en la búsqueda de resolver lo planteado. Aplicaron diversas vías, para obtener la solución a los problemas matemáticos, vistos en algunos casos como un problema, y en otros, como un ejercicio dependiendo del nivel de comprensión y madures para cada estudiante. Visto esto como alternativas para hallar soluciones múltiples. Se expuso un modelo: Observar el problema de las dos ranas ubicadas a seis pasos de distancia.

Se planteó el problema, infiriendo múltiples formas de solución. Podemos concluir después de lo observado en el desarrollo de este tipo de actividad, que los estudiantes fueron capaces de demostrar su criterios alusivos a la interpretación del texto desde la comprensión visual, inferencial y contextual, de lo comprendido en el planteamiento. Demostrando que un problema matemático desde la visión de ejercicio, permitió determinar resultados iguales, a la vía sugerida visto como un problema, considerando múltiples soluciones.

Esto vislumbra a su vez, la posición de Paulo Freire (1991), donde plantea que el estudiante debe hacer una lectura crítica, que tenga una relación del texto y el contexto, la cual coincide con lo que plantea Ausubel (1978), del aprendizaje significativo.

En tal sentido, para ofrecer una amplia gama de opciones, que permitan desarrollar en el estudiante estrategias motivadoras que le faciliten la comprensión de la lectura. Se pueden mencionar: dramatizaciones, ejercicios de escritura, expresión plástica, entre otros. La intención es que los estudiantes sean protagonistas directos de su propio proceso de construcción y producción. De esta forma se van generando vínculos afectivos hacia la lectura; estos serían los cimientos para forjar un lector crítico.

Agradecimientos

La autora del trabajo expresa: El reconocimiento y agradecimiento a la Prof(a). Yehisy Tibisay Nieto, por sus ideas, sugerencias, recomendaciones y correcciones del mismo. Al Prof. Larry Mendoza, quién fungió como facilitador del "*Curso de Formación y Actualización docente en didáctica de la matemática en el nivel de educación primaria",* dirigidos a docentes adscritos a la Zona Educativa del Estado Vargas. Donde se promovió, la formación intelectual y el desarrollo profesional, de los participantes. Con el propósito de incentivar el rol del docente investigador. Así nace este trabajo de investigación, que fue realizado bajo su supervisión, para contribuir de forma sostenida, a los fines mejorar la enseñanza de la matemática, y adaptarla al desarrollo de las ciencias en el siglo XXI.

Referencias

Ausubel, D. A., Novak, J. D., &Hanesian, H. (1978). Educational Psychology: a cognitive view (2nd ed.). Nueva York: Holt, Rinehart, and Winston.

Freire, Paulo (2008). La importancia de leer y el proceso de liberación. México, D. F.: Siglo XXI Editores.

Català, G., Català, M.; Molina, E. y Monclus, R. (2007) Evaluación de la Comprensión Lectora. Pruebas ACL (1-6 grado de primaria). España: Editorial Graó.

García C., G. G. (2012). Comprensión lectora en niños de escuelas primarias públicas de UMÁN. Tesis de maestría en Investigación Educativa. Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán.

Gadotti, M. (2007) La Escuela y el maestro Paulo Freire y la pasión de enseñar. 1ª.Ed. Publisher Brasil. Sao Pablo, Pág.108.

Rosenblatt, L. M. (2002). La literatura como exploración. México: Fondo de cultura económica.

Meaney, T., Flett, K. (2006).Learning to read in mathematics classrooms.The AustralianMathematicsTeacher, 62 (2), 10-16.

Méndez, S. (2006) Comprensión lectora y textos literarios: una propuesta psicopedagógica. Educación. 30(1), 141-155.

Morán H., E (2012). Estrategias de lectura para la comprensión de textos matemáticos. Un estudio en educación secundaria. Memoria del Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la Cultura / IV Congreso Leer.es. Salamanca, España. Recuperado: http://www.oei.es/congresolenguas/comunicacionesPDF/Moran_Erika.pdf

OCDE (2002). Conocimientos y aptitudes para la vida. Primeros resultados del programa internacional de evaluación de estudiantes (PISA) 2000 de la OCDE. México: Santillana.

Österholm, M. (2005).Characterizing reading comprehension of mathematical texts.*Educational Studies in Mathematics*, 63, 325–346.

Österholm, M. (2007).A reading comprehension perspective on problem solving. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning. Proceedings of MADIF 5, the 5th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Malmö, (pp. 136-145). Linköping, Sweden: SMDF. Recuperado el 15 Marzo de 2012: http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:22663/FULLTEXT01.pdf

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas (1ra en Español. 15ta Reimpresión ed.). México: Trillas.

Sacristán, F. (2007) La lectura como instrumento clave en el aprendizaje escolar. Praxis educativa. 2(1), 13-26.

Schoenfeld, A. (1985) Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1996): “La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas”, en: Currículum y Cognición, pp. 141-170. Buenos Aires: Ed. Aique.

Maggi, M.E, Parra D., P. (2006). Qué son los Bancos? Colección Nuevos Lectores: Serie Aprendo. Banco Central de Venezuela: Venezuela.

Maggi, M. E. (2011). ¿Qué son los Bancos? Guía de Actividades. Colección Nuevos Lectores: Guía Aprendo. Banco Central de Venezuela: Venezuela.

MPPPE (2007).Currículo del Subsistema de Educación Primaria. Caracas, Venezuela.

MPPPE (2008). Tricolor. Caracas. Nº 349 Año 64.junio p.32.

National Council of Teachers of Mathematics.(13 de Enero de 2009). Agenda ForAction: Problem Solving. Recuperado el 14 de Enero de 2011, de Standards and Focal Points: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17279.

UNESCO (1990). Declaración mundial sobre educación para todos: la satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje. Recuperado el 15 de julio de 2011 de:http://www.unesco.org/education/efa/ed_for_all/background/jomtien_declaration.shtml

UNESCO (1990a). Proyecto principal de Educación en America latina y el caribe.(Boletín 21). Chile: Oficina Regional de Educación para America latina y el caribe.

UNESCO/SERCE (2008). Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe. Primer reporte de los resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. Santiago: OREALC/UNESCO.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Influencia del software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria

Natalia **Ruiz** López
Facultad de Formación de Profesorado y Educación, Universidad Autónoma de Madrid
España
natalia.ruiz@uam.es

Resumen

En esta investigación se plantean los siguientes objetivos: estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas de los estudiantes de Magisterio con la utilización de GeoGebra respecto al recurso “lápiz y papel”; examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza; y analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital. La metodología seguida en el estudio empírico ha sido un diseño cuasi-experimental que integra los enfoques cuantitativo y cualitativo. Se han obtenido las siguientes conclusiones: el grupo experimental ha obtenido una mejora estadísticamente significativa de sus competencias didáctico-geométricas respecto al grupo control. Además, esta mejora no está influida por el nivel previo de competencia digital de los estudiantes. Las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza mejoran en ambos grupos del postest al pretest, pero no podemos atribuirlo al uso de GeoGebra.

Palabras clave: GeoGebra, geometría, creencias sobre las matemáticas, formación de profesorado, software de geometría dinámica.

Introducción

En España, en los últimos años, se han reformado los estudios de Magisterio en Educación Primaria para adaptarlos al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Esta adaptación ha supuesto una estructuración de las enseñanzas basadas en la adquisición de competencias, básicas y específicas, y en la necesidad de un cambio metodológico que propicie esta nueva forma de aprendizaje. En la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), algunos profesores que hemos impartido durante muchos años la materia de Geometría y su Didáctica hemos reflexionado sobre cómo realizar ese cambio, necesario para facilitar la adquisición de las competencias geométricas que tantos problemas plantea a nuestro alumnado. Este es el origen de la investigación que presentamos aquí.

Sobre las dificultades de la enseñanza de la geometría se lleva investigando mucho tiempo, pero nosotros nos hemos centrado en la contribución del software de geometría dinámica (en adelante, SGD) a la adquisición de competencias geométricas. Nuestra experiencia con esta herramienta nos ha convencido de que su utilización habitual en las clases puede beneficiar a los alumnos en varios sentidos. Los SGD permiten realizar construcciones geométricas dinámicas, en las que se puede experimentar con las figuras y comprobar las relaciones y propiedades que permanecen invariantes cuando las sometemos a movimientos. El “arrastre” de los objetos (dragging) permite realizar generalizaciones y conjeturas que pueden comprobarse más fácilmente que con otros métodos tradicionales. Además, la introducción de un SGD en la enseñanza de las matemáticas produce cambios significativos en el papel del profesor y en el conocimiento que construye el alumno, como muestran algunos estudios realizados por otros autores (Carrillo & Llamas, 2005; Laborde & Capponi, 1994; Murillo & Fortuny, 2003; Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007; García & Arriero, 2000; Laborde, 2001; Siñeriz & Santinelli, 1999).

Muchas de las investigaciones realizadas en formación de profesorado de matemáticas se refieren exclusivamente al nivel de educación secundaria. En España las características de este profesorado son muy distintas de las de los profesores que impartirán matemáticas en el nivel de educación primaria, por eso conviene distinguir ambas poblaciones. Vamos a repasar ahora los resultados de algunos estudios llevados a cabo en este campo:

Güven y Kosa (2008) estudian el efecto que produce Cabri 3D en el desarrollo de la capacidad de visualización espacial de estudiantes de profesorado de matemáticas a partir de una intervención en un entorno de resolución de problemas. Estos alumnos partían de un nivel bajo de visualización espacial y consiguen mejorarlo sustancialmente después de trabajar con Cabri 3D, sobre todo mejoran en las tareas de visualización de rotaciones. Pandiscio (2001) realiza un estudio de casos para evaluar la percepción que tienen futuros profesores de secundaria sobre la necesidad y los beneficios de las demostraciones geométricas formales. Encuentra que los sujetos de la investigación no creen que los estudiantes de secundaria tengan necesidad de realizar una prueba formal después del uso de un SGD, aunque reconocen la diferencia entre la comprobación de una propiedad en múltiples casos y la demostración general. También Jiang (2002) ha estudiado como cambia un SGD, Geometer's Sketchpad en este caso, las concepciones que tienen futuros profesores de secundaria sobre las matemáticas y su enseñanza. Después de seguir un método constructivista de resolución de problemas geométricos, encuentra que los estudiantes mejoran su razonamiento y sus habilidades de demostración de propiedades y teoremas. De igual forma Haja (2005) investiga la competencia en resolución de problemas de cuatro futuros profesores de secundaria, cuando exploran problemas geométricos con Cabri II. Los resultados avalan que han adquirido los conocimientos adecuados de los contenidos geométricos, que son suficientemente competentes para construir las figuras dinámicas, que pueden aplicar sus conocimientos geométricos para conjeturar y que son capaces de usar el SGD para justificar las soluciones encontradas.

Encontramos otras investigaciones sobre el uso de geometría dinámica con profesores en ejercicio, por ejemplo Scaglia (2008) utiliza un marco de investigación-acción para desarrollar un taller de GeoGebra con profesores de primaria, dentro de un curso de capacitación profesional. Se describen los factores que condicionan la gestión de la clase por parte del profesor cuando se utiliza un SGD y se analizan las actividades propuestas en el taller. La reflexión final invita a profundizar en la formación inicial y continua del profesorado, ya que el uso de SGD en la escuela no sólo cambiará las relaciones entre el aprendiz y su entorno simbólico, sino también las relaciones entre el profesor y su entorno de trabajo (Balacheff, 2000).

En cuanto a formación inicial de profesores de primaria, encontramos varias publicaciones en el seno del grupo de investigación *Aprendizaje de la Geometría* de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). El profesor Ricardo Barroso expone una investigación realizada desde el paradigma de investigación-acción donde analiza si el uso de Cabri II ayuda a la comprensión de propiedades geométricas en un entorno de resolución de problemas con futuros maestros de Primaria. Se detiene en la elección de los problemas que deben cumplir varias condiciones: que se resuelvan realizando una construcción (no un dibujo), que el enunciado sea sencillo aunque con aspectos novedosos para los resolutores, que se puedan elaborar distintas estrategias de resolución y que permitan desarrollar aspectos importantes del análisis geométrico como la descomposición, recomposición, síntesis geométrica, comprobación inductiva, etc. (Barroso, 2003; Barroso, 2004)

Vemos que aunque no hay muchos estudios referentes a la formación inicial del profesorado de Primaria, pueden extrapolarse algunas conclusiones de los realizados con futuros profesores de secundaria. Aunque debemos tener cuidado porque, como ya hemos dicho, la formación inicial del profesorado en ambas etapas es muy diferente en España: mientras que los profesores de secundaria reciben una formación muy intensa en contenidos matemáticos, los futuros maestros tienen una formación mucho más limitada en conocimientos disciplinares y en cambio desarrollan los didácticos (generales y específicos) de forma más extensa que los profesores de secundaria. Por lo tanto, creemos que nuestra investigación es relevante y puede aportar información sobre aspectos relacionados con la adquisición de competencias didáctico-geométricas y el uso de SGD en estudiantes de magisterio (Ruiz-López, 2012).

Metodología

El problema que se pretende abordar es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en la formación inicial del profesorado de Primaria. Para ello nos hemos planteado los siguientes objetivos:

1. Identificar las competencias geométricas que deben desarrollarse durante la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.
2. Analizar cuáles de estas competencias pueden mejorar con el uso de GeoGebra.
3. Diseñar una investigación que permita estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas con la utilización de GeoGebra respecto al recurso “lápiz y papel”.

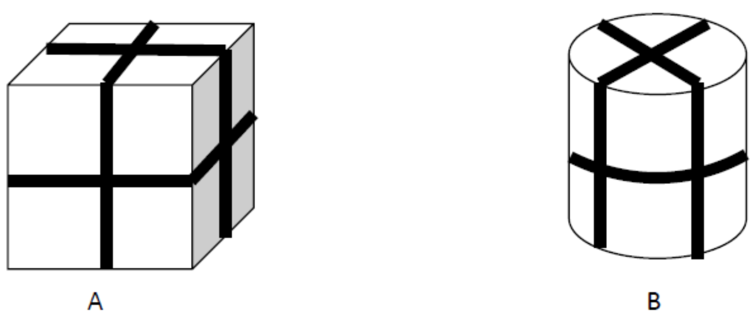
4. Examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de los estudiantes de Magisterio.
5. Analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital.

Hemos estructurado la investigación, de forma clásica, dividida en dos partes: la primera corresponde al estudio teórico que nos ha permitido responder a los dos primeros objetivos planteados.

Como marco teórico se ha utilizado el estudio TEDS-M[1] (*Teacher Education Study in Mathematics*) que supone la primera comparativa internacional sobre adquisición de competencias matemáticas y análisis de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza entre futuros profesores. Este estudio nos ha servido de base para la realización de las pruebas que hemos utilizado en nuestra investigación cuantitativa. Se ha usado un cuestionario formado por 9 ítems de conocimientos didáctico-geométricos y 31 ítems de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza, liberados de TEDS-M. En la Figura 1 podemos observar los ítems 6 y 7 de la parte didáctico-geométrica.

Además, la teoría de la instrumentación (Verillon & Rabardel, 1995) nos ha servido de marco teórico para el análisis cualitativo que hemos realizado en el estudio de casos.

6- Dos cajas de regalo se atan con una cinta como muestra la figura. La caja A es un cubo de 10 cm de lado. La caja B es un cilindro con diámetro y altura de 10 cm cada uno.



¿Qué caja necesita una cinta más larga? Explica cómo has llegado a tu respuesta.

7- Cuando el profesor H. enseña a sus alumnos por primera vez la medida de longitudes, empieza pidiendo a los niños que midan la anchura de su libro usando primero clips y luego lápices.
Escribe **DOS** razones que expliquen por qué prefiere este método en vez de enseñarles directamente a usar una regla.

Figura 1. Ejemplos de ítems didáctico-geométricos liberados del estudio TEDS-M

[1] La presentación pública oficial del TEDS-M se encuentra en http://teds.educ.msu.edu. La página de TEDS-M España es http://www.ugr.es/~tedsm/

Estudio cuantitativo

La segunda parte de la tesis aborda el estudio empírico mediante el cual se diseña, primeramente, la investigación (objetivo 3) y se analizan los objetivos 4 y 5. Estos objetivos pueden formularse como problemas de investigación en los siguientes términos:

P1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

P2- ¿Favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

P3- ¿Cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado con GeoGebra, el nivel de competencia digital del alumnado?

El estudio realizado para responder a estas preguntas ha consistido en un diseño quasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente (muestreo disponible con grupos ya formados). Se han elegido, dentro de la población de estudiantes de 2º curso del grado de Magisterio en Educación Primaria de la UAM, dos grupos a los que se asignó aleatoriamente ser el grupo experimental y el grupo control. La muestra participante en la investigación ha estado formada por 100 alumnos (51 en el grupo experimental y 49 en el control).

En el grupo experimental se ha realizado una evaluación previa para realizar categorías según su nivel de desarrollo en competencias geométrica (pretest) y digital. Se han utilizado instrumentos de evaluación estandarizados (TEDS-M) para medir la competencia geométrica y otros ad hoc para medir la competencia digital.

La intervención sobre el grupo control ha sido análoga a la del grupo experimental, salvo por el uso del software GeoGebra. Mientras que los estudiantes del grupo experimental resolvían problemas de geometría con este SGD, los alumnos del grupo control los realizaban utilizando el recurso tradicional lápiz-papel. Además, la profesora ha sido la misma para ambos grupos, con intención de controlar esta variable, y todos los estudiantes han realizado idénticas actividades y pruebas de evaluación.

El Taller de GeoGebra (Ruiz-López, 2013) se realizó de octubre a diciembre de 2010, dentro del horario oficial de clases, en sesiones semanales de 90 minutos desarrolladas en el aula de informática. Se ha trabajado en parejas estables y se han realizado 14 prácticas de resolución de problemas de geometría y medida.

Resultados obtenidos. Para analizar los datos obtenidos en el estudio cuantitativo se ha realizado un análisis estadístico descriptivo de la variable Mejora Total, que es la diferencia de puntuaciones para cada alumno en la prueba de competencias geométricas y didácticas entre el postest y el pretest, y la variable Mejora CR, que es la mejora en la prueba de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. Para estas dos variables hemos estudiado las tablas de frecuencias, los estadísticos descriptivos (media, mediana, moda, desviación típica, asimetría, curtosis y percentiles), diagramas de caja e histogramas con ajuste normal, para el grupo experimental y el grupo control. También hemos realizado un análisis descriptivo de la normalidad. Además, hemos realizado un estudio descriptivo más exhaustivo de cada ítem de la prueba de competencias geométricas y didácticas.

En el análisis estadístico inferencial de P1 y P2 decidimos utilizar dos ANCOVA, considerando como covariable la medida del pretest de cada una de las variables dependientes. Para ello utilizamos el paquete estadístico SPSS 17.0, eligiendo el Modelo Lineal General (MLG) Univariante. Además, se realizó el MLG de Medidas Repetidas con cada variable dependiente para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil (figuras 2 y 3) nos permiten comparar los grupos experimental y control y analizar las interacciones.

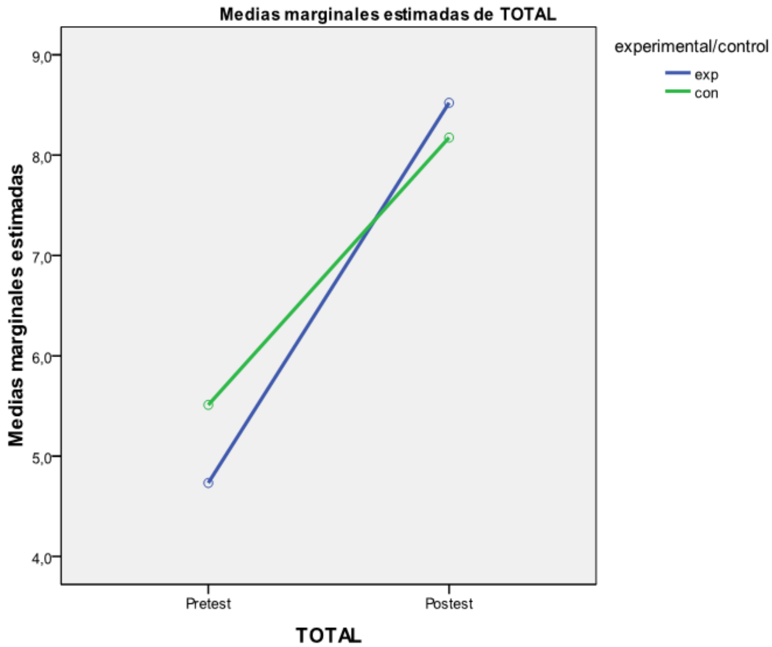


Figura 2. Gráfico de perfil del problema P1

Analizando los resultados para el problema P1, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest y el postest en ambos grupos (sig = 0.000). Además, hay diferencias significativas según el grupo, experimental o control (sig=0.037<0.05). Por lo tanto, podemos concluir afirmando que *la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, frente al recurso lápiz-papel*.

Si realizamos el ANCOVA a la variable CR para responder a la pregunta formulada en P2, vemos que hay diferencias significativas entre los resultados del postest y del pretest (p-valor 0.000< 0.05), pero independientemente del grupo (sig = 0.421). Por lo tanto, la respuesta a este problema de investigación es que *el uso de GeoGebra no favorece significativamente el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso lápiz-papel*.

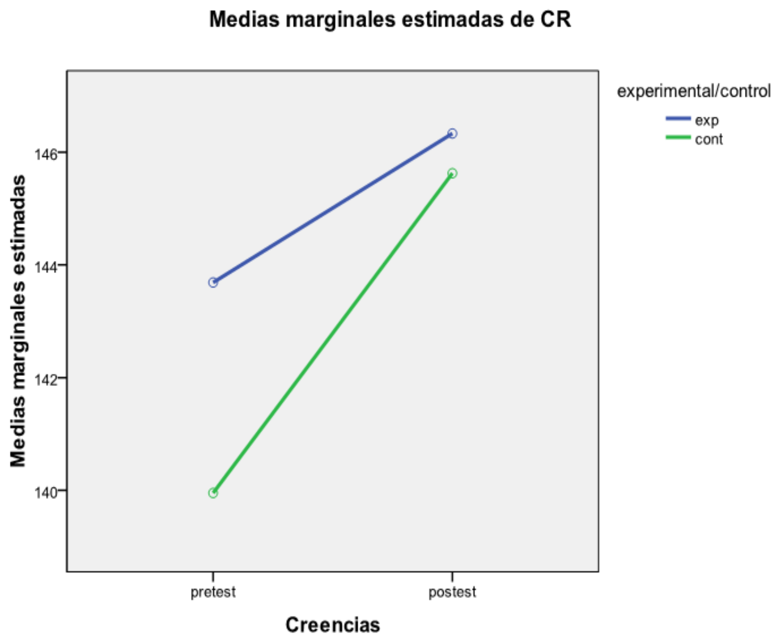


Figura 3. Gráfico de perfil del problema P2

Para responder al problema secundario P3, se realizó un ANCOVA considerando como factor el nivel previo de competencia digital de los alumnos del grupo experimental: alto y medio. En la Figura 4 podemos observar el comportamiento medio de ambos grupos y su evolución desde el pretest al postest.

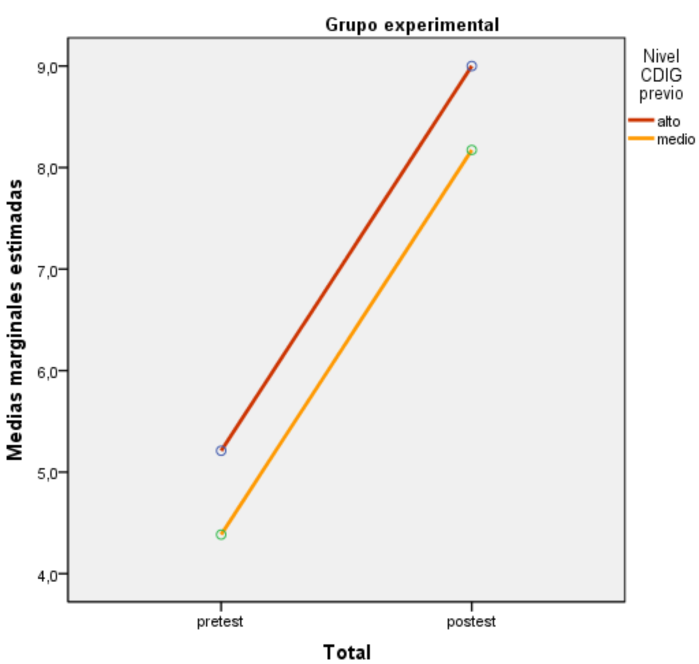


Figura 4. Gráfico de perfil del problema secundario P3

Analizando la variable Total, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest y el postest, sig = 0.000. Sin embargo, no hay diferencias significativas según el nivel de competencia digital previo (sig=0.490 > 0.05). Esto nos permite afirmar que e*l nivel de competencia digital del alumnado no influye significativamente en su desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado por GeoGebra.*

Estudio cualitativo

Para apoyar y dar más significado a estos resultados cuantitativos, se ha realizado además un estudio de casos. Las parejas participantes se han elegido teniendo en cuenta los niveles previos de competencia geométrica y de competencia digital de los dos miembros de la pareja. Las cuatro parejas elegidas para este estudio realizaron una prueba que consistió en la resolución de un problema de construcción de figuras, conjetura e investigación. En la Figura 5 vemos el enunciado del problema planteado y una posible construcción realizada con GeoGebra.

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono regular", construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? (Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul).
2. ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior?

Realizad las construcciones anotando todos los pasos que habéis seguido (incluso los que habéis borrado).

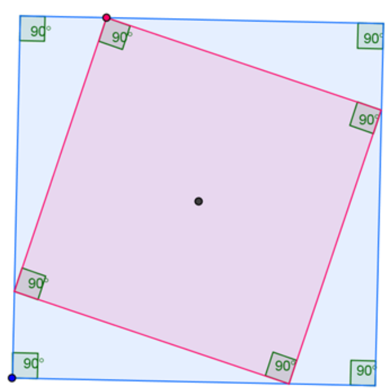


Figura 5. Problema del estudio de casos y posible construcción para resolverlo

Los instrumentos de recogida de datos utilizados fueron:

- El protocolo de construcción de las figuras obtenido del archivo de GeoGebra de cada pareja
- El auto-protocolo escrito de cada pareja con el proceso de resolución del problema
- Las grabaciones en vídeo de las interacciones entre la pareja y la profesora

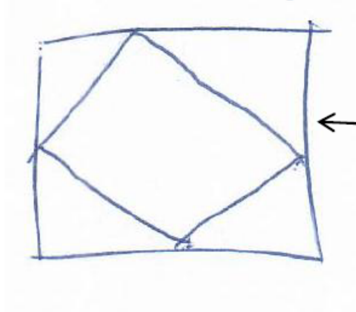
Toda esta información se integró en un registro que permite reconstruir el proceso de resolución del problema seguido por cada pareja (ver Figura 6).

El análisis se realizó bajo una perspectiva interpretativa en la que se tuvieron en cuenta diversos aspectos cognitivos y procedimentales. Los resultados se han recogido en tablas donde se caracterizan las técnicas utilizadas, los tipos de arrastre, los obstáculos encontrados, las interacciones entre los miembros de la pareja y de éstos con la profesora y el nivel de propiedad del lenguaje geométrico utilizado en los auto-protocolos escritos. A partir de estas tablas se ha analizado el proceso de génesis instrumental llevado a cabo en cada caso objeto de estudio, interpretando los resultados mediante los criterios que nos ofrece la teoría de la instrumentación que nos sirve de marco teórico.

Sesión estudio de casos. Pareja 25: Helena y Lorena

Helena maneja el ordenador y Lorena lee el enunciado. Empiezan la construcción:
H: ¿polígono regular?
L: Sí, azul
H: vale
L: ¿podéis inscribir dentro de él otro cuadrado rojo? Yo me supongo que será…
H: ¿quieres una hoja?
L: si éste es el cuadrado, que sea así (Lorena hace un dibujo en una hoja de papel)

Comentarios de la investigadora (negro)



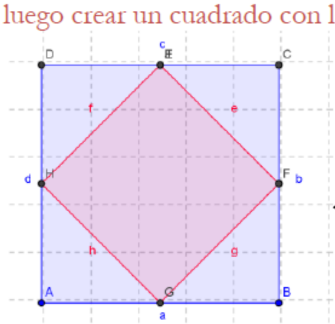
Dibujos realizados por las alumnas en papel

Diálogos entre las estudiantes (azul)

H: yo también lo pienso. Para esto lo que yo hice en una práctica fue hallar los puntos medios de cada lado y…
L: y hacer segmentos
H: y hacer… ¡no!..., claro
L: luego unir segmentos…
H: bueno, no sé si hacer segmentos o hacer también como esto de 4 para que te quede junto, ¿me entiendes?
L: sí, que en vez de hacer segmentos, como tenemos los puntos, hacer un polígono regular
H: claro
L: pues venga, vamos
H: tienes que escribirlo
L: ¿qué pongo?
H: pues pon lo que hemos dicho

Helena va realizando la construcción en silencio, mientras Lorena escribe el auto-protocolo:
1. Para hallar el cuadrado inscrito, vamos a hallar el punto medio de cada lado del cuadrado y luego crear un cuadrado con la herramienta "polígono regular"

Narración de las alumnas del procedimiento de resolución (rojo)



Construcciones de GeoGebra de las estudiantes (imágenes)

Figura 6. Fragmento del registro de la pareja número 25

Conclusiones

Después de realizar el análisis de los datos del estudio cuantitativo podemos concluir que los estudiantes participantes en la investigación han mejorado sus competencias geométricas y didácticas significativamente, por lo que el proceso formativo llevado a cabo en la intervención realizada con los dos grupos (experimental y control) ha resultado eficaz. Además, hemos visto como los alumnos del grupo experimental han mejorado de forma estadísticamente significativa respecto a los alumnos que no han empleado GeoGebra en la resolución de problemas geométricos, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel (que a priori favorecería a los estudiantes del grupo control). En todos los ítems de la prueba de conocimientos didáctico-geométricos, el porcentaje de alumnos del grupo experimental que han obtenido mejores resultados en el postest respecto del pretest es mayor que el porcentaje de alumnos del grupo control.

Respecto al segundo problema de investigación, hemos visto que las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza mejoran en ambos grupos del pretest al postest, pero no podemos explicar esta mejora por el uso de GeoGebra. En este caso debemos seguir estudiando qué factor es el más influyente en el cambio de creencias.

En cuanto al tercer problema planteado, podemos decir que la mejora en las competencias didáctico-geométricas de los alumnos del grupo experimental no está influida por su nivel previo de competencia digital. Es decir, GeoGebra es una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de alumnado, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos. Esto puede explicarse por el carácter intuitivo del software y porque la intervención llevada a cabo con él ha sido suficiente para llegar a convertirse en un verdadero instrumento para los alumnos (en el sentido de la teoría de la instrumentación).

Otras conclusiones obtenidas a partir del estudio de casos y de las opiniones recogidas a través de una encuesta sobre GeoGebra se pueden resumir del siguiente modo:

La conducta de los sujetos en el proceso de resolución del problema muestra que hay un intento deliberado de utilización de conocimientos geométricos trabajados previamente, pero que no tienen acotado el campo de validez o utilidad de dichos conocimientos. Una implicación didáctica inmediata de este hecho es la necesidad de trabajar las tareas matemáticas no como ejercicios aislados, sino como sistemas de tareas que cubran el amplio campo de problemas donde surge y es de aplicación el objeto matemático a desarrollar.

Hemos detectado dos tipos de obstáculos en la resolución de la tarea: técnicos y geométricos. Para superar los obstáculos técnicos sólo se necesita un trabajo con GeoGebra continuo y prolongado en el tiempo. En cuanto a los geométricos, creemos que algunos errores pueden deberse al uso inadecuado de algunos términos (no tienen un buen nivel de desarrollo del lenguaje geométrico) que les induce a elegir herramientas de GeoGebra inapropiadas. Además, algunos alumnos muestran tener un conocimiento ostensivo de las figuras geométricas (las definen por su forma y su dibujo en el plano) y parecen olvidar alguna de sus propiedades. Es muy interesante observar cierta tendencia de los sujetos a considerar que GeoGebra, como instrumento de trabajo, les va a resolver la tarea directamente. Por eso es importante plantear problemas donde los estudiantes deban poner en juego sus conocimientos geométricos.

En el estudio de casos hemos visto que las parejas heterogéneas se han repartido los roles: casi siempre una persona se encargaba del manejo del SGD mientras la otra asumía la redacción del auto-protocolo, aunque en algún caso se iban intercambiando. La colaboración entre los miembros de la pareja ha resultado fundamental para conseguir llegar al final del proceso. Además, el papel de la profesora ha sido determinante en la parte de generalización del problema y en la elección de las técnicas y procedimientos seguidos por los integrantes del estudio.

Los estudiantes reconocen que GeoGebra a veces les resulta difícil de usar pero que, a cambio, les ayuda a "ver mejor". Añaden que es más fácil comprobar el resultado con GeoGebra que con lápiz y papel. Además, opinan que es un buen recurso para la enseñanza de la geometría en Primaria.

Aportaciones de la investigación

A modo de resumen, creemos que este estudio puede ayudar a los profesionales de la formación de profesorado para integrar en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría un software de geometría dinámica como GeoGebra. Además:

- El proceso formativo puede servir de modelo para otras asignaturas de la misma titulación.
- Aporta más resultados al estudio internacional TEDS-M.
- Muestra que el uso de GeoGebra mejora la adquisición de competencias didáctico-geométricas en todo tipo de alumnado, sin importar su nivel de competencia digital.
- Desarrolla una metodología útil para el análisis de procesos de resolución de problemas con SGD (estudio de casos).

Referencias y Bibliografía

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: Complejidad didáctica y expectativas. In N. Gorgorió, J. Deulofeu & A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 93-108). Barcelona: Graó.

Barroso, R. (2003). Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. Una justificación. *Investigación En Educación Matemática : Actas del VII Simposio De La SEIEM,* Granada. 139-152.

Barroso, R. (2004). Estado actual de la investigación sobre el "estudio sobre la influencia del software de geometría dinámica en la visualización y descubrimiento de propiedades geométricas". *Actas Del VIII Simposio De La SEIEM,* La Coruña. (8) 1-9.

Carrillo, A., & Llamas, I. (2005). *Cabri Géomètre II plus una aventura en el mundo de la geometría*. Madrid: Ra-Ma.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317-333.

García, I., & Arriero, C. (2000). Una experiencia con Cabri: Las curvas cónicas. *Suma,* (34), 73-80.

Haja, S. (2005). Investigating the problem solving competency of pre service teachers in dynamic geometry environment. *29 Th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Melbourne, Australia. *3,* 81-87.

Jiang, Z. (2002). Developing preservice teachers' mathematical reasoning and proof abilities in the geometer's sketchpad environment. *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Columbus, Ohio. 717-729.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique. *Recherches en Didactique del Mathématiques, 14*(12), 165-210.

Murillo, J., & Fortuny, J. M. (2003). Interactividad en la red con actividades Cabri. *Contextos Educativos, 6-7*, 295-315.

Ruiz-López, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Ruiz-López, N. (2013). Uso integrado de moodle y GeoGebra en la enseñanza de la geometría. *Contexto & Educaçao, 88.* (en prensa)

Scaglia, S. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. *Revista Electrónica De Investigación En Educación En Ciencias, 3*(1), 35-50.

Siñeriz, L., & Santinelli, R. (1999). El uso didáctico del Cabri: Implicaciones. *Suma*, (30), 97-102.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Intercâmbio Acadêmico entre Brasil e Estados Unidos: Leopoldo Nachbin - bolsista da Fundação Rockefeller

Lucieli Maria **Trivizoli**
Universidade Estadual de Maringá
Brasil
lmtrivizoli@uem.br

Resumo

O presente trabalho faz parte Projeto de Pesquisa “Identificação de Influências Estadunidenses na Matemática no Brasil” que vem sendo desenvolvido na Universidade Estadual de Maringá - Paraná, no Brasil. A pesquisa caminha no sentido de identificar os matemáticos brasileiros que fizeram parte da fase inicial do intercâmbio acadêmico entre Brasil e Estados Unidos por meio de bolsas de estudos concedidas por fundações privadas (Fundação Rockefeller, Fundação Guggenheim e Comissão Fulbright) no período de 1945 a 1980. A partir da documentação obtida por meio da consulta aos arquivos no Rockefeller Archive Center, em New York, pretendemos apresentar alguns aspectos da fase inicial do intercâmbio acadêmico entre Brasil e Estados Unidos e descrever dados de documentos referentes a um dos bolsistas da Fundação Rockefeller.

Palavras-chave: história da matemática, história da matemática no Brasil, intercâmbios científicos, Fundação Rockefeller.

Introdução

Este trabalho pretende apresentar alguns aspectos da fase inicial do intercâmbio acadêmico entre Brasil e Estados Unidos por meio de bolsas de estudos concedidas por fundações privadas (Fundação Rockefeller, Fundação Guggenheim e Comissão Fulbright) no período de 1945 a 1980. Destacamos a atuação da Fundação Rockefeller ao fornecer bolsas de estudos para matemáticos brasileiros e apresentaremos uma descrição de documentos referentes a um dos bolsistas da referida instituição.

O campo científico matemático no Brasil passou por um período de formação que contou com a dinâmica de encontros com diversas culturas (D'AMBROSIO, 2008) e com outros centros matemáticos. A dinâmica desses encontros e intercâmbios e ainda a atuação de fundações estadunidenses nos países da América Latina expressam a existência de uma rede de comunicação entre os cientistas desses países. Essa atuação pode ser associada à política da "boa vizinhança", iniciada no governo de Franklin D. Roosevelt, presidente dos EUA, eleito em 1932.

O matemático George D. Birkhoff, da Universidade de Harvard, foi um dos primeiros cientistas a se envolver com essa ideia (PARSHALL, 2009). Birkhoff abraçou a causa pela Matemática na América Latina, proferindo conferências sobre o assunto nas principais instituições que agregavam os matemáticos estadunidenses: a American Mathematical Society e a Mathematical Association of America. Birkhoff orientou sobre a necessidade de estreitar os laços com os matemáticos na América do Sul, assim como enriquecer as bibliotecas matemáticas nesses países por meio de doações institucionais e ainda propiciando a abertura das revistas matemáticas estadunidenses para artigos de autores latino-americanos (ORTIZ, 2003), além de oferecer bolsas de estudos para latino-americanos por meio de fundações estadunidenses.

Birkhoff estimulou visitas subsequentes de outros matemáticos estadunidenses para países latino-americanos, como por exemplo, seu antigo aluno, e então colega em Harvard, Marshall H. Stone (1903-1989). Stone se destacou nesse período com grandes realizações para a efetiva participação da comunidade matemática estadunidense no cenário internacional. Stone afirmava que as barreiras entre as nações deveriam ser quebradas a fim de incentivar um livre intercâmbio de profissionais em atividade intelectual, permitindo um deslocamento mais fácil e uma grande interseção de ideias; em segundo lugar, seria mais proveitoso levar latino-americanos para os EUA do que enviar matemáticos estadunidenses para outros países (PASHALL, 2009). Com o estímulo de fundações privadas, as relações científicas nas Américas foram promovidas a partir do final da década de 1930 e da década de 1940.

A Fundação Rockefeller

A Fundação Rockefeller (FR) foi criada em 1913 seguindo o espírito filantrópico da família Rockefeller, iniciado por John Dawson Rockefeller, com ações de caridade. O Programa de bolsas começou a ser oferecido a partir de 1917 e, ao expandir sua atuação, atingiu uma escala global a partir dos anos 1920. As bolsas eram atribuídas a pessoas dispostas a estudar fora de seu país de origem, tendo a duração de um ou dois anos, normalmente. As doações seguiam critérios bem definidos: a instituição recebedora do candidato à bolsa deveria ser autônoma financeiramente e ainda ter relevância diante da comunidade.

A atuação da Fundação Rockefeller está associada à filantropia científica, que Marinho (2004) define como:

> área que pode ser definida como um conjunto de estratégias formuladas e implantadas com o objetivo de estimular o desenvolvimento de disciplinas e instituições científicas específicas, seja pela concessão de bolsas individuais atribuídas a diferentes especialidades, seja pela destinação de recursos em grande escala para laboratórios, universidades ou grupos de pesquisa.

A presença da Fundação Rockefeller no Brasil tem sido estudada mais frequentemente em sua vertente de apoio às campanhas de Saúde Pública e na instalação de infraestrutura de combate às doenças endêmicas, ainda que o envolvimento da Fundação Rockefeller com a comunidade científica em São Paulo não se limita à associação com a Faculdade de Medicina. Segundo Marinho (2001), em 1915 formou-se uma comissão que se dirigiu à América Latina para estudar as condições sanitárias e a organização do ensino médico. O projeto da Fundação Rockefeller baseava-se na identificação e apoio a membros da elite científica local que atuariam como parceiros da Fundação. Sua atuação se iniciou na área de ciências médicas sendo responsável, na década de 1920, pela reformulação da estrutura na Faculdade de Medicina de São Paulo, seguindo o modelo da Fundação. O novo regime da estrutura acadêmica contava com tempo integral e número reduzido de 50 vagas na escola. A estrutura das disciplinas se daria em departamentos com ênfase em trabalhos de laboratório, o que institucionalizou a dedicação exclusiva à pesquisa e à docência.

Entre os anos de 1930 e 1940 foi acrescentada uma nova meta ao lema ‘promover o bem da humanidade’ da FR: promover o progresso científico. Dessa maneira, a produção do conhecimento científico era objetivo geral da FR, momento em que o apoio à pesquisa científica foi crescente, com consequências diretas no panorama científico brasileiro. Assim, pode-se dizer que o volume de recursos destinados às ações de filantropia científica teve um impacto local sobre a atividade e sobre a comunidade científica. Citando Marinho (2001):

> Pela análise, percebo a Fundação Rockefeller como uma força interveniente dessa presença norte-americana. Entendo a Fundação como uma agência internacional com poderes modeladores sobre instituições locais que atuou livremente e buscou seu espaço de intervenção na área científica, logrando obter resultados na implantação de modelos de ensino e pesquisa em áreas estratégicas como a física e a genética (p.33).

A partir desse novo lema, a Fundação Rockefeller começou a apoiar grupos de pesquisa em outras áreas, incluindo a Matemática, além das ações direcionadas ao ensino médico. As instituições contempladas com recursos da fundação deveriam oferecer contrapartidas locais às doações recebidas e, por isso, para a FR a escolha dos parceiros deveria ser adequada, já que exerceriam localmente um papel vital na consecução dos seus objetivos.

Documentos do arquivo individual de Leopoldo Nachbin na Fundação Rockefeller

A partir da documentação obtida por meio da consulta aos arquivos no Rockefeller Archive Center, em New York, destacamos a atuação da Fundação Rockefeller ao fornecer bolsas de estudos para matemáticos brasileiros. Da relação obtida, destacamos os bolsistas brasileiros que eram da área da Matemática: Maurício Matos Peixoto, Omar Catunda, Elon Lages Lima, Luiz Henrique Jacy Monteiro, Leopoldo Nachbin, Carlos Benjamin de Lyra e José Pedro da Fonseca (TRIVIZOLI, 2011). Apresentamos, neste trabalho, uma descrição de documentos referentes a um desses bolsistas: Leopoldo Nachbin.

Leopoldo Nachbin se formou em 1943 em Engenharia na Universidade do Brasil (posteriormente Universidade Federal do Rio de Janeiro), no Rio de Janeiro, onde vinha atuando como Auxiliar de Ensino na disciplina de Cálculo Infinitesimal. Em 1948 prestou concurso de Livre-Docente em Matemática na mesma Universidade, na área de Análise Matemática. Tornou-se professor na Universidade Federal do Rio de Janeiro, Professor Titular do Centro Brasileiro de

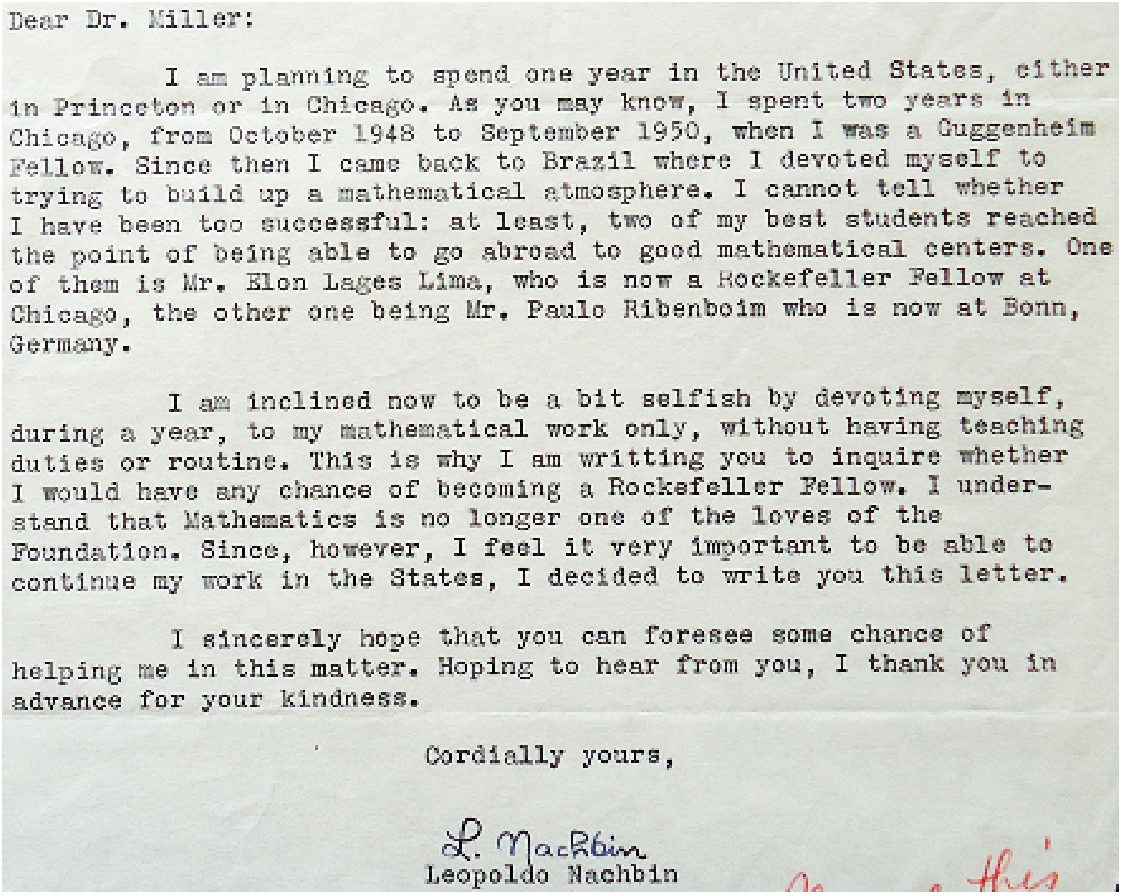
Pesquisas Físicas (CBPF) e pesquisador no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Também foi indicado como chefe da Divisão de Pesquisa em Matemática no Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) do Brasil[1].

Devido a visitas de professores estrangeiros em Universidades no Brasil, Nachbin teve contato com vários matemáticos destacados da época. Podemos citar, por exemplo, Gabrielle Mammana, Luigi Sobrero, Antonio Monteiro, Andre Weil, Jean Dieudonné, Andrian Albert, Marshall Stone e Warren Ambrose. O contato com esses matemáticos influenciou os temas de interesse e o estilo matemático de Nachbin.

Pelas condições criadas a partir destes contatos, Nachbin permaneceu nos EUA, na Universidade de Chicago, a partir de Setembro de 1948, com bolsa do governo estadunidense (USA State Department) e com bolsa da Fundação Guggenheim. Ficou por dois anos como pesquisador associado e retornou ao Brasil em Setembro de 1950. Foi no final de sua estada, no Congresso Internacional de matemáticos, em Harvard, que conheceu pessoalmente o matemático francês Laurent Schwartz (ocasião em que Schwartz recebia a Medalha Fields).

Em uma carta[2] de 20 de junho de 1955 endereçada a Harry M. Miller[3] (Figura 01), Leopoldo Nachbin aponta que estava de dedicando a construir uma atmosfera matemática no Brasil e destaca dois de seus alunos, Elon Lages Lima e Paulo Ribenboim, que estavam realizando estudos no exterior naquele momento. Na mesma carta, assinala sua intenção de passar um ano nos Estados Unidos se dedicando ao trabalho matemático de seu interesse, sem os deveres rotineiros de aulas e pergunta sobre a chance de se tornar um bolsista da Fundação Rockefeller, mesmo sabendo que a Matemática não é um dos principais focos da Fundação.

[1] Coleção Leopoldo Nachbin. (1982). *Notícia sobre Leopoldo Nachbin*.
[2] CARTA de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 20 Junho de 1955, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.
[3] Harry Milton Miller (1895-1980) foi administrador da Divisão de Ciências Naturais da Rockefeller Foundation (1932-1934), Diretor Assistente (1934-1946) e Diretor Associado (1946-1950).



Dear Dr. Miller:

I am planning to spend one year in the United States, either in Princeton or in Chicago. As you may know, I spent two years in Chicago, from October 1948 to September 1950, when I was a Guggenheim Fellow. Since then I came back to Brazil where I devoted myself to trying to build up a mathematical atmosphere. I cannot tell whether I have been too successful: at least, two of my best students reached the point of being able to go abroad to good mathematical centers. One of them is Mr. Elon Lages Lima, who is now a Rockefeller Fellow at Chicago, the other one being Mr. Paulo Ribenboim who is now at Bonn, Germany.

I am inclined now to be a bit selfish by devoting myself, during a year, to my mathematical work only, without having teaching duties or routine. This is why I am writting you to inquire whether I would have any chance of becoming a Rockefeller Fellow. I understand that Mathematics is no longer one of the loves of the Foundation. Since, however, I feel it very important to be able to continue my work in the States, I decided to write you this letter.

I sincerely hope that you can foresee some chance of helping me in this matter. Hoping to hear from you, I thank you in advance for your kindness.

Cordially yours,

L. Nachbin
Leopoldo Nachbin

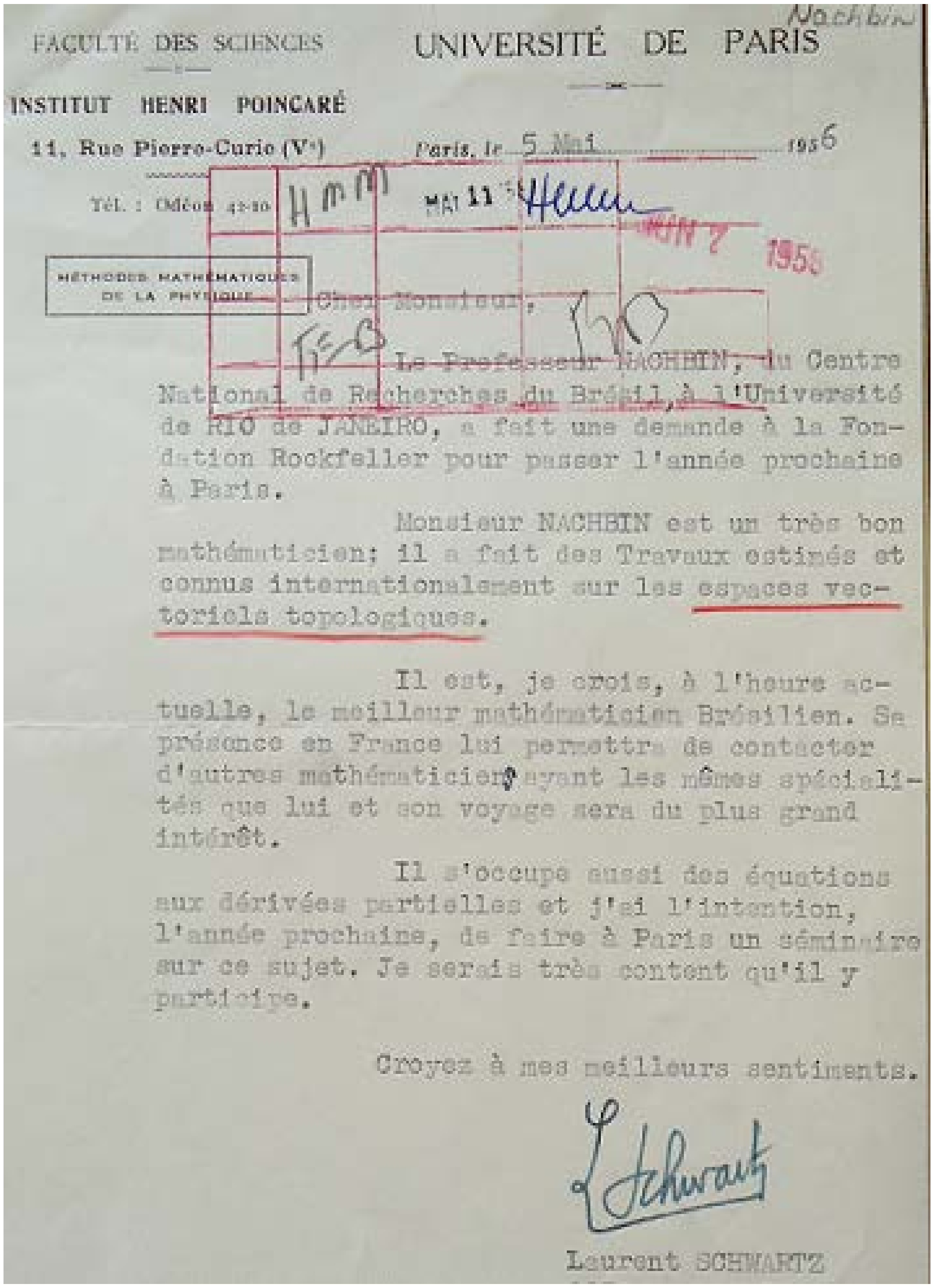
Figura 01. Carta de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 20 Junho de 1955.

Depois de trocas de algumas correspondências, em julho de 1955 Nachbin envia seu currículo[4] apresentando um breve histórico de sua formação e a lista de trabalhos publicados até então.

Nachbin teve sua bolsa aprovada pela Fundação Rockefeller e seu programa inicial, conforme o formulário de registro[5] e a carta[6] de aprovação, previa a duração da bolsa por doze meses, iniciando em quatro de Agosto de 1957. Estava previsto um mês para participar do International Symposium on Algebric Topology, na University of Mexico, dois meses na Universidade de Chicago e o período restante em Paris, sob a orientação do Prof. Laurent Schwartz no Instituto Poincaré, que ofereceria seminários na área de Equações Diferencias Parciais.

[4] CURRICULUM Vitae Leopoldo Nachbin. Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.
[5] FORMULÁRIO de Registro de Bolsa de Estudos feito por Leopoldo Nachbin à Fundação Rockefeller, Março de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Leopoldo Nachbin, Rockefeller Foundation Archives, RAC.
[6] CARTA de Janet M. Paine a Leopoldo Nachbin. 28 Maio de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

Vale destacar que na Carta[7] de Laurent Schwartz a Harry Miller, em 05 de Maio de 1956 (Figura 02), Nachbin é destacado como um proeminente matemático brasileiro.



Nachbin

FACULTÉ DES SCIENCES — UNIVERSITÉ DE PARIS

INSTITUT HENRI POINCARÉ

11, Rue Pierre-Curie (Ve) — Paris, le 5 Mai 1956

Tél. : Odéon 42-10 — HMM — MAI 11 — JUN 7 1956

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

Cher Monsieur,

Le Professeur NACHBIN, du Centre National de Recherches du Brésil, à l'Université de RIO de JANEIRO, a fait une demande à la Fondation Rockfeller pour passer l'année prochaine à Paris.

Monsieur NACHBIN est un très bon mathématicien; il a fait des Travaux estimés et connus internationalement sur les espaces vectoriels topologiques.

Il est, je crois, à l'heure actuelle, le meilleur mathématicien Brésilien. Sa présence en France lui permettra de contacter d'autres mathématiciens ayant les mêmes spécialités que lui et son voyage sera du plus grand intérêt.

Il s'occupe aussi des équations aux dérivées partielles et j'ai l'intention, l'année prochaine, de faire à Paris un séminaire sur ce sujet. Je serais très content qu'il y participe.

Croyez à mes meilleurs sentiments.

L Schwartz

Laurent SCHWARTZ

Figura 02. Carta de Laurent Schwartz a Harry M. Miller. 05 Maio de 1956.

Entretanto, uma alteração nos seminários oferecidos por Schwartz - Schwartz alterou o planejamento de seus seminários voltando-os à Teoria das Distribuições com aplicações na Física Teórica -, os quais não se adequavam mais aos temas de interesse de Nachbin, fez com

[7] CARTA de Laurent Schwartz a Harry M. Miller. 05 Maio de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

que a temporada na França fosse cancelada. Dessa maneira, ele permaneceu durante o período integral da bolsa em Chicago.

Embora Nachbin tenha solicitado extensão, a bolsa da Fundação Rockefeller foi finalizada em três de Agosto de 1957. Ele permaneceu nos EUA por mais um ano, mas com bolsa da Fundação Guggenheim, no Institute for Advanced Study, em Princeton.

Dentre as diversas publicações de Leopoldo Nachbin, destacamos as que foram publicadas no período em que foi bolsista da Fundação Rockefeller e que foram publicadas no Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, apresentadas pelo Prof. Saunders MacLane (ver Figura 03). Em uma Carta a Harry Miller, em 03 de Agosto de 1957, Nachbin verifica sobre a possibilidade de a Fundação Rockefeller providenciar o pagamento de algumas cópias do trabalho que seria publicado.

Dear Dr. Miller:

I shall publish soon a short article in the Proceedings of the National Academy of Sciences of USA concerning my recent work. This will be presented to the Academy by Professor Saunders MacLane and will contain only a statement of my results and methods. A full account will be published elsewhere much later. The pertinent acknowledgement of the Rockefeller Fellowship under which such study was done is made in the article.

Figura 03. Trecho da Carta de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 03 Agosto de 1957.

Os trabalhos publicados foram: “A generalization of Whitney’s theorem on ideals of differentiable functions”, em 1957 e “On the operational calculus with differentiable functions”, em 1958.

Algumas considerações

Estas possibilidades de intercâmbio podem ser vistas como proveitosas para a formação dos matemáticos brasileiros, já que permitiram um diálogo produtivo entre trabalhos, enfoques, opções teóricas etc. Leopoldo Nachbin, em uma carta[8] destinada a Harry M. Miller, relata que, no início da década de 1950, a atmosfera matemática no Brasil era muito pobre e precisava de melhores condições. Desse modo, solicitou que a Rockefeller Foundation mantivesse seu programa de apoio à área de Matemática na América Latina e que abrisse mais possibilidades para novos matemáticos.

A partir do material apresentado, uma possibilidade de continuidade do projeto de pesquisa em andamento e de análises é o estudo das áreas matemáticas que vieram a se tornar reconhecidas no Brasil e na comunidade internacional que tiveram como seus precursores os matemáticos que se dirigiram ao exterior. Leopoldo Nachbin já era visto como matemático a desempenhar um papel de liderança na área, como também destacou Oscar Zariski em uma

[8] “Pesquisa e estudos são para o ensino como comida é para o trabalho. Essa carta é escrita em um estilo sincero que me permite agradecê-lo pela admiração que tenho por você. Do mesmo modo, peço que estude as possibilidades de a Rockefeller Foundation ter interesse em apoiar regularmente o campo da Matemática na América Latina e em abrir mais possibilidades do que as que já existem para os matemáticos nesta área.” (Tradução nossa). CARTA de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 30 Janeiro de 1957, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

carta[9] a Henry Miller em Abril de 1949, ao comentar sobre o matemático Luiz Henrique Jacy Monteiro e Nachbin (Figura 04).

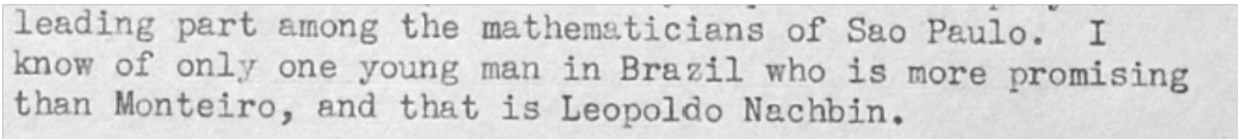

leading part among the mathematicians of Sao Paulo. I know of only one young man in Brazil who is more promising than Monteiro, and that is Leopoldo Nachbin.

Figura 04: Trecho da Carta de Oscar Zariski a Henry M. Miller, 21 de Abril de 1949.

Leopoldo Nachbin desenvolveu atividades e publicou inúmeros trabalhos nas áreas de Sistemas Ordenados, Topologia, Espaços Vetoriais Topológicos, Teoria da Aproximação, Análise Harmônica e Holomorfia em Dimensão Infinita. Os trabalhos e livros foram publicados no Brasil e também no exterior. Nachbin orientou doutorados, participou de conferências internacionais e atuou em cursos e temporadas em diversas universidades no exterior. É inegável que Leopoldo Nachbin foi importante para a então nascente comunidade matemática brasileira, o que não o privou de embates em algumas instituições que atuou. Os primeiros matemáticos brasileiros que foram bolsistas dessas instituições se tornaram fundamentais no estímulo dos intercâmbios que vieram a acontecer logo em seguida, inclusive sugerindo e recomendando colegas brasileiros para participarem dos programas de fomento das fundações e para irem aos centros matemáticos estadunidenses.

É importante indicar que, além do financiamento dos estudantes-bolsistas para seus estudos em universidades nos EUA, a Fundação Rockefeller também atuou na aquisição de materiais para bibliotecas e centros de Matemática em formação no Brasil. A partir da documentação obtida por meio da consulta aos arquivos no *Rockefeller Archive Center*, podemos destacar a atuação da Fundação Rockefeller ao fornecer auxílio financeiro para a compra de materiais e bibliografia específica para duas instituições brasileiras: a Biblioteca da Seção de Matemática, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), da Universidade de São Paulo (USP) e a Biblioteca do Instituto Cearense de Matemática, na Universidade do Ceará.

Os programas internacionais de cooperação intelectual constituíram elemento decisivo no atendimento da necessidade de formar grupos especializados para operar nas instituições instaladas ou que vieram a ser criadas no Brasil no período abordado, decisivas para desenvolver a pesquisa científica e tecnológica influenciados pelos momentos políticos e econômicos da época. Assim, por mais que houvesse modelos a serem adotados, a recepção desses modelos acabou por conformá-los e adequá-los aos padrões e necessidades locais. A esses modelos e a esses grupos especializados formados cabe uma análise posterior mais minuciosa.

A dinâmica desses encontros e intercâmbios e ainda a atuação de fundações estadunidenses nos países da América Latina expressam a existência de uma rede de comunicação entre os cientistas desses países. Partindo do artigo de Basalla (1967) [10] podemos nos atentar a discussão de questões importantes de como a Ciência (de padrões eurocentristas) difundiu-se das nações

[9] CARTA de Oscar Zariski a Henry M. Miller, 21 de Abril de 1949, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

[10] O modelo de difusão da moderna ciência europeia proposto por Basalla suscitou polêmicas e contestações ao longo dos anos após sua publicação. Por exemplo, Polanco (1986), Chambers (1993), Lafuente (1986), Latour (2000). Mas deve-se apontar e reconhecer a importância histórica desse trabalho.

centrais para outros países. Podemos ver o desenvolvimento de histórias paralelas somando-se cada vez mais como parte de uma história só. O modelo de Basalla (1967), baseado em um processo de dependência, reflete sobre a difusão da Ciência a regiões com passado colonial, mas acaba vendo esse processo de maneira linear e unívoca. Uma consequência que a reflexão crítica a esse modelo pode trazer é a percepção do movimento da difusão da Ciência de um modo mais complexo, dando atenção aos contextos locais, enfatizando assim as especificidades da comunidade científica local, bem como suas interações com a Ciência internacional. Dessa maneira, o processo de difusão é visto como um encontro de tradições e culturas, não como a transposição de um conhecimento. Embalados também por esta reflexão sobre o processo de difusão científica matemática, chamamos a atenção para a possibilidade de se pensar no intercâmbio intelectual entre as próprias periferias ou mesmo na transferência da Ciência em uma direção oposta à sugerida por Basalla, ou seja, da periferia para o centro, implicando em uma ressignificação dos próprios termos e ainda pensar sobre o desenvolvimento da prática científica matemática nas diferentes regiões dentro do Brasil.

Referências e bibliografia

Antonio Lafuente. (1986). La ciencia periferica y su especialidad historiográfica. In: Juan José Saldaña. *Actas del Simposio – Historia y Filosofia de la Ciencia em America*. XI Congreso Interamericano de Filosofia, Cuadernos Quipu, Guadalaraja, 1, 31-40.

Bruno Latour. (2000). *Ciência em ação*: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. São Paulo: Edunesp.C

Coleção Leopoldo Nachbin. (1982). *Notícia sobre Leopoldo Nachbin*. Arquivos Históricos - Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência - UNICAMP.

David W. Chambers. (1993). Locality and Science: Myths of Centre and Periphery. In: Antonio Lafuente, Alberto Elena, Maria Luiza Ortega (org.). *Mundialización de la ciencia y cultura nacional*. Madri: Doce Calles, 605-617.

Eduardo L. Ortiz. (2003). La política interamericana de Roosevelt: George D. Birkhoff y la inclusión de América Latina en las redes matemáticas internacionales (Segunda Parte). *Saber Y Tiempo*: Revista de Historia de la Ciencia. Buenos Aires, 4 (16), 21-70.

George Basalla. (1967). The Spread of Western Science. *Science*. New York, 156 (3775), 611-622.

Karen Hunger Parshall. (2009). Marshall Stone and the Internationalization of the American Mathematical Research Community. In: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*. 46 (3), 459–482.

Lucieli M. Trivizoli. (2011). *Intercâmbios Acadêmicos Matemáticos entre EUA e Brasil*: uma globalização do saber.

Maria Gabriela S. M. C. Marinho. (2001). *Norte americanos no Brasil:* uma história da Fundação Rockefeller na Universidade de São Paulo (1934-1952).

Maria Gabriela S. M. C. Marinho. (2004). A Fundação Rockefeller e a constituição de campos científicos em São Paulo. A configuração de modelos institucionais na área biomédica (1916 - 1952). In: *Estudios Avanzados Interactivos*, 3 (5). Santiago, Chile.

Ubiratan D´Ambrosio. (2008). Globalização, Educação Multicultural e o Programa Etnomatemática. In: Pedro Palhares (2008). *Etnomatemática: um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática.* Ed. Humus: Portugal, 23-46.

Xavier Polanco. (1986). La ciencia como ficción. Historia y contexto. In: Juan. Saldaña. *El perfil de la ciencia en América*. México: Sociedade latino-americana de historia de las Ciencias y la Tecnologia, 41-56.

Apéndice A

Documentos consultados - Rockefeller Archive Center

FORMULÁRIO de Registro de Bolsa de Estudos feito por Leopoldo Nachbin à Fundação Rockefeller, Março de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Leopoldo Nachbin, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 30 Janeiro de 1957, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Oscar Zariski para Harry M. Miller, 21, Abril de 1949, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Laurent Schwartz a Harry M. Miller. 05 Maio de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Janet M. Paine a Leopoldo Nachbin. 28 Maio de 1956, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 20 Junho de 1955, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CARTA de Leopoldo Nachbin a Harry M. Miller. 03 Agosto de 1957, Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

CURRICULUM Vitae Leopoldo Nachbin. Série 305.E, RG 10.1, Rockefeller Foundation Archives, RAC.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio

Johan Espinoza González
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
jespinoza@una.cr
Jose Luis Lupiañez Gómez
Universidad de Granada
España
lupi@ugr.es
Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada
España
isegovia@ugr.es

Resumen

Presentamos los resultados de la actuación de dos grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su capacidad matemática, al resolver dos tareas de invención de problemas aritmético. El estudio se centró en identificar las características de los problemas inventados por los estudiantes del grupo talento, con base en algunas variables que definimos y que están relacionadas con la estructura sintáctica, semántica y matemática de los mismos; así como establecer diferencias con respecto a los problemas inventados por el grupo estándar. Los resultados muestran que los problemas inventados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los del grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas, etc.

Palabras claves: Invención de problemas, resolución de problemas, problemas aritméticos; talento matemático, Educación Matemática.

Introducción

El problema de investigación considerado en este trabajo de investigación comprende dos campos de estudio: los sujetos con talento matemático y la invención de problemas matemáticos. De acuerdo con el análisis de literatura realizado, se constata que ambos campos han sido de interés dentro de la investigación en didáctica de la matemática (Espinoza, 2011).

Así, la investigación de los sujetos con talento se ha centrado en tres grandes temas: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro, 2008). En el caso de la invención de problemas, existen investigaciones que se interesan en estudiarla como característica de la actividad creativa o talento excepcional, como actividad de clase, como característica prominente de la actividad matemática, para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes, etc.

Sin embargo, existen pocos estudios que relacionen ambos tópicos, de manera que pongan de manifiesto las características particulares que presentan los estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. Por tanto, nos centraremos en caracterizar de forma exploratoria, la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático, ante dos tareas semiestructuradas de invención de problemas aritméticos, construidas especialmente para este estudio y compararlo con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público ante la misma tarea. Además nos interesa identificar algunos indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento en matemática.

Así, los objetivos planteados en esta investigación pretenden:

a) Construir un instrumento de planteamiento de problemas con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención problemas aritméticos verbales.
b) Desarrollar y utilizar un esquema analítico para valorar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes.
c) Definir categorías de análisis que permitan caracterizar las producciones de ambos grupos de estudiantes ante la tarea de invención de problemas aritméticos,
d) Identificar diferencias entre los problemas inventados por ambos grupos con base en las categorías de análisis definidas.

Marco teórico

La revisión de literatura que se incluye en este apartado comprende tres partes bien diferenciadas: el talento matemático, los problemas aritméticos verbales y la invención de problemas matemáticos. A continuación se tratan algunos conceptos relacionados a los sujetos con talento matemático, así como algunas formas que se han utilizado en la identificación de los mismos. Luego se presentan aspectos relacionados con los problemas aritméticos verbales, su conceptualización, clasificación y algunas variables de estudio que son de interés en nuestra investigación. Por último, se explica en qué consiste la invención de problemas matemáticos.

Talento matemático

Algunos autores sostienen que los estudiantes con talento presentan características que los diferencias del resto de sus compañeros. Por ejemplo, Greenes (1981) menciona que presentan un mayor ritmo de aprendizaje, excelente memoria y excepcionales capacidades verbales y de razonamiento y gran poder de abstracción. Pero, ¿quiénes son los estudiantes con talento?

Gagné (citado en Benavides, 2008), propone un modelo para distinguir los conceptos de superdotación y talento, denominado Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento. Según esta autora, la superdotación consiste en la posesión de habilidades naturales en alto grado que son espontáneas e innatas, las cuales se presentan en al menos un dominio de habilidad; mientras que el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, adoptamos el punto de vista de Gagné y nos centraremos en estudiar el talento.

Al respecto, se diferencian cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos (Villarraga, Martínez & Benavides, 2004). Dado que en esta investigación nos centramos en estudiar el rendimiento de estudiantes considerados con talento matemático, es que trataremos la noción de talento orientado al logro o rendimiento.

De igual forma analizaremos las habilidades matemáticas que presentan estos estudiantes ante la tarea propuesta, por lo que nos interesa estudiar un talento específico, el talento matemático. Una de las formas más sencillas de definirlo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijo, Díaz & Rodríguez, 2004).

Sin embargo, en esta investigación adoptamos la definición de Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en el área de la matemática.

En cuanto a la identificación del talento matemático, se describen diversos métodos tanto de enfoque cualitativo como cuantitativos; sin embargo, los más utilizados han sido los test estandarizados, corriendo el peligro de rechazar a niños que deberían ser identificados como talentos matemáticos (Benavides, 2008). No obstante, algunos autores destacan el uso de la invención de problemas como herramienta que puede ser utilizada en la identificación del talento matemático (Krutetskii, 1976; Ellerton, 1986, Kesan, Kaya & Güvercin, 2010).

Problemas aritméticos

Dado que en este estudio se proponen dos tareas de invención de problemas matemáticos aritméticos, consideramos pertinente exponer la noción de problema matemático que emplearemos en nuestro estudio. Así, adoptamos la noción propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos; una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

De igual forma, se adoptó la definición de problema aritmético propuesta por Puig & Cerdán (1988), al considerarla como un enunciado verbal o escrito que proporciona información de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

En relación con su clasificación, Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, et al., (1997), mencionan los problemas de una etapa o más de una etapa. También Puig & Cerdán (1988), sugieren otra clasificación que atienden al tipo de estructura operatoria (aditiva o multiplicativa) y al componente semántico involucrado en el problema. Este mismo autor menciona los problemas combinados mixtos que son un tipo de problemas de más de una etapa.

Por último, diversos autores hacen referencia a variables de estudio de los problemas aritméticos. Al respecto, se destacan las variables sintácticas, de contenido, componente semántico (Puig & Cerdán, 1988), el tipo de proposición interrogativa (Castro, 1995), la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta (Castro, Rico & Gil, 1992).

Invención de problemas

El término invención de problemas o planteamiento de problemas, también conocida en la literatura en inglés como “problem posing” (Brown & Walter, 1993 Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997), implica la formulación de nuevos problemas, así como la reformulación de situaciones dadas (Silver, 1994; English, 1997; Silver & Cai, 1996).

En este sentido, los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung & Kenny, 1996), al realizar algunos cambios al mismo, al reformular el problema y personalizarlo o al estudiar un caso particular de la situación dada, con el objetivo de comprender mejor el problema y así buscar una solución. Por ejemplo, en el trabajo de Polya (1979), se cuestiona ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?

Este proceso podría ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución, sino la formulación de problemas a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Al respecto, Cázares (2000), presentó a estudiantes de primaria varias tarjetas con diferentes ilustraciones de situaciones relacionadas con su contexto, de las cuales debían escoger algunas y plantear varios problemas matemáticos.

Por último, los estudiantes pueden inventar problemas después de resolver un problema, cuando se le indica a los estudiantes que modifiquen el objetivo, condición o pregunta del mismo, con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Por ejemplo, Brown & Walter (1993), proponen una estrategia denominada “¿What if not?”, la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de un determinado problema, para así plantear nuevos e interesantes problemas.

Por otra parte, se identifican tres formas en las cuales se podrían formular problemas: situación libre, situaciones semiestructuradas y situaciones estructuradas (Stoyanova, 1998). En la primera, los estudiantes no tienen restricciones para inventar problemas; mientras que en las situaciones semiestructuradas se les propone que planteen problemas con base en alguna experiencia o situación. Por último, las situaciones estructuradas, son aquellas en las que se reformulan los problemas dados o se cambia la condición del mismo.

De esta forma, los estudiantes pueden inventar problemas a partir de una ilustración que presente o no información numérica, con base en operaciones aritméticas dadas, mediante alguna información presentada de forma textual, modificando la respuesta de un problema o mediante el planteamiento libre de un problema.

Así, con base en la literatura consultada, al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones por diferentes autores. Se le ha designado como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987) y planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990). A nuestro parecer, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que utilizaremos con más frecuencia la expresión invención de problemas.

Metodología

Esta investigación es de tipo exploratorio descriptivo, pues corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos por estudiantes considerados con talento matemático, privilegiando la descripción e interpretación de la información, pero al mismo tiempo dando un tratamiento cuantitativo a los datos (Espinoza, 2011). Los sujetos de estudio corresponden a dos grupos de estudiantes con características diferentes. El primero, denominado grupo talento, está conformado por 21 estudiantes considerados con talento matemático que participaron en el proyecto ESTALMAT Andalucía durante el curso 2010-2011 y que tienen edades comprendidas entre los 13 y 15. Este proyecto pretende detectar y estimular durante dos años académicos el talento precoz en matemática de 25 alumnos de centros andaluces escogidos mediante la realización de pruebas de selección[1].

El segundo lo conforman 19 estudiantes de tercer grado del Instituto de Educación Secundaria Nazarí, ubicado en Salobreña, provincia de Granada, España y que llamamos “grupo estándar”. Estos estudiantes tienen entre 14 y 15 años.

Descripción del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un cuestionario con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998), con características diferentes que permiten a los estudiantes poner en práctica sus habilidades, conocimientos y creatividad.

Para el diseño de este instrumento se tomaron en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto escolar presentado en la situación sea muy familiar para los estudiantes (Moses et al., 1990). Además, debía ser una situación que motive a plantear diferentes tipos de problemas, estimule la creatividad, permita el empleo de diferentes tipos de números, así como favorecer e incentivar la invención de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

Con respecto a esta última condición, solicitamos a los estudiantes plantear problemas que consideren difíciles de resolver, ya que nos interesa que los estudiantes muestren y pongan en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas. Además, consideramos que esto puede hacer que el estudiante ponga su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad de inventar problemas originales. Este instrumento fue revisado y analizado por expertos en Didáctica de la Matemática y aplicado a un grupo de estudiantes con el fin de valorarlo.

La primera tarea plantea lo siguiente: “de acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución

[1] http://thales.cica.es/estalmat/

se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información".

La figura propuesta[2] a los estudiantes para que inventen el problema es la siguiente:

Figura 1. Imagen utilizada en la primera tarea

Las indicaciones de la segunda tarea son similares a la anterior; pero en ésta tuvieron que inventar un problema matemático a partir de la siguiente situación expuesta de forma textual: "Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros".

Descripción de las categorías de análisis empleadas

Para elaborar las categorías de análisis consideramos las características propias de esta investigación y realizamos una revisión de las variables de estudio de los problemas aritméticos propuestas por Puig y Cerdán (1988); Castro (1995); Castro et al., (1988) y los esquemas empleados por Leung & Silver (1997); Silver & Cai (2005; 1996); Cázares (2000); Ayllón (2012). Así, definimos las siguientes tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio. Dichas variables se explican con mayor detalle y sustento teórico en Espinoza (2011).

En la primera categoría, denominada estructura sintáctica, se estudió la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. La longitud del enunciado fue analizada de acuerdo a la cantidad de proposiciones presentes, las cuales corresponden a expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. El tipo de proposición interrogativa se relaciona con la pregunta del problema y se clasifican en proposiciones de asignación, condicionales o relacionales (Silver & Cai, 2005)

La segunda categoría, llamada estructura matemática, fue analizada de acuerdo con el tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Por último, en la categoría de estructura semántica, los problemas fueron estudiados en relación a su estructura semántica y cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado.

Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Todas las producciones correspondieron a problemas matemáticos, por lo que los autores del estudio los resolvieron y clasificaron en resolubles y no resolubles. Dentro de éstas encontramos problemas matemáticos no resolubles que presentaron características importantes de analizar. Por ello las clasificamos como incompletas (Puig & Cerdán, 1988) y los distinguimos de aquellos que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérico o conceptual. A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles incompletos o que presentan

[2] http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplicó el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual fueron analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática.

La figura 2 muestra el esquema utilizado para valorar las producciones de los estudiantes.

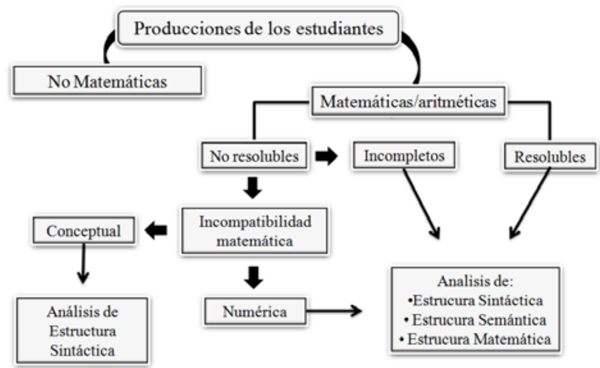


Figura 2. Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Resultados

En este apartado se presentan los principales resultados obtenidos de las producciones de ambos grupos de estudiantes a las dos tareas planteadas. Para transcribir las producciones se utilizó una codificación con seis caracteres para hacer referencia a las mismas, de manera que los primeros cuatro indican el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes a la producción, ya sea de la primera o segunda tarea. Por ejemplo, el código 6GE-T2 se refiere a la producción del estudiante número seis del grupo estándar ante la segunda tarea de invención de problemas.

A continuación se muestran las características generales de los problemas inventados por dichos estudiantes y seguidamente se exponen los resultados obtenidos según la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas.

Características generales de los problemas inventados

En primera instancia resultó que todos los enunciados inventados por los estudiantes son problemas matemáticos, de los cuales el 65% son resolubles. Es interesante hacer notar que los estudiantes del grupo estándar plantearon una mayor proporción de problemas resolubles (74%) que el grupo talento (57%). Este último resultados nos sorprende en la medida que se espera que ocurra lo contrario; a falta de la realización de otro estudio más amplio que los confirme, pueden ser varios los factores que inciden en los mismos: mejor actitud del grupo talento ante las matemáticas, menor ansiedad, menor miedo a equivocarse, el no tener que resolver los problemas que inventaban, etc.

También se obtuvo que los problemas no resolubles por incompatibilidad matemática representan el 22,5% (18 problemas) y los problemas incompletos 12,5 % (10 problemas). Estos dos tipos de problemas representan el 35% de los problemas matemáticos producidos por los estudiantes. Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente: *En este viaje va lleno. En una* *primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenían cada pareja (de la 1° parada)?* (3GT-T2)

Este problema es interesante porque propone una serie de relaciones entre los datos y presenta una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque el estudiante no indicó el total de personas que quedaron en el interior del tren luego de la última parada.

Un problema planteado que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 294 no es divisible por 4 es el siguiente: *De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra?* (6GE-T2)

Análisis según la estructura sintáctica

El análisis según la estructura sintáctica comprende el estudio de tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. A continuación se describen los principales resultados en relación con estas tres variables.

Longitud del enunciado. Resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas planteados por el grupo talento (5,27) es mayor que en los problemas inventados por sus compañeros del grupo estándar (3,44). Además, resultó que el 69,1% de los problemas matemáticos inventados por el grupo talento están formados por cinco o más proposiciones, mientras que el grupo estándar planteó 31,6% de problemas con dicha característica.

También se observó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas no resolubles (5,58) es mayor que en los resolubles (5,04). Esto se evidenció en el planteamiento de una mayor proporción de problemas no resolubles que presentan cinco o más proposiciones (77,8%) que resolubles con la misma característica (62,5%).

Tipo de proposición interrogativa. Con respecto a esta variable, resultó que la mayoría de las proposiciones interrogativas que plantearon los estudiantes del grupo talento y estándar son de asignación (52,4% y 60,5% respectivamente), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos preferidas por los estudiantes de ambos grupos. El siguiente es un ejemplo de problema que presenta una proposición interrogativa de asignación: *A las 9:00 de la mañana sale un tren con 50 pasajeros, a las once vuelve con 70 pasajeros, vuelve a salir y vuelve con 30 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros han entrado y salido en total?* (2GE-T2).

Tipo de número empleado. Se observó que ambos grupos prefirieron utilizar números naturales en el planteamiento de su problema, con un 97,6% en el grupo talento y 97,4% en el grupo estándar. También resultó que el 43,9% de los problemas planteados por el grupo talento presentan el uso de número racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria; mientras que el uso de este tipo de número en los problemas planteados por el grupo estándar representó el l8,5%. Además, el grupo talento planteó casi el doble de proporción de problemas con dos o más tipos de números que el grupo estándar, los cuales corresponden a 34,1% y 18,4%

respectivamente.

Análisis según la estructura matemática

Esta categoría fue analizada con base en cuatro variables. A continuación se presentan los principales resultados en cada una de ellas. Este análisis fue aplicado a 78 problemas ya que dos que presentaron incompatibilidad matemática son imposibles de resolver incluso con información adicional.

Tipo de estructura operatoria y cantidad de etapas. Con respecto a esta variable resultó que la mayoría de los problemas planteados por ambos grupos son de estructura mixta; sin embargo, el grupo talento planteó una mayor proporción de este tipo (80%) que sus compañeros del grupo estándar (55,3%). Además, se observó que el grupo estándar planteó una proporción mayor de problemas de estructura multiplicativa y aditiva (31,5% y 13,1% respectivamente) que sus compañeros del grupo talento (17,5% y 2,5% respectivamente). Por último, se encontró que el 97,5% y 94,8% de los problemas planteados por el grupo talento y estándar, respectivamente, son de más de una etapa.

Tipo de operación y cantidad de procesos implicados en la solución del problema. En relación con el tipo de operación encontramos que el grupo talento prefirió plantear problemas que implicaban el uso de multiplicación-división, suma-multiplicación y suma-resta-multiplicación-división, los cuales corresponden al 60% de los problemas planteados por este grupo. En el caso del grupo estándar, los problemas requieren aplicar las operaciones de multiplicación, multiplicación-división y suma-multiplicación que corresponden al 55,2%.

Con respecto a la cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, resultó que el grupo talento y estándar plantearon respectivamente el 92,5% y 81,6% de los problemas con dos o más procesos. También se observó que aproximadamente la mitad de los problemas inventados por el grupo talento (47,5%) presentan tres o más procesos distintos; mientras que el 21,1% de los problemas del grupo estándar presentan tal cantidad de procesos. Es importante resaltar que los estudiantes del grupo talento y estándar plantearon una proporción similar de problemas con dos procesos o tres procesos (70% y 73,7% respectivamente).

Cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Los resultados muestran que el promedio de pasos requeridos para resolver los problemas planteados por el grupo talento (3,95) es mayor que el promedio de pasos que incluyen los planteados por el grupo estándar (2,92). Esta diferencia también se reflejó en la cantidad de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos, puesto que el grupo talento planteó más del doble en proporción de problemas con dicha característica (67,5%), que sus compañeros del grupo estándar (31,6%). En contraste, el 68,4% de los problemas planteados por el grupo estándar requieren tres o menos pasos distintos para ser resueltos.

Otro aspecto interesante es que los estudiantes del grupo estándar plantearon una gran cantidad de problemas que requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos (80%); en contraste con el grupo talento donde el 39% presentan dicha característica. También resultó que el 66,6% de los problemas del grupo talento que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas, implican cuatro o más pasos para ser resueltos; mientras que el 42% de los inventados por el grupo talento presentan dicha característica. Por último, se observó que de los problemas que incluyen dos o tres procesos, los estudiantes del grupo talento plantearon una mayor proporción que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos (60,7%) que los inventados por el grupo estándar con dicha característica (35,7%).

Análisis según la estructura semántica

En esta categoría se analizó el tipo de estructura semántica presente en los problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Además, se estudió la cantidad de relaciones semánticas implicadas en los problemas inventados por los estudiantes. Es importante recordar que en esta categoría, al igual que en la anterior, sólo se analizaron 78 problemas.

Estructura semántica de los problemas aditivos. Resultó que el único problema aditivo planteado por el grupo talento presenta la relación semántica de cambio, mientras que en el grupo estándar se encontraron cuatro (80%) que presentan la estructura semántica de combinación, tres de cambio (60%) y uno de comparación. Además, de los 59 problemas de estructura aditiva y mixta, de los cuales 33 fueron inventados por el grupo talento y 26 por el estándar, se encontró que ambos grupos prefirieron plantear problemas de combinación, seguido de problemas que incluyen la componente semántica de cambio.

Estructura semántica de los problemas multiplicativos. Observamos que las estructuras semánticas más utilizadas por el grupo talento fueron la de producto de medidas (71,4%) e isomorfismo de medida (57,1%). En el caso del grupo estándar, el 91,7% de los problemas multiplicativos presentan la relación semántica de isomorfismo de medida y el 25% producto de medidas. También se encontró que de los 72 problemas de estructura multiplicativa y mixta, de los cuales 39 fueron planteados por el grupo talento y 33 por el grupo estándar, ambos grupos de estudiantes prefirieron plantear problemas que incluyeran la componente semántica de isomorfismo de medida, seguida de producto de medidas y en menor proporción comparación multiplicativa.

Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos. En relación con esta variable, resultó que la mayoría de problemas mixtos planteados por el grupo estándar (66%), incluyen las componentes semánticas combinación-isomorfismo de media o cambio-isomorfismo de medida, mientras que el grupo talento planteó sólo el 13% de los problemas mixtos con estas características. En el caso del grupo talento la combinación que tiene mayor frecuencia (30%) es cambio-combinación-isomorfismo de media o cambio-comparación-isomorfismo de medidas.

Cantidad de relaciones semánticas distintas. En esta variable observamos que los estudiantes del grupo talento inventaron problemas con una mayor media de cantidad de relaciones de estructura semántica distintas (2,83) que el grupo estándar (1,89). Además, el grupo talento planteó una proporción mayor (65%) de problemas con tres o más relaciones semánticas distintas que sus compañeros del grupo estándar (15,8). Además, todos los problemas del grupo estándar poseen tres o menos relaciones semánticas y un alto porcentaje (84,2%) presentan dos o menos relaciones semánticas distintas. También resultó que el grupo talento y estándar plantearon un porcentaje similar de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas (67,5% y 73,7 respectivamente).

Conclusiones

En primera instancia, concluimos que los problemas inventados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los inventados por el grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas. Este resultado es similar al obtenido por Ellerton (1986), ya que los problemas inventados por los estudiantes más hábiles requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones e implican un sistema numérico más complejo.

Consideramos que estas diferencias también se reflejaron en la sensación de dificultad percibida al resolver los problemas, ya que en el caso del grupo estándar, al terminar de leer el enunciado se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo. Sin embargo, esto no siempre fue así en el grupo talento, donde varios problemas daban la sensación de no ser tan fáciles de resolver a simple vista. De hecho, en uno de ellos, no fue posible encontrar la solución aun cuando creemos que sí tiene.

Por otra parte, tomando en cuenta las limitaciones de este estudio, podemos concluir que un estudiante con talento se puede caracterizar por:

a) Inventar una gran cantidad de problemas no resolubles.

b) Incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones.

c) Emplear números naturales y en menor proporción números racionales.

d) Emplear dos tipos de números distintos, ya sean naturales o racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria.

e) Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación.

f) Combinar la estructura aditiva y multiplicativa para plantear problemas de estructura mixta.

g) Incluir las relaciones semánticas de combinación y producto de medidas.

h) Plantear tres o más relaciones semánticas distintas.

i) Inventar problemas que requieren cuatro o más pasos para resolverlo.

j) Plantear problemas que presentan dos o más procesos de cálculo distintos en su solución y en menor proporción tres o más procesos.

k) Combinar los bloques de contenido curricular de aritmética y física

El siguiente es un ejemplo de problema que cumple con las características citadas

En este viaje va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Por último, consideramos que a pesar de las limitaciones de nuestra investigación, identificamos algunos indicios del uso de la invención en la identificación de estudiantes con talento matemático. Por ejemplo, los problemas planteados por el grupo talento presentan características distintas a los inventados por el grupo estándar. Además, si consideramos que la capacidad de los estudiantes para inventar problemas aritméticos se relaciona con la riqueza de los problemas planteados, entonces los estudiantes con talento mostraron una mayor capacidad ante dichas tareas. Esto también se refleja en la solución de los problemas planteados por este grupo, ya que desde nuestro punto de vista, estos dan la sensación de mayor dificultad, puesto que al leer el enunciado no se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo.

REFERENCIAS

Ayllón¸ M. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.

Brown, S. & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S. & Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp. 63-76). Granada: SEIEM.

Castro, E (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & B. Lorenzo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Ellerton N. (1986). Children's made up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17(3)*, 261-271.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3)*, 183-217.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematic. *Arithmetic Teacher, 28* (8),14-17.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education.* (pp. 123-148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Moses, B., Bjork, E. & Goldenberg, E. R (1990): Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 83-91.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faísca, Revista de altas capacidades N° 11,* pp. 83-102

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Silver & Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S. & Kenney, P (1996). Posing matehematical problem: an exploratory study. *Journal for research in matehematics education. 27*(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp. 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.

Villarraga, M., Martínez, P. & Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Investigação das habilidades e competências estatísticas de estudantes recém-ingressos em uma universidade pública brasileira

Mauren **Porciúncula** Moreira da Silva
Instituto de Matemática Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Brasil
mauren@furg.br
Suzi Samá **Pinto**
Instituto de Matemática Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Brasil
suzisama@furg.br
Daiane Lemos de **Sá**
Programa de Pós Graduação Educação e Ciências, Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Brasil
daidesa@yahoo.com.br
Lidiane Santos de **Freitas**
Programa de Pós Graduação Educação e Ciências, Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Brasil
lsfreytas@yahoo.com.br

Resumo

Educadores e pesquisadores, em âmbito internacional, vêm consolidando um campo de estudo a Educação Estatística. Suas principais discussões elucidam a importância da Estatística nas diversas áreas de conhecimento, em contraste à incompreensão de seu ensino descontextualizado e focado em cálculos. Para retratar essa realidade delineou-se essa pesquisa, com objetivo de identificar as habilidades e competências, atinentes ao Letramento Estatístico. Aplicou-se um instrumento com 20 itens em uma amostra de 200 estudantes. Ao realizar a análise de dados constatou-se que apresentaram mais habilidades para fazer inferências a partir de informações expressas em gráficos e para calcular medidas estatísticas. Já suas habilidades para resolver situações problemas e interpretar medidas estatísticas, são menores. A partir dessa pequisa, pode-se observar que as competências esperadas ainda não são plenamente contempladas, justificando a continuidade das pesquisas a fim de diagnosticar e nortear ações na Educação Estatística.

Palavras-chave: educação, estatística, competências, letramento.

Introdução

Um grupo crescente de educadores e pesquisadores, em âmbito internacional tem demonstrado interesse pela Educação Estatística, a qual vem se estabelecendo como um campo único de estudo, assim como a Educação Matemática.

Apesar da importância da Estatística nas mais diversas áreas do conhecimento, o seu ensino descontextualizado, a aplicação de fórmulas e os cálculos exaustivos tornam essa ciência difícil para a comunidade de estudantes. Como consequência, a Estatística tem sido vista por muitos estudantes como difícil e desagradável. É comum o temor e a ansiedade dos alunos frente à necessidade de cursar uma disciplina de Estatística, obrigatória na maioria dos cursos de graduação. Muitos estudantes, ainda a consideram como a pior disciplina do ensino superior. (VENDRAMINI e BRITO, 2001; GARFIELD e BEN-ZVI, 2008)

Para Cazorla e Santana (2010), trabalhar manualmente com os dados estatísticos torna o estudo cansativo e trabalhoso, deixando os estudantes desestimulados para a análise, interpretação e discussão dos resultados, ou seja, a parte mais nobre da Estatística.

Em face desta realidade, esta pesquisa tem como objetivo identificar quais habilidades e competências estatísticas os estudantes vem desenvolvendo ao longo da Educação Básica. Os resultados desta pesquisa auxiliarão futuras pesquisas no sentido de subsidiar ações em prol do Ensino de Estatística na Educação Básica, bem como na Educação Superior.

Revisão da Literatura

A dificuldade de aprendizagem da Estatística no Ensino Superior é uma realidade, oriunda das lacunas na construção do raciocinio estatístico ao longo da Educação Básica.

Para Garfield e Ben-Zvi (2008), uma das razões que tornam a Estatística um assunto difícil de aprender e ensinar reside no fato de que estudantes e professores igualam a Estatística com a Matemática e esperam que o foco da Estatística esteja em números, cálculos, fórmulas, com apenas uma resposta certa. Para Gal (2000) fazer estatísticas não é equivalente a compreender estatísticas. Cálculos não devem ser o centro das atenções. Ser capaz de calcular, por exemplo, um desvio padrão, não demonstra a habilidade do estudante para entender o que o desvio padrão é, o que ele mede, ou como ele é usado.

A ideia de aleatoriedade e variabilidade, as diferentes interpretações possíveis com base em diferentes suposições, a necessidade da habilidade de comunicação e interpretação estatística, o que exige leitura e escrita, gera certo desconforto nos estudantes e professores acostumados com o determinismo da Matemática.

Segundo Moore e Cobb (1997) o conceito de variabilidade naturalmente dá a Estatística uma particularidade. A Estatística requer uma maneira diferente de pensar, pois “os dados não são apenas números, são números em um contexto” (MOORE e COBB, 1997). Embora os matemáticos dependam do contexto como uma fonte de problemas para a investigação, o foco principal no pensamento matemático está na abstração. “Na análise de dados, o contexto fornece o significado” (ibidem, 1997). Essa diferença entre o pensamento matemático e o pensamento estatístico tem implicações profundas para o ensino. Para ensinar Estatística, não é suficiente entender a teoria Matemática, é necessário ir além, entender a teoria não-matemática das estatísticas.

É necessário construir habilidades e competências que remetam ao Letramento Estatístico, o que segundo Wallman (1991) é a

> “[...] habilidade para compreender e avaliar criticamente resultados estatísticos que permeiam nossas vidas diárias […] e reconhecer a contribuição que o pensamento estatístico pode trazer para as decisões públicas e privadas, profissionais e pessoais.”

Na legislação educacional brasileira, as diretrizes curriculares nacionais e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, entre outros documentos oficiais referentes à educação no Brasil, têm apresentado uma tendência mundial: a necessidade de centrar o ensino e aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades, em lugar de centrá-lo no conteúdo. Mas o que são habilidades e competências?

Segundo Perrenoud (1999), não existe uma noção clara de competências. Mais do que definir, convém conceituar. Uma competência permite mobilizar conhecimentos para enfrentar uma situação. Competência não é o uso de regras aprendidas, mas a capacidade de usar vários recursos, de forma criativa e inovadora, no momento e do modo necessário. A competência envolve um conjunto de aspectos. Perrenoud fala de esquemas, o que, seguindo a concepção piagetiana, é uma estrutura invariante de uma operação ou de uma ação. Ou seja, aprendizagem não é uma repetição idêntica, mas pode sofrer acomodações, dependendo da situação.

O conceito de habilidade varia de autor para autor. Em geral, habilidades são consideradas como menos amplas, se comparadas às competências. Uma competência estaria constituída por várias habilidades. Entretanto, uma habilidade não pertence a determinada competência, pois uma mesma habilidade pode contribuir para competências diferentes. Perrenoud (1999) também diz que “construir uma competência significa aprender a identificar e a encontrar os conhecimentos pertinentes”. Por isso, “se estiverem já presentes, organizados e designados pelo contexto, fica escamoteada essa parte essencial da transferência e da mobilização”.

As habilidades e competências estatísticas estão expressas nos objetivos educacionais da resolução Conselho Nacional de Educação - CNE/98 (BRASIL, 2000, p.9), quando apresenta a matemática como integrante do desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico. Dessa forma, os PCNs contém a matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias, que embasam a Educação Básica no Brasil, contemplando sete competências, das quais duas, Quadro 1 e 2, que dizem respeito ao Letramento Estatístico, são o foco desta pesquisa.

Quadro 1.
Competência da área 6

Competência - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
Habilidade 24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências. **Habilidade 25** - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. **Habilidade 26** - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Quadro 2.
Competência da área 7

Competência - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
Habilidade 27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. **Habilidade 28** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade. **Habilidade 29** - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação. **Habilidade 30** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Embasado nesta revisão literária, que diz respeito a construção de habilidades e competências acerca do Letramento Estatístico, emana o caminho metodológico percorrido para o desenvolvimento desta pesquisa.

Metodologia

Embasado na revisão bibliográfica na área da Educação Estatística e na legislação brasileira na Área de Matemática e suas Tecnologias, na qual está inserida a Estatística, foi elaborado um instrumento para identificar as competências e habilidades de estudantes egressos da Educação Básica, recém-ingressos em cursos de graduação de uma universidade pública ao Sul do Brasil. Este instrumento contemplou 20 itens, e foi respondido por uma amostra de 200 estudantes.

Estes itens foram construídos por pesquisadores e estudantes do laboratório de Educação Estatística. Inicialmente, foi realizada uma pesquisa nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, de 1998 a 2011, a fim de selecionar os itens da área de Matemática e suas tecnologias que envolviam conceitos de Estatística. Destes foram selecionadas 20 itens, os quais foram reelaborados, mantendo a habilidade e a competência do item original. Das sete habilidades descritas na legislação, quatro foram contempladas no instrumento.

A pesquisa foi realizada no inicio do 1º semestre do ano letivo de 2013, quando os estudantes estavam iniciando as disciplinas de Estatística, em seus respectivos cursos de graduação. O instrumento foi aplicado em sala de aula, sendo que a participação na pesquisa foi voluntária, configurando uma amostragem por conveniência. Por este motivo, as análises aqui realizadas tem por finalidade a descrição dos resultados obtidos, através de gráficos, médias e proporções.

Resultados e Discussão

Participaram desta pesquisa 200 estudantes de graduação de diferentes cursos, a saber: Licenciatura em Química, Bacharelado em Química, Ciências Contábeis, Administração, Ciências Econômicas. Engenharia de Alimentos, Sistemas de Informação, Psicologia, Licenciatura de Matemática, Geografia Bacharelado e Enfermagem. Os instrumentos de todos os respondentes foram analisados em um único bloco, sendo analisado, em separado, cada um dos itens.

Pode-se observar a relevancia do número de estudantes que acertaram os ítens Q1, Q7 e Q13 (Figura 1). Nessas três questões, os respondentes deveriam utilizar as informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferencias. Esses itens contemplam a habilidade 24 dos PCNs. Observou-se assim que a maioria dos estudantes que concluem a Educação Básica desenvolveram esta habilidade.

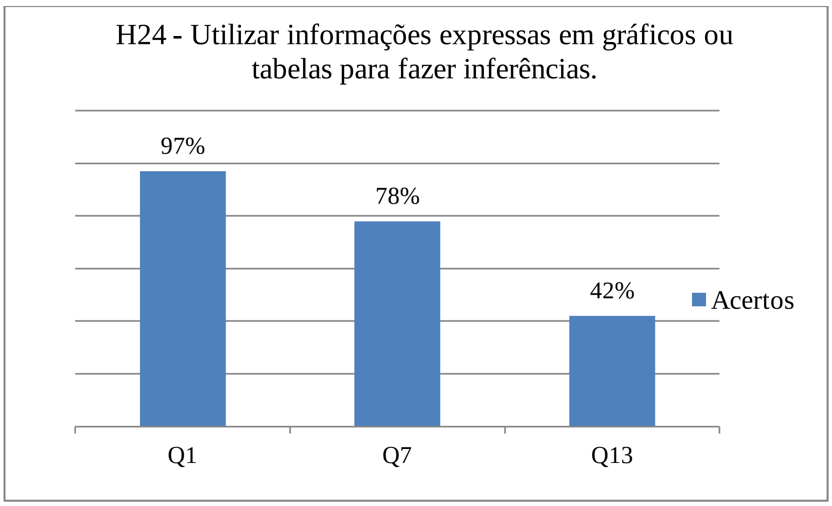


Figura 1. Habilidade 24

Os itens Q3, Q4, Q8 e Q12, com seus percentuais de acertos exibidos na Figura 2, exigiam que os estudantes resolvessem problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos, contemplados pela habilidade 25. Nesses itens, o número de estudantes que acertaram essas questões foi pequeno, isso mostra que os estudantes ingressam no Ensino Superior sem pleno desenvolvimento de habilidades para saber resolver problemas com dados estatísticos.

Na figura 3, a seguir, as questões Q10, Q11, Q14, Q19 e Q20, as quais contemplavam a habilidade 27 dos PCNs os estudantes tinham que calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequencia de dados agrupados (não em classe) ou em gráficos. Com a análise destas questões pode-se observar que a maioria dos estudantes apresentam essa habilidade.

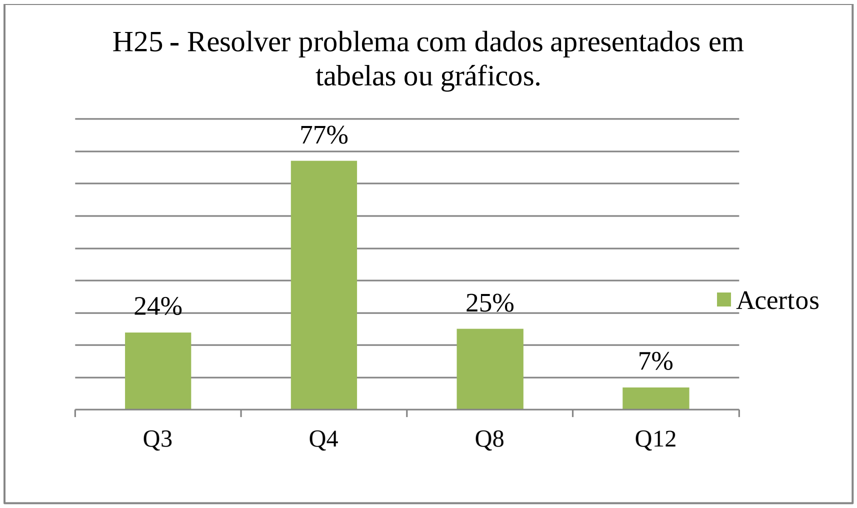


Figura 2. Habilidade 25

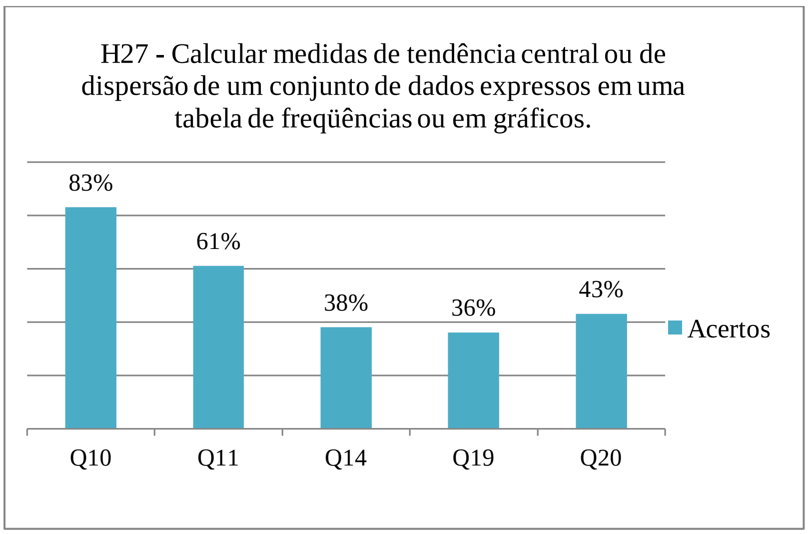


Figura 3. Habilidade 27

Os oito itens representados pela Figura 4, contemplavam questões as quais envolviam situações problema, envolvendo conhecimentos de estatística e probabilidade, contemplados na habilidade 28. Observou-se uma porcentagem baixa de estudantes que acertaram esses itens, estes dados mostram que os estudantes apresentam menos habilidade para resolver questões que envolvam situação problema, ou seja, que demande interpretação, atenuando a ausência de habilidade quando acompanhadas cálculos de estatística e probabilidade.

Ao obervar essas análises, toma-se consciência que o Ensino da Estatística precisa superar a mera aprendizagem de fórmulas e cálculos, passando, segundo Bayer, Echeveste e Seibert (2010), a enfatizar "a importância da interpretação e do entendimento dos conceitos estatísticos no contexto da pesquisa procurando fazer com que o aluno valorize a aplicação destes conceitos na tomada de decisão".

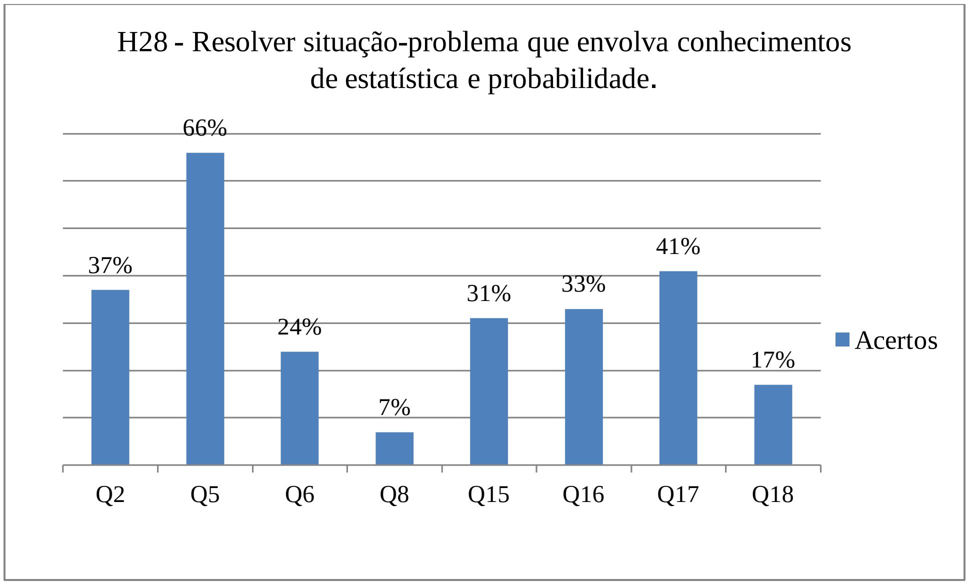


Figura 4. Habilidade 28

Carzola (2008) diz que "o professor de matemática não pode se limitar a ser o mero repassador de fórmulas e algoritmos, mas deve dar sentido e vida a essa matemática escolar que parece tão distante, mas que se faz cada vez mais necessária".

A possível falta de relação entre teoria e prática, entre conhecimento científico e cotidiano, tem resultado em estudantes que, apesar de conseguirem aplicar fórmulas e realizarem cálculo, não entendem os conceitos estatísticos. Esse equívoco didático, segundo Viali (2007) faz com que o pouco interesse que os estudantes possam ter pela disciplina seja rapidamente perdido, levando a nenhuma ou quase nenhuma aprendizagem.

Para Becker (2008) esse "mecanismo consegue depredar a Estatística, impossibilitando entendê-la como ciência". Ainda salienta que não há estudante "que não esteja de posse de algum fenômeno estatisticamente descritível. No entanto, o docente ignora isso e traz problemas já confeccionados para que o aluno, munido de calculadora, simplesmente aplique técnicas estatísticas, calcule", resultando assim nos resultados que pode-se observar, ou seja, suas habilidades para resolver situações problemas e interpretar medidas estatísticas, são menores se comparadas às habilidades para fazer simples inferências a partir de informações expressas em gráficos e para calcular medidas estatísticas.

Considerações Finais

Os resultados obtidos nesta pesquisa possibilitaram constatar que os estudantes universitários são mais competentes para fazer simples inferências a partir de informações expressas em gráficos e calcular medidas de tendência central ou de dispersão; se comparadas com suas competências em resolver situações problemas com dados apresentados em gráficos ou tabelas, ou que envolvam interpratação de conhecimentos de estatística e probabilidade.

De modo resumido, foi possível constatar que os itens que contemplavam habilidades e competências para utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferencias obtiveram 72,3% de acertos. Já os itens que verificavam nos estudantes as habilidades para resolver problemas com dados organizados em gráficos ou tabelas, o percentual médio de acertos foi de 33,25%. A porcentagem média de acertos no itens que visavam identificar as habilidades dos estudantes para calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequência de dados agrupados (sem intervalo de classe) ou gráfico foi de 52,2%. E a porcentagem média de acertos nos itens que foram incluídos no instrumento a fim de verificar se os estudantes apresentavam competências para resolver situações problema envolvendo conhecimentos de estatística e probabilidade, foi de 32%.

A partir dos resultados desta pequisa, pode-se concluir que que a Educação Básica, no que diz respeito a Educação Estatística, ainda não atende plenamente os objetivos propostos e esperados pela legislação brasileira, o que justifica a continuidade das pesquisas que este grupo desenvolve, a fim de diagnosticar e nortear ações do Ensino de Estatística na Educação Básica, bem como na Educação Superior.

Referências

Bayer, A.; Echeveste, S.; Seibert, L. (2010). *Classificação dos erros mais frequentes na resolução de problemas estatísticos*. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 5., 2010, Canoas. Anais. Canoas: V CIEM. (CD-ROM)

Becker, F. (2008). *A Espistemologia do Professor: o cotidiano da escola*. 13ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio* – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC. Disponível em: < http://portal.Mec.Gov.Br/seb/arquivos/pdf/ciencian.PDP>. Acesso em 05/6/2013.

Cazorla, I. (2008). O papel da Estatística na leitura do mundo: O Letramento Estatístico. *Publ. UEPG Ci. Hum*., Ci. Soc. Apl., Ling., Letras e Artes, Ponta Grossa, 16 (1), jun. p.45-53.

Cazorla, I. M.; Santana, E. (2010). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarm.

Gal, I. (2000). Adult's Statistical literacy: Meanings, Components, Responsabilities. *International Statistical Review*, n. 70.

Garfield, J.; Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice. *Springer Publishers*.

Moore, D. S.; Cobb, G. W. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*. vol. 104, n. 9, pp. 801–823, Nov.

Perrenoud, P. (1999). *Construir competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed.

Vendramini, C. M. M.; Brito, M. R. F. (2001). Relações entre atitude, conceito e utilidade da estatística. *Psicologia Escolar e Educacional*, v.5 n.1. Campinas, jun.

Viali, L. (2007). *Aprender fazendo: como tirar proveito do computador para melhorar a aprendizagem da estatística*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte: ENEM.

Wallman, K.K. (1991). Enhancing Statistical Literacy: Enriching our Society. *Journal of the American Statistical Association*, v. 88, n. 421, p. 1-8.

Jogo de fixação de aprendizagem em Estatística no Ensino Fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
drapoj@uol.com.br
Amanda Aparecida Rocha **Machado**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
amandamachado_56@hotmail.com
Joana dos Santos **Silva**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
jo.uftm@hotmail.com
Valéria **Ciabotti**
Escola Estadual Professora Corina de Oliveira
Brasil
valéria_ciabotti@hotmail.com

Resumo

Muitas dificuldades são encontradas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especificamente nos conteúdos relacionados à Estatística. Este trabalho tem como objetivo apresentar a importância do jogo pedagógico no processo ensino e aprendizagem de conceitos básicos de Estatística e Probabilidade. Para tanto foi desenvolvido o jogo “Brincando com a Estatística e a Probabilidade” para ser aplicado a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com a intenção de facilitar a compreensão de tais conteúdos. Em seus relatórios a maioria dos alunos declarou ter gostado da atividade e que haviam aprendido com a mesma. Com a aplicação do jogo, pode-se perceber que o jogo confeccionado funcionou como um apoio metodológico para a aula de Estatística e Probabilidade, deixando-a mais estimulante e atrativo para os alunos.

Palavras-chave: jogos pedagógicos, ensino de estatística e probabilidade, ensino fundamental.

Abstract

Many difficulties are encountered in the process of teaching and learning in mathematics, specifically in content related to Statistics. This work aims to present the importance of play in the teaching process teaching and learning of basic concepts of Statistics and Probability. Therefore we developed the game "Playing with Statistics and Probability" to be applied to students in the 9th grade of elementary school with the intention of facilitating the understanding of such content. In their reports most students said they enjoyed the activity and what they learned with the same. With the application of the game, it can be made to realize that the game worked as a methodological support to class Statistics and Probability, making it more exciting and attractive to students.

Key words: educational games, teaching statistics and probability, elementary school.

Introdução

A Estatística é uma ciência destinada à coleta, análise e interpretação de dados, que envolve um conjunto de métodos para a obtenção de informações, organização e apresentação das mesmas. Tem como objetivo a compreensão de uma realidade específica, auxiliando em um melhor entendimento das situações de nosso cotidiano. Estamos rodeados pela Estatística**,** que esta em jornais, em revistas, nas rádios, na televisão e até mesmo na *internet*. Além disso, a Estatística pode ser aplicada em diversas áreas, como por exemplo, na demografia, na indústria, na área de recursos humanos, na saúde, nas pesquisas de mercado e de opinião, etc.

Em relação à Probabilidade, considera-se que esta pode promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos.

Pode-se também verificar a Probabilidade em nosso dia-a-dia, como, por exemplo, na Biologia, quando se procura obter previsões de caráter genético; na política é muito utilizado nas previsões eleitorais, e até mesmo em um simples jogo de cara ou coroa. Então se percebe que a Probabilidade também desempenha um papel fundamental em nossas vidas.

Frequentemente presencia-se a falta de preparação de professores em relação a conteúdos estatísticos, sendo que professores de matemática, inclusive os recém-formados têm recebido poucos conhecimentos sobre estatística na sua preparação profissional e que segundo Bratton (2000) apud Rocha, Bayer, Bittencourt e Echeveste (2004) acaba dificultando o ensino da Estatística pelos mesmos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) recomendam o trabalho com Estatística com a finalidade de que o estudante construa procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, e que seja capaz de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos, como por exemplo, pesquisas sobre Saúde, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo etc., de forma a contextualizar os conceitos estatísticos, transmitindo significado aos alunos.

Em relação à Probabilidade, os mesmos PCN consideram que esta auxilia na compreensão dos acontecimentos do dia-a-dia que são de natureza aleatória, permitindo a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, portanto cabe à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos, como por exemplo, trabalhar com espaço amostral referente à quantidade de alunos da escola, quantidade de professores, etc.

De acordo com Lopes (2008), o ensino e a aprendizagem de Estatística e de Probabilidade devem ser baseados em investigações e em resolução de problemas, de modo a permitir que o conhecimento matemático e estatístico possibilite ao estudante adquirir habilidades para compreender e lidar adequadamente com sua realidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) sugerem o recurso dos jogos como um dos caminhos para se "fazer Matemática" na sala de aula, ora fornecendo contextos dos problemas ora servindo como instrumento para a construção de estratégias de resolução de problemas, neles é observado que:

> os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações- problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (Brasil, 1998, p. 46)

As atividades com jogos, segundo os PCN (Brasil, 1998) representam um importante recurso metodológico em sala de aula, pois é uma forma interessante de propor problemas devido a ser atrativo para o aluno e também por favorecer a criatividade na elaboração de estratégias durante o jogo.

Almeida (1998, p.19), afirma que

> os jogos constituíram sempre numa forma de atividade inerente ao ser humano. Entre os primitivos, por exemplo, a atividade de dança, caça, pesca e lutas eram tidas como de sobrevivência, ultrapassando muitas vezes o caráter restrito de divertimento e prazer natural. As crianças, nos jogos, participam de empreendimentos técnicos e mágicos. O corpo e o meio, a infância e a cultura adulta faziam parte de um mundo só. Esse mundo podia ser pequeno, mas era eminentemente coerente, uma vez que os jogos caracterizavam a própria cultura, a cultura era a educação, e a educação representava a sobrevivência.

Souza (2002, p. 132), expressa a importância de se trabalhar com o jogo na sala de aula dizendo que

> a proposta de se trabalhar com jogos no processo ensino-aprendizagem da Matemática implica numa opção didático-metodológica por parte do professor, vinculada às suas concepções de educação, de Matemática, de mundo, pois é a partir de tais concepções que se definem normas, maneiras e objetivos a serem trabalhados, coerentes com a metodologia de ensino adotada pelo professor.

O jogo pode ser considerado como um meio pelo qual o educando expressas suas qualidades espontâneas e que permite ao educador compreender melhor seus alunos. Nas palavras de Santos (2001, p. 90):

> jogo é uma palavra, uma maneira de expressar o mundo e, portanto de interpretá-lo. Precisamos, pois reconhecer que estamos tratando de uma concepção complexa na medida em que, em torno de um nó de significações, giram valores bem diferentes: a noção aberta a interpretações e, sobretudo, a novas possibilidades de análise. Pode-se descobrir um paradigma dominante em torno da oposição ao trabalho,

mas também potencialidades diversas conforme se favoreça essa ou aquela direção de seu desenvolvimento.

Assim, os jogos podem ser usados na Educação Matemática para estimular e desenvolver a habilidade de pensar de forma independente, contribuindo para o processo de construção de conhecimento lógico matemático (Kamii e Joseph, 1992).

O jogo, considerado um ato de brincar, foi destacado nos estudos de Vygotsky e de seus discípulos, pois exerce uma grande influência no desenvolvimento de uma criança, sendo a atividade um meio para a aprendizagem. Nessa teoria, as regras de um jogo exercem um importante papel, pois fazem com que a criança atue num nível superior ao que ela se encontra de acordo com a sua idade (Elkonin, 1998). Os jogos favorecem situações imaginárias, sendo um meio para desenvolver o pensamento abstrato, apresentando assim uma função pedagógica.

Os jogos podem ser utilizados para introduzir, fixar ou concluir um conteúdo, ou seja, é preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados. Assim, um dos motivos para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la (Souza, 2006).

Além de o jogo ser um agente facilitador para a assimilação dos conteúdos matemáticos, ele possibilita uma interação social entre os alunos, estimula um pensamento crítico-reflexivo, ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolver situações-problemas.

Por isso é interessante desenvolvê-lo conforme proposto por Kamii (1991) e Krulik (1993) apud Smole, Pessoa, Diniz e Ishihara, (2008) quando dizem que o jogo deve ser desenvolvido para dois ou mais jogadores, tendo um objetivo a ser atingido; as decisões quanto ao jogo devem ser discutidas com todo o grupo, e por fim, o jogo não deve ser mecânico e sem significados para os jogadores, esse deve permitir a possibilidade de usar estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia destes elementos nos resultados obtidos.

Para que o jogo seja eficaz é necessário que o professor saiba trabalhar com o mesmo, mostrando para os alunos o conteúdo presente na atividade proposta e também, aja como um orientador e facilitador da aprendizagem. Os alunos também não podem ver o jogo como uma simples brincadeira, pois durante a atividade, surgirão várias situações-problemas e dúvidas, que exigirá um maior esforço por parte dos alunos, possibilitando que estes assimilem os conteúdos com os exercícios pedagógicos. Os jogos podem ser utilizados em todos os níveis de escolaridade e também para ensinar vários conteúdos, desde que o professor tenha disponibilidade e organização quanto à atividade a ser desenvolvida.

Com este recurso didático o professor consegue verificar quais as principais dificuldades que seus alunos apresentam, até os alunos mais tímidos que muitas vezes não participam das aulas por medo de errar, com essas dinâmicas, acabam se tornando mais autônomos e confiantes, permitindo ao professor esclarecer dúvidas que aqueles não se arriscariam a expô-las durante uma aula expositiva. Segundo Borin (1996, p. 9),

> outro motivo para a introdução de jogos nas salas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos estudantes que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas a seus processos de aprendizagem.

Por serem conteúdos que muitas vezes os alunos demonstram dificuldades, espera-se que tanto a Estatística quanto a Probabilidade possam ser trabalhadas por meio de jogos didáticos, pois através destas atividades os alunos constroem seus conhecimentos com maior facilidade, e se sentem mais motivados durante o processo de aprendizagem.

Assim, serão trabalhados conteúdos estatísticos e probabilísticos referentes ao 9º ano do Ensino Fundamental, por meio da utilização de um jogo, com a intenção de facilitar o processo de ensino-aprendizagem tanto para o professor, quanto para o aluno, possibilitando além da assimilação do conteúdo, uma maior interação entre aluno/aluno e aluno/professor.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo apresentar a contribuição de um jogo pedagógico de fixação no processo de aprendizagem da matemática, especificamente com conteúdos de estatística e probabilidade.

Procedimentos metodológicos

Este trabalho foi desenvolvido com uma turma 9º ano do Ensino Fundamental, da Escola Estadual Corina de Oliveira, escola participante do projeto Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID.

Dessa forma foi criado um jogo que contém elementos básicos da Estatística e Probabilidade, considerando algumas propostas dos PCN, de forma a possibilitar aos alunos a leitura, interpretação e organização de dados; construção de tabelas e gráficos; concepção e compreensão de: espaço amostral, média, moda e mediana; indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão; frequência absoluta e relativa.

O jogo pedagógico, Figura 1, foi confeccionado com a intenção de utilizá-lo para a fixação de conteúdos de Estatística e Probabilidade no 9º Ano do Ensino Fundamental.

Utilizou-se um diário de campo em que foi registrada as reações dos alunos, dúvidas e comentários dos mesmos durante a aplicação do jogo.

Durante a realização do jogo, foi entregue uma folha de registro aos alunos, para que estes fizessem as anotações dos cálculos realizados durante a atividade, e em seguida foram recolhidas as folhas para realizar uma avaliação dos cálculos apresentados por cada um dos grupos.

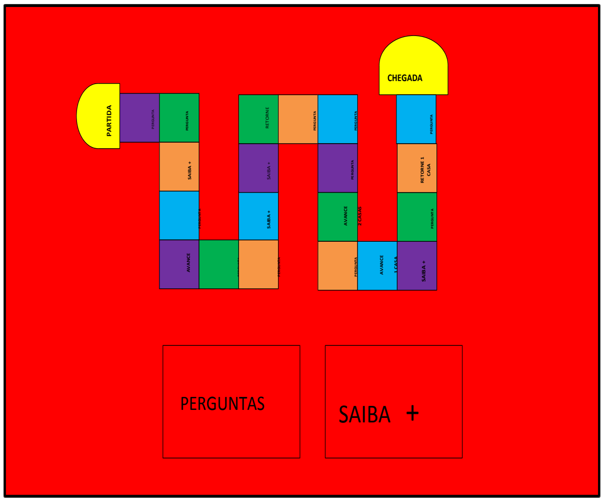


Figura 1. Tabuleiro do Jogo “Brincando com Estatística e Probabilidade”.

Sobre o Jogo "Brincando com a Estatística e Probabilidade"

Este jogo é indicado para ser utilizado no 9º ano do Ensino Fundamental, auxiliando na fixação de conteúdos estatísticos e probabilísticos. Apresenta também situações-problemas, para que o aluno construa seu pensamento estatístico e probabilístico. Além disso, o jogo pode auxiliar o professor a identificar possíveis dificuldades dos alunos em relação a tais conteúdos. O jogo de acordo com a Figura 1 é composto por um roteiro de 20 casa/espaços e que serão transpostos quando os grupos responderem assertivamente ás "Perguntas" ou questões identificadas como "Saiba mais", além de casas/espaços onde há a possibilidade de avançar casas denominadas "Avance" ou outras em que se tenha que retornar a espaços/casas denominadas "Retorne".

Orienta-se que organização da turma em que se realize a atividade deva ser em grupos de dois a oito integrantes cada sendo necessários os seguintes recursos: (1) um tabuleiro conforme modelo da Figura 1, (2) peças coloridas (sendo 1 de cada cor) para identificar cada um dos grupos; e (3) um dado comum.

Regras

O jogo tem as seguintes regras: (1) No início do jogo, os grupos devem colocar suas peças na casa "Partida", e em seguida, joga-se o dado para verificar qual grupo iniciará o jogo. O grupo que obter o maior número inicia a partida. (2) O grupo que tirou o maior número do dado joga-o novamente e posiciona sua peça na casa correspondente ao valor do dado; (2) Se a peça que representa o grupo cair na casa das perguntas, um dos componentes do grupo terá que tirar uma pergunta do monte denominado "Pergunta" e ler para todos os participantes do jogo. Em seguida os 2 (dois) grupos responderão à pergunta em folha, em branco, disponibilizada. Caso o grupo acertar a pergunta deverá andar no tabuleiro a quantidade de casas correspondentes à ficha da pergunta que foi retirada. Caso o grupo erre a pergunta, não andará nem recuará nenhuma casa, mas o grupo que não estiver participando da rodada terá o direito de responder à questão, podendo andar o total de casas correspondentes à questão, caso acerte. Se os dois grupos errem, o responsável pela condução do jogo irá interferir aproveitando o momento para sanar dúvidas quanto a dificuldade apresentada; (3) Caso a peça que identifica o grupo cair na casa "Saiba +", deverá ler a curiosidade em voz alta para todos os participantes e mover a peça no tabuleiro a quantidade de casas que a ficha determina; (4) Caso a peça que representa o grupo cair na casa "Avance" casas, a peça deverá ser movida o tanto de casas correspondentes, e na casa "Retorne", deverá fazer o mesmo; (5) Ganha a partida o grupo que completar uma volta completa no tabuleiro.

Aplicação do Jogo Pedagógico

A aplicação do jogo foi realizada em uma turma de 9º Ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Corina de Oliveira, em Uberaba-MG e foram utilizadas duas aulas para a prática (desenvolvimento do jogo). Primeiramente foi informado aos alunos sobre a atividade e explicado as regras do jogo conforme a Figura 2.

Figura 2. Apresentação da atividade pelos pesquisadores.

Como se tratava de um teste para a verificação quanto às questões elaboradas e as regras do jogo foram disponibilizados apenas dois tabuleiros para uma turma de 32 alunos. Para que pudesse ser iniciado o jogo, pediu-se aos alunos que se dividissem em dois grupos, tendo cada grupo com 16 integrantes (oito contra oito).

Devido à quantidade de integrantes em cada grupo pediu-se que elegessem um representante para realização da movimentação das peças e leitura das perguntas e curiosidades.

Desta forma, foi entregue um tabuleiro para cada grupo, e em seguida, os alunos foram orientados que as perguntas deveriam ser respondidas num tempo máximo de cinco minutos sendo na sequência iniciado o jogo, com acompanhamento de pelo menos uma pessoa para avaliar o seu desenvolvimento.

Ao final do jogo recolheram-se as folhas que os alunos utilizaram para resolver as questões e pediu-se para que esses escrevessem o que acharam da atividade realizada. Com este material em mãos pode-se perceber que a maioria dos alunos disse ter gostado da atividade e que aprenderam de uma forma divertida. Encontram-se abaixo alguns trechos do que foi escrito pelos alunos:

"A aula hoje foi bem diferente e interessante. Aprendemos bastante e reforçamos aquilo que já sabíamos. Foi legal, pois saímos da rotina e nos divertimos." – Aluno 1.

"Eu gostei muito do jogo, achei que ajudou muito. Reforçou bastante o que a professor ensinou. Acho que se cada matéria dada tivesse um jogo tipo este, nos ajudaria muito." – Aluno 2.

Acompanhamento da aplicação do Jogo no Grupo 1

Durante a aplicação do jogo, conforme a Figura 3, os alunos demonstraram interesse pela atividade sendo que muitos declararam que as aulas de Matemática ficariam melhores se às vezes tivesse um jogo como este e que era positivo para fixar o conteúdo.

Figura 3. Grupo 1 durante a aplicação do jogo

Os alunos tiveram algumas dificuldades em questões que apresentavam muitos valores como, por exemplo, na questão de número 6: "Os seguintes dados representam o ROL dos diferentes preços (em R$) de um determinado produto pesquisado em 20 lojas: 50, 50, 51, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 54. Considerando os dados acima, qual a frequência relativa da distribuição de dados?"

Questões similares geraram dificuldades durante a realização do jogo, pois por terem muitos valores os alunos acabavam errando ao efetuar as operações, além disso, era difícil a memorização de tantos valores pelos alunos, uma vez que havia apenas uma ficha para os 16 integrantes. Foi necessário então que fossem escritos os números no quadro para que todos os jogadores tivessem acesso aos valores propostos pela questão. Percebeu-se que com esse tipo de questão perde-se a dinâmica do jogo, tornando a rodada monótona.

Percebeu-se que em algumas operações básicas de matemática como: soma; porcentagem; regra de três; e divisão, os alunos apresentavam deficiências ou erravam por falta de atenção. Grande parte dos alunos demonstrou domínio dos conteúdos de Estatística e Probabilidade propostos, embora em determinadas ocasiões, eles consultavam o caderno e o livro o que era permitido. Cabe ressaltar que em alguns momentos interviu-se no processo e alguns alunos foram auxiliados no desenvolvimento de operações básicas e também a lembrar do conteúdo que seria pré-requisito para responder as questões sorteadas.

Acompanhamento da aplicação do Jogo no Grupo 2

A maioria dos alunos participou do jogo, mas como eram muitos integrantes, conforme visualizado na Figura 4, os alunos que estavam distantes do tabuleiro, não participaram ativamente da atividade. Observou-se que a maioria dos alunos acertou às questões selecionadas, tanto os que haviam retirado a pergunta assim como o grupo adversário.

Figura 4. Grupo 2 durante a aplicação do jogo.

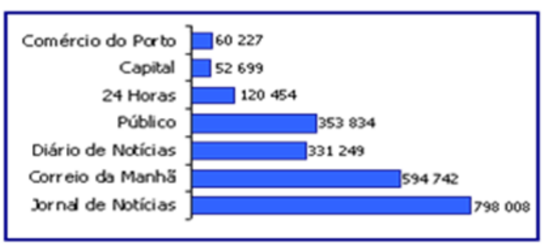
Percebeu-se que os alunos dominavam o conteúdo, principalmente os relacionados à Probabilidade. Havia, por exemplo, uma questão que perguntava qual a probabilidade de sair o número sete no lançamento de um dado de seis faces e diante dessa pergunta os alunos se olharam meio confusos, e então um aluno respondeu:

Aluno: “Isso é pegadinha, não é possível sair um sete no dado”.

Foi então explicado que quando se trata de um acontecimento impossível a probabilidade é igual a zero.

Em questões contendo gráficos como, por exemplo, a questão de número 33 apresentada na Figura 5, os alunos não sabiam muito bem como resolver, pois tentaram efetuar operações, sendo que esta questão envolvia uma simples análise do gráfico para a obtenção da resposta.

33)O pai do Ricardo lê determinado jornal todos os fins-de-semana. Um dia, o Ricardo, curioso, procurou no *site* de um jornal uma estatística sobre a quantidade de jornais vendidos diariamente e encontrou o gráfico representado a seguir.



Qual a moda? Explique

Figura 5. Questão 33 do teste de avaliação.

Quando foi percebido que os alunos tentavam fazer operações e que estavam se distanciando do objetivo da questão, começou-se a questionar os alunos:

Pesquisador: “Vocês tem certeza que neste exercício precisa fazer algum tipo de operação? Verifiquem o que indica o exercício.”

Nesse momento os alunos leram novamente a questão, e continuou-se:

Pesquisador: “O que é moda?”,

Alunos: “É o que acontece mais.”

Pesquisador: Se a moda é o evento que ocorre com mais frequência e, portanto, o que acontece mais, qual é a moda nessa questão?”

Aí os alunos começaram a perceber que não precisavam fazer nenhum tipo de operação matemática, mas apenas analisar o gráfico com atenção. Então começaram a responder:

Alunos: “Então a moda é o Jornal de Notícias.”

Questionou-se então aos alunos o porquê de o Jornal de Notícias ser a moda, e responderam:

Alunos: “Porque é o que vende mais.”

Depois de confirmar que a resposta estava correta formalizou-se o conceito de moda.

Observou-se que às vezes os alunos entendiam como resolver as questões, mas erravam nas operações de multiplicação, soma ou divisão. Questões com muitos valores também causaram dificuldades durante a aplicação do jogo, pois assim como no Grupo 1, havia apenas uma ficha para todo o grupo, fazendo com que muitos não tivessem acesso aos valores, sendo necessário que fossem escritos os valores na lousa.

Outro aspecto interessante a ser destacado refere-se a quando a peça que representava o grupo caía na casa “Saiba +”. O aluno representante do grupo lia a informação para todos os jogadores e depois avançava o número de casas correspondentes da ficha. Percebeu-se que durante a leitura das cartas “Saiba +” muitos alunos se dispersavam não dando atenção para a leitura da curiosidade.

Os alunos pareceram gostar da atividade, pois quando o jogo terminou solicitaram que fosse reiniciado o jogo.

Conclusão sobre as observações da prática do jogo

Pôde-se verificar com a aplicação do jogo, que a maioria dos alunos gostou da atividade, pois esta ocorreu de forma divertida e permitiu que os alunos saíssem da rotina. A maioria dos alunos participou ativamente do jogo, verificando ainda que poucos alunos não tentaram responder as questões, sendo que em alguns momentos simplesmente pegavam as respostas prontas com os colegas. Isso pode ter ocorrido devido à falta de interesse do aluno em jogar ou devido ao fato de ter apenas um tabuleiro para 16 alunos, fazendo com que os alunos que estavam mais distantes do tabuleiro se desmotivassem.

A partir destas observações percebeu-se que o jogo deve ser jogado por no máximo 8 integrantes (quatro contra quatro) para possibilitar que todos participem das resoluções das questões e que estas não devem conter muitos valores pois podem causar desinteresse e também tornar o jogo monótono.

A atividade mostrou-se gratificante, pois a maioria dos alunos demonstrou interesse, tentando resolver as questões selecionadas, questionando sobre o conteúdo e sobre a forma de resolver as questões.

E em seus relatórios a maioria dos alunos disse ter gostado da atividade e que haviam aprendido com a mesma. Um dos depoimentos mostra esta opinião:

Aluno: “O jogo elaborado foi bem criativo, nele podemos aprender mais de um modo divertido”.

Com a aplicação do jogo, percebeu-se que este funcionou como um apoio metodológico para a aula que apresentem conteúdos de Estatística e Probabilidade, deixando-a mais estimulante e atrativa para os alunos.

Considerações Finais

Espera-se que com a utilização do jogo no processo ensino e aprendizagem este possa ser visto bem mais que simples brincadeira e que seja interpretado como método didático facilitador no processo ensino e aprendizagem em relação aos conteúdos estatísticos e probabilísticos.

O jogo possibilita que o aluno participe da construção de seu conhecimento, deixando de ser passivo e se tornando agente de sua aprendizagem. Na situação do jogo o aluno se torna mais confiante, expressando o que pensa e tirando suas próprias conclusões. O jogo, segundo Grando (2004), favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender.

Durante a aplicação do jogo é fundamental que o professor realize intervenções pedagógicas para que os alunos possam perceber e participar da construção dos conceitos matemáticos. Cabe também ao professor escolher jogos que proporcionem desafios aos alunos, tendo claros os seus objetivos e o conteúdo a ser trabalhado. O professor deve planejar bem suas atividades para que estas não tenham um caráter de "jogar por jogar" e sim auxiliar os alunos no processo ensino e aprendizagem.

Este trabalho é visto como relevante para a Educação Matemática, uma vez que apresenta a necessidade, não só de uma boa formação profissional do professor em relação aos conteúdos em questão, mas também a conscientização da importância de tais conteúdos para as séries finais do Ensino Fundamental, assim como a elaboração de recursos didáticos, como jogos, que visam contribuir para o processo ensino e aprendizagem de Estatística e Probabilidade.

Referências

Almeida, P. N. (1998). *Educação Lúdica; prazer de estudar – Técnicas e jogos pedagógicos.* Rio de Janeiro: Loyola.

Bardin, L. (2007). *Análise de Conteúdo***.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2007.

Borin, J. (1996). *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamenta*l. MEC / SEF, Brasília.

Elkonin, D. B. (1998). *Psicologia do Jogo*. São Paulo: Martins Fontes.

Grando, R.C. (204). *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.* São Paulo: Paulos, 2004.

Lopes, C. A. E. (2008). Reflexões teórico-metodológicas para a educação estatística. In: Lopes, C. A. E.; Curi, E. (Orgs.). *Pesquisas em educação matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos: Pedro & João.

Kamii, C. (1991). *Piaget para a educação pré – escolar*. Trad. Maria Alice Bad Denise. Porto Alegre. Artes Médicas.

Kamii, C.; Joseph, L.L. (1992). *Aritmética:* Novas Perspectivas – implicações da teoria de Piaget. Tradução de Marcelo Cestari T. Lellis, Marta Rabioglio e Jorge José de Oliveira. 8ª ed. Campinas: Papirus.

Minas Gerais. (2011). Secretaria de Educação. Conteúdo Básico Comum. Belo Horizonte: SEE-MG.

Rocha, J., Bayer, A., Bittencourt, H. R., & Echeveste, S. (2004). Formandos em matemática x estatística na escola: estamos preparados? In: *XII Simpósio Sulbrasileiro de Ensino de Ciências*, Canoas, Brasil.

Santos, S. M. P. (2001). (Org.). *A ludicidade como ciência*. Petrópolis, RJ. Vozes.

Smole, K. S., Pessoa, N.; Diniz, M. I., & Ishihara, C. (2008). *Jogos de Matemática*: de 1º e 3º ano. Porto Alegre: Artmed. (Cadernos do Mathema – Ensino Médio)

Souza, M. F. G. (2002). *Fundamentos da Educação Básica para Crianças*. Volume 3, In: Módulo 2. Curso PIE – Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização. Brasília, UnB.

Souza, L. C. da C. (2006). *Uma intervenção pedagógica com jogos nas aulas de reforço em matemática*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Jogos de linguagem matemáticos de mulheres rendeiras de Florianópolis-SC-Brasil

Amanda **Magalhães**
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Brasil
magalhães.amanda@gmail.com[1]

Claudia Glavam **Duarte**
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Brasil
claudiaglavam@hotmail.com[2]

Resumo

Essa comunicação é resultado de uma pesquisa de mestrado que está sendo realizada no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina com mulheres rendeiras de Florianópolis–SC-Brasil. O objetivo é descrever os jogos de linguagem matemáticos dessa forma de vida e as possíveis semelhanças de família com os jogos de linguagem praticados na forma de vida escolar. A pesquisa analisa, de forma específica, a tessitura da renda de bilro e com o propósito de apreender em seus ínfimos detalhes o “fazer renda” utilizamos entrevistas semiestruturadas, observações e filmagens realizadas em uma comunidade no norte da ilha de Florianópolis, localizada na Praia do Forte, litoral Catarinense, no sul do Brasil. As lentes teóricas que servirão para compor a análise advêm da Etnomatemática e das contribuições de Michel Foucault e Ludwig Wittgenstein, em sua segunda fase caracterizada pela obra *Investigações Filosóficas*.

Palavras-chave: Renda de bilro, jogos de linguagem, semelhanças de família, Etnomatemática, Educação Matemática.

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.

[2] Doutora em Educação pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS). Professora do Departamento de Metodologia de Ensino - MEN da Universidade Federal de Santa Catarina e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – UFSC, Brasil.

Abstract

This communication is the result of a research that is being conducted in the Post-Graduate Education in Science and Technology, Federal University of Santa Catarina with women lace makers of Florianópolis, SC, Brazil. The objective is to describe the mathematical language games that form of life and possible family similarities with the language games practiced in the form of school life. The research analyzes, specifically, the fabric of Bobbin lace and with the purpose of learning in their smallest details the "make lace" used semi-structured interviews, observations and footage taken in a community in the north of the island of Florianópolis, located on Beach Forte, coastal Santa Catarina, in the south of Brazil. The theoretical lenses which serve to compose the analysis come from Ethnomatematics and contributions of Michel Foucault and Ludwig Wittgenstein, in its second phase characterized by the work *Philosophical Investigations*.

Keywords: Bobbin lace, language games, family similarities, Ethomathematics, mathematics Education.

Armação da renda

A pesquisa analisa, de forma específica, a tessitura da renda de bilro, legado deixado pelos colonizadores portugueses vindos das ilhas dos Açores, que, em 1748, chegaram a Santa Catarina-Brasil. O Governo português, com a finalidade de manter a terra conquistada, enviou para Florianópolis famílias açorianas que tinham como prática principal a pesca. A escolha de pescadores tinha como propósito garantir o sustento das famílias que aqui aportavam. Enquanto os homens dedicavam-se a pesca e a pequenas lavouras para a manutenção do lar, as mulheres teciam sua renda, entrelaçando os bilros em suas almofadas.

Com o propósito de apreender em seus ínfimos detalhes o "fazer renda" utilizamos entrevistas semiestruturadas, observações e filmagens realizadas em uma comunidade no norte da ilha de Florianópolis, localizada na Praia do Forte, litoral Catarinense, no sul do Brasil.

As lentes teóricas que servirão para compor essa comunicação advêm da Etnomatemática juntamente com as contribuições dos filósofos Michel Foucault e o "último" Ludwig Wittgenstein, em sua fase caracterizada pela obra *Investigações Filosóficas*. A Etnomatemática, como uma perspectiva da Educação Matemática vem assumindo, desde seu surgimento, diferentes contornos conceituais. Portanto, devido a utilização de diferentes aportes teóricos torna-se impossível uma única definição para a Etnomatemática, que passa a assumir novos sentidos a partir de trabalhos que utilizam-se das teorizações pós-estruturalistas, principalmente associados ao pensamento de Foucault e a segunda fase de Wittgenstein. Apoiada nestes aportes teóricos, a Etnomatemática passa a ser caracterizada no GIPEMS-Unisinos[3]

> [...] como uma "caixa de ferramentas" que possibilita analisar os discursos que instituem as Matemáticas Acadêmica e Escolar e seus efeitos de verdade e examinar os jogos de linguagem que constituem cada uma das diferentes Matemáticas, analisando suas semelhanças de família. (Knijnik et al., 2012, p. 28)

Ao examinar os jogos de linguagem associados a outras racionalidades, que não a pertencente a matemática escolar e acadêmica, a Etnomatemática possibilita a problematização

[3] Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade, vinculado a Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), sob a coordenação de Gelsa Knijnik, pesquisadora brasileira.

do caráter universal do conhecimento matemático. Portanto essa vertente teórica, problematiza centralmente "esta 'grande narrativa' que é a matemática acadêmica – considerada pela modernidade como a linguagem por excelência para dizer o universo mais longínquo e também o mais próximo – introduzindo uma temática até então ausente no debate da Educação Matemática" (Knijnik et al., 2012, p. 24).

A Etnomatemática ao utilizar-se das ideias de Wittgenstein vai justamente colocar em suspeição a ideia de uma linguagem que se pretenderia universal, pois para este filosofo os significados das palavras dependerão de seus usos nos diversos contextos dos quais fazem parte. Não só Wittgenstein, mais também outro filosofo, Michel Foucault, contribuirá no sentido de nos possibilitar entender a Matemática Acadêmica e Escolar como discursos. Além disto, algumas ferramentas disponibilizadas por esse filosofo, como as relações poder-saber produzidas e a constituição dos regimes de verdade tem sido úteis para pensarmos o campo da Educação Matemática. Nesta perspectiva os discursos da Matemática Acadêmica e Escolar

> podem ser pensados como constituídos por (ao mesmo tempo que constituem) essa política geral da verdade, uma vez que algumas técnicas e procedimentos – praticados pela academia – são considerados mecanismos (únicos e possíveis) capazes de gerar conhecimentos (como as maneiras "corretas" de demonstrar teoremas, utilizando axiomas e corolários ou, então, pela aplicação de fórmulas, seguindo-se "corretamente" todos os seus passos), em um processo de exclusão de outros saberes que, por não utilizarem as mesmas regras, são sancionados e classificados como "não matemáticos" (Knijnik et al., 2012, pp. 32-33).

São esses "outros saberes" que pretendemos evidenciar, os saberes advindo da prática de "fazer renda" e que não são enquadrados como matemáticos por envolverem regras que não são conformadas na matemática acadêmica e escolar.

A forma de vida de mulheres rendeiras, por meio dessas lentes teóricas, será observada em seus detalhes, em suas especificidades, pois estão intimamente ligadas com a prática de "fazer renda". Práticas que, de início, percebemos estarem entrelaçadas a um modo de vida que envolvia linguagem própria, modos de agir e pensar específicos. Logo, para descrever os jogos de linguagem presentes não foi possível isolá-los da forma de vida que os abriga. Assim, a descrição terá alusões à linguagem utilizada e as subjetividades inerentes às mulheres que os praticam. Temos o intuito de descrever as práticas dessas mulheres que estão envolvidas com a linguagem e assim conseguir traçar fracas ou fortes semelhanças de família com os jogos de linguagem matemáticos que são característicos da forma de vida escolar.

O "fazer renda" e seus jogos de linguagem

A prática de "fazer renda" é, para a rendeira, algo difícil de ser descrito. Ao serem questionadas sobre: como fazem os pontos? Como sabem a quantidade de bilros utilizadas em cada renda? Como conseguem determinar onde será o início da renda? Entre outras, as rendeiras de forma recorrente falam "*é que a gente já tem a prática, fazemos desde pequena*" e ainda "*a prática que a gente tem, a gente já sabe como começa, aonde vai a flor, o ponto exato que a gente tem que parar*" (N. B. da Luz, comunicação pessoal, 25 junho, 2013). Tal explicação tornou-se uma dificuldade, pois, como pesquisadoras, tínhamos a intenção de descrever a prática das rendeiras em toda a sua complexidade. Buscamos então deixa-las falarem o que estavam fazendo enquanto conversávamos sobre a renda. Porém tais depoimentos nos ajudam a entender que somos constituídos dentro de uma forma de vida, com suas especificidades e seus jogos de linguagem.

Há todo um preparativo para iniciar o "fazer renda". A rendeira sentada em frente a sua almofada, prepara o início de um trabalho. Os bilros, sempre aos pares, são acrescidos pelas linhas que darão origem a renda que será confeccionada.

São compostos dessa maneira pelo fato de na armação da renda a rendeira fixa-los em alfinetes, conforme foi observado durante a pesquisa. A rendeira ao "armar" a renda precisa pensar estrategicamente o local que terá início o trabalho, pois cada renda tem um tipo de início e precisa pensa-lo para que a composição inicial dos bilros deem conta de fazê-lo até o final. Dona Neli nos explicou como ela inicia a confecção da renda que ela chama de "corrupio":

> *Aqui se coloca o primeiro par, segundo, terceiro, tá? É seis bilros. Tem que começar com três pares. Vou começar a fazer a perna cheia. A perna cheia é dois par e esse fica pra fazer o centrinho, ele vai fazendo o torcido. Então, faz a perna cheia com quatro bilros. Um trabalha e três ficam parados pra fazer esse ponto*. (N. B. da Luz, comunicação pessoal, 25 junho, 2013)

A explicação da rendeira, ao começar o "corrupio", demonstra a existência de características que só foram compreendidas na medida em que se pode observar o movimento que acompanhava tal explicação. Assim, enquanto nos explicava mostrava-nos como movimentar os bilros em cada situação e a posição em que eles se encontravam. Aos pares a rendeira determina que ponto deseja fazer, como por exemplo, a perna cheia são quatro bilros (dois pares), a trança também são quatro bilros, o torcido são dois bilros (um par), ... Pontos estes que são comuns a praticamente todas as rendas. Além destes encontramos também o meio ponto e o ponto inteiro característicos de algumas rendas. São pontos que para confecciona-los são necessários alguns pares de bilros dependendo da dimensão da renda.

Como mencionado anteriormente, verificamos a impossibilidade de, somente pela fala da rendeira, identificar todos os elementos a que elas se referiam, pois tivemos dificuldade no entendimento dos movimentos por elas descritos. Foi necessário observá-las tecer a renda, identificar a maneira como manuseavam os bilros e como prendiam os fios no pique na conclusão do ponto. A partir das lentes teóricas advindas de Wittgenstein vamos entender que a linguagem será mais do que simplesmente atos de fala ou de escrita, vai envolver também modos de pensar e agir. Podemos dizer que a linguagem vai estar interligada com as práticas e racionalidades que a sustentam, ou seja, a compreensão da prática das mulheres rendeiras tornou-se possível a partir do momento que observamos essa forma de vida em seus detalhes. Sendo assim, consideramos que não há uma essência na linguagem, e em efeito nenhuma linguagem seria universal e ainda, a partir disso, podemos questionar a pretensão de universalidade do conhecimento matemático, pois "formas de vida diversas estabelecem práticas diferenciadas, assim também, gramáticas diferentes e, consequentemente, inteligibilidades diferentes. Nesse sentido, não se pode falar da 'inteligibilidade' do mundo, mas de 'inteligibilidades' possíveis". (Condé, 2004, p. 110).

Ao falar dos jogos de linguagem que constituem a forma de vida das mulheres rendeiras estamos tratando de um tipo de racionalidade, que terá suas especificidades. Wittgenstein vai utilizar a expressão formas de vida para "designar nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem" (Bello, 2010, p. 551). E jogos de linguagem será entendido como "a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (Wittgenstein, 2012, p.19). "O jogo de linguagem consiste na montagem de uma situação peculiar em que certas palavras ou sentenças estão intimamente ligadas a certas atividades” (Dall’Agnol et al., 2008, p. 93). Ou seja, a gramática e os jogos de linguagem serão entendidos “como uma racionalidade que se forja a partir das práticas sociais em uma forma de vida” (Condé, 2004, p. 29).

A forma de vida das rendeiras possuem algumas especificidades. Cada rendeira ao “fazer a renda” têm suas particularidades na confecção de cada ponto, mas sempre mantendo em ambas as mãos durante a confecção um par de bilros por vez. O “torcidinho” é o ponto que utiliza apenas um par de bilros que com uma das mãos a rendeira segura-os e entrelaça uma linha na outra, deixando-a, dessa forma, torcida. O outro seria a “trança” que, assim como outros pontos, utiliza dois pares de bilros. Os fios presos às extremidades dos bilros se entrelaçam, fazendo uma “trança” com quatro linhas. Para fazer o “ponto inteiro”, assim como o “meio ponto”, a rendeira movimenta um bilro sobre o outro como se fosse formando uma teia com a linha. A “perna cheia”, ponto que gera maior dificuldade na aprendizagem das novas gerações e que exige maior habilidade por parte delas para deixa-lo na forma almejada, utiliza-se de quatro bilros, porém, segundo Dona Marli,

> *um só trabalha entre os três. Esse aqui dá duas voltas, passa por baixo desse e sobe por cima desse da mão esquerda. Depois pra cá ela passa por cima do do meio, na ida pra lá ele passa por cima do da ponta, por baixo desse.* (M. F. da Luz, 22 agosto, 2012)

E ainda, a rendeira, ao movimentar um bilro entre os outros três, precisa a todo momento “*colocar pra cima, se não coloca ele não vai encher pra ficar a perna cheia, mas tem que abrir e fechar. Mas tem que sempre abrir e fechar o trabalhinho*” (M. F. da Luz, 10 julho, 2012).

Dona Marli exemplifica a dificuldade em aprendê-lo:

> *a perna cheia é o mais difícil. A primeira vez eu aprendi a fazer perna cheia, eu aprendi na almofada da Valdete, fiz três pernas cheias bem sequinhas, igual uma trança. Mas daí foi as três derradeiras, as três primeiras, e nunca mais eu me perdi. Eu comecei a acertar e pronto*. (M. F. da Luz, 10 julho, 2012).

Encontramos nos jogos de linguagem acima expressões que são próprias da forma de vida das rendeiras, como “perna cheia” e “derradeiras”, que para compreendê-las foi necessário que ficássemos atentas aos usos, as repetições e as atividades que suscitavam o emprego de tais expressões. Desse modo, observávamos a premissa de que “o uso determina as significações dentro dos jogos de linguagem à medida que esses diversos usos envolvem práticas sociais” (Condé, 2004, p. 64). A “perna cheia”, como foi dito anteriormente, trata-se de um ponto da renda e “derradeiro” refere-se a algo que venha antes do último.

Outras características foram evidenciadas na forma de vida que investigávamos, como a confecção de cada ponto que dependiam das especificidades do contexto em que estavam inseridos e da rendeira, ou seja, do sujeito que sabe de sua habilidade e sensibilidade ao “fazer a renda”. Além desta, outras particularidades podem ser percebidas dependendo da rendeira que está a “fazer a renda”. Podemos afirmar isto, pois observamos que em determinadas situações a qualidade da renda dependia da rendeira que a fez. Notamos características como, a maneira de “cochar” os bilros, o sentido (direção) de enrolar o fio nos bilros, como dão o nó da renda, como é feita a emenda para finalizar o trabalho, o segurar dos bilros, o estralar com os bilros, como posicionam suas almofadas, ao fazer algum ponto da renda a sua preferência de qual o bilro que passará por cima do outro primeiro, etc. Tais especificidades funcionam como uma identidade da renda e da rendeira que a confecciona. Segundo Dona Neli,

> *Têm mulheres que estrala melhor que eu, a trança fica bem fininha, parece até um torcidinho. Cada uma tem sua preferência de bilro. Cada uma tem seu jeito de cochar a renda. Tem umas que fazem a renda de bilro bem feita, outras fazem a renda mal feita que não se aproveita nunca, continua sempre fazendo a renda mal feita, não aperfeiçoa, entende? Tem rendeiras que a renda é impecável quando tira da almofada. Que não é o meu caso, a minha não fica bem durinha*. (N. B. da Luz, comunicação pessoal, 8 março, 2013)

Encontramos na forma de vida das rendeiras muitos jogos de linguagem em que as palavras empregadas só são compreendidas nos usos dados a elas nas atividades com as quais estão envolvidas. O "corrupio", por exemplo, na nossa forma de vida não faz muito sentido. Estranhamos de imediato tal expressão, pois não entendíamos o significado por elas atribuído. Somente ao observá-las falar e agir, observando a forma de vida das rendeiras, no contexto em que nos encontrávamos, que pudemos perceber que tal palavra estava relacionada com o que chamamos, em nossa forma de vida, de giro, volta ou, mais especificamente, de círculo. A rendeira identifica-o "*porque ele é redondinho, com os pontinhos e aquela perna cheinha, esse aqui oh, esse trançadinho aqui, daí ele fica o corrupio. Ele fica redondinho*" (N. B. da Luz, comunicação pessoal, 8 março, 2013). E acrescenta que "*antes, quando eu aprendi a fazer renda, era o corrupio. Depois que começou a servir para copo, que passou a chamar porta copo, porque antes era corrupio*" (N. B. da Luz, comunicação pessoal, 8 março, 2013). O corrupio especificamente é feito com quatro pontos diferentes, podendo variar de posições de acordo com o que a rendeira quer fazer.

Na forma de vida das rendeiras, algo interessante acontece e que reforça a dependência do emprego das palavras com seu uso em determinado contexto. A palavra "arco", na forma de vida das rendeiras, é empregada a um formato no desenho da renda. Em muitos dos encontros com as rendeiras, elas nos falavam em renda de arco, e ao olhar para a renda, relacionávamos a uma forma circular que encontramos em alguns tipos de renda. Depois de algumas confusões, ao encontrar Dona Madalena a fazer uma renda chamada "arco da ligeirinha", ela nos mostrou o que seria para ela o arco. Logo, chegamos à conclusão que, por ter a palavra arco na nossa forma de vida empregada de maneira diferente, não conseguíamos distinguir o que elas estavam a nos indicar. Foi preciso que estivéssemos atentas aos usos naquela forma de vida e observar a rendeira fazer o arco para entender o que tal palavra significaria naquele contexto. Ou seja, "o significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (Wittgenstein, 2012, p. 38), elas são "[...] mediadas por regras, a partir das nossas práticas sociais, dos nossos hábitos, na nossa forma de vida" (Condé, 2004, p. 52). Dessa forma, "[...] a regra é um convenção social que surge dessa práxis e que, portanto, poderia ser diferente se essa fosse outra" (Condé, 2004, pp. 89-90). Um exemplo, imaginem uma caixa de ferramentas e dentro dela "encontram-se aí um martelo, um alicate, uma serra, uma chave de fenda, um metro, um lata de cola, cola, pregos e parafusos. – Assim como são diferentes as funções desses objetos, são diferentes as funções das palavras" (Wittgenstein, 2012, p. 20). Cabe ainda salientar que

> os usos da linguagem fazem parte de formas de vida, e estas não são aleatórias; elas possuem um ancoradouro, que não é constituído nem por princípios normativos – as leis da natureza ou as leis da razão – e nem caracterizado pela ausência de todo e qualquer princípio [...], mais sim um ancoradouro caracterizado por regras. (Moreno, 1986, p. 75)

As regras vão distinguir o uso correto ou incorreto da palavra no contexto em que está inserida, "[...] da mesma forma que o uso condiciona a regra, em contrapartida, determinará se o uso está correto ou não" (Condé, 2004, p.89). É o conjunto dessas regras que segundo Condé (2004) vão compor a gramática, "[...] mais que a dimensão sintático-semântica, privilegia a pragmática, isto é, as regras que constituem a gramática estão inseridas na prática social" (Condé, 2004, p. 89), ou seja, a gramática é um produto social.

Como não há uma essência para Wittgenstein, os significados das palavras se constituem e se transformam em seus usos em diferentes contextos, isto é, dependem do jogo de linguagem de que participam.

Encontramos também jogos de linguagem relacionados a maneira como a rendeira determinava o preço de venda de cada renda. Para entender como as rendeiras determinavam qual seria o preço de cada renda, resolvemos investigar perguntando-as que elementos elas levavam em consideração na hora de colocar o preço de cada modelo de renda. Dona Madalena de maneira direta, nos respondeu que "*é o tempo de trabalho*" que vai determinar por quanto cada renda será vendida. Ela explica como funciona isso,

> *se tu leva três tardes, tu vais cobrar o que? Tu vais cobrar uma faixa de vinte cinco reais. E se tu leva duas tardes, aí tudo vai do tempo que tu leva pra fazer. Se tu levas, uma grande oh, uma grande na faixa de quinze dias, vinte dias, aí tu já tem que fazer o preço naquele dia que parou, entendesse? Assim oh, teve quinze dias com uma grande, então eu vou pedir setenta reais ou oitenta reais, aí depende do trabalho também, se é mais raleiro, se é mais fechadinho. Tudo vai da quantidade de bilros, da demora*. (M. A. Gaia, comunicação pessoal, 1 agosto, 2013)

O tempo se mostrou como algo determinante nas respostas das rendeiras, pois elas conseguiam relacionar o modelo da renda com o tempo, assim como as dificuldades em faze-los. Quando Dona Madalena comenta a respeito de uma renda ser "raleira" ou não, o que ela quer dizer é como será confeccionada esta renda, pois de acordo com o modelo a renda pode ter seus entrelaçamentos mais espaçados, precisando assim de uma quantidade menor de linha, de bilros e de tempo em relação a outras rendas que para elas seriam mais "fechadinhas".

Dona Marli salienta a diferença de tempo entre diferentes modelos de renda, segundo ela,

> *tem rendas mais demoradas. Tem toalhinhas dessa de vinte e cinco reais que é mais demorada ainda pra fazer, aí a gente já dobra a tarde, aí já dá quatro tardes. Tipo aquela ali oh, o virado junto, só que aquela ali já não tá mais vinte cinco reais, tá trinta e cinco. Aí é quatro tardes e a gente cobra trinta e cinco reais. Pelas tardes do trabalho da toalhinha que a gente tem o preço*. (M. F. da Luz, comunicação pessoal, 1 agosto, 2013)

Na fala de Dona Marli encontramos referência a dois modelos de renda, o "virado junto" e aquelas que seriam vinte e cinco reais. O "virado junto" é o nome dado a um modelo do tipo de renda que é chamado de "ligeirinha", pois tem como característica a produção feita de uma só vez. Logo, observamos que o tempo estimado por Dona Marli de "quatro tardes" estava diretamente relacionado ao modelo da renda, a quantidade de bilros, a quantidade de linha, o fato da renda ser mais "fechadinha" e o tamanho da renda.

Quanto a uma renda maior, Dona Marli comenta que

> *um trilho de uma semana são oito dias, pra fazer um metro e vinte é noventa reais. Aí a grande, como aquela ali oh, tem um metro e cinquenta pra vender tá duzentos reais, mas pra fazer pra vender a gente não vai fazer nesse preço aí vai cobrar cem reais, mas aí de*

> *um metro e cinquenta dá quinze reais*. (M. F. da Luz, comunicação pessoal, 1 agosto, 2013)

Ou seja, rendas de um metro e vinte levam oito dias, rendas de um metro e cinquenta levam quinze dias e essas rendas vão ter seus preços determinados pelo tempo que demoraram para ficarem prontas. Outra característica mencionada por Dona Marli foi que elas também revendem algumas rendas, pois fica inviável produzirem todas essas rendas para venderem pelo tempo que tais modelos demorariam para elas confeccionarem, então elas compram de mulheres de outros bairros da cidade e colocam uma margem de lucro na hora de revenderem, por isso que Dona Marli comenta que o preço da renda também vai sofrer alterações quanto a isto.

Os saberes até agora descritos serão entendidos por Foucault como "saberes sujeitados". E para esse filosofo Saberes sujeitados serão entendido de duas maneiras distintas, as quais ele diferencia que: em primeiro lugar, se trataria de "[...] conteúdos históricos que foram sepultados, mascarados em coerências funcionais ou em sistematizações formais" (Foucault, 2010, p. 8) e, em segundo lugar, de saberes "que estavam desqualificados como saberes não conceituais, como saberes insuficientemente elaborados: saberes ingênuos, saberes hierarquicamente inferiores, saberes abaixo do nível do conhecimento ou da cientificidade requeridos" (Foucault, 2010, p. 8). O segundo saber ele denominou de o "saber das pessoas" e observou que não se trataria "de modo algum um saber comum, um bom senso, mas, ao contrário, um saber particular, um saber local, regional, um saber diferencial, incapaz de unanimidade e que deve sua força apenas à contundência que opõe todos aqueles que o rodeiam" (Foucault, 2010, p. 9). Logo, o que encontramos na forma de vida das mulheres rendeiras se trataria de um saber local, incapaz de unanimidade e que de modo algum se trataria de um bom senso ou um saber comum já que a racionalidade envolvida exige um conjunto de estratégias que foi possível evidenciar em seus jogos de linguagem.

Uma renda sem nós

A renda chega ao seu final, porém os nós não finalizam o trabalho, são deixadas linhas soltas e uma renda em aberto, sem sua finalização definitiva. A comunicação aqui empreendida, com suas especificidades, traz uma maneira de se olhar para uma determinada forma de vida. Sendo assim, estudar estas proposições, nos fez refletir que os significados das palavras e expressões utilizadas pelas rendeiras estão intimamente ligados à forma de vida dessas mulheres. Tais significados obedecem a uma gramática forjada em regras que se dão pelo uso. Assim, olhar para esta forma de vida, nos fez entender que a racionalidade matemática não está isolada, mas está amalgamada a determinados jogos de linguagem que vão ser específicos desta forma de vida. No entanto, cabe ressaltar que tais jogos de linguagem e a gramática que os sustentam guardam alguma semelhança de família com aquilo que denominamos conhecimento matemático.

Wittgenstein (2012) vai entender que essas semelhanças não são como uma característica que perpassa todos os jogos de linguagem, mas podem variar de um jogo a outro ou em um determinado jogo.

> Quando '*olhamos e vemos*' se todos os jogos possuem algo em comum, notamos que se unem, não por um único traço definidor comum, mas por uma complexa rede de semelhanças que se sobrepõe e se entrecruzam, do mesmo modo que os diferentes membros de uma família se parecem uns com os outros sob diferentes aspectos (compleição, feições, cor dos olhos, etc.). O que sustenta o conceito, conferindo-lhe sua unidade, não é um 'fio único' que percorre todos os casos, mas, por

> assim dizer, uma sobreposições de diferentes fibras, como em uma corda. (Glock, 1998, p. 325).

E ainda, "Os jogos de linguagem estão aparentados uns com os outros de diversas formas, e é devido a esse parentesco ou a essas semelhanças de família que são denominados jogos de linguagem". (Condé, 2004, p. 53). As semelhanças de família podem estar presentes nas gramáticas de formas de vida diferentes e, além disso, a gramática de determinada forma de vida não é fixa, pois

> A gramática de uma forma de vida pode compartilhar diversas semelhanças de família com outras gramáticas de outras formas de vida. Uma forma de vida, no interior da qual surge a linguagem, é um tipo de "sistema" aberto. Embora um tal "sistema", através das interações nos jogos de linguagem, articule suficientemente a produção de significações, isso não implica dizer que a gramática peculiar a essa forma de vida não possa incorporar novas significações, e nem que, reciprocamente, outra forma de vida estrangeira não possa assimilar aspectos da primeira. (Condé, 2004, p. 144)

Giongo (2008) discute de forma bastante apropriada o conceito de semelhança de família. Ela denomina, por exemplo, "forte semelhança de família" entre os jogos de linguagem praticados por camponeses e aqueles praticados na escola investigada por ela com as disciplinas que entende como disciplinas técnicas, as quais fazem menção à racionalidade presente na forma de vida camponesa. E ainda, entre os jogos de linguagem da matemática que constituem a disciplina e aqueles que conformam a matemática acadêmica. Para a autora, os jogos de linguagem pertencentes a "disciplina Matemática eram conformados por regras que primavam pelo formalismo, pela assepsia e abstração. Diferentemente, nas disciplinas técnicas, os jogos de linguagem ali presentes eram regidos pelas regras que mostravam aproximações, estimativas e arredondamentos" (Giongo, 2008, p. 190), levando a autora a dizer que esses últimos apresentariam fortes semelhanças de família com os praticados pelos camponeses em seu contexto, no campo. Nos jogos de linguagem apresentados nessa comunicação, encontramos estratégicas específicas dessa forma de vida, assim como na forma de vida camponesa, onde aproximações e estimativas são utilizadas, como o fato de para as rendeiras o preço da renda estar relacionado ao tempo que demoram na sua confecção e assim sabem o modelo da renda em relação ao tempo. Tais características relacionam-se a prática de "fazer renda" e são determinadas pelas rendeiras conforme suas características pessoais podendo variar de rendeira para rendeira, logo os jogos de linguagem que estão conformados na forma de vida investigada possuem fracas semelhanças de família com os praticados na forma de vida escolar. Na forma de vida escolar encontramos, assim como fala Giongo (2008), características que primam o formalismo, generalizações, sendo assim as regras que conformam os jogos de linguagem das mulheres rendeiras seriam outras e não estariam preocupadas com formalizações, unanimidades ou generalizações.

Podemos dizer, nos baseando em Knijnik et al. (2012), que, em diferentes formas de vida, que possuem diferentes jogos de linguagem, tais jogos vão possuir em maior ou menor grau, semelhanças de família com os que são praticados no ambiente escolar. Essas intensidades na relação com as semelhanças de famílias entre os jogos de linguagem de diferentes formas de vida e o ambiente escolar vão estar relacionadas aos jogos de linguagem que se conformam no ambiente escolar de tal forma de vida.

Assim, consideramos que a matemática estará amalgamada a determinados jogos de linguagem que vão ser específicos da forma de vida das rendeiras e que estes vão possuir algum grau de semelhança de família com a matemática escolar, porém as regras que conformam tais jogos serão específicas ao contexto de que fazem parte diferenciando-se das regras que conformam a matemática escolar. Observamos nessa pesquisa que os jogos de linguagem, especificamente os que se referem à racionalidade matemática na forma de vida das rendeiras, possuem semelhanças de família com os praticados no ambiente escolar, porém em menor grau, por considerar que as regras e os usos dados a determinadas expressões presentes nos jogos de linguagem da forma de vida das rendeiras só têm entendimento no contexto em que estão inseridos.

Deixamos esta comunicação em aberto, linhas soltas, quanto a inserção de saberes provenientes de outras formas de vida, que tem suas especificidades, na forma de vida escolar. A intenção com essa comunicação foi apenas descrever características de uma determinada forma de vida, os saberes ali presentes, para com isso observarmos semelhanças de família entre os jogos de linguagem dessa forma de vida com os presentes na forma de vida escolar entendendo que cada qual conformam-se no contexto em que estão inseridos.

Referências e bibliografia

Bello, S. E. L. (2010). Jogos de linguagem, práticas discursivas e produção de verdade: contribuições para a educação (matemática) contemporânea. *Revista Zetetiké* ,18, 545-587.

Breda, A., & Lima, V. M. do R. (2011). Etnomatemática sob dois pontos de vista: a visão “D’Ambrosiana” e a visão Pós-Estruturalista. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 4 (2), 4-31.

Condé, M. L. L. (2004). *As teias da razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna*. Belo Horizonte: Argvmentvm.

Dall’Agnol, D. (Org.). (2008). *Wittgenstein no Brasil*. São Paulo: Escuta.

Foucault, M. (2010). *Em defesa da sociedade.* (2 ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Giongo, I. M. (2008). *Disciplinamento e resistência dos corpos e dos Saberes: um estudo sobre a educação matemática da Escola estadual técnica agrícola Guaporé*. Tese de doutorado, Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), São Leopoldo, RS, Brasil.

Glock, H. (1998). *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Moreno, A. R. (1986). *Wittgenstein, ensaio introdutório*. Rio de Janeiro: Livraria Taurus Editora.

Wittgenstein, L. (2012). *Investigações filosóficas* (7 ed.). Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La modelación matemática en ingeniería de diseño

Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
rendonmesa@hotmail.com
Pedro Vicente **Esteban** Duarte
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Resumen

El propósito de este artículo es discutir cómo la Modelación Matemática puede convertirse en una herramienta de formación para los ingenieros, propiamente en la Ingeniería de diseño, vinculando situaciones contextuales. El estudio se realiza con estudiantes de dicho programa, los cuales durante el semestre realizan actividades correspondientes a su proceso formativo que se denominan: fase de exploración, fase de investigación y fase de síntesis. Por último, se plantea la necesidad de pensar la Modelación Matemática, como una alternativa donde el estudiante construya una “realidad” y responda a las exigencias actuales de tener un saber específico y aplicarlo a un contexto, generando una articulación entre el saber matemático y el saber propio de la Ingeniería para que pueda responder a las exigencias actuales del campo laboral.

Palabras clave: modelación matemática, ingeniería, diseño, contexto.

Ingeniería, matemáticas y contexto

En la formación de un ingeniero se ha reconocido que las matemáticas son un aspecto fundamental porque se consideran un área del conocimiento que prepara al estudiante para desempeñarse tanto académica como laboralmente; de esta manera, se espera que el futuro ingeniero pueda solucionar, diseñar, resolver problemas; haciéndose productivo, creativo y competente para modificar el entorno. En este sentido, el papel de las matemáticas en la formación de un ingeniero debe constituirse como un componente que le debe permitir solucionar problemas, es decir, establecer conexiones entre las matemáticas y la realidad propia del contexto cotidiano, académico o profesional del campo de formación ingenieril; en palabras de Camarena (2012) es necesario que el proceso de formación de los futuros profesionales integre los saberes con el contexto lo que plantea diversos retos para la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, buscar este vínculo requiere de retos en la enseñanza de las matemáticas, donde los contextos o situaciones particulares se conviertan en herramientas de exploración que dotan de comprensiones y sensibilidades a los estudiantes, que en un futuro cercano serán profesionales. Lo anterior permite pensar que la Modelación es una *herramienta de formación* en matemáticas durante los estudios universitarios, propiamente en el campo ingenieril, donde se reconozca el contexto como elemento aportante que dota de significado el proceso de aprendizaje y permita dicha articulación.

La ingeniería de diseño, lugar de indagación

En la Universidad EAFIT (Medellín, Colombia), en el programa de Ingeniería de Diseño, se imparte un curso de *Modelación Matemática*; este espacio de formación tiene como propósito acercar a los estudiantes a reconocer las conceptualizaciones matemáticas que existen en los objetos propios del entorno o en aquellos diseñados por los participantes. El trabajo es desarrollado en tres momentos: el primero, llamado fase de *exploración*, que permite a los estudiantes indagar sobre los conceptos matemáticos que surgen en diferentes escenarios de la "vida real" a través de la selección de imágenes y de las asociaciones que logran establecer desde referentes geométricos, métricos, variacionales, numéricos y estadísticos. Un segundo momento es la fase de *investigación guiada*, donde ellos definen una propuesta creativa que vincula diferentes aspectos estéticos y conceptuales de la matemática y el diseño para definir el modelo de su interés. Está idea se fortalece desde un corto proceso investigativo, donde se reconocen aspectos relevantes desde el diseño como por ejemplo la transformación del objeto a lo largo de la historia o en relación con las matemáticas, el reconocimiento de las formas geométricas (figuras y cuerpos) que definen el objeto creado. En la tercera fase, denominada *síntesis*, se construye y valida el modelo, exponiendo las ideas y resultados obtenidos a expertos en el tema.

Un análisis de las producciones de los estudiantes, desarrolladas en estas fases, muestra por un lado, que los diseños tienen un fuerte componente geométrico asociado con los cursos de dibujo que se encuentran en su currículo y que ocultan relaciones matemáticas tales como el costo, el tipo de materiales, entre otros. Por el otro, presentan una desarticulación entre los conceptos matemáticos y el conocimiento propio del área de diseño, factores necesarios para desarrollar el proyecto final. Al observar y estudiar los anteriores aspectos, se reconoce que la Modelación Matemática puede ayudar a articular el conocimiento matemático con el conocimiento propio del área de formación del Ingeniero de Diseño.

Desde lo propuesto por Biembengut y Hein (2004) con la modelación "el aprendizaje se hace más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de otra área de conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo" (p. 107). Esto hace ver los contextos como herramientas fundamentales para la apropiación de conocimientos matemáticos como lo establecen Masingila et al. (1996), Greer (1997) y Beswick (2011) entre otros, lo que permite que el estudiante re-signifique sus planteamientos y reconozca una mejor integración entre los elementos teóricos y prácticos (J. A. Villa-Ochoa & Jaramillo, 2011).

A continuación se presentará un episodio extraído de las experiencias de aula que se han desarrollado con estudiantes de Ingeniería de Diseño.

El episodio

En la *fase de exploración*, uno de los estudiantes seleccionó, entre muchas otras imágenes, un carro de supermercado ecológico y lo describió como "*un objeto constituido por un prisma central; cuatro ruedas cilíndricas y soportes laterales rectangulares*". Estas conceptualizaciones dan cuenta del reconocimiento de figuras geométricas, pero parece no relacionarse con el funcionamiento del objeto ni lo que ello implica en su estructura de diseño. La vinculación de la matemática en esta fase, se muestra ligada a lo estético, enfatizando su uso artificial e independiente a la constitución del objeto mismo. Estas elaboraciones dan cuenta de cómo el carácter geométrico de los objetos tiene gran relevancia en la formación de Ingenieros de Diseño, lo que muestra que es necesario profundizar y asociar las preconcepciones a la formación matemática para lograr que el estudiante aplique la matemática en el contexto escogido por él para desarrollar su trabajo.

Para la *fase de investigación guiada*, el estudiante seleccionó como referente de creación un carro de supermercado ecológico. A partir de esta idea consolida una nueva, que le permitió generar un nuevo diseño. En este caso, él formuló su iniciativa de la siguiente manera: *Generar un carro de transporte para uso interno en la universidad (Figura. 1), el cual consta de una base, que facilita el desplazamiento de objetos pesados, una banda elástica para el soporte de la carga, una pieza plegable para guardar libros y/o carteleras, unas manijas rectangulares para empujarlo, llanta cilíndricas y una palanca de freno".*

Figura 1. ***Dibujo propuesto en la fase de investigación.***

Los estudiantes antes de consolidar el modelo a escala, que representa el diseño en la tridimensional, realizan una descomposición geométrica del objeto a crear, que es llamado en este campo la *geometrización* (Velásquez, 2007) considerada como el proceso de trasladar la propuesta a formas geométricas, estableciendo relaciones entre los espacios y las formas, para definir un conjunto de ellas que consoliden el producto final. Los estudiantes realizan minuciosamente este proceso (*Figura 2*), indicando cada una de las formas que componen el objeto, definiendo sus medidas y dimensiones para calcular el área y el volumen respectivo, en caso de requerirlo.

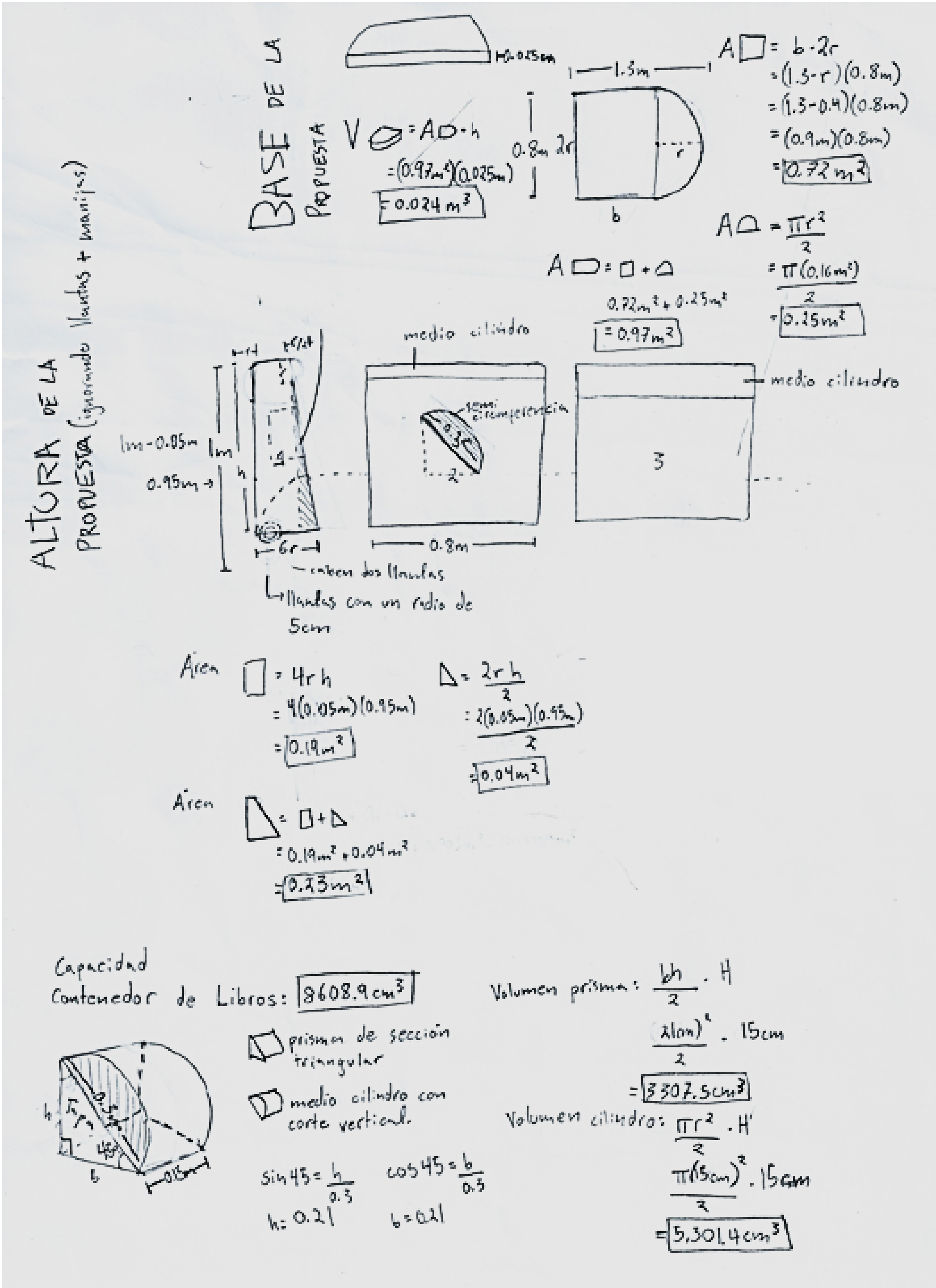


Figura 2. ***Geometrización del diseño.***

A partir de la Figura 2, se percibe que las matemáticas parecen ser usadas de una forma “artificial”, es decir, los estudiantes realizan procesos algorítmicos para describir el objeto, pero no sustentan la definición de variables importantes que intervienen en el diseño mismo, como son las proporciones entre las formas, los patrones de crecimiento y otras relaciones matemáticas involucradas en su elaboración. De esta manera, la idea de diseño queda sujeta a la creatividad, pero no parece vincular el conocimiento matemático con el conocimiento propio del área, para refinar la iniciativa hasta convertirla en una idea realizable o reconocer la imposibilidad de la ejecución de la misma.

En el tercer momento del proceso de aula, *fase de síntesis*, los estudiantes consolidan la idea formulada en un modelo físico. El estudiante, al que se refiere este episodio, construye un modelo físico a escala que se presenta en la Figura 3.

Figura 3. ***Modelo físico producido en la fase de síntesis.***

Adicional al modelo físico, el estudiante presentó una descripción de las características que tendría el objeto creado. En el siguiente fragmento da cuenta de los aspectos estéticos pero también de resistencia según los cálculos matemáticos realizados.

> *El móvil, está diseñado para soportar una masa de 40 kilogramos y un peso de 400 Newton, siendo su masa de 8 kilogramos, que lo hace ligero y permite una manipulación sencilla por parte de los usuarios. Consta además, de dos contenedores, que sirven para almacenar libros o materiales. Tiene forma de prisma triangular unido a medio cilindro con corte vertical,* ($V_{contenedor1} = \frac{bh}{2} * H + \frac{\pi r^2}{2} * H$) *y el otro, en forma de cilindro donde se pueden guardar carteleras* ($V_{contenedor2} = \pi r^2 h = 14137.16\ cm^3$ *con un radio de 7.5 cm y altura de 80 cm) y 3 llantas (cilindros de 10cm de radio) que giran en un solo eje, lo que permite que el vehículo se desplace hacia cualquier lugar.*

Estas descripciones llevan a pensar que los estudiantes han logrado algunas "comprensiones sobre los conceptos matemáticos"; puesto que se fundamenta en algunos de ellos como partes que consolidan el modelo y realizan sustentaciones de estas selecciones desde los procedimientos asociados a la *geometrización*, pero estos quedan relegados a formas que definen el objeto y no a la funcionalidad y validación del modelo que es el propósito definido para esta última fase del proceso.

A manera de conclusión

La vinculación de un contexto para el aprendizaje de las matemáticas posibilita a los estudiantes una apropiación de los aprendizajes dotándolos de significado y relevancia (Masingila et al., 1996). Para el caso del episodio presentado, el contexto está asociado a la selección de un objeto de diseño, el cual se convierte en una alternativa de aprendizaje para los estudiantes de Ingeniería de Diseño, puesto que pone en juego sus intereses y los hace sensibles ante la realidad.

Como se mostró en el apartado anterior, los trabajos desarrollados, en las tres fases, parten de la elección de un problema propio del contexto, la formulación asociada al mismo y su posible solución a través del diseño y la matemática. Estos aspectos, se encuentran inscritos dentro de lo que se describe como Modelación Matemática propuesta por Blum et al. (2007), Blum y Borromeo-Ferri (2009), Villa-Ochoa (2007), entre otros. Sin embargo, pese a que existe un contexto, los estudiantes vinculan relaciones extra-matemáticas, pero no intra-matemáticas. Es decir, el reconocimiento de las matemáticas en este contexto, se centra en aspectos "externos" como la forma y lo estético pero no involucran variables que afectarían directamente la situación.

Estos desarrollos alcanzados por los estudiantes, muestran que los conocimientos adquiridos en la escuela parecen ser producto, en algunos de casos, de un paradigma de transmisión de instrucción y pueden ser en gran medida carentes de significado (faltos de conexión, relevancia, objetivo específico), como claramente lo expone Masingila et al. (1996). Sin embargo, es importante que el proceso de formación, en especial de un ingeniero, involucre actividades propias de la "vida real" que con frecuencia son recomendadas por la capacidad que tienen para motivar al estudiante y permitirle mayor participación de su proceso de aprendizaje en el que pone en juego todas sus capacidades. Beswick (2011) establece que la relación con el contexto mejora la accesibilidad a las matemáticas y por ende la comprensión de la situación puesto que es indispensable vincular estrategias para resolver el problema matemático.

Lo anterior, coincide con las exigencias actuales en la formación de los ingenieros, que plantea la necesidad de un saber específico aplicado a un contexto, generando la reflexión en torno a los problemas "reales", puesto que ellos no solamente ayudan a los estudiantes a hacer conexiones entre las matemáticas y "la realidad", sino a desarrollar significativa y flexiblemente el uso de los conceptos matemáticos cuando y como es requerido.

Por lo anterior, es necesario repensar una forma para que las conceptualizaciones vayan más allá de justificar de una manera superficial las matemáticas presentes en el diseño. Esto supone buscar estrategias para que los estudiantes desarrollen ideas que les permitan analizar la situación a la que se enfrentan y puedan, posteriormente, aplicarlas como herramientas conceptuales para resolver otros problemas (Trigueros, 2009; Velásquez, 2007). Lo anterior, conlleva a pensar en la Modelación Matemática, como una herramienta para el estudiante, con la que pueda construir una "realidad", estructurarla, matematizarla y reflexionarla; donde la enseñanza de la matemática este en constante cambio entre lo concreto y lo abstracto dotando el aprendizaje de sentido para el estudiante.

Agradecimientos

En esta sección reconocemos la ayuda de personas e instituciones que aportaron significativamente al desarrollo de la investigación como son el grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (EDUMATH), a los estudiantes de Ingeniería de Diseño de la Universidad EAFIT y a los miembros de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática por las sugerencias a las versiones previas de este documento.

Referencias y bibliografía

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 367-390. doi: 10.1007/s10763-010-9270-z

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (Vol. 10). New York: Springer.

Camarena, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia, 5*(3), 1-10.

Córdoba, F. J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* (Maestría no publicada), CICATA-Instituto Politécnico Nacional, México, Dristito Federal.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00006-6

Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 175-200. doi: 10.1007/BF00143931

Trigueros, M. (2009). El uso de la Modelación en la Enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87.

Velásquez, A. (2007). Geometrización. Memorias del curso Proyecto VI. Medellín, Colombia.: Universidad EAFIT.

Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. . *Tecno LóGicas, 19,* 63-86.

Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo, C. M. (2011). Sense of Reality through mathematical modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – ICTMA14* (pp. 701-711). New York: Springer.

La objetivación del número racional

José Wilde **Cisneros**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jose.wilde@gmail.com
Walter Fernando **Castro** Gordillo
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
wfcastro82@gmail.com
Sandra Y. **Cadavid**
Facultad de Educacion, Universidad de Antioquia.
Colombia
sarapaulina22@yahoo.es

Resumen

Esta comunicación da cuenta de la investigación en proceso, donde se pretende analizar la objetivación del número racional desde los procesos de medición que generan la razón. Los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia proponen un enfoque que busca el desarrollo de competencias que permitan a los alumnos afrontar los problemas matemáticos de la vida y del trabajo, empleando los mejores medios posibles, para ello, las instituciones educativas están facultadas para proponer procesos de aprendizaje que armonicen el desarrollo del pensamiento matemático con actividades matemáticas.

Palabras clave: Actividad, Medición, Razón, Objetivación, Número racional.

Introducción

A pesar de la importancia concedida al número racional en el currículo y de los resultados logrados durante muchos años de investigación, aún persisten dificultades tanto en su enseñanza, como en su aprendizaje. Algunas investigaciones (Pontón, 2012; Lamon, 2012) sugieren realizar esfuerzos que permitan brindar a los maestros que enseñan matemáticas, herramientas que los ayuden en su tarea de enseñanza de las fracciones.

La propuesta que se presenta en esta comunicación tiene como objetivo discutir la construcción del número racional a partir de la razón, en situaciones que involucran la medida. Esta investigación se realiza en el ambiente natural escolar, con seis niños en edades entre 11 y 12 años, de grado séptimo, de la Institución Educativa Andrés Bello, municipio de Bello, departamento de Antioquia, Colombia. La metodología es de carácter cualitativo con énfasis en un estudio de casos, el cual se focaliza en la interacción social de los sujetos y en la mediación instrumental. La investigación se fundamenta en los trabajos sobre la teoría de la Actividad de Leontiev (1978), y la teoria de la Objetivacion de Radford (2006, 2011, 2013).

Problema

El aprendizaje escolar referente a la razón, a la proporcionalidad y en general a los números racionales ha presentado dificultades informadas por diversas investigaciones (Petit, Laird & Marsden, 2010; Escolano, 2010; Charalambous & Pantazi, 2007; Gould, Outhred, & Mitchelmore, 2000; Mazzocco & Devlin, 2008).

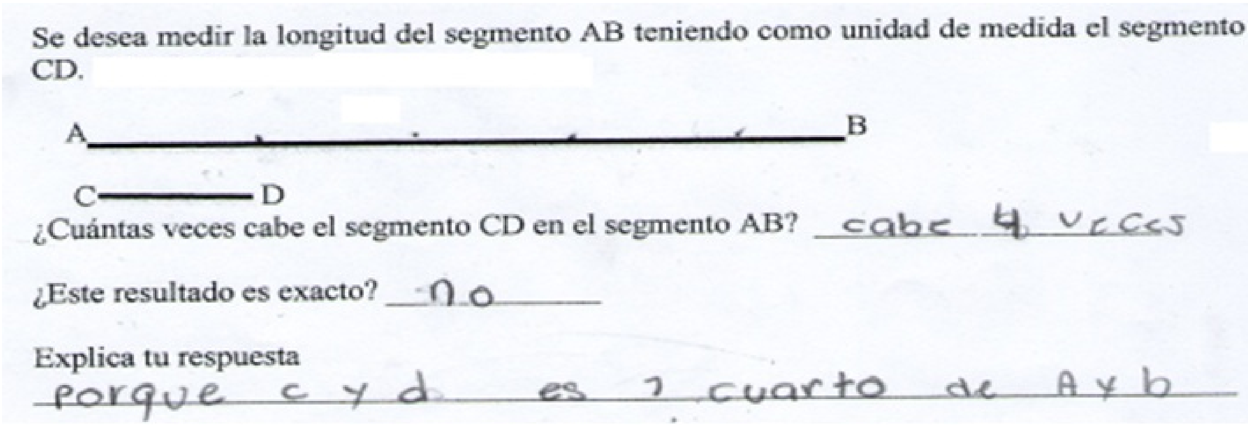
Behr, Harel, Post, & Lesh, (1993) consideran que las fracciones están vinculadas con cinco constructos:

a) *Razón*. Comparación entre dos cantidades de la misma naturaleza o de naturaleza diferente.
b) *Operador*. Transforma el cardinal de un conjunto discreto que puede ser partitivo (en caso de la fracción $\frac{1}{b}$, $b \neq 0$) o partición multiplicativa (en el caso de la fracción $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$)
c) *Cociente*. Un número racional puede verse como una división indicada entre dos números naturales.
d) *Medida*. Una situación que resulta cuando se comparan dos cantidades, una de las cuales se considera como la unidad.
e) *Parte-todo*. Comparación entre la parte de un todo continúo o discreto, es decir, el número racional representa la relación donde el numerador indica el número de partes que componen el todo, el denominador es el número de partes en que se divide la totalidad; este concepto es importante para la comprensión de los demás significados.

Si bien los anteriores constructos consideran diversas situaciones vinculadas con la fracción, no se hace un especial énfasis en situaciones de medida, que suelen ser más cercanas a las experiencias de los estudiantes y vinculadas con su entorno sociocultural.

Algunos autores (Escolano, 2010) abordan las dificultades de comprensión de los escolares, y prestan atención a los procedimientos, relaciones y operaciones de la estructura numérica de los números racionales; otros (Lamon, 2012) informan sobre “saltos conceptuales” percibidos en las tareas propuestas a los niños y que contribuyen a incrementar la dificultad del proceso de aprendizaje. En este trabajo se indaga sobre el uso de la razón en situaciones de medida tomadas del contexto sociocultural de los niños.

La práctica docente en la enseñanza del número racional ha permitido documentar la dificultad de su comprensión por parte de los niños. La Figura 1 ilustra la respuesta de un niño a una tarea que requiere el uso de aspectos conceptuales vinculados con los racionales y con la medida.


Se desea medir la longitud del segmento AB teniendo como unidad de medida el segmento CD.

A B

C D

¿Cuántas veces cabe el segmento CD en el segmento AB? cabe 4 veces

¿Este resultado es exacto? no

Explica tu respuesta

porque c y d es 1 cuarto de A y b

Figura 1. Longitud de segmentos.

Al niño se le dificulta identificar la relación que cuantifica la medida relativa entre las partes y el todo; además, parece reconocer la relación numérica, pero desconoce la fracción como un nuevo constructo que surge en la solución de la tarea.

La enseñanza del número racional generalmente se centra en las fracciones y desde esta perspectiva se desliga de los procesos de medición. Similarmente, las aplicaciones suelen focalisarce en el procedimiento "regla de tres" donde la razón no es el centro de atención. Adicionalmente, (Puerta, 2012) presenta el número Racional de la forma: $Q = \{\frac{x}{y}, x, y \in Z, y \neq 0\}$ y posterior a tal presentación formal propone "aplicaciones" que involucran soluciones de ecuaciones.

Justificación

Desde una postura sociocultural (Vygostky, 1982) se considera deseable vincular la actividad matemática con el entorno social y cultural en el cual viven los niños, en la medida que ofrece a éstos orientaciones de desarrollo y formas de apropiación del saber. Se considera que los procesos de medición pueden ser apropiados para motivar el uso de la razón y por tanto podrían ser un camino de entrada hacia la construcción del concepto de número racional; además, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas de Colombia (2006) señalan la importancia del paso del número natural hasta el número racional desde la comprensión de las medidas.

Obando, Vasco & Arboleda (2013) sobre la generación del número racional a partir de la razón, señalan:

> En su forma más general, una razón entre dos cantidades[1] es una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas, y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad. Esto permite diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación objetivada de dicha relación (p.980).

[1] Una atribución de cantidad "es aquella que realizada sobre un objeto permite realizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada" Obando ét al., (2013, p.978).

Para Leontiev (1978) el hombre actúa para satisfacer sus necesidades, tales actuaciones las realiza en forma colectiva, utilizando instrumentos[2] (medios externos) que potencian su acción sobre el medio.

De otro lado, la teoría de la Objetivación (Radford, 2006- 2011-2013; Roth, Radford, & LaCroix, 2012) sostiene que una característica esencial de la actividad es el reconocimiento tanto del sujeto, de la comunidad, de las herramientas semióticas y de los materiales, como de otras características de las prácticas culturales como aspectos constitutivos de la actividad. Vinculada con la "actividad" se considera "la objetivación" que se entiende como un proceso en el cual el conocimiento emerge desde la interacción social, desde la dialéctica entre el sujeto y la naturaleza, y desde las maneras de acceso al conocimiento.

A partir de las "actividades" se promueve la "objetivación" como procesos que transforman al sujeto, quien a su vez transforma el conocimiento. En el marco de esta dualidad "actividad-objetivación" se moviliza, genera y cuestiona el conocimiento.

Marco teórico

Se consideran cuatro ejes interrelacionados: el enfoque sociocultural de Vygostky (1982), la teoría de la Actividad de Leontiev (1978), la teoría de la Objetivación de Radford (2006-2011-2013) y el conocimiento matemático que subyace en la objetivación del número racional; los ejes se articulan en la metodología.

Estos ejes, se entrelazan desde el concepto de aprendizaje propuesto por Vygostky (1982) el cual da preponderancia al entorno social que motiva al niño hacia la apropiación del conocimiento históricamente acumulado, en interacción con otros sujetos (el profesor y otros alumnos) en condiciones socioculturales determinadas. El alumno se desenvuelve en un contexto, la escuela, que le ofrece un entorno con características propias y una cultura ajustada a su forma de pensar en su comunidad. Así logra desarrollar una actividad social en la cual se produce y se reproduce el conocimiento, dotándolo de sentido. Desde la actividad matemática, logra concebir al objeto matemático "número racional" como un estado único de comparación para todas las magnitudes de la misma especie.

Metodología

Las actividades focalizan la atención tanto en la descripción de interacciones entre los alumnos, como en el análisis e interpretación de los componentes de la actividad.

Actividad 1

Se propone a los niños la siguiente actividad cuyo propósito es diferenciar la "relación entre las cantidades" de la "razón como cuantificación", que precede a la objetivación del número racional.

Material. Tortas fraccionarias, hojas de papel, colores.

Enunciado. En un supermercado se encuentran canastas de huevos rojos unos y blancos otros. Usted debe llenar las canastas A y B de modo que el número de huevos blancos y rojos

[2] Un instrumento es al mismo tiempo un objeto social al cual han estado incorporadas y fijadas las operaciones de trabajo históricamente desarrolladas (Leontiev, 1978, p. 268).

conserven la misma proporción mostrada en la canasta C. Posteriormente debe empacar 33 huevos de tal suerte que la proporción sea la misma mostrada para la canasta C (Figura 2).

La actividad está en relación con el conjunto de acciones dirigidas socialmente para alcanzar un fin: objetivar el número racional a partir de la razón. Para lograrlo existe un doble objeto-motivo: el del profesor en su enseñanza y el del alumno en su aprendizaje; cuando este doble objeto-motivo converge en uno, se ha logrado la objetivación, en este caso la del número racional.

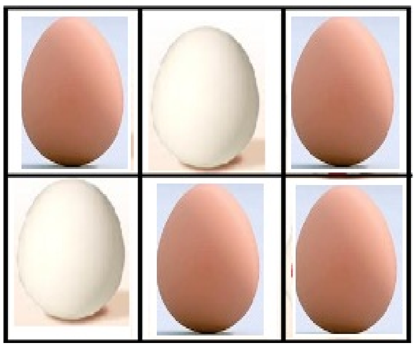


Figura 2. Canasta C

Figura 3. Canasta A

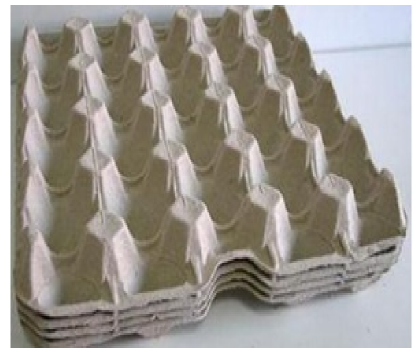


Figura 4. Canasta B

La actividad que realizan los niños está constituida por acciones organizadas, estructuradas y orientadas por el profesor hacia la consecución de una finalidad, las acciones les permite identificar ideas clave para reconocer las relaciones entre las cantidades y objetivar la razón como cuantificación.

Para lograr el objetivo conforme a las condiciones reales, los niños realizan operaciones tales como: contar con los dedos, repartir los huevos en las celdas, y conservar la "proporción" que tienen los huevos en la canasta C. En la Figura 5 se muestra una respuesta de uno de los niños; en esta situación no se cuestiona el concepto de razón.

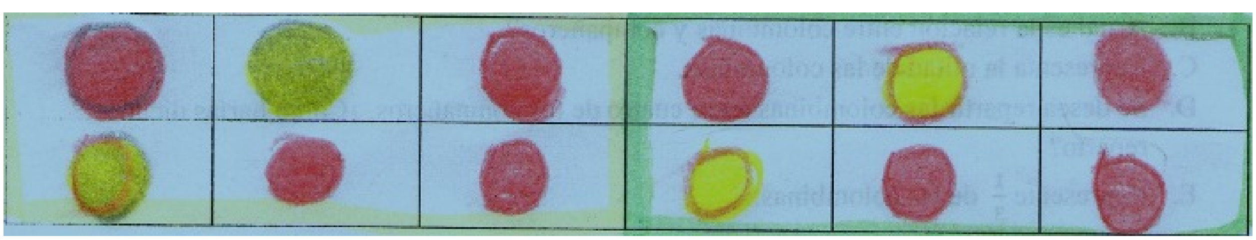


Figura 5. Solución de uno de los niños.

Para expresar su solución, los niños utilizan instrumentos materiales y psicológicos (medios semióticos de objetivación, artefactos tecnológicos, sistemas de signos) que son portadores de prácticas sociales y formas culturales que mediatizan y materializan el pensamiento; en este sentido, Radford (2006) argumenta "los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación…" (p.7). Se aprecia que el niño ha "preservado" la configuración mediante la reproducción de la ubicación de los huevos en la canasta C.

En el siguiente episodio, se puede analizar las interacciones entre los niños (en el aula) mediante palabras que componen aspectos subjetivos como partes constituyentes del proceso de la objetivación del número racional.

Usamos la letra P para denotar al *profesor* ; N1, N2, N3 denota a los *niños*.

P: … en la canasta C ¿qué es esto? (*señala toda la canasta*) ¿Cómo están repartidos los huevos?
N1: Que hay cuatro, cuatro unidades rojas y dos blancas.
P: ¿Cómo se puede llamar esa repartición? ¿Cómo se puede indicar?
N2: Una fracción
P: Y ¿Cómo la expresaríamos?
N2: Seis cuartos…

El episodio evidencia una manera de comparar cantidades y examinar las relaciones entre ellas por medio de una razón, comparan la cantidad total con respecto a una parte de ella, indicando que $\frac{6}{4}$ es una fracción, es decir, denominan la razón como una fracción. Algunas personas utilizan la palabra fracción para referirse específicamente a una comparación parte-todo. También puede referirse a cualquier número escrito en la forma simbólica $\frac{a}{b}$ (Lamon, 2012).

N2: O dos cuartos
N1: Si
N3: Profe, también se puede decir que… que hay cuatro medios
P: ¿Eso qué nos indica?
N3: Que es equivalente cuatro medios a dos unidades, que son dos huevos, cuatro medios de huevos rojos y dos huevos enteros, la unidad completa de huevos blancos.

La comprensión del enunciado en esta situación debe tomarse de la respuesta (N2: O dos cuartos), que es una expresión de la situación que N1 pone a disposición de los demás miembros del grupo, donde N3, indica la equivalencia para expresar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa. En el proceso de solución de la situación, N3 realiza la objetivación de la razón $\frac{4}{2}$: 2, y logra identificar la cuantificación de la relación cuando afirma “ser el doble de” cuantificada como 2.

En la actividad donde se solicita llenar la canasta con 33 huevos, los niños dieron respuestas que se agrupan según el modelo ilustrado en la Figura 6.

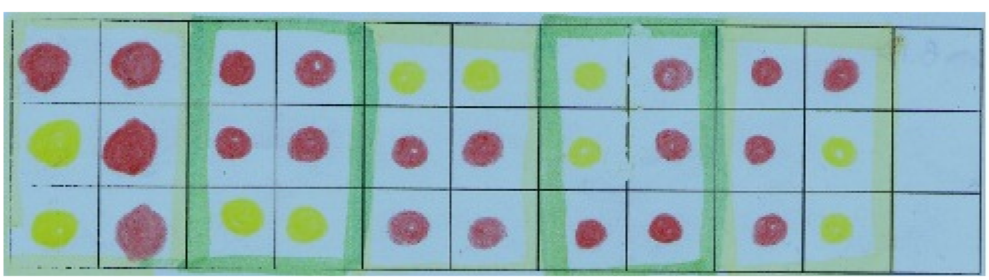


Figura 6. Solución dada por un niño.

En esta respuesta el niño deja tres celdas vacías. Parece claro que no identifica la relación entre el número de huevos rojos y el número de huevos blancos, como el criterio requerido para empacar los huevos de acuerdo con la proporción dada inicialmente.

La Figura 7 muestra la reinterpretación del problema, y la Figura 8 muestra la solución y la justificación de uno de los niños.

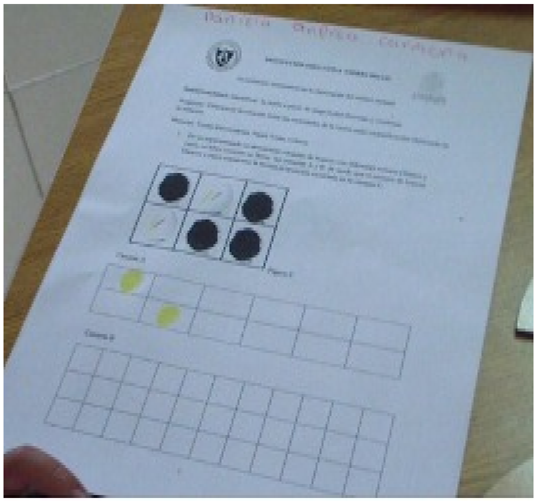


Figura 7. Reinterpretación del problema.

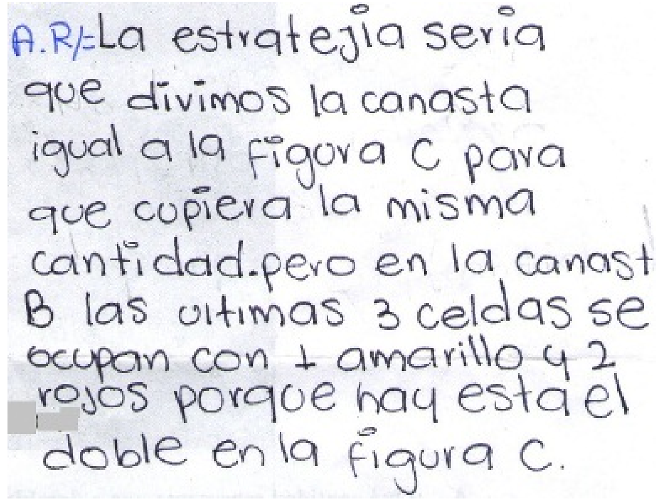


Figura 8. Expresión escrita de la solución.

En la ubicación de los 33 huevos , inicialmente el niño realiza un proceso similar al realizado con los 12 huevos, aunque es válido, inicia con una estrategia que consiste en observar la relación “ser el doble de” , este proceso le permite encontrar una representación simbólica equivalente a la relación 2 a 4 , la cual percibe como 1 a 2. La estrategia le permitió reconocer el objeto razón, es decir, objetivar la razón entre dos cantidades.

En la situación anterior, los niños a partir de su contexto cultural, “en sus actuaciones y formas de pensar han codificando y refinado la historia cultural de la humanidad. Este refinamiento conlleva una determinación sucesiva de conocimiento” (Radford ,2013; p.15).

Actividad 2

Se propone a los niños la siguiente actividad cuyo propósito es realizar la medición de una longitud con unidades artificiales para la generación y comprensión del número racional.

Material. Artefactos del entorno.

Enunciado. Medir la longitud del lado de un “rectángulo” ubicado sobre el piso de la cancha de basquetbol de la Institución.

Los niños se dividen en dos grupos y establecen unidades artificiales para realizar la medición, una de ellas es el zapato y la otra una cartuchera (Figuras 9 y 10).

Figura 9. Midiendo con la cartuchera.

Figura 10. Midiendo con los zapatos.

En el siguiente episodio se aprecian algunas interacciones, en el entorno natural escolar, vinculadas con la comprensión del número racional.

P: …vamos a continuar con el proceso de medición que hemos venido haciendo, …hoy vamos hacer la medida de la longitud de este rectángulo, unos van a medir un lado y los otros iden el otro lado, ustedes deciden como hacerlo, a medida que lo hacen, van hablando, discutiendo y reflexionando sobre esta parte de la medición.
(Silencio)
N1: Nosotros vamos a medir con una cartuchera.
(*Silencio*)
P: …¿Cómo lo van a medir ustedes?
N2: Con los zapatos
P:¿Ese zapato que representa para ustedes?
N2: Una…
N3: una unidad de medida
(*Silencio*)
N1: Tomé como unidad de medida esta cartuchera.

El anterior episodio da evidencia sobre el papel que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social, se piensa con y a través de los artefactos culturales. “Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste” (Radford, 2006;p.107).

N1: Y la estoy poniendo varias veces, donde queda pongo mi dedo para poderla poner acá.
N1: Al parecer mi compañero me hizo perder la cuenta, voy a volver a empezar.
(Silencio)
P: Dos medidas distintas y ¿sí lo pueden hacer con dos medidas distintas?
N2: Si
P: ¿Por qué?
N4: Porque las dos son unidades de medida ¿no?
N3: Porque se pueden dividir
N1: En este momento mi compañera está terminando de hacer la medición. Y le va dando... y le dio…
N5: Nooo, me dio veintidós pero me sobró un pedazo.
N1: A mi compañera le dió veintidós, pero le acaba de sobrar un pedazo, hay que hacer la medición más pequeña.
N5: hagámosla entonces con este lapicero.
(*Silencio*)
E1: Profe pues, mi compañera midió con la cartuchera y le acaba de sobrar un pedazo, entonces vamos a…
N1: Le dio veintitrés y le sobró un pedacito
N5: Mire profe… me dio veintidós…
P: ¿Veintidós, qué?
N5: Veintidós cartucheras, pero me sobró este pedazo, por lo cual estoy midiendo con una unidad más pequeña, que es con este lapicero.
P: Una unidad más pequeña, entonces ¿la cartuchera ya nos les va a servir como unidad de medida?
N5: No

En los diálogos se puede identificar que al no obtener una medición precisa de la longitud del lado del rectángulo con la unidad inicial establecida arbitrariamente, los estudiantes la cambian por otra unidad de medida más pequeña, posiblemente con el objetivo de que la comparación sea un número natural.

N1: En estos momentos nos acaba de sobrar un pedazo, un pedacito más chiquito que el de la cartuchera, entonces vamos a coger una unidad más grande, un poco más grande.
(*Silencio*)
N1: Hay un color y si nos queda grande le sacamos punta.
N6: Hagamos con un borrador
N1: No
N6: Es mejor con este borrador
N1: Vamos a seguir con un color
N6: Y con un borrador
N1: Perdón, … sí y con un borrador
N6: uno, pongan el otro… dos…

A partir de los diálogos se logra advertir elementos conceptuales, como: la escogencia de una unidad de medida, clave en el proceso de objetivación del número racional, el cambio de la unidad medida, asociado al rol social de las prácticas de medición y la adquisición de significados en torno a la noción de unidad de medida; ello da cuenta de cómo los niños generan objetos conceptuales, éstos "son patrones fijos de actividad reflexiva […] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006, p. 111). Se identifica que los niños comprenden el proceso de conteo, pero no han logrado establecer la relación entre las magnitudes.

P: ¿Quién quiere contar cómo se realizó la medición?
N6: Yo noté que, como es, que nosotros también estábamos midiendo con, como se dice, con un zapato más… mucho más grande, pero nos quedaba siempre (*Silencio*) eh nos sobraba.
N5: Sobraba, entonces.
N6: Nos sobraba mucho pedazo.

En los anteriores diálogos, se logra identificar, que la unidad artificial establecida no cabe un número exacto de veces en la longitud a comparar.

N5: Entonces eh el zapato nos dio diecisiete, pero pues no quedó completo porque quedó sobrando, entonces dividimos la unidad de medida en una unidad más pequeña.
P: Y ¿cuál era su unidad de medida?
N5: El zapato.
P:¿Dividieron a quién?
N5: A la unidad de medida
N5: Y nos dio diecisiete y medio (*Silencio*)

En este momento, los niños dividen la unidad en sub-unidades para generar un número racional, pero aún no lo logran identificar debido a que no han realizado la acción de comparación de las dos magnitudes, para determinar la relación entre ellas, aunque para calcular la medida de la longitud, colocaron una magnitud sobre la otra, estableciendo aparentemente una comparación entre magnitudes.

P: ¿ Cómo fue la relación que les dio en la medida?
(*Silencio*)
N6: Fue exacta.
N6: Eh mmm…
P:¿Cómo se logró?
N6: Comparando (*Silencio*)

Los niños han logrado identificar que al colocar una magnitud sobre la otra se obtiene una medida "exacta", lo cual indica que la longitud es conmensurable con la unidad de medida elegida.

P: Bueno, cuéntenme entonces… si ustedes hubieran tenido, otras unidades para medir esa longitud, ¿Con cuál creen ustedes que les daría más precisa?
N5: Con el metro.
N5: Porque el metro se puede dividir, eh en centímetros y los centímetros en milímetros.
N6: Unidades más pequeñas
N5: Si, unidades más pequeñas.
P¿Cómo sería la comparación?
(*Silencio*)
N5: Daría más exacta.
P: ¿Cómo llaman ese resultado?
N5: Racional
N5: Un numero racional.

Los niños logran objetivar el número racional a partir del proceso de medición, tomando una unidad artificial, sin embargo reconocen que es necesario el uso de un patrón de medida estándar como el metro, con el cual pueden obtener unidades de la misma especie cada vez más pequeñas y lograr más exactitud para la obtención del número racional.

Conclusiones

La mediación semiótica instrumental mediatiza y materializa el pensamiento, pero no es suficiente para producir conocimiento, se debe favorecer la interacción entre los niños y entre los niños con otras personas, en esta relación sujeto-sujeto, la elaboración del conocimiento es negociado y compartido.

El aula es el espacio de interacción donde el niño, través de los recursos materiales que le brinda el entorno sociocultural, puede formalizar las generalizaciones y las síntesis sobre la formación de conceptos.

El paso del número natural al número racional puede ser logrado mediante el uso de situaciones de medida, en las que la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir.

Es en la realización de las actividades, en las prácticas sociales, donde se adquiere el saber como proceso de elaboración de significados, donde el niño dota de sentido a los objetos conceptuales que encuentra en su cultura, es decir, es el proceso donde el conocimiento emerge de la interacción social, el sujeto se transforma y al mismo tiempo transforma al conocimiento. es en esta relación donde se da el encuentro sujeto-objeto, es decir la objetivación.

Referencias

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.). *Rational numbers: An integration of research,* 13–47. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Charalambous, Y., Pantazi, D (2007). Drawing on a theoretical model to study students understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64, 293-316. doi: 10.1007/s10649-006 - 036-2.

Escolano, R. (2010). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. Recuperado el 15 de mayo 2012 en http://www.google.com.co/#hl=es&output=search&sclient

Gould, P., Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). *One_Third is Three-cuarters of One-Half*. Recuperado el 10 de marzo 2012 en http:// www.merga.net.au/documents

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding:Esential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New york: Routledge.

Leontiev, A. (1978). *Actividad, conciencia, personalidad.* Ediciones Ciencias del Hombre.

Mazzocco, M., Devlin, K. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11, 5, 681–691.doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x.

Ministerio de Edducación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Obando, G., Vasco, C y Arboleda, L. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: Configuraciones epistémicas para la educación básica. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 26, (p.p. 977 – 988). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions. Bringing research to the classroom.* New york: Routledge.

Ponton, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el Aprendizaje inicial de los números racionales*.Disertación doctoral de Educación Matemática no publicada. Universidad del Valle, Colombia.

Puerta, F. (2012). *Un recorrido geométrico por los diferentes conjuntos numéricos*. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.Universidad Nacional de Colombia . Envigado: Gobernación de Antioquia.

Radford, L. (2006). Introducción Semiótica y Educación Matemática. *Relime, Número Especial*, 7-21. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In Ubus (Ed). *Proceding of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, Vol. 4, (p.p. 17-24). Ankara, Turkey, PME.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. J*ournal of Research in Mathematics Education*, 2,1, 7- 44. Doi:http//:doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Roth, W., Radford, L., & LaCroix, L. (2012). Working With Cultural-Historical Activity Theory. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 13(2), Art. 23. Recuperado el 15 de Febrero 2013 de :http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs1202232

Vygostky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher Psychological processes.* Cambridge, MA:Harvard University Press.

Vygostky, L. (1982). *Pensamiento y lenguaje. Barcelona.* Barcelona: Paidós.

La Razón de Cambio. Niveles de Comprensión del Profesor de Educación Básica en México.

Miguel **Díaz** Chávez
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 151
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
México
mdiaz3010@gmail.com

Resumen

En este reporte damos cuenta de algunos resultados parciales obtenidos de una investigación diseñada con el propósito de identificar el nivel de comprensión que alcanza el profesor de educación básica en México acerca del concepto de razón de cambio. La exploración la realizamos en el contexto de un programa de actualización aplicando un cuestionario donde solicitamos describir el concepto y resolver problemas. El análisis de las descripciones descubre la nula comprensión en los profesores de preescolar y primaria hasta alcanzar niveles poco significativos en el profesor de secundaria. Esto contrasta con la comprensión operatoria del concepto presente en las trayectorias de solución diseñadas por los profesores en la resolución de problemas, el cual evoluciona un poco en los profesores de preescolar y primaria, pero alcanza su máxima expresión en el profesor de secundaria. Las aportaciones contribuyeron involucrar al profesor en un proceso de comprensión autónomo de los conceptos emergentes.

Palabras clave: Niveles de comprensión, profesores de educación básica, razón de cambio.

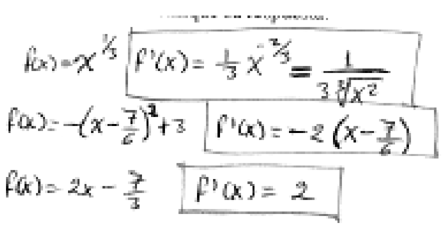
Introducción

En México el discurso de los políticos encargados de la educación pública enfatiza actualmente una supuesta reforma educativa en el nivel básico, el origen parece ser son los malos resultados que obtienen los estudiantes del nivel mencionado en distintas evaluaciones nacionales (ENLACE: Evaluación Nacional del Logro académico y Calidad de la Educación) como internacionales (PISA). Esto lo atribuyen, en el mismo discurso, a la mala calidad de la enseñanza y en particular al deficiente conocimiento de la disciplina por parte del maestro. En esto último estamos de acuerdo, sin embargo, la deficiencia en el conocimiento no es rasgo exclusivo de este profesor.

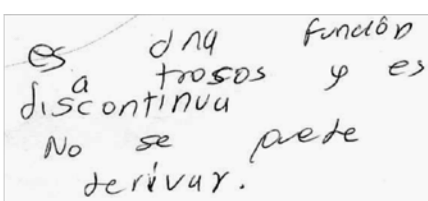
En una investigación que realizamos con la finalidad de explorar la comprensión que poseía el profesor de bachillerato que impartía cálculo en México acerca del significado e interpretaciones de la derivada les pedimos obtener la derivada de esta función:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0\le x\le 1 \\ -\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 & 1<x\le \frac{13}{6} \\ 2x-\frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{13}{6}<x\le 4 \end{cases}$$

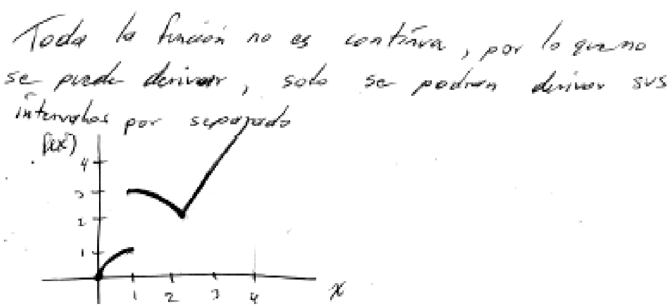
El análisis de las trayectorias de solución que diseñaron los profesores permitió descubrir que algunos aplican las reglas de derivación mecánicamente a cada una de las expresiones que componen la función



Otros recuerdan algunos conceptos de cálculo de manera encapsulada y establecen relaciones y conclusiones no coherentes



Otros más utilizan la gráfica como herramienta para obtener conclusiones falsas basadas en la percepción visual (Díaz & Rivera, 2012)



Estos hechos además de revelarnos ciertos rasgos que permean la cognición de este profesor, nos revelaron el bajo nivel de comprensión que tiene este profesor sobre uno de los conceptos más importantes que le corresponde enseñar. ¿Incidirá esto en las dificultades que exhiben los estudiantes en la comprensión de los conceptos que subyacen en este curso? Estas dificultades en ocasiones permanecen pasivas en el sujeto; sin embargo, cuando se activan constituyen verdaderos obstáculos en el aprendizaje en el sentido de Brosseau (2002). Si esto sucede con estos profesores que tienen cierta formación matemática, lo mismo que el profesor de la escuela secundaria, qué podemos esperar de la comprensión de los profesores de preescolar y primaria en cuya formación está ausente esa formación especializada.

En relación al concepto de derivada, está relacionado con las nociones de razón y cambio, cuyos inicios formales se encuentran en el currículum de educación básica, en temas relacionados con el número racional, razón, proporción, fracción; entre otros. Es un concepto que se extiende en todo el currículum desde la escuela elemental hasta el universitario (Lamon, 2007). Respecto a los conceptos mencionados ¿Qué podemos decir acerca de lo que comprende el profesor de educación básica?

Reflexionando acerca del nivel de comprensión que probablemente exhiban estos profesores sobre estos conceptos, nos dimos a la tarea de revisar algunos libros de texto de matemáticas de educación básica de México que datan de las décadas de los sesentas y setentas del siglo pasado y en esta revisión percibimos una inclinación a desarrollar en el alumno habilidades, destrezas, el uso de algunas reglas y técnicas y la definición de los conceptos. Esta orientación incuestionablemente es necesaria, pero creemos que no es suficiente, ya que consideramos que la enseñanza de la matemática debe enfatizar la comprensión de las reglas, las técnicas y los conceptos mismos, consideración que plantean la NCTM (2000) en sus *Principles and Standards for School Mathematics* y la OECD (2002) en el *Programme for International Student Assesment*, este último conocido popularmente como PISA; sin embargo esta creencia nuestra conlleva reflexionar acerca de las posibilidades reales de llevarla a la práctica, un aprendizaje con comprensión es necesariamente una variable que depende, entre otras cuestiones de una enseñanza que promueva la comprensión; y esta orientación depende directamente del profesor. *¿Los profesores de educación básica en México comprenden realmente los conceptos matemáticos contenidos en el currículum en los cuales se construye el concepto de derivada?* Más puntualmente *¿El profesor de educación básica comprende los conceptos de razón y de razón de cambio?*

Uno podría conformarse con aceptar que las dificultades que exhiben los estudiantes sobre los conceptos matemáticos tienen su origen en el aprendizaje, sin embargo nosotros tenemos serias dudas al respecto y creemos como Prenowitz (1951), que algunas de esas dificultades, como en el caso de la derivada, tienen su origen en la complejidad de los conceptos mismos; sin embargo no descartamos que el origen de esas dificultades se encuentre en el aula misma, más específicamente, en la conducción de la clase por el profesor (Lloyd & Wilson, 1998). De manera más precisa, en las dificultades que tiene el profesor en la comprensión de los mismos.

La buena comprensión por el profesor le permite diseñar situaciones de aprendizaje con comprensión. En caso contrario, únicamente repite lo memorizado, esto probablemente provocará en los alumnos un sentimiento de frustración. En general los sentimientos negativos que la gente tiene respecto de las matemáticas lo atribuyen, correcta o incorrectamente, a sus profesores (Boas, 1981).

Al profesor le corresponde además comunicar bien los conceptos a través del lenguaje, proporcionando definiciones o experiencias, ejemplos y contraejemplos para que el estudiante forme su propio sistema conceptual. Ello exige naturalmente del profesor una comprensión clara de los mismos. Sin embargo esta competencia parece no tenerla adecuadamente desarrollada (D'Amore y Martini, 2000).

Dewey (1916) alertaba sobre el impacto nocivo de una enseñanza sin comprensión; señalando que afecta la habilidad del estudiante para reflexionar sobre el sentido de lo que hace. Por su parte el profesor Freudenthal (1973) afirmaba que la persona que enseña debe saber más que el que está aprendiendo y lo debe saber no en el momento en que está realizando la acción de enseñar, sino antes; sin embargo Ponte & Chapman (2006) muestran que los profesores de matemáticas tienen una gran deficiencia en el conocimiento de la disciplina.

Partiendo de la necesidad de conducir un aprendizaje con comprensión, lo cual requiere de profesores que cuenten con los conocimientos y por supuesto con una buena comprensión de los conceptos que enseñan, diseñamos esta investigación con la finalidad de explorar el nivel de comprensión que tiene el profesor de educación básica sobre uno de los conceptos matemáticos que desde mi particular punto de vista es de los más interesantes, tanto por su construcción formal a lo largo de todo el currículum desde la educación básica, en cuya genética encontramos los conceptos de razón y proporción y la construcción continua hasta el nivel universitario con conceptos más complejos del análisis matemático por ejemplo. Además el concepto de razón de cambio tiene una amplia gama de conexiones y aplicaciones en la misma matemática como con otras disciplinas. Es verdad que la exploración de esos conceptos ha ocupado a la comunidad de investigadores, sin embargo la mayoría ha dirigido la atención a explorar la cognición de los estudiantes (Singh, 2000; Lamon, 2007; Teuscher & Reys, 2010) a la discusión de los significados y construcción de propuestas (Behr, 1992) y en nuestra búsqueda encontramos sólo un trabajo orientado a la exploración de la razón de cambio en los profesores (Ellis, 2007) pero en el nivel superior.

Marco teórico

La preocupación por estudiar la comprensión en el aula de matemáticas ha despertado el interés de diversos sectores de la sociedad, desde mediados del siglo pasado, investigadores en educación matemática y psicólogos se han ocupado de este tema (e.g. Brownell, 1947; Skemp, 1976; Carpenter & Hiebert, 1992). El profesor Skemp (1976) por ejemplo distingue entre la comprensión relacional y la instrumental. Sierpinska (1994), así como Fennema & Romberg (1999) reportan resultados y reflexiones teóricas en relación con la comprensión en matemáticas. Otras fuentes documentales (NCTM, 2000) precisan que los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente sus nuevos conocimientos a partir de sus experiencias y sus aprendizajes previos. Esto está íntimamente relacionado con el principio de enseñanza, que señala: Para que la enseñanza sea efectiva los profesores deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que a ellos les toca enseñar y ser capaces de recurrir a este conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza….Los profesores deben tener frecuentes y amplias oportunidades y fuentes para mejorar y actualizar su comprensión…Los profesores necesitan saber los distintos significados de los conceptos…Los profesores necesitan conocer las distintas representaciones de los conceptos, las fortalezas y debilidades de las mismas aisladamente y como se relacionan unas con otras

La OECD en su programa PISA enfatiza la comprensión en el desarrollo del pensamiento matemático cunado menciona que la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes saben y necesitan aprender y entonces exigirles y apoyarlos para aprenderlo bien.

En la exploración de los niveles de comprensión sobre la razón de cambio nosotros consideramos las formas de actividad mental que enuncian Carpenter & Lehrer (1999): la construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre la experiencia, la articulación de lo que se conoce y la apropiación del conocimiento; las cuales, desde nuestro punto de vista son visibles en lo que hace, comunica, explica y prueba el sujeto. A éstas nosotros añadimos la comunicación del conocimiento, ya que los argumentos y en general la manera en que lo hace es un indicador del nivel de su nivel de comprensión.

Metodología

La investigación la realizamos en el contexto de un taller de actualización de profesores en relación al sentido numérico y pensamiento algebraico, estos profesores fungen como asesores metodológicos en la educación básica. El taller tuvo lugar en cuatro regiones del Estado de México y en él participaron 36 profesoras de preescolar 79 de primaria y 36 de secundaria.

Para el taller diseñamos un cuestionario dividido en dos secciones. En la primera solicitamos datos relacionados con su perfil profesional, que incluía su formación, su último grado de estudios y la institución que lo otorgó, su especialidad y su experiencia en la docencia. En esta misma sección se pidió a los profesores describir los siguientes conceptos:

- *Matemáticas*
- *Número*
- *Razón de cambio*
- *Pensamiento Matemático*
- *Razón de cambio*

La segunda parte del taller consistió en la resolución del siguiente problema (*Figura 1*). El cual es una adaptación del problema de manzanos y coníferas contenido en PISA. Este problema se planteó con la intención de indagar la comprensión del profesor acerca de la razón de cambio a través del análisis de las trayectorias de solución y la comunicación de las mismas. El problema es el siguiente:

Un agricultor siembra árboles de manzanas. Para proteger el huerto del viento, siembra coníferas, utilizando un modelo como el que muestra el dibujo.

X=conífera; ●= manzana
XXX ***X●X*** ***XXX***
XXXXX ***X● ●X*** ***X X*** ***X● ●X*** ***XXXXX***
XXXXXXX ***X● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ●X*** ***XXXXXXX***
XX XXXXXXX ***X● ● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ● ●X*** ***X X*** ***X● ● ● ●X*** ***X X XXXXXXX***

a) ¿En algún momento el número de coníferas es igual al número de árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

b) Supóngase que este agricultor quiere hacer más grande el huerto con más filas de árboles. ¿Qué aumentará más rápidamente, el número de árboles de manzana o el de coníferas? Argumenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos árboles de coníferas se requerirán para rodear k árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

Figura 1. Problema adaptado de PISA (2002)

El proceso de resolución se dividió en cuatro etapas. En la primera los profesores lo resolvieron individualmente. En la segunda etapa, los profesores agrupados ahora en equipos discutieron las trayectorias de solución de cada uno de ellos y colaboraron en el diseño de una colectiva. En la tercera etapa cada uno de los equipos comunicó al pleno la trayectoria consensada. Finalmente la sesión concluía con algunas precisiones conceptuales, orientadas por un lado a la comprensión de los conceptos matemáticos emergentes y por otro lado a la comprensión de la parte didáctica; tomando como punto de partida esas trayectorias de solución.

La información la estamos concentrando en mapas conceptuales, los cuales nos han auxiliado en la identificación, interpretación y jerarquización de sus niveles de comprensión de la razón de cambio. El análisis de los resultados lo estamos haciendo primero a nivel individual, luego transitaremos a las comunidades de enseñanza (preescolar, primaria y secundaria), para finalmente identificar afinidades entre estas comunidades e individuos.

Algunos resultados y discusión

Una vez que aplicamos el cuestionario el análisis lo hacemos considerando por un lado las respuestas a la pregunta y por otro las trayectorias de solución al problema. Después el análisis lo estamos haciendo considerando diversos niveles. En el primero consideramos únicamente el nivel educativo en que laboran los profesores, preescolar, primaria o secundaria. Este es el que presentamos en este reporte. Un segundo nivel de análisis lo hacemos en cada uno de los profesores, considerando sus mismas trayectorias de solución y los argumentos y pruebas que esgrimen.

Lo que explican acerca de la razón de cambio.

Lo que percibimos en esta parte es que el nivel de comprensión de los profesores específicamente sobre este concepto va en orden ascendente. Desde una comprensión casi nula de los profesores de preescolar

- Razón de cambio.- Construir, para transformar. Resolución de problemas.

5 Razón de cambio.- un motivo intriinseco para o que posibilita la transformación de pensamiento o de comportamiento

Este tipo de respuestas, generalizadas en estas profesoras muestran una nula comprensión del concepto. Las definiciones y las explicaciones están más bien asociadas a la valoración social como *razón para el cambio*. Sin embargo los conceptos aislados de *razón* y *cambio* son conceptos que los niños comprenden y utilizan de alguna manera en distintas actividades. Estos conceptos además están implícitos en los contenidos correspondientes al pensamiento matemático a desarrollar en preescolar.

En el caso de los profesores que laboran en la escuela primaria las respuestas no varían mucho, el nivel de comprensión es muy semejante al que exhiben las profesoras de preescolar. Algunos prefieren omitir su respuesta.

Otros lo definen de manera semejante a las de los profesores de preescolar.

'azón de cambio - tener expectativas de actualizar y mejorar

En la Escuela Primaria se profundiza en la construcción de los conceptos de fracción, razón y proporción; estos están explícitos o implícitos en los tres ejes en que está organizada la enseñanza de la matemática este nivel.

El nivel de comprensión se modifica un poco y en casos aislados en los profesores de educación secundaria como lo ilustra la siguiente descripción

5- RAZON DE CAMBIO: COMPARACION DE DOS CANTIDADES

No obstante la aparente precisión de estas respuestas, resulta, con un análisis pertinente del contexto, en un bajo nivel de comprensión. Finalmente los términos utilizados carecen de significado y relación con el verdadero concepto de razón de cambio.

Sin embargo, si bien es cierto ese nulo bajo nivel de comprensión que manifiestan los profesores en sus explicaciones y definiciones es totalmente distinto al que muestran en la resolución del problema en cuya solución subyace el concepto de razón de cambio.

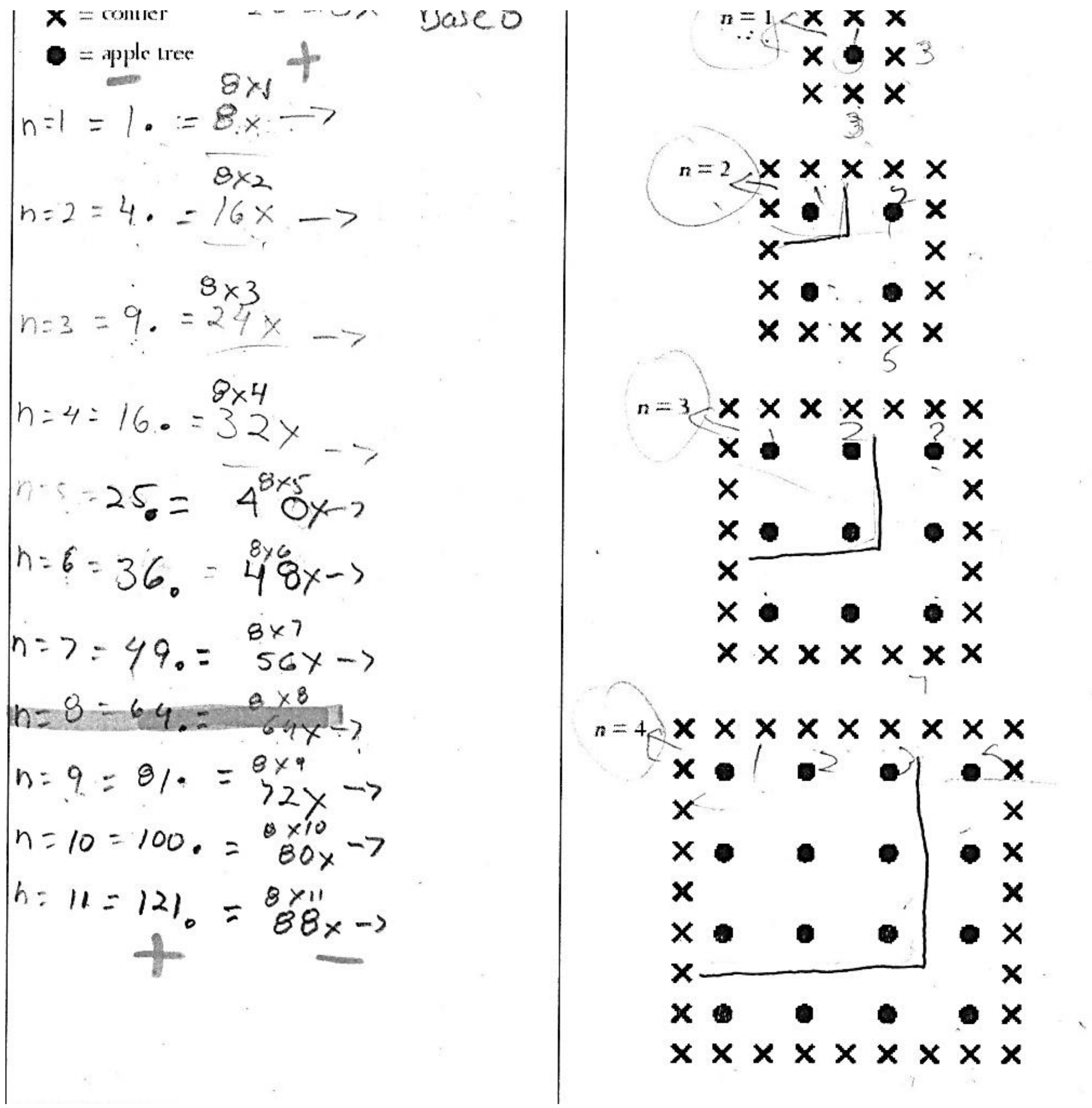
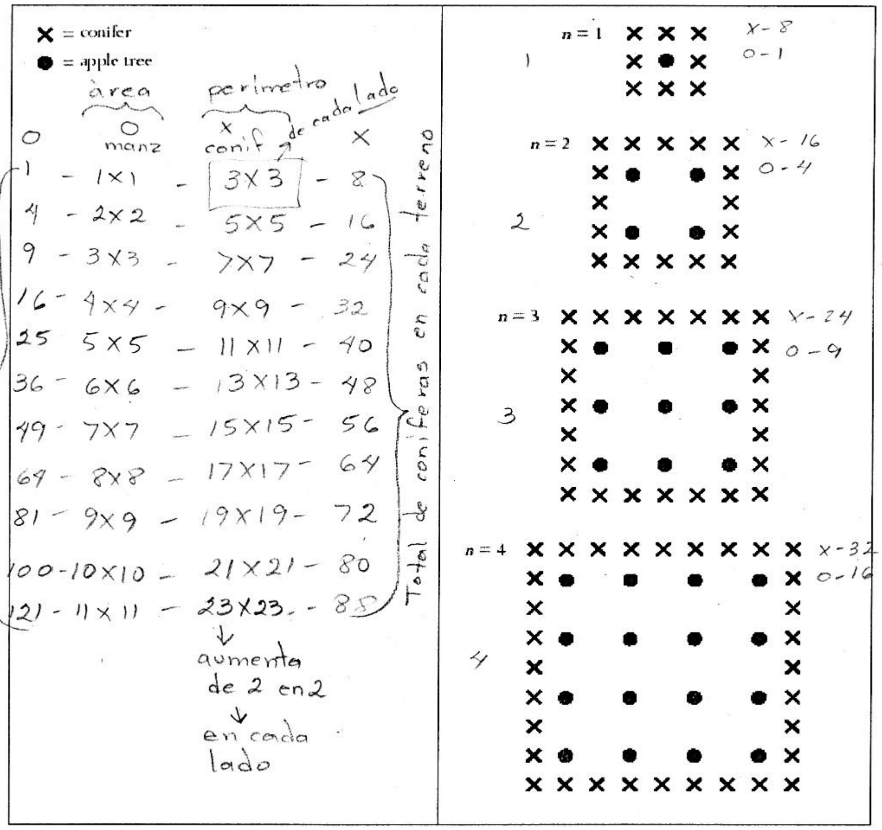


Figura 2. Trayectoria de solución de una profesora de preescolar

En la resolución del problema de manzanos y coníferas todos los profesores utilizan el concepto de razón de cambio en distintos niveles, operan de manera ágil con el mismo, esto sin embargo contrasta con las deficiencias en su explicaciones. El profesor del nivel básico no sabe cómo explicarlo pero si sabe utilizarlo.

En el caso de las profesoras de preescolar se manifiesta una clara inclinación a la ejecución con una tendencia a la percepción de formas y figuras para después transitar al hacer aritmético donde combinan de manera indistinta símbolos, notaciones y relaciones; sin ninguna preocupación por las reglas sintácticas como se puede ver en la figura 2.

Vale la pena señalar que esta trayectoria permitió en la etapa final descubrir la suma de los primeros *n* números impares.



Pregunta

a. Construye una tabla que indique el número de árboles de manzana y de coníferas en cada caso.

b. Escribe una fórmula que te permita calcular el número de árboles de manzana y de coníferas. $x = n \cdot 8$ $o = n^2$ Ejemplo: si n=2 entonces $x = 2 \times 8$ $o = 2 \times 2$

c. ¿En algún momento el número de coníferas es igual al número de árboles de manzana? Argumenta. sí en el huerto rodeado por 17 coníferas en cada lado, dan 64 y son en el centro 8×8=64 manzanas.

d. Supóngase que este agricultor quiere hacer más grande el huerto con más filas de árboles. ¿Qué aumentará más rápidamente, el número de árboles de manzana o el de coníferas? Argumenta tu respuesta. El de manzanas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
manzana n = si mismo	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
conif. n · 8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88

5

Figura 3. Trayectoria de solución de un profesor de secundaria

En los algunos profesores de primaria y principalmente de secundaria percibimos un respeto por la sintaxis y la semántica, ahí se observa claramente como el nivel de comprensión ha evolucionado de lo operatorio a lo simbólico. Observándose el tránsito de la comprensión aritmética a la comprensión simbólica, de los arreglos numéricos a la traducción de las expresiones algebraicas, donde se puede ver la razón de cambio pero que sin embargo el profesor aún no distingue este significado, aún en el caso sencillo de la variación directamente proporcional.

En la figura 3 por ejemplo se puede observar otro nivel de comprensión, lo cual se evidencia al usar correctamente las literales para la representación de las relaciones, además de que identifican variables; sin embargo aún con esta evolución hacia el álgebra en el tratamiento de la información, su manejo, traducción y arribo a generalidades importantes sobre el problema y su solución el nivel de comprensión de la razón de cambio no muestra una evolución significativa. Este es el punto de partida para involucrar al profesor en un proceso de comprensión evolutivo, que se construye de manera colaborativa a partir de los conceptos emergentes en la resolución de los problemas y la orientación del experto. La figura 4 muestra un poco este proceso.

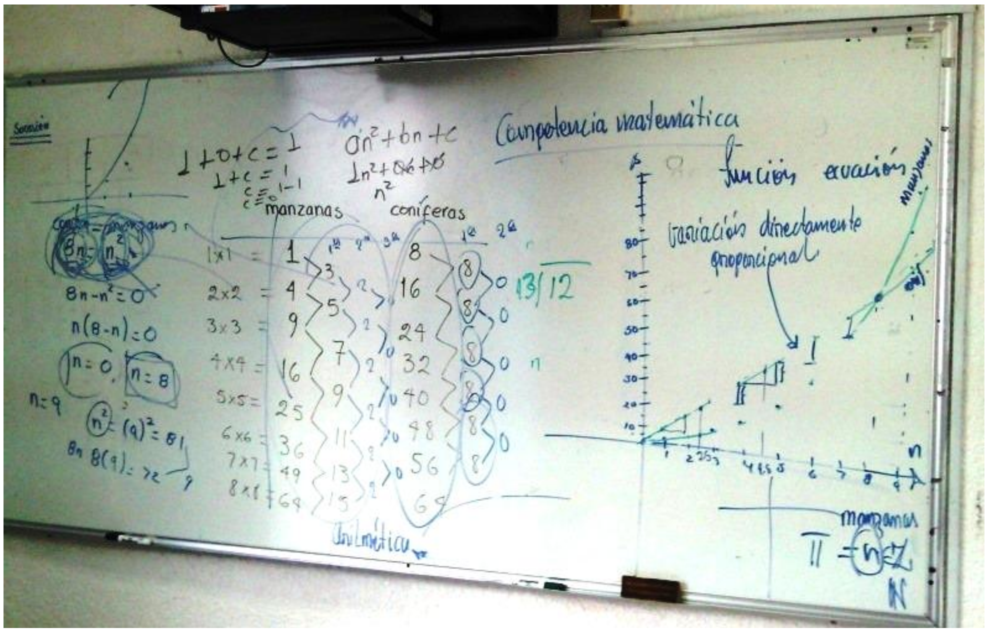


Figura 4. Conceptos emergentes y su articulación en el proceso de comprensión.

Conclusiones

En un primer nivel de análisis los casos discutidos exhiben la nula comprensión del concepto y por otro la encapsulación del mismo, esto tiene que ver de alguna manera con las dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión que posteriormente tienen con conceptos relacionados con el cálculo, tales como límite, el infinito, la idea de función y la demostración. La investigación mostró además que es posible involucrar al profesor en un renovado y significativo proceso de comprensión a partir de la resolución de problemas no rutinarios y el trabajo colaborativo entre los elementos de distintas comunidades de aprendizaje.

Referencias

Behr, M.; Guershon, H.; Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. En Grouws, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Toronto. Macmillan Publishing Co. 296-333.

Boas, R. (1981). Can We Make Mathematics Intelligible? *The American Mathematical Monthly*. **88**(10), 727-731.

Brosseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York. Kluwer Academic Publishers.

Brownell, W. A. (1947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*. **47**(5). 256-265.

Carpenter, T. & Hiebert, J. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grows, A.D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Co. 65-97.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En Fennema E. & Romberg, T. (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum**.** 19-32.

D'Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. **3**(1). 33-46.

Ponte, J. & Chapman, O. (2006). Mathematics teacher's knowledge and practices. En Gutierrez, A. & Boero, P. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam: Sense Publishers. 461-494.

Dewey, J. (1916). *Democracy and education*, USA. The Free Press.

Díaz, M. & Rivera, A. (2012). Understanding of the derivative and its meanings. the case of calculus professors. En *Proceedings of The 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12).* Seoul. Korea. 2862-2870.

Ellis, E. (2007). *Modelling teachers' ways of thinking about rate of change*. Doctoral Tesis. Arizona State University.

Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.). (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (Ed.). (1973). *Mathematics as an education task*. Dordrecht. Reidel.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework. En Lester, F. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning*. NCTM. 629-668.

Lloyd, M. & Wilson, M. (1998). Supporting innovation; the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. **29**(3), 248-274.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. USA. National Council of Teachers of Mathematics.

OECD. (2002). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment: Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. Paris. Organisation for Economic Co-operation and Development.

Prenowitz, W. (1951). Insight an understanding in the calculus. En Apostol, T. *et.al.* (Eds.) *A Century of Calculus*. USA. The Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London. Falmer Press.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*. **43**(3). 271-292.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*. **77**. 20-26.

Teuscher, D. & Reys, R. (2010). Slope, rate of change and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*. **103**(7). NCTM. 529-524.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La respuesta al problema de la medida de figuras planas en los antiguos griegos

Daniel Steven **Moran** Pizarro
Instituto de Educación y Pedagogía
Colombia
dmbourbaki@gmail.com

Resumen

El problema de la cuadratura del círculo ha sido de gran importancia a través de la historia, pues constituye un elemento movilizador de algunas ramas de la matemática como la Geometría Analítica, el Cálculo y el Análisis. Euclides de Alejandría (aprox. 300 a.C.) en su monumental obra Elementos da una respuesta parcial al problema, estableciendo un proceso para la cuadratura de figuras rectilíneas y deja implícito el proceso que posteriormente será el eje central de la medida. Estos resultados son retomados por Arquímedes para la cuadratura de figuras que no son rectilíneas. En el presente escrito se intenta abordar estos resultados de Euclides y su relación con los resultados de Arquímedes al problema de medir, uno de los ejes centrales en el desarrollo de las Matemáticas.

Palabras clave: historia de la integral, epistemología de las matemáticas, Euclides, Arquímedes, Medida, método exhaustivo, cuadratura.

El antiguo problema de medir

Medir, contar y ordenar son algunos aspectos que siguen motivando el desarrollo de las matemáticas. Desde los antiguos, la matemática va surgiendo y se va delineando como aquella respuesta que el mismo hombre va dando a problemas de tipo fenomenológico, estableciéndose una relación fuerte entre lo que es matemáticas y experiencia.

El problema primigenio de la medida tiene relación con lo geométrico. Para los antiguos medir es comparar, y se realizaba bajo un procedimiento llamado la *Antiphaeresis* desarrollada por los pitagóricos: Dada una magnitud AB, se mide con respecto a una magnitud referencial CD. El método consiste en ver cuántas veces cabe CD en AB. En caso de caber un número exacto de veces, el proceso ha terminado; en caso de no caber un número exacto de veces, la idea era buscar un segmento unidad de tal forma que "encajara" veces exactas en el segmento a medir (actualmente constituye el algoritmo de divisibilidad). Para los pitagóricos, este proceso siempre podría realizarse. En términos modernos, creían que siempre existían $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que $nA = mB$. La apuesta filosófica de los pitagóricos entró en crisis cuando se dieron cuenta de la existencia de magnitudes para las cuales $(\forall n, m \in \mathbb{Z}^+)(nA \neq mB)$, problema conocido como la emergencia de las magnitudes inconmensurables (por ejemplo, la relación entre el lado del cuadrado y su diagonal; o la diagonal del pentágono con su lado).

Entre los problemas planteados por los antiguos griegos, se destacan tres especialmente:

> **la duplicación del cubo.** Dado un cubo, construir un cubo cuya medida sea el doble del cubo inicial.
>
> **la trisección del ángulo.** Dado un ángulo, hallar su tercera parte.
>
> **la cuadratura del círculo.** Dado un círculo, encontrar un cuadrado equivalente.

El último problema dio mucho de qué hablar, no solo a los matemáticos de la época sino a todos los matemáticos posteriores, y la pregunta se transformó en la cuadratura de figuras en general. Euclides, en sus *Elementos* trató de dar una respuesta y culminó con la cuadratura de las figuras rectilíneas, que se considera como el gran resultado de sus dos primeros libros (Klein, 1972; Recalde, 2011).

La respuesta de Euclides: La cuadratura de figuras rectilíneas

Euclides no logra cuadrar el círculo, pero logra establecer la cuadratura de figuras rectilíneas; y en su monumental obra *Elementos* busca darle salida al problema de las cuadraturas (Heath, 1956; Euclides, 1970; Euclides, 1971).

Euclides se ha reconocido por ser quizá un gran sistematizador[1] (Se utiliza el término sintetizador en atribución a la incorporación de un corpus teórico en base a un método que será el que marque la pauta en la forma de hacer matemáticas: Método hipotético-deductivo) de toda la matemática de la época, pero esto ya constituye un aporte a la genialidad de Euclides: ¿Cómo es posible saber que la construcción de toda una época de la matemática reposa en un triángulo equilátero? En su obra, Euclides logra demostrar los teoremas que no sabemos si Tales de Mileto demostró o no, también demuestra teoremas de gran trascendencia escolar (clásicos), que uno, como educador matemático (y como matemático) debería conocer: teoremas de paralelismo, desigualdad triangular, los ángulos internos de un triángulo que suman dos rectos, el teorema de Pitágoras, entre otros. Se conocen muchas demostraciones del teorema de Pitágoras, pero la demostración que da Euclides es una muestra de genialidad matemática, en donde se percibe el

[1] Para profundizar más acerca de la axiomática en Euclides ver (Levi, 2000)

espíritu del libro I de los *Elementos* en su máxima expresión: las aplicaciones de áreas para la medida de las figuras planas, cuestión que históricamente constituye la simiente de la noción de área. Lo que se quiere encontrar es esa área, pero entonces surge la pregunta: ¿Qué es el área? La respuesta se da muy posteriormente en base a poder establecer una función:

$$\{\text{figuras planas acotadas}\} \to \mathbb{R}_0^+$$

Pero para poder darle un valor numérico a eso que llamamos área, pero necesitamos de mucho tiempo para poder establecer esa reglilla de números que mida ($\mathbb{R}$) y poder establecer dicha función[2]. Euclides en el libro I demuestra el teorema de Pitágoras, y con ayuda de la proposición 5 del libro II, resuelve el problema de la cuadratura de las figuras rectilíneas.

Proposición II,14. Dada una figura rectilínea, encontrar un cuadrado equivalente.

En las proposiciones anteriores, Euclides ha enseñado las aplicaciones de áreas, y en la proposición 45 del libro I muestra la forma de construir un rectángulo equivalente a una figura rectilínea. Sea el paralelogramo rectángulo $ABCD$ equivalente en área a la figura rectilínea Σ.

Se prolonga DC hasta G tal que CG sea igual CB. Se halla el punto medio de DG y con centro en F y radio FD se describe una semicircunferencia. Se prolonga BC hasta E y se traza FE (ver figura 1).

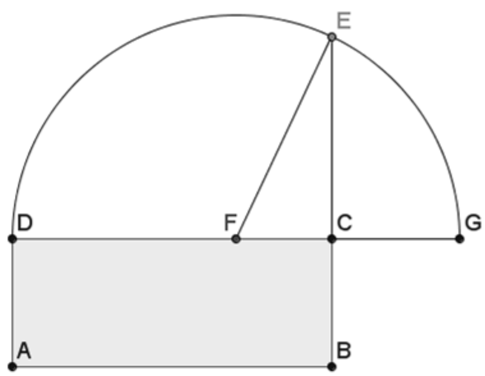


Figura 1. Construcción de II,14.

Se obtienen las siguientes igualdades:

[2] Para profundizar acerca de la relación número-magnitud ver (Dhombres, 1980).

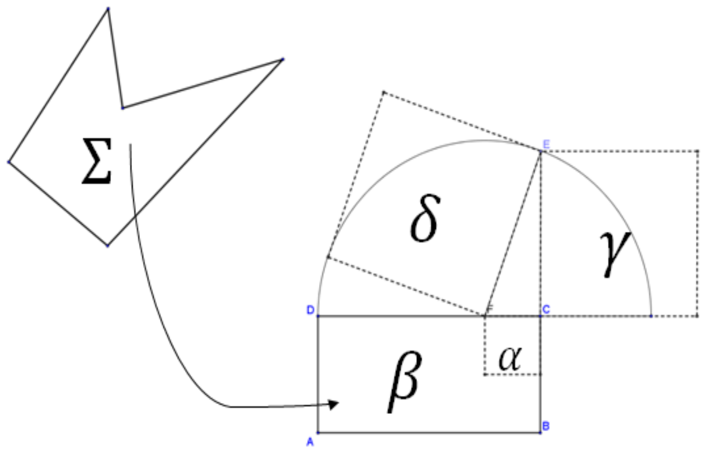


Figura 2. Gráfico ilustrativo de las igualdades de II,14

Sea el β = rectángulo $ABCD = \Sigma$, por el teorema de Pitágoras se cumple que $\alpha + \gamma = \delta$. También $\beta + \alpha = \delta$ por Prop.(II, 5), luego, por transitividad, $\alpha + \gamma = \beta + \alpha$; por consiguiente $\gamma = \beta$. Y como β es equivalente a la figura rectilínea Σ.

∴Dada una figura rectilínea es posible encontrar un cuadrado equivalente.■

Euclides no tiene aquella reglilla llamada *números reales* que permita darle una medida a una magnitud dada, pero modernamente establece una función:

$$f\colon \{\text{figuras planas rectilíneas}\} \rightarrow \{X : X \text{ es el lado del cuadrado}\}$$

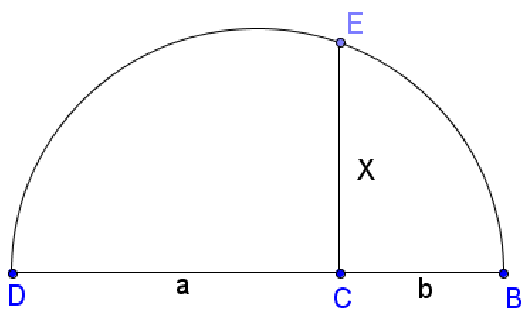


Figura 3. Construcción de la media proporcional entre dos segmentos

También podemos ver (figura 3) que el segmento CE corresponde a ser media proporcional de DC y CB. Llamemos $a = DC$ y $b = CB$, por tanto, de acuerdo a la proporcionalidad:

$$\frac{a}{X} = \frac{X}{b} \text{ entonces } X^2 = ab$$

Es decir, que el rectángulo de lados a y b es igual a un cuadrado de lado x, operación que no se puede hacer en la época de Euclides, pues no se ha definido el producto de segmentos; pero es una interpretación del resultado de Euclides. Estas cuestiones son retomadas posteriormente por Descartes, incorporando la multiplicación de segmentos, base fundamental en su *geometría analítica*.

Euclides en su libro V (atribuido a Eudoxo) habla sobre teoría de razones y proporciones. Dice algo acerca lo que es magnitud, no la define como tal, pero entendemos que tiene la misma concepción aristotélica de un "pedazo de recta continuo". Define la propiedad arquimediana (elemento fundamental para poder establecer una razón entre magnitudes) y establece la igualdad entre razones, que en términos modernos, sería algo como lo siguiente:

> **Def V,5 (Sobre la igualdad entre razones).** Sean A, B, C y D magnitudes. Entonces A y B están en la misma razón que C y D – simbólicamente $A:B = C:D$, cuando para todo entero n y m, se tiene que si $nA \gtreqless mB \rightarrow nC \gtreqless mD$.

El libro X de los *Elementos*, llamado comúnmente la cruz de los matemáticos, es el libro más extenso de los *Elementos*. Consta de más de 100 proposiciones y trabaja las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Para nuestros propósitos, la proposición más importante es la proposición X,1: Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda, una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará al final una magnitud que será menor que cualquiera de las dos magnitudes dadas.

En términos modernos, tenemos que si

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

Euclides demuestra, en el libro XII de los *Elementos*, que "Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros", evidenciando el siguiente hecho (visto desde una perspectiva moderna): dado un círculo C, una sucesión $\{P_n\}$ (estrictamente creciente) de polígonos inscritos en C, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, C - P_n < \varepsilon$.

Estos son dos importantes ingredientes por los cuales puede decirse que los *Elementos* de Euclides constituye un primer tratado en donde existe una teoría de la medida inducida. Si bien, Euclides no logra contestar al problema de la cuadratura del círculo, pero sus respuestas parciales y los fundamentos conceptuales que desplegó, marcaron, en muchos aspectos, el derrotero de la evolución de las matemáticas durante más de veinticinco siglos (Recalde, 2007).

Cualquier matemático posterior que quiera hablar de medida e integración, debe tener en cuenta esos aspectos, y el primero en hacerlo fue Arquímedes: Retoma algunos aspectos conceptuales de Euclides, inaugurando el método exhaustivo, que será el método por excelencia y es la respuesta de los antiguos para el problema de la medida, interés central de este escrito.

La respuesta de Arquímedes: El método exhaustivo

En Siracusa florece Arquímedes y cambia algunas concepciones de la Geometría de Euclides. Dos aspectos importantes a resaltar de Arquímedes son, por una parte, que generaliza con resultados cuantitativos, un gran avance con respecto a la geometría sintética de Euclides que era puramente relativa; y por otro lado, es que trata de establecer un formalismo para los procesos infinitos. Recordemos que un gran resultado de los *Elementos* es la cuadratura de figuras rectilíneas, y uno podría pensar que como el círculo puede verse como un polígono de infinitos lados, entonces es posible realizar su cuadratura.

El problema yace en las veces que se debe hacer ese proceso (actualmente que es por el *paso al límite*). Vamos detrás de la formalización de procesos infinitos que se corresponde muy posteriormente con una nueva rama de las matemáticas cuyos objetos son las funciones y se incorpora una nueva operación: *paso al límite*. Esa rama es el Análisis.

Euclides nos dio en sus *Elementos* las bases conceptuales del método exhaustivo, pero quién lo formaliza como proceso matemático es Arquímedes.

Haciendo cierta transposición, tenemos lo siguiente:

Sea una región no rectilínea R.

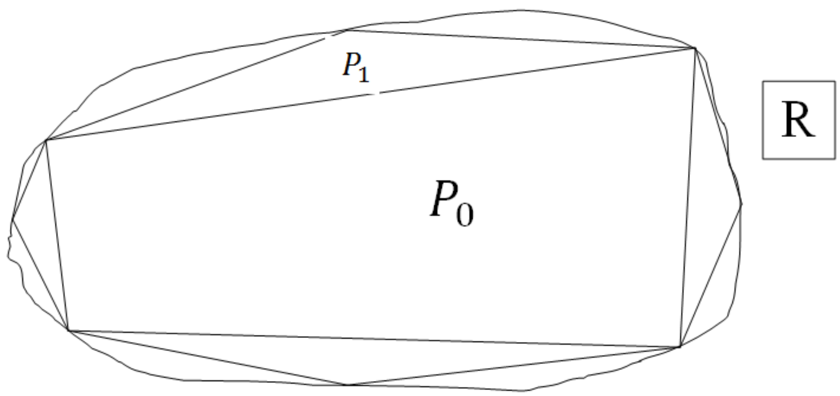


Figura 4. Método exhaustivo aplicado una figura en general.

Se define una sucesión de polígonos $P_0, P_1, \dots, P_n$, donde $\{P_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente. Se define una sucesión de diferencias como sigue: $M_0 = R - P_0, M_1 = R - P_1, \dots, M_n = R - P_n$, que es una sucesión estrictamente decreciente, donde se tiene que:

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n$$

que corresponde al principio de Eudoxo (proposición X,1) de los *Elementos*.

Tenemos entonces que si:

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n\right) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

$$(\{P_n\} \to P) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, P - P_n < \varepsilon$$

Entonces

$R = P$

Si suponemos que $R > P$, entonces $R - P > 0$. Por tanto, existe n tal que $R - P_n < R - P$, de lo que se tiene que $P_n > P$. $\rightleftarrows$.

Si suponemos que $P > R$, entonces $P - R > 0$. Por tanto, existe n tal que $P - P_n < P - R$, de lo que se tiene que $P_n > R$. $\rightleftarrows$.

Por tanto, $R = P$.

Esto es de suma importancia, pues se está demostrando que una figura curvilínea se puede *agotar* con polígonos inscritos haciendo que la diferencia entre la figura R y la sucesión $\{P_n\}$ de polígonos sea *tan pequeña como se quiera*. Cualquier parecido con la integral de Riemann no es pura coincidencia: estos son los elementos primigenios de la Integral de Riemann.

Teniendo esto como base, Arquímedes llega a dos grandes resultados, que se consideran como dos joyas y pilares de la antigüedad griega: Realiza la cuadratura de la parábola (Realmente Arquímedes encuentra este resultado usando dos métodos, el método mecánico (que no se considera riguroso matemáticamente por apelar a resultados físicos) y el método exhaustivo que será el que se mostrará en este escrito) y encuentra una figura rectilínea equivalente al círculo.

> **Proposición 24 (De la cuadratura de la parábola).** El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.

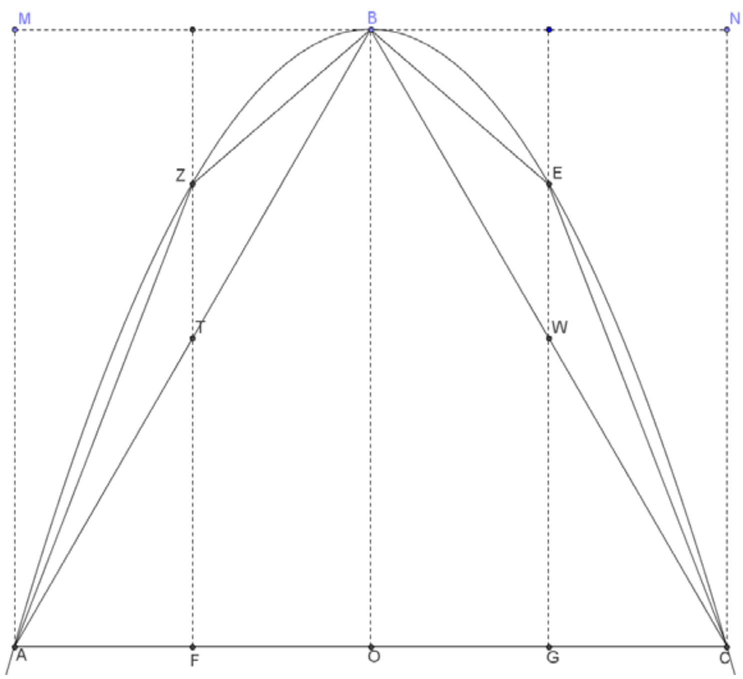


Figura 5. Cuadratura de la parábola, método exhaustivo

Sea ABC la parábola, donde B es el vértice.

A continuación se inscriben triángulos así:

Se inscribe el ΔABC donde O es el punto medio de AC.

Sea F punto medio de AO. Trazamos una perpendicular que intercepta la parábola en Z, y se construye el triángulo AZB y análogamente con OC.

Se tiene la siguiente sucesión:

$$P_0 = \Delta ABC$$

$$P_1 = P_0 + \Delta AZB + \Delta BEC$$

$$\vdots$$

(y de la misma forma para $P_2, \dots, P_n$). *Para* esto se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan FZ, GE paralelas a OB. Teniendo en cuenta algunas propiedades de la parábola y usando algunas proposiciones del libro I de los *Elementos* de Euclides, se puede demostrar que:

$$\Delta ABC = 4(\Delta AZB + \Delta BEC)$$

Por tanto,

$$a(P_1) = a(P_0) + \frac{1}{4}(P_0)$$

A través de razonamientos análogos se demuestra que:

$$a(P_2) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(P_0)$$

$$\vdots$$

$$a(P_n) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(P_0) + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a(P_0) \dots$$

Es decir,

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k P_0$$

Ahora Arquímedes se apoya en el siguiente resultado:

$$\left(\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{4}{1}\right) \rightarrow A + B + C + D + E = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$$

Y como la relación entre el polígono que se inscribe y el siguiente es de 4 a 1, y si denominamos a S como el área del segmento parabólico, concluye que:

$$\mathrm{S} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\frac{P_0}{4^n}$$

Pero, como el sustraendo puede ser tan pequeño como se quiera, Arquímedes concluye que:

$$\mathrm{S} = \frac{4}{3}\mathrm{P}_0.$$

Este resultado que acaba de mostrar Arquímedes es importante, pues ha encontrado la cuadratura de una figura que no es curvilínea[3] y la parábola, al ser una de las secciones del cono de Apolonio, lleva ya gran importancia.

Una curva de gran relevancia de la antigüedad es el círculo (sección cónica también). El problema: "Dado un círculo, encontrar un cuadrado equivalente" lo resuelve Arquímedes (de cierta manera). Este es un gran resultado: ¡Encuentra una figura rectilínea equivalente al círculo!

> **Proposición 1. (Medida del Círculo).** Un círculo es equivalente a un triángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

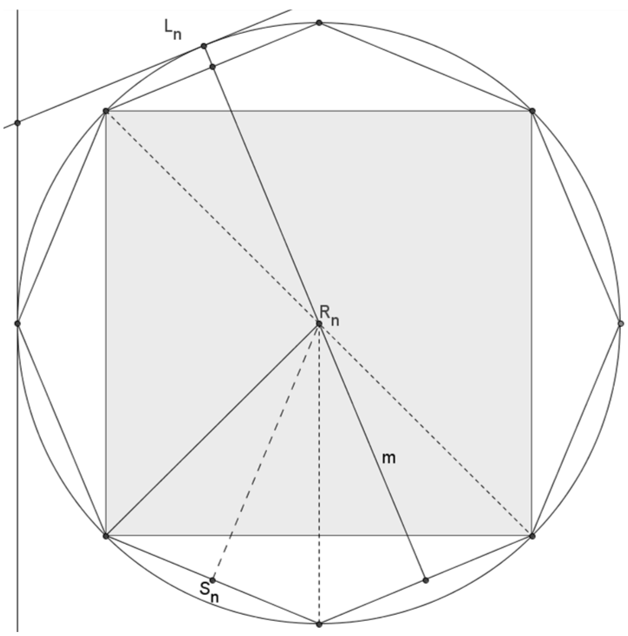


Figura 6. Circulo equivalente a un triángulo

Si se supone que $a(C) > a(T)$, es decir $a(C) - a(T) > 0$ donde T es ΔABC. Entonces por la proposición XII,2 $\exists P_n$, polígono inscrito en la circunferencia, tal que $a(C) - a(P_n) < a(C) - a(T)$ de lo que se tiene que $\boxed{a(P_n) > a(T)}$. De otro lado si consideramos $\mathrm{l(C)}$ como la longitud de la circunferencia se tiene:

$a(P_n) = nS_n \frac{1}{2} m < \frac{1}{2} lR$ porque $nS_n < l$ y $m < R$, entonces $a(P_n) < a(T)$ $\uparrow\downarrow$

Luego $a(T) \nless a(C)$

Si se supone que $a(C) < a(T)$, es decir $a(T) - a(C) > 0$. Entonces por la proposición XII,2 $\exists \mathrm{Q_n}$, polígono circunscrito en la circunferencia, tal que, $a(Q_n) - a(C) < a(T) - a(C)$ de lo que

[3] Aunque no es el primero en encontrar la cuadratura de figuras curvilíneas, ya Hipócrates de Quíos había encontrado la cuadratura de algunas lúnulas.

se tiene $\boxed{a(Q_n) < a(T)}$. De otro lado:

$a(Q_n) = nL_n \frac{1}{2} R_n > \frac{1}{2} Rl$, entonces $a(Q_n) > a(T)$ ↑↓

Luego $a(T) \ngtr a(C)$

Por consiguiente $a(C) = a(T)$.

Y como el triángulo es en sí figura rectilínea, entonces es posible encontrar un cuadrado equivalente. El problema yace en que este triángulo no es posible construirlo, pues el hacerlo implica la construcción del número π, que bien sabemos, no es un número construible con regla y compás, pues es trascendente (no es solución de ninguna ecuación con coeficientes racionales). Por tanto, Arquímedes no ha resuelto completamente el problema de la cuadratura del círculo.

Algunas consideraciones finales

Ni Euclides ni Arquímedes han resuelto el problema de la cuadratura del círculo, pero le dejan a la posteridad los aspectos conceptuales y el método, que es por excelencia el método de medida de magnitudes.

El método exhaustivo, concerniente a ir agotando a la figura tanto como se quiera es el método que los matemáticos heredan de la antigüedad. Cualquier parecido con la integral de Riemann no es pura coincidencia, ya que sus raíces están en el método exhaustivo. Ese tan pequeño como se quiera se formaliza matemáticamente con el concepto de límite, siendo el Análisis la rama de la matemáticas que legaliza esos procesos infinitos. El problema del triángulo que Arquímedes no puede construir hace que el problema de la cuadratura del círculo cambie un poco: Ya que se encontró una figura rectilínea equivalente al círculo, ¿Cómo se construye esta figura?, es decir, ¿Cómo se construye π? Esta pregunta hizo el que grandes ramas de la matemática fueran surgiendo, como respuesta a la construcción de π, que aunque se demuestra contundentemente la imposibilidad de su construcción al ser un número trascendente, abrió paso a considerar teorías sobre series y convergencia.

El problema de la medida pasa por muchas manos, siendo un problema de relevos, donde culmina con desarrollos grandes de las teorías de la matemática, con surgimientos de ramas de la matemática misma, como lo son: Descartes con su Geometría Analítica, Cavalieri con su teoría de indivisibles, Newton y Leibniz con el Cálculo, la instauración de $\mathbb{R}$ con Cantor y Dedekind, Cauchy con el Análisis, las redefiniciones de integral por Cauchy y Riemann, las nociones de medida de Jordan y Borel; y culminando con la tesis doctoral de 1902 de Henri Lebesgue: *Integral, Longitud, Área*, en donde se encuentra una primera buena respuesta al problema del área. Una pregunta quizá ingenua en la Antigua Grecia dio paso a grandes teorías de la matemática.

Cauchy ha definido analíticamente la integral, siendo redefinida por Riemann, que posteriormente, por los resultados de Dini, se llega a que lleva a contradicciones. En 1902, Lebesgue se da cuenta que el problema de la medida se encuentra en las raíces de esta misma, y cambia el concepto de medida relativa de los antiguos por el de medida absoluta. Para poder hacer esto, vuelve a leer a Euclides y Arquímedes, comprendiendo que aquí está la respuesta. Lo olvidado es nuevo, y las teorías matemáticas no se construyen muchas veces por un solo matemático, sino que este lleva en sus hombros un conglomerado de conceptos que han sido construidos a través de muchos siglos, épocas, creencias, concepciones y filosofías, matizadas a través del tiempo, buscando cada vez más contundencia en las teorías matemáticas.

Referencias y Bibliografía

Arquímedes. (1970). De la cuadratura de la parábola. *Científicos griegos* (Vol. II, pp. 220-237). Madrid: Aguilar.

Arquímedes. (1970). Medida del círculo. *Científicos griegos* (Vol. II, pp. 94-99). Madrid: Aguilar.

Bobadilla, M. (2012). Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis doctoral. Universidad del Valle.

Dhombres, J. (1980). *mesure et continu*. *Épistémologie et histoire*. Nantes: CEDIC/Fernand Nathan.

Euclides. (1970). Elementos de Geometría. *Científicos griegos* (Vol. I, pp. 689-959). Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos*. (M. L. Puertas, Trad.) Madrid: Gredos.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of the Elements.* New York: Dover, (segunda edición).

Klein, M. (1972). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días (Vol. I). Madrid: Alianza.

Levi, B. (2000). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2000.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: enseñanza universitaria*, *XV* (2), pp.103-127.

Recalde, L. (2011). *Lecciones de Historia de la Matemática*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones

Alexander **Murillo** Moreno
Universidad de Antioquia
Colombia
alexanderm54@gmail.com
Leonardo **Ceballos** Urrego
Universidad de Antioquia
Colombia
lceu0457@gmail.com

Resumen

La propuesta relaciona teorías y aportes significativos, frente a posibles conexiones entre las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas, algunos métodos para la resolución de problemas (como la heurística), enfocados en las destrezas que desarrollan los estudiantes frente al aprendizaje de las fracciones y problemas derivados. La investigación se enmarca en el paradigma de investigación cualitativa, bajo el enfoque de la teoría fundada y con diseño metodológico basado en el estudio de casos. Se centra en estudios y experiencias nacionales, confrontados con la literatura existente en Latinoamericana, Norteamérica y algunos países europeos. El camino seguido en el proceso de investigación se resume en cinco capítulos: Estado del arte; Marco teórico; Planteamiento del problema; Metodología y Análisis de los resultados, lo cual se amplía y expone más adelante.

Palabras clave. Docentes, prácticas, enseñanza, estudiantes, problemas con fracciones.

Introducción

En la literatura encontrada, se toman las prácticas docentes o prácticas de enseñanza, orientadas hacia aquellas que realizan los estudiantes para la actividad de la enseñanza, es decir, la preparación para docente en el marco de la formación de profesores (Flores, Mercado &

Vázquez, 1996; Gallego, Pérez, Torres & Gallego, 2006). Por otra parte, se halló que "en la literatura especializada se habla de prácticas docentes o de práctica profesional o práctica pedagógica, como aquellas que habitualmente adelantan los profesores en ejercicio" (Miranda, 2004; Paixao & Cachapuz, 1999, (citados por Gallego, et al., 2006)).

Se encuentra, que se utilizan de manera indistinta los términos "*prácticas pedagógicas, prácticas docentes* y *prácticas de enseñanza*". Junto a ello (Zuluaga, 2007, p.100) indica […] "No pocos historiadores de la educación y la pedagogía sitúan, a partir de la *Didáctica magna* de Comenio, el nacimiento de una disciplina autónoma que unos denominan *pedagogía*, otros *ciencia de la educación*, otros *didáctica* y otros *ciencias de la educación"* […]. Así, resulta abrumador hablar de las prácticas que utiliza el docente, pues para algunos investigadores, en el campo de las matemáticas es correcto hablar de didáctica de la enseñanza, pero errado hablar de prácticas pedagógicas, debido a que la pedagogía se ocupa de otros asuntos, pero se define la pedagogía como "*la ciencia que se ocupa de la educación y la enseñanza, cuyo objetivo es proporcionar guías para planificar, ejecutar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje*"[1].

Capítulo 1. Estado del arte

El trabajo en este apartado se centra en sistematizar, categorizar y analizar de forma preliminar, la información arrojada desde la realización del rastreo, enfocado en las categorías de análisis escogidas para el desarrollo del trabajo de investigación "prácticas de enseñanza y resolución de problemas", con la finalidad de aportar a la construcción del estado del arte y un marco teórico sólido. La búsqueda se concentró en bibliotecas y bases de datos; se registró por medio de fichas bibliográficas, lo más relevante en cuanto a los temas de interés, procurando:

1) dar cuenta de literatura e investigaciones existentes sobre los temas referidos a las categorías enunciadas, identificando en las fuentes de información: título, autores, características, tema específico, categorías, tipo de investigación, objeto de estudio, etc.
2) conocer los estudios realizados sobre las prácticas de enseñanza, la resolución de problemas y las fracciones, y su aporte al desarrollo de las categorías de análisis.

1.1 Categorías en las cuales se centra el estudio del estado del arte y su justificación

El eje en el cual se centra el estudio del estado del arte, para abordar la problemática, tiene que ver con una *categoría principal* (prácticas de enseñanza) y una *categoría auxiliar* (Las fracciones, sus operaciones y problemas), sobre las cuales se realizó un amplio rastreo bibliográfico e investigativo, llevado a cabo durante el segundo semestre del año 2011 y el primer semestre del año 2012, realizada en cuatro bibliotecas de la ciudad de Medellín.

1.2 Acepciones respecto a las prácticas empleadas por los docentes y elementos del proceso de enseñanza

De la mano con especificaciones anteriores, a continuación se precisan, respecto de algunos autores, conceptos y concepciones a cerca de lo referido a términos como: *didáctica, prácticas pedagógicas, prácticas docentes* y *prácticas de enseñanza*.

[1] Diccionario de la real academia de la lengua española

1.2.1 Didáctica:

Procede de las palabras griegas didaktike "enseñar" y didasco “enseñar, instruir”. Procede a su vez de didásk “acción repetida de sostener algo poniéndolo a la vista de alguien, para que se apropie de lo que se muestra”. De término ha pasado a ser una disciplina científico-pedagógica, puesto que su objeto de estudio son los procesos existentes en las actividades de enseñanza y de aprendizaje. Como parte de la pedagogía, se ocupa de los métodos prácticos de enseñanza. “Se considera como el área de la pedagogía que se ocupa de las técnicas y métodos de enseñanza”[2].

1.2.2 Prácticas pedagógicas:

Pueden encontrarse entre otras, las definiciones de: Restrepo & Campo, (citado por Barrero & Mejía, 2005); (Mondragón, 2004).

1.2.3 Prácticas docentes:

Se definen las prácticas docentes como “la demostración experimental de capacidades para dirigir las actividades docentes, que se realizarán en el aula, bajo la actividad real de la ejecución de clases prácticas”[3]. Además puede encontrarse la definición de (Marín & Castillo, 2012)

1.2.4 Prácticas de enseñanza:

Pueden encontrarse entre otras, la definición de (Gómez & Valero, 1997).

En adelante, en este trabajo de investigación se hablará de *prácticas de enseñanza* para aludir a los tipos de prácticas que emplea el docente en su quehacer, enunciados anteriormente.

1.3 Resultados a partir de los hallazgos desde el estado del arte

Respecto a las relaciones existentes entre las prácticas de enseñanza que utilizan los docentes de matemáticas en el aula y la resolución de problemas, se han ocupado de ellas investigaciones centradas en la relación entre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, Batanero & Font, 2004); o en prácticas docentes y aprendizaje (Vasco, 2006).

Se citan entre otros, artículos e investigaciones realizadas que le apuntan a temas como *las prácticas de enseñanza* de docentes (Moreano, Asmad, Cruz & Cuglievan, 2008; de Vincenzi, 2009), y las tesis de Nieto (1994); Serres (2007), en donde se toman diversas posturas a partir de las problemáticas detectadas por los autores, y frente a variables desde cada contexto particular.

Respecto al tratamiento y enseñanza de *las fracciones*, se encuentra cantidad de trabajos, en nuestro país y en el mundo, que se constituyen en un indicador (Llinares & Sánchez, 1988; Fandiño, (citado por Hurtado, 2012); Perera & Valdemoros, 2007; Beato, 2010).

1.4 Orígenes de la Enseñanza

Desde el punto de vista histórico, los métodos de enseñanza más antiguos se encuentran en el Antiguo Oriente (India, China, Persia, Egipto), así como en la Grecia Antigua. La similitud educativa radica en que la enseñanza se basaba en la religión y en las tradiciones de los pueblos.

---

[2] Tomado de: http://www.wordreference.com/definicion/did%C3%A1ctica
[3] Tomado de: http://www.ug.edu.ec/filosofial/esc_lenguas/practica.htm

Egipto fue la sede principal de los primeros conocimientos científicos escritura, ciencias, matemáticas y arquitectura. En la antigua China la educación se centraba en la filosofía, la poesía y la religión, de acuerdo con las enseñanzas de Confucio y Lao-tse. Persia se encargo de priorizar el entrenamiento físico; después le secundo Grecia con la Gimnasia. Grecia es el lugar del que parte el pensamiento occidental con Sócrates, Platón, Aristóteles, entre otros; el objetivo era alcanzar la perfección con la enseñanza de disciplinas como: música, literatura, filosofía, etc.

1.5 La enseñanza de las matemáticas y sus cambios a través de la historia

Las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad. Así como la educación a través de la historia ha sufrido cambios sometidos por las necesidades de su sociedad, las formas de comunicación o la diversidad de clases sociales, igualmente ha ocurrido con el devenir de la enseñanza de las matemáticas, y al respecto se presenta un resumen modificado:[4]

En Italia, siglos XIII a XVI, prolifera un tipo de instrucción matemática (*las escuelas de ábaco*) cuyo objetivo fundamental era responder a las necesidades contables de los comerciantes, y formar los jóvenes en los rudimentos del álgebra.

En Francia, siglo XVIII, la Academia de Ciencias sirvió de modelo a imitar en el resto de países europeos, algo similar ocurrió con otras dos instituciones, que marcaran el punto de inflexión de la enseñanza de las matemáticas en el continente. Por un lado L´École Polytechnique formaba futuros ingenieros y científicos, y por el otro L´École Normale preparaba de forma científica a los futuros profesores de enseñanza primaria y secundaria.

En España, a mediados del siglo XVIII, en cuanto a la enseñanza de las matemáticas se da entre otros, un suceso de gran repercusión, la promulgación de la Ley de Instrucción Pública (1857) que fija la estructura y los programas de la enseñanza primaria y secundaria. Cuatro décadas después, se fija entre otras cosas, que el número máximo de alumnos por aula es de 150, lo cual evidencia que la metodología de enseñanza se reducía a la conferencia magistral.

En Colombia, fue creada la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional en 1946, cuyo objetivo era estimular el estudio de algunas disciplinas básicas; no tuvo el éxito esperado y desapareció en 1956. Se creó la Universidad de los Andes en 1948, y en el espíritu de sus fundadores estaba el de modernizar la enseñanza de la matemática, lo cual estuvo a cargo de Horvath, quien dejó profunda huella en la comunidad matemática de la época[5]. En la década de los sesenta, según (García, Coronado & Montealegre, 2008, p.14) el Dr. Carlo Federicci y Hernando Silva, introdujeron al país ideas de Piaget respecto a la Didáctica de las Matemáticas.

1.6 Las prácticas de enseñanza en el entorno de la educación matemática

De acuerdo con lo anterior queda claro que la instrucción y la formación en una tarea específica, han sido el centro de atención en la enseñanza, y contrario a los avances tecnológicos en la actual sociedad, las prácticas de enseñanza, pese a algunas modificaciones, siguen siendo las mismas de siglos anteriores, al respecto asegura Mondragón (2004), “la clase magistral se estandarizó como modelo didáctico […] y ello era así puesto que quienes se desempeñaban como docentes, […] lo que hacían era presentar ante sus estudiantes los avances de sus estudios e investigaciones personales”, […] (p.1). Visto así, a pesar de la transformación que ha enfrentado

[4] Tomado de: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/donosti/historia_%20ensenanza.htm
[5] Tomado de:http://www.matematicas.unal.edu.co/?itpad=0&niv=0&itact=278&ti=false&dep=14

el mundo en los últimos tiempos desde lo tecnológico, los cambios en el proceso de enseñanza en los anteriores 100 años, no dista en gran medida de los métodos hoy empleados, salvo algunas didácticas particulares y la implementación de las TIC en las aulas de clase.

En tal sentido, la búsqueda de una metodología específica que permita un análisis de las prácticas de enseñanza de los docentes, y de estrategias que favorezcan la construcción de conocimiento, a raíz de los efectos sociales y tecnológicos, se han convertido en una sentida necesidad para la formación de estudiantes, y una tarea para los docentes de matemáticas, pues la tendencia a reformar su enseñanza, intercede por la implementación de una matemática accesible a la participación protagónica y no pasiva, de todos los estudiantes.

1.7 Algunas técnicas en la enseñanza de las matemáticas:

Las características de los modelos pedagógicos utilizados, y la visión o ideales de los docentes, en cierto modo están asociadas con las estrategias que ellos utilizan para hacer más fácil y efectivo el aprendizaje, se contempla el diseño de técnicas de enseñanza utilizadas en el desarrollo de las matemáticas, entre las que se cuentan: exposiciones magistrales (el docente dicta la lección), realización de ejercicios (docente y estudiantes), recursos tecnológicos (calculadora, páginas web, páginas interactivas), modelación, demostraciones, juegos o actividades lúdicas, tutoría individual, estudio dirigido, resolución de problemas, entre otras. Sin embargo, aunque el docente utiliza de manera combinada una serie de técnicas de enseñanza para lograr se alcance el aprendizaje, de una u otra forma siempre recurre a la clase magistral.

1.7.1 La heurística en la enseñanza de las matemáticas

Sin duda alguna, no se tiene certeza de los inicios de la heurística, sin embargo Maldonado (2000), dice “el término *heurística* aparece originalmente en el período clásico de la Grecia antigua y en torno a este concepto surgen otros términos próximos (Heurésis, Heuretés, Eureka,… significado que se equipara con: hallar, encontrar, inventar)” (p.4). Por otro lado, Polya (1945) es quien propicia la proliferación de este término, al incluirlo en su libro como plantear y resolver problemas, donde asocia la heurística con la palabra “*problema*”.

Se define la heurística como “un conjunto de reglas metodológicas no necesariamente formalizadas, que sugieren o establecen cómo proceder al momento de resolver problemas, generar soluciones y elaborar hipótesis”[6]. En Colombia se contempla la resolución de problemas en matemáticas a la luz de los estándares y lineamientos curriculares, teniendo en vista el contexto como referente de los procesos de enseñanza.

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Fundamentación teórica

El Marco Teórico está centrado en las prácticas de enseñanza, con escenario para su desarrollo en la resolución de problemas con fracciones, y el abordaje del marco mencionado se hizo bajo los siguientes componentes:

- Antecedentes del proceso histórico de la Educación, centrada en las distintas formas de enseñanza aplicadas, de acuerdo con los modelos de cada época, los mismos que están influenciados por distintos factores como: religión, poder económico e ideológico, etc.

[6] Tomado de: https://desafiodelpensamiento2.wikispaces.com/heur%C3%ADsticas

- Recorrido histórico de las prácticas de enseñanza, de acuerdo con particularidades de cada época, enfocando las mismas hacia las practicas constructivas.
- Revisión de las teorías del aprendizaje y los cambios en la enseñanza de las matemáticas.
- Principales exponentes de la heurística como método utilizado para el abordaje de la resolución de problemas, y la percepción actual.
- Resumen de aspectos del uso de la fracción en las diferentes culturas antiguas, y su evolución con el paso del tiempo.
- Aspectos de la fracción y referencias de su proceso de enseñanza - aprendizaje.

2.2 Recorrido histórico de las prácticas de enseñanza

Haciendo una búsqueda frente al recorrido de las prácticas de enseñanza por las que han atravesado los sistemas educativos de cada época, se encuentra información[7], lo cual se sintetiza como se muestra a continuación: Época Feudal; Reforma; Contrareforma; La pedagogía tradicional; La pedagogía moderna; La pedagogía contemporánea.

2.3 Cambios en la enseñanza de las matemáticas en Colombia

A partir de los antecedentes y fundamentos de la educación matemática, encontrados en documentos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998); (MEN, 2006), se tiene que su enseñanza está influenciada por movimientos que han sugerido cambios, tanto en los contenidos, como en la forma de enseñanza. En los años 60 y 70 la llamada "matemática moderna" propuso hacer énfasis en las estructuras abstractas y en el lenguaje formal de las matemáticas. A inicios de los 70 el movimiento "regreso a lo básico", da mayor importancia al manejo de operaciones elementales con enteros, fraccionarios y decimales. Tampoco mejoró el beneficio de estudiantes.

El enfoque propuesto para superar estas limitaciones es la llamada *Renovación Curricular* en Colombia, proceso que pretende la superación de las limitaciones detectadas y ha sido uno de los programas de largo plazo del MEN, con más de 20 años de diseño, experimentación, revisión y aplicación gradual. Hoy, este proceso continúa pero desde perspectivas mucho más amplias.

2.4 *Historia reciente de las prácticas de enseñanza en Colombia*

Desde finales de la década de los setenta, se genera en Colombia uno de los proyectos más ambiciosos, de mayor continuidad y de amplia producción investigativa traducida en libros, artículos, ponencias y conferencias. Se trata del "Proyecto Interuniversitario Historia de la Práctica Pedagógica en Colombia", liderado por Olga Lucia Zuluaga, que desde sus inicios contó con el apoyo de Colciencias y cuatro universidades (Antioquia, Nacional, Pedagógica y Valle), constituyéndose en un polo de discusión y generación de propuestas para el ámbito educativo durante la década de los ochenta y los noventa.

2.5 Diversidad de las prácticas de enseñanza

La experiencia del trabajo con estudiantes a lo largo del tiempo, ha demostrado que ningún método de enseñanza conocido, tiene éxito con todos, ni permite alcanzar todos los objetivos. En el proceso de la enseñanza los docentes acuden desde sus creencias, a una inter-relación de elementos, procesos y herramientas, con el único propósito de lograr que el binomio enseñanza-

[7] Tomado de: http://pedagogia.mx/historia/

aprendizaje se alcance de una manera efectiva. Entre las prácticas más comunes que utilizan los docentes, de acuerdo con (Mondragón, 2004, p.1), tenemos:

1) *Expositivas*: Centradas en la dirección y conducción del trabajo por parte del docente.
2) *de profundización*: Caracterizadas por altos niveles de exigencia para los participantes.
3) *Lúdicas*: Alientan la construcción del conocimiento en contextos divertidos.
4) *Constructivas*: Constituidas por estrategias centradas alrededor del aprendiz.

2.6 Referentes de la heurística como proceso de resolución en las matemáticas

La heurística como actividad asociada a la implementación de técnicas para resolver problemas, desde un aspecto práctico o informal, enuncia ciertos procedimientos en cuanto a descubrir formas, herramientas y métodos accesibles a los estudiantes que les permitan solucionar problemas de su entorno, en tal sentido investigadores como Polya (1945), Schoenfeld (1985) y Santos Trigo (2007) se interesan por relacionar aspectos a favor de tal necesidad:

2.7 Consideraciones acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la fracción

En Colombia, particularmente se habla de las dificultades que genera en la enseñanza el concepto. Se consideran en MEN (2006), en los estándares de pensamiento numérico en cuarto, quinto, sexto y séptimo grados, en los cuales los estudiantes deben interpretar las fracciones en diferentes contextos, relacionarlas con la notación decimal y los porcentajes, y utilizarlas en la resolución de problemas. De allí, que los problemas enunciados en pruebas externas que realizan tanto el estado, como las instituciones de educación superior, apuntan al desarrollo de tales competencias. Sin embargo, ha sido común encontrar dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones; ello se evidencia en resultados de las pruebas SABER, en donde se consideran ítems relacionados con este tipo de números, y solo bajos porcentajes de estudiantes de la básica se ubica en un nivel avanzado, en cuanto al reconocimiento y utilización de ellas.

Capítulo 3. Planteamiento del problema

3.1 Problema de investigación

En sus variadas prácticas, el trabajo que enfrentan los docentes en el tratamiento de problemas y la enseñanza de las fracciones, es complejo, sumado a ello la dificultad marcada en este tema, el cual se enseña en 4°, 5°, 6° y 7° de educación básica, pero en grados posteriores, cuando se necesita que apliquen operaciones con fracciones, para resolver problemas asociados al tema, para muchos estudiantes se convierte en un obstáculo.

3.2 Delimitación del problema de investigación

Cuando se tratan fracciones, el centro de atención está en la representación gráfica y el proceso algorítmico de las operaciones, en donde muchas veces se crea una falsa creencia de comprensión del concepto de fracción. Cuando se enfrenta el estudiante a nuevas situaciones de aplicación del algoritmo para resolver hechos de la vida cotidiana, no se comprende el significado, lo cual evidencia que el énfasis antes mencionado, no es suficiente para que el estudiante de séptimo grado integre los conceptos.

3.2.1 Definición de prácticas de enseñanza

Esta propuesta de investigación asume las prácticas de enseñanza como "la inter-relación de técnicas, herramientas, procesos y demás elementos que utiliza el docente en el aula de clases para posibilitar que el binomio enseñanza - aprendizaje sea efectivo".

3.2.1.1 Las fracciones en el currículo Colombiano

En cuanto a *la enseñanza de las fracciones en el currículo académico colombiano*, los estándares curriculares, para el grado sexto y séptimo de bachillerato, contemplan la utilización de números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contexto, lo cual hace necesario el análisis de la dificultad que los estudiantes muestran en el tema.

3.3 Objeto de investigación

Para este trabajo, el objeto de investigación es el aprendizaje de las fracciones, sus operaciones y problemas en contexto, mediados por la incidencia de las prácticas de enseñanza de docentes de séptimo grado de educación básica en Fredonia, Antioquia - Colombia.

3.3.1 Pregunta de investigación

¿Cuáles son los tipos y las características de las relaciones que existen entre las prácticas de enseñanza de los docentes y las destrezas de los estudiantes para comprender y trabajar las fracciones, con sus operaciones y problemas derivados?

3.4 Objetivos

3.4.1 Objetivo general

Analizar las relaciones que se presentan entre las prácticas de enseñanza de algunos docentes de Matemáticas de grado séptimo, en concordancia con la comprensión y las destrezas que evidencian sus estudiantes, en el manejo de las fracciones, tanto desde la adquisición del concepto, como de su manejo con operaciones y problemas que las contengan.

3.4.2 Objetivos específicos

1) Caracterizar las prácticas de enseñanza que utilizan docentes de matemáticas, para asociarlas con los conocimientos matemáticos que evidencian los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones.
2) Interpretar desde las prácticas de enseñanza de los docentes, los factores que inciden o están asociados a la comprensión del concepto de fracción.
3) Evaluar las prácticas de enseñanza, en la forma cómo los estudiantes se apropian de herramientas para resolver operaciones con fracciones.

3.5 Justificación

El estudio de las prácticas de enseñanza de los docentes posibilita evidenciar cuales de ellas permiten que el estudiante se motive más y cuales mejoran sus destrezas, además los docentes se muestran interesados en encontrar herramientas que les permitan hacer más efectiva la enseñanza de las matemáticas, para establecer conexiones en el proceso de enseñanza - aprendizaje, lo cual a futuro posibilitará elevar los niveles de calidad de la educación.

3.6 Contexto subregional y educativo: descripción del lugar

El municipio de Fredonia se encuentra ubicado en la parte noroeste del país. Respecto del departamento de Antioquia, se encuentra en la región suroeste, a 54 kilómetros de la capital, Medellín. El contexto de la investigación, está delimitado por 3 grupos de grado séptimo (7°-1, 7°-2 y 7°-3) de la Institución Educativa Efe Gómez, en los cuales encontramos alrededor de 102 estudiantes, diferenciándose 46 hombres y 56 mujeres, cuyas edades oscilan entre los 11 y 14 años, provenientes de los niveles económicos 1 y 2; pertenecen a grupos étnicos variados. La economía de la región depende de la agricultura, donde predomina el comercio del café.

Capítulo 4. Metodología

4.1 Paradigma bajo el cual se realiza el estudio de Investigación y su justificación

El trabajo se sitúa en el paradigma cualitativo dentro la investigación social, bajo el enfoque de la ***teoría fundada***, en tanto se trata de identificar patrones y relaciones, que permitan emerger nueva teoría alrededor del aprendizaje de las fracciones a partir del estudio de las prácticas de enseñanza. El diseño y enfoque se tipifica con el proceso de recolección de información primero desde la observación de clases de las docentes, luego desde la interacción con los estudiantes, al describir y comprender como tales prácticas de enseñanza se convierten en herramientas que permiten a los estudiantes en el aula, generar destrezas, en relación con la apropiación del concepto de fracción y el manejo de operaciones y problemas con fracciones.

4.2 Enfoque metodológico

4.2.1 Metodología

La pretensión es obtener informaciones haciendo uso de: observación directa permanente, videograbaciones, entrevistas semi-estructuradas, documentos e informes de carácter explicativo y guías, durante 14 meses, y el análisis de un estudio de casos con 3 docentes y 6 estudiantes.

4.3 Participantes

Las tres docentes seleccionadas poseen las siguientes características:

Docente 1: Femenina, normalista, licenciada en Gobierno escolar, 36 años de servicio como docente, de ellos 25 enseñando matemáticas en grados sexto y séptimo.

Docente 2: Femenina, normalista, licenciada en Matemáticas y Física, 16 años de servicio como docente enseñando matemáticas, experiencia como docente de Escuela normal 2 años, en grado séptimo ha enseñado por 6 años.

Docente 3: Femenina, bachiller académica, licenciada en Biología y Química, 4 años de servicio como docente, de ellos 1 año enseñando matemáticas en grado séptimo.

Los seis estudiantes son seleccionados, previo criterio teórico y expectativas, en donde se tiene en cuenta el concepto de las docentes; a cada una, por su conocimiento del grupo, se le solicita escoger un estudiante que se caracterice por presentar destrezas marcadas para trabajar en matemáticas y otro que se caracterice por presentar dificultades reiteradas en esta área.

4.4 Fuentes de recolección de datos

Los datos necesarios para la realización del informe respecto del análisis de la información, se recolectan a través de fuentes como: observación directa, videograbaciones, entrevistas semi-estructuradas, documentos escritos (diarios de campo y pruebas escritas). Se aplicaron 3 *pruebas escritas* consistentes de operaciones y problemas con fracciones a los estudiantes seleccionados.

4.5 Diseño metodológico

Estudio colectivo de caso, respecto de lo cual algunos autores hacen precisiones (Yin, 1984; Stake, 1999).

4.5.1 Actividades: Fases del trabajo de campo

El trabajo de campo para el desarrollo de la investigación se realizó en tres fases:

Fase1. Observación de clases a las docentes, registro de la información y realización de entrevistas. Se realizaron conversatorios con tres docentes de matemáticas, en cuanto a la posibilidad de observar sus prácticas de enseñanza; tomando algunos estudiantes, para indagar, como se ofrecen facilidades en cuanto a la resolución de problemas.

Fase 2. Realización de entrevista preliminar a los estudiantes. Se plantearon situaciones relacionadas con el trabajo en el aula de clases y, que permitan extraer o descubrir variables respecto de la resolución de problemas, y el proceso algorítmico de las mismas.

Fase 3. Solución de guías y entrevistas posteriores. Aquí se elaboran y aplican una: Prueba *diagnóstica*; Prueba *intermedia* y Prueba *final*. Una vez aplicadas las tres guías, se analiza la información para observar particularidades en los procesos de resolución.

Capítulo 5. Análisis de los resultados

Los resultados obtenidos se interpretan a partir de las interacciones con los dos grupos participantes (3 docentes) y (6 estudiantes) después de la intervención, donde se analizan: *a)* la información recolectada del trabajo docente en cuanto a las prácticas que emplean en el proceso de enseñanza y resolución de problemas, y *b)* los procedimientos empleados por los estudiantes para la solución de las guías propuestas, así como las respuestas brindadas a partir de las entrevistas realizadas. Se analizan los resultados encontrados en el discurso oral y escrito de las docentes en la enseñanza, y de los estudiantes en procesos de interpretación con respecto a la resolución de problemas que involucran fracciones. El análisis de la información se realiza de acuerdo con parámetros explícitos más adelante. Se han obtenido fragmentos de textos o unidades de significado que permiten develar del discurso docente y sus modelos de enseñanza.

5.1 Análisis de los datos e información obtenida

Una vez recolectada la información, se hizo una descripción de lo observado respecto a las prácticas de enseñanza, además de interpretar los datos e información necesaria, para analizar y comprender el efecto de las mismas sobre la resolución de problemas, por parte del estudiante.

Se inició analizando los videos, luego las entrevistas, a continuación las guías, para categorizar los datos, explorando características, en el sentido de analizar información para realizar el informe, describiendo de manera narrativa lo referido a la investigación de campo.

Finalmente, el análisis de los datos se realiza a partir de la categorización y codificación de la información encontrada. Las unidades de análisis son identificadas por códigos, estos se constituyen de la siguiente manera: a) un número que indica el orden consecutivo de aparición de la unidad de análisis; b) un numero romano acompañado de una letra que indica la categoría a la que corresponde la unidad: el número romano indica la categoría y la letra mayúscula la subcategoría, un guion separa el componente siguiente; y c) dos letras que se refieren al código de la docente o del estudiante. Por ejemplo, 1IA-GL

5.2 Pasos para el análisis:

Los análisis efectuados son el producto de una serie de actividades tendientes a una mejor organización, sistematización e interpretación de la información recopilada, estas son:

- **Categorización primaria**: interpretación e identificación de patrones en las respuestas de los informantes en los diferentes instrumentos.
- **Categorización secundaria:** comparación de las inferencias de la etapa anterior a la luz de las categorías definidas.
- **Agrupación de las unidades de información por categoría:** agrupación de las unidades de análisis por categoría y análisis descriptivo de los participantes.

5.3 Análisis por categoría

5.3.1 Análisis categoría principal "*prácticas de enseñanza*":

En esta categoría se incluyen los significados y nociones que sobre las prácticas de enseñanza de los docentes tuvieron lugar, durante el proceso de intervención.

5.3.2 Análisis categoría auxiliar "*resolución de problemas con fracciones*":

En esta categoría incluimos los procedimientos y conceptos que sobre la resolución de problemas con fracciones construyeron los estudiantes durante el proceso de intervención.

5.4 Resultados

Dado que el trabajo de investigación está en construcción y revisión, se dan algunas aproximaciones a partir de los posibles resultados que se encontrarán, a la luz de lo realizado.

En cuanto a la organización y planeación de las clases, las 3 docentes involucradas en el trabajo preparan sus clases en conjunto, utilizando para ello un "formato de plan de clase" en el cual aparecen explícitos los indicadores de desempeño y las actividades que deberá realizar el estudiante (las cuales están divididas en 4 momentos, y el respectivo producto esperado).

Se encuentra, que en cuanto a los indicadores de desempeño elaboran los siguientes:

1) Construcción del concepto de fracción, y usar la relación de orden, las operaciones y propiedades de los números racionales
2) Resolución de problemas cuyos datos involucran números racionales
3) Justificación de los resultados obtenidos de operar con números racionales
4) Proposición de enunciados de problemas que satisfacen ecuaciones cuyos coeficientes son números racionales.

En cuanto a las actividades que deberá realizar el estudiante, encontramos en el "formato de plan de clase" que la misma se desarrolla a partir de 4 momentos, cada uno con el respectivo producto esperado, los cuales obedecen en su orden a: 1) Analizar y resolver cada uno de los problemas que aparecen a continuación; 2) Consulta en biblioteca o en Internet; 3) Socialización de conceptos y procedimientos, consignación del tema y 4) Verificación del aprendizaje, solución de ejercicios donde se hace uso del manejo de algoritmos asociados a las operaciones con números racionales. A continuación se destaca el momento 1.

Momento 1: Analizar y resolver cada uno de los problemas que aparecen a continuación:

1) Juan ha leído 5 hojas de un libro lo cual corresponde a 1/9 del total ¿Cuántas hojas tiene el libro?; ¿Cuántas le faltan por leer?
2) La velocidad de una moto es a la velocidad de un auto como 4 es a 5; si la velocidad del auto es de 80km/h, ¿Cuál es la velocidad de la moto?

Producto esperado: Determinar saberes previos, observar la capacidad de comprensión y argumentación de los estudiantes, desde la relación del concepto con el tema objeto de estudio.

Se detecta que la clase no se lleva a cabo tal como se planea, utilizan diversas herramientas y técnicas de enseñanza que no se incluyen en el formato. Utilizan una propuesta didáctica llamada *calendario matemático*, el cual contiene un problema para cada día del mes, además realizan talleres de aplicación con fracciones que incluye: clasificación, representaciones graficas, amplificación, simplificación, relación de orden y operaciones básicas, porcentaje, taller de conceptos previos en equipos de 3, socialización y sustentación en el tablero, examen individual (realizan retro-alimentación si este arrojó falencias en algunos estudiantes).

Cuando se trata realizar operaciones con fracciones con denominador distinto, asumen el proceso algorítmico, como si se tratara de números naturales. Solo un estudiante transforma las fracciones en homogéneas, pero aplica el mismo proceso algorítmico, sin importar la operación.

Referencias bibliográficas

Barrero Rivera, F. & Mejía Vélez, B. (2005). La interpretación de la práctica pedagógica de una docente de matemáticas. *Acta Colombiana de Psicología, 8* (2), pp. 87-96. ISSN 0123-9155

Beato Sirvent, J. (2010). Errores "correctos" en la simplificación de fracciones reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (63), pp. 35-41. ISSN 1130-488X

de Vincenzi, A. (2009). Concepciones de enseñanza y su relación con las prácticas docentes: un estudio con profesores universitarios. *Educación y Educadores, 12* (2), pp. 81-101. Argentina.

Flores Martínez, P., Mercado Hurtado, A. I. & Vázquez Marco, A. M. (1996). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria basada en la reflexión sobre el período de prácticas de enseñanza. *Enseñanza*, (14), pp.119-135

Gallego Badillo, R., Pérez Miranda, R., Torres de Gallego, L. N. & Gallego Torres, A. P. (2006). El papel de "las prácticas docentes" en la formación inicial de profesores de ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. 5* (3), pp. 481-503

García Quiroga, B., Coronado, A. & Montealegre Quintana, L. (2008). *Énfasis de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad de la Amazonia, Florencia.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. *Proyecto Edumat-Maestros*. Granada: GAMI, S. L. España.

Gómez, C. & Valero, P. (1997). *Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor*. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Hurtado Orduz, M. E. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Llinares Ciscar, S. & Sánchez García M. V. (1988). *Fracciones: La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Maldonado, C. E. (2000). Heurística y producción de conocimiento nuevo en la perspectiva CTS: *Estética, ciencia y tecnología*. *Creaciones electrónicas y numéricas*, pp. 98-127.

Marín Uribe, R. & Castillo Cuevas, M. I. (2012). Caracterización de la práctica docente en ambientes virtuales de aprendizaje. *I Congreso Internacional de Educación*, pp. 703-711.

Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*, *1998*. Bogotá: Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*, *2006*. Bogotá: Colombia.

Mondragón Ochoa, H. (2004). *Prácticas pedagógicas en la universidad para la construcción de ambientes de aprendizaje significativo*. Cali: Universidad Javeriana.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G. & Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. Perú. *Revista de Psicología*, *26* (2).

Nieto Díez, J. (1994). *Hacia un modelo comprensivo de prácticas de enseñanza en la formación inicial del maestro*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Perera, P. B. & Valdemoros M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado. *Investigación en educación matemática XI*. México. pp. 209-218.

Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas (traducción 1999).

Santos Trigo, L. M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*(5-6), pp. 523-536.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata. Segunda edición. Título original de la obra: *the art of case study research*.

Serres Voisin, Y. (2007). *El rol de las prácticas en la formación de docentes de matemática*. (Tesis de doctorado no publicada). CICATA - IPN, México.

Vasco Uribe, C. E. (2006). *Didáctica de las Matemáticas. Artículos Selectos*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Yin, R. K. (1984). *Investigación sobre estudio de casos: Diseño y Métodos*. Bervely Hills, CA: Sage Publications. Segunda Edición. Título original. *Case Study Research: Design and Methods*.

Zuluaga Garcés, O. L. (2007). La didáctica magna, Comenio. Tomado de Otra vez Comenio. *Revista Educación y pedagogía*, *19* (47), pp. 99-100.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Los programas de formación de maestros de matemáticas y su relación con las prácticas docentes

María Rocío **Malagón** Patiño
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
mmalagonp@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presentan avances del proyecto "Una evaluación del efecto sobre las prácticas docentes de matemáticas de los programas de formación de maestros en ejercicio desarrollados en Colombia en los últimos cinco años", propuesto en el marco de los estudios doctorales de la ponente. En Colombia, la cualificación permanente de los docentes se caracteriza por tener una amplia gama de propuestas aunque existe poca información sobre los alcances de los mismos. En el estudio se analizan tres programas de formación de docentes desarrollados en municipios colombianos entre los años 2007 y 2012. La investigación abarca además del análisis de los contenidos de los programas, un trabajo directo con los docentes involucrados. Como resultado, se espera disponer de información valiosa que sirva para la toma de decisiones regionales en relación con esta política, además de constituir un insumo de evaluación para las entidades académicas que ofrecen tales programas.

Palabras Clave: Formación continua de docentes de matemáticas; evaluación de los programas de formación docente; prácticas docentes del profesor de matemáticas.

Introducción

El estudio de los efectos de los programas de formación continua de maestros sobre las prácticas docentes es objeto de particular interés en la comunidad nacional e internacional en educación matemática. Los investigadores interesados se enfrentan a diferentes obstáculos que abarcan desde la escasez de marcos teóricos con los cuales analizar estos programas, hasta las dificultades en la construcción de herramientas metodológicas para identificar y medir sus efectos en las transformaciones de las prácticas docentes (Garet, 2002).

La experiencia que se presenta aborda la cuestión anterior utilizando los desarrollos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), algunas aproximaciones semiótico - culturales de las prácticas docentes y algunos métodos cualitativos de investigación en Educación Matemática. En particular, la pregunta que orienta la investigación se plantea en términos de *¿Cuál es el efecto de los programas de formación de maestros de matemáticas en las transformaciones de sus prácticas docentes para la enseñanza de las matemáticas, en los últimos cinco años en Colombia?*

Perspectiva Teórica

La relación entre la formación continua de maestros de matemáticas y su incidencia en los cambios de las prácticas docentes es de gran interés para autoridades nacionales, regionales y locales en cada país. Aunque se encuentra literatura sobre los programas de formación docente y sobre prácticas docentes en matemáticas, el estudio de esta relación es un campo abierto de investigación, tal como se espera mostrar en los siguientes apartados.

Los programas de formación continua de docentes desde una perspectiva internacional

En contraste con perspectivas teóricas en las cuales la enseñanza es considerada una actividad individual, la presente propuesta se basa en aproximaciones sociológicas y antropológicas en las cuales se resalta su carácter institucional, colectivo y social. Desde esta perspectiva, Zeichner y Gore (1990) usan el constructo teórico de "teacher socialization" para explicar los procesos a través de los cuales un individuo llega a ser maestro. Tales procesos se proponen como aquellos que inician a las personas en una serie de rituales permitiéndoles integrarse y ser parte de la comunidad profesional de enseñanza y participar de sus prácticas y discursos institucionales. De esta manera, "teachers are not just individuals possessing various knowledge, skills, and dispositions but are also gendered subjects who are members of particular generations, races, social class groups, and who teach particular subjects at specific levels in the system of schooling" (Zeichner & Gore, 1990, p. 349). Las características sociales antes descritas tienen efectos significativos en los procesos de socialización de los maestros y contribuyen a la comprensión de los mecanismos a través de los cuales ellos construyen su identidad profesional como maestros de matemáticas.

En relación con la actividad de enseñanza y coherente con estas ideas, en el contexto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001, 2005), Chevallard (1999) resalta el carácter colectivo e institucional de dicha actividad. De acuerdo con este investigador, la enseñanza no es una actividad individual sino "un sistema de prácticas" (p. 223) o praxeologías desarrolladas por colectivos de personas – los maestros- en el contexto de una institución social – la escuela-. Esta postura teórica es parte de una aproximación epistemológica más general de acuerdo con la cual la construcción de conocimiento y de la realidad son empresas colectivas. Ambas son el resultado de la interacción de los individuos en contextos sociales en los cuales se negocian los significados otorgados a las situaciones, a los eventos y a las cosas. Más aún, significados, creencias, comportamientos, acciones y nociones no son innatos ni están inscritos en la mente de los individuos sino que son construidos en “interaction with others and through historical and cultural norms that operate in individual´s lives” (Creswell, 2007, p. 21). Así, conocimiento y realidad son socialmente construidos e históricamente localizados y como consecuencia de lo anterior, las instituciones, en tanto que artefactos sociales (Cole, 1999), determinan y dan forma a las creencias y comportamientos de los individuos para que éstos puedan llegar a ser sujetos de dichas instituciones.

De esta forma, la enseñanza “no depende de los sujetos individualmente considerados sino de las instituciones en las cuales la gente actúa” (Chevallard, 1999, p. 225). Las prácticas docentes son socialmente constituidas y se originan a partir de las experiencias de los maestros como estudiantes de secundaria y en la universidad, así como en sus interacciones con otros maestros. Las instituciones que históricamente han formado a los maestros y en las que desarrollan su labor no son sólo fundamentales para entender sus prácticas sino que también nos ayudan a identificar las posibilidades de transformación de tales prácticas y las resistencias al cambio. Da Ponte por su parte, citando a Saxe, define la práctica profesional del profesor de matemáticas como una actividad socialmente organizada que inciden en la vida cotidiana y de forma permanente, por tanto reúne dos características claves: es recurrente, esto es, se lleva a cabo de forma frecuente y sistemática, pero además por un colectivo socialmente diferenciado y reconocido. Da Ponte afirma, refiriéndose a un trabajo previo con Chapman, que “las prácticas docentes se pueden ver como las actividades que llevan periódicamente, teniendo en cuenta el contexto de trabajo y sus significados e intenciones” (2004, p.4).

Desde las posturas anteriores, surgen entonces cuestiones en torno a qué factores inciden en la definición o caracterización de estas prácticas, a las formas o condiciones para su transformación cuando los objetivos de las mismas se modifican, al papel de las restricciones institucionales en ellas, etc. En este contexto, se presentan para la comprensión de los fenómenos propios de las prácticas docentes, entre otros factores, el papel jugado por la formación de maestros, (inicial o continua), la incidencia de las concepciones y creencias de los maestros sobre la naturaleza de las matemáticas, cómo se enseñan y cómo se aprenden, entre otros.

En relación con los programas de formación continua de maestros existen múltiples estudios que tratan generalmente sus características, modalidades y contenidos, pero el efecto que éstos tienen sobre los cambios en las prácticas docentes, son problemáticas que han sido escasamente abordadas. A nivel internacional, se han implementado diversos dispositivos para interpretar y describir los cambio en las prácticas de los maestros (ver por ejemplo, los trabajos de Simon & Tzur, 1999; Goos & Geiger, 2010; y Reid & Zack, 2010), entre los cuales los programas de formación docente ocupan un lugar privilegiado. Los resultados obtenidos no permiten identificar una línea clara de construcción de dichos programas que afecten las prácticas de los maestros de manera sostenida y por largos periodos de tiempo. Así, permanecen sin respuesta preguntas como ¿Cuáles deberían ser las características de estos programas de tal manera que promuevan transformaciones en las prácticas de los maestros?, ¿Cómo lograr que tales programas afecten las prácticas docentes a largo plazo?, pero fundamentalmente hay una pregunta de fondo: ¿Cómo valorar la relación entre las prácticas docentes y la formación continua de maestros de matemáticas?

Guskey (2002), por ejemplo, en uno de sus estudios afirma que tales programas fracasan porque no se tienen en cuenta dos factores esenciales: la motivación que deben tener los profesores para participar en ellos y, las formas como tradicionalmente se dan los cambios en las prácticas docentes y en las creencias de los maestros. Para él, aunque a los maestros, de forma explícita o no, se les cohesiona para que participen en estos programas por parte de las directivas de la institución educativa o de la entidad estatal responsable, los maestros suelen tener motivaciones intrínsecas como el querer ser mejores maestros, relacionando esto con querer mejores resultados de aprendizaje en sus estudiantes. Sus expectativas suelen ser que al ampliar sus conocimientos y habilidades mejora su trabajo en el aula y con esto, los resultados de sus estudiantes.

Otra de las dificultades que presentan los programas de formación de docentes para alcanzar mayor eficacia, es la no consideración de las formas y los procesos que regularmente se presentan para generar cambios en los maestros, cambios en sus prácticas de aula y en sus creencias y concepciones acerca de la naturaleza del saber disciplinar, su enseñanza y aprendizaje. Guskey crítica los programas diseñados prioritariamente para producir de entrada un cambio en las actitudes, creencias y concepciones de los maestros. Según él, estos programas presuponen que los cambios en las actitudes de los docentes se materializan directamente en transformaciones de sus prácticas de aula y a su vez se traduce en mejores resultados en los aprendizajes de los estudiantes. Los programas así pensados, generalmente se caracterizan por diseñarse para lograr la aceptación, el compromiso y el entusiasmo de los maestros antes de la implementación y valoración de experiencias con nuevos modelos de prácticas de enseñanza; incluyendo este enfoque de los programas, la intervención de los maestros participantes en la planeación de las sesiones y de encuestas que garanticen que las nuevas prácticas por trabajar están alineadas con sus expectativas. Citando a Jones y Hayes (1980), sentencia que estos procedimientos rara vez generan un fuerte compromiso de los docentes.

Para Guskey la secuencia es distinta. Sostiene que sólo cuando el maestro tiene evidencia que una nueva práctica (nuevo método o estrategia de enseñanza en el aula, el uso de nuevos materiales, etcétera) genera mejores resultados de aprendizaje en sus estudiantes, se pueden modificar sus actitudes, creencias y concepciones. De hecho, cuando esta nueva práctica no produce ninguna evidencia tangible de éxito es generalmente abandonada.

Con lo que se concluye que los programas de formación docente por sí mismos no generan cambios en las actitudes y creencias de los maestros, se requiere de experiencias de implementación exitosas para poder lograr estos cambios y esto se da cuando hay evidencias de una clara mejoría en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes. En este contexto, mejores resultados de aprendizaje incluye además de los factores cognitivos, otros de índole motivacional, comportamental y actitudinal de los estudiantes, materializado en mayores y mejores participaciones en las clases, su motivación al aprendizaje, sus actitudes favorables hacia la escuela, etc. Como apoyo a la secuencia propuesta, Guskey cita numerosos estudios (Bolster, 1983, Crandall et al., 1982, Crandall, 1983, Huberman 1981, Guskey, 1979, 1982; Huberman y Miles, 1984, Bloom, 1968; Guskey, 1997), sin desconocer que este proceso de cambio es complejo y no lineal. De estos estudios, define tres principios esenciales de los programas de formación continua de docentes: a. reconocer que el cambio es un proceso gradual y difícil para los maestros, b. Asegurarse que los profesores reciban información sobre el progreso del aprendizaje de sus estudiantes y c. proporcionar un seguimiento continuo y de apoyo a los docentes.

En relación con los programas de formación continua o desarrollo profesional del profesor de matemáticas y los cambios en sus prácticas docentes, Da Ponte por su parte cuestiona no sólo sobre cómo se da ese desarrollo profesional y qué factores o hechos pueden activarlo y condicionarlo, también debate frente a su incidencia en los cambios en las prácticas docentes y cuando éstos pueden llegar a ser superficiales o profundos. En conexión con el sistema de concepciones y creencias de los maestros, Da Ponte pregunta: "¿Es un cambio en creencias y concepciones el primer paso para cambiar las prácticas? ¿En ese caso, cuáles son los siguientes pasos? ¿Qué creencias y qué prácticas son "buenas"? ¿Cuál es nuestro papel (como investigadores y formadores de profesores) para promover su desarrollo profesional?" (1999, p. 5), con directa relación por lo expuesto por Guskey.

En otro estudio sobre la evaluación de los programas de formación docente en Norteamérica, que abarcó 1027 docentes de matemáticas y ciencias, Garet et al. (2001) proporcionan la primera comparación empírica a gran escala de los efectos de las diferentes características de estos programas en el aprendizaje de los docentes. Como resultado, indica tres características estructurales: a. La forma de la actividad (coaching, observación de pares, grupos de estudio colaborativos, redes, etcétera.), b. La participación colectiva de profesores de la misma escuela, grado o área, y c. La duración de la actividad. En resumen, la duración de los programas, su relación con la práctica diaria en el aula y su vínculo con equipos de docentes en el marco de una misma institución educativa, esto es, la importancia que sean los colectivos de docentes de una misma escuela, un mismo nivel, una misma área de formación, los que participen en ellos, son factores de éxito. Reconociéndose entonces lo institucional y lo colectivo de las actividades como sustancia de este tipo de formación. Al respecto Ávalos afirma:

> Las evaluaciones realizadas de estos programas muestran pocos efectos en el cambio conceptual en la medida en que no son más que cursos o talleres que ocurren en períodos cortos, o con sistema de cascada. Pero, si los cursos contemplan además actividades de seguimiento en el aula, es decir, si tienen mayor duración, los profesores perciben una mejora de su comprensión y de su trabajo en el aula. (Ávalos, 2007, p. 13)

Garet et al., propone también tres características fundamentales de las actividades de los programas de desarrollo profesional docente, características que retoma L. Ingvarson [1](2005) en Australia con un estudio muestral que incluye 3250 maestros que habrían participado en 80 programas distintos. Estas características son: a. El foco en el conocimiento, b. Las oportunidades de aprendizaje activo, y c. La coherencia con otras actividades de formación que han desarrollados los maestros.

Dentro de estas características, se destaca la demanda por centrarse en los contenidos de la enseñanza, en procura de mejorar la comprensión de los maestros sobre la naturaleza de la disciplina, cómo se enseña y cómo se aprende. Al respecto, Ávalos citando a Borko, sugiere que

[1] El estudio analiza los efectos de las características estructurales y los procesos adelantados en los programas de desarrollo profesional en Australia con maestros de ciencias y matemáticas.

las actividades realizadas con los maestros deben ser similares a las que harían sus estudiantes, tales como soluciones de problemas matemáticos o conducción de un experimento científico (2007). En la misma dirección, Garet et al., citando a Loucks-Horsley y a Hewson, Love, & Stiles (1998) afirma "To carry out the demands of education reform, teachers must be immersed in the subjects they teach, and have the ability both to communicate basic knowledge and to develop advanced thinking and problem-solving skills among their students" (p.3).

Por su parte, Godino et al., (2013), reclaman la necesidad de diseñar y desarrollar programas de formación docente que ofrezcan pautas o guías para el diseño, implementación y evaluación de situaciones para intervención en el aula de forma operativa y que además apoyen la reflexión sistemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. La fundamentación didáctica de tal propósito se soporta en su "Teoría de la Idoneidad Didáctica", definida ésta como la articulación coherente y sistémica de seis componentes: *idoneidad epistémica* referida al contenido (en este caso didáctico – matemático) estudiado desde una perspectiva institucional, *idoneidad cognitiva* en relación con las expectativas de aprendizaje del contenido, *idoneidad interaccional* referida a los modos de interacción y discurso durante las prácticas, *idoneidad ecológica* que valora el grado en que los procesos de estudio se ajustan a las propuestas y demandas del entorno (escuela, sociedad, disciplinas), *idoneidad afectiva* que considera el nivel de implicación (interés, motivación, disposición, etcétera) del estudiante - docente en el proceso de estudio y finalmente, *idoneidad mediacional* que recoge la disponibilidad y uso de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de estudio. Cada una de estas dimensiones cuenta con sus respectivos indicadores que permiten inferir su grado de alcance ya que no se pueden valorar de forma directa.

Los programas de formación de docentes en servicio en Colombia

En el año 2012 se inició en el país la construcción de una Política Nacional de Formación de Educadores, solicitada desde los últimos dos Planes Decenales de Educación y en particular desde "El Plan Sectorial de Educación 2010-2014". Como parte de esta Política emerge el *Sistema Colombiano de Formación y Desarrollo Profesional del Educador*, compuesto por tres subsistemas: subsistema de formación inicial, subsistema de formación en servicio y subsistema de formación avanzada. Los principios propuestos en el Sistema son:

- *Autonomía e identidad profesional.* Rescata la condición del docente como profesional y no como un técnico o burócrata.
- *Interés público y reconocimiento social*. Rescata al docente como un ciudadano con los mismos derechos de cualquier otro.
- *Inclusión y equidad*. Reconoce las diferencias étnicas en el país y asegura el mantenimiento de las tradiciones lingüísticas y culturales de cada una a través de la enseñanza
- *Articulación.* Asegura la configuración del sistema a través de la relación entre los componentes y la aplicación o generación de las normas necesarias para que esto se dé.

En particular, el subsistema de formación en servicio es definido como las acciones formativas realizadas por el docente desde que comienza su labor como tal y que constituyen la base de su desarrollo profesional. Éstas deben estar orientada a:

> […] la actualización profesional y de la enseñanza desde cuatro principios básicos: formación humana integral, sólida preparación en la disciplina de especialización del docente y en competencias relacionadas con el desarrollo del aprendizaje, apoyo y seguimiento a la práctica de la enseñanza y coherencia entre esta formación y la formación inicial del docente. Tal formación contribuye a la cualificación de la profesión docente y por consiguiente al desarrollo de las competencias de los estudiantes; apunta al fortalecimiento de las instituciones educativas y al mejoramiento de los resultados de aprendizaje de los estudiantes de la educación preescolar, básica y media. (MEN, 2012, pp. 199 – 200)

Actualmente, en el marco de este sistema se viene ejecutando el “Programa de Transformación de la Calidad Educativa” – PTCE – con una línea de trabajo relacionada directamente con la formación continua de docentes en el aula de clase, ésta hace parte del programa “Todos a Aprender”. Desde aquí el MEN espera mejorar el nivel de aprendizaje de los estudiantes de la Educación Básica Primaria en lenguaje y matemáticas. Las cifras proponen un alcance de 2,350,000 estudiantes, 70,000 educadores, 3,000 docentes – tutores y 100 formadores involucrados al año 2014.

Una de las premisas esenciales del programa “Todos a Aprender” es que hay que transformar las prácticas de aula si se quieren mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Para el programa, estos cambios están asociados a un mejor conocimiento del maestro de lo que enseña (conocimiento de la disciplina) y de cómo se enseña y cómo se aprende (conocimiento didáctico). “Todos a Aprender” pretende que los maestros alcancen estos niveles de conocimiento a través de lo que denomina “desarrollo profesional situado” y de la conformación de comunidades de aprendizaje en relación directa con estas prácticas de aula. La siguiente figura ejemplifica estos factores:

Figura 1. Factores asociados a las prácticas de aula.

La formación situada, así concebida, asume que los maestros pueden mejorar sus prácticas docentes a partir del acompañamiento entre pares, el dialogo con éstos y la reflexión conjunta sobre las experiencias. Para estos ejercicios, en cada espacio escolar son acompañados de forma presencial y directa por un docente tutor, quien a su vez es orientado por un formador de formadores, seleccionados por su alto perfil profesional, según el MEN. El trabajo se complementa con las comunidades de aprendizaje organizadas para documentar las experiencias, compartir reflexiones sobre las prácticas desarrolladas y diseñar colectivamente nuevas experiencias. Para el programa, la formación situada debe considerar tres estrategias entrelazadas: a. La interacción en comunidades de aprendizaje que reúne docentes de cada aula, en cada establecimiento educativo; b. El acompañamiento y apoyo por parte de los tutores al colectivo de maestros en cada establecimiento educativo y c. El desarrollo de la capacidad de formación, materializado en procesos de sistematización y difusión de las lecciones aprendidas sobre las experiencias en las prácticas de aula en cuestión.

Una de las metas del programa “Todos a Aprender” es que los productos de la reflexión pedagógica sobre las prácticas de aula trasciendan el entorno de los participantes y se pueda compartir con otros colectivos de forma sincrónica o no. Aunque aún es muy pronto para valorar si los propósitos trazados con el programa se han cumplido, su seguimiento por la academia y las organizaciones interesadas debe ser permanente.

Metodología

El estudio requiere el uso de métodos cualitativos para obtener e interpretar información sobre el problema, sin desconocer las especificidades de los marcos metodológicos propuestos desde la investigación en Educación Matemática. Desde este punto de vista y asumiendo como contexto teórico a la TAD, las fases a través de las cuales se desarrolla el proyecto están soportadas en los supuestos metodológicos de este enfoque y comprenden:

- La construcción de un modelo de base para observar las prácticas de enseñanza de los maestros participantes,
- La valoración de los programas y específicamente de las actividades de formación continua en las que han participado los maestros sujetos del proyecto,
- La identificación y análisis de los cambios y/o transformaciones en las prácticas docentes de los maestros participantes.
- El análisis de los resultados obtenidos.

El proceso se lleva a cabo en tres instituciones educativas del Valle del Cauca en Colombia, con el fin de obtener una mejor comprensión de los diferentes tipos de prácticas docentes utilizadas para la enseñanza de las matemáticas en estas instituciones. En cada institución educativa se seleccionaron los maestros de matemáticas de los grados 6°, 7° y 8°, quienes además, han participado en algún proceso de formación continua en los últimos cinco años.

Avances de investigación

Para el análisis de los tres programas de formación docente seleccionados se asumen inicialmente las fases identificadas por Jackson (1975), esto es, *preactiva, interactiva* y *postactiva*, como una forma de demarcar los distintos momentos en los que se desarrollan las actividades de los profesores egresados de los programas citados.

De la primera fase hace parte una entrevista semi-estructurada y una rejilla de análisis que permiten revisar frente a las decisiones tomadas por el docente en relación con la planeación y organización del contenido matemático por estudiar en la o las sesiones de trabajo en el aula, cuál es su relación con los resultados de los aprendizajes que obtuvo en su programa de formación docente. En ambos instrumentos se incluyen enlaces con el contenido del programa y con los resultados reportados por sus diseñadores y orientadores. En la segunda fase, esto es, la gestión del proceso de estudio del contenido matemático en el aula, se diseña un instrumento de valoración cuyas categorías e indicadores se construyen con base en la “Teoría de los Momentos Didácticos” de la TAD (Chevallard, 1999) para observar la práctica matemática en el aula orientada por los docentes participantes del proyecto. La base de referencia para el diseño del instrumento es el esquema propuesto por Barbe et al., (2005) y que contiene las siguientes categorías:

Tabla 1

Rejilla de análisis de la actividad matemática en el aula.

Episodio de la clase	**Momento didáctico**	**Principal actor**	**Objeto matemático**	**Actividad de estudio**

Fuente: Barbé et al. 2005

Los momentos a los que hace alusión la Teoría son:

- El momento del *primer encuentro* con la Organización Matemática (OM) de referencia, que como su nombre lo indica, corresponde con el descubrimiento de un representante de los problemas relativos al campo de problemas de la OM objeto de estudio.
- El segundo momento o de *exploración de los problemas*, se caracteriza por la puesta en acto de una serie de técnicas a través de las cuales se intentan determinar las características de los problemas objeto de estudio. Este momento es particularmente importante dado el papel central que juegan las técnicas en el desarrollo de la actividad matemática.
- El tercer momento o de *constitución del entorno tecnológico-teórico* que resulta de los cuestionamientos sobre la naturaleza y alcance de las técnicas y de los problemas estudiados.
- En el cuarto momento o del *trabajo de la técnica* se tiende a robustecer la habilidad en el manejo de la o las técnicas relativas a los problemas objeto de estudio. Se evidencia de esta manera la necesidad de rutinizar las técnicas, de forma que ante determinados tipos de problemas se reconozcan y movilicen las técnicas pertinentes.
- El quinto momento o de *institucionalización*, consiste en precisar y explicitar los elementos constitutivos de la OM estudiada que se espera sean “conservados” por los sujetos que fungen de estudiantes, es decir, lo que la institución, en donde se lleva a cabo la actividad matemática, finalmente espera que sea apropiado o desechado después del proceso de estudio.

- El sexto momento o de *evaluación*, que evidentemente se encuentra estrechamente vinculado con el de la institucionalización. Es el momento en el cual se indaga o se examina en los estudiantes el valor de aprendido, en sus relaciones con los propósitos institucionales. Es decir, se analizan las relaciones personales de los estudiantes con los elementos de la OM refiriéndolas a lo que se ha convenido debe ser conservado.

El instrumento de valoración diseñado para el análisis de los procesos didácticos debe permitir contrastar las relaciones de las categorías establecidas para cada episodio tomado de las videograbaciones de las sesiones de trabajo en el aula con los objetivos de los programas de formación docente proyectados y con los resultados reportados como alcanzados. Esta parte se complementa con entrevistas periódicas a los docentes participantes en relación con las decisiones que éstos toman para gestionar las prácticas matemáticas en el aula y su relación con la formación docente recibida.

Finalmente, en la fase postactiva, se debe valorar cuestiones como ¿Qué piensan los maestros de la formación docente recibida? ¿Creen que la necesitaban? ¿Por qué? ¿Cuál fue su alcance? ¿Cómo relacionan esta formación con el diseño, gestión y evaluación de las prácticas matemáticas que propone en el aula? ¿Qué otra formación necesitan?, etc. Asuntos que develan elementos claves y generalmente no explícitos de la incidencia de los programas de formación continua en las prácticas docentes de los maestros.

Referencias Bibliográficas

Ávalos, B. (2007). El desarrollo profesional continuo de los docentes: lo que nos dice la experiencia internacional y de la región latinoamericana. Revista Pensamiento Educativo, 41(2), 77-100.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high school. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 235-268.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. P. Bolea, et al. (Coord.). (pp. 1- 15). XVI Jornadas del SIIDM. Huesca: Universidad de Zaragoza, España.

Chevallard, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En P. Boero (presidente). *Proceedings of the 4th CERME.* (pp.12-23). Sant Feliu de Guixols, España.

Cole, M. (1996). Cultural Psychology. A once and future discipline. The U.S.: First Harvard University Press.

Creswell, J. (2007). Qualitative Inquiry and Research Design. Choosing among five approaches. California, The U.S. Sage Publications.

Da Ponte, J. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education. Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik*, 43-50.

Da Ponte, J. P. D., & Serrazina, M. D. L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. American educational research journal, 38(4), 915-945.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H., & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas Suitability components and indicators of teachers' education programs in mathematics education. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, *8*(1), 46-74.

Goos, M., & Geiger, V. (2010). Theoretical perspectives on mathematics teacher change. Journal of Mathematics Teacher Education, 13, 499-507.

Guskey, T. (2002). Professional Development and Teacher change. Teachers and Teaching: Theory and practice, 8(3/4), 381 – 392.

Ingvarson, L., Meiers, M., & Beavis, A. (2005). Factors affecting the impact of professional development programs on teachers' knowledge, practice, student outcomes & efficacy

Jackson, (1975) La vida en las aulas. Madrid: Ediciones Morova.

Simon, M., & Tzur, R. (1999). Explicating the teacher.s perspective from the researchers. perspectives: Generating accounts of mathematics teachers. practices. Journal for Research in Mathematics Education, 30(3), 252-264.

Reid, D., & Zack, V. (2010). Observing the process of mathematics teacher change – part 1. Journal of Mathematics Teacher Education, 13, 371-374.

Zeichner, M. K., & Gore MJ (1990). Teacher socialization. *RW Huston (éd.), Handbook of research on teacher education. A project of the Association of Teacher Educators. New York: Macmillan Publishing Co.*

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Los usos del conocimiento matemático fuera de la escuela

Plácido **Hernández** Sánchez
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
placidohernan@gmail.com
Gabriela **Buendía** Ábalos
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
buendiag@hotmail.com

Resumen

En este trabajo analizamos del uso del saber matemático fuera de la escuela y damos cuenta cómo un grupo humano específico construye conocimiento matemático al ponerlo a interactuar intencionalmente con un fenómeno de naturaleza periódica como el movimiento de los satélites de Júpiter. En particular, explicamos cómo se usa lo periódico, a través de sus diferentes formas y funcionamientos, en un escenario de educación no formal basándonos en una epistemología de prácticas para la periodicidad.

Palabras clave: uso del conocimiento; escenario de educación no formal; periodicidad; epistemología de prácticas; formas; funcionamientos.

Introducción

Desde hace más de una década, los Estándares Nacionales de Educación Científica en Estados Unidos de Norteamérica han reconocido que los salones de clase son ambientes limitados y que los programas escolares de ciencia deben ser llevados más allá de las paredes de la escuela. Los programas diseñados apropiadamente debieran romper con las fronteras del aula. Más aún, los estándares sugieren que los museos y centros de ciencia, considerados ambientes de enseñanza no formal, pueden contribuir en gran medida al entendimiento de la ciencia estimulando el interés de los alumnos más allá de la escuela. En suma, los estándares sugieren que todo lo que rodea a la escuela puede ser usado como un laboratorio vivencial para estudiar los fenómenos de la naturaleza The National Research Council (NRC)1996.

Cada vez aumenta el número de profesores en servicio interesados en reforzar sus programas educativos por medio de los escenarios de educación no formal. Los que dirigen la política educativa cada vez se interesan más por los escenarios de educación no formal. En países desarrollados como los Estados Unidos existen organismos interesados en la complementariedad de la educación formal y no formal.

El Consejo Nacional de Ciencia de los Estados Unidos ha sugerido que las experiencias fuera del salón de clase apoyan y dan forma a los conocimientos científicos que los estudiantes traen al aula (NRC, 2007). La Asociación Nacional de Profesores de Ciencias ha reconocido la complementariedad entre la educación científica no formal y los escenarios escolarizados y reconoce que la educación científica no formal complementa, suplementa, profundiza y mejora las clases de ciencia en la escuela The National Science Teacher Asociation (NSTA) 2001.

El Consejo Nacional de Investigación ha reforzado esta idea cuando sugiere que las escuelas no pueden actuar solas en el cumplimiento de los objetivos que recomiendan las reformas de la ciencia. El organismo subraya que el aprendizaje de la ciencia sucede en contextos no formales y que por lo tanto es importante entender cómo los escenarios de educación no formal podrían coadyuvar al cumplimiento de los objetivos recomendados por la reforma de la educación científica (NRC, 2009).

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura reconoce que la complementariedad entre la educación formal y no formal es un desafío para la educación en general y para la educación matemática en particular. En cuanto a la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, The United Nations Educational Scientific and Cultural Organization (UNESCO) 2011 propone que es necesario que la educación escolar se apoye en las numerosas posibilidades de aprendizaje que hoy se ofrecen más allá de la escuela como los museos de ciencias entendidos en esta investigación como escenarios de educación no formal, escenarios de divulgación o ambientes híbridos de enseñanza.

El décimo sexto estudio de la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI Study 16) también reconoce el aprendizaje de las matemáticas fuera de la escuela. El estudio plantea que la enseñanza por medio de desafíos puede incrementar el nivel de entendimiento y la atracción que el estudiante siente por las matemáticas y que estos desafíos pueden ser planteados dentro y fuera de la escuela, por ejemplo en los museos de ciencias (Barbeau & Taylor, 2009).

Dentro y fuera de la escuela, la ciencia tiene propósitos sociales específicos que buscan hacerla funcional poniendo en relieve sus significados y usos sociales. Un ciudadano no es un consumidor pasivo de ciencia y el conocimiento científico no es recibido impersonalmente como producto de la experiencia desencarnada; más bien se incorpora orgánicamente en los humanos, con intereses reales, que viven en un mundo real. Por lo tanto, la manera en que el humano percibe el conocimiento científico no sólo se relaciona con el entendimiento del contenido formal del conocimiento científico y los métodos y procesos de la ciencia, sino que también tiene relación con la manera en cómo se usan estos procesos para resolver problemas (Laugksch, 2000). Esto centra nuestro interés no en cómo aprende un ciudadano, sino en cómo usa su conocimiento científico.

La problemática

A partir del reconocimiento del potencial educativo de los escenarios de divulgación o ambientes híbridos de enseñanza, se ha emprendido una búsqueda para entender qué ocurre con el aprendizaje en esos escenarios.

Ahora bien, para poder indagar qué ocurre con el aprendizaje fuera de la escuela ha sido necesario fijar una postura respecto a la noción de aprendizaje y exhibir herramientas para medirlo. Esto genera una problemática peculiar pues en primer lugar revela que el aprendizaje en los museos de ciencia ha sido difícil de definir y de medir (Cox-Petersen, Marsh, Kisiel, Melber, 2003). Quizás esto explique la escasa existencia de estudios sobre el aprendizaje en museos a nivel mundial y en particular en museos de Latinoamérica. Briseño y Anderson (2012) sugieren que los museos no contemplan recursos destinados a la investigación y que los pocos estudios que existen no son apreciados.

Otro factor que ha contribuido a la escasez actual de estudios sobre el aprendizaje en escenarios de educación no formal es la negación de la existencia del aprendizaje en museos de ciencia. Roqueplo (1983) aseveró que no es posible establecer condiciones para el aprendizaje en un escenario de divulgación y Trigueros y Sánchez (1996) estuvieron convencidos de que los escenarios de divulgación eran para que el público disfrutara de la ciencia y que no habían sido diseñados para que la gente aprendiera. Pensaban ellos: es posible que se aprenda, pero su fin no es tal.

Ligado a la escasez de investigaciones en ambientes no formales y a la creencia de la inexistencia del aprendizaje en esos escenarios, está el carácter polisémico de la noción de aprendizaje. A nivel mundial se han asociado múltiples significados al aprendizaje en función del marco teórico desde el que se mire sea en escenarios de educación formal como no formal e informal. Estas visiones polisémicas del aprendizaje han permeado desde principios de los ochentas las investigaciones que se hacen en los sistemas educativos no formales.

Por ejemplo, a mitad de los noventas el aprendizaje se liga con las experiencias cognitivas, afectivas y sociales durante la visita al museo. Se mide el aprendizaje afectivo en función del interés provocado por el placer asociado a la visita. Sin embargo los investigadores reconocen las dificultades para medir las variables relativas a lo afectivo. Más aún, sostenemos que el rol de la componente afectiva en el aprendizaje en un escenario de educación no formal aun es un área de estudio muy imprecisa, consecuencia natural de la carencia de evidencia sobre lo que sucede con el aprendizaje afectivo en un escenario de educación no formal basado en estudios científicos rigurosos.

Como en la escuela, en un escenario de educación no formal, los marcos teóricos mundiales han entendido el aprendizaje como un cambio cognitivo. Sin embargo, no es la única dimensión a considerar. Falk (1983) sostiene que las dimensiones sociales, actitudinales y psicomotoras revisten un alto grado de importancia en los escenarios de educación no formal, sin embargo siempre han sido difíciles de medir. También Guisasola y Morentín (2007) aseveran que en un museo de ciencias es difícil medir un aprendizaje cognitivo, afectivo y psicomotriz.

El marco teórico

Buscando entonces cómo analizar el papel del conocimiento matemático no escolar, requerimos un marco de referencia que nos permita considerar no sólo la adquisición del objeto matemático, esto es cómo se construye, cómo se aprende, cómo se logra ese objeto. Consideramos necesario romper con la centración en el objeto matemático como única metáfora de aprendizaje escolar y a cambio, proponemos enfocarnos en el carácter social de la matemática escolar. Proponemos considerar las epistemologías de naturaleza social propuestas bajo la perspectiva socioepistemológica en las que la matemática adquiere sentido y significación a partir no sólo de la matemática misma sino de las prácticas en la que se involucra el ser humano al hacer matemáticas (Buendía y Cordero, 2005). Esto ha permitido poner al descubierto el por qué se hace lo que se hace con respecto al conocimiento matemático y el foco está en considerar las prácticas sociales epistemológicamente relacionadas con la generación de dicho objeto, de donde se deriva la importancia del uso del conocimiento (Cantoral y Farfán, 2003; Cordero, 2001).

Al cambiar la mirada del desarrollo de objetos matemáticos hacia el conocimiento en uso, podemos reconocer que aunque dicho objeto –una definición, una propiedad- no se conozca en toda su extensión y complejidad, sí se usa e irá adquiriendo y desarrollando diferentes formas y funcionamientos acorde a las situaciones particulares que el humano vaya enfrentando (Cordero, 2008; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2012). De ahí entonces, la noción de uso desarrollada bajo esta visión teórica nos puede permitir analizar el saber matemático –entendido ahora como un conocimiento en uso- en un escenario no escolar, por ejemplo en un ambiente híbrido de enseñanza, por ejemplo un museo de ciencias.

La socioepistemología se caracteriza por proponer epistemologías de prácticas (Buendía y Cordero, 2005). Es decir, rinde cuentas del ejercicio de las prácticas que anteceden a la generación de conceptos. Explica cómo se construye, adquiere y difunde el saber matemático basándose en prácticas sociales, entendidas no como lo que hacen en sí los grupos humanos, sino como aquello que les hace hacer lo que hacen (Covian, 2005). De aquí se deriva la importancia de indagar acerca del uso del conocimiento matemático en la escuela, en el trabajo o en la ciudad pues mientras los marcos teóricos dominantes han explicado el conocimiento matemático en el sentido de si el estudiante lo aprende y si el profesor lo enseña, no hay datos específicos de cómo se usa el conocimiento matemático (Buendía, 2012).

En particular hoy no hay datos concretos sobre cómo se usa el conocimiento matemático en escenarios híbridos de enseñanza. Reconocer cómo se usa el conocimiento matemático en un escenario ya sea de educación formal o no formal robustece las explicaciones que se dan alrededor de la construcción de los objetos matemáticos. Se considera además del objeto matemático mismo los aspectos propios de la actividad humana. Se considera al humano usando y haciendo matemáticas y no solo su producción final.

Los marcos teóricos mundiales explican cómo se construye el conocimiento matemático en el aula, qué es lo que hace un estudiante con el conocimiento en el sentido de si lo aprende, si el profesor lo enseña. Esto ha permeado a las investigaciones en museos de ciencia. Se sabe de una incipiente existencia de investigaciones sobre el aprendizaje en museos con marcos teóricos socioculturales.

Más aun, no sabemos cómo se usa el conocimiento matemático. No se sabe cómo usan el conocimiento matemático los niños y las niñas. No se sabe cómo usan el conocimiento matemático los estudiantes. No se sabe cómo usan el conocimiento matemático los profesionistas. No se sabe cómo usan el conocimiento matemático los ciudadanos. No hay datos sobre cómo se usa el conocimiento matemático en un ambiente híbrido de enseñanza.

En un ambiente híbrido de enseñanza pareciera que no tiene sentido la idea de que los ciudadanos entiendan las nociones matemática como en la escuela o si saben demostrarlas o aplicarlas, pues no existe sanción ni evaluación sobre la integración rigurosa de los conocimientos o sobre la construcción de los mismos (Briseño, 2013; Guisasola y Morentín, 2007).

Ante ello, el interés de esta investigación es analizar cómo un grupo particular de ciudadanos -los guías[1]- usan el conocimiento matemático en un escenario de divulgación. Esto nos sitúa en una línea de investigación en la que se busca reconocer el carácter social de la matemática en el sentido de reconocer en el hacer del individuo –y no sólo su producción matemática final- el referente para explicar la construcción del conocimiento matemático.

Para realizar esta investigación, nos centramos en el caso de los fenómenos y situaciones periódicas ya que la periodicidad es una propiedad que resulta familiar para cualquier individuo pues forma parte de su vida cotidiana y, en particular, es muy común en un escenario de divulgación. Así, la investigación se enfoca en ver cómo se usa la periodicidad en un ambiente de divulgación.

Usos, funcionamientos y formas

En la búsqueda para encontrar respuestas a por qué el humano ha hecho lo que ha hecho cuando construye conocimiento matemático (función normativa de la práctica social), Buendía (2011a) propone buscar los diferentes funcionamientos y formas de la periodicidad para tratar con situaciones, fenómenos, movimientos u objetos matemáticos periódicos. Por forma entenderemos la apariencia perceptible de lo periódico y de sus elementos constituyentes: por ejemplo, si se presenta a través de una igualdad de funciones en general, o de alguna función en particular (como el seno), si el periodo se señala como el periodo fundamental o no, etc. Por funcionamiento, se entenderá el para qué le sirve a los sujetos lo periódico, de qué manera les está funcionando en una situación específica. Esta investigación da cuenta de cómo se usa la periodicidad en un ambiente híbrido de enseñanza evidenciando los diferentes funcionamientos y formas de lo periódico cuando un grupo de trabajadores de un museo de ciencias se confrontan ante el fenómeno periódico del movimiento de los satélites de Júpiter.

Metodología

Proponemos una actividad con un grupo personas que trabajan en el Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas (Zigzag). El objetivo de la actividad es analizar las formas y funcionamientos de lo periódico que se manifiestan cuando este grupo de individuos interactúan durante la observación -intencionalmente propuesta- de Júpiter y de cuatro de sus satélites.

El grupo de individuos con los que se trabajó consta de un núcleo básico -los llamados Expertos- que son personas con experiencia en astronomía observacional y trabajan en el museo como responsables de la sala de astronomía. Una de sus actividades básicas es seleccionar y capacitar a los guías en el manejo de las exhibiciones que constituyen la sala de astronomía así como para poner en marcha los talleres científicos. El resto del grupo experimental son guías del museo que

[1] Los guías de los museos de ciencias coadyuvan a una correcta interacción entre los visitantes y las exhibiciones.

se irán integrando; son estudiantes de diversos niveles educativos que voluntariamente asisten al museo para formarse como tal.

La actividad general consta de un estudio prospectivo astrofotográfico de las lunas de Júpiter, la colecta de datos que captura fotográficamente a Júpiter con sus lunas y finalmente la interacción entre los participantes y la base de datos para obtener un conjunto de datos completo y confiable.

A lo largo de la actividad hemos seleccionado episodios para explorar las diferentes formas y funcionamientos de lo periódico. Estos episodios los hemos caracterizado como un conjunto de sucesos conflictivos, identificables y con capacidad de ser aislados con fines de análisis. En cada uno podemos identificar formas y funcionamientos de lo periódico. Tenemos entonces que un episodio estará caracterizado por los actores involucrados, la actividad que están llevando a cabo, las herramientas (conocimientos matemáticos) y argumentos que están siendo puestos en juego y los usos situacionales que se le están dando a lo periódico.

En este escrito, consideramos solamente un episodio que llamaremos ¿Quién es quién? cuyo protagonista es uno de los expertos, este episodio ocurre en el seno de la primera parte de la actividad general. Evidenciaremos los funcionamientos y formas que se manifiestan cuando el experto identifica el satélite más alejado del planeta Joviano.

Resultados

Episodio antecedente: ¿Quién es quién?

Para Pedro, como el experto que guía toda la actividad, resulta imprescindible distinguir a los satélites en las astrofotografías. Alejándose del trabajo con el resto de los expertos, simula con el software Stellarium[2] que observa a Júpiter durante dieciocho noches a la misma hora y captura la imagen correspondiente a cada noche. Arregla las imágenes colocando la primera imagen en el primer renglón, la segunda imagen en el segundo renglón y así sucesivamente hasta distribuir las dieciocho imágenes en una columna, cuidando que los círculos más grandes que representan a Júpiter, queden alineados (figura 1); el resto de los puntos son los satélites.

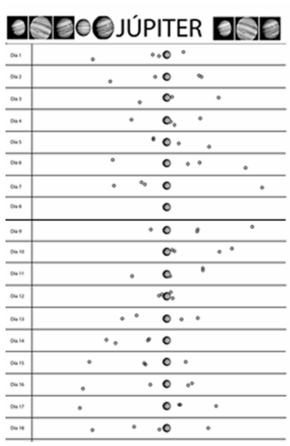


Figura 1. Dieciocho imágenes del software alineadas de acuerdo a Júpiter

Con el conjunto de imágenes organizado Pedro realiza una proyección de las fotografías de los satélites de Júpiter por medio de un cañón empleando como pantalla papel cuadriculado a escala y separa con líneas horizontales cada fotografía tomada consecutivamente durante 18 noches. El

[2] Un software que simula en tiempo real la cinemática de los cuerpos celestes.

objetivo es realizar un análisis autoreflexivo sobre el comportamiento de los satélites.

Análisis epistemológico: Sostenemos que desde este momento empiezan a emerger formas y funcionamientos de lo periódico en un ambiente de divulgación. Cuando propone arreglar 18 fotografías el experto está identificando a priori una unidad de análisis. Sus conocimientos en astronomía le indican que el periodo del satélite más alejado del planeta Júpiter es de un poco más de 17 días, el punto para el experto es que con las fotografías ¿cómo obtener los periodos de cada satélite?

Para empezar a develar en detalle las formas y funcionamientos de lo periódico que emergen alrededor de la unidad de análisis, el investigador de manera intencional plantea una serie de preguntas que le permitan visualizar el origen de la idea de organizar las fotografías una tras otra. A continuación mostramos algunos extractos de la entrevista.

Entrevistador: Ahora platíqueme cómo se le ocurrió esta secuencia. ¿De dónde sacó que había que colocar las imágenes una tras otra?

Pedro: Pues intentaba hacer una especie de …(pausa)… de proyección en el tiempo para ver cómo cambiaba la configuración de las lunas de un día para otro …(pausa)… entonces …(pausa)… primero pensé en hacer un video, sacar las fotos y pasarlas como video [mueve su mano izquierda simulando el paso continuo de las fotografías] pero no tenía las herramientas en la computadora para hacerlo …(pausa)… entonces otra forma de visualizarlo era poner una detrás de la otra y al estar haciendo …(pausa)… separando los dibujos se me ocurrió que podría haber uno debajo del otro [simula con la mano que coloca una fotografía debajo de la otra] así de esta forma se puede ver y pasar la vista rápidamente [coloca su dedo sobre el papel con los dibujos y rápidamente lo desliza sobre cada una de las fotografías simulando un vistazo rápido sobre el papel] lo primero que se me ocurrió pues fue un golpe de vista …(pausa)…

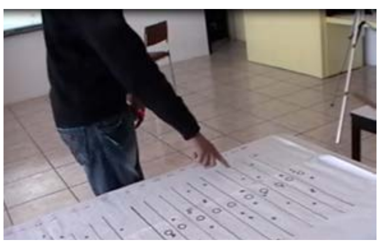


Figura 2. El experto desliza su dedo por todo el papel simulando un vistazo rápido de las fotografías.

El experto percibe un comportamiento repetitivo

Pedro: …(pausa)… ver qué pasaba (segmento inaudible) ser yo el que se moviera y que no fueran los dibujos. Así podía ver este, este, este …(pausa)… [y señala los satélites empezando con el más alejado del planeta en la fotografía del día 1].

Pedro: Y cuando lo hice ya me di cuenta de algunas cosas muy interesantes como esta curva.

Figura 3. El experto detectando un comportamiento global en base a un comportamiento local.

Análisis epistemológico: La forma de uso de lo periódico se manifiesta cuando el experto detecta mediante un golpe de vista un comportamiento regular en el objeto por encima de la definición rigurosa de periodicidad. Este es un momento importante en la epistemología que estamos construyendo pues muestra que la práctica antecede al concepto.

Aunque en este primer momento de su auto reflexión la forma de uso se manifiesta cuando el experto desliza su dedo en un trozo de la curva, es decir, manifiesta una visión local. No obstante pareciera que hay una visión global en el experto pues lo que realmente detecta es una unidad de análisis, es decir la curva completa.

La manera en que señala con su dedo al satélite más alejado pareciera indicar que con la distribución propuesta para el acomodo de fotografías detecta un patrón regular de comportamiento del satélite. Es decir, sin hacer referencia a la definición de periodicidad, el individuo realiza un acto propio de la actividad humana, percibe y despliega con sus sentidos un comportamiento regular que califica al satélite más alejado del planeta.

Por otro lado, hasta este momento no hay un argumento riguroso más allá de los sentidos que indique que se trata del mismo satélite, él reconoce que es un golpe de vista, es un golpe intuitivo que activa el aspecto afectivo – el interés- que lo impulsará a un análisis exhaustivo de este comportamiento hasta identificar el satélites y calcular su periodo, he allí el primer funcionamiento.

Pareciera que esta forma posee un funcionamiento específico cuando dice:

Pedro: La curva de allí ya me dio la idea de que esta podría tratarse de la misma luna.

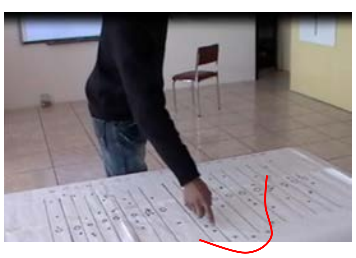


Figura 4. El comportamiento regular le funciona al experto para identificar intuitivamente el primer satélite.

Entrevistador: ¿Y por qué tendría que tratarse de la misma luna?

Pedro: No, no, no, no tendría todavía, no tendría ninguna prueba, pero se me ocurrió que podría ser la misma porque era un avance muy suave, parece ser la misma; entonces viendo esto y siguiendo una curva más o menos del mismo estilo, aquí se encuentra otra. Con su dedo sigue el rastro de los puntos más alejados del planeta.

Figura 5. Identificando la luna más alejada.

Entrevistador: ¿Es la misma?

Pedro: Eso es ya lo que se intenta probar. Pero esa es nada más la primera intuición… la primera intuición.

Análisis epistemológico: La forma de uso de lo periódico se manifiesta a través de la identificación de un patrón repetitivo. Si bien hasta este momento es una visión meramente intuitiva como reconoce él, sostenemos que es una forma de uso de lo periódico. Él menciona que “podría ser la misma”, “parece ser la misma”, “del mismo estilo”, este encadenamiento de afirmaciones culmina en la detección de una unidad de análisis cuando el experto menciona “aquí se encuentra otra”. Una vez identificada la unidad de análisis busca su repetición. Esta forma de uso le funciona al experto para una identificación primitiva -intuitiva- del satélite más alejado del planeta.

Hacia un análisis menos sensorial

Pedro: Entonces ya lo que se me ocurre para empezar a clasificar es ver su distancia, el máximo alejamiento al que ella pueda tener a partir de Júpiter. Entonces veo aquí un alejamiento que es de los máximos. Y señala el alejamiento a partir de Júpiter al satélite.

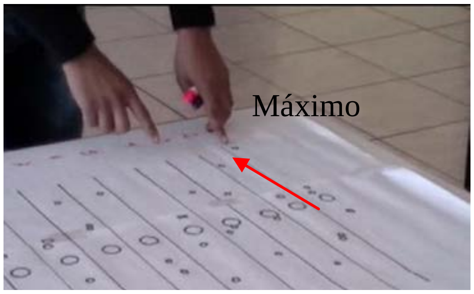


Figura 6. Estimando el alejamiento máximo

Análisis epistemológico: Una vez que el experto detecta un comportamiento regular del satélite más alejado del planeta, realiza un análisis local. La curva que representa el comportamiento regular del satélite presenta ciertos máximos, la forma de uso de lo periódico ha evolucionado pues implica poner en juego las nociones de medición y estimación para proponer en qué punto podría la curva tener sus máximos. Las fotografías han sido tomadas cada día, lo que lleva a una estimación burda del máximo alejamiento, sin embargo esta forma de uso sigue funcionando para clasificar los puntos que se encuentran rodeando al planeta. Surge un momento importante en cuanto a la unidad de análisis cuando Pedro reflexiona:

Pedro: (Segmento inaudible) pero en el día dieciocho.

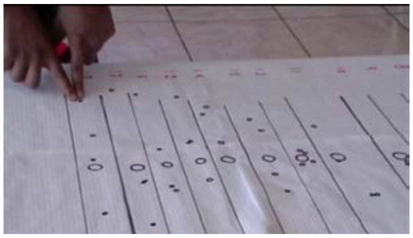


Figura 7. Identificando una unidad de análisis

Entrevistador: ¿Y por qué en el día 18?

Pedro: Hasta ese día tomamos su frecuencia.

Entrevistador: ¿Pero por qué justamente el día 18?

Pedro: Bueno, nos detuvimos hasta allí porque fueron los días que observó Galileo.

Entrevistador: ¡Ah! Entonces usted está haciendo referencia al texto de Galileo.

Pedro: ¡Sí!

Identifica la unidad de análisis

Entrevistador: ¿Podríamos dar alguna razón de este día dieciocho sin recurrir a Galileo en base a ese comportamiento que acaba de sugerir?

Pedro: …(Pausa)…[Se mueve pensativo de un lado a otro de la mesa donde yace la secuencia de fotografías].

Pedro: ¡Mmmh! Lo puedo dar pero ya sería en base al resultado. Se queda meditando momentáneamente.

Pedro: Lo podemos hacer haciendo un análisis de menos días y dándonos cuenta de que es insuficiente para sacar algunos periodos. Señala el rango comprendido entre el día uno y el día siete.

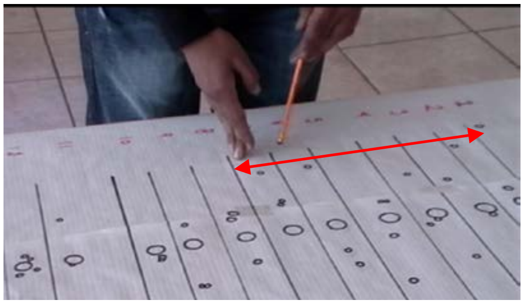


Figura 8. Buscando una unidad de análisis mínima.

Pedro: Entonces lo alargamos un poco, y nos damos cuenta de que el día 17 o 18, eso es suficiente para sacar los periodos de todas las lunas.

Entrevistador: ¿Y por qué es suficiente?

Pedro: Porque ya aparecen todos los periodos. Y señala el dibujo completo.

Entrevistador: ¡No entiendo!

Pedro: ¡Mmmh!

Entrevistador: ¿Cómo que aparecen todos los periodos?

Pedro: Si, ya es posible calcularlos todos.

Entrevistador: ¿Pero por qué ya es posible calcularlos todos?

Pedro: ¡No!, ¡No!, ¡No! por eso digo hasta ahorita no tengo una razón. Más bien es el trabajo que ya hemos hecho. Sin (segmento inaudible) referirse a Galileo. Si lo hacemos con diez días y no es suficiente aún, lo hacemos con catorce y no es suficiente todavía.

Entrevistador: Pero, ¿Hay alguna razón de fondo? Intuitiva, no importa.

Pedro: ¡Mmmh! Se queda meditando… Se aleja del dibujo y vuelve a observar.

Pedro: ¿Intuitiva? Yo creo que si lo hubiéramos hecho, tendríamos que haberlo hecho por más días. Veintitrés, veinticuatro, para ver …(pausa)… para que fueran más evidentes los patrones.

Entrevistador: ¿Y qué patrón buscaríamos?

Pedro: Esta curva. Y señala la sucesión de puntos que forma la curva.

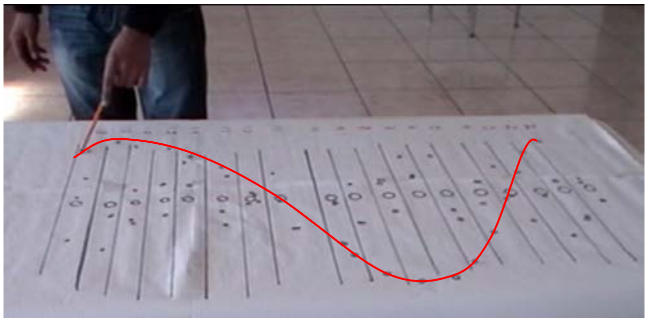


Figura 9. Pedro encuentra una unidad de análisis basándose en un comportamiento regular del satélite.

Análisis epistemológico. Cuando Pedro propone una unidad de análisis en 18 él dice que no puede desprenderse del conocimiento institucionalizado. En su mente está grabada la unidad de análisis que Galileo institucionalizó. El experto sabe que el periodo del satélite más alejado es dieciocho. Esa unidad de análisis no se desvanece aun cuando interacciona con las fotografías. Es un número que aceptó cuando leyó los escritos de Galileo, un número con escasa significación. La escasa significación de ese número nos lleva a hipotetizar que cuando identifica el satélite también resignifica la unidad de análisis. La forma de uso evoluciona de lo visual hasta la estimación.

En su vida escolar y profesional nunca había calculado por sí mismo los periodos de los cuatro satélites. Durante todo este tiempo aceptó como un dogma de fe los periodos de los satélites calculados por la ciencia. Él ha leído a Galileo Galilei. Ha memorizado los periodos de los cuatro satélites que antaño calculara Galileo. Así que en base a ese conocimiento previo plantea una estrategia para atender la pregunta del entrevistador. Para ello aprovecha el comportamiento repetitivo del satélite a lo largo del tiempo. La forma de uso se manifiesta a través del argumento de que si se consideran menos fotografías la unidad de análisis no es suficiente para cubrir todos los periodos de los satélites. Por ejemplo siete días de observación no son suficientes para abarcar los periodos de los cuatro satélites. En su mente subyace la idea de que el periodo del satélite más alejado se aproxima a los 18 días.

Ante la insistencia del entrevistador Pedro busca la manera de calcular una unidad de análisis recurriendo únicamente a los datos obtenidos y plantea una unidad de análisis superior a los 18 días, es decir 23 o 24 días. Esta estrategia es importante porque intenta desprenderse del conocimiento memorístico acudiendo al comportamiento de los datos. Al desprenderse de lo que sabe recurre a una actividad propia de los seres humanos, la percepción del comportamiento de los objetos.

La idea intuitiva es sencilla. Cuantos más datos haya más posibilidad hay de percibir una regularidad. La forma de uso es la precepción del comportamiento regular del satélite más alejado, de la búsqueda de un patrón de regularidad como el que señala en la fotografía de la figura anterior. Y el funcionamiento permanece, su objetivo es dar un argumento sólido de porqué el satélite que está sobre la curva señalada es el mismo. Aunque Pedro conoce con exactitud los periodos de los satélites memorísticamente, se da cuenta que ese conocimiento no le es suficiente para distinguirlos y aprovecha el comportamiento regular para identificarlos.

Referencias

Barbeau, E. & Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York: Springer

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 299-333

Buendía, G. (2011a) The use of periodicity through history: elements for a social epistemology of mathematical knowledge en Barbin, E. Kronfellner,M., Tzanakis. C., *Proceedings of the 6th European Summer University-History and Epistemology in Mathematics Education*, 67-78. Austria: VerlagHolzhausenGmbH / Holzhausen Publishing Ltd.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24 (2), 9-35.

Briseño-Garzón, A., & Anderson, D. (2012). A review of Latin American perspectives on museums and museum learning. *Museum Management and Curatorship*, *27*(2), 161-177.

Briseño-Garzón, A. (2013). More than science: family learning in a Mexican science museum. *Cultural Studies of Science Education*, 1-21.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián, O.; Farfán, R.M., Lezama, J., Romo, A. (Eds.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A. 285-309.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 13(2): 187-214.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Cox-Petersen, A. M., Marsh, D. D., Kisiel, J., & Melber, L. M. (2003). Investigation of guided school tours, student learning, and science reform recommendations at a museum of natural history. *Journal of Research in Science Teaching*, *40*(2), 200-218.

Falk, J. H. (1983). Time and behavior as predictors of learning. *Science Education*, *67*(2), 267-276.

Guisasola, J. y Morentin, M. (2007). ¿Qué papel tienen las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de las ciencias? Una revisión de las investigaciones. *Enseñanza de las ciencias* 25(3), 405-411.

Laugksch, R. (2000). Scientific literacy: A conceptual overview. Science*Education* 84, 71–94.

National Research Council. (1996). National Science Education Standards.Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council. (2007). *Ready, set, science!: Putting research to work in K-8 science classrooms.* Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council. (2009). *Learning science in informal environments: People, places, and pursuits*. Washington, DC: The National Academies Press.

National Science Teachers Association. (1998). NSTA position statement on informal National Science Teachers Association. (2001). An NSTA position statement on informal science education. In P. Katz (Ed.), *Community Connections for Science Education* (pp. ix xi). Arlington, VA: NSTA Press.

Roqueplo, P. (1983). *El reparto del saber*. Buenos Aires: Gedisa.

Trigueros, M., Sánchez A. y Vázquez, E. (1996). Una experiencia de teatro como medio para divulgación de la ciencia. *Ciencia* 43(4), 310-316.

UNESCO (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiquesdansl'éducation de* base. Paris: UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Matemáticas en grupo diferenciado artes y humanidades nivel medio

Dolly Magdalena **Martínez** Pérez
Escuela de Matemática, Universidad Nacional Pedro Henríquez Ureña
República Dominicana
dmartinez@unphu.edu.do
Santa Daysi **Sánchez** González
Colegio Babeque Secundaria
República Dominicana
daysisanchez@hotmail.com

Resumen

Al ser la matemática una ciencia cuyo objeto de estudio mantiene un orden e interdependencia, posee en sí misma una dinámica que diferencia su proceso de aprendizaje de otras asignaturas. A esto, debemos añadir el nivel de dificultad que provoca en los estudiantes el conceptualizar los objetos matemáticos, el tener que ver con la "mente" lo que tal vez todavía no ha visto en la realidad. Esto influye en la percepción que tienen los estudiantes de esta ciencia y en el resultado de su aprendizaje. Como consecuencia, se afecta la autoestima y percepción del propio desempeño.

El objetivo de este trabajo es mostrar la experiencia realizada con un grupo diferenciado de educación media.

Luego de ver los resultados podemos concluir que el uso de ciertas estrategias facilitan el aprendizaje y ciertas competencias.

Palabras clave: enseñanza diferenciada, diversidad, estilos y ritmos de aprendizaje, matemáticas, nivel medio, arte y humanidades.

Contextualización.

El Colegio Babeque Secundaria es un centro educativo ubicado en la ciudad de Santo Domingo, que cuenta con el respaldo de la Fundación Pedagógica Dominicana, institución sin fines de lucro que tuvo su origen en el año 1977. Esta orientación permite flexibilidad para adoptar nuevas propuestas pedagógicas y eficientizar los recursos.

La educación media en República Dominicana se desarrolla en tres modalidades: general, técnico-vocacional y artes. En cada una, la matemática que se imparte tiene el mismo programa, aunque en la modalidad técnico-profesional se complementa esta asignatura con otras materias según la especialización que se realice. El currículo del colegio Babeque Secundaria corresponde a la modalidad general, en la cual los estudiantes sólo son preparados para ir a la universidad.

El centro tiene 512 estudiantes con edades comprendidas entre 11 y 18 años que cursan los dos últimos años de la educación Básica (7mo y 8vo) y los cuatro años de la educación Media, divididos en secciones de 22 alumnos en los primeros cursos y de unos 27 en 11mo y 12mo. Su filosofía y principios educativos están definidos en el proyecto educativo de centro, en el que se destaca una orientación humanista que pretende formar un ciudadano crítico y responsable. Su currículo está orientado hacia el desarrollo de competencias humanas generales.

La idea de un programa diferenciado de matemáticas para los estudiantes de último año forma parte de una política de atención a la diversidad enunciada en el proyecto curricular y que se manifiesta en otras materias y espacios del colegio, en los cuales se subdividen los grupos con el objetivo de ofrecer oportunidad al estudiantado de explorar sus talentos y desarrollar sus habilidades.

Antecedentes.

Diversificar la enseñanza para atender a las necesidades estudiantiles no es una iniciativa privativa del colegio Babeque Secundaria. Los diferentes tipos de bachilleres que se gradúan en el país son un ejemplo de ello. Otros países, también ofertan programas diferentes para el bachillerato. Algunos ejemplos son el caso de la Preparatoria 9 de la Universidad de León, México, que oferta cuatro tipos de programas, y la forma en que la L.O.G.S.E (Ley Orgánica General del Sistema Educativo) de España orienta las matemáticas para los diferentes tipos de bachillerato.

Por muchos años, el colegio Babeque Secundaria ha ofrecido las clases de idiomas diferenciadas según el nivel de dominio mostrado por los alumnos en el manejo de la lengua: desde el séptimo grado en el inglés y desde el décimo en el francés. En cada nivel, el alcance del contenido y las competencias desarrolladas son diferentes, favoreciendo el máximo aprovechamiento para cada estudiante. Esta experiencia y las dificultades que presentaban los alumnos de último año con el desarrollo de las competencias matemáticas, motivó la creación de este programa.

Los grupos diferenciados en la matemática de último año se inician en el año lectivo 2005-2006, con el objetivo de proveer un espacio que permitiese a cada alumno completar su formación logrando un mejor aprovechamiento de la variedad curricular que oferta y caracteriza a la institución, según la orientación o interés profesional y acorde con sus habilidades y destrezas individuales. Durante seis años consecutivos se ha desarrollado la experiencia, afinándola cada vez más. Otros colegios también han incursionado en dividir la matemática de último año en grupos diferenciados.

La orientación de cada uno de estos grupos en el colegio Babeque es como sigue:

Grupo general. Formado por estudiantes con interés medio por las matemáticas, y muestran tendencias a estudiar carreras en las cuales los cálculos podrían tener considerable incidencia, como es el caso de la contabilidad, medicina, etc.

Grupo de ciencias aplicadas. Está conformado por los estudiantes que tienen un especial interés y habilidad para las matemáticas, además de que se inclinan a elegir carreras de alto contenido matemático, como son las ingeniería o la economía. Estos alumnos podrían ser candidatos a participar en olimpíadas.

Grupo de artes y humanidades. Este grupo está conformado por estudiantes que tienen habilidades e intereses en otras áreas ajenas a las matemáticas o a quienes les ha resultado difícil su aprendizaje. Son candidatos a estudiar carreras artísticas, mercadeo, publicidad, derecho, entre otras.

La selección de los grupos de matemáticas se realiza atendiendo a: el deseo explícito de cada estudiante en un cuestionario que se llena al final del año escolar anterior; a los resultados de los test psicológicos de intereses y habilidades que ofrece el departamento de orientación; y a las recomendaciones de los profesores de matemáticas que les han impartido docencia.

Las pruebas aplicadas por los psicólogos miden aptitudes de razonamiento general, numérico, espacial, mecánico y fluidez verbal, y además las que evidencian las áreas de interés de los alumnos, sea ésta numérica, mecánica, científica, administrativa o de oficina, persuasiva o ejecutiva, musical, literaria, artística o de servicio social.

Las metodologías que se desarrollan durante las clases se adecuan a las características y necesidades de los alumnos. En cada grupo de matemática se trabaja el programa oficial del grado, logrando establecer un ambiente de confianza, comunicación, afecto y respeto.

Fundamentación

Aprender es un proceso complejo que implica incorporar nuevos datos a la estructura de pensamiento existente, datos que constituyen saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales. André Giordan (2006) afirma que el aprendizaje implica la transformación de esas estructuras, y que esto se logra por un proceso de interacción entre las condiciones preexistentes y la situación de aprendizaje. En el proceso educativo escolar se produce una interacción entre docente y estudiante donde ambos construyen conocimiento; por lo cual se hace necesario atender a las necesidades de los aprendices, a sus habilidades e intereses. Piaget citado por Pozo, Mateo, Pérez (2006) plantea que lo cognoscitivo y lo afectivo son inseparables en el pensamiento. Es decir, conceptos y destrezas, sentimientos, intereses y valores están interrelacionados. También Giordan considera que lo afectivo, lo cognitivo y lo metacognitivo se encuentran íntimamente ligados en un contexto y en un entorno sociocultural particular.

El aprendizaje de las matemáticas es aún más complicado. Los objetos matemáticos son entes abstractos que no pueden percibirse directamente por los sentidos. Los números, las figuras geométricas, son representaciones de ideas abstractas. Esto provoca que el proceso de aprendizaje de esta disciplina cree temores e inseguridades en los estudiantes. Se necesita aplicar una metodología que supere éstas y otras dificultades.

En la actualidad, se pretende que las matemáticas contribuyan al desarrollo de las estructuras mentales de los estudiantes y a la adquisición de conceptos más formales y herramientas más potentes (Brihuega, 1997). Se necesita estimular la comprensión para promover la capacidad de acción, al desarrollar las competencias planteadas por Niss (1999): pensar y razonar; representar; argumentar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas; plantear y resolver problemas. Para desarrollar estas competencias hay que reconocer y aplicar conceptos, principios y propiedades, lo que implica el uso del pensamiento abstracto. No importa el área profesional que un individuo vaya a ejercer como carrera, debe estar dotado de un saber matemático con un respaldo teórico que dé solidez a los conceptos y las técnicas que emplee.

Eso le ayudará además a aprobar las pruebas nacionales, requisito indispensable en nuestro país para recibir su certificado de bachiller y poder ingresar en las universidades.

Para lograr todo lo anterior, el docente de matemáticas debe poseer unas competencias pedagógicas que le permitan: reconocer los contenidos que necesitan aprender sus alumnos, según el área profesional en que se vaya a desenvolver; aplicar las estrategias de enseñanza que más se adecuen a las habilidades y potencialidades de cada estudiante, según su estilo y ritmo de aprender; y propiciar un entorno de aprendizaje que fomente la cooperación, integración y el desarrollo del pensamiento crítico y creativo.

Grupo de artes y humanidades. Una propuesta.

Al trabajar por varios años con el grupo de artes y humanidades en el colegio Babeque Secundaria con alrededor de 20 estudiantes, nos planteamos algunas inquietudes que queremos compartir en este trabajo: ¿cómo motivar a un grupo de alumnos que en toda su vida escolar han rechazado la matemática?, ¿qué estrategias utilizar para potencializar sus estilos y ritmos de aprendizaje?, ¿cómo ayudarlos a descubrir por qué tienen bajo desempeño en la materia?

Con estas inquietudes se plantean los siguientes propósitos: aplicar estrategias que eleven la motivación y el interés de los estudiantes por la matemática; aplicar metodologías de enseñanza-aprendizaje que favorezcan los distintos estilos y ritmos de aprendizaje; proveer de herramientas metacognitivas a los alumnos para que puedan descubrir las razones de su desempeño en la matemática.

Implementación.

Los estudiantes que conforman el grupo de artes y humanidades inician el año con poca motivación por la matemática, ya que se han mantenido con bajo desempeño en toda su vida escolar. Sus intereses se han orientado hacia otras áreas diferentes de la matemática, por lo que la mayoría se inclina por estudiar carreras de poco contenido matemático.

El desarrollo de este programa empieza con una evaluación diagnóstica que nos permite identificar la actitud que posee cada alumno respecto a sí mismo y a la materia. Se discute la programación del curso, sus propósitos, metodología y los criterios de evaluación, logrando incorporar algún tema de interés para la mayoría e involucrar a los alumnos en el proceso de planificación y toma de decisiones. Estas actividades iniciales nos permiten evidenciar la falta de motivación y predisposición hacia la matemática, así como la baja autoestima y debilidad en los métodos de estudio de la mayoría de los alumnos.

El programa de la asignatura se elabora de común acuerdo con los profesores de los otros grupos, ya que al final, todos los alumnos deberán aprobar la misma prueba estandarizada del Ministerio de Educación. Los grandes temas que se desarrollan son: funciones exponenciales y logarítmicas, trigonometría analítica, teoría de conteo, probabilidad, transformaciones geométricas, introducción al cálculo diferencial, entre otros.

Para atender a la diversidad, se selecciona un tema que se trabaja de manera particular en cada grupo. En el de artes y humanidades puede ser: cónicas, lógica matemática o algún otro. Al tratar cada tema del programa, se estudia su importancia para el ejercicio de las artes, la arquitectura, el diseño, el derecho u otra área.

Las estrategias metodológicas aplicadas en el desarrollo del curso son variadas para dar oportunidad a los diversos estilos y ritmos de aprendizaje. Se planifican actividades que proporcionan experiencias diferenciadas, con un enfoque particular, buscando la forma más eficiente y efectiva de transmitir el conocimiento matemático y de lograr el aprendizaje en el alumno, de acuerdo con las experiencias previas en la materia.

Se presenta la información de manera novedosa y creativa, posibilitando, no sólo la adquisición de nuevos conocimientos, sino también el desarrollo de las destrezas de razonar, argumentar, utilizar el lenguaje propio de la matemática, plantear y resolver problemas. Se utiliza la estrategia de aprendizaje por descubrimiento que permite al alumno involucrarse directamente con el objeto de estudio, explorando e indagando para luego conceptualizar y aplicar lo aprendido. Cada concepto matemático se estudia a partir de tres preguntas básicas: qué es, en qué áreas del conocimiento se manifiesta y cómo lo aplico en mi vida. Los contenidos procedimentales sólo se trabajan cuando se ha adquirido el concepto.

Se aplican además técnicas grupales que permiten a los estudiantes mejorar su ejecución, con el fin de fomentar el trabajo en equipo, en un ambiente cooperativo. Estos trabajos se realizan a partir de investigaciones que los alumnos deben presentar a la clase en formato audiovisual: power point, video o prezi. Los equipos pueden ser elegidos por la profesora o por los mismos estudiantes, dependiendo de que el objetivo a lograr sea evaluar las fortalezas y debilidades del grupo o estimular el trabajo colaborativo, el autoconocimiento y la aceptación de los demás. Algunos temas que se han investigado son: las matemáticas en el cine, la trigonometría en la arquitectura, el arte y las matemáticas, matemáticos conocidos por desconocidos, arquitectura acústica y las matemáticas, Galileo Galilei y Leonardo Da Vinci: ¿dos desenfocados?, énfasis de la matemática en algunas carreras, etc. De igual modo, se promueven visitas a museos de arte y el estudio de la arquitectura de la ciudad. La evaluación de estos trabajos se hace atendiendo al contenido y a la presentación.

Otras actividades que promueven el interés y favorecen el desarrollo del pensamiento son: elaboración de ensayos a partir del análisis crítico de artículos de periódicos sobre la matemática, el análisis de películas o videos educativos, el realizar recorridos por el recinto escolar para identificar, medir , calcular , comparar, diferenciar.

Para incentivar la motivación, se utilizan estrategias metacognitivas que ayuden al alumno a auto conocerse. Bajo la guía de la profesora, pueden descubrir y crear conciencia de su estilo propio, lo cual facilita el inicio de un cambio de actitud hacia la materia. Desde el inicio, se detectan los alumnos que están claramente orientados hacia una carrera específica para fortalecer su desarrollo y enfocar la materia hacia esa área.

Dos actividades promueven significativamente el autoconocimiento: el diario reflexivo que culmina con un portafolio y el responder a un cuestionario sobre su actitud hacia la matemática antes, durante y al final del curso. El diario reflexivo estimula la metacognición y el autoconocimiento, al identificar fortalezas, debilidades, causas del éxito o fracaso. En el portafolio se organizan los mejores trabajos y se puede medir el avance, enriqueciendo la evaluación formativa y sumativa. El cuestionario los invita a reflexionar sobre su actitud hacia la asignatura y sobre los resultados que obtienen.

Otra actividad importante, durante todo el año, es tratar de erradicar la idea errónea de que la orientación diferente del curso implica un nivel de desempeño, rigurosidad y requerimientos menor a los demás.

Resultados.

Antes de finalizar el primer periodo del año escolar, se manifiesta una mejoría sustancial en varios individuos del grupo, que en los tres años de escolaridad anteriores habían tenido un resultado deficiente.

Los cuestionarios de evaluación que se aplican al inicio, en la mitad y al final de curso, evidencian el avance en la motivación e interés por la asignatura. Esto también se observa en los resultados de las pruebas y en el desempeño en las clases. 61% de los alumnos cambiaron su percepción de la matemática después de haber terminado el curso. También aumentó de 41% a 71% la cantidad de alumnos que se consideran buenos en matemáticas.

Con la aplicación de estrategias y actividades variadas en un ambiente de solidaridad, como son el trabajo colaborativo entre pares, el uso del portafolio como instrumento de evaluación, y el uso de herramientas tecnológicas, se logra un mayor alcance en el aprendizaje de los contenidos, y los alumnos adquieren mayor desarrollo de sus habilidades mentales. Una alumna escribe en su portafolio:

> Las cosas que más me gustaron de esta clase son: la forma de ver las matemáticas, las diferentes actividades que no eran para nada aburridas, poder desarrollar diferentes proyectos en torno a las matemáticas, pero que al mismo tiempo nos despertaban el interés. Las que menos: el exceso de trabajo, largas prácticas y los exámenes semanales.

Los resultados académicos son muy satisfactorios, ya que sólo aproximadamente el 20% de los alumnos va a pruebas completivas o extraordinarias, a pesar de que en las pruebas de fin de semestre, el 60% de los ítems son iguales a los del grupo general y el 40% a los de ciencias aplicadas.

Al final del segundo período, en la mayoría de los casos, el alumno es capaz de identificar sus fortalezas y debilidades, ha mejorado su autoestima y nivel de respuesta y ha tomado conciencia sobre sus habilidades. En algunos casos, hay una decisión en cuanto la carrera a elegir, producto del autoconocimiento y la metacognición.

Sin embargo, los resultados positivos con estos grupos todavía pueden ser mejores, ya que no se ven desde el inicio. Cada año hay experiencias diferentes, dependiendo de las características del grupo. Lograr la empatía con y entre los estudiantes cuesta mucho esfuerzo, ya que algunos llegan al grupo por su mal desempeño en los cursos anteriores y con muy poco interés por aprender.

Conclusiones

Esta experiencia, con los grupos de matemáticas de arte y humanidades del colegio Babeque Secundaria permite apreciar cómo el uso de estrategias y actividades que no son usuales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la materia, contribuyen a que los estudiantes eleven su motivación e interés por la misma y sean capaces de alcanzar aprendizajes y desarrollar competencias que los capacitarán para desenvolverse en la universidad satisfactoriamente. Reafirma que si se tiene en cuenta las diferencias individuales de los alumnos, aplicando metodologías que atiendan a sus diferentes estilos y ritmos de aprender y se promueve la metacognición; se logra un mayor nivel de autoconocimiento, fundamental para que el alumno sea capaz de identificar y superar las razones de su forma de ver la matemática.

Además, trabajar la asignatura enfocada hacia grupos más homogéneos en cuanto a intereses y orientación profesional, facilita el proceso de aprendizaje y el desarrollo de un tipo de educación más humanista. El mismo diseño del programa, adaptado al grupo, estimula la investigación y la creación de diversos materiales que pueden ser utilizados para fines educativos.

Por otro lado, los retos que se nos presentan son muchos. Es necesario aplicar más estrategias y utilizar más recursos que ayuden a recoger información objetiva de lo que ocurre con cada individuo. De ese modo, se podría encontrar nuevas maneras de estimular la comprensión para promover la capacidad de acción y desarrollar las competencias matemáticas planteadas por Niss (1999) y las definidas en el proyecto curricular del colegio.

También es necesario mejorar los niveles de empatía y solidaridad en el grupo, logrando un trabajo colaborativo más efectivo, aunque muchos alumnos pudieron no sólo aprender, sino también ayudar a otros compañeros en su proceso de aprendizaje.

Esta experiencia también nos presenta una vía por donde explorar nuevas posibilidades, para las que nos planteamos las siguientes y otras interrogantes: ¿Por qué necesitamos tener un grupo más homogéneo para implementar estrategias que pueden desarrollarse en un grupo de 30 o más alumnos? ¿Por qué no podemos ver la matemática del nivel medio como una herramienta que permita a los jóvenes acercarse a la realidad, buscando la aplicación de temas que tradicionalmente estudiamos de forma teórica?

Bibliografía y referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 páginas; 2,6 MB] (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Brihuega, J.Las Matemáticas en el Bachillerato. *Revista SUMA nº 25* (Junio 1997) Madrid: Federación Española de Profesores de Matemáticas. Extraído en julio 2013 de http://roble.pntic.mec.es/~jbrihueg/Principal/MBgonz.htm

Chamorro, M. (2001). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Instituto de formación del Profesorado. Ministerio de educación. España. Extraído en junio 2013 de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Colegio Babeque Secundaria. (2001). *Proyecto Educativo de Centro.* Santo Domingo

Dussel I., *La Formación de docentes para la educación secundaria en América Latina: perspectivas comparadas.* Extraído en junio 2013 http://www.ub.edu/obipd/PDF%20docs/Formaci%C3%B3%20Permanent/

Gallego, D., Nevot, A. Estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.*RevistaComplutense de Educación, Vol.19 Núm. 1, 2008*.

http://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/download/RCED0808120095A/15564.

Gómez, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Nevot, A. (2001). *Análisis crítico de los estilos de aprendizaje de los estudiantes de enseñanza secundaria y propuesta pedagógica para la enseñanza de la matemática*. UNED. Extraído en septiembre 2009 de http://www.estilosdeaprendizaje.es

Pozo, J., Mateo, M., Sanz, M. y Pérez, P. (2006). *Aprender para comprender y construir conocimiento*, Buenos Aires: Santillana.

Santaolalla, E. (2009).Matemáticas y estilos de aprendizaje. Revista estilos de aprendizaje, numero 4. Extraído en junio 2013 de http://www.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero_4/Artigos/lsr_4_articulo_4.pdf

Tomlinson, C (2005). *Estrategias para trabajar con la diversidad en el aula.* Paidos. Buenos Aires.

Vaillant, D. (2009). *Formación de profesores de educación secundaria: realidades y discursos.* Revista de Educación, 350. Septiembre-diciembre 2009, pp. 105-122. Extraído en junio 2013 de http://www.ub.edu/obipd/PDF docs/

Villarini, A. (2000). *El currículo orientado al desarrollo humano integral y al aprendizaje auténtico*. San Juan: Proyecto de Educación Liberal Liberadora.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Mathematics Teachers' Explorations of Indigenous Mathematical Knowledge Systems through Immersion in African Cultures

Iman C. **Chahine**
Georgia State University
Atlanta, Georgia, U.S.A
ichahine@gsu.edu

Abstract

A handful of research has shown the importance of integrating cultural practices that resonate with students' ethnic and background experiences in everyday instruction. Particularly in teacher education courses, there has been an unprecedented focus on valorizing the use of community-based, culturally-oriented learning experiences in light of the diverse demographics that thrive in schools today. Notwithstanding the extensive literature that urged the utilization of cultural immersion experiences as means of increasing cultural sensitivity for students across disciplines, little effort has been documented about the usefulness of immersion for teaching culturally-responsive mathematics. The purpose of this research is to document initial, firsthand field experiences of graduate mathematics education students while engaged in exploring indigenous knowledge systems by immersion in the daily experiences of indigenous cultures in Morocco and South Africa.

Keywords: Indigenous Knowledge Systems; Immersion; Mathematics Education

Introduction

Indigenous knowledge (IK) is generally used anonymously with traditional and local knowledge to differentiate the knowledge developed by and within distinctive indigenous communities from the international knowledge systems generated through universities (Semali & Kincheloe, 1999), government research centers, and private industry which is sometimes called the 'Western knowledge system' (Maurial, 1999). Furthermore, Indigenous Knowledge Systems (IKS) have been recently established by the international world organizations as top global priority for empowering traditional and local communities in their striving efforts towards improved and sustainable development, particularly in developing countries (Shizha & Kapoor, 2010). However, despite its highly proclaimed importance and sound pedigree of recognition for strengthening native communities' preservation of social and traditional capitals towards more independence (Chahine & Kinuthia, in press), no clear effort has been cited that magnifies and exposes the contributions of indigenous cultures to the mainstream knowledge and epistemologies.

For many years, there has been a longstanding history of marginalizing and de-valorizing the contributions of indigenous communities to the edifice of scientific knowledge (Chahine, 2011; Chahine, 2013). When we come to consider the nature of mathematical knowledge and who produces this knowledge we enter an ambiguous realm of philosophical conjecturing. This historical reduction is partly due to a rather limited view of what counts as mathematics on one hand and to a lack of understanding of living indigenous practices on the other. We know very little, or nothing at all, about what it means to be part of an indigenous community historically and contemporarily. We contend that re-inscribing a narrow understanding about indigenous practices into our collective views of mathematical knowledge mutes, and at worst, silences deeper discussions about what mathematics are we teaching in our increasingly diverse classrooms and how we are teaching it.

This study capitalizes on the role that IKS play in cognitive development and their vital contributions to successful and meaningful learning of mathematics in conventional and nonconventional contexts. In this study, we argue that immersing teachers in indigenous cultures will acquaint them with a broad perspective on indigenous knowledge systems and structures, which cover a plethora of contents and contexts that incorporate mathematical artifices. These structures include indigenous music, architecture, mural decorations, indigenous games, bead work, weaving, cultural artifacts, and other social systems and activities.

The study is part of a newly designed course uniquely offered at an urban, highly diverse university in the southeast. The course particularly focuses on teaching *Indigenous Mathematical Knowledge Systems* (IMKS) through cultural immersion in indigenous contexts. The primary purpose of the course is to examine how different cultural groups interpret mathematical concepts in ways that are quite different from what we might expect from typical mathematical texts. This instructional experience dovetails two components:

Component 1: Class work (Location: on campus). In this component, students and in-service teachers investigate mathematical ideas inherent in activities such as creating calendars, art and decoration, divination, and counting schemes. Connections between IMKS and mathematics education in schools are also emphasized.

Component 2: Cultural immersion (Location(s): South Africa; Morocco). This component affords firsthand field experiences to explore IMKS by immersing students in the authentic daily experiences of master craftsmen and knowledge holders of vital indigenous technologies. During the site visit, students explore the integration of hand and mind tools that indigenous cultures continually employ to plan, conceptualize, visualize and execute myriad activities as part of their daily practice.

To motivate critical thinking, we employed various educational modalities in the on-campus portion of the course including: cubing, small group inquiries, whole-group discussion, problem-based investigations and tiered assignments. For the immersion component, students engage in participative forms of inquiry investigating ideas that transpire in out-of-school settings. Throughout the course students are encouraged to experiment with innovative ideas, to make their experimental thinking public, and to develop new epistemologies that guide the teaching and learning of nonconventional mathematics. Students’ effort was evaluated based on the intellectual merit of their research projects, the investigative procedures they developed during field work, validity of their claims, and communicability of their research accounts.

Purpose of the Study

This study examines graduate students and mathematic teachers’ reflections on an immersion experience that facilitated first-hand observation of the mathematical ideas that emerge across indigenous cultures as creative expressions of human thought. The primary goal of this immersion was to offer students a transcultural experience where they can experience the realities of knowing and doing mathematics amidst contextual challenges. Immersion through studying abroad as a college program is an area where some meaningful, but limited, research has been published. While the particular focus of studying abroad as a program that facilitates language acquisition and gains in functional international knowledge has been researched, limited investigations have been attempted to explore the effect of immersion on learners’ perception of the nature of indigenous mathematical knowledge. A critical implication of being immersed in indigenous practices is to sensitize students to the delicacies of what it means to be part of a different cultural fabric, leading to their appreciation of various modes of thinking across cultural boundaries**.**

Theoretical Frameworks

The instructional experience is principled by two frameworks: the *Embodied, Situated, and Distributed (*hereafter ESDC) approaches to the study of how the mind works (Chahine & Kinuthia, in press), and Activity Theory (AT) framework.

The basic tenet underlying ESDC paradigm is the view that cognition is physiologically embodied, socio-culturally situated, and ostensibly distributed among individuals (Anderson, 2008). These approaches atypically emphasize the notion that the brain and, consequently, the mind and its processing cognitive faculties are continuously developing as a result of perpetual interaction with the physical and social world (Reichelt & Rossmanith, 2008). A significant connotation of this paradigm is the view that the brain is no longer isolated from the body, the environment, and the culture of individuals; instead, it constitutes, alongside with the immediate environment, one unitary integrated system. Concomitantly, it is only through the use of one’s sensory motor activities as a result of being situated and immersed in specific worlds that one is able to form inferences and think abstractly.

Drawing from evidence in studies using the ESDC paradigm, a basic premise underlying our assumption for guiding students' learning during immersion in nonconventional settings is the belief that cognitive processes are stimulated when students are immersed in multimodal experiences using successive cycles of integrated actions and perceptions (Gallese & Lakoff, 2005). An important implication of the embodied cognition framework on applied problem solving is the significant role that different modalities (i.e., bodily movement, use of cultural artifacts, acts of drawing pictorial displays, verbal language as well as use of written symbols) play in understanding mathematical concepts. Throughout the course, understanding of new mathematical concepts that emerge in cultural contexts is reinforced by encouraging students' construction of *cognitive metaphors* while immersed in perceptual-motor acts of indigenous people (Lakoff & Nùňez, 2000).

Using the ESDC paradigm, our charge in the immersion experience is to provide evidence supporting the embeddedness of thinking-in-acting model as a fundamental framework that explains and supports students' learning. Specifically, the range of research studies that the students report at the completion of the course provide evidence of the role that multiple modalities and translations within and between modalities play in enhancing students' procurement and understanding of the mathematical concepts and problem solving strategies that indigenous people employ in their daily practice.

The study is also guided by the AT paradigm. Activity Theory (AT) has at its core the *subject-tool-object* triad built off of Lev Vygotsky's (1978) expansion of the basic stimulus-response relation fundamental to behaviorist models of psychology. However, Leont'ev (1978, 1979) developed first-generation Activity Theory that refined the meanings and relationships of the components of the triad shown in Figure 1. For Leont'ev the meaning of subject was broadened to give more attention to a *collective subject* – a group of individuals acting upon a common object. This concern for the collective subject means that Leont'ev explored more complex *activity*, where different actors need to engage in separate *actions* in order to transform the object into the desired outcome of the activity. The efforts of all individuals are directed towards such transformations, but in order to address the differences between the individual and the group forms of such efforts, Leont'ev distinguished three levels of efforts. At the highest level, there is the group activity, in which the transformation of the object into the outcome is driven by the over-arching group *motive*; at the intermediate level, this transformation is directed towards the attainment of an individual's *goal* (which may or may not contribute directly to achieving the motive); and at the lowest level, there are subconscious *operations* which are influenced by the *conditions* under which the activity takes place and can contribute to realizing goals and motives.

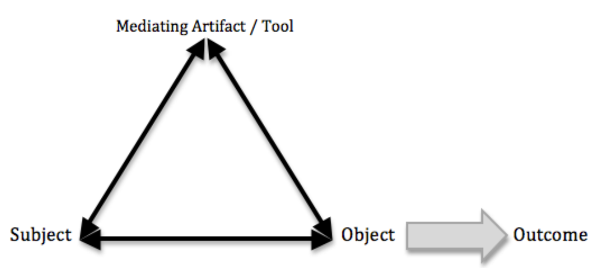


Figure 1. The Triad of 1st-Generation Activity Theory.

AT framework is guided by the belief that thinking and doing are inseparable –a central assertion of AT which assumes that our knowledge of the world is mediated by our interaction with it, and thus, human behavior and thinking occur within meaningful contexts as people conduct purposeful goal-directed activities (Nardi, 1997). Using AT framework, we focus on the premise that subjects, i.e., IK holders and teachers acting in different contexts, i.e. community and schools, both create and represent their intentions and desires as objects (note that the term also denotes an objective), while the tools (consisting of both concepts and artifacts) used in this process mediate between both groups and their goals (Kaptelinin, 2006). Activity theorists (Stetsenko, 2005) suggest that knowledge is socially-situated or context bound because social interactions are fundamental and inseparable from the development of ways to think, understand, or mediate mental activity. This perspective aligns with IKS epistemology and suggests that careful attention must be given to the context in which the development of understanding of teaching occurs, and learning must be situated in a context like the one in which these understandings will be used.

Within an AT framework, we study the activity comprising those actions undertaken by IK holders and teachers while interacting with different tools which they normally use in their respective work environments, i.e. community and schools. Specifically, we investigate how immersion in cooperative activities during immersion can motivate IK holders and teachers to engage in knowledge production that ultimately informs their objectives to serve their community and schools. Simply put, AT afforded a rich description of activity systems that emerge as products of the intentions of IK holders and teachers while employing different tools to mediate their activities and reach their objectives. Since AT strongly advocates socially organized human activity as the major unit of analysis, we believe that AT is best capable of capturing the totality of the activities of indigenous knowledge holders and teachers while interacting during professional development. During the study, we draw on the relationship between these elements (tools, subject, and object) as our participants engage in a set of activities, actions and operations undertaken during immersion.

Methodology

Research methods and data collection

We conducted a qualitative study that focused on 14 graduate students and mathematics teachers who participated in a one-semester course on IMKS that included a highly integrated immersion experience (i.e., students living with host families) in Morocco and South Africa. Accompanied by the researcher as the immersion director and course facilitator, students were continuously encouraged to explore and rely on the authentic host culture for their daily living**.**

Prior to immersion, students attended 4-week long classes on campus in which they were introduced to IMKS as a program of study and they further explored the implications of integrating such a program in the school curriculum. Students were engage in an assortment of in-class activities that include examination of the mathematical ideas that come from cultural activities such as creating calendars, art and decoration, divination, and counting schemes.

Orientation and preparation for the immersion component of the course and on-site activities was also administered.

During immersion, students were assigned to different sites and were specifically encouraged to particularly focus during their observations on capturing those nuances in which indigenous communities are involved in a process of "mathematizing". Students were also asked to keep a daily journal to document and reflect on their lived experiences as a result of immersion. After immersion, students completed a critical reflection paper describing their immersion experiences and comparing their newly gained knowledge and perceptions as a result of immersion to preconceived notions and dispositions before the immersion.

Analysis and Results

The analysis of the findings of this study does not focus on outcomes such as improved test scores, but rather on the lessons, conflicts and stories that were created along the way and that impacts students' conceptualization of the nature of mathematical knowledge from an IKS perspective. We employed the AT subject-tool-object triad for coding the data for analysis. We believe that at the junction of the three lies the learning that came from processes, interface content, attitude shifts.

We conducted the data analysis on several levels:

1) Students' initial reactions to the immersion experiences and their appreciation of transcultural encounters.
2) Students' learning as a result of being involved in indigenous practices and the consequent impact on their cognitive, affective and socio-cultural norms.
3) Students' willingness to transfer what they learned as a result of immersion to their mathematics classrooms.

Two communities and two activity systems

Graduate students and mathematics teachers

As members of school community, our students who are mathematics teachers perceived the immersion as a way to explore new means to enact some change in their practices and the activity system within which they are embedded to better support student understanding of mathematics. They perceive of students as the object of their activity and student learning the outcome being sought. The primary artifacts that mediate teachers' student-oriented activity include curricular resources such as unit and lesson plans, instructional media, and technologies (Suthers, Yukawa, & Harada, 2007).

IK holders and practitioners

IK holders and practitioners are community members and elders that are holders of traditional knowledge and resources that are transmitted orally (stories and explanations) (Chahine & Kinuthia, in press). As members of local communities, practitioners and IK holders apply their indigenous practices in everyday activities to facilitate problem solving of day-to-day issues. The object of their activity systems is survival and adaptation to continuously evolving situations. As such, communities are in a constant learning mode appropriating variety of artifacts including hand and mind tools to understand the world around them. Such tools are typically the results of generations of observation, trial, and experimentation.

During immersion IK holders and math teachers interact with each other exchanging ideas to create and represent their goal directed activities using tools to mediate their goals. We argue that during immersion a collaborative partnership between IKS holders and teachers helped to motivate, inform and empower both parties to address priorities related to their activities.

Discussion

Investigating the impact of using indigenous techniques and practices to investigate relevant concepts in the mathematics classroom is an emerging research interest. Ample research has shown the importance of integrating cultural practices that resonate with students’ ethnic and background experiences in everyday instruction (Jurdak & Shahin, 1999, 2002; Chahine, 2011, 2013; Ascher, 2002; Presmeg, 2007; Noss, Hoyles, & Pozzi, 2000). Furthermore, extensive research has urged the utilization of cultural immersion experiences as means of increasing cultural sensitivity for students across disciplines. Particularly in teacher education, the value of using community-based learning has been heightened in light of the diverse demographics that thrive in schools today. In mathematics education, the yet unseen value of immersion experiences transpires inadvertently when participants consciously view, actively participate, and reflect upon how other cultures use and develop their own mathematics to respond and make sense of their world.

Building on AT paradigm we sought to understand how much the immersion experience upset students' existing equilibria, requiring fresh adaptation toward a higher developmental level. Using the AT paradigm, our charge in this study is to provide evidence supporting the embeddedness of a thinking-in-acting model as a fundamental framework that explains and supports students’ learning. Specifically, the range of research studies that the students report at the completion of the course provided evidence of the role that immersion played in enhancing students’ procurement and understanding of the mathematical concepts and problem solving strategies that indigenous people employ in their daily practice.

The study produced interesting results on the scale measuring development in ways of thinking and learning. Usually in our teacher preparation courses, we see students typically progress from a simple, more absolute understanding of the nature of knowledge and academic authority to a more complex and contextual understanding. We found that students who participated in the immersion experience showed growth toward the belief that developing one's own point of view is important, and that it is important to seek an interdisciplinary approach to knowledge. Additionally, we noticed that students returned home with a reduced tendency toward dualistic thinking and an inclination toward the related belief that there are no absolute right and wrong answers, good and bad information, as well as sources thereof.

Overall, students felt that the immersion experience enriched them culturally, linguistically, academically, and personally. The perspectives students gained on the nature of mathematical thinking were considered useful in informing their future instructional decisions and the range of experiences they offer their students.

Experiencing IMKS through cultural immersion emphasized the importance of unfolding various knowledge systems inherent in the cultural practices of indigenous communities. We argue that this immersion experience afforded an intellectual landscape for students to:

- Develop an awareness of and appreciation for IKS as a well-founded research model delineating those cross generational endeavours aimed at investigating and understanding the physical world. As such, the immersion experience afforded students the opportunities to explore a broader conceptualization of what counts as mathematics.
- Examine research areas in mathematics education that integrate race, ethnicity, social class, and language issues. By observing IK holders, students experienced upfront the unfolding of those culturally embedded mathematical competences which empower communities and grant them opportunities for survival and self-development.
- Instigate and facilitate in their classrooms multiple, malleable approaches to teaching and learning mathematics as a result of being exposed to mathematical practices that are in continuous flux and which emerge as a result of the dynamics of the work context.
- Use real world problems as opportunities for reflective thinking. By exploring mathematics via tasks which come from the workplace and everyday settings, students were able to discern the relevance of mathematical concepts and are more likely to teach it in ways that are meaningful. Students discerned that the value of using workplace and everyday tasks for teaching mathematics lies in its potential to shield learners from falling into the trap of focusing on the procedures at the expense of concepts.
- Honor diversity and respect cultural heritages thus promoting the belief that all people are capable of doing mathematics in their own unique and personal perspective. A direct implication of this study is to encourage teachers to be mindful of the fact that children from diverse backgrounds have different modes of thinking, possess diverse perceptual abilities and spend differential efforts on tasks depending on personal criteria which they deem useful.

We believe that immersion in indigenous practices has capacitated our in-service mathematics teachers to achieve quality in practice-based research by developing living theories that can explain the transformational potentials of mathematical thought for sustainable local and global wellbeing.

References

Ascher, M. (2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas across Cultures*. London, UK: Princeton University Press.

Chahine, I.C., & Kinuthia, W. (in press). Surveying technologies for integrating indigenous knowledge systems in the mathematics classrooms in Durban-South Africa: Potentials and challenges. *Indilinga: African Journal of Indigenous Knowledge Systems*.

Chahine, I.C. (2013). Ethnomathematics in the classroom: Unearthing the mathematical practices of African cultures. In D. Martin, & J. Leonard (Eds.), *The Brilliance of African American Students in Mathematics,* (pp. 195-220). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Chahine, I.C. (2011). An ethnomathematical encounter: A cultural immersion of mathematics teachers in the daily practices of craftsmen in the Old City of Fez- Morocco. *International Study Group on Ethnomathematics Newsletter (ISGEm), 5*(2), 11-13.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain’s concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology, 21,* 1-25.

Jurdak, M., Shahin, I.C. (2002). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids**.** *Educational Studies in Mathematics,* 47, pp. 297-315.

Jurdak, M., Shahin, I.C. (1999). An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut. *Educational Studies in Mathematics Education,* 40, pp. 155-172.

Kapoor, D., & Shizha, E. (2010). *Indigenous knowledge and learning in Asia/Pacific and Africa.* NY, New York: Palgrave Macmillan.

Kaptelinin, V. (2006). The object of activity: Making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and Activity*, *12* (1), 4 – 18.

Lakoff, G., & Nùňez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Leont'ev, A. N. (1979). The problem of activity. In J.V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 37 – 71). Armonk, NY: M.E. Sharpe.

Maurial, M. (1999). Indigenous knowledge and schooling: A continuum between conflict and dialogue (pp. 59-77). In L.Semali, & J. Kincheloe (Eds.). *What is indigenous knowledge? Voices from the academy*. NY, New York: Falmer Press.

Nardi, B. (1997). Studying context: A comparison of activity theory, situated action models, and distributed cognition. In B. Nardi (Ed.) Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction (pp. 69 – 102). Cambridge, MA: MIT Press.

Noss, R. Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000). Working knowledge: Mathematics in use. In A. Bessot & J. Ridgway (Eds.), *Education for mathematics in the workplace* (pp. 17-36). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Presmeg, N. C. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 435-458). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Reichelt, A., & Rossmanith, N. (2008). Relating embodied and situated approaches to cognition. In B. Hardy-Vallée & N. Payette (Eds.), *Beyond the brain: Embodied, situated and distributed cognition* (pp. 57-76). United Kingdom: Cambridge Scholars Publishing.

Semali, L., & Kincheloe, J. L. (1999). *What is indigenous knowledge? Voices from the academy*. NY, New York: The Falmer Press.

Stetsenko, A. (2005). Activity as object-related: Resolving the dichotomy of individual and collective planes of activity. *Mind, Culture, and Activity*, *12* (1), 70 – 88.

Suthers, D. D., Yukawa, J., & Harada, V. H. (2007). An activity system analysis of a tripartite technology-supported partnership for school reform. Research and Practice in Technology Enhanced Learning, 2(2), 1-29.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Mediación cultural con SimCalc en la adquisición del conocimiento del movimiento rectilíneo

Leticia **Sánchez** López
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México
leticiasanlop@hotmail.com
Luis Enrique **Moreno** Armella
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México
lmorenoarmella@gmail.com

Resumen

Esta investigación de corte cualitativo tiene el objetivo de estudiar cómo un grupo de estudiantes mexicanos de 16-18 años logra significar la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo al interactuar en un entorno digital. Nuestra interpretación se basa en asumir que el conocimiento resulta de las acciones del sujeto cognoscente que se acerca a su objeto de conocimiento provisto de artefactos culturales de mediación. Las gráficas cartesianas atadas a la animación promueven en los estudiantes una actitud para expresar y explorar sus ideas a través de las representaciones simbólicas que ellos mismos producen. Los resultados sugieren que este tipo de experiencias puede ayudar a construir una sólida base para acceder a las ideas del Cálculo.

Palabras clave: Movimiento rectilíneo, mediación, SimCalc, representación simbólica, re-descripción representacional.

Introducción

El movimiento rectilíneo puede considerarse como una experiencia reproducible por un vasto número de seres vivos. Sin embargo, sólo el ser humano tiene la posibilidad de ejercer un control sobre él, no sólo en el sentido corporal, sino en una dimensión simbólica. Esta dualidad en la forma de experimentar el movimiento nos remite a lo que diversos autores reconocen como dos formas de conocimiento. El implícito, de naturaleza inconsciente, reactiva, permanente y fija, que ofrece esencialmente respuestas y que los seres humanos compartimos con otras especies, con la diferencia de que nuestra cognición implícita ya no es natural. En determinado momento evolutivo, nuestros ancestros adquirieron la capacidad de *simbolizar,* pudieron salirse de su propio cuerpo a través de la gestualidad deliberada, producto del control consciente de esos movimientos y a un sistema sofisticado de memoria que permitió la re-producción de dichos gestos. De esta manera nace la comunicación consciente en nuestra especie y la producción social de artefactos que poseen una dimensión material, pero también una simbólica y que han transformado el entorno de manera incesante. Nuestras capacidades intuitivas quedaron entonces entrelazadas con nuestra capacidad de simbolización lo que permitió que la cognición humana se extendiera, a través de los símbolos, a una cognición explícita pero sin perder su polo a tierra: los conocimientos implícitos, intuitivos, que se van adquiriendo directamente de la experiencia. De manera que la raíz última del significado, de un símbolo siempre se encuentra en una experiencia, en una intuición. En el caso del movimiento rectilíneo, la experiencia sólo puede tener lugar en un espacio y en un tiempo. Pero convertir el movimiento en un objeto conceptual requiere trascender la experiencia corporal, el *aquí* y el *ahora* a través de un proceso de re-descripción de las representaciones iniciales. Elegimos el programa SimCalc MathWorlds como el principal mediador para que los estudiantes accedieran a las gráficas cartesianas porque éstas siempre aparecen vinculadas a una experiencia virtual de movimiento. El medio digital ofrece además, las representaciones tradicionales que son usadas en el estudio del movimiento rectilíneo: tablas y expresiones algebraicas. De esta manera nuestra investigación centra la atención en la evolución de la capacidad interpretativa que los estudiantes desarrollan al interactuar con las diferentes representaciones del movimiento rectilíneo para entender las relaciones entre los conceptos de distancia, velocidad y aceleración a través de sus gráficas.

Antecedentes

En la instrucción escolar, el estudio del movimiento rectilíneo mediado por tecnología puede ubicarse en los años finales de la década de los 70's cuando se implementan los laboratorios basados en microcomputadoras (MBL por sus siglas en inglés) y se promueve el uso de sensores para la enseñanza de las ciencias, permitiendo por primera vez que los estudiantes generaran datos que se graficaban en tiempo real para ser analizados. En una primera etapa, la investigación en el campo hizo posible dimensionar la complejidad de este nuevo programa en la educación. Los métodos en que se basaban eran esencialmente cuantitativos y es posible identificar en ellos una tendencia a clasificar las concepciones de los estudiantes respecto a los conceptos relacionados con el movimiento. Estas categorías generalmente eran contrastadas con aquéllas aceptadas científicamente. Estudios de este corte permitieron advertir que los estudiantes desarrollaban una capacidad sin precedente para medir y explorar el mundo físico, pero que "aunque los dispositivos digitales estimulaban el interés del estudiante, no necesariamente contribuían a mejorar su comprensión en relación con los conceptos físicos fundamentales" (Thornton & Sokoloff, 1990, p. 865). Puede distinguirse una segunda etapa en la investigación vinculada al aprendizaje de los conceptos de movimiento, en trabajos como el de Nemirovsky, Tierney & Wright (1998) - entre otros - quienes sostienen que si solamente se oponen los conceptos erróneos de los estudiantes a los científicamente aceptados se alejan de la posibilidad de entender cómo es la relación de los estudiantes con las herramientas tecnológicas ante la tarea de interpretar las gráficas cartesianas. En esta nueva etapa se adoptan cambios en las metodologías y en el diseño de las investigaciones que permitirán formular nuevas preguntas que tienen que ver con la naturaleza del razonamiento matemático que los estudiantes pueden desarrollar como resultado del uso de la tecnología digital, así como la naturaleza de la relación sujeto cognoscente-tecnología-objeto. En este sentido, también se hace necesaria la búsqueda de marcos teóricos que pueden ayudar a explicar estas preguntas. En este contexto, un enfoque prometedor es el que centra la atención en la configuración de la complejidad y riqueza semiótica -los signos matemáticos y las producciones gestuales, orales y escritas- que se producen en el proceso de construcción de conceptos relacionados con el movimiento cuando los estudiantes interactúan en un ambiente tecnológico. Este enfoque se aprecia en los trabajos de Benítez (2012) y Radford (2009). Programas de simulación como SimCal MathWorlds, también han sido usados en la instrucción escolar para acercar a los estudiantes al fenómeno del movimiento. A diferencia de un sensor, en el que el movimiento puede identificarse como un fenómeno unidireccional en el sentido que las gráficas asociadas a éste sólo pueden generarse mediante la acción de un cuerpo moviéndose una sola vez, una simulación virtual puede repetirse tantas veces como se desee. Pero además, se tiene la posibilidad de generar el movimiento a partir de su representación gráfica, tabular o algebraica, por lo que el movimiento puede tener un tratamiento multidireccional. En las investigaciones de Salinas (2013) y Moreno & Hegedus (2009) se destaca la *ejecutabilidad* como principal característica de las representaciones generadas por este tipo de programas, pues es lo que permite un tipo especial de interacción entre el estudiante y el medio digital. El estudio de esta interacción y de cómo a través de ella surge una actitud epistémica que consiste en que los estudiantes se confronten con sus representaciones y las re-describan para transformarlas en nuevas representaciones es el marco en que se inscribe nuestra investigación.

Delimitación del problema de investigación

Se pretende estudiar el cambio cognitivo que los estudiantes experimentan cuando acceden al estudio del movimiento a través del medio virtual que ofrece el programa SimCalc con el fin de promover en ellos concepciones consistentes acerca de la relación entre las gráficas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo en el caso del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Las preguntas de investigación que se desprenden para alcanzar el objetivo son:

¿De qué forma los estudiantes logran dar significado a la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo asociadas al movimiento rectilíneo cuando interactúan con un software de naturaleza dinámica como SimCalc?

¿Cómo se configuran los diferentes medios semióticos –signos matemáticos, producciones gestuales, orales y escritas – para re-describir sus representaciones progresivamente y construir dicho significado?

Perspectiva teórica

De la intuición a la simbolización

En el proceso evolutivo de una especie, su interacción con el ambiente deja marcas profundas en su sistema nervioso que permiten, antes que todo, su supervivencia. Se trata de una base permanente, fija e inconsciente de conocimiento que algunos autores como Reber (1967 citado en Pozo, 2006) llaman *conocimiento implícito o analógico*. Es lo que permite la especie *Danaus plexippus* (mariposa monarca) migrar hacia lugares más prolíficos para su reproducción y alimentación, trasladándose distancias del orden de 5.000 kilómetros, y *conocer* no sólo el espacio, sino también el tiempo en que habrá de viajar. Los seres humanos estamos sometidos a las mismas leyes físicas y, en cierto sentido, a las mismas leyes biológicas de otras especies, también poseemos conocimientos implícitos grabados en nuestro sistema nervioso. Pero la *cognición* humana ya no es natural, “somos seres híbridos porque nuestra cognición implícita está entrelazada con los productos culturales de la acción humana” (Donald, 2001, p. 157). Nos desenvolvemos en una realidad simbólica, en un mundo profundamente transformado por la cultura humana. Nuestras experiencias no se quedan atrapadas en el cuerpo. A través de los símbolos, el ser humano ha logrado hacer objetivo su conocimiento. Así, la cognición humana se extendió a una *cognición explícita* gracias a su capacidad de *simbolización.*

Re-descripción representacional

Explicar en qué consiste la función simbólica de los signos y el proceso por el cual a través de ellos el contenido semántico de un objeto de conocimiento puede enriquecerse, ha sido descrito por diferentes autores desde diversas perspectivas (Vygostki, Peirce, Kaput , Deacon, etc.). Vygotski (1979 citado en Kozulin, 1990) planteó la existencia de formas intermedias situadas entre los procesos mentales superiores y las funciones naturales: “los procesos mentales superiores no se adquieren ni mediante un proceso de comprensión súbita, ni mediante una copia de la conducta adulta”. Suponía que las operaciones simbólicas surgen de conductas que inicialmente no son simbólicas. Por su parte, Karmiloff-Smith (1992, citado por Tomasello, 2000) ha propuesto el modelo de la re-descripción representacional para explicar el proceso de significación de un símbolo o de un sistema simbólico:

> Mi tesis es que una manera específicamente humana para adquirir conocimiento es que la mente explota internamente la información que ha almacenado (de manera innata y adquirida), mediante la re-descripción de sus representaciones, o de manera más precisa, re-presentando de manera iterativa, en diferentes formatos representacionales, lo que sus representaciones internas representan. (p.194).

Pozo (2006) ejemplifica los niveles de simbolización en el contexto de la adquisición del concepto de número. Hoy se sabe de la existencia de representaciones pre-verbales de la numerosidad asociadas a una representación intuitiva, no sólo en niños muy pequeños o aún en bebés, sino también en animales. Tales representaciones están fuertemente ancladas en la percepción espacial. En otro nivel se encuentra el uso del cuerpo, como los dedos y los gestos para contar. El cuerpo se convierte en un mediador externo o cultural que permite también realizar operaciones aritméticas como sumar o restar, de manera eficaz ante condiciones estables. A medida que la vida social se vuelve más rica se necesita disponer de nuevos sistemas de representación, un sistema de numeración en forma de sistema de notación. Pero no es necesario conocer, ni mucho menos comprender las propiedades del sistema de numeración como un todo para operar con él. Una reflexión sobre el sistema de numeración está objetivada en la Teoría de Números, que implica el conocimiento del número en un nivel simbólico teórico y no sólo pragmático. Pero, ¿cómo es posible que las representaciones iniciales puedan *desencapsularse* o hacerse penetrables al funcionamiento de otros sistemas?

Karmiloff-Smith (1992) propone cuatro niveles en los que el conocimiento puede representarse: Implícito (I), Explícito 1(E1), Explícito 2 (E2) y Explícito 3 (E3). En el primer nivel las representaciones tienen una naturaleza esencialmente procedimental. La información que contienen no se encuentra a disposición de otros operadores del sistema cognitivo, por lo que son representaciones impenetrables. En el nivel E1, esas representaciones iniciales se convierten en representaciones simbólicas que son estables, en el sentido de estar presentes en la memoria, aunque el sujeto aún no tiene consciencia de ellas. En E2 las representaciones están disponibles en formato simbólico en la memoria, pero aún no pueden expresarse verbalmente, lo que sólo es posible en el nivel E3. Tomasello reconoce en la categorización de Karmiloff-Smith la relevancia de dos niveles básicos de conocimiento, el implícito y el explícito. Este último, dice, se alcanza sólo después de que el sujeto cognoscente alcanza cierto nivel de maestría en la realización de una tarea, comenzando a reflexionar sobre las causas y razones de tal éxito. Para Tomasello (2000), el proceso de re-descripción representacional acontece cuando el individuo toma una perspectiva, desde fuera, de su propia conducta y cognición, como si fuera otra persona, pero mirándose a sí mismo. Del ejemplo que Pozo usa para entender el proceso de re-descripción representacional es posible identificar que se trata también de un proceso mediado por sistemas culturales de representación (miméticos, simbólicos, teóricos). El cuerpo, el sistema de numeración, la Teoría de Números son sistemas semióticos que median la explicitación progresiva de las representaciones y su construcción en nuevas formas de conocimiento.

Mediación cultural

El individuo nace inmerso en una cultura de la cual aprende modos de actuar, hablar y razonar. Como individuos sociales, nuestras capacidades cognitivas sólo pueden desarrollarse al compartir el conocimiento que se vehicula a través de los sistemas simbólicos externos. El conocimiento resulta de las acciones del sujeto cognoscente (el estudiante, en nuestro caso) que se acerca a su objeto de conocimiento provisto de artefactos de mediación. Al tener un artefacto desconocido, de manera natural nos cuestionamos sobre su *utilidad*, lo que revela que un artefacto siempre posee una dimensión intencional, la actividad está anclada en el artefacto. Es entonces cuando el artefacto entra en la dimensión cultural del medio, donde los usuarios aprenden nuevas habilidades mediante su empleo. Una vez adquirida esa habilidad, podemos sustituir el artefacto por la materialización de la idea intencional del artefacto. De manera que es posible identificar que un artefacto posee siempre una extensión material y otra simbólica. Wartofsky (1979) se refiere a los artefactos primarios y secundarios para diferenciar la versión material y la que existe en el espacio de habilidades de quien lo usa. Los artefactos son modelos culturales porque objetivan las necesidades, intenciones y modos de acción humanos involucrados en su producción y empleo. En otras palabras, los individuos necesitan usar artefactos para alcanzar sus metas. Al inicio, los artefactos permitieron la transformación del entorno natural. Pero el desarrollo de artefactos como la gestualidad, la escritura, el lenguaje, las formas de organización social, las técnicas de producción, permitieron también la transformación del pensamiento del hombre. En este sentido, la re-descripción de las representaciones de los estudiantes relacionadas con la forma en que dan significado a las gráficas cartesianas asociadas al movimiento rectilíneo debe reflejarse en su conducta, a través de las producciones comunicativas resultantes de la mediación de las representaciones cinestésicas, gráficas, tabulares y algebraicas que el programa computacional les provee.

Proceso metodológico en la investigación

Diseñamos un escenario experimental conformado en dos etapas que hemos llamado fase de exploración (2012) y fase de enfoque (2013). La selección de los estudiantes se basó en la respuesta a una invitación extensiva, realizada al inicio de cada etapa, para participar de manera voluntaria en el proyecto, ya que de esta manera se tendría más posibilidad de esperar una actitud comprometida y participativa de su parte. Sus edades estaban comprendidas entre 16 y 18 años y en lo que respecta al área de matemáticas, se encontraban cursando la asignatura de Geometría Analítica, correspondiente al segundo año del subsistema de bachillerato mexicano al que pertenecían. Ningún estudiante estaba familiarizado con el programa SimCalc, pero desde que aceptaron participar en el proyecto se les indicó que debían instalarlo en sus computadoras y explorarlo. Las sesiones se desarrollaron en tiempos y espacios fuera de su clase habitual de matemáticas. En cada etapa se trabajó con un grupo de 12 alumnos, conformados en equipos de dos o tres integrantes, cada equipo disponía de una lap-top con el programa SimCalc. Además se contaba con una lap-top conectada a un proyector, con el objetivo de promover que los alumnos la utilizaran para mostrar su trabajo al resto del grupo y para socializar el uso del programa. Al inicio de cada sesión y de manera individual se les entregaban las hojas que describían el desarrollo de la actividad y en las que debían anotar sus respuestas con bolígrafo. En cada sesión se iniciaba la discusión a través de una animación o bien con gráficas generadas por el programa que eran creadas previamente por la investigadora, quien tomó el papel de profesora. Se planeó el modo en que la investigadora, habría de interactuar en las sesiones. El desarrollo de éstas consistió esencialmente en discusiones de las actividades por equipos y también en discusiones plenarias, no en este orden, sino de acuerdo a las características de la actividad y a las circunstancias y dificultades que los estudiantes fueran enfrentando. La profesora medió la interacción entre los equipos en las discusiones grupales. La técnica utilizada en la recolección de datos en ambas etapas fue la observación sistemática del desempeño de los estudiantes y de la profesora. Ésta se realizó por medio de la videograbación con una cámara fija y dos móviles. Las transcripciones del discurso oral, gestual y las producciones escritas de los estudiantes y del profesor fueron las fuentes que permitieron interpretar cómo los estudiantes fueron re-describiendo sus intuiciones a través de los sistemas simbólicos a los que accedieron a través del programa.

La primera fase (2012) permitió identificar y valorar las posibilidades y los obstáculos en la implementación de las actividades con el software. Se diseñaron 9 actividades que fueron desarrolladas en 9 sesiones de 100 minutos cada una. El resultado principal de la experiencia de la primera fase, fue el diseño de 5 actividades que se aplicarían en la fase de enfoque, así como el ajuste de los métodos para la recolección de los datos, que son explicados en el siguiente apartado.

La segunda etapa, desarrollada en mayo de 2013, consistió en la implementación de 5 actividades, desarrolladas en 5 sesiones de 100 minutos cada una. Algunas actividades se muestran en el Apéndice A. En esta etapa, un medio más que se adoptó para registrar los datos fue la grabación de las producciones digitales de los estudiantes a través del programa Camtasia 8, así como el uso de dos cámaras más, que grabaron sin interrupción la actividad de dos equipos diferentes en cada sesión. Estas modificaciones metodológicas con respecto a la fase de exploración permitieron profundizar en el análisis. La adopción de la técnica de análisis de protocolo verbal fue utilizada en la interpretación de la cuarta actividad.

Análisis

El análisis presentado en este documento se centra en los hallazgos de la cuarta sesión de la fase de enfoque, sin embargo, presentamos una breve descripción de la secuencia temática de las actividades. El interés central de la investigación, como ya se ha señalado, es dar cuenta de cómo los estudiantes logran dar significado a la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo asociadas al movimiento rectilíneo. En la primera sesión se promovió una discusión para entender la relación entre una animación generada en SimCalc, en la que dos actores virtuales seguían un trayecto rectilíneo con velocidad constante, con su gráfica cartesiana de distancia-tiempo (d-t) y a partir de ella generar la gráfica cartesiana de velocidad-tiempo (v-t). El objetivo de la segunda sesión fue que los alumnos discutieran cómo generar la gráfica v-t a partir de la gráfica d-t, primero en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme (mru), luego en el contexto del movimiento uniformemente acelerado (mua). Se procuró que los alumnos se centraran en las diferencias cualitativas de ambos movimientos, en cómo lo veían, en cómo leían sus gráficas y no en cómo se llamaban (mru o mua).En la tercera sesión se trabajó con cuatro animaciones en el contexto del movimiento uniformemente acelerado. Los alumnos primero describieron de manera oral y escrita cada una de las animaciones y trazaron las gráficas d-t y v-t. Posteriormente compararon sus gráficas con las que el programa generó. Un análisis a partir de esta última, daría la posibilidad de conjeturar acerca de la forma de la gráfica aceleración-tiempo. En la cuarta sesión los alumnos crearon una animación que correspondía a un problema del encuentro de dos carros. Esta tarea fue planeada con el objetivo de captar cómo los estudiantes expresaban las ideas en las que se había trabajado en las sesiones anteriores. Es importante señalar que el tratamiento del movimiento uniformemente acelerado hasta este momento, se había realizado sólo a través de gráficas y que sería hasta esta, la cuarta sesión, en que se haría necesario el tratamiento algebraico, pero buscando que éste surgiera de una necesidad por expresar lo que ya no podía explicarse sólo con gestos, palabras o gráficas. Finalmente, en la quinta sesión se trabajó con dos animaciones de movimiento rectilíneo, cuyas gráficas d-t obedecían a un modelo exponencial y a uno cuadrático, respectivamente.

En los siguientes apartados se presentan el análisis de cómo un equipo abordó el problema. En las transcripciones A1, A2, A3 representan los integrantes del equipo, P se refiere a los momentos de intervención de la profesora. La descripción de gestos, énfasis en el discurso y otras aclaraciones se escriben entre paréntesis en itálicas. Las referencias a las figuras se denotan por Fn.x

La actividad de la cuarta sesión

Dos carros se mueven en la misma dirección en trayectorias lineales adyacentes. El carro A se mueve con velocidad constante, comienza a moverse a 20m del origen y en el segundo 6, se encuentra en loa posición 32m. En el segundo 0, la posición del carro B es 0m y su velocidad es 12 m/s. Se sabe que la aceleración del carro B en todo su trayecto es constante y es negativa. Crea una animación para mostrar cuál debe ser el valor de la aceleración del carro B para que los carros estén lado a lado en el segundo 4.

Episodio 1 Móvil A. [00:00 a 4:36] A1 toma el control de la computadora en este episodio y crea un actor bajo un modelo lineal para su gráfica d-t. De más de 20 opciones que tiene para elegir la apariencia del mundo, elige la que se llama *Carsz,* en la que los actores toman forma de automóviles.

A2: En el segundo seis se encuentra en la posición 32.
A1: Pero no dice el dominio ¿o sí?
A2: No, no. Dice que en el segundo seis se encuentra en la posición 32.
A3: El rango es de 0 a 6. (*Pausa)* No, el dominio es de 0 a 6.

A1 usa las herramientas del programa para obtener la recta que cumpla las condiciones del problema.

1. P: ¿Por qué dibujaron esa recta?
2. Al: Porque dice que el carro A se mueve a velocidad constante y una velocidad constante.
3. A2: ¿Se supone que debería ser una recta horizontal, ¿no? (*Interrumpiendo)*
4. A1: Pero, cuando la gráfica está así o así (Figura 1) y pones la gráfica de velocidad, la gráfica es una línea horizontal
5. A2: Cierto
6. A3: Y también dice que el oo., comienza en el metro 20 a partir del origen, está aquí el punto. (E3 *señala en la gráfica que aparece en la pantalla el punto (0,20))*
7. A1: Este sería cero coma veinte y dice que en el segundo 6 está en la posición 32 y aquí nos dice que en el segundo 6, no se ve mucho, pero está en la posición 32 (*Activa la ventana de las coordenadas del punto para que la profesora lo vea*). Tenemos que es una velocidad constante porque

es una línea y ahí si sacamos la de velocidad acá, va a dar que es una recta porque es constante. (A*1 activa la ventana para obtener la gráfica de la velocidad y aparece la gráfica).*

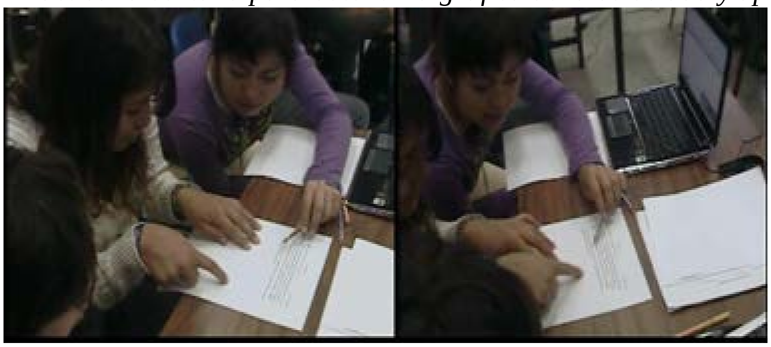


Figura 1. Gesto como artefacto simbólico para entender la gráfica

Al inicio de este episodio, la primera observación es que A1 hace explícita la necesidad de mantenerse cercana al problema al elegir un mundo virtual en el que los actores son precisamente carros. Identifican como primer tarea, el representar el movimiento del carro A, a partir de la gráfica d-t. A1 elige un modelo lineal y reconoce (2) en él la velocidad constante. A2 también ha asociado la idea de velocidad constante a la imagen de recta horizontal (3), pero en ese momento están hablando sobre la gráfica d-t y A1 lo aclara usando el dedo índice para establecer una relación entre las gráficas d-t y v-t. Podemos reconocer en este episodio un primer nivel de re-descripción de una parte del problema en un formato simbólico a través del gesto.

Episodio 2 Móvil B, primer gráfico. [4:37 a 6:30]

8. A2: Entonces el segundo carro, en el segundo 0 está en el metro cero
9. A1: O sea en el origen
10. A2: Y su velocidad es 12 metros sobre segundo. (*Elige para el móvil B un modelo lineal para la gráfica d-t*). Se supone que su velocidad es la pendiente, entonces debería estar ahí. (*Activando la ventana de velocidad, aparece la gráfica v-t*)
11. A1: Que en su trayecto es constante y es negativa.
12. A2: No, pero eso es la aceleración.
13. A3: Si tiene aceleración, no puede tener velocidad constante. O sea su velocidad de cuando empieza es de 12 metros sobre segundo, pero no termina con la misma velocidad, por tener aceleración.
14. A2: ¿Cómo?
15. A3: O sea, si la velocidad es constante, no hay aceleración, no hay cambio de velocidad. Entonces debe de existir un cambio de velocidad.
16. A1: Tenemos que buscar una forma en que se crucen en el segundo cuatro. De lado a lado en el segundo cuatro (leyendo el texto)
17. A3: No tiene dominio tampoco, ¿verdad?
18. A1: 'Mm (En tono de negación). Pues vamos a poner en segundos, 5.

La primera propuesta de A1 para representar el movimiento del móvil B es por medio de una gráfica d-t de forma lineal. La confrontación con su gráfica v-t, genera entre los integrantes una búsqueda de relaciones entre lo que plantea el problema y lo que ven en la gráfica (13, 14). Esta búsqueda también se refleja cuando A3 pregunta por el dominio (17) y al no contar con más información proponen elementos para construir la gráfica (18).

Episodio 3 Móvil B, segundo gráfico. [6:30 a 20:25]

19. A3: Para que la aceleración sea negativa tiene que ser así, ¿no? o así. (F2.a, izquierda)Pero si empieza en cero y es positiva entonces tiene que ser así (F2.a, derecha), la cosa es pues, vemos cómo reacciona, ¿no?
20. A1: Pero el problema es que si lo dejamos así, va a alcanzar la otra línea más rápido. Si lo hacemos al revés (F2.b).(Hace un gesto con el dedo, indicando cambio en la concavidad de la curva)
21. A3: Pero ya no sería aceleración negativa.
22. A2: Pero el problema es que se tiene que cruzar ¿no? (Toma el lápiz) (F2.c)
23. A1: Ajá. Porque se tiene que cruzar hasta el segundo cuatro.
23. A2: La otra está así, entonces se debe de cruzar así.
24. A1. Porque primero tiene que avanzar muy lento para que en el segundo 4 las dos se crucen. Si lo hacemos al revés en muy poco tiempo la otra va a alcanzar la línea.
25. A2: A menos que sea así (F2.d) (Se ríe, pues parece que sabe que su argumento no es convincente).
26. A2: Así se intersectan
27. A3: Pero su aceleración es positiva

Al inicio de este episodio, el equipo deja el trabajo en la computadora por el trabajo en papel y lápiz. A3 toma la iniciativa (19) y hace dos trazos curvos. No sabe cómo caracterizar con una palabra ese tipo de curvas, pues en ningún episodio lo hace, pero recurre a otro artefacto, las gráficas, para comunicar lo que está pensando. Acto seguido A3 traza los ejes cartesianos con la curva que cree corresponde a las condiciones del problema (F2.a, derecha). En ese momento comienza una interesante intervención de los otros integrantes. Los trazos de A3 se convierten en un medio no sólo para que A3 se exprese, sino para que sus otros compañeros piensen a través de ellos. E1 interpreta icónicamente el trazo de A3, porque para refutarlo se basa en un nuevo trazo que hace y en el que las gráficas d-t de ambos carros no se podrían cruzar. La identificación de un cruce entre ambas gráficas, refiere nuevamente una re-descripción del problema en términos simbólicos. En el extracto se puede reconocer que los estudiantes hablan del cruzamiento de las gráficas (usan el artículo femenino, por ejemplo) (20, 23,24). No hay acuerdo, pero A3 sigue convencida de la forma de la gráfica d-t (21,27), sin embargo, debe rebasar la representación gráfica para convencer a sus compañeros. E1 borra la propuesta inicial (el modelo lineal) y traza con el programa un modelo cuadrático, que por default tiene concavidad hacia arriba. Enseguida activa la pantalla que presenta la forma algebraica y cambia los parámetros consiguiendo nuevas formas de la parte de la parábola, hasta conseguir con ayuda de sus compañeros el cambio de concavidad. Comienzan entonces de manera arbitraria a cambiar los otros parámetros para conseguir lo tienen en mente y han materializado en el papel: conseguir que se intersecten en el segundo 4.

Figura 2. Re-descripción del problema en un nivel simbólico mediado por las gráficas

A1 expresa una confusión que tiene, pues cree que la velocidad del móvil B debe ser siempre igual que 12 m/s. A3 hace la aclaración que en el texto se plantea que esa es la velocidad inicial de B. Este intercambio de ideas conduce a traer a la pantalla las gráficas de velocidad de los móviles A y B, que hasta el momento no las habían requerido. Ahora las gráficas de velocidad toman una nueva dimensión. A diferencia del primer episodio (7), la gráfica no sólo tiene la función de comprobar una construcción, sino que propiamente les dará la posibilidad de construir la animación.

Episodio 4 Validación gráfica por medio de las áreas. [20:27 a 23:10]

28. P: ¿Cómo pueden decir que esa es la gráfica correcta, que se encuentran los dos carros en el segundo cuatro?
29. A3: Eh. Haciendo el área de ¿velocidad? Por ejemplo, hacemos que es …, es que no se ve. (*ajusta la escala de la gráfica para poder calcular el área*), entonces decimos que en cuatro, aquí son ocho.
30. P: ¿Qué quiere decir ese 8?
31. A3: Que…que….
32. A2: Que en el segundo cuatro, a partir de su origen que es el veinte, se le va a sumar otros ocho, para que sea en el segundo cuatro, entonces va a estar en el 28.
33. P: y ¿qué tendría que pasar con el otro?
34. A2: Su área tendría que estar en 28 al llegar al cuatro. Serían 11 menos 3, ocho. Y por cuatro, veintiocho. Sí.
35. A1: No. Treinta y dos, entre dos, dieciséis.
36. A3: Y… y… los otros, estos, son doce y dieciséis más doce, veintiocho. Se encuentran en el metro 28 en el segundo cuatro.

En la Figura 3 se muestran las construcciones consecutivas del equipo. Su construcción final no cumplía con la condición de que la velocidad del móvil B en el segundo 0, fuera 12 m/s, en su construcción era igual que 11m/s. La figura F3.d fue obtenida por medio de la manipulación de la gráfica de velocidad, que el programa permite. Sin embargo, la construcción está lejos de ser una construcción por ensayo y error. El argumento se basa en el extracto del Episodio 4. La manipulación de la gráfica de velocidad no fue arbitraria, tal como lo muestran las intervenciones de A3 (29, 36) y A2 (32), ellos re-describen el significado de las gráficas de velocidad en términos del área bajo los cuadriláteros que forman las curvas con los ejes cartesianos y lo relacionan con las gráficas d-t correspondientes.

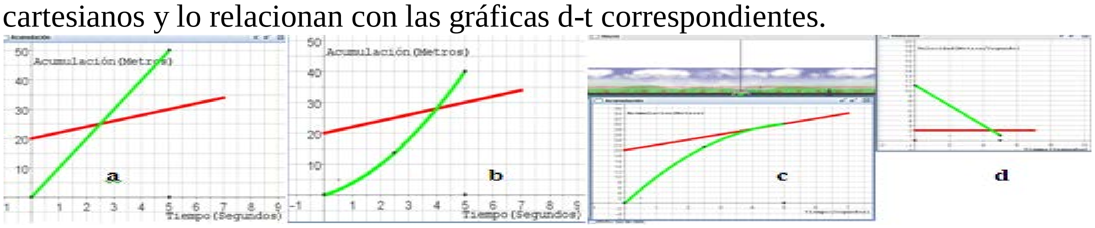


Figura 3. Gráficas cartesianas d-t (a,b,c), v-t (d) para carro A (rojo) y carro B (verde).

Conclusiones

Hemos descrito en las secciones previas la experiencia de un grupo de estudiantes cuando interactuaron en un entorno digital con el objetivo de dar significado a la relación entre las gráficas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo, en situaciones específicas. Aunque estos resultados involucran un número pequeño de estudiantes, los resultados sugieren que la herramienta digital elegida puede contribuir a que ellos desarrollen diferentes formas de representar, explorar y expresar ideas matemáticas de manera complementaria con el lápiz y el papel. También puntualizamos el hecho de que se requieren métodos que permitan acercarse lo suficiente cuando los estudiantes trabajan en un entorno digital, de aquí la decisión de mostrar en el escrito esa parte de la experiencia. No obstante, creemos que los resultados obtenidos son parte de un proceso social que comenzó aún antes de la primera sesión de trabajo con ellos, pues ya para ese momento, los estudiantes tuvieron que re-describir sus intuiciones y creencias acerca del movimiento rectilíneo para poder internalizar los artefactos simbólicos creados culturalmente. Estas intuiciones son parte de la identidad cognitiva del ser humano, no se pueden abandonar, sino más bien re-describir. Los resultados de este proyecto pueden alimentar favorablemente la discusión de la fuerza conceptual de una gráfica. Por ejemplo, mediante la representación gráfica de una función, podemos hablar de manera inmediata de su concavidad, lo que resulta inaccesible si tratamos de hacerlo a través de su representación algebraica. Pero cuando además, la gráfica está anclada en una experiencia de movimiento, se tiene la posibilidad de acceder a las ideas matemáticas de variación y acumulación de manera sustancial. Un acercamiento intuitivo al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) puede ser posible desde el inicio de un curso tradicional de Cálculo y no esperar al final, como es común, para mostrar un TFC útil solamente en una faceta algorítmica.

Referencias y bibliografía

Benítez, A. (2012). *Estudio sobre la variación y el cambio: mediación del sensor de movimiento.* Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México.

Donald, M. (2001). *A Mind so Rare: The Evolution of Human Consciousness*. New York/London: WWW Norton and Company.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond Modularity.* Cambridge, Ma.: Cambridge University Press. Trad. cast. de J. C. Gómez y M. Núñez: *Más allá de la modularidad,* Madrid: Alianza, 1994.

Kozulin, A. (1990). *La psicología de Vygotski.* Madrid: Alianza Editorial.

Moreno, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital Technologies. *ZDM Mathematics Education. 41*, 505-519.

Nemirovsky, R., Tierney, C. & Wright, T. (1998). Body Motion and Graphing. *Cognition and Instruction, 16*(2), 119-172.

Pozo, J. (2006). *Adquisición de conocimiento.* Madrid, España: Morata.

Radford, L. (2009). "No! He starts walking backwards": interpreting learning motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM . The International Journal of Mathematics Education. 41*(4), 467-480.

Reber, A. (1967). Implicit learning of artificial grammars. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior,* 6, p. 317-327.

Salinas, P. (2013). Approaching Calculus with SimCalc: Linking Derivative and Antiderivative. En Hegedus, S. & Roschelle, J. (eds.) *The SimCalc Vision and Contributions*. EUA: Springer-Verlag.

Thornton, R. & Sokoloff, D. (1990). Learning motion concepts using real time microcomputer-bases laboratory tools. *American Journal of Physics, 58*(9), 858-867.

Tomasello, M. (2000). *The Cultural Origins of Human Cognition*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygostki, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial

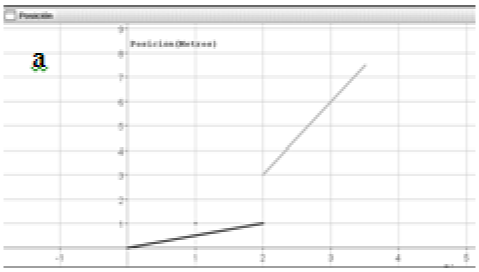
Crítica.

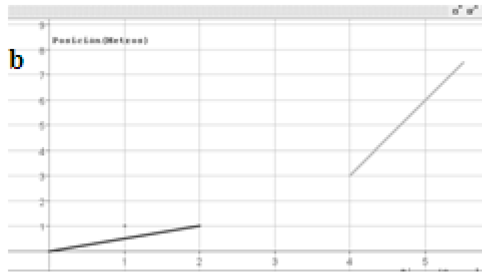
Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and Scientific Understanding*. Holland: D. Reidel Publishing Company.

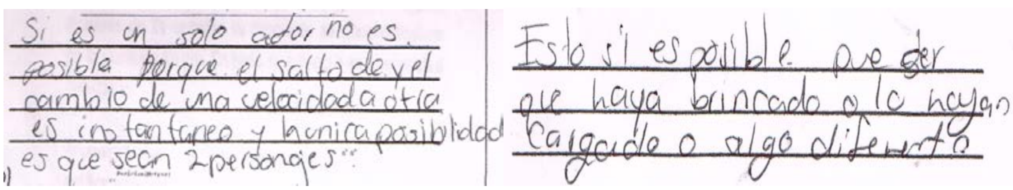
Apéndice A

Algunas respuestas de los estudiantes a las actividades propuestas

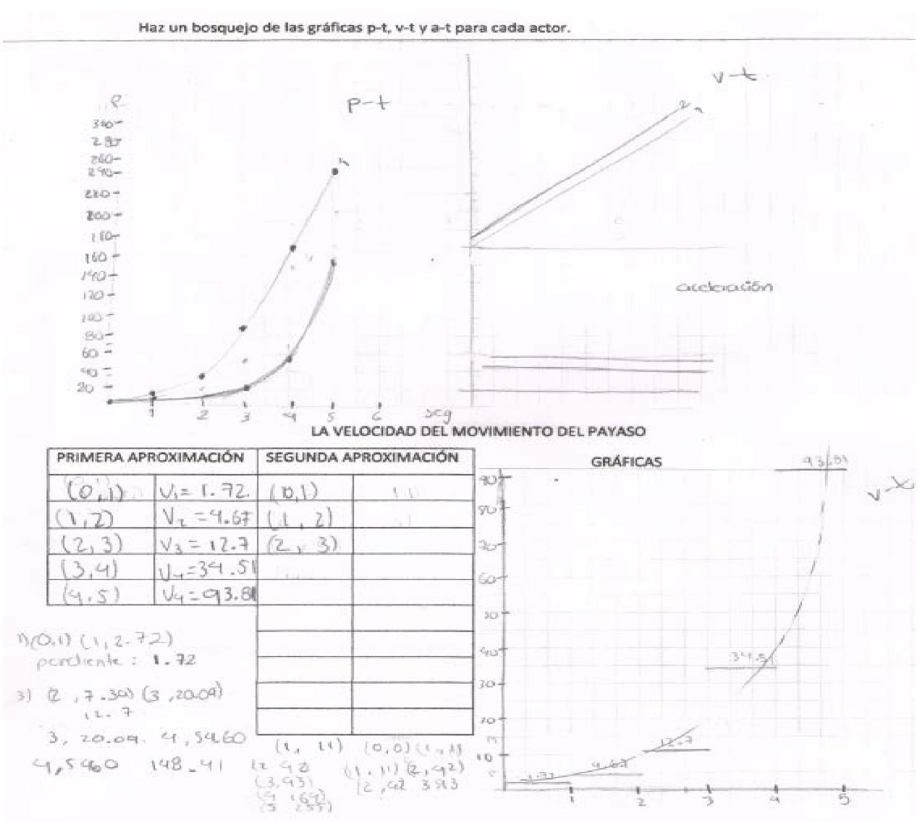
En la primera sesión los alumnos debían interpretar las gráficas distancia-tiempo a través de descripciones verbales referidas al movimiento rectilíneo, algunas no eran posibles.







En la quinta sesión se mostraron dos animaciones en la pantalla del salón de clases. Sólo una correspondía a un movimiento uniformemente acelerado. Los alumnos debían identificarla y dar argumentos a su respuesta.



I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Medios semióticos de objetivación en estudiantes de sexto grado cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

Javier **Mojica** Vargas
Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Colombia

Resumen

Se presentan los hallazgos íniciales de un estudio de investigación a nivel de maestría en el cual se estudian los medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes colombianos de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, analizados desde una perspectiva semiótico cultural y desde el análisis multimodal de la actividad matemática; a su vez se desea socializar la hipótesis de investigación que considera que los constructos de la teoría cultural de la objetivación pueden emplearse en distintos contexto de la enseñanza de las matemáticas. Dentro de los hallazgos de este trabajo, que se encuentra en una etapa inicial de pilotaje, se cuenta con algunas evidencias de la existencia de medios semióticos de objetivación que permiten ampliar la semiótica de lo multiplicativo y comprender las formas de reflexión de los estudiantes frente al objeto cultural de la multiplicación.

Palabras Clave: Medios semióticos de objetivación, pensamiento multiplicativo, semiótica cultural, objetivación, aprendizaje.

Introducción

La educación matemática entendida como una epistemología del aprendizaje matemático (D´Amore, 2006) nos sitúa en un escenario que ofrece nuevos paradigmas e intereses y nos invita a replantear algunos objetos de investigación, de manera que desde estas posturas se pueda dar cuenta de los diversos aspectos del aprendizaje de las matemáticas, de cómo piensan los estudiantes, la anatomía de sus razonamientos, el reconocimiento de sus potencialidades, de lo que pueden hacer los estudiantes con lo que saben y las maneras de comprender por qué hacen lo que hacen. De tal suerte que desde los hallazgos de estas investigaciones puedan empezar a generarse estrategias de enseñanza que teniendo en cuenta las maneras de aprender de los escolares, apunten a la necesaria interrelación entre procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este cambio de paradigmas, nos hallamos en una época en la cual las miradas tienen su atención puesta en el carácter semiótico de la actividad matemática. Comprender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva semiótica implica fomentar la sensibilidad ante la convergencia de registros semióticos de distinta naturaleza, en un esfuerzo que requiere tomar conciencia de la elaboración de significados de los estudiantes y del proceso de reflexión que les permite acercarse a la lógica cultural de los objetos matemáticos

El complejo ambiente del aula esconde en su interior diversas expresiones dadas por los estudiantes cuando aprenden, que pasan desapercibidas y a veces nos parecen naturales, pero no nos detenemos a pensar en la información que ellas nos pueden ofrecer; centrarnos en su análisis ofrece la posibilidad, poco explotada, de tomar conciencia de estos signos y expresiones como hechos latentes de comprensión que pueden llegar a transformar, por ejemplo, la manera como juzgamos o "evaluamos" las comprensiones o aprendizajes de los estudiantes. Estos hechos legitiman la necesidad de reconocer estos signos o expresiones de manera que permita traducir tales reconocimientos en orientaciones para la enseñanza.

Marco de referencia

Para acercarnos al reconocimiento de estos signos emergentes en el desarrollo de la actividad matemática, nos situamos en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, en la cual asumimos los preceptos de la perspectiva histórico cultural y puntualmente nos situamos en la teoría cultural de la objetivación TCO (Radford, 2006, 2013). Asumiendo entonces una perspectiva semiótico cultural del aprendizaje de las matemáticas nos interesa comunicar los desarrollos iníciales de un trabajo de investigación a nivel de maestría el cual pretende, entre otras cosas, identificar y describir los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes de primer grado de educación secundaria colombiana cuando resuelven ciertas tareas de tipo multiplicativo.

Como se mencionó nos posicionamos desde una postura que comprende el aprendizaje y la enseñanza desde una perspectiva semiótico cultural de la educación matemática, en la cual acudimos a la teoría cultural de la objetivación la cual "aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados." (Radford, 2006, p. 105). Pragmáticamente la teoría sugiere prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el alumno cuando resuelve tareas matemáticas, "en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales" (Radford, 2006, p. 125).

Los medios semióticos de objetivación son entendidos como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidente sus intenciones, y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2003, 2010). Entre estos signos observables en la conducta del sujeto se hallan los símbolos, los gestos, los movimientos, los signos, el lenguaje, la negociación o diálogo con otros; los cuales permiten dar cuenta de una intención comunicativa, una manifestación que pone algo de presente, toda vez que “se convierten en constituyentes mismos del acto cognitivo que posiciona al objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social” (Radford, 2006, p.125), además estratifican el objeto matemático en estratos de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median. En resumen, los medios semióticos de objetivación corresponden a “los objetos y signos utilizados para objetivar el conocimiento” (Vergel, 2012, p. 21).

Aunque el posicionarse desde una perspectiva sociocultural implica la participación en un sistema de prácticas sociales, este sistema debe ser de tal naturaleza que permita que se elaboren significados a partir de la conciencia colectiva encaminada a la consecución de un objetivo común que se nos muestra a través de una lógica de significación y estructuración legada en el tiempo por nuestros antepasados y que nos hacen actuar, proceder y pensar con los objetos matemáticos de formas particulares.

Acerca del pensamiento multiplicativo

En algunas teorías el pensamiento tiende a clasificarse desde diversos criterios, por ejemplo la epistemología genética de Piaget define tipos de pensamiento asociados a etapas de desarrollo, Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples considera la inteligencia lógico matemática y en general puede reconocerse una tendencia a clasificar el pensamiento matemático de acuerdo al objeto matemático de referencia o al dominio particular al cual se refiere (pensamiento numérico, algebraico, métrico, variacional, etc.). Sin embargo en la TCO el pensamiento se caracteriza por su naturaleza semióticamente mediatizada y se concibe como una reflexión mediatizada de acuerdo a la actividad de los individuos, actividad que media entre saber y conocimiento. El considerar el pensamiento desde una posición no mentalista y caracterizarlo por su carácter reflexivo y mediado hace que el pensamiento en esta teoría este asociado con tipos particulares de acciones y reflexiones a partir de las cuales sea posible referir tipos de pensamiento que van más allá del objeto matemático presente en la actividad.

Asumiendo entonces que existen tipos de pensamiento matemático asociados a las maneras de proceder de los estudiantes es nuestro interés investigar, desde esta postura, algunas características de lo que podría llegar a considerarse pensamiento multiplicativo. Sin embargo no se puede desconocer todo un legado de estudios referidos al que hacer en lo multiplicativo que pueden configurar una visión holística de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación.

Desde los estudios de Piaget (1952) se hallan referencias al estudio del razonamiento proporcional, Lamon (1994) estudia procesos de unitizacion y normación, Vergnaud (1994) define el campo conceptual multiplicativo, Godino y Batanero (1994) estudian la naturaleza ontosemiótica del razonamiento proporcional, Bosch (1994) analiza la proporcionalidad desde la teoría antropológica de lo didáctico, Steffe (1994) referencia esquemas multiplicativos de los niños, Behr, Harel, Post & Lesh (1994) sitúan el problema en términos de las unidades, el grupo Mescud (2005) analiza la complejidad del pensamiento multiplicativo y su trascendencia en las aulas, Fishbein, et all. (1985) definen modelos intuitivos de la multiplicación, Greer (1992) considera la estructura de los problemas multiplicativos, Garcia & Serrano (1999) y Vergel (2003) realizan unas primeras aproximaciones a la perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación.

Como se puede dimensionar, la investigación en este campo considera diferentes enfoques y atiende a diversos intereses, tan controversial se torna el asunto que no es posible proferir la última palabra al respecto. Por el contrario la investigación en este campo esta aun vigente y acepta otros puntos de vista que aporten a comprender aquello que podría considerarse pensamiento multiplicativo.

Particularmente consideramos que las tareas de tipo multiplicativo son aquellas que provocan interacciones, que son interesantes para los estudiantes, que permiten la reflexión y que posibilitan el uso de artefactos en torno a situaciones problema que para su solución requieren el uso de la multiplicación o la división.

Contexto problemático

Asumiendo como problemática la ausencia de información en un aspecto particular del vasto espectro de investigación en educación matemática, se tiene como hipótesis de investigación que los hallazgos realizados desde la postura semiótico cultural adoptada por Radford, ampliamente explorada en el pensamiento algebraico puede replicarse en otros dominios de la educación matemática, particularmente se desea estudiar si existen y cuáles son los medios semióticos de objetivación que podrían llegar a caracterizar el pensamiento multiplicativo.

Los medios semióticos de objetivación son consustanciales a la actividad matemática y por lo tanto se requiere entrenar el ojo del docente, hacerlo sensible a los detalles y capacitarle en el posible aprovechamiento de estos recursos dentro de la actividad del aula.

En consecuencia el problema está en reconocer los signos o medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, el cual se aborda desde la pregunta ¿Cuáles son los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando afrontan tareas de tipo multiplicativo? y para ello se persigue el objetivo de estudiar los medios semióticos de objetivación movilizados y los procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo de manera que permita corroborar o refutar la hipótesis de que los medios semióticos de objetivación también emergen en tareas de tipo multiplicativo.

Metodología

Realizar el seguimiento, exploración y análisis de los medios semióticos de objetivación requiere de un dispositivo teórico en el cual sea posible referir los aspectos que con detalle se deben analizar, toda vez que el análisis de la actividad matemática debe considerar simultáneamente los registros semióticos escritos, lingüísticos y corporales, tanto del individual como del grupal, capturar y analizar su convergencia y examinar en el tiempo su evolución, toda vez que la convergencia de estos sistemas semióticos son piezas clave del proceso de objetivación. Para ello se dispone de un esquema teórico fundamentado principalmente en el análisis multimodal sugerido por Arzarello (2006). La mirada multimodal del pensamiento y su incidencia en el aprendizaje es objeto de estudio en otros autores como Manghi (2010), Lemke (1990), Kress & van Leeuwen (2001), McNeill (2000) y Tamayo (2001).

En términos de los elementos necesarios para el estudio se hace necesario contar con un dispositivo de grabación de video que permita capturar la mayor parte de las acciones realizadas por el grupo durante la actividad. Para luego realizar las transcripciones y sus respectivos análisis utilizando las categorías ofrecidas por la TCO y los aspectos brindados por el análisis multimodal.

Dentro del diseño metodológico se incorpora otro aspecto teórico referido a la teoría de la actividad de Leontiev, de manera que las tareas propuestas hacen parte de una actividad en la que tienen particular importancia el objetivo y los medios para alcanzar dicho objetivo, para Leontiev una actividad es

> un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas (Radford, 2008, p. 741).

Las características de las tareas a proponer son cruciales en el desarrollo de la investigación, en tanto deben corresponder a problemas con un contenido conceptual, histórico y cultural, que tengan en cuenta los conocimientos e intereses de los estudiantes, permitan la reflexión y sobre todo la interacción pues esta se considera parte consustancial del aprendizaje.

Para el desarrollo de las tareas se dispone de una organización de clase también sugerida por Radford (2006) en la cual se realice un trabajo en pequeños grupos, luego se realiza un intercambio entre los pequeños grupos y luego se genera un espacio de discusiones generales. Sin embargo cabe anotar que esta organización puede ser cíclica y no necesariamente secuencial

Dada la complejidad que revierte el diseño de tareas se dispone de un proceso de selección, adaptación y pilotaje, en el cual se van examinando el tipo de tareas, las interacciones que provocan y sus posibles variaciones, a la vez que se van adaptando las tareas finales.

La pertinencia de realizar el estudio en estudiantes con seis años de experiencias matemáticas escolares obedece a la intención de reconocer que en este tiempo se han logrado concretar algunas maneras de proceder frente al objeto multiplicación, maneras que por su efectividad podrían reaparecer en el tiempo y brindar información de cuáles son esas maneras semióticas de proceder no obstante se corre el riesgo y a su vez se posibilita la emergencia de nuevas preguntas de investigación que indaguen acerca de las maneras en que aparecen o son generados estos recursos semióticos.

Algunos hallazgos iníciales

La investigación en curso espera poder generar información documentada frente a los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de grado sexto cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo basados en la hipótesis inicial que considera que los constructos de la teoría cultural de la objetivación no son exclusivos del pensamiento algebraico y que pueden ser usados en otros dominios como el pensamiento multiplicativo aún cuando hasta el momento no se tengan una caracterización de sus elementos constitutivos. En lo explorado hasta el momento algunos ejercicios iníciales parecen demostrar la existencia de unos medios semióticos de objetivación tales como señalamientos para hacer conteos, inscripciones para hacer repartos y signos lingüísticos que permiten una primera aproximación a lo semiótico de lo multiplicativo.

En la etapa de pilotaje y diseño de tareas, se hallan indicios de la movilización de recursos semióticos tales como los señalamientos y las inscripciones, que dan cuenta de signos intencionales que utilizan los estudiantes para acercarse a la lógica cultural de los objetos, tal es el caso del signo kinestésico de inscripción para hacer repartos de grupos iguales para resolver un problema de división.

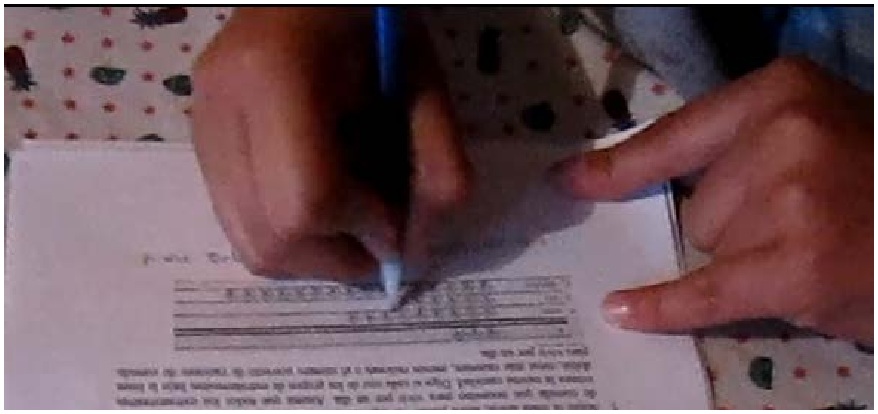


Figura 1. Signo kinestésico de inscripción para hacer repartos

Un segundo aspecto emergente en esta primera etapa de la investigación corresponde al signo kinestésico de señalamiento para indicar conteos de unidades simples y múltiples, en este medio semiótico de objetivación se acude a la práctica cultural de realizar conteos con los dedos, los cuales no solamente representan conteos de unidades simples sino de unidades múltiples que capturan la lógica de la multiplicación como conteos de grupos iguales. En este medio semiótico aun queda por explorar a través de entrevistas semiestructuradas las razones por las cuales los conteos con los dedos tienden a esconderse como si estuviera indicando una censura social y didáctica por el uso de este recurso semiótico.

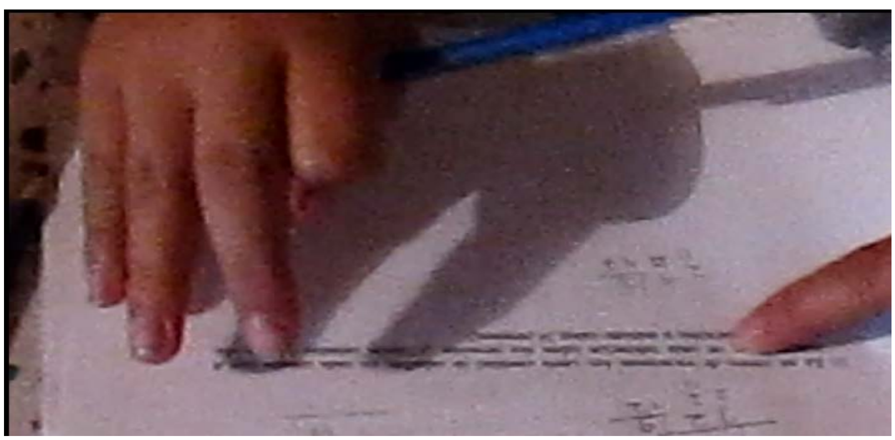


Figura 2. Signo kinestésico de señalamiento para realizar conteos de unidades compuestas.

Un tercer aspecto corresponde al signo lingüístico “por cada” utilizado para resolver una tarea de repartos proporcionales, término que permite evidenciar la captura la lógica de correspondencia entre elementos de un conjunto y otro en este tipo de problemas.

La evidencia inicial de la existencia de medios semióticos de objetivación en estudiantes con alguna experiencia con la multiplicación, insinúa la trascendencia de la TCO a otros dominios y hace manifiesta la necesidad de explorar en otros contextos los posibles recursos semióticos que hacen parte de la actividad matemática de manera que sea posible acercarnos a la comprensión de su naturaleza, incidencia y posible uso en las clases de matemáticas.

Entre los resultados esperados y los alcances del estudio se espera provocar en los docentes cierta sensibilidad ante las acciones de los estudiantes en la clase de matemáticas, reconociendo aprendizajes por medio de mecanismos poco tradicionales, dando relevancia a la movilización de diversos signos lingüísticos y corporales como autenticas manifestaciones de pensamiento matemático de los estudiantes, que no están netamente asociadas a la capacidad de resolver un ejercicio con exactitud. El reconocimiento de los recursos semióticos movilizados provee información necesaria y suficiente para generar dictámenes frente a los aprendizajes de los escolares, convirtiéndose así en una herramienta que permite ampliar la mirada de los signos y de esta manera ofrecer argumentos que posibilitarían reformas necesarias a la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes en el área de matemáticas.

Referencias

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267-299.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (121–176). Albany, NY: State University of New York Press.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. (Tesis doctoral). Universidad autónoma de Barcelona. España.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and normingn. En: Harel, G & Confrey, J (eds). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State university of New York press. New York.

Fischbein, E; Deri, M; Nello, M y Marino (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. En: *Journal for research in mathematics education*.16 (1). 3-17.

García, G. & Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Gaía. Bogotá

Godino, J & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: *Recherches en didactique des mathematiques*. 14 (3).

Greer, B. (1992) "La división y la multiplicación como modelos de situaciones" En: *Documento interno de trabajo. Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.

Grupo MESCUD, (2005). *Pensamiento multiplicativo: Una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula*. Informe de investigación. Colciencias.

Kress, G. & van Leeuwen, T. (2001). *Multimodal discourse. the modes and media of contemporary communication*. Londres: Arnold.

Lemke, J. (1990). *Talking science. language, learning and values*. Nueva Jersey: Ablex.

Manghi, d. (2009). C*outilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. multimodalidad e intersemiosis en el discurso pedagógico de matemática en 1año de enseñanza media*. Tesis doctoral. Valparaíso: PontificiaUniversidad Católica de Valparaíso. Chile.

McNeill, d. (Ed.) (2000). L*anguage and gesture: window into thought and action*. Cambridge:Cambridge University Press.

Mojica, J. (2013). *Procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*. Anteproyecto de trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Distrital Francisco José de caldas. Bogotá, Colombia.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático. 103-129.

Radford, L. (2008). Semiótica cultural y cognición. In R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*. (pp. 669-689). México: Diaz de Santos

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez y R. Rickenmann (Eds.), *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigación*. (pp. 33-49). Girona: Documenta Universitaria

Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44

Steffe, L.(1994) Children´s multiplying schemes. Cap. 1. In: Harel, G & Confrey, J (eds). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State university of New York press. New York.

Tamayo, O. (2001). *Evolución conceptual desde una perspectiva multimodal. Aplicación al concepto de respiración*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Vergel, R. (2003). *Perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación*. En Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia. (493- 505).

Vergel, R. (2012). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años*). Proyecto doctoral. Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why?. En: Harel, G & Confrey, J (eds). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State university of New York press. New York.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Multiplicação nos Números Naturais para alunos com Necessidades Educativas Especiais

Tania Elisa **Seibert**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
taniaseibert@hotmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte da pesquisa *Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Novas Tecnologias*, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil, e do Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna (ULL), Espanha, com o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). Apresentamos o *design* do cenário de investigação da Multiplicação nos Números Naturais, aplicado em sujeitos com Necessidades Educativas Especiais (NEE). A pesquisa teve como ações: analisar o SIENA, criar a sequência didática da multiplicação, investigar o processo de aprendizagem dos sujeitos investigados. Foi desenvolvida com reuniões semanais entre os pesquisadores e sessões semanais de estudo com os sujeitos com NEE. Os resultados apontam que o SIENA é adequado para suportar sequências didáticas, interesse positivo dos sujeitos frente aos recursos e que houve evolução nos conceitos matemáticos estudados.

Palavras-chave: tecnologias da informação e comunicação, necessidades educativas especiais, multiplicação, números naturais, sequências didáticas.

Comunicação Científica

Introdução

Este trabalho é um recorte da pesquisa *Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Novas Tecnologias*, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em Canoas, Brasil, em convênio com o Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha. O referido convênio de colaboração científica apresenta como um dos resultados o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), que é um sistema inteligente para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer.

Nesse trabalho apresentamos o *design* do cenário de investigação, na plataforma SIENA, com o tema Multiplicação nos Números Naturais, para o 3º e 4º anos do Ensino Fundamental, visando desenvolver atividades para alunos que apresentam Necessidades Educativas Especiais (NEE).

SIENA – Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem

Segundo Grossi (2008 apud Groenwald, Zoch & Homa, 2009) os educadores têm como desafio, descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados, além disso, o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se em um contexto educacional definido. Para este autor, o professor além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando e demonstrar sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (Groenwald e Moreno, 2006).

Kampff, Machado & Cavedini (2008), afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta perspectiva, o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) organizado pelo grupo de Tecnologias Educativas da ULL juntamente com o GECEM, da ULBRA, é um sistema inteligente que conforme Groenwald e Moreno (2006) é capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos.

Ainda segundo Groenwald e Moreno (2006), este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos podendo proporcionar uma aprendizagem significativa. O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação.

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais, sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O PCIG deve ser desenvolvido segundo relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos. A figura 1 apresenta o esquema do sistema informático SIENA.

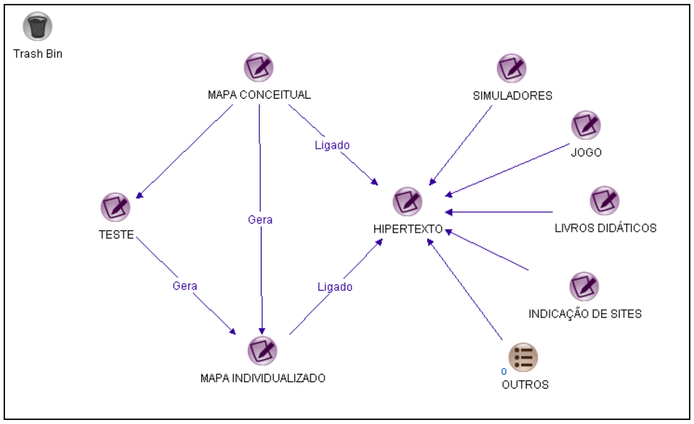


Figura 1. Esquema do Sistema Informático SIENA.

Este sistema é composto pelo SCOMAX e SCOMIN. O SCOMAX (*Student Concept Map Explore*), cujo significado é a exploração do mapa conceitual de um aluno, possibilita ao professor importar um PCIG, utilizando o *software Compendium*, de um conteúdo qualquer, criar um banco de questões e ligá-lo a um teste adaptativo gerando uma série de perguntas seguindo a estrutura hierárquica descrita no PCIG. Das respostas obtidas de cada estudante se obtém um mapa conceitual personalizado que descreve o que cada aluno conhece *a priori* do conteúdo do PCIG, o que gera o mapa individualizado das dificuldades do aluno.

Para cada conceito do PCIG, devem ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões do teste adaptativo, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade (fácil, médio ou difícil); a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito; o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. As definições desses parâmetros são fundamentais para que seja possível, através do teste adaptativo, estimar o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante ao teste. Quer dizer, se o aluno vai contestando corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte. O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre ao grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas. Por essa razão cada nodo do PCIG deve ter um número suficiente de perguntas, de diferentes níveis de dificuldade.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no PCIG, e começa a avaliar os conceitos, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do PCIG, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do PCIG.

O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula $\frac{D \times P}{D \times P + (1-P) \times L}$, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior.

O sistema mostrará para cada conceito, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa realizada por ele sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo apresentado na figura 2.


Inicio Ayuda Perfil Usuario Cerrar Sesión Lista de asignaturas
Lista de competencias

Acabado: true

Nota: 0.281

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.200
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.238
4	false	231	Se agruparmos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no ábaco?	0.281

Atrás

Figura 2. Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo do PCIG do tema Multiplicação.

Ligado a esse sistema está o SCOMIN (*Student Concept Map Introspection*), cuja expressão significa refletindo o mapa conceitual de um estudante, que propicia a recuperação individualizada de conteúdos, de acordo com as informações geradas pelo SCOMAX. O sistema SIENA possui duas opções de uso. Segundo Groenwald & Moreno (2006) a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para informar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos. A segunda opção oportuniza ao aluno realizar o teste e estudar os nodos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar no PCIG. Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

Multiplicação nos Números Naturais

Neste trabalho foi desenvolvida uma sequência didática sobre o conceito da multiplicação nos Números Naturais, fundamentada nos aportes teóricos de Vergnaud (1991).

Segundo Vergnaud (1991) o que é verdade para adição e subtração, isto é, que as operações sobre as representações escritas dos números são diferentes das operações sobre os números, mas, sem dúvida, se apoiam nelas, servem também para a multiplicação e divisão. O autor afirma que partir de um material concreto para ensinar a multiplicação significa introduzir esse conceito como adição sucessiva de uma mesma quantidade e, por consequência, fazer do multiplicando uma medida e do multiplicador um simples operador sem dimensão física, conforme exemplo da figura 3.

3 flores		
3 flores	4x	4
+ 3 flores		x3
3 flores		
12 flores		
3 representa uma medida		
4 representa um número sem dimensão.		

Figura 3. Exemplo de multiplicação.

Vergnaud (1991) salienta que no início dos processos multiplicativos, se podem utilizar no multiplicando números de vários algarismos, mas que no multiplicador convém utilizar somente operadores simples de um algarismo. Lembra que a comutatividade da multiplicação no plano numérico permite inverter o papel do multiplicador e do multiplicando; porém requer uma certa precaução pedagógica para que as crianças aceitem a comutatividade, pois terão que fazer a abstração do que representam os números.

Por outra parte, a distributividade da multiplicação em relação à adição, é necessária a partir do momento que se introduz a multiplicação por um número de dois algarismos, conforme exemplo da figura 4.

43	
x 12	(12 = 10 + 2)
86	(43 x 2)
+ 430	(43 x 10)
516	

Figura 4. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Algebricamente temos: $43\times(10+2) = (43\times10) + (43\times2)$. Essa propriedade deve ser necessariamente explicada para as crianças se queremos que compreendam a regra operativa da multiplicação. Para Vergnaud (1991) essa regra não está fora da capacidade das crianças (entre 8 e 9 anos). A principal dificuldade não reside na propriedade distributiva, mas, no fato de que é o multiplicador que está decomposto aditivamente e não o multiplicando (12 vezes = 10 + 2 vezes).

Resumindo, são numerosas as precauções didáticas que devemos ter ao planejar o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação com Números Naturais. Para Vergnaud (1991) o esquema do isomorfismo de medida, utilizado na presença de quantidade em particular, com o material multibase, é o meio mais eficaz para simular, utilizando material concreto, as regras operatórias da multiplicação e da divisão. Apresentamos o exemplo: 102×13 na figura 5, utilizando o material multibase ou material dourado.

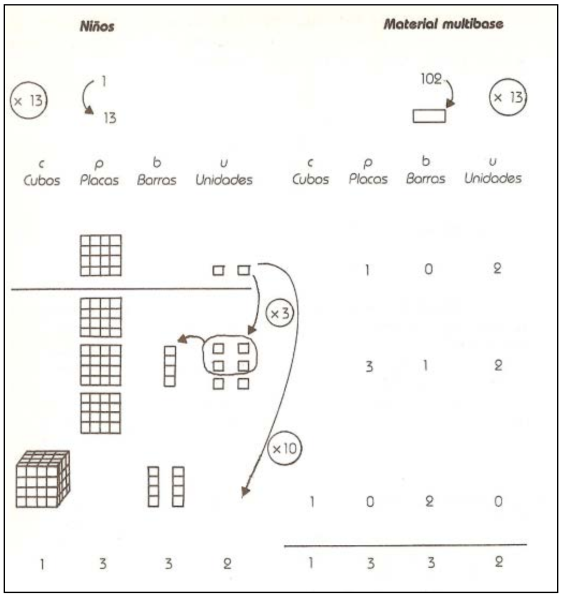


Figura 5. Exemplo do algoritmo da multiplicação de 102 por 13 (Vergnaud, 1991).

As multiplicações mais simples são aquelas cujo multiplicando somente tem um algarismo e não implicam em "vai um". Porém, esses problemas de "juntar" aparecem desde o princípio da aprendizagem da multiplicação. Se as crianças possuem dificuldades com o "vai um" na adição isso se amplia na multiplicação.

A segunda grande dificuldade é a multiplicação nas diferentes bases (por 10 na base 10, por 3 na base 3, etc.). O material multibase é muito útil, porque permite evidenciar o fato fundamental de que a multiplicação pela base equivale a trocar a ordem de tamanho, um passo para esquerda: as unidades se convertem em barras, as barras em placas, as placas em cubos, os cubos em barras de cubos, etc.

A terceira dificuldade é a decomposição aditiva do multiplicador e a distributividade da multiplicação em relação à adição. Essa dificuldade é a mais complexa segundo Vergnaud (1991), porém, está dentro da faixa de compreensão de crianças de 8 anos. A decomposição aditiva do multiplicador é mais fácil para as crianças compreenderem, quanto não interfere com decomposição $\times$. Por exemplo: $n\times 116 = (n\times100) + (n\times10) + (n\times6)$.

Porém a multiplicação por um número de vários algarismos, que ao menos uma, a esquerda do algarismo das unidades difere de 1, implica uma decomposição dupla aditiva, por exemplo: $36 = (3\times10) + 6$ decomposição aditiva e $36 = (3\times10) + 6$ decomposição multiplicativa. A multiplicação por 30 se realiza em 2 multiplicações sucessivas; por 10 e por 3. A multiplicação por 10 se expressa com um zero na coluna das unidades (por um espaço para esquerda), e a multiplicação por 3 pela aplicação do algorítmico.

Outro recurso didático apontado por Vergnaud (1991) é o quadro valor lugar, que é um quadro que permite que as crianças se organizem e que deve ser utilizado por um tempo significativo. Assim mesmo a colocação do zero ou dos zeros necessários é uma garantia mais concreta e maior que a regra do "deixar a casa em branco". Os zeros intercalados no multiplicando são uma fonte menor de dificuldades.

Assim, a sequência didática, desenvolvida nesse trabalho, utilizou os recursos didáticos do material dourado, e do quadro valor lugar. Também, foi desenvolvido o conceito de multiplicação fundamentado em Vergnaud (1991) dando ênfase nas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. Toda a sequência foi aplicada de acordo com a metodologia resolução de problemas, atividades lúdicas (jogos online e software JCLIC).

Tema da Investigação

O tema desta investigação é Tecnologias da Informação e Comunicação e Necessidades Educativas Especiais em Matemática. Nesse trabalho foi desenvolvido o conceito de multiplicação para o 3º e 4º anos do Ensino Fundamental, visando atender alunos com Necessidades Educativas Especiais em Matemática utilizando o recurso informático SIENA.

Objetivos

O objetivo geral da pesquisa foi implementar (desenvolver/aplicar e avaliar) o cenário de investigação, na plataforma SIENA, do tema inclusão cognitiva em Matemática, com o conteúdo de Multiplicação com Números Naturais, para alunos do 3º e 4º anos do Ensino Fundamental.

Os objetivos específicos foram: estudar a plataforma SIENA e o seu funcionamento; investigar as metodologias de ensino adequadas ao conteúdo de multiplicação com Números Naturais; desenvolver o PCIG, no *software* Compendium, com a multiplicação com Números Naturais; implementar os testes adaptativos para cada nodo do grafo; organizar os conteúdos de recuperação, através de sequências didáticas, de cada nodo na plataforma SIENA.

Metodologia da Investigação

Esta investigação foi desenvolvida com reuniões semanais de estudo e discussão com todo o grupo de pesquisa, com estudos regulares sobre o tema e a plataforma SIENA, bem como, a organização do material a ser disponibilizado neste sistema.

O grafo foi composto por 16 nodos onde estão incluídos os conceitos de número, estatística, espaço e tempo, sistema de numeração decimal, tabuada, algoritmo da multiplicação e problemas envolvendo todos os conceitos. Foram desenvolvidas 30 questões para cada nodo do grafo, sendo 10 fáceis, 10 médias e 10 difíceis.

Para cada nodo foi desenvolvido uma sequência didática utilizando os referenciais de Vergnaud, a metodologia resolução de problemas, a história dos números e das operações. Os recursos informáticos utilizados foram: *Power point* salvo em html; jogos e atividades lúdicas; jogos *online*; história em quadrinhos; ábaco; material dourado e quadro valor lugar.

Foi desenvolvida uma experiência com um aluno com NEE, na ULBRA, com reuniões semanais, de 2 horas, de março a dezembro de 2010. O aluno desenvolveu o PCIG do SIENA com o tema multiplicação nos Números Naturais.

Sequência didática com Multiplicação nos Números Naturais

As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (Dolz & Schneuwly, 2004). Segundo Zabala (1998) as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.

A sequências didática da multiplicação, implementada nessa investigação, seguiu o PCIG, desenvolvido para o SIENA, que está representada no grafo da figura 6.

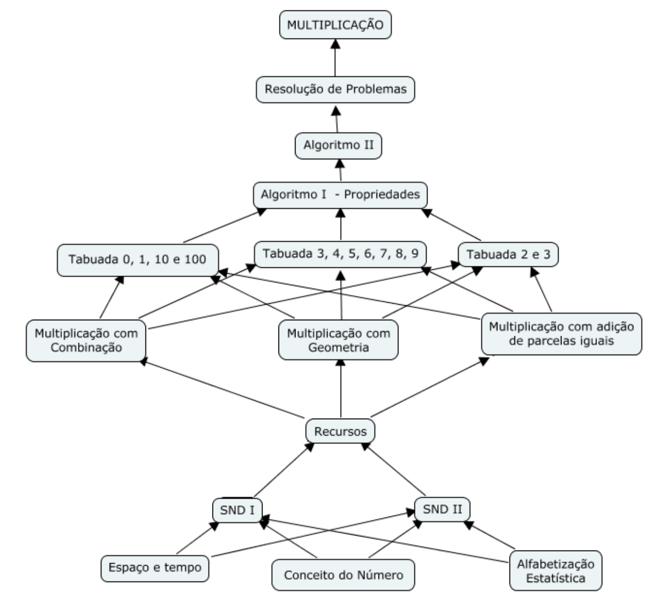


Figura 6. Grafo da sequência didática da multiplicação

A tela de entrada para os alunos é composta por diferentes portas, nas quais estes devem entrar na ordem proposta (figura 7).

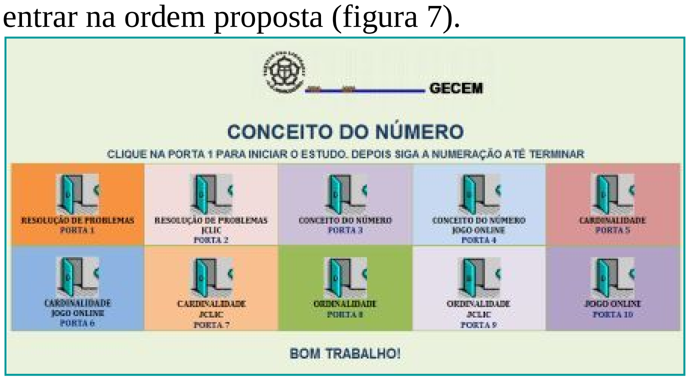


Figura 7. Tela principal do nodo de Conceito do Número.

Nas sequências didáticas foram utilizados os seguintes recursos informáticos:

a) *Power point* salvo em HTML, conforme exemplo da figura 8.

Figura 8. Exemplo de material de estudo

b) Atividades lúdicas, desenvolvidas no *software* JClic, conforme exemplo da figura 9.

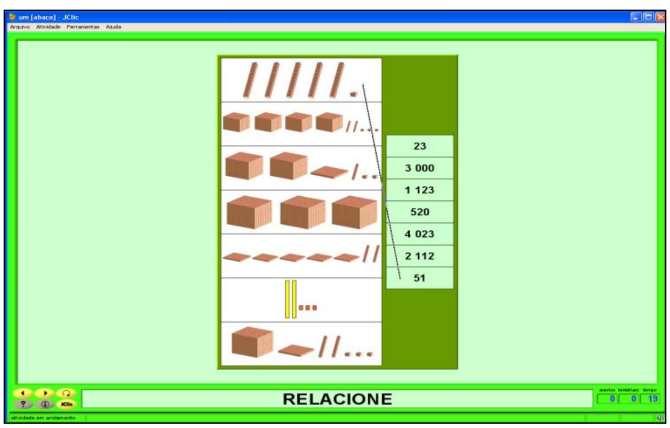


Figura 9. Exemplo de atividade no JClic.

c) Jogos *online*, conforme exemplo da figura 10.

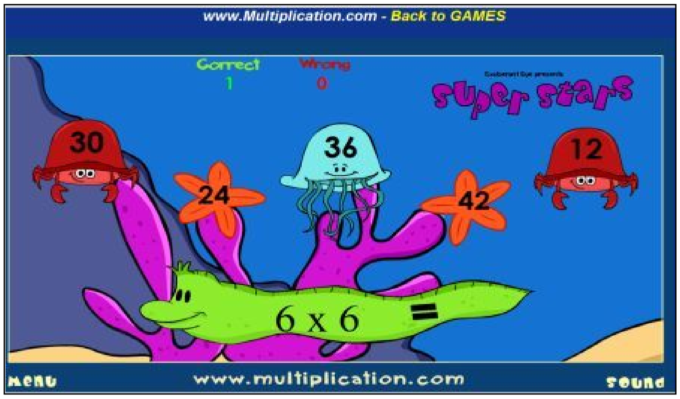


Figura 10. Exemplo de jogo online.

d) Outros recursos didáticos utilizados: história em quadrinhos (figura 11), ábaco (figura 12), material dourado e quadro valor lugar (figura 13).

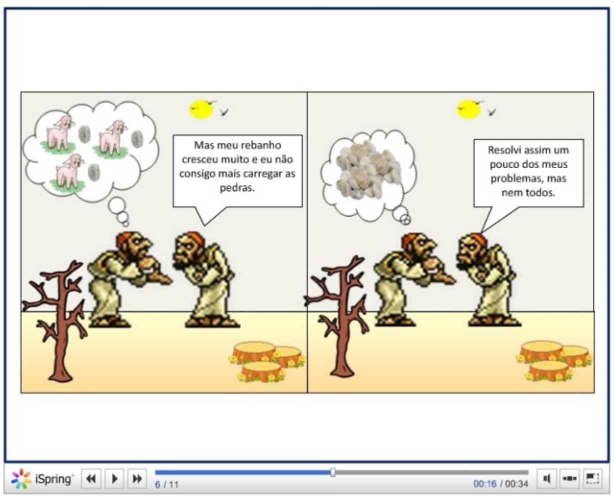


Figura 11. História em quadrinhos.

Figura 12. Ábaco.

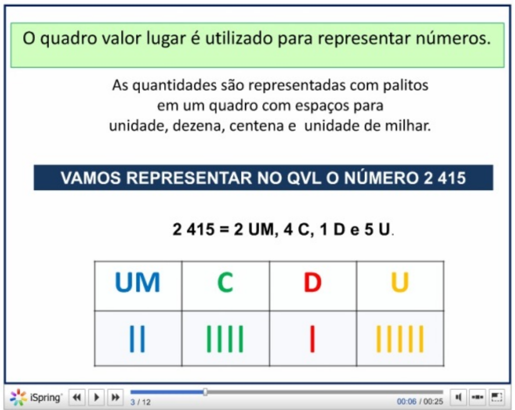


Figura 13: Quadro valor lugar.

Todo o trabalho com o tema proposto está implementado na plataforma SIENA, no servidor da Matemática, na ULBRA, onde foram validadas as funcionalidades de avaliação e apresentação dos conteúdos de recuperação.

Experiência com aluno com NEE

O grupo de pesquisas GECEM formou, no ano de 2010, um centro de inclusão para sujeitos com NEE, com foco na cognição Matemática. Adotamos como definição de NEE a definição de Coll (2004): o aluno que apresenta algum problema de aprendizagem ao longo de sua escolarização, que exige uma atenção mais específica e maiores recursos educacionais do que os necessários para os colegas de sua idade é um aluno com necessidades educativas especiais.

O grupo de inclusão atualmente atende três sujeitos com NEE. Neste artigo vamos destacar as características de um dos sujeitos, denominado por R. R, em 2010, tinha 19 anos, tem uma grave lesão cerebral no hemisfério direito, ocasionado por falta de oxigenação no parto. Fisicamente tem dificuldades para caminhar e não possui mobilidade no braço direito. Cognitivamente não demonstra dificuldades na escrita e na leitura, tanto da Língua Portuguesa, quanto da Língua Espanhola. Porém, em Matemática, seu conhecimento é básico, comparável ao conhecimento de crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental, embora tenha concluído o Ensino Médio em uma escola que não tem estrutura de Escola Inclusiva.

R participou de todas as sessões demonstrando interesse e motivação. Completou o estudo da sequência da multiplicação utilizando o SIENA, porém, em todos os nodos necessitou estudar, pois não atingiu os índices mínimos dos testes realizados. A maior dificuldade de R é a interpretação dos problemas e o conceito das operações, pois conhece os algoritmos, mas não consegue aplicá-los na resolução de uma atividade ou um problema. Tem poucos fatos numéricos, necessita de apoio de material concreto ou dos dedos da mão para realizar adições e subtrações, como por exemplo, 5 + 2 ou 5 – 2.

As dificuldades em relação à Matemática tem prejudicado a vida social de R, pois como esse não compreende o sistema monetário brasileiro, evita utilizá-lo. Deixa de ir, por exemplo, ao cinema, pois se sente inseguro sobre que “nota” deve utilizar para pagar ou se receberá troco. Evita essas situações, pois abalam a sua autoestima.

O estudante R, em todas as sessões, estava acompanhado de um professor, com o objetivo de mediar a construção do seu conhecimento matemático, pois o objetivo do experimento não foi de quantificar resultados, mas sim analisar qualitativamente as suas ações, buscando compreender a sua forma de pensar e preparando atividades que o desafiassem, almejando a melhora da compreensão em relação aos conceitos trabalhados.

Conclusão

É possível destacar que o SIENA funcionou adequadamente e foi possível desenvolver a experiência com R, sem maiores dificuldades. Logo, a implantação do SIENA, no servidor da ULBRA está validado e em condições de realizar novos experimentos. O PCIG desenvolvido, com o tema multiplicação nos Números Naturais, teve suas funcionalidades de acordo com o previsto: apresentou os testes de acordo com a sequência dos nodos e quando o aluno não apresentava o desempenho esperado era apresentado a sequência didática para a recuperação dos conceitos.

O aluno R desenvolveu as recuperações de todos os nodos do PCIG, pois apresentou dificuldades em todos os conceitos e, após o estudo de recuperação, realizou novamente os testes. É possível afirmar que R apresentou uma melhora significativa no seu desempenho, em função de suas dificuldades em Matemática, pois após os estudos realizados no SIENA apresentou melhores resultados nos testes. Também, a recuperação dos conceitos lhe permitiu desenvolver muitas atividades que possibilitaram que revisasse e se rume, futuramente, a um aumento de compreensão nos conceitos básicos de Matemática. Consideramos que R deva realizar muitas atividades didáticas que objetivem sua autonomia social, ou seja, o uso dos conceitos básicos de Matemática (as quatro operações, uso de dinheiro, leitura e interpretação de atividades matemáticas básicas, resolução de problemas simples do cotidiano).

Referências Bibliográficas

Coll, C. (2004). *Desenvolvimento psicológico e educação: transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais*. v. 3. Porto Alegre: Artmed, 2004.

Dolz, J. & Schneuwly B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola***.** Campinas/SP: Mercado das Letras.

Groenwald C. L. O. & Moreno L. R. (2006). Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. *Acta Scientiae*, Canoas, v.8, n.2, jul./dez. 2006.

Groenwald, C. L. O., Zoch, L. N. & Homa, A. I. R. (2009). Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. *Bolema.* Rio Claro, ano22, n.34, p.27-56, 2009.

Kampff, A. J. C., Machado, J. C. & Cavedini, P. (2008). *Novas Tecnologias e Educação Matemática*. In: X Workshop de Informática na escola e XXIII Congresso da Sociedade brasileira de computação, Bahia. Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf> Acesso em: 10 jun. 2008.

Vergnaud, G. (1991). *El nino, las matemáticas y la realidad: problemas de enseñanza de lãs matemáticas em la esculela primaria.* México: Trillas.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Noción de límite basada en la tipología de Brousseau

Francisco G. **Herrera** Armendia
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
harmendia@gmail.com
Enrique **Salazar** Peña
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
esalazarx@live.com.mx
Marleny **Hernández** Escobar
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
marlenylesly@hotmail.com
Raciel **Trejo** Reséndiz.
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
ratrere@hotmail.com

Resumen

Las tendencias educativas buscan el desarrollo de competencias en los futuros docentes para integrarlos a un campo laboral cada vez más especializado. En el espacio curricular denominado Opcional II del programa de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México, se abordan temas relacionados con el concepto de límite, a partir de casos particulares. En esta investigación se aborda el límite de una función expresada como fracción común con radicales en el numerador y denominador, para analizar las propuestas hechas por estudiantes del sexto semestre de la carrera, recategorizando en cuatro aspectos para conocer las dificultades que tuvieron, así como las estrategias de solución que utilizaron ya que en algunos casos sólo recordaban de forma superficial los teoremas relacionados con el concepto de límite, con base en la información obtenida se propondrá una secuencia basada en la tipología didáctica de Guy Brousseau.

Palabras clave: futuros docentes, límite, tipología didáctica de Guy Brousseau.

Antecedentes: Introducción a la problemática

El sustento normativo del programa de la LESM propone el desarrollo de habilidades específicas en el docente en formación. Para ello clasifica en cinco grandes rubros las competencias que, de acuerdo con este Plan y programas, el docente debe formarse durante su estancia en la Escuela Normal Superior, englobados como rasgos del perfil de egreso. Ellos son: a) Habilidades intelectuales específicas. b) Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria. c) Competencias Didácticas. d) Identidad Profesional y Ética. e) Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela.

Es precisamente el segundo conjunto de rasgos que obliga al estudio de contenidos temáticos por parte del docente en formación ya que se establece que el futuro docente: "Tiene dominio del campo disciplinario de su especialidad para manejar con seguridad y fluidez los temas incluidos en los programas de estudio,…." (Plan y Programas de estudio, 1999). Derivado de ello, la asignatura que completa esta formación disciplinaria se denomina Opcional II. Temas de Cálculo diferencial e Integral, que se cursa durante el sexto semestre del programa.

Los antecedente curriculares lo forman el estudio de las asignaturas: Pensamiento algebraico, en tercer semestre; Procesos de cambio o variación y Plano cartesiano y funciones, en cuarto semestre y Opcional I, temas de Álgebra Superior, en quinto semestre. Mucho se ha discutido la necesidad de abordar el estudio del Cálculo en nuestros estudiantes en reuniones de academia y desde que dio inicio la aplicación de este Programa en 1999, se decidió por la inclusión en el espacio correspondiente ya mencionado, de estos temas, pues es evidente que su tratamiento logra mejorar los conocimientos en álgebra, geometría analítica y trigonometría entre otros, en nuestros estudiantes, independientemente del hecho de que no abordarán temas de cálculo con los estudiantes de secundaria a su cargo, pero como se observó, en un apartado del conjunto de rasgos del perfil de egreso, se convierte en requisito el dominio de contenidos matemáticos.

El problema abordado tiene los propósitos establecidos por Espinosa (2009), que son: a) calcular, si existe, el límite de una función mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos; b) bosquejar la gráfica de una función considerando su comportamiento asintótico; c) determinar el límite de una función de ciertos puntos a partir; todos ellos guiados didácticamente por la tipología propuesta por Brousseau (1997).

Después de la revisión de literatura, encontramos que existen diversas investigaciones con relación a la noción de límite en educación matemática, los trabajos de Blázquez y Ortega (1997, 1999, 2000, 2001a, 2001b y 2002) establecen una nueva conceptualización de límite funcional (definición que surge en el proceso de formación del concepto) basada en la idea de aproximación óptima, que no requiere del formalismo.

Otros estudios son los de (Tall y Vinner, 1981; Cornu, 1983; Robinet, 1983; Sierpinska, 1985 y 1987; Sánchez, 1997; entre otros) estos tratan de esclarecer cuál es la conceptualización más sencilla y, en consecuencia, la que puede ser más adecuada para que se utilice en los currículos de educación secundaria y en el primer curso de las carreras de ingeniería o similares.

La evolución de la noción de límite y las variaciones que ha tenido en el desarrollo de la matemática, pone de manifiesto lo difícil que ha resultado su conceptualización. Ahora bien, todas estas conceptualizaciones surgen desde la propia matemática, no desde la didáctica. Van orientadas hacia el rigor matemático y su formalismo sintáctico ha incrementado con el avance de la matemática; sin embargo, no tienen en cuenta los aprendizajes de los alumnos.

Dentro de los antecedentes se cuenta con la propuesta de Flores (2004) que sugiere emplear paradojas para provocar conflictos cognitivos en profesores de matemáticas en formación, quienes deben compartir una visión epistemológica constructivista de la matemática, y para lo cual se debe romper con la visión unidimensional de la misma, a partir del paradigma de la reflexión en la acción.

Una investigación fue la realizada por Movshovitz y Hadass (1990), quienes consideran que para la formación de los profesores-estudiantes se deben integrar contenidos de matemáticas, psicología y pedagogía, para ello plantearon una paradoja relacionada con la demostración de la irracionalidad del número 2, observando que la actitud predominante fue de desesperación y angustia por detectar o no el error. Otra investigación es la de Ramírez (2004) que da a conocer las distintas reacciones que provocaron algunas paradojas planteadas a profesores de matemáticas, sobresaliendo su reacción reflexiva en la que expresaron su deseo de mayor análisis para la resolución, creyendo que estaban mal planteadas o que había algún error en ellas.

La investigación que combina el concepto de límite y paradoja es la de Sacristán (2003), en la que se trabajó procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar diversos contextos y construir diversas representaciones externas del concepto e interactuar con ellas. Particularmente, exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante figuras geométricas recursivas, específicamente, la Curva de Koch que condujo a los estudiantes a una paradoja: El perímetro infinito está formado por segmentos de longitud cero.

Otra investigación es la de Hitt (2003) que muestra los obstáculos de aprendizaje del límite y continuidad de funciones, que en el caso del primero, menciona que los obstáculos están precisamente en la palabra "límite" y "tiende hacia", destacando que "el límite de la función no es alcanzado".

En este contexto, surge nuestro interés de analizar en el espacio curricular denominado Opcional II, el cual aborda temas del Cálculo Diferencial e Integral, incluido el concepto de límite a partir del análisis de casos particulares; el límite de una función expresada como fracción común que contiene radicales en el numerador y denominador, como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}$$

Ahora bien, ya que en las actuales tendencias educativas se busca el desarrollo de competencias en los futuros docentes para integrarlos a un campo laboral cada vez más especializado, dos de los cinco rasgos del perfil de egreso del plan de estudios de la Licenciatura en educación Secundaria con especialidad en Matemáticas, están estrechamente vinculados con la apropiación de saberes matemáticos y su aplicación didáctica, los cuales son habilidades intelectuales específicas y dominio de propósitos y contenidos.

Así, damos a conocer los resultados del análisis de las propuestas de análisis e interpretación de dicho límite, hechas por los estudiantes del sexto semestre de la licenciatura, a parir de cuatro categorías: a) interpretación de la expresión con base en los teoremas correspondientes a límites; b) condiciones necesarias y suficientes del rango y ámbito de la expresión; c) aplicación de los axiomas de campo del conjunto de los números reales para encontrar la solución; d) interpretación y solución de radicales. Con base en esta categorización damos a conocer las dificultades que tuvieron los estudiantes así como las estrategias de solución que propusieron.

A partir de las conclusiones proponemos una secuencia didáctica basada en la tipología didáctica de Guy Brousseau para ser desarrollada con estudiantes que cursen próximamente el sexto semestre y observar los resultados posteriores al trabajo áulico, para así comentar las posibles bondades de la mencionada tipología.

Marco conceptual

De acuerdo con la revisión de la literatura, referente a los diversos conceptos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral y particularmente en el estudio del concepto de límite, a partir del análisis de casos particulares, a continuación son bosquejados aquellos conceptos que desde hace tiempo se han considerado en los procesos de aprendizaje.

La idea de 'límite" ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero por su carácter estructural que lo constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la estructura del Cálculo diferencial e integral, pero también por su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas y finalmente, como objeto matemático que se gesta en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos.

La evolución histórica de la noción de límite no se desarrolla en forma independiente y autónoma sino que hace parte de una red o entramado que se obtiene por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones vecinas del cálculo; variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo numérico.

De acuerdo con la revisión de la literatura, desde hace tiempo ha existido interés de los investigadores en el estudio sobre las concepciones del límite. De las aportaciones relacionadas con el concepto de límite, sobresalen los descubrimientos de Newton (1712) sobre series infinitas, fluxiones y diferencias, así como los trabajos de Leibniz sobre el cálculo diferencial y series infinitas.

Boyer (1999, pp. 500–501), en la sección 1 del libro I que conforma el tratado Philosophiae naturalis principia matematica, señala que Newton, al intentar definir el límite de una función, postula dos lemas, el Lema 1 concerniente a las cantidades y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales y el Lema VII sobre la razón última del arco, cuerda y tangente, cualquiera de ellos respecto de cualquier otro, es la razón de igualdad.

Jaques Bernoulli (1654–1705) y Jean Bernoulli (1667–1748) continúan la obra de Leibniz; Jean descubre la regla de L'Hospital y la serie de Taylor.

Leonhard Euler (1707–1883) integra el cálculo diferencial de Leibniz y la teoría de las fluxiones, dando lugar al "análisis" como área de la matemática que estudia los procesos infinitos.

Sin duda, el desarrollo del nuevo cálculo propició que D'Alembert (1717–1783), oponiéndose a Leibniz y Euler, pensara que la notación de las diferenciales tenía que ser sustentada por algo con mayor fundamento que el desvanecimiento de cantidades. D'Alembert interpreta las razones primeras y últimas de Newton como límites; según Boyer (1999, p. 567), postula que una cantidad es el límite de otra cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella).

Hay que esperar hasta el Cours d'analyse de l'École Polytechnique, de Augustine Louis Cauchy (1821) para que surja una nueva definición que, si bien es totalmente subjetiva, supone un avance respecto a la dada por D'Alembert, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.

La búsqueda de resultados para problemas físicos y astronómicos concretos, utilizando métodos infinitesimales dentro de ellos se encuentran las aportaciones de Kepler, Fermat, Cavalieri, Barrow, Newton y Leibniz, (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez et al. 2006). Los matemáticos que trabajaron con métodos infinitesimales en el siglo XVII lo hicieron en un ambiente geométrico - dinámico; el móvil era el estudio del movimiento a través de prácticas relacionadas con la predicción, que motivaba la profundización en el estudio del Cálculo. El límite se presenta, nuevamente de manera implícita, vinculado a los problemas de cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Los matemáticos de la época desarrollaron sus teorías en un ambiente más intuitivo, el afán por conseguir resultados dominaba sobre la búsqueda de argumentos y fundamentaciones sólidas (Kline, 1994).

D'Alembert se fundamentó en los trabajos de Newton considerando su método de razones primeras y últimas como un método para encontrar el límite de esas razones. Su consideración explícita del concepto de límite lo condujo a ser uno de los primeros matemáticos en expresar una definición del mismo: se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea no asignable. (Citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 75).

Collel (1994) plantea, haciendo referencia al concepto de límite… "base de cualquier concepto del Cálculo Diferencial e Integral, (…) se le presenta en un contexto puramente lógico, y, por lo tanto, abstracto.(...) constituye para las personas que lo reciben, algo así como un "jeroglífico" que deben descifrar, sin comprender su verdadero significado".

Aunque con algunas diferencias, como la consideración de las "cantidades" como monótonas y de la imposibilidad de que el límite sea alcanzado, esta definición se aproxima a la aceptada actualmente. Sin embargo, no fue suficientemente reconocida en su época por estar enunciada en lenguaje coloquial y no disponer de suficientes herramientas algebraicas: esta etapa se caracteriza precisamente por una fuerte concepción algebraica.

Bagni (2005) sostiene que las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y tenían en común el considerar al límite como una aproximación que no se alcanza, más como un proceso que como un objeto en sí mismo. Estas concepciones comparten además el ser expresadas principalmente en forma verbal, incluida la concepción de Cauchy.

Es interesante destacar cómo en la obra de Cauchy sí existen indicios de considerar al límite como un objeto y no sólo como un proceso en las definiciones de número irracional y de superficie de círculo: "... un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus... " Cauchy (1821, p. 4).

Cauchy establece además criterios de convergencia para límites indeterminados, en cuyas demostraciones se puede apreciar la precisión y claridad de su idea de límite. En su definición de función continua, Cauchy identifica el aspecto esencial de la continuidad, a la vez que formula una definición de continuidad mediante sucesiones, muy útil en la demostración de teoremas. Sin embargo, la definición resulta confusa por hablar de continuidad en un intervalo y puntual a la vez. Esta definición ambigua puede ser el punto de partida de una concepción errónea en su teoría: que las propiedades de los términos de una sucesión se transfieren automáticamente a su límite. Esta confusión sólo se subsanará después, con el concepto de continuidad uniforme introducido por Heine en 1870.

Es recién con Weierstrass que se introduce el uso de los registros de representación simbólica ya que realiza un esfuerzo por evitar el uso de la expresión "la variable se aproxima al límite" porque sugería -ambiguas- ideas de tiempo y movimiento. Esto permitió evolucionar entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto). Así, presentó la definición que actualmente se enseña en los cursos de cálculo: Si dado cualquier ε positivo, existe un δ tal que para $0 < n < \delta$, la diferencia $f(x0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para x=x0. Blazquez y ortega (2001, p.77). Por último, se podría considerar una generalización del concepto a nuevos contextos dentro de la matemática, gracias a la reciente consideración de los espacios topológicos como generalización, de los cuales el de la distancia habitual en el conjunto de los números reales es sólo un caso particular. El límite es pues, una concepción topológica ya no tan estrechamente vinculada con una determinada definición de distancia y aplicable a funciones cuyo dominio y codominio ya no tienen por qué ser el de los números reales.

Teoría de las Situaciones Didácticas

A finales de los años 60 surgen en Francia los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Mateámticas (IREM), los cuales se dedicaron en un principio a complementar la formación matemática de los maestros, los programas, y preparando maestros en las escuelas normales. También se dedicaron a producir materiales de apoyo para el trabajo en el aula (textos, fichas, juegos, problemas, juguetes etc.) y con ellos una "experimentación rudimentaria, concebida como prueba de su factibilidad y como antecedente para introducir ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo" (Gálvez, 1985).

Con el paso del tiempo, los IREM desarrollaron actividades no orientadas a la producción de medios, sino a la investigación científica orientada a construir y controlar las acciones de la enseñanza. Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM de Burdeos, propuso estudiar las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, con la finalidad de reproducir y optimizar los procesos de adquisición de los mismos. A partir de este punto surge lo que después se conocería como la Teoría de las Situaciones Didácticas, cuyo principal exponente es Brousseau. La idea de estudiar las condiciones tiene referencias en el constructivismo propuesto por Piaget. Mabel Panizza (2004) menciona (en una cita que hace de Brousseau) que "el alumno aprende adaptándose a un medio" (p.3) porque en él encuentra dificultades, desequilibrios, a los cuales el alumno debe responder. El estudio de las condiciones se debe hacer mediante el diseño de situaciones didácticas que son "un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" (Gálvez, 1985).

Las situaciones didácticas presentan como elemento central al medio, que son situaciones presentadas por el profesor con una intencionalidad: el aprendizaje de un conocimiento determinado. Para ello es necesario diseñar una situación que genere cierto tipo de interacciones y retroacciones.

Las interacciones suceden de dos tipos, entre el alumno y el medio, y entre el alumno y el docente, a las primeras se les denomina adidácticas en las cuales el alumno trabaja, mientras que el profesor monitorea, es donde suceden las situaciones de acción, formulación y validación. A las segundas se les llama didácticas y se refiere a los intercambios entre ambos, y se presenta en las situaciones de institucionalización y en el proceso de devolución.

Las retroacciones en cambio se refieren a los intercambios entre el medio y el alumno, es decir, el alumno tratará de resolver la situación, la cual está diseñada para que no se solucione con estrategias convencionales, por lo que el alumno volverá a intentarlo.

Las interacciones de tipo adidáctica ocurren a través del proceso de devolución, que se refiere a que el alumno adquiera la responsabilidad matemática para resolver la situación planteada. Este proceso se encuentra regulado por el contrato didáctico, es decir, por reglas implícitas y explicitas entre los alumnos y el docente que determinan qué papel juega cada uno, así como los instrumentos que se pueden utilizar para resolver el problema.

Las situaciones didácticas se clasifican en tres tipos según Panizza[1]; acción, son en las que la interacción es entre el alumno y un medio físico o simbólico, es una toma de decisión de los conocimientos que pondrá en juego; formulación, en donde el emisor debe comunicar cierta información al receptor, de tal manera que el lenguaje sea preciso y adecuado para lo que debe comunicar; validación, en la cual el alumno debe establecer la validez de una afirmación, para "convencer" con argumentos a otro sujeto que acepte o rehúse dichas afirmaciones, pudiendo dar afirmaciones opuestas o pidiendo pruebas de ello.

Cada una de las situaciones descritas tiene una situación fundamental, es decir, una situación que derive en otras "a través de la asignación de diversos rangos de variación o valores particulares a las variables que la caracterizan" (Gálvez, 1985). Un rasgo característico es que son evolutivas, como lo es la adquisición de un conocimiento; buscan que el alumno realice una evocación de los conocimientos ya adquiridos para ponerlos en juego, y pueden ser de dos tipos, de acción (que ocurren al día siguiente de realizarla) habiendo una descontextualización del problema, y la evocación de tiempo prolongado (cuando ya ha transcurrido un lapso amplio) que buscan interiorizar un nuevo conocimiento estableciendo relaciones entre lo viejo y lo nuevo.

Por otro lado, la institucionalización, es la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje por parte del maestro, es decir, los alumnos comprenden el objeto con el que se trabajó, mientras que el maestro percibe el aprendizaje de los alumnos.

[1] Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp.220-223) refieren las tres situaciones que describe Panizza, dentro de las situaciones adidácticas. El hecho de que ella las clasifique dentro de las didácticas tiene que ver con el que el profesor utilice las situaciones adidácticas con una intención didáctica, puesto que a pesar de que el medio natural en el que nos desarrollamos no es didáctico, es necesaria la intervención del profesor sobre el alumno-medio, para hacer funcionar las situaciones adidácticas y no caer en el empirismo (Chevallard et. al., 1997, p.217).

Para que el alumno articule la situación adidáctica con la institucionalización2 es necesario que tenga un proyecto de aprendizaje, según Patricia Sadovsky, porque intervendrá y condicionará la producción del aprendizaje sobre el objeto matemático que se esté tratando, al responder los cuestionamientos “¿Qué quieren que aprenda con esto? ¿Qué tiene que ver esto con los problemas que hicimos antes?” (Sadovsky, 2005, p.14).

Una parte importante de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el concepto de obstáculo, el cual se define como “un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades” (Chevallard et. al., 1997, p.224). Se clasifican en ontogénetico, didáctico y epistemológico. El primero se refiere a las limitaciones del sujeto a un momento de su desarrollo; el segundo se refiere a la noción del alumno sobre cierto conocimiento aprendido en el sistema educativo; y el tercero se refiere al rol constitutivo del conocimiento, es decir, de su génesis.

Resultados y conclusiones.

El ciclo de investigación sugiere dos aspectos para su desarrollo (Gravemeijer, 1995), fuertemente vinculados entre sí: a) el desarrollo de la fase, guiado por la teoría de enseñanza específica y b) fase de investigación guiada por una metodología específica. Ambos aspectos, mantienen una relación simbiótica, ya en el salón de clase, esta interacción se vuelve más permeable al existir un intercambio de fases (Simon, 1995) como son: a) la observación de la trayectoria de aprendizaje hipotético y b) la interpretación docente de los sucesos y actividades dentro del salón de clase.

Cobb (1995) menciona que el desarrollo de un proceso hipotético de aprendizaje junto con el desarrollo de las actividades de instrucción mantienen un fuerte y estrecho vínculo uno con el otro, es por ello que en este estudio las evidencias recabadas elaboradas por los estudiantes las relacionamos con los conocimientos implícitos que poseen al haber cursado la educación media superior.

Estos conocimientos son abordados a través de la aplicación de la situación de acción (Brousseau, 1997), al solicitarle a los estudiantes que después de observar la expresión, se trabajara por parejas para explicar las características de la misma en términos de clasificar a la expresión numérica del numerador y del denominador en el conjunto de los números reales R.

Notamos que el grupo observó e indagó el medio simbólico propuesto y en este sentido empezamos a abordar la noción de límite y explorar los antecedentes que justifican esta idea matemática, conceptos como: ε y δ; otra idea es el Teorema que estudia Leithold (1972): Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Las ideas manifestadas por los estudiantes fueron implícitas, en forma de comunicación, mas que de argumentación, sin embargo el propósito de esta fase se cumplió con el grupo, y aunque pudiera suponerse que el papel de la memoria en los estudiantes no fue tan sólido, en realidad comprobamos que es, tal como lo estipula Brousseau (1997), mencionando que la administración de la memoria como producto de esquema de negociación engloba la memoria del sistema didáctico y no solo la memoria de los estudiantes.

---

[2] Panizza describe la institucionalización como establecer la relación entre las producciones de los alumnos y el saber cultural mediante los procesos de recapitulación, sistematización, ordenación y vinculación.

Es necesario mencionar que el programa de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas no posee rasgos de perfil de ingreso, lo que implica trabajar con estudiantes que no necesariamente tienen habilidades ni los conocimientos necesarios y suficientes para abordar estos temas, además de que provienen de escuelas con diferentes programas educativos, y muchos de ellos no incluyen el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, algunas de estas instituciones sólo ofrecen en un último semestre la posibilidad de escoger la asignatura de Estadística y Probabilidad o Cálculo Diferencial e integral.

Con relación a la caracterización, y una vez activada la negociación de la memoria, encontramos que la gran mayoría de los estudiantes recordaban de forma superficial los teoremas relacionados con el concepto de límite, pero no los vincularon adecuadamente con el análisis de la expresión propuesta, muchos de ellos no concluyeron como se esperaba con las condiciones que posee la expresión con relación al rango y al ámbito, pues hubo un gran debate con relación al signo negativo fuera del radical del denominador. Este debate se propuso como una situación de formulación, ésta, como lo establece Brousseau (1997), se puede provocar partiendo de la formalización progresiva (trabajo entre el docente y el grupo) a través del momento oportuno en que los estudiantes van abordando cada noción que el tema incluye; los axiomas de campo de los números Reales han sido un tema cuyo estudio es satisfactorio cuando se aborda como preámbulo al estudiar, por ejemplo, la teoría de números o los temas de álgebra superior, sin embargo los estudiantes tienden a no darle la importancia fundamental para justificar cualquier proceso algebraico como algoritmo en otras ramas de la matemática, como es este caso, descuidando su memorización, su aplicación, y por ende generando la confusión en el proceso de solución; sin embargo trabajar con modelos implícitos es muy efectivo, aunque debe ponerse atención al momento en que se aborda, pues provocar la situación de formulación con nociones muy al principio puede ser muy útil, pero hacerlo casi al final de ella puede ser muy significativa para los estudiantes, cosa que comprobamos al haberla abordado muy al principio de la situación, la mayor dificultad la encontramos con el manejo de radicales, los estudiantes no recordaban cómo operarlos, comentaron utilizar lo que llamaron el binomio conjugado como factor, pero se confundían si lo aplicaban en el numerador o sólo en el denominador, algunos si lo aplicaron en ambos miembros de la fracción común, pero desconocían el axioma que justifica este hecho.

Esto nos permite reflexionar y comprobar que una formalización conceptual dentro de una situación de formulación si se aborda muy pronto y con relación al significado atribuido al lenguaje es notoriamente esencial para las situaciones de acción y de formulación más que si se aborda al último de la fase, y con relación a los conceptos o ideas formuladas por los estudiantes bajo el monitoreo docente, estas ideas no son aisladas unas de otras sino que funcionan conjuntamente hacia el propósito deseado, (Brousseau 1997). Durante la aplicación de la situación de validación se les propuso una pista, que consistió en cuatro respuestas al ejercicio planteado: a) 0; b) -2; c) 2; d) indeterminado, siendo una de ellas la correcta. A pesar de esto, algunos estudiantes lograron validar la respuesta correcta al ejercicio propuesto, y otros tantos no consiguieron visualizar la relación de las pistas con el ejercicio. Lo que si comprobamos es lo apuntado por Brousseau (1997) en relación con el hecho de que los resultados concretos son imprecisos y reflejan en algunas ocasiones interrupciones de aprendizaje en el modelo, además, cuando un grupo de estudiantes siente que tiene una guía (pistas en nuestro caso) éstas les dan la confianza para generar conclusiones y darse cuenta si uno o algunos estudiantes muestran una conclusión falsa, otra parte del grupo tiende a oponerse a esa opinión, formándose entonces una discusión, en la que un grupo debe probar a los demás su opinión sobre la falsedad o no del enunciado.

Queda claro que deben existir reglas (en este caso, los conceptos matemáticos) que le permiten al grupo de estudiantes tomar decisiones acerca de aceptar o rechazar las pruebas producidas por otro grupo de ellos, e inclusive, el solicitar nueva información matemática para continuar con la validación. Para un análisis más eficaz, propusimos algunas respuestas esperadas para el ejercicio además de un listado de consideraciones previas relacionadas con los saberes y conocimientos que poseen los estudiantes, anotadas cuidadosamente en el diario de observación de uno de nosotros, lo que permitió contrastar nuestras suposiciones con las observaciones posteriores y las evidencias provenientes de los estudiantes.

Con base en los resultados proponemos diseñar una secuencia didáctica que nos permita obtener nuevas evidencias y contrastarlas con las anteriores para así observar las bondades de la propuesta hecha por Guy Brousseau, este docente e investigador francés propone la Teoría de las Situaciones Didácticas con el propósito de hacer más eficaz y eficiente el proceso de aprendizaje de los alumnos centrándose en el trabajo realizado por los estudiantes con la correcta intervención del docente, proponiendo la fase didáctica y la fase a-didáctica, en la que se observa el producto que va realizando el estudiantado al ir transformando en saberes matemáticos, los conocimientos implícitos que ya posee. Es aquí donde nos centramos a interrelacionar los diferentes tipos de situación didáctica para que los estudiantes aborden el tema: a) la situación de acción, que consiste en el trabajo hecho por los estudiantes sobre un medio material o simbólico para rescatar los conocimientos implícitos necesarios para abordar el tema, b) la situación de formulación, muy difícil de llevar a cabo, que consiste en guiar y monitorear al grupo de estudiantes para que, entre ellos, generen mensajes a otro grupo de estudiantes que actúan como receptores del mismo, con base en códigos específicos relacionados con el tema; c) la situación de validación, que permite a los estudiantes emitir juicios sobre una propuesta hecha por el docente o algún otro estudiante a través de argumentos que den fe del juicio mismo; d) situación de institucionalización cuyo fin es acordar la definición de conceptos matemáticos, de axiomas, de teoremas, utilizando principalmente la producción de los estudiantes obtenida con el trabajo en la o las situaciones didácticas anteriores y con la intervención del docente quien complementa las definiciones consensadas por el grupo de estudiantes. Es necesario aclarar que la aplicación de la tipología no tiene un orden específico y bien puede utilizarse cualquiera de ellas al inicio de la secuencia didáctica.

Las conclusiones que ofrecemos giran en torno a la reflexión del proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes, guiados y monitoreados desde luego por el docente, sin la aplicación de una metodología específica de la didáctica de las matemáticas y con la aplicación de ella. Hemos tenido gratas experiencias sobre logros de desarrollo de competencias matemáticas cuando se utiliza la Teoría de las Situaciones Didácticas de G. Brousseau tanto con docentes en formación como con estudiantes de educación secundaria cuando las trabajan ellos, así que la hipótesis que tenemos se relaciona con el mejor aprovechamiento de los recursos didácticos, de la experiencia y conocimiento docente y trabajo áulico de los estudiantes, que permite a su vez desarrollar de mejor manera las competencias sugeridas en educación matemática en México: la comunicación, la validación, el manejo de técnicas y la propuesta y resolución de problemas matemáticos, ahora con un contenido específico, como es el concepto de límite. Queda pues este trabajo con el análisis y caracterización de las dificultades observadas en nuestros estudiantes y con ellas, la propuesta de una secuencia didáctica que intenta reducirlas con la hipótesis de que permitirá mejorar la eficiencia y la eficacia del tratamiento del contenido temático, ahora con el trabajo próximo con estudiantes que cursen el sexto semestre del Plan y Programa mencionado.

Referencias

Bagni, G. (2005). Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 5(4), 453-468.

Blázquez, S. (1999). Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid, España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 189-209.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, e)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 515-526.

Boyer, C. B. (1999). Historia de la matemática. Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1980) Teoría de las Situaciones Didácticas

Bucari, N., Bertero, F. y Trípoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo, en: http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/bucari.pdf.

Cauchy, A. (1821). Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnyque (Premier Partie. Analyse Algébrique). Sevilla, España: SAEM Thales (edición facsímil).

Cobb, P. (1995). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. En Kelly, Anthony / Lesh, Richard. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Chap. 12. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Mahwah, N. J.

Collel, A.E. (1994). *Educación Matemática*.Vol. 6. No. 2.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Thèse de 3ème Cycle, Mathématiques, Université I de Grenoble, France.

Chevallard,Y., Bosch, M.& Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: I.C.E.-Horsori

Espinosa, E. J. (2009). Cálculo Diferencial. Editorial Reverté – Universidad Autónoma Metropolitana. Impreso en Hong- Kong.

Flores, P. (2004). Paradojas matemáticas para la formación de profesores (Mathematical paradoxes for teachers education). *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,* SUMA No. 31.P. 27.

Gálvez, G. (1985): La Didáctica de las Matemáticas, en Parra y Saiz (comp.) Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones. Bs. As. Paidós.

Granville, A. (1980). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial LIMUSA. México

Grevemaijer, K. P. E: (1995). Developing realistic mathematics instruction.Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno,* (32), 97- 108.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical thinking and learning*, 8(4), pp. 407 – 431.

Leithold, L. (1972). El Cálculo con Geometría Analítica. HARLA S. A. De C. V. Segunda Edición. México

Manteca, E. (1999) coordinador editorial. Licenciatura en educación Secundaria. Plan y Programas 1999. Documentos Básicos. Secretaría de Educación Pública, México.

Panizza, M. (2004). Conceptos Básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en: Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y Propuestas. Paidos, pp.59-71.

Sadovsky, P. (2005): La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la ensañanza de la matemática, en Reflexiónes teóricas para la educación matemática, Buenos Aires, Libros Del Zorzal.

Sánchez, C. (1997). Estudio estadístico sobre el proceso enseñanza–aprendizaje de la noción de límite de una función. Tesis de doctorado, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada, España.

Sánchez, C. y Contreras, A. (2000) Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX . En Cantoral, R. (ed) El futuro del cálculo infinitesimal (pp 211-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.

Sánchez, O. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *En Enseñanza de las Matemáticas,* V. 16, N0 1. p. 73—84.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, 6 (1), 5–67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18 (4), 371–397.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

O CONTRATO DIDÁTICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Antonio **Sales**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
a.sales@terra.com.br
José **Felice**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
jfelice2@hotmail.com
José Wilson dos **Santos**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
projwilson@hotmail.com
Sonner Arfux de **Figueiredo**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
sarfux@uems.br

Resumo

O presente trabalho é resultado parcial de uma pesquisa em andamento envolvendo professores e acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática numa instituição pública do interior do Estado de Mato Grosso do Sul, Brasil, e tem como objetivo identificar e discutir a articulação entre contrato escolar, contrato pedagógico e contrato didático na Instituição de Ensino Superior (IES). Neste recorte buscamos, através de uma entrevista coletiva em que participaram onze acadêmicos, identificar na perspectiva dos mesmos, as cláusulas predominantes do contrato didático e pedagógico presentes na IES. Para a entrevista foram organizadas seis questões sobre as quais os acadêmicos deveriam discorrer e a entrevista foi gravada em vídeo e posteriormente analisada. Os resultados parciais apontam anseios por um ensino contextualizado e com maior preocupação didática por parte do professor e revelam uma postura de responsabilidade perante o estudo.

Palavras-chave: Contrato didático; contrato pedagógico; imprecisões do contrato; rupturas do contrato; problemas evidenciados pela ruptura; contextualização.

Introdução

A experiência de ensinar tem produzido nos educadores matemáticos questões que os desafiam.

As dificuldades para obter os resultados esperados, um sentimento de que certa apatia ou desilusão paira sobre um elevado percentual dos estudantes fazem emergir questões relacionadas com o fazer docente, com as situações didáticas propostas e com as expectativas dos que vieram à escola em busca do saber.

Diante de questões como as expostas acima o grupo de pesquisa sobre práticas docentes dos professores que ensinam matemática elaborou um projeto com o objetivo de verificar, analisar e avaliar as cláusulas dos contratos didático, escolar e pedagógico que se fazem presentes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública de Ensino no Brasil.

O trabalho que segue é um recorte desse projeto que está em andamento no qual buscamos identificar, na perspectiva dos acadêmicos, as cláusulas predominantes do contrato didático e pedagógica presentes na IES.

Para tanto, apresentamos a seguir os aportes que fundamentam nossa análise.

Referencial teórico

É comum em uma situação didática que o professor busque fazer com que o aluno saiba o que dele é esperado, o que deve saber e fazer e o que se espera que ele aprenda. Conforme Brousseau (1986) em tese, a passagem da informação e das instruções do professor para uma situação de aprendizagem exige que aluno ponha em ação determinados conhecimentos já construídos ou em construção. Fazer matemática, segundo esse mesmo pensador, consiste em identificar e resolver problemas propostos e em formular e propor novos problemas. A tarefa do professor consiste, nessa perspectiva, não apenas em comunicar um conhecimento, mas, principalmente, em propor problemas que motivem pesquisa, e que envolva o aluno no processo, caracterizando o que Brousseau denomina por *devolução*. Para o pesquisador, a *devolução* implica numa "[...] transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer" (Freitas, 2008, p. 83).

O que ocorre é que o aluno pode não aceitar o desafio, recusar-se a se envolver no processo. Esse desencontro tende a ser minimizado quando algumas regras são explicitadas e a responsabilidade de cada um fica claramente definida, o que não implica um fim, mas um recomeço, visto que durante o processo novas regras deverão surgir, provocando um desequilíbrio, uma ruptura do contrato, exigindo um rearranjamento das cláusulas implícitas e explicitas, podendo contribuir para aquisição de novos conhecimentos. Esse conjunto de situações compõe e caracteriza o contrato.

Se esse contrato diz respeito especificamente a um conteúdo, ao conhecimento matemático, por exemplo, diz-se que é um contrato didático, cuja compreensão remete a alguns questionamentos: Qual a forma esperada de se fazer matemática? Que tipos de problemas são propostos e como deverão ser resolvidos? Com que nível e detalhamento o professor deve propor o problema? Com que nível de precisão o aluno deve apresentar as respostas?

Como temos dificuldades para entrar nesse nível de detalhamento, de fazer com que as cláusulas fiquem claramente definidas, o contrato didático é facilmente quebrado. Mas é exatamente nesse ponto, na ocorrência da ruptura, que se evidencia não somente a existência de um contrato implícito como também a fragilidade das relações didáticas. Essas relações são marcadas pela incerteza, por expectativas frustradas, por um clima de tensão permanente só equilibrado quando há um bom nível no processo civilizatório das partes envolvidas.

As razões para que as cláusulas de um contrato sejam difíceis de serem detalhadas se devem a fatores múltiplos tais como: a) dificuldades para explicitar qual a forma correta de se estudar e, consequentemente, construir determinado conhecimento; b) Impossibilidade de se estabelecer uma forma única e eficaz de apresentar um tema de estudo.

Segundo Brousseau (1986, p. 53, tradução nossa), “Um contrato totalmente explicitado está fadado ao fracasso”. Para o autor, “[...] o professor deve garantir que as aquisições anteriores sejam utilizadas e dar ao estudante a oportunidade de adquirir novas aquisições. Se a aquisição não ocorrer, abre-se espaço para o julgamento dos alunos que não fazem o que esperamos dele e também do professor que não fez o que devia” (Brousseau, 1986, p.53, tradução nossa).

A construção do conhecimento não é necessariamente um contrato porque é resultado do estudo e Brousseau afirma ser resultado também do ato de ensinar.

Embora seja admitido que é possível haver construção de conhecimento sem ensino esse fenômeno ocorre em uma sitação não didática. Numa relação onde professor, aluno e conhecimento estão envolvidos, ocorre o que é apresentado por Brousseau e que compõe o contrato didático: “Em primeiro lugar, ele não pode ser totalmente explicado, uma vez que admite ser o resultado do ato de ensinar. Não há meios conhecidos e repetidos suficientemente para garantir qualquer apropriação do conhecimento pelo aluno” (Brousseau, 1986, p.53, tradução nossa).

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 203) “o que dificulta a ‘entrada’ no contrato é o caráter amplamente implícito de suas claúsulas e o fato de que, em muitos casos, a explicitação dessas não é possível, porque mudaria o conteúdo do contrato e sua natureza”.

Um professor, por exemplo, não pode perguntar ao aluno se quer que estipule o conteúdo da prova sem que isso se caracterize como algo fora de contexto, despropositado.

Essas dificuldades elencadas, as imprecisões do contrato didático contribuem para que o mesmo seja quebrado, e é em sua ruptura que se evidencia a sua existência, mais do que no cumprimento das cláusulas.

A ruptura do contrato didático traz à tona problemas como: a) falsa suposição do professor de que tenha explicitado suficientemente as condições. Permaneceram as dúvidas sobre o que é importante que o aluno guarde ou se aproprie; b) falsa suposição do aluno de que tenha entendido claramente o que foi exposto e que ele já esteja apto a satisfazer as condições.; c) não compreensão de que a relação didática é uma relação de mão dupla; d) compreensão indevida por parte do professor ao assumir que o aluno tinha conhecimentos anteriores suficientes para satisfazer as exigência apresentadas; e) aceitação de que as condições dadas foram insuficientes para preparar o aluno para o cumprimento da tarefa proposta; f) aceitação de que o aluno pode não ter assumido plenamente (as razões de não assumir podem ser múltiplas) o seu papel no desempenho da tarefa; g) compreensão de que a relação didática é contínua e deve permear todo o curso.

Dessa forma entendemos que, na perspectiva de Brousseau, o contrato didático é um conjunto de regras explícitas, ou implícitas que regem a relação dos envolvidos no processo.

Além do contrato didático, aquele relacionado especificamente a um determinado conteúdo ou disciplina, há segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 203, grifos do autor), o contrato pedagógico. "[...] o contrato didático não rege todos os aspectos da relação estabelecida entre alunos e professor. Existe, primeiro, um contrato mais geral e visível, o contrato *pedagógico*".

Esse contrato, de aspecto mais amplo do que o didático diz respeito às relações entre professores e alunos, porém, uma relação mediada pela disciplina uma vez que é para o estudo da mesma que ele é estabelecido.

Nesse contrato também há regras implícitas e explícitas. As regras explícitas na educação básica podem ser evidenciadas pela avaliação formal e pela adoção de um livro didático.

Reiterando o que foi dito por Brousseau em parágrafos precedentes, de que o contrato didático está vinculado ao ato de ensinar, Chevallard, Bosch e Gascón afirmam "que o didático somente pode existir quando existe um contrato pedagógico e, mais do que isso, um contrato escolar" (2001, p.205).

Tais regras normalmente não são discutidas e parece não haver discordância quanto a sua pertinência. Os questionamentos que surgem são com relação às formas de uso que é e exatamente onde as clausulas perdem a objetividade e se tornam implícitas.

As regras implícitas são as expectativas estabelecidas culturalmente pelas partes envolvidas no processo (Oliveira; Santos; Testa, 2008). Também são clausulas implícitas: o dinamismo do professor, o compromisso do aluno com relação às atividades propostas, a exposição oral por parte do professor, o detalhamento dos passos a serem seguidos pelo aluno na resolução de um problema.

Essas regras implícitas com relação aos critérios de avaliação e ao uso do livro didático fazem a interface entre contrato didático e o contrato pedagógico.

Cabe ressaltar que, quando o professor "não ensina", isto é, quando, ao invés de partir das definições e exemplos a serem seguidos, propõe desafios ou situações problematizadas a ruptura evidencia tanto a existência dessa cláusula do contrato quanto o obstáculo que ela cria à participação do aluno familiarizado com tal metodologia.

Como professores de uma IES, tínhamos como ponto de interesse, conhecer cláusulas do contrato didático presentes nas aulas de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática da instituição.

Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida fundamentalmente na modalidade qualitativa, descritiva e que contou com a participação ativa dos envolvidos. Num primeiro momento buscamos reunir o grupo de docentes envolvidos para estudo de aprofundamento teórico e reflexão sobre o fenômeno didático na IES. Posteriormente foram definidos os sujeitos da pesquisa, onze acadêmicos de segunda, terceira e quarta séries do curso de Licenciatura em Matemática e inseridos no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) que, reunidos em grupo e, norteados por questões previamente elaboradas pelo grupo docente expunham suas perspectivas relação as questões apresentadas.

Esta entrevista coletiva onde os docentes presentes se limitaram a apresentar as questões foi gravada em vídeo e, posteriormente, submetida à análise dos pesquisadores.

Em alguns aspectos tal pesquisa se assemelha à pesquisa do tipo etnográfico (André, 2008), onde os dados serão confrontados com a teoria. Este confronto é possível graças à vivência dos pesquisadores com o contexto social em que o fenômeno está inserido e aos paradigmas adotados para a coleta de dados e respectiva análise.

Para evitar uma possível identificação do acadêmico participante foi adotado o seguinte critério: as letras do alfabeto foram numeradas de 0 (zero) a 25 (vinte e cinco) foi acrescido um valor x arbitrário de conhecimento apenas dos pesquisadores ao número das iniciais dos nomes do mesmo.

Analisando os dados

A partir de agora centraremos nossa atenção na análise das falas dos sujeitos, buscando evidenciar posicionamentos que fundamentem nossas considerações finais.

A entrevista coletiva foi norteada por questões previamente elaboradas, das quais destacamos quatro para este recorte, sendo elas: a) Como você espera que o professor apresente cada novo tema da disciplina? b) É importante ter variações na apresentação dos conteúdos da disciplina, ou é melhor ser padronizado? c) Como você aprende o conteúdo da disciplina...? d) O que é estudar a disciplina...?

Diante destas questões, obtivemos dos sujeitos os seguintes argumentos:

Tem que ser contextualizado, eu creio, se você vê algo muito solto, sem, sem [gestos procurando indicar falta de sustentação] você não consegue ter compreensão,[...] acaba sendo algo desmotivador [...]. Não conseguimos compreender porque não faz parte do contexto. [Nós fazemos Licenciatura em Matemática] e devemos aprender para ser licenciados em matemática (NLW).

O professor entra na sala e sem a classe saber ele começa falar sobre algo prático e sem a classe saber introduz o conteúdo. O conteúdo não começou de modo formal (WQM)

Percebe-se na fala dos sujeitos uma busca por um contexto, por um elo entre os conhecimentos que os mesmo possuem e aquilo que o professor espera que eles aprendam, deixando transparecer um contrato onde a heterogeneidade da turma não é levada em conta, onde a introdução formal do conteúdo prevalece em detrimento das estratégias pedagógicas. Fatos como este são questionados por Silva (2008, p. 52) ao evidenciar que:

> Há casos extremos, em que o professor se refugia na segurança dos algoritmos prontos, fraciona a atividade matemática em etapas pelas quais passa mecanicamente, esvaziando o seu significado. Sua atuação resume-se em apresentar uma definição, dar alguns exemplos e solicitar exercícios "idênticos".

Tal fato evidencia a necessidade de uma intervenção do professor a fim de provocar uma ruptura nesta cláusula do contrato, não com a intenção de ajustar-se a um modelo desejado, mas no sentido de desestabilizar o contrato em vigor, onde a apresentação do conteúdo em um contexto compreensível à diversidade da turma possibilite aos acadêmicos atribuir significado ao conhecimento em questão e, a partir das estruturas cognitivas já adquiridas, estabelecer conexões entre o conhecimento consolidado e aquele se que busca saber.

Considerando a heterogeneidade da turma, questionamos os sujeitos quanto ao que os mesmo esperam do professor quanto à forma de apresentação dos conteúdos, destacando a viabilidade das variações na apresentação, ou uma padronização dos métodos, obtendo posicionamentos, como o revelado por VCA, ao argumentar que o professor *"chega e vai passando o conteúdo de modo sofisticado e o aluno não entende, [...] tem aluno que precisa entender o passo a passo"*.

Quanto à variação dos métodos de ensino, a acadêmica afirma:

Acho que não tem que ficar variando muito, às vezes o aluno já conseguiu, ele já conseguiu fazer com que o aluno entenda daquela maneira, aquela metodologia, modo d ensinar, se ele começa modificar muito os alunos começam a ter dificuldade, tem que tomar esse cuidado(VCA)

Observamos não somente evidências de uma cláusula implícita do contrato onde o professor deve apresentar um conteúdo sempre da mesma forma, como também o que poderíamos denominar de "vícios do contrato", à medida que os sujeitos parecem condicionados à cláusula estabelecida, visto que admitem que devem "ajustar-se" ao método imposto pelo professor, acreditando ainda que o rompimento desta clausula pode comprometer o seu próprio aprendizado.

Ainda que as afirmações acima sugiram que o professor deve possuir forma única de ensino, nota-se que tal opinião não é unanimidade, uma vez que observamos posicionamentos diferentes no grupo, como relata (XAD) "Você acostuma com o jeito do professor quando ele faz diferente com certeza você quer saber porque ele está diferente, representa algo novo".

A própria fala de WQM citada anteriormente evidência que uma padronização na apresentação não se torna muito motivador.

Em suas palavras:

Vejo que se não começou pela escrita formal, [mas] por uma discussão, falando sobre aquele assunto [...] o aluno fica curioso por saber como aconteceu aquilo. O aluno começa descobrir. Não que todo conteúdo tem que estar no seu cotidiano, mas ele já saber que isso que estou aprendendo tem uma relação, uma relação [direta ou indireta], uma relação de pesquisa, prática, escola, dependendo de como o professor trabalha, se ele trabalha [professor] trabalha de uma forma mais dinâmica voltado para [...] tem o prazer de saber o que você está fazendo, a importância. Eu acho que a gente se animar mais para estudar.

Acreditamos que as afirmações precedentes caracterizam mais uma vez um dos aspectos subjetivos do contrato didático, à medida que se revela "explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, - a cada parceiro, professor e aluno, a responsabilidade de gerir aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar contas perante o outro" (Brousseau, 1986, p.51, tradução nossa). Colocar à prova as situações que evidenciamos, ou seja, tornar explícito as cláusulas que observamos na fala dos sujeitos permite a renegociação do contrato, de modo que este passe a considerar o nível de conhecimento prévio dos alunos, caso contrário, corre-se o risco de deixar apenas sob a responsabilidade dos acadêmicos a construção do saber.

Mas os acadêmicos não querem um saber estático, desconexo e que represente apenas o cumprimento da ementa. Querem ver apresentadas algumas conexões de modo que lhes permita tomar posição sobre a validade do que estão estudando diante de tudo que está disponível e que não é possível alcançar no tempo escolar.

Uma vez que entendemos que construção do saber deve ser de responsabilidade partilhada entre professores e alunos, sendo o primeiro o organizador e mediador do processo, buscamos explicitar as concepções que, na opinião dos sujeitos, estes devem desempenhar visando a sua progressão do aprendizado. Segundo (PBE), o aprendizado ocorre quando “você realmente procura esclarecer a dúvida que ele [o professor] deixou, você resolve, revendo, estudando e procurando o professor”. Por sua vez, (XAD) afirma: “Eu aprendo quando venho às aulas e o professor resolve exercício e estudando mais, pegando a explicação dele, você não deixa para estudar quando chega perto da prova, você relê tudo de novo, se ficou alguma dúvida depois você pega com ele.” Neste mesmo contexto, temos WQM, que entende que o aprendizado acontece “Estudando em casa muito, procurando o professor”.

Observamos que, embora os sujeitos assumam sua responsabilidade na aquisição do saber, também fica entendido a sua dependência do professor, com o qual espera dividir com ele este encargo. Também observamos o compromisso assumido pelos sujeitos quanto a própria aprendizagem ao considerarmos o que estes entendem que estudar implica em “ Você saber de onde ela [a matéria] veio e saber onde você vai usar ela ou se não vai usar, se é mais uma disciplina curricular”(PBE). Para DNA, estudar “ É você saber porque e onde vai utilizar” ou, como afirmou NDG, é “ Tentar encaixar ela em alguma situação, ou achar exemplo [de aplicação]”.

De acordo com os argumentos apresentados, percebe-se que os sujeitos assumem o dever de estudar, mas contam também com aspectos peculiares da ação docente, como mostrar aplicação e esclarecer porque funciona.   Embora seja significativo observar tal busca por parte dos alunos, no contexto geral da pesquisa, ficou evidente o sentimento de que esta tarefa não tem sido cumprida pelos professores. Se tal fato pode suscitar a autonomia dos educandos, também é passível de compreensões equivocadas, exigindo a intervenção do professor a fim de comprovar ou refutar tais compreensões, institucionalizando o conhecimento produzido.

Essa dependência do professor é compreensível uma vez que a matemática é produção social e o professor é o representante dessa sociedade, portanto cabe a ele esclarecer termos e estabelecer roteiros de estudos.

Sobre isso se posicionaram Chevallard, Bosch e Gascón (200, p. IX):

> A obra matemática tem mais de vinte e cinco séculos. Nós a respeitamos, tememos e nos resignamos a enfrentá-la durante esse parêntese de nossa vida, no qual por bem ou por mal, vamos á escola. Mas, infelizmente, já não compreendemos que sentido tem estudá-la. A matemática, tão presente em nossa vida cotidiana por meio de objetos técnicos, para muitos de nós é, no entanto, cada vez mais visível e estranha. Essa situação é prejudicial, e a escola, em nome da sociedade, deveria corrigi-la. Mas, para isso, necessitamos compreender porque há matemática na sociedade e por que devemos estudar matemática na escola.

Nessa perspectiva cabe à escola e por extensão ao professor a tarefa de contextualizar, definir termos, elaborar roteiros de estudos, fazer recortes nesse vasto universo de conhecimento disponível e, por fim, validar o resultado obtido pelo aluno. Na perspectiva dos acadêmicos essa cláusula do contrato pedagógico está deixando de ser cumprida na íntegra porque segundo WQM "*se você vive o conteúdo alguma coisa dali você vai tirar dali [...] a gente viu, mas não lembra o que é mais onde está o erro?"*, e NLW afirma: "*estamos aprendendo algo que está fora do assunto. Não conseguimos compreender porque não faz parte do contexto"*.

Este mesmo movimento que revela na fala dos sujeitos certa tomada de consciência ao assumirem sua parcela de responsabilidade (e às vezes até outras conforme já evidenciamos) na construção do próprio conhecimento, também revela acadêmicos mais exigentes (por vezes descontentes), aspirando ter como formador um profissional cujo perfil seja adequado às especificidades de um curso de licenciatura.

Essas aspirações são reveladas na fala dos sujeitos, como podemos observar: (DNA): "Acho que todos são bons, mas acho que às vezes tem a dificuldade de ensinar [...] dificuldade no [...] no passar, usando um Português [popular]". Entendemos na fala do sujeito o anseio por uma linguagem ou que a matemática a ser ensinada seja elaborada por meio de "um português" acessível e adequada considerando a diversidade da turma. Tal anseio é observado também na fala de outros sujeitos: "O bom professor tem que estar preparado para dar aula. Se ele é um bom professor ele tem domínio do conteúdo, porque se o aluno tem dificuldade daquela matéria ele vai procurar um jeito de melhorar o ensino daquele conteúdo" (WQM). O argumento apresentado por (WQM) é rebatido por (DNA): "tem aquele que até procura, mas ele não consegue". Ao ser interpelada pelo pesquisador sobre o que o professor não consegue, (DNA) complementa: "explicar para a gente".

As afirmações acima traz à tona a necessidade de o professor conhecer não apenas o conteúdo específico de sua disciplina, mas que isto, cabe ao professor conhecer, entre outros requisitos, os aspectos mais relevantes do conteúdo para serem estudados. O professor deve ainda dominar diferentes formas de representação e amparando-se em analogias, exemplos e ilustrações, tornar as ideias mais significativas.

Considerações finais

Ao trazer este recorte, buscamos evidenciar, na perspectiva dos discentes, algumas cláusulas do contrato didático vigente na instituição.

Entendemos que pelo fato da entrevista ser coletiva, a resposta de um sujeito pode ter influenciado na resposta do outro, tanto para clareamento das ideias, como para uma possível unificação das mesmas em torno de uma ideia dominante, porém entendemos que algumas contradições revelam certa autonomia dos sujeitos, e que a unificação, se ocorreu, não foi total. Entendemos também que a metodologia adotada manteve os sujeitos em seu ambiente, permitindo maior espontaneidade e disposição para o embate de ideias entre os pares.

As concordâncias revelam sentimentos generalizados que aguardavam a oportunidade de serem expostos.

Em síntese a análise dos dados nos permitiu identificar algumas cláusulas do contrato, entre elas podem ser destacadas; a) predomina a presença de uma apresentação formal dos conteúdos; b) o conhecimento é uma construção do sujeito; c) há necessidade de validação do conhecimento por parte do professor; d) o conteúdo deve estar inserido em um contexto que possa ser vivenciado ou cujas aplicações sejam vislumbradas pelo sujeito.

Vemos nesta síntese que os sujeitos reconhecem a própria responsabilidade pela construção do conhecimento, mas com certa expectativa de que haja uma reformulação do sistema vigente a fim de promover maior interação sujeito-conteúdo e sujeito-professor.

Referências

André, M. E. D.A.(2008). *Etnografia da Prática Escolar*. 14. ed. Campinas, SP: Papirus.

Brousseau, G.(1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. In: *Recherches em Didacique des Mathématiques*, Vol. 7, no 2, pp. 33-115.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J.(2001). *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora.

Oliveira, F.A.;Santos, C. R.; Testa, E.(Julho,2008). Contrato Didático: A relação de aluno-professor-aluno no ensino superior. *Revista Científica do ITPAC*, Volume 1. Número 1. P.17-22.

Freitas, J.L. M. Situações Didáticas. In: Machado, S.D. A. (org.).(2008). *Educação Matemática*: uma introdução. 3.ed. São Paulo: EDUC.

Silva, B. A. Contrato Didático. In: Machado, S. D. A. (org.).(2008). *Educação Matemática*: uma introdução. 3.ed. São Paulo: EDUC.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Observar com sentido: um experimento com licenciandos em Matemática

Lucas Gabriel **Seibert**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
lucasseibert@hotmail.com
Claudia Lisete **Oliveira** Groenwald
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br
Salvador **Llinares** Ciscar
Universidade de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumo

Este trabalho apresenta um recorte da dissertação de mestrado que visou investigar como a estrutura argumentativa e como a interação *online* pode auxiliar no desenvolvimento da competência docente de "observar com sentido" em Licenciandos de Matemática. Tal competência é caracterizada como a inter-relação entre três habilidades: identificar, interpretar e tomar decisões. Foi proposto um experimento onde os Licenciandos deveriam ler o material teórico disponibilizado pelo pesquisador, analisar uma aula gravada, debater sobre as suas etapas em um fórum de discussões e elaborar uma *wiki* a partir da discussão no fórum. Foi possível perceber que estes licenciandos identificam e interpretam corretamente o que ocorre em sala de aula, mas acreditam que ações como a revisão de aulas anteriores não se adequam em uma postura construtivista de ensino.

Palavras-Chave: observar com sentido, b-learning, ambiente de investigação.

INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte de uma dissertação de mestrado que buscou investigar como a estrutura argumentativa e como a interação *online* pode auxiliar no desenvolvimento da competência docente de "observar com sentido" em Licenciandos de Matemática, em um contexto *b-learning*.

Van Es e Sherin (2002) caracterizam a competência de "observar com sentido" considerando três destrezas: *identificar* os aspectos relevantes da situação de ensino; *usar* o conhecimento sobre o contexto para refletir sobre as interações na sala de aula, e realizar *conexões entre eventos específicos da aula e ideias mais gerais* sobre o processo de ensino e aprendizagem.

A competência de "observar com sentido", definida por Jacobs, Lamb e Philipp (2010), também é caracterizada como um conjunto de três habilidades inter-relacionadas, permitindo que o professor tome decisões de ação, conectando os eventos específicos à teoria.

Aprender a "observar com sentido" o pensamento matemático dos estudantes é particularmente relevante para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. As investigações prévias tem indicado a relevância que tem o que os professores observam e também a maneira como interpretam o observado para determinar a qualidade do ensino da Matemática (Fernández; Valls; Llinares, 2011).

O EXPERIMENTO

Procurando desenvolver um ambiente que proporcionasse o desenvolvimento da competência de "observar com sentido", assim como coletar dados que pudessem ser utilizados na análise, foi proposto um ambiente de investigação seguindo as indicações de Fernández, Valls e Llinares (2011); Filatro (2007); Llinares (2000, 2006, 2008, 2011); Llinares e Valls (2009).

O ambiente de investigação pode ser tratado, em um de seus aspectos, como um ambiente virtual de aprendizagem, que, de acordo com Filatro (2007), é um espaço multimídia, na internet, cujas ferramentas e estratégias visam propiciar um processo de aprendizagem baseado predominantemente na interação entre os participantes, incentivando o trabalho cooperativo (Filatro, 2007).

Define-se ambiente de investigação como

> um espaço multimídia, na *internet*, com ferramentas e estratégias que propiciem materiais para análise dos pesquisadores. Um ambiente que dá suporte ao trabalho de investigação, que [...] possibilite, aos participantes do experimento, a interação com o ambiente e interação e colaboração entre si, e que, essas, sejam fontes de material para análise (Seibert; Groenwald, 2012, p. 178-179)

No experimento os estudantes deveriam seguir as seguintes etapas:

(a) assistir ao vídeo da aula de Matemática sobre conjuntos numéricos;

(b) ler o material teórico, desenvolvido pelo pesquisador, sobre as metodologias tradicional e construtivista de ensino;

(c) debater, discutir e analisar o material teórico (grande grupo e presencial);

(d) participar de um debate virtual para discutir, analisar e refletir sobre as etapas de uma aula de Matemática que utiliza a metodologia construtivista de ensino (colaboração *online*);

(e) escrever um informe (*wiki*) sobre o que foi analisado no vídeo proposto (colaboração *online*);

O material teórico, disponibilizado pelo pesquisador, abordava a metodologia tradicional e a metodologia construtivista de ensino. Apresentava os aspectos chave de cada metodologia, como a interação professor-aluno, disposição dos alunos em sala de aula, possibilitando, ou não, a interação entre os alunos e as etapas desenvolvidas na introdução, desenvolvimento e conclusão de uma aula.

No vídeo, a professora inicia sua aula propondo uma revisão do conteúdo estudado na aula anterior (Conjuntos Numéricos), em que, apesar de utilizar quadro e giz, permite a participação/interação dos alunos, promovendo questões e ouvindo o que os alunos propunham. Em seguida, a professora indica um trabalho que deveria ser realizado pelos alunos. Nesse momento, os alunos são organizados em grupos, sendo que cada grupo recebe números distintos, devendo elaborar uma organização que permita estabelecer a qual conjunto numérico pertencem os números contidos na atividade que a professora apresentou. A professora, durante a elaboração do trabalho, pelos grupos, mediou as interações, questionando os alunos sobre suas respostas e promovendo a discussão entre os membros do mesmo grupo.

Após o término do tempo estipulado pela professora, os alunos deveriam apresentar o trabalho para toda a turma. Durante a apresentação do trabalho os alunos apresentavam questões, que eram respondidas pela professora ou pelos alunos que estavam apresentando o trabalho.

Foram apontados os erros e acertos cometidos pelo grupo que estava apresentando o trabalho e, durante a apresentação, houve a formalização do conteúdo em questão pela professora.

O experimento contou com a participação de 14 estudantes e um total de 56 participações no fórum. Este contou com um fórum de discussões, análise de um vídeo, leitura de material teórico e a elaboração de uma *wiki*.

Esperava-se que os licenciandos identificassem as etapas propostas pela professora e as competências por ela utilizadas, concluindo, assim, qual a metodologia proposta em sala de aula, identificando as etapas da aula analisada.

ANÁLISE

Os licenciandos deveriam identificar as etapas de uma aula que utilizou a metodologia construtivista de ensino, caracterizando os aspectos relevantes desta aula.

A figura 1 apresenta o discurso do aluno TW, sua fala é disposta em ordem cronológica.

Aluno TW	Dado	Justificativa	Conclusão
1			Na minha opinião, a professora está utilizando o método tradicional de ensino.
2		Digo isso, pois, de acordo com o texto, descrito no modelo A,	
3	as partes de Início, Definição, Proposição e Demonstração, já haviam sido ministradas anteriormente, sendo esta tarefa uma exercitação deste conteúdo.		
4		A tarefa em si até apresenta passos do modelo B, como:	
5	propor uma situação intra ou extra Matemática, Os alunos trabalham em busca de soluções, Os alunos apresentam ao grupo suas soluções, Discussão coletiva e Formalização de conteúdos matemáticos.		

6			A somente não se caracteriza pelo modelo B, em função de que a parte referente ao início está distribuída ao longo de todo o modelo A.

Figura 1. Discurso do aluno TW, participante do experimento final

O aluno TW iniciou a sua discussão concluindo que a professora utilizou o método tradicional de ensino (linha 1). Propôs dados e justificativas que o ajudaram a chegar a esta conclusão (linha 2 – 5), afirmando que, conforme o material disponibilizado para leitura, a metodologia utilizada pela professora se enquadra no modelo A, proposto no texto. Para isso, TW apresenta dados que incluem as etapas propostas pela professora (linha 3). Ao final de seu discurso (linha 6), o aluno o reforça, afirmando que a professora iniciou a sua aula com as características propostas no modelo A e, somente por isso, a aula não se enquadra no modelo B.

TW apresentou um discurso conciso, em que apresenta dados e justificativas para as suas conclusões, no entanto, apesar de tal coerência, pode-se afirmar que a professora utilizou o modelo B e que o aluno não compreendeu, em um primeiro momento, o que ocorria em sala de aula.

A figura 2 apresenta o discurso do aluno BH, participante do experimento.

Aluno BH	**Dado**	**Justificativa**	**Conclusão**
1			Eu vejo sim alguns pontos que caracterizam a metodologia construtivista.
2	Na atividade gravada a professora incentiva o "agir para aprender"		
3		escrito por Groenwald, 1997	
4	e pelo que pude perceber,		
5		valoriza o desafio como forma de fixar o conteúdo trabalhado.	

Figura 2. Discurso do aluno BH

O aluno BH afirma que viu alguns pontos que caracterizam a metodologia construtivista (linha 1), justificando esta afirmação (linha 3 e 5) com base no material teórico disponibilizado pelo pesquisador, abordando o "agir para aprender" (linha 2), e na valorização do desafio como forma de fixar o conteúdo trabalhado.

Este discurso indica que BH compreende o que está sendo observado, apontando autores que justificam a sua visão.

Os discursos foram analisados, também, por grafos de colaboração, apresentados na figura 3. Este grafo apresenta as participações existentes nas discussões 1 a 7.

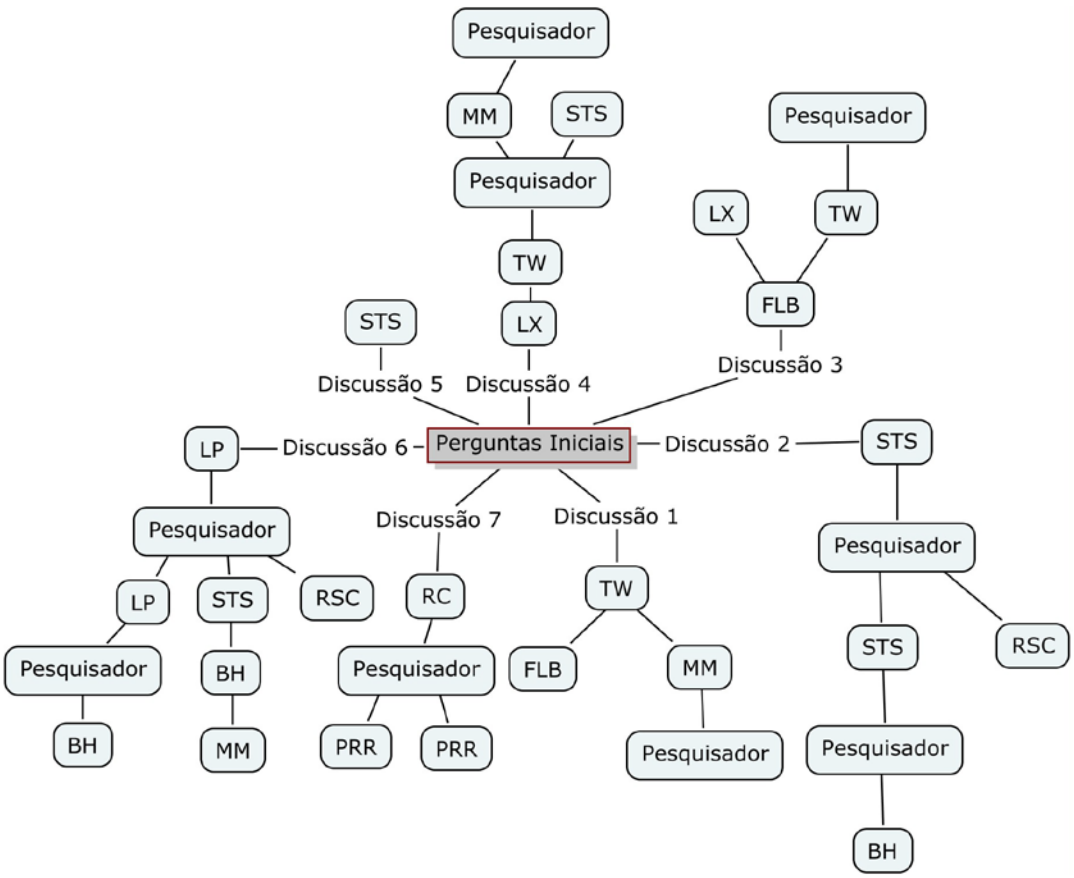


Figura 3. Grafo apresentando as discussões 1 a 7

Na discussão 2 BH afirma, convictamente, que a professora utiliza a metodologia construtivista de ensino, proferindo a seguinte fala:

[...] vejo sim alguns pontos que caracterizam a metodologia construtivista. [...] a professora incentiva o "agir para aprender" [...] e pelo que pude perceber, valoriza o desafio como forma de fixar o conteúdo trabalhado (BH – discussão 2).

Tal afirmação não é apoiada na terceira discussão, onde os alunos voltam a afirmar que a professora utilizou a metodologia tradicional e construtivista de ensino, uma vez que:

[a professora] partiu de um conceito pré-estabelecido e já visto em aulas anteriores [...] retomando conceito de Conjuntos Numéricos no quadro verde, passando para explicação da atividade com a turma (FLB – discussão 3).

Para os alunos, a utilização do quadro negro, ao iniciar a aula, e do giz, caracterizam a metodologia tradicional de ensino. Os alunos não percebem que, a professora interage com a turma, com o intuito de construir um conceito juntos. A professora, em momento algum, tem a intenção de ser a "dona" do saber. Mas, a utilização deste material, basta para os licenciandos caracterizarem o inicio da aula como tradicional.

FLB comentou, também, sobre o erro/aprendizagem. Em contra partida, TW, em resposta à FLB, afirmou:

Destaco na sua explanação a referência do erro/aprendizagem como sendo parte do processo de construção do conhecimento e não como modo de repressão. Isso caracteriza, também, a Metodologia Construtivista de Ensino. (TW – discussão 3)

Todas as discussões foram analisadas utilizando estes grafos, permitindo, assim, entender por que os licenciandos mudaram algumas opiniões durante o debate no fórum.

CONCLUSÃO

Foi possível perceber que existe uma grande dificuldade de compreender a metodologia utilizada pela professora, e, na grande maioria das participações, os licenciandos apontam para a utilização da metodologia tradicional juntamente com a metodologia construtivista de ensino, demonstrando que não possuem clareza em relação aos métodos citados.

Esta conclusão ocorreu uma vez que, a professora, iniciou a aula revisando o conteúdo da aula anterior. Nesta revisão foi utilizado quadro e giz, sendo suficiente para a afirmação da utilização da metodologia tradicional. Os licenciandos não percebem que a professora permite a participação dos alunos e que, em nenhum momento, apresenta a postura de detentora do saber (Mora, 2004).

Quanto a segunda afirmação, de uma aula construtivista, pode-se notar que os alunos identificam e interpretam as etapas corretamente, apontando o trabalho em grupos, a mediação por parte da professora, a apresentação dos grupos e a formalização utilizando o conhecimento proposto pelos alunos. Oito alunos, dos quatorze participantes do experimento, apresentam essas etapas, propondo como dados trechos do vídeo, como justificativas o material teórico e uma conclusão embasada nos itens anteriores.

Pode-se concluir, então, que estes licenciandos identificam e interpretam corretamente o que ocorre em sala de aula, mas acreditam que a revisão de aulas anteriores não se adequa em uma postura construtivista de ensino, não identificando a atividade de organizar os número, separando-os em conjuntos, como um problema intra-matemático, mas, sim, como um exercício de fixação.

REFERÊNCIAS

Dillenbourg, P., Baker, M., Blayer, A., & O'Malley, C. (1995). The Evolution of Research on Collaborative Learning. In: P. Reimann, H. Spada, P. Reimann, & H. Spada (Eds.), *Learning in Humans and Machines: towards an interdisciplinary learning science* (1ª ed., pp. 189-211). Oxford: Pergamon Press.

Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). Acesso em 22 de Maio de 2012, disponível em Universidad de Alicante: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/20341/1/SEIEM2011-Fernandez-Valls-Llinares.pdf

Filatro, A. (2007). *Design Instrucional Contextualizado: educação e tecnologia.* São Paulo: Senac.

Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la prática del profesor de matemáticas. In: J. S. Ponte, *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas de Escola de Verão de 1999* (pp. 109-132). Lisboa.

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a ver la enseñanza de las matemáticas. In: S. Sbaragli, B. D'Amore, S. Sbaragli, & B. D'Amore (Eds.), *La Matematica e la sua Didattica: vent'anni di impegno* (pp. 177-180). Roma: Carocci Faber.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. Santa Fe de Bogotá.

Llinares, S. (2011). Formación de Profesores de Matemáticas: caracterización y desarrollo de competencias docentes. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matematica*, (p. 9). Recife.

Llinares, S., & Valls, J. (Novembro de 2009). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussion in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Mora, D. (2004). *Aprendizaje y enseñanza: proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro.* La Paz: Campo Iris.

Seibert, L. G., & Groenwald, C. L. (2012). Ambiente de Investigação: uma proposta em um contexto b-learning. *Anais XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática*.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interacts. *Journal Of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores

Ruy César **Pietropaolo**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
rpietropaolo@gmail.com
Olga **Corbo**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
olgacorbo@gmail.com
Tânia Maria Mendonça **Campos**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, Brasil
taniammcampos@hotmail.com

Resumo

Este artigo resulta de investigação sobre a imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de professores da rede pública da cidade de São Paulo. Consideramos as concepções explicitadas pelo grupo, em resposta a questionários envolvendo itens concernentes aos conhecimentos necessários ao professor, relativos ao conteúdo "números racionais e irracionais" e ao seu ensino. Os dados revelaram inconsistências nos conhecimentos dos participantes, quanto à ampliação dos campos numéricos, ressaltando fragilidades que poderiam levar alunos a ideias equivocadas sobre esse assunto. Constatamos, igualmente, que a incomensurabilidade de grandezas não constava do repertório de conhecimentos do grupo, implicando a ausência de conhecimentos pedagógicos sobre o tema. Tais resultados evidenciam falhas no estudo dos irracionais, não apenas na Educação Básica, mas também na formação dos professores, expondo a necessidade de colocar em discussão a relevância desses números nos currículos de Matemática e a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Palavras-chave: Números Irracionais, Educação Matemática, Conhecimentos para o Ensino, Formação de Professores.

Introdução

Conforme documentos oficiais de orientações educacionais (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, p.83, Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 2008, p.52 e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, 2006, p.71), a abordagem inicial dos números irracionais está prescrita para os dois últimos anos do Ensino Fundamental, em estudo que deve ganhar continuidade ao longo do Ensino Médio, por meio da exploração de situações que favoreçam a consolidação desses conhecimentos.

No entanto, resultados de pesquisas já concluídas, por exemplo, por Tall & Schwarzenberger (1978), Miguel (1993), Fischbein et al (1995), Kindel (1998), Sirotic (2004) e Corbo (2005), indicam a necessidade de ampliar a discussão sobre a atenção dada a esse conteúdo, não apenas nos anos finais do Ensino Fundamental, mas também no Ensino Médio e, sobretudo, nos cursos de formação de professores.

A esse respeito, Sirotic (2004, p.187) observou que os conhecimentos relativos aos números irracionais demonstrados pelo grupo de futuros professores, sujeitos de sua pesquisa, configuravam-se como que “cimentados”, no mesmo nível em que haviam sido construídos na Educação Básica.

Tais resultados confirmam aqueles discutidos por Fischbein et al (1995), no que concerne às inconsistências reveladas por estudantes de séries correspondentes ao Ensino Médio no Brasil, quanto às definições, às representações e à caracterização de números racionais, irracionais e reais.

Também no que respeita à interpretação geométrica dos números irracionais, foram detectadas fragilidades nos conhecimentos de estudantes do último ano do Curso de Licenciatura em Matemática, em estudo desenvolvido por Corbo (2005), indicando dificuldades relativas à compreensão do conceito de incomensurabilidade de grandezas e de sua relação com os irracionais.

Fundamentação Teórica e Metodologia

Esta pesquisa foi desenvolvida no âmbito do Observatório da Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante Anhanguera, com financiamento da CAPES.

Para o desenvolvimento da investigação pretendida a partir desses questionários, tomamos como base teórica, as categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, estabelecidas por Ball et al (2008), quais sejam: o conhecimento do conteúdo (comum/especializado), o conhecimento do conteúdo e do estudante, o conhecimento do conteúdo e do ensino e, finalmente, o conhecimento curricular do conteúdo.

Além disso, apoiamo-nos na noção de imagem conceitual definida por Tall & Vinner (1981), como estrutura cognitiva que se compõe na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito, a partir de experiências e estímulos vivenciados ao longo do tempo. Segundo essa perspectiva, todas as representações, propriedades, procedimentos, relações e processos relativos a um conceito constituem a imagem conceitual elaborada por essa pessoa, no que concerne àquele conceito.

Tendo em conta a importância de apresentar, aos alunos, a Matemática não só como ferramenta necessária à resolução de problemas práticos, mas também como estrutura harmoniosamente organizada, fruto do esforço da mente humana, e, ao mesmo tempo, considerando a relevância dos números irracionais nos currículos de Matemática, para a ampliação do conceito de número, entendemos que o estudo desses números deve ir além da exploração de propriedades e operações com radicais. Isto é, deve também favorecer a compreensão de ideias que são essenciais no processo de construção do conceito de número real.

Assim, para abordar os números irracionais em suas aulas, um professor precisa de um repertório abrangente de conhecimentos, ou ainda, é necessário que ele tenha à sua disposição uma imagem conceitual bastante rica, relativa a esse assunto, a fim de que possa adequar suas instruções aos alunos com os quais está trabalhando e também possa estabelecer conexões entre esse tema e outros conteúdos dominados pelo aluno.

A coleta dos dados analisados ao longo deste artigo teve o propósito de delinear a imagem conceitual constituída pelos professores sujeitos de nossa pesquisa, com relação aos números irracionais – conteúdo específico (comum e especializado) –, assim como com relação aos conhecimentos pedagógicos também concernentes a esse mesmo tema.

Examinamos as respostas dos professores, considerando que sua imagem conceitual relativa aos números irracionais seria constituída, por exemplo, por: definições, representações, propriedades, operações, estratégias diferenciadas de abordagem, o tratamento formal necessário à compreensão dos irracionais, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conjuntos numéricos, as relações que podem ser estabelecidas entre esses números e outros conteúdos da Matemática ou de outras áreas do conhecimento, as orientações curriculares relativas a esse tema e as dificuldades inerentes ao processo de construção desse conhecimento.

Analisando os resultados de nosso estudo

Apresentamos, a seguir, nossa interpretação dos dados que permitiram o delineamento da imagem conceitual que constituía, naquele momento, o repertório de conhecimentos relativos aos números irracionais, dos professores participantes de nosso estudo.

Sobre as definições, representações e campos numéricos

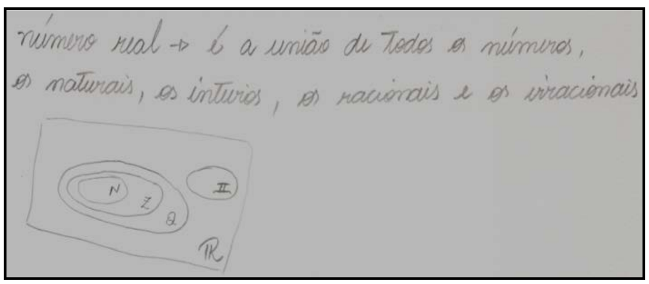
A análise das definições apresentadas pelo grupo revelou falhas nos conhecimentos dos professores, em relação à ampliação dos campos numéricos, desde o conjunto dos números naturais. Os extratos a seguir ilustram as respostas do grupo, à questão enunciada por “Como você define (ou definiria), em suas aulas, os conceitos de número racional, número irracional e número real?”:

Número real – números naturais/positivos (Prof.F),
Números racionais são todos os números inteiros (somente) e positivos. (Prof.C);
Número irracional é todo número representado em forma de fração ou de decimal; e está representado dentro dos números reais. (Prof.C);
Número real – todos os números que fazem parte do nosso universo. (Prof. A);
Real – é o conjunto formado por todos os números racionais. (Prof. U).

Tais afirmações trazem à tona concepções inconsistentes relativas à caracterização dos conjuntos numéricos e às relações que se estabelecem entre esses conjuntos. Por exemplo, da forma como se expressou o professor (U), no último excerto, o conjunto dos números irracionais não estaria contido em R, o que dispensaria a criação deste último.

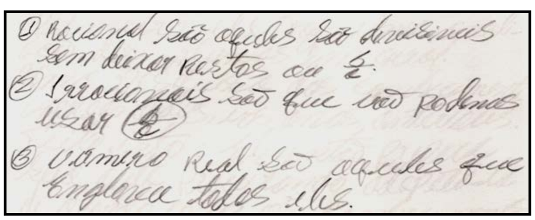
Outras definições apresentadas sugerem a introdução dos números reais independentemente do estudo dos irracionais. Interpretamos dessa forma, visto que, para alguns professores, os números irracionais não fazem parte do conjunto dos reais, como se pode observar em respostas formuladas por: "nº real é todo nº que conhecemos, menos os nºs irracionais e complexos" (Prof. O) e "nºs Reais: é o conjunto que abrange os N (naturais), Q (racionais) e Z (inteiros)" (Prof. V).

Ainda em relação aos campos numéricos, os diagramas de Venn apresentados por alguns dos participantes deixam margem a interpretações incorretas e podem levar os estudantes a formar uma ideia equivocada a respeito do conjunto dos números reais. Por exemplo, o professor (Q), embora tenha definido corretamente o conjunto dos números reais, como se vê no protocolo a seguir, desenhou um diagrama que poderia levar um aluno a imaginar que existem outros números reais que não são racionais, nem irracionais.



Protocolo Prof. (Q)

Quanto à definição de números irracionais, apenas quatro professores fizeram referência à impossibilidade de representá-los na forma $\frac{a}{b}$, e em alguns casos, omitindo condições indispensáveis, que devem ser observadas para essa representação. O protocolo do professor (N), a seguir, justifica nossa interpretação:



Protocolo Prof. (N)

Não havendo, em definições como essa, a restrição que indica o conjunto a que devem pertencer os termos da razão $\frac{b}{c}$, o número $\frac{\sqrt{7}}{3}$, por exemplo, poderia ser classificado como racional.

De forma geral, a ideia de número irracional, neste grupo de professores, estava essencialmente baseada na representação decimal, tendo sido explicitada por 17 dos 23 professores, em respostas como: "irracionais são nºs decimais, que não são dízimas periódicas, tendendo ao infinito" (Prof. V) ou "para iniciar números irracionais, digo que é um número que não tem fim. Mostro alguns exemplos como π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...." (Prof.H).

Tais definições, de certa forma, restringem a abordagem desse conjunto de números, afastando a possibilidade de um aprofundamento que inclua, por exemplo, a prova formal da irracionalidade de um número, no caso de haver interesse e nível de compreensão suficiente, por parte dos alunos.

Em nossa interpretação, esses resultados evidenciaram falhas nos conhecimentos deste grupo, no que diz respeito às definições, às representações e à classificação de números racionais, irracionais e reais, o que pode prejudicar qualquer abordagem, ainda que introdutória, em que se proponha a discussão sobre a ampliação dos campos numéricos a alunos da Educação Básica.

Sobre o processo de ensino dos números irracionais

No que diz respeito às estratégias de abordagem dos números irracionais – o que, segundo Ball et al (2008), requer a seleção de representações, ilustrações e exemplos adequados e, da mesma forma, a escolha de justificativas convincentes que poderiam facilitar a compreensão desse conteúdo pelos estudantes, 9 dos 23 professores sugeriram atividades empíricas envolvendo a medição de segmentos, ou do comprimento e do diâmetro de circunferências, para a apresentação do número π, sem, no entanto, qualquer menção sobre a obtenção de valores aproximados ou sobre a insuficiência dessa abordagem, para uma caracterização dos números irracionais.

Por outro lado, as operações com resultados irracionais são mencionadas por sete professores, provavelmente como estratégia que provoque a percepção da impossibilidade de se obter um resultado racional. A esse respeito, um dos participantes explicou que "o professor pode deixar os alunos fazerem as divisões de números fracionários, alguns com resultados com finitas casas decimais, outros com infinitas casas decimais mais periódicas e outros com infinitas casas decimais não periódicas" (Prof. B), admitindo, implicitamente, que é possível representar um número irracional, na forma fracionária.

Também sugerindo uma abordagem por meio de operações, o professor (P) propõe: "... podemos resolver uma raiz quadrada não exata até cairmos no decimal não periódico", em estratégia que, supostamente, indica o uso da calculadora (com resultado aproximado por um racional) ou a aplicação do algoritmo para o cálculo da raiz quadrada (que não figura entre os conteúdos indicados para o trabalho em sala de aula). Além disso, a expressão "até cairmos no decimal não periódico" utilizada por esse professor sugere uma garantia que não existe: a de que, a partir de certa quantidade de algarismos na parte decimal, seria possível afirmar que não haverá formação de período.

Três professores mencionaram a calculadora como recurso para abordar o conceito de número irracional. Entretanto, não explicitaram se esse estudo teria início pela obtenção de aproximações racionais para números irracionais e também sem esclarecimentos sobre as estratégias que induziriam os alunos a perceber que os valores obtidos com o auxílio da calculadora representam uma aproximação de um número cuja representação decimal é infinita e não periódica:

> Usar a calculadora facilita muito os cálculos com números irracionais, que tal uma competição?! (Prof. C)
> Pedir ao aluno que digite alguns números na calculadora: a tecla do π; a raiz quadrada de 2; a raiz quadrada de 3. (Prof. O).

Observamos finalmente, que nenhum dos participantes mencionou a possibilidade de introduzir os números irracionais por uma abordagem geométrica que envolva, por exemplo, a aplicação do

Teorema de Pitágoras e as construções com régua e compasso, visando despertar a percepção da existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais.

Quatro professores mencionaram, como estratégia de apresentação dos números irracionais, aos alunos, a determinação da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário ou de lado “l ” ou a construção geométrica de triângulos retângulos, para a obtenção da medida da hipotenusa, mas, nenhum dos participantes do grupo se referiu ao estudo da incomensurabilidade de segmentos de reta, como parte do trabalho dedicado à construção do conceito de número irracional, possivelmente indicando a ausência desse conhecimento no repertório deste grupo de professores, e implicando, sob o ponto de vista de Ball et al (2008), igual ausência de conhecimentos para a sua exploração em sala de aula. Ou seja, a ausência de conhecimentos sobre a interpretação geométrica dos números irracionais significa também desconhecimento das necessidades que resultaram na criação desse conjunto numérico e, assim sendo, implica a falta de argumentos convincentes sobre a importância de estudar esse conteúdo no Ensino Fundamental ou em outra fase escolar.

Além disso, reduz as possibilidades de seleção, organização e elaboração de atividades, posto que um professor que desconhece o que são segmentos incomensuráveis não irá elaborar atividades que envolvam essa ideia e, assim sendo, também não poderá favorecer o acréscimo desse conhecimento à imagem conceitual de seus alunos.

Sobre a aprendizagem dos números irracionais

São classificados como conhecimentos do conteúdo especializado aqueles que, dentre outras particularidades, capacitam o professor a identificar os erros e as causas desses erros, em materiais produzidos pelos estudantes. (Ball et al, 2008).

No que diz respeito às dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem do conceito de número irracional, foram mencionadas pelos professores aquelas relacionadas à compreensão da ideia de grandeza, à imaginação de grandezas incomensuráveis, à aceitação e compreensão de “números infinitos”, “muito grandes ou muito pequenos”, à localização de números irracionais na reta numérica.

Observamos, no entanto, que, embora os professores tenham apontado dificuldades relacionadas às grandezas – inclusive as incomensuráveis –, esse tema parece não figurar na prática destes professores, pois não consta das estratégias por eles indicadas para a introdução de números irracionais, assim como não há nenhuma menção, por parte dos professores, a respeito da necessidade dos números irracionais, para resolver o problema da medida de grandezas incomensuráveis.

Ademais, as referências à incomensurabilidade de grandezas foram feitas de maneira bastante vaga, como pode ser visto nas respostas a seguir, levando-nos a conjecturar sobre a ausência de uma definição (ou de uma compreensão) para esse conceito e, da mesma forma, sobre a ausência de conexão entre números irracionais e grandezas incomensuráveis no repertório de conhecimentos deste grupo de professores:

> Acredito que eles confundem os conjuntos. Os primeiros conjuntos vistos como naturais e inteiros são confundidos, mas acabam assimilando no decorrer das séries, mas com relação aos racionais e irracionais eles não conseguem imaginar, mesmo com o passar das séries, ou seja, existe a incomensurabilidade de grandezas. (prof.A).

Acho importante trabalhar só com o conceito, porque assim os alunos poderão ter uma noção de grandezas incomensuráveis. (prof. M)

Sobre a relevância do ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental

Explicitando razões que poderiam justificar a presença dos números irracionais nos currículos de Matemática do Ensino Fundamental, oito professores avaliaram como adequada/suficiente uma abordagem apenas introdutória que proporcione um primeiro contato com os irracionais, incluindo definições e exemplos, com vistas à familiarização dos estudantes com esse conjunto numérico – apenas o bastante para estabelecer a ponte entre os racionais e os reais e para permitir o acesso a outros conteúdos como: os números reais, as grandezas incomensuráveis, ou algum assunto tratado no Ensino Médio. Os extratos expostos a seguir contêm respostas nesse sentido:

Eu considero importante a partir do momento que, eles precisam ter essa noção pelo menos do que é um número irracional, pois no ensino médio usa-se o conjunto dos números reais e dentro deste conjunto tem os números irracionais. (prof. A, o destaque é nosso).
Sim, pelo menos introduzir a noção básica, para que ele possa entender determinados assuntos que serão trabalhados nas séries seguintes. (prof. J, o destaque é nosso).
Introduzir sim, mas não se aprofundar, pois nesta fase ainda é muito complicado para o aluno esses conceitos, no entanto, é importante que ele tenha um primeiro contato e algumas noções para que consiga diferenciá-los dos outros. (prof. R, o destaque é nosso).

Todos os participantes consideraram importante a introdução e o estudo dos irracionais no Ensino Fundamental, observando, todavia, que esse estudo precisaria ter restrições.

Importante sim, mas indispensável não. Será importante iniciar o conteúdo com os alunos, colocando o que é o conjunto, onde usamos, atividade concreta (jogo, atividade com calculadora,etc.). (Prof. W).
Eu considero importante termos no currículo o conceito de número irracional no ensino Fundamental, desde que se encontre um significado para este aluno. Seja despertado o interesse no aluno em saber o porquê temos o número irracional e onde podemos usá-lo na prática. O uso da calculadora ajuda muito o aluno nos exercícios. (prof. C).

Possivelmente, tais respostas sejam uma indicação da ausência de um exame crítico a respeito da indispensabilidade dos irracionais no currículo de Matemática ou a respeito da possibilidade de uma organização diferenciada do currículo, no que se refere a esse conteúdo.

Sobre as orientações curriculares para a introdução do conceito de número irracional

A fim de avaliar os conhecimentos curriculares relativos aos números irracionais dos professores, submetemos à apreciação e análise do grupo, uma atividade sugerida pela Proposta Curricular de 2008, para a introdução desses números na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, sob uma perspectiva geométrica.

Tabela 1

Atividade proposta no caderno do professor da Proposta Curricular.

O Caderno do Professor (2008) destinado à 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental sugere que o professor inicie o estudo do conceito de número irracional, propondo a seguinte questão:

> *"É sempre possível representar a razão de dois segmentos quaisquer com um número racional? Como isso pode ser feito? (Para quaisquer segmentos AB e CD é sempre possível* $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$ *, ou seja, AB =* $\frac{p}{q}.CD$*, com p e* $q \in Z$ *).*
>
> ....

.....

É muito provável que os alunos, nesse momento, afirmem que 'é sempre possível representar a razão de dois segmentos quaisquer com um número racional', principalmente pelo fato de poder subdividir a Unidade quantas vezes quiserem; em outras palavras, eles poderão utilizar submúltiplos cada vez menores" (p. 13).

(A) Como você avalia essa abordagem para o conceito de número irracional?
(B) Com que finalidade um professor poderia propor essa questão?
(C) Você já experimentou iniciar uma abordagem do conceito de número irracional de acordo com essa sugestão? Que dificuldades os alunos demonstraram, ao responder a essa questão?

As considerações feitas pelos professores, em resposta a esta atividade revelam tanto brechas em seus conhecimentos sobre a abordagem geométrica dos números irracionais – indicadas por respostas evasivas ou vagas –, quanto ausência de oportunidades de discussão e reflexão no coletivo, sobre orientações pedagógicas oferecidas em documentos oficiais de referência curricular, relativas a esse conteúdo. Ilustramos a seguir, as respostas do grupo:

Muito complexa, poderia abordar com valores na prática. (prof.K).
É uma forma interessante, apesar de não ser a única. (prof. V).
Acho que é uma abordagem interessante, pois abre discussões que levam os alunos a refletirem mais sobre o verdadeiro conceito de números irracionais. (prof. R).
É razoável, mas nem sempre os alunos chegarão a uma razão que represente um número irracional, mesmo usando os submúltiplos cada vez menores. Eles precisam aprender a assimilar estes conceitos. Mas é preciso já estarmos trabalhando isto com os alunos. (prof.E).

Apenas um professor explicitou compreensão e convicção sobre a importância de abordar os números irracionais no Ensino Fundamental, em comentário que poderia resultar em uma discussão profícua com os alunos sobre a necessidade desse conjunto de números para a ampliação dos campos numéricos:

Acho que é uma abordagem muito boa. O aluno pode não precisar de outro número, além do racional, em um caso, em outro, mas terá um momento que esse número não vai dar conta. (prof.I).

Considerações finais

Analisando tais resultados sob a perspectiva de Tall & Vinner (1981), concluímos que a *imagem conceitual* construída pela maioria dos participantes de nosso estudo, relativa aos números irracionais, era prevalentemente constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas – por exemplo, relativas às representações e à classificação desses números.

A incomensurabilidade de grandezas – interpretação geométrica dos números irracionais – conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão da indispensabilidade dos números irracionais, para representar a medida de quaisquer grandezas –, não constava do repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulados pelos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos.

Tais resultados colocam em destaque a necessidade de promover, nos cursos de formação inicial e/ou continuada, discussões sobre a relevância dos números irracionais nos currículos de Matemática, sobre as dificuldades vivenciadas pelos estudantes quando iniciam a construção desse conhecimento e sobre a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Referências e bibliografia

Ball, D., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? In: *Journal of Teacher Education*, November/December, vol. 59.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. *Publicação do Ministério da Educação*. Brasília: MEC/SEF.

_____ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Volume 2. *Publicação do Ministério da Educação.* Brasília: MEC/SEB.

Corbo, O. (2005). Seção Áurea: um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)*. Acedido em 07 de outubro de 2013 em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/olga_corbo.pdf . São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Fischbein, E., Jehiam, R., Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics,* Boston: Kluwer Academic Publishers, p. 29-44.

Kindel, D. S. (1998). Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade. *Dissertação de Mestrado.* Rio de Janeiro: USU.

Miguel, A. (*1993).* Três estudos sobre história e Educação Matemática. *Tese de doutorado, Faculdade de Educação*. Campinas: UNICAMP.

São Paulo. (2008). Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. *Publicação da secretaria de Estado da Educação de São Paulo.* São Paulo: SEE.

Sirotic, N. (2004). Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality. *Dissertação*. Canadá: Simon Fraser University.

Tall, D. O., Schwarzenberger, R. L. E. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits,* in: Mathematics Teaching, 82, 44-49. University of Warwick.

Tall, D., Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Perfil e inclinación vocacional en matemáticas de los estudiantes del Programa Ciclo de Iniciación Universitaria de la Universidad Simón Bolívar

Ramón **Abancín**
Doctorado en Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y aplicadas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
rabancin@usb.ve

Vladimir **Strauss**
Departamento de Matemáticas Puras y aplicadas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
str@usb.ve

Resumen

Es bien sabido en el ámbito académico que muchos de los aspirantes a ingresar a los estudios de educación superior suelen tener preferencias por algunas áreas particulares, lo cual refleja un notable desequilibrio en algunas áreas del conocimiento, siendo la más afectada las Ciencias Básicas. Por tanto, este artículo analiza el perfil e inclinación vocacional en matemáticas de los estudiantes que ingresan a la educación superior. La experiencia se llevó a cabo con los estudiantes invitados al programa de Ciclo de Iniciación Universitaria (CIU) de la cohorte 2012, de la Universidad Simón Bolívar (USB), Sede Sartenejas, Venezuela. Se seleccionó una muestra de 108 estudiantes, a los cuales se les administro una encuesta diseñada para verificar su perfil e inclinación vocacional con hincapié en el área de matemáticas. Como resultados se observó, que considerando aspectos relacionados con las matemáticas de Bachillerato (Tercera Etapa de Educación Básica y Educación Media Diversificada y Profesional) como: desempeño, dominio, asistencia y preparación de los estudiantes, contribución a su futura carrera, desempeño y asistencia de los profesores, se pudo estimar su perfil en matemáticas y obtener una clasificación porcentual de: Deficiente 4%, Regular 13%, Aceptable 23%, Bueno 35% y Excelente 25%. Además, los datos mostraron que la inclinación vocacional del grupo favoreció a las carreras pertenecientes al área de ingeniería (72%). La investigación permitió concluir que: los datos recabados revelan que a pesar que los estudiantes tienen un perfil en matemáticas bueno, todavía no es suficiente para responder a las exigencias de la educación superior; También surge la necesidad de facilitar información detallada a los estudiantes desde sus estudios de Bachillerato, con la finalidad de orientarlos y prepararlos como futuros candidatos a una carrera relacionada con la profesión de matemáticas, despertando así en los estudiantes interés por estas carreras tan desfavorecidas y afectadas por el desequilibrio académico.

Palabras clave: perfil, orientación vocacional, matemáticas, programa CIU, carreras, USB.

Introducción

En las sociedades actuales para cumplir con los objetivos estratégicos para el desarrollo de sus respectivas naciones, los diferentes campos laborales demanda personas altamente calificadas profesionalmente para desenvolverse eficientemente en la gran diversidad de puestos de trabajos. Pero para cumplir con la demanda laboral, deben existir estudiantes de la Tercera Etapa de Educación Básica (1^{er}, 2^{do} y 3^{er} año) y Educación Media Diversificada y Profesional (4^{to} y 5^{to} año) (cuyos niveles forman Bachillerato) que tengan afinidades por la diversidad de carreras que las instituciones de educación superior ofrecen, además de tener la capacidad de conocer sus aptitudes, habilidades, inclinación vocacional e intereses personales, durante el proceso de selección de la carrera por la cual quieren optar de las diferentes áreas del conocimiento existentes (Ciencias Básicas, Arquitectura y Urbanismo, Ingeniería, Humanidades y Ciencias Sociales, Administración, Ciencias de la Salud y Ciencias del Agro y Mar) disponibles en las instituciones universitarias. En otras palabras, los estudiantes durante su transcurso por Bachillerato, pero en especial los del último año (5^{to}), deben disponer de información concreta y precisa sobre las diferentes carreras, donde se considere: los requisitos mínimos para el ingreso, duración de la carrera (larga o corta), instituciones de educación superior donde se ofrezcan las carreras de interés, modalidades de admisión, mercado laboral, etc. Todo esto con la finalidad de que el estudiante, primero, evalué sus propias habilidades y capacidades frente a una carrera universitaria; segundo, tenga conocimiento sobre el mercado laboral; evitando así una orientación vocacional desajustada y logrando en la medida de lo posible despertar en la población estudiantil interés por todas las áreas del conocimiento, disminuyendo las diferencias preferenciales que se manifiestan en el ámbito académico.

Entre las habilidades y capacidades vale la pena subrayar por su importancia aquellas herramientas matemáticas que son necesarias para cursar con éxito una carrera universitaria en matemática o a carrearas a fines con esta. Herramientas que se deberían de ir consolidando a medida que los estudiantes avanzan en los cursos de Bachillerato, ya que estas le van a servir de puente para ingresar a las instituciones de educación superior, y de apoyo en su formación académica. Es por ello, que las matemáticas es una asignatura obligatoria durante todo el transcurso de los estudiantes por su educación de Bachillerato, y además como lo afirman Farías y Pérez (2010, p. 34) es de vital importancia en cualquier ámbito de la sociedad, sin embargo, es vista por la población estudiantil como una asignatura dura, rigurosa, formal y difícil de entender que le causa muchos problemas, sobre todo una visión que les produce un rechazo generalizado hacia su estudio. Así, en este trabajo debido a tal importancia e influencia principalmente en el ámbito académico, se está interesado en indagar sobre la preparación y percepción de los estudiantes por la asignatura de matemáticas, logrando estimar su perfil e inclinación vocacional con fuerte hincapié en matemática.

Dentro de este marco, el fenómeno que nos interesa en esta investigación es referente al perfil e inclinación vocacional en matemáticas de los estudiantes que ingresan a la educación superior universitaria, cuestión importante tanto para las instituciones de educación superior como para los aspirantes a las carreras en estas. Por lo tanto, el objetivo de esta investigación es analizar y evaluar el perfil e inclinación vocacional en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan al programa CIU de la USB, Sede Sartenejas, Venezuela, donde se identifiquen los intereses académicos y profesionales de estos. Para cumplir con el objetivo propuesto se desarrolló un instrumento, encuesta, que mide los intereses académicos y profesionales de los estudiantes, incluyendo los conocimientos que tienen sobre la carrera de matemáticas (por ejemplo, campo laboral del egresado, etc.). Además se midió el perfil del estudiante en cuanto a: sexo, tipo de colegio de origen (público, privado o subsidiado), tipo de población estudiantil (activa o flotante) y aspectos relacionados con el área de matemáticas (como desempeño, dominio, asistencia y preparación de los estudiantes, contribución a su futura carrera, desempeño y asistencia de sus profesores). El instrumento que consta de 7 proposiciones y 15 preguntas se aplicó a 108 estudiantes. La experiencia se llevó a cabo con los estudiantes (39 mujeres y 69 hombres con edades comprendidas entre 16 y 26 años) invitados al programa de CIU cohorte 2012.

Por último, este artículo consta fundamentalmente de tres (3) secciones que ofrecen información determinante sobre esta investigación. En la primera sección se presentan los conceptos, estructuras y fundamentos teóricos sobre la cual se enmarca el fenómeno de estudio. En la segunda sección, se presenta información referente a los métodos, técnicas o procedimientos utilizados para la recolección, organización y análisis de la información relevante para el establecimiento de conclusiones arrojadas por la investigación. Para finalizar en la tercera sección, se exponen las conclusiones obtenidas relacionadas con el fenómeno de estudio.

Marco de referencia

Los tres principales niveles de la educación venezolana son: Educación Preescolar, Educación Básica (Primera, Segunda y Tercera Etapa) y Educación Media Diversificada y Profesional. La educación formal ofrecida por lo menos en los dos (2) primeros niveles es gratuita y obligatoria para toda la población en edad escolar como servicio público garantizado por el Estado venezolano. Cada uno de estos niveles abarca una serie de objetivos, es por ello que solo se considerarán los niveles involucrados directamente con los fines de la investigación: Tercera Etapa de Educación Básica, Educación Media Diversificada y Profesional, y Educación Superior.

El nivel de *Educación Básica* (EB) es el segundo del sistema educativo venezolano, tiene una duración de nueve (9) años y se organiza en tres etapas sucesivas: la Primera Etapa abarca 1°, 2° y 3° grado; Segunda Etapa incluye 4°, 5° y 6° grado y la Tercera Etapa comprende 7°, 8° y 9° grado, (o equivalentemente la última etapa: 1er, 2do y 3er año, respectivamente).

La *Educación Media Diversificada y Profesional* (EMDP) constituye el tercer nivel educativo, cuya duración regular es de dos (2) años, pero en algunos casos son tres (3) años (Escuelas Técnicas), y está estructurado por 1ro, 2do y 3ro año del Ciclo Diversificado, (o equivalentemente 4to, 5to y 6to año, respectivamente). Lo importante de este nivel es que está articulado curricular y administrativamente con la educación superior. Además, garantiza a los estudiantes inscritos en este nivel, su permanencia y egreso exitoso, mediante una formación integral que tiene por finalidad profundizar en los conocimientos científicos, humanísticos y tecnológicos de los estudiantes, así como continuar con su formación ética y ciudadana que posibilite la incorporación digna y eficaz al mercado del trabajo productivo y para proseguir sus estudios en educación superior.

Estos dos niveles, forman el Bachillerato. Brihuega (1997) afirma que le Bachillerato con sus distintas modalidades, es la etapa formativa donde se deben fundamentar los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo de toda su escolarización.

La *Educación Superior* (ES) está constituida por las Instituciones de Educación Superior (IES), que según CNU y OPSU (2003, p. 192) está integrado por diferentes tipos de instituciones: Universidades, Institutos Universitarios Politécnicos, Institutos Universitarios Pedagógicos, Institutos Universitarios de Tecnología, Colegios Universitarios, Institutos Universitarios, Institutos Universitarios Eclesiásticos e Institutos Militares Universitarios). Pero en especial las universidades desempeñan un rol de suma importancia en la formación de recursos humanos del más alto nivel y en la creación, desarrollo, transferencia y adaptación de tecnología de manera que lo que ellas hacen para responder adecuadamente a los requerimientos de la sociedad moderna se constituye en un imperativo estratégico para el desarrollo nacional. Así, las universidades son reconocidas cada vez más como un instrumento de desarrollo de ciudades, regiones y países, y están consideradas como un factor clave para incrementar la competitividad y calidad de vida.

De lo anterior, se pueden resaltar dos aspectos fundamentales y en consonancia con los intereses de esta investigación: primero, la III etapa de EB y la EMDP son los cimientos para la incorporación de los estudiantes al mercado del trabajo productivo y prosecución de los estudios universitarios; segundo, son las IES las encargadas de la formación de los recursos humanos con la capacidad para responder a los requerimientos de la sociedad actual, con la finalidad de contribuir en el desarrollo de la nación.

Por tanto, la formación universitaria o profesional después de culminar los estudios de Bachillerato es de vital importancia para cualquier sociedad, debido a su constante búsqueda del desarrollo de su nación, por tanto, siempre están demandando capital humano profesional y altamente calificado para desenvolverse en los diferentes campos laborales que la conforma. Sin embargo, es bien sabido en el ámbito académico que muchos de los estudiantes aspirantes a ingresar a los estudios de educación superior tienen preferencias por algunas áreas particulares, lo cual refleja un notable desequilibrio en algunas áreas del conocimiento, siendo las más afectadas el área de las Ciencias Básicas (Química, Matemáticas, Física y Biología). Además, trayendo como consecuencias en las IES, en algunos casos, que la cantidad de aspirantes en ciertas carreras este muy por encima del número de cupos disponibles, convirtiendo para muchos de estos aspirantes su lucha por un cupo una batalla perdida; en otros casos, los aspirantes son pocos y en el peor de los casos ningún estudiante está interesado en ciertas carreras. Evidentemente, este favoritismo por ciertas áreas del conocimiento lleva a un desbalance notable en las carreras de las IES, y por ende en los puestos de trabajo del campo laboral.

En contraste de lo anterior con el área de matemáticas, no es un secreto para nadie que una de las carreras más afectadas de las Ciencias Básicas es la Licenciatura en Matemáticas y sus carreras afines (por ejemplo, Licenciatura en Matemática opción: Docente o Estadísticas y Matemáticas Computacionales, etc.). A pesar de la inmensa diversidad de investigaciones en la literatura que aportan importantes justificaciones sobre la importancia de las matemáticas tanto en el ámbito académico como el ámbito de la vida cotidiana, esta sigue siendo una de las áreas menos favoritas entre las opciones de los estudiantes cuando están decidiendo que quieren estudiar. En general, se puede mencionar, como está presente las matemáticas en los dos ámbitos. En el primero, se tiene que muchas de las otras áreas del conocimiento depende de una base matemática sólida y consolidada, como es el caso del área de Ingeniería; y en el segundo, basta como mirar a nuestro alrededor y admirar los avances logrados hoy en día por la humanidad, los cuales muchos fueron impulsados gracias a los conocimientos en matemáticas que se han generado de tiempos remotos hasta la actualidad. No se puede dejar de mencionar en este último ámbito a la naturaleza, que ella en sí misma, lleva impregnada en su belleza muchas formas y figuras que fueron el origen de importantes modelos matemáticos hoy en día, como por ejemplo, la geometría. En palabras de Brihuega (1997) las matemáticas forman una ciencia compuesta por un amplio conjunto de conocimientos que en muchas ocasiones se presentan de manera diferenciada, a pesar de que estos están en continua evolución debido a su interrelación con las otras áreas, debido a su necesidad de dar respuesta a determinados problemas prácticos derivados de estas áreas.

Así, en el último año de la EMDP cuando los estudiantes se enfrentan con la posibilidad de tomar la decisión de seleccionar una carrera universitaria deben tomar en cuenta su perfil e inclinación vocacional con revisión exhaustiva en el área de matemáticas. Pero la gran mayoría de los estudiantes no poseen las herramientas necesarias que le faciliten la decisión de seleccionar una carrera, y mucho menos aquellas que los a ayude a enfrentarse a los diferentes mecanismos de admisión de las instituciones de educación superior, y en el caso de ingresar, quizás no posea aquellas, sobre todos las que involucran matemáticas que les facilite mantenerse dentro del sistema universitario con los mínimos inconvenientes. Además, que con respecto a estas decisiones se presentan una diversidad de situaciones problemáticas tanto para los aspirantes a las carreras, como para las instituciones educativas. Es probable, que uno de los criterios opuestos en práctica por los estudiantes a la hora de seleccionar una carrera, es optar por aquellas que le garanticen mayores ingresos monetarios sin considerar si constan de las habilidades, destrezas, aptitudes, conocimientos para cursar y culminar con éxito la carrera seleccionada.

Ahora bien, para poner en perspectiva el fenómeno de estudio que nos interesa, se comenzará por dar unas definiciones de interés para esta investigación como lo son: perfil, inclinación vocacional y el programa CIU de la USB.

Para conocer el perfil académico del estudiante debe considerarse una evaluación del perfil del mismo, que según (Duque y Jiménez, 2004) esta debe ser entendida como una evaluación diagnóstica que tiene por objeto conocer la situación en que se encuentra el estudiante en cuando habilidades, conocimiento y valores. Además, de identificar aspectos que pueden influir positivamente o negativamente en el aprendizaje del estudiante durante el desarrollo del currículo. Existen diferentes procedimientos que a través de instrumentos permiten evaluar los conocimientos o habilidades que posee un estudiante, por ejemplo, se pueden mencionar: prueba de conocimientos y pruebas de actitudes e intereses.

La *prueba de conocimientos* pretende evaluar el grado en que se alcanzaron los objetivos educativos, de manera que cada pregunta pretende evaluar uno y solo uno de ellos. Estas, se emplean para estimar el nivel que tiene el estudiante en una materia académica concreta.

Las *pruebas de actitudes e intereses* emplean cuestionarios de autoaplicación, en los que el propio sujeto indica sus preferencias entre una serie de actividades profesionales lo que permite predecir los índices de satisfacción futura en una determinada actividad.

Por otra parte, la *orientación vocacional* se entenderá como el proceso de ayuda en la selección de una profesión, la preparación para esta, el acceso al ejercicio de la misma, evolución y progreso posterior, (Galilea, sf). Particularmente, se está interesado en la *orientación vocacional en educación media*, planteada por Chacón (2003, p. 69) como "el análisis de las necesidades de los estudiantes de este nivel, referidas a toma de decisiones, escogencia de carrera, vialidad de la escogencia y la transición de la vida estudiantil al mundo laboral".

Tomando en cuenta estos conceptos se puede tratar para los fines de esta investigación dar un significado a la frase *inclinación vocacional*, esto, es el resultado del proceso de análisis entre el perfil del estudiante y sus intereses en una o varias carreras, que lo llevará a tomar una decisión de selección por una o varias profesiones, durante la transición del Bachillerato al sistema de Educación Superior.

Es importante señalar que la orientación vocacional de una persona transcurre y se desarrolla a lo largo de toda su vida, comenzando desde muy corta edad, extendiéndose y reafirmándose de forma continua durante todo su desempeño laboral como profesional activo, así que no termina simplemente con el egreso de una carrera en una institución de educación superior. Particularmente, la vocación y orientación de los estudiantes se desarrolla de forma continua con los estudios desde la enseñanza primaria hasta la preuniversitaria, con una reafirmación profesional importante después del ingreso a una carrera. Sin embargo, durante este proceso el punto crucial es el transcurso por la Educación Media Diversificada y Profesional (4to y 5to año), ya que deben seleccionar la carrera por la cual se sienten más identificado, para luego enfrentarse a los diferentes procesos de admisión de las diferentes instituciones de educación superior. Por tanto, es aquí donde el desarrollo de la vocación y orientación sale a relucir, jugando un papel primordial en la selección de alguna carrera y por aquellos procesos de admisión donde el estudiante se sienta con ventaja.

Por último, se describirá brevemente el programa de CIU de la USB. Para mayor información referente a la USB y al programa CIU se puede consultar su página web http://www.usb.ve y http://www.ciu.sl.usb.ve/, respectivamente.

La USB el 25 de mayo de 2005 se creó el programa experimental Ciclo de Iniciación Universitaria (CIU) para las carreras largas en la Sede de Sartenejas. Pero el 10 de mayo de 2006 el Consejo Directivo de la USB acordó ampliar el programa del CIU a las carreras cortas de la Sede del Litoral. El 16 de abril de 2008, el Consejo Directivo decidió incorporar el CIU a los programas regulares de la USB.

El propósito del CIU es ofrecer un programa de formación para el ingreso a las carreras universitarias que se dictan en la USB, con el fin de facilitar, enriquecer y consolidar los conocimientos y la formación integral de los aspirantes a estas carreras. Además, de contribuir con la equidad en el ingreso y la prosecución de los estudios superiores. Dirigido, especialmente, a estudiantes ya egresados de la Educación Media venezolana que, habiendo presentado examen de admisión en la USB, obtuvieron una calificación inmediatamente por debajo de la nota mínima aprobatoria. La USB convoca a estos estudiantes extraídos de dos listas estrictamente secuenciales, en orden decreciente de acuerdo con la posición obtenida en el examen de admisión. El criterio que sigue la universidad para las invitaciones a los estudiantes al programa de CIU es el siguiente: (a) Invitados al CIU Sartenejas: aspirantes que hayan colocado como primera opción una de las carreras de la Sede de Sartenejas y que provengan en un 80% de liceos oficiales y en 20% de liceos privados (incluye planteles subvencionados por el Estado); (b) Invitados al CIU Litoral: aspirantes que hayan colocado como primera opción una de las carreras de la Sede del litoral y que provengan en 100% de liceos del Estado Vargas. En ambos casos el *liceo* es aquel donde el estudiante esté cursando o haya cursado su último año de estudios.

El programa atenderá: (a) La consolidación de conocimientos y desarrollo de habilidades y destrezas intelectuales, y (b) otros aspectos asociados al desarrollo personal, hábitos de trabajo y formación ciudadana. El objetivo general del CIU es facilitar, enriquecer y consolidar los conocimientos y la formación integral necesarios para cursar con éxito las carreras largas (Ingenierías, Licenciaturas en Ciencias, Arquitectura, Urbanismo y Gestión de la Hospitalidad) y carreras cortas (Técnico Superior Universitario) que ofrece la USB.

Entre sus objetivos específicos se encuentran: (a) Consolidar y complementar los conocimientos básicos en áreas como la matemática y la lectura-escritura del español; (b) Reforzar los conocimientos básicos vinculados con la carrera seleccionada; (c) Introducir al estudiante en el contexto sociocultural del país para la toma de conciencia ciudadana; (d) Reforzar el manejo instrumental del idioma inglés; (e) Conocer y aplicar técnicas para la resolución de problemas; (f) Desarrollar buenos hábitos de estudio; y (g) Una sólida formación.

El CIU comprende tres trimestres. En cada uno de ellos los estudiantes cursan las asignaturas de Lengua, Matemática y Desarrollo de Destrezas Intelectuales, Ciencias Naturales (Biología en el primer trimestre, Química en el segundo y Física en el tercero). De igual modo, incluye las asignaturas Formación Ciudadana (segundo trimestre) e Inglés (tercer trimestre). En la Sede del Litoral, el CIU incorpora, en el segundo y tercer trimestre, asignaturas especiales para la formación de los Técnicos Superiores Universitarios. Una vez concluido el CIU, si el estudiante cumplió con los requisitos establecidos en el régimen de permanencia, podrá optar a formalizar su inscripción en el Ciclo Básico de la USB.

Para finalizar es importante señalar que los estudiantes candidatos a realizar sus estudios de pregrado en la USB, podrán optar entre: 20 carreras de pregrado, conducente a títulos de Licenciatura, Ingeniería, Arquitectura y Urbanismo, y 10 carreras de pregrado, conducentes a título de Técnico Superior Universitario. A continuación se mencionan cada una de esta con su respectivo código.

Carreras largas

Área de ingeniería: 0800 Ingeniería de Computación; 0100 Ingeniería eléctrica, 0200 Ingeniería Mecánica; 0600 Ingeniería electrónica; 1800 Ingeniería de Telecomunicaciones; 0300 Ingeniería Química; 1200 Ingeniería Geofísica; 1500 Ingeniería de Materiales; 1700 Ingeniería de Producción; 4000 Ingeniería de Mantenimiento.

Área de Ciencias Básicas: 0400 Licenciatura en Química; 0500 Licenciatura en Matemáticas; 1000 Licenciatura en Física y 1900 Licenciatura en Biología.

Área de Arquitectura y Urbanismo: 0700 Arquitectura y 1100 Urbanismo.

Área de Administrativas: 3000 Licenciatura en Gestión de la Hospitalidad y 3200 Licenciatura en Comercio Internacional.

Carreras cortas

Área de Tecnología: 1TSU en Tecnología Eléctrica; 2 TSU en Tecnología Electrónica; 3 TSU en Tecnología Mecánica y 4 TSU en Mantenimiento Aeronáutico.

Área de Ciencias Sociales: 5 TSU en Administración del Turismo; 6 TSU en Administración Hotelera; 7 TSU en Administración del Transporte; 8 TSU en Organización Empresarial; 9 TSU en Comercio Exterior y 10 TSU en Administración Aduanera.

Metodología

*Participantes: e*sta investigación estuvo constituida por una población de 108 estudiantes de la cohorte 2012 de la Universidad Simón Bolívar, Sede Sartenejas, que cursaban el programa CIU. La mayoría son adolescentes cuyas edades oscilan entre 16 y 26 años. De esta población se seleccionó una muestra no probabilística, ya que se tomaron las 5 secciones naturales de grupos intactos, con una participación de 108 estudiantes, del curso de Matemática I de mencionado programa.

Instrumentos: para observar cual era el perfil e inclinación vocacional que tenían los estudiantes se les aplicó una encuesta a la muestra, diseñada para tal propósito. La misma constaba de consta de dos partes: 7 proposiciones y 15 preguntas, relacionadas con aspectos relacionados con el área de matemáticas como: desempeño, dominio, asistencia y preparación de los estudiantes, contribución a su futura carrera, desempeño y asistencia de los profesores, con la intención de tener una visión aproximada del perfil e inclinación vocacional de todo el grupo.

La primera parte contenía siete (7) proposiciones de selección simple con cinco posibles respuestas: 1 Deficiente, 2 Regular, 3 Aceptable, 4 Bueno y 5 Excelente.

En la segunda parte, estuvo constituida por 15 preguntas de selección simple con diferentes opciones de respuestas, dependiendo de la pregunta en cuestión.

Procedimiento: esta actividad se llevó a cabo al inicio del trimestre Septiembre-Diciembre 2012. Los estudiantes fueron informados de los objetivos del estudio y de la confiabilidad de los resultados y que los mismos no iban a influir en sus calificaciones finales del curso de matemáticas I del programa CIU de la USB, antes de decidir voluntariamente participar en el estudio. Las instrucciones estaban incluidas al inicio de cada encuesta.

Resultados

Una vez concluida la aplicación de la encuesta, se procedió al análisis descriptivo e inferencias de los datos.

Características generales

En las siguientes figuras se presentan el origen de la población estudiantil obtenido de la identificación de la encuesta.

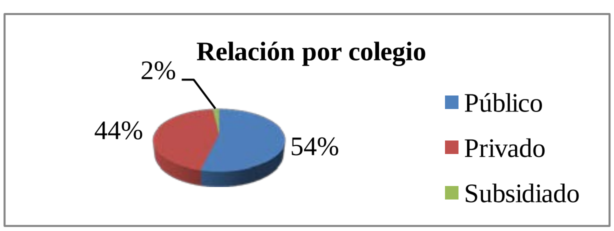


Figura 1. Relación porcentual sobre el tipo de colegio de origen

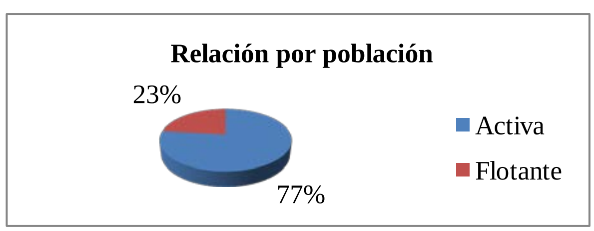


Figura 2. Relación porcentual sobre el tipo de población

Proposiciones

Las siguientes figuras representan porcentualmente las respuestas de los estudiantes a la primera parte de la encuesta que constaba de 7 proposiciones sobre matemáticas, de las cuales cinco estaban relacionadas directamente con el estudiante en cuanto a: preparación, desempeño, dominio, contribución y asistencia; y las dos últimas con sus profesores de matemáticas de Bachillerato, que contemplaba el desempeño y asistencia de los mismos.

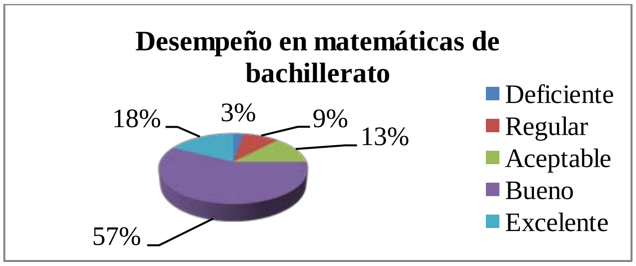


Figura 3. Relación porcentual del desempeño en matemáticas durante el bachillerato

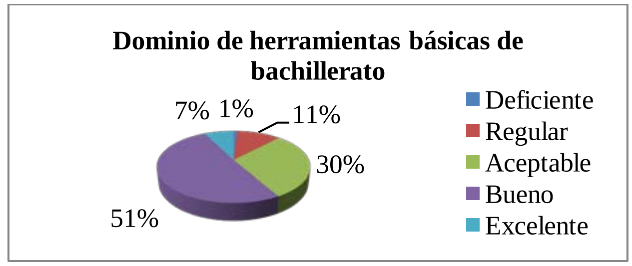


Figura 4. Relación porcentual sobre el dominio de las herramientas elementales del área de matemática

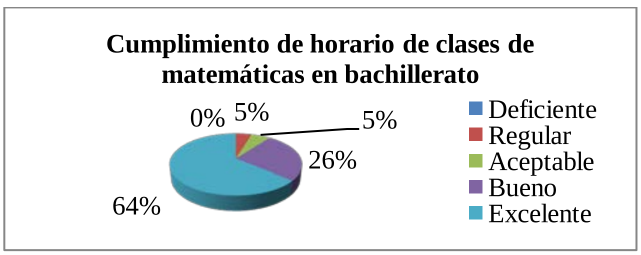


Figura 5. Relación porcentual sobre el cumplimiento de horario de clases de matemáticas

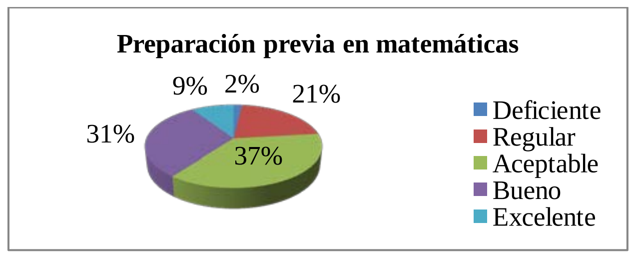


Figura 6. Relación porcentual sobre la preparación previa para cursar matemáticas I del CIU

.

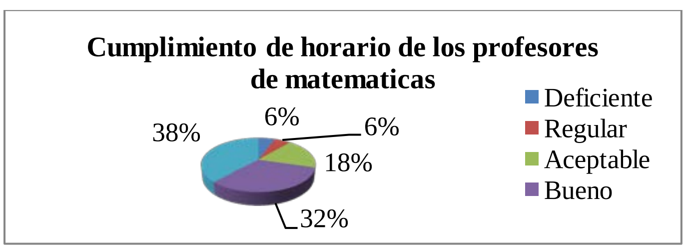


Figura 7. Relación porcentual sobre el cumplimiento de horario de los profesores de matemáticas

.

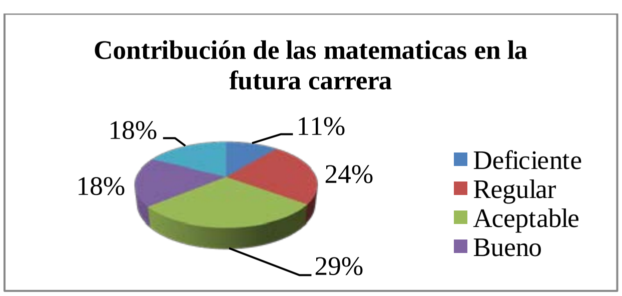


Figura 8. Relación porcentual sobre la contribución de los cursos de matemáticas en la futura carrera universitaria

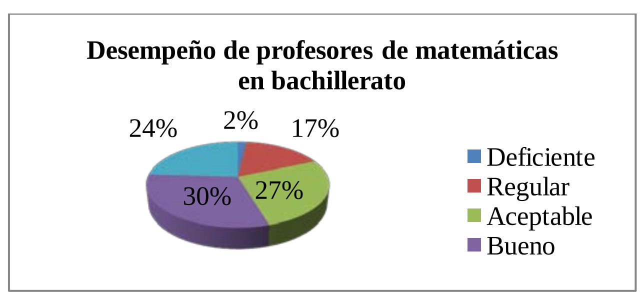


Figura 9. Relación porcentual sobre el desempeño global de los profesores de matemática

Preguntas

A continuación se presentan gráfica y porcentualmente los datos recabados en las encuestas correspondientes a la sección de preguntas. La primera pregunta estaba relacionada con la carrera que los estudiantes querían estudiar, para determinar la inclinación vocacional de la cohorte.

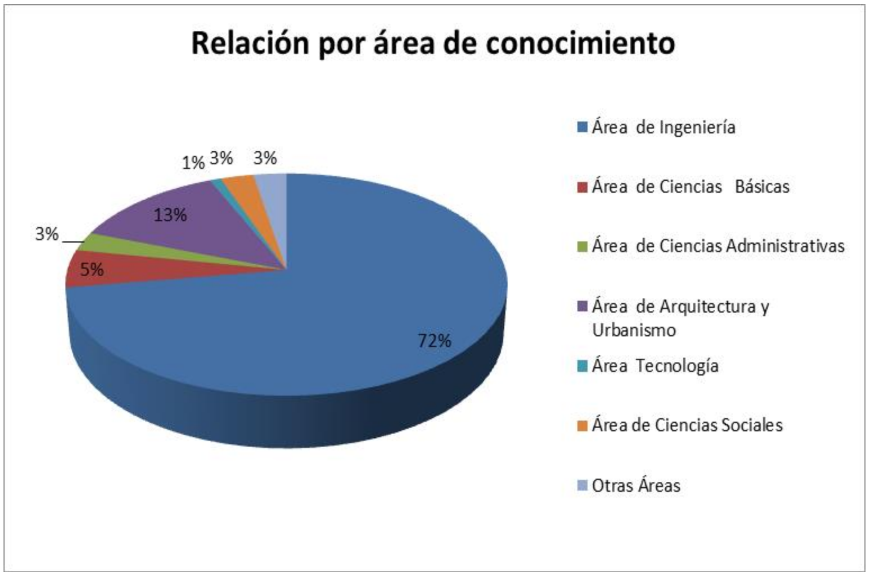


Figura 10. Relación porcentual por áreas del conocimiento de las carreras que los estudiantes desean estudiar

.

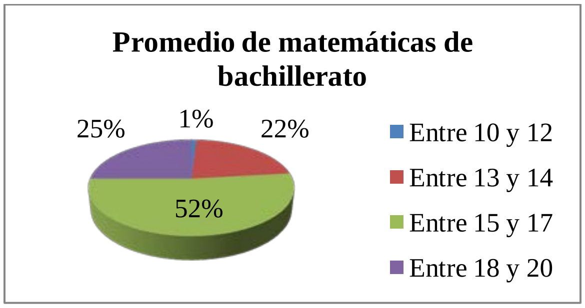


Figura 11. Relación porcentual sobre el promedio en matemáticas de los estudiantes en Bachillerato

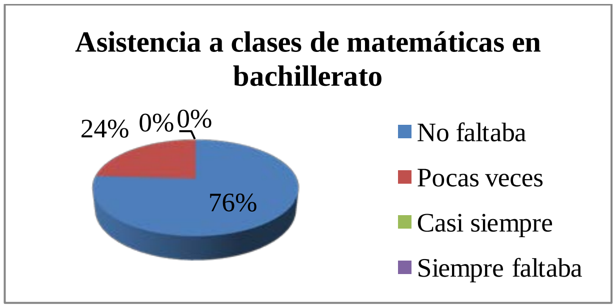


Figura 12. Relación porcentual sobre el desempeño global de los profesores de matemática

.

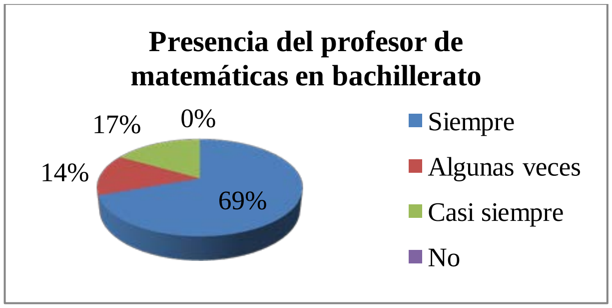


Figura 13. Relación porcentual sobre la asistencia de los profesores de matemáticas en Bachillerato

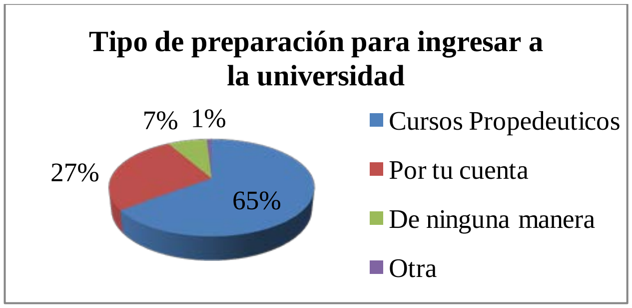


Figura 14. Relación porcentual sobre el tipo de preparación previa para ingresar a la universidad

.

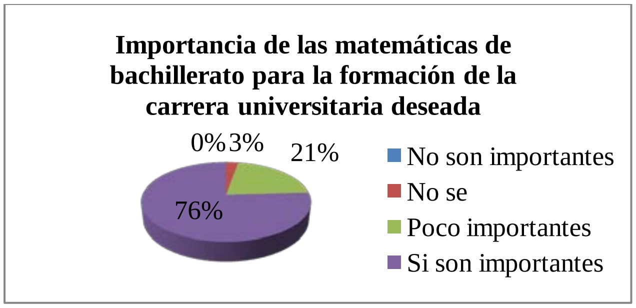


Figura 15. Relación porcentual sobre la importancia de las matemáticas para su formación universitaria

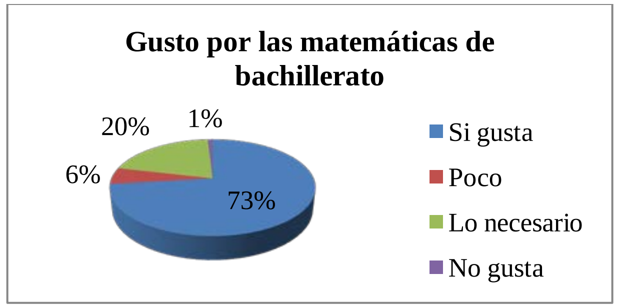


Figura 16. Relación porcentual sobre el gusto de las matemáticas

.

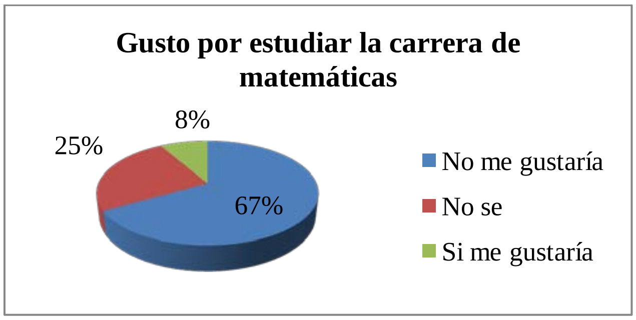


Figura 17. Relación porcentual sobre el gusto de estudiar la carrera de matemáticas

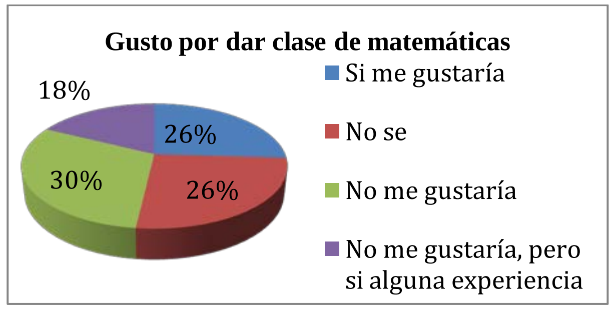


Grafico 18. Relación porcentual sobre el gusto por dar clases de matemáticas

.

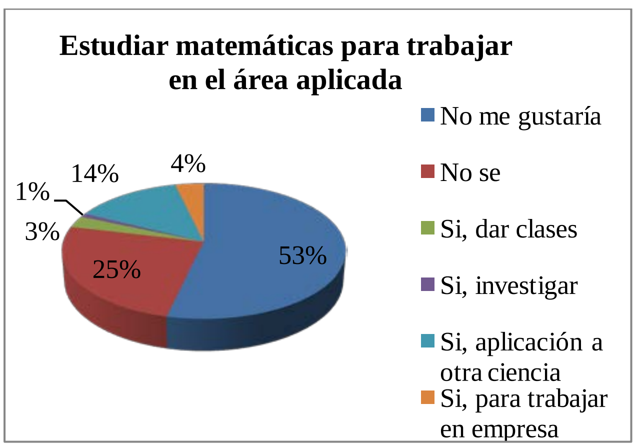


Figura 19. Relación porcentual sobre el interés de estudiar matemáticas para trabajar en el área aplicada

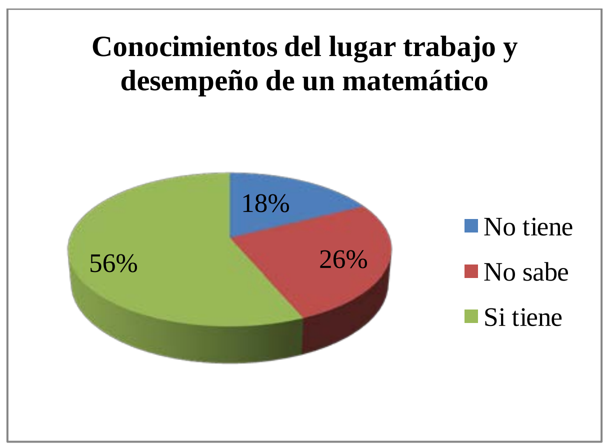


Figura 20. Relación porcentual sobre el los conocimientos del lugar de trabajo de un matemático

.

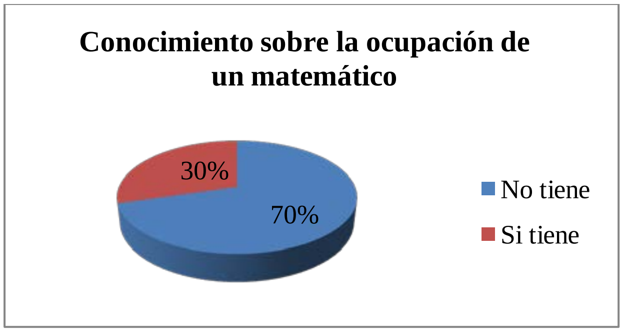


Figura 21. Relación porcentual sobre el de la ocupación de un matemático

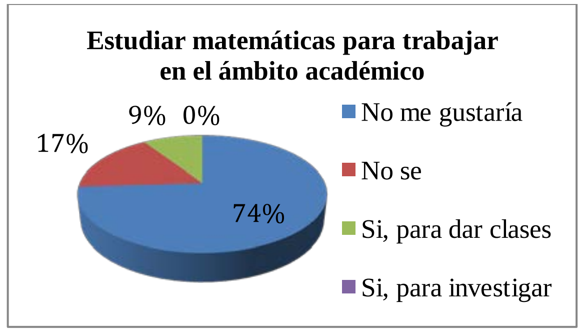


Figura 22. Relación porcentual sobre el gusto de estudiar matemáticas para trabajar en el ámbito académico

Discusión de resultados

Considerando aspectos relacionados con las matemáticas de bachillerato como: desempeño, dominio, asistencia y preparación de los estudiantes, contribución a su futura carrera, desempeño y asistencia de los profesores, se puede estimar el perfil en matemáticas de los estudiantes del programa CIU de la cohorte 2012. Con respecto a este perfil en general se obtuvieron los siguientes porcentajes: Deficiente 4%, Regular 13%, Aceptable 23%, Bueno 35% y Excelente 25%.

Ahora bien, considerando particularmente cada uno de los aspectos, los resultados obtenidos a través de la encuesta aplicada a los estudiantes del programa CIU son los siguientes:

En la figura 1, se observa que el porcentaje de estudiantes de liceos privados es de 44% mas 2% de los subsidiados, con un total de 46%, cuyo resultado no van acorde con los lineamentos del programa que estipula que 20% deben ser provenientes de liceos privados incluyendo los subsidiados y el 80% de públicos. Pero los datos recabados revelan 54% de liceos públicos.

En la figura 2, se observa que el 77% de los estudiantes aceptados provienen de la población activa y el resto de la población flotante.

Las figuras 3 y 4 muestran que los estudiantes encuestados consideran que su desempeño fue bueno (57%), dominan las herramientas básicas (51%) y obtuvieron promedios excelente y bueno (77%) en sus cursos de matemáticas de bachillerato, además, en la figura 6, el 68% de los estudiantes afirma que la preparación previa en matemáticas antes de ingresar a la universidad es aceptable y bueno. Sin embargo recordemos que su calificación estuvo por debajo de la nota aprobatoria mínima de la prueba de admisión. A pesar de que el 65% se preparó en matemáticas para la prueba de admisión a través de cursos propedéuticos, 27% por su cuenta y el resto de ninguna manera.

La figura 5 y 12, muestra que más de un 90% de los estudiantes afirma que su asistencia a sus cursos de matemáticas en bachillerato fue excelente y buena.

Para ser las matemáticas una asignatura obligatoria en Bachillerato, más de un 30% repartido entre deficiente, regular o casi siempre y algunas veces en las figura 7 y 13, correspondiente a la asistencia de los profesores en esta área es alarmante. Ya por si, las matemáticas tienen problemas de motivación en los estudiantes, con la inasistencia de los profesores el problema se agrava. Sin mencionar, que los estudiantes en la figura 9, al evaluar el desempeño de sus profesores poco menos de la mitad consideraron que fueron deficiente, regular y aceptable.

La figura 10, revela la inclinación vocacional de toda la corte estudiante, arrojando resultados interesantes. El 72% de los estudiantes quiere ser ingeniero, el 5% estar en las carreras de Ciencias Básicas, 13% quiere estudiar arquitectura o urbanismo y el resto en las otras áreas del conocimiento.

El 67% de la población estudiantil en la figura 17 no le gustaría estudiar la carrera de matemáticas. A pesar de que en la figura 16, el 73% admite que le gusta, y en la figura 15, el 76% admite que las matemáticas son importantes para la formación de la carrera universitaria deseada, y otro 21% reconoce que lo son poco. Y la contribución de las matemáticas en su futura carrera en porcentaje es considerable, 65%. Tal vez este fenómeno, se deba a que en la figura 21, el 70% de los estudiantes desconoce lo que hace un egresado de la carrera de matemáticas.

Para finalizar, los resultados de la encuesta apunta de que en la figura 20, los estudiantes en su mayoría (56%) sabe lo que hace un matemático, creyendo de que solo imparte clases, es por ello que quizás las respuestas suministradas por estos en las figuras 19 y 18, con respecto a estudiar y dar clases de matemáticas fue negativa.

Conclusiones

Los resultados mostrados en esta investigación, permitieron principalmente mostrar dos aspectos centrales. Primero, el perfil académico de los estudiantes que egresan del bachillerato actualmente es bastante deficiente, por lo menos los que desean estudiar en la USB, ya que no cumplen con el perfil requerido por la institución, por tal motivo surge el programa CIU. Los estudiantes del programa CIU, son aquellos que presentaron la prueba de admisión interna y obtuvieron una calificación inmediatamente por debajo de la nota mínima aprobatoria, sin embargo la universidad los invita a participar en el programa CIU, donde tendrán la oportunidad de ser orientados y preparados como futuros aspirantes a las carreras disponibles en la USB, además de que puedan explorar y fortalecer las destrezas que poseen y llevarlos al desarrollo de las que aún no han alcanzado, por supuesto durante este proceso también descubrirán y potenciaran las habilidades y competencias que les permitirán responder a las exigencias planteadas por la educación superior; Segundo, los resultados sobre inclinación vocacional de los estudiantes dan pie a pensar en la necesidad de crear en las unidades educativas de Bachillerato e institutos de educación superior programas que brinde a los estudiantes trabajar con su orientación vocacional y lo lleve a desarrollar un perfil profesional con mayores probabilidades de éxito al cursar una carrera universitaria en los diferentes institutos de educación superior. Esta iteración entre estudiantes, unidades educativas e institutos de educación superior, llevará a la búsqueda constante de mecanismo que involucren al estudiante de bachillerato y siempre sea el protagonista principal en las actividades relacionadas con su futura profesión.

La investigación permitió arrojar las siguientes conclusiones:

(1) Los datos recabados revelan que a pesar que los estudiantes tienen un perfil en matemáticas bueno, ya que los porcentajes más alto estuvieron concentrados entre las respuestas Aceptable, Bueno y Excelente. Sin embargo, no es suficiente debido a que no cumple con los requisitos exigidos por la educación superior, y esto se refleja con el hecho de que estos estudiantes obtuvieron en la prueba de admisión una calificación inmediatamente por debajo de la calificación aprobatoria.

(2) Posiblemente el desconocimiento de los estudiantes de bachillerato por lo que hace un egresado en matemática, podría ser una causa por las cuales un alto porcentaje de la población estudiantil no le interese estudiar matemática como carrera.

(3) A pesar que un alto grado de estudiantes se prepara en matemáticas para la prueba de admisión en cursos de propedéuticos, estos no logran aprobar con éxito la prueba de admisión. Cuestión interesante porque los cursos no están logrando preparar con éxito a aspirantes a una carrera universitaria.

(4) El bajo porcentaje de estudiantes interesados en el área de las ciencias Básicas (5%) es alarmante, ya que es bien sabido que tener profesionales, por ejemplo, en matemáticas es importante ya que las demás carreras necesitan de estos para su formación exitosa, por ejemplo, las carreras de ingeniería depende de una buena base en matemáticas.

(5) A pesar de que programa CIU acepta 80% de los estudiantes provenientes de colegios públicos, 20% de privados incluyendo los subsidiados por el estado, los resultados de las encuetas reflejaron 54% de públicos, 46% privados. Discrepancia que fue presentada a la coordinación del programa CIU, quienes informaron que gran parte de los estudiantes de colegios públicos aceptados al programa CIU no mostraban interés en inscribirse una vez que se les hacia el llamado para formalizar su inscripción.

(6) Los porcentajes entre población flotante y activa reflejan que quizás si un estudiante no ingresa a la universidad inmediatamente de su egreso del bachillerato, su probabilidad de éxito en la admisión a la educación superior se reduce.

Referencias y bibliografía

Brihuega, J. (1997). Matemáticas en el Bachillerato. *Suma*. 3, 113-122.

Consejo Nacional de Universidades (CNU) y Oficina de Planificación del Sector Universitario (OPSU). (2003). *Oportunidades de estudio en las instituciones de educación superior: Proceso Nacional de Admisión*. Caracas, Venezuela.

Chacón, O. (2003). Programa de orientación vocacional para la educación media y diversificada. Acción Pedagógica, 12(1), 68-79.

Duque, N., & Jiménez, C. (2004). Modelo de generación de cursos virtuales adaptados al perfil del estudiante. Recuperado Marzo 30, 2013, de http://www.ateneonline.net/datos/31_03_Duque_N_y_Jimenez_R.pdf

Farías, D., & Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración. *Formación Universitaria*, 3(6), 33-40.

Galilea, V. (Sf). Orientación Vocacional. Recuperado Julio 02, 2013, de http://www.sie.es/crl/archivo_pdf/ORIENTACION%20VOCACIONAL.pdf

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües

Luis Arturo Ávila Meléndez[1]
Instituto Politécnico Nacional, CIIDIR IPN Unidad Michoacán
lavilam@ipn.mx

Resumen

El estudio presenta evidencias iniciales de la pertinencia de que los profesores de educación básica que atienden niños jornaleros migrantes conozcan algunas técnicas de enseñanza de segundas lenguas que les permita diseñar y conducir actividades para el aprendizaje de las matemáticas en las que el lenguaje humano sea una herramienta y no un impedimento. La ponencia reflexiona en torno a la relación entre las áreas de matemáticas y comunicación y lenguaje en educación básica. Presentamos evidencias de que la formación actual de los profesores en dicho contexto no les permite diagnosticar la problemática y por lo tanto no plantean estrategias para transformarla. Encontramos que de forma positiva los niños manifiestan un interés y llevan un desempeño poco desfasado de los trayectos regulares en el área de matemáticas. Identificamos algunos procedimientos didácticos en los que sería útil contar con una perspectiva docente adecuada a un contexto en el que la lengua de enseñanza es una segunda lengua.

Palabras calve: segunda lengua, diglosia, jornaleros, México, educación básica

Contexto de la investigación

La localidad de estudio se ubica al noroccidente de Michoacán, México, estado del centro-occidente del país, una zona conocida como el "bajío". La investigación se realiza en una zona de atracción de familias jornaleras migrantes que provienen en su mayoría de comunidades

[1] Investigación realizada con el apoyo de los proyectos SIP2013911, "Proletarización y empresas solidarias de turismo rural en la restructuración productiva del noroccidente de Michoacán" y "Interrelaciones entre movimientos migratorios, trabajo precario, pobreza y educación de los niños migrantes", SEB/SEP-CONACYT 2010, No. 162784 y Universidad de la Ciénega del Estado de Michoacán de Ocampo 02-12.

indígenas y que hablan diferentes lenguas indígenas. Se trata además de lenguas “subordinadas”, es decir, durante siglos han sido marginadas de las instituciones del Estado (gobierno, escuela), por lo que no actualizaron su funcionalidad en campos semánticos diversos. Además, no desarrollaron, salvo contadas excepciones, un proceso de normalización de la escritura. Si bien es cierto que el bilingüismo se encuentra extendido entre la población adulta de la mayoría de los pueblos originarios, muchos niños y niñas tuvieron como lengua materna la lengua indígena y en los primeros años de la educación primaria son más competentes en dicha lengua. Provienen principalmente de los Estados de Guerrero, Michoacán y Oaxaca al sur del país. Las principales lenguas habladas son: tlapaneco o me’pha, mixteco, purépecha y náhuatl. Dichos estados son los que presentan una base de la pirámide poblacional amplia, donde predomina la población infantil y tienen una presencia de población indígena elevada (Vázquez: 2010). Se trata de una migración itinerante cuyos periodos de retorno al lugar de origen se han reducido debido a una desvinculación con el trabajo agrícola en un terreno propio y por la falta de una casa propia en aquel lugar (Miranda, Albarrán y Echeverría, 2008).

Estudiamos en particular a los jornaleros que se encuentran laborando temporalmente en una ciudad del nor-occidente de Michoacán, en la que se produce chile verde, chile pimiento, jitomate y cebolla. Lo particular de este sitio de atracción es que los trabajadores llegan en su mayoría por su cuenta, y durante su estancia residen en caseríos o “vecindades” que se localizan dentro de la propia área urbana en torno a la cual se ubican varios valles agrícolas Miranda, Albarrán y Echeverría (2012). Esto contrasta con otros lugares de concentración de jornaleros que se ubican dentro de los propios campos de cultivo, alejados de centros y población urbana.

El contexto educativo corresponde a un programa especial que coordina el gobierno federal denominado “Programa de Educación Preescolar y Primaria para Niñas y Niños de Familias Jornaleras Agrícolas Migrantes” (PRONIM). El programa es diseñado para intentar adecuar los contenidos generales de educación básica a las condiciones de enseñanza de los niños migrantes. Tiene un sistema centralizado de registro de avances por módulos, de tal forma que se pueda llevar el registro de un niño que curse un pequeño segmento del programa en una localidad y posteriormente cursar otro en otra localidad distinta. Las condiciones de trabajo escolar son precarias en cuanto a: infraestructura mínima (frecuentemente falta energía eléctrica en las aulas), condiciones laborales (profesores becarios, alta rotación), dificultades para la participación de los padres de familia en la gestión escolar, condiciones de desnutrición y trabajo infantil de los alumnos (Yurén et al. 2011). Se trata entonces de niños en riesgo de desescolarización, en condiciones de extra-edad y con lengua materna diferente al español (Albarrán et al 2011). Se calcula además que el programa PRONIM solamente está logrando atender a una fracción mínima, por debajo al 10%, de niños que se encuentran en situación de migración jornalera (SEP, Acuerdo 515, 2009: 4).

En la ciudad del estudio, las instalaciones de PRONIM en las que se atiende el nivel básico de preescolar, primaria y secundaria consiste en un conjunto de cuatro salones ubicados dentro del albergue del gobierno del estado, en las que a veces hay problemas para la decisión de los pagos de la electricidad entre el municipio, y el gobierno estatal; un conjunto de 4 aulas móviles de aproximadamente 2 metros de ancho por 6 de largo ubicadas en el terreno de un parque recreativo infantil del municipio aproximadamente a cuatro cuadras del albergue; y por último, una casa que es prestada para servir de escuela y que carece de un diseño adecuado para niños pequeños y también carece de electricidad y baños. Además, en ocasiones se acondiciona de forma muy elemental algún patio o pasillo de alguna cuartería para atender a algunos niños en la temporada de mayor presencia de familias jornaleras en la localidad. La información analizada en esta ponencia proviene de una clase impartida en un aula móvil durante el periodo de temporada alta, agosto-diciembre de 2012 en la que estaban presentes niños de 3º y 4º grados de educación primaria.

En los lugares de origen funcionan escuelas del sistema bilingüe intercultural. La mayoría de ellas se encuentra padeciendo los sistemas de gestión descentralizado y de "participación social", que han significado en los hechos la merma sostenida en el presupuesto dedicado a mantenimiento de la infraestructura escolar en las instituciones públicas del nivel básico. Se ha identificado también procesos asociados al escalafón sindical que propician que los profesores con menor experiencia se ubiquen en las escuelas que más competitividad requieren del profesor, escuelas en las que además se tiene una rotación de personal mayor (Blanco, 2011). Estas condiciones, han propiciado que en casi la totalidad de las escuelas del sistema bilingüe intercultural no se hayan desarrollado adecuadamente sistemas de lectoescritura de transición programada (Hamel, 2004), sino que se mantenga la castellanización y el predominio de la escritura en únicamente español. Esto implica que las bases de la escritura no sean adecuadas para alcanzar niveles de escolarización mayores de la misma manera que lo haría un monolingüe en español. Considerando ambos contextos, el de origen y el de llegada, los niños y niñas jornaleros agrícolas reiteradamente caen en círculos viciosos que los llevan a la desescolaraización.

Síntesis de la metodología empleada

El principal eje metodológico es la etnografía focalizada (Knoblauch, 2005), realizada a través del videoanálisis de fragmentos específicos de clases "auténticas" y sesiones orientadas a promover el aprendizaje cooperativo. La etnografía focalizada se realiza en periodos de tiempo cortos, se centra en tipos de acciones sociales específicas, cuenta con registro audiovisual y transcripciones de los mismos, tiene la posibilidad de hacer análisis de secuencias de acciones, los registros permiten realizar sesiones de análisis de datos grupales (video-análisis intersubjetivo).

Se analizaron en total seis sesiones en fechas convenidas con profesores de una hora y media aproximadamente. Adicionalmente a estas sesiones grabadas se observaron y se aplicaron alrededor de 12 sesiones a lo largo de tres meses de un ciclo escolar de 5 meses. Previamente al trabajo focalizado de observación se realizaron visitas, pláticas y se entregaron documentos explicativos de los objetivos del proyecto a profesores y autoridades (una revista con un artículo ilustrativo, protocolo inicial). Se inició el contacto en febrero de 2012 y se mantuvieron visitas, alrededor de dos por mes, hasta marzo de 2013. Actualmente se están elaborando materiales para realizar una primera devolución de resultados.

La observación y análisis de los videos inició con la selección de fragmentos considerados pertinentes al objetivo de la investigación por parte del equipo de investigación. Los investigadores realizaron un primer pre-análisis que fue complementado después con una sesión de discusión con los profesores colaboradores, en la que ellos proporcionaban su opinión respecto a lo que estaba ocurriendo en el fragmento que se les mostraba. Se diseñaron preguntas guía de forma cuidadosa, para que los profesores no advirtieran el aspecto que en particular al equipo le interesaba discutir, sino que se les permitía tener una perspectiva "abierta" de la acción en curso. Posteriormente ambas perspectivas fueron integradas para concluir el análisis de cada fragmento, de forma que pudiera decirse que era un análisis colaborativo entre los investigadores y los docentes (Gomes Castro et al 2010).

En estos avances se presenta la información correspondiente a una sesión de observación en una clase de matemáticas en la que estaban presentes niños de 3º y 4º grados de educación primaria, dentro de un aula móvil. Se encontraban asistiendo 14 niños, 2 de los cuales se encontraban en un ejercicio paralelo al de la mayoría pues se habían incorporado recientemente y la profesora decidió hacer un seguimiento distinto ton ellos. De los doce que realizan el ejercicio analizado, sólo cuatro son niñas. Al centro de esta aula esta un baño, pero este no funciona, por ello se utiliza para guardar material didáctico y papelería. El espacio diseñado para baño, divide al grupo, ya que los niños deben de acomodarse en ambos lados de dicho espacio. En este caso, la mayoría del grupo se encontraba del lado izquierdo del baño, lado más cercano al pizarrón. Pero dos de los alumnos estaban situados al otro extremo del aula.

Resultados y conclusiones

En esta ponencia se presentarán avances de específicos con respecto a la necesidad del manejo de técnicas para la enseñanza de segundas lenguas durante la clase de matemáticas, dado el contexto social e institucional del programa PRONIM en una ciudad al norte de Michoacán, México. El fragmento seleccionado para ejemplificar el tipo de situaciones de enseñanza de matemáticas en las que sería pertinente la capacitación para la enseñanza de L2, corresponde a una clase de matemáticas del grupo de 3º. Y 4º. (multigrado), en la que se estaba revisando el tema de la multiplicación y la comprensión del sistema de numeración decimal mediante la descomposición de los números según la posición de los dígitos (valor posicional).

Cuando iniciamos la videograbación, la profesora se encontraba trabajando operaciones matemáticas con los niños: multiplicaciones de dos dígitos en el multiplicando y uno en el multiplicador. Daba una explicación breve frente al grupo. Escribía operaciones en el pizarrón, y trataba de resolverlas con la participación de los alumnos. La profesora preguntaba a los niños las tablas de acuerdo a la multiplicación que se estaba resolviendo en el momento, cuando los niños respondían ella escribía el resultado en el pizarrón, en el lugar que correspondía. Si se les dificultaba a los niños alguna operación, la profesora les indicaba que se apoyaran en una cartulina que se encuentra pegada del lado derecho del aula. En ella están escritas las tablas de multiplicar.

Como siguiente actividad, la profesora escribió en el pizarrón una serie de multiplicaciones. Pidió a los niños y niñas que las resolvieran de manera individual. Los niños trataron de resolverlas de manera individual. Algunos solicitaron la ayuda de la profesora. La profesora sólo se aproximó a la mesa más cercana al pizarrón, que es donde se encuentra la mayoría del grupo. Al menos en esta actividad no acudió con los dos niños que estaban en el fondo del aula.

La profesora 4 espera un momento. Supone que todos los niños y niñas han resuelto todas las operaciones indicadas. Pasa a la siguiente etapa, donde repite la misma actividad, con diferentes operaciones. Continúa la sesión con una tercera actividad, la cual tiene como objetivo que los niños identifiquen dentro de las cifras, unidades, decenas y centenas. Para esta actividad la profesora se basa en las cifras obtenidas de las multiplicaciones, y da una breve introducción a las unidades, decenas y centenas. Pide le den un número, y lo escribe en el pizarrón. La profesora toma como ejemplo una de las cantidades escritas en el pizarrón y la resuelve, colocando el número de unidades, decenas y centenas con el que cuenta tal cifra.

Cuando resuelve la primera cantidad, pide a los niños y niñas que intenten resolver las siguientes cantidades. La profesora 4 se acerca nuevamente con la mesa del frente con la intención de apoyar a los niños. Pasa un breve momento y uno de los niños que está sentado en el otro extremo del aula, le dice “maestra ya termine”, y la profesora, sin verificar le responde diciéndole que ayude a uno de sus compañeros que se encontraba en la mesa cercana al pizarrón, sin dar explicaciones específicas sobre cómo hacerlo.

El objetivo por el cual se seleccionó este fragmento del video, fue porque en él se identifica cómo la profesora intenta utilizar la tutoría entre pares con sus alumnos y durante ella se observan claramente las dificultades de un niño indígena que realizó adecuadamente las operaciones pero que enfrenta un problema con la lengua escrita. En el fragmento se muestra una evidencia clara sobre cómo se trabaja con los niños y niñas que están más avanzados académicamente, pero también se observan la necesidad de que la profesora especifique más el tipo de ayuda que requiere el alumno en desventaja pues a pesar de que el niño logra reproducir las palabras, se observa que se trató de un simple ejercicio de caligrafía sin comprensión, como se muestra en el análisis del fragmento que se presenta a continuación.

En el video se observa un avance de los estudiantes a un ritmo relativamente homogéneo de todos los estudiantes en la actividad dedicada a la multiplicación, en la cual el lenguaje oral (principalmente explicaciones de la profesora) acompaña las representaciones numéricas de la multiplicación. Sin embargo, durante la actividad siguiente, en la que los estudiantes debían descomponer los resultados numéricos en unidades, decenas y centenas, la profesora le otorga al lenguaje escrito una función importante para la representación del funcionamiento del sistema decimal pero no asume que esta estrategia resulte problemática para algunos de los alumnos que hablan lengua indígena como lengua materna.

Figura 1: Secuencia 1. Negociación de la interacción.

En la secuencia 1 se observa que el niño 2 se acerca para intentar copiar del cuaderno de niño 1. El niño 1 cubre con su brazo su cuaderno. A continuación se observa que el niño 1 da indicaciones muy focalizadas que se limitan a dictar palabras o incluso deletrearlas tomando como base su propio escrito.

Figura 2: Secuencia 2. Dictado y deletreo.

La tutoría dura aproximadamente 12 minutos. Posteriormente se observa que el niño 1 comienza a dejar copiar al niño 2 directamente de su cuaderno. Esto es congruente con el hecho de que el niño tutor simplemente estaba apoyando una transcripción.

Figura 3. Secuencia 3. Acomodo.

A lo largo de la interacción el niño 2 insiste en tres momentos distintos en tomar el cuaderno del niño tutor. Finalmente, tras las dos secuencias anteriores, el niño 2 tutor logra tomar el cuaderno y copiar directamente. En este punto es en donde el tipo de apoyo que logra dar el niño tutor se hace explícito (copiado, transcripción). El niño 2 cuenta con el apoyo del niño tutor pero solamente para preguntas muy específicas como reconocer la letra o la palabra que está escrita.

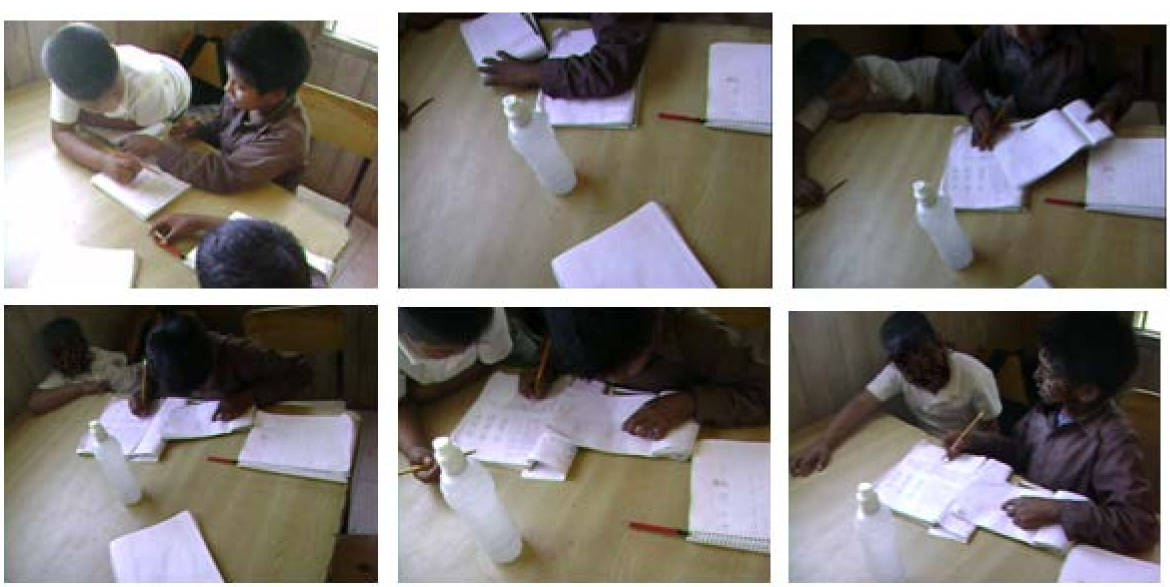


Figura 3. Secuencia 4. Copiado directo.

Presentaremos a continuación un fragmento transcrito de la interacción de ambos alumnos, para ilustrar el tipo de orientación que le proporciona el alumno tutor a alumno 2.

Tabla 1.
Fragmento de tutoría

Identificadores del fragmento: 26-Octubre-2012; profesora 4; "matemáticas"; archivo MOV00640; tiempo: 02':20"-05':08".		
Tiempo	Transcripción del diálogo	Observaciones especificas
02`:20"             05`:08"	**Niño 1:** Maestra, ya **Profesora 4**: Ahí voy niño1. Ayúdale a niño 2 por favor. Niño 2 ve, dile a niño 1 que te ayude por favor. Ándale. Niño 1, ¡ayúdale! Pero explícale como, si ya sabe cuál es el de la izquierda y la derecha. **Niño 1:** Pon la "m" aquí **Niño 2**: A ver tu cuaderno **Niño 1:** Pon la "m" **Niño 2:** A ver **Niño 1:** Este, ahora, ahora, una raya, una raya. Borra la "s" y ponla aquí, otra igual que ésta, la "e".	Niño 2 va a la mesa donde se encuentra niño 1 y la maestra sigue con los demás del grupo Niño 2 trata de quitarle el cuaderno a su compañero que le está diciendo que poner Niño 1 ve su cuaderno y le señala a niño 2 cual letra sigue para que la copie Niño 2 logra quitarle el cuaderno a niño 1 y copia lo que él tiene.

En particular observamos que el niño 2 alcanzó a realizar las operaciones de forma adecuada, pero al pasar a la siguiente actividad no le fue posible realizarla de forma independiente. Se aprecia que la profesora procuró apoyar al niño mediante la cooperación de otro estudiante que había concluido la actividad y que acudía de forma más regular a clases (estudiante hispanohablante y residente en la localidad de atracción). En el fragmento se observa, ente otras cosas, que el alumno-tutor recurre a un dictado, por momentos letra por letra, y posteriormente se observa que el alumno-aprendiz copia las palabras de forma mecánica directamente del cuaderno de su compañero de clase. El análisis del video muestra indicios de que la profesora no considera importante atender dicha situación de forma diferente. El alumno-aprendiz era un niño migrante cuya lengua materna no es el español. Su desempeño muestra que su capacidad para el pensamiento matemático resulta acorde con el avance de sus demás compañeros, pero que su proficiencia en español para la situación escolar específica no le permitía tener un aprovechamiento de la actividad como lo tenía planeado la profesora (Villaseñor, 1998).

Concluimos que el manejo de algunas técnicas empleadas por profesores de enseñanza de segundas lenguas podría traer beneficios a los estudiantes indígenas. Dentro de los objetivos generales del proyecto, encontramos la necesidad de revisar los diseños de las actividades en equipo para que ocurran interacciones de cooperación entre los alumnos. Sin embargo, de forma específica a las clases de matemáticas, en un contexto de multilingüismo y diglosia, los profesores podrían recurrir a juegos lingüísticos que permitirían a los niños ejercitar el uso de palabras o frases en contextos específicos (Terborg y García, 2010).

Referencias

Albarran, B., Miranda, A. y Ávila L. (2011). Escuela, trabajo duro y subalimentación. factores contrapuestos en la vida de los niños recolectores itinerantes. En Victorino, L. y G. Martínez (coord.), Educación ambiental para la sustentabilidad innovación, transdisciplinariedad e interculturalidad en educación superior (pp. 111 -138). México: Castellanos Editores y Universidad Autónoma Chapingo.

Blanco Bosco, E. (2011). Los límites de la escuela: Educación, desigualdad y aprendizajes en México. México: El Colegio de México.

Hamel, Rainer E., Brum, M., Carrillo A., Loncon, E., Nieto R. y Silva E. "¿Qué hacemos con la castilla? La enseñanza del español como segunda lengua en un currículo intercultural bilingüe de educación indígena", Revista Mexicana de Investigación Educativa 9, 20, 2004, pp. 83-107.Knoblauch, Hubert (2005). Focused ethnography", Forum Qualitative Social Research Sozialforschung, vol. 6, núm. 3, art. 44, septiembre. Disponible en http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/20/43. Consultado el 19 de agosto de 2012.

Miranda A., Albarrán B. y Echeverría González, M.R. (2008). Migración y desvinculación con la tierra, Memorias en extenso del II Encuentro Nacional sobre Estudios Regionales, Universidad de Guadalajara, CUCIENEGA, Ocotlán, Jalisco, 2-4 octubre, 15 pp.

Miranda A., Albarrán B. y Echeverría González, M.R. (2012). "La situación de los jornaleros en Yurécuaro", En en Salvador Berumen y Jorge A. López (Coords.) Pobreza y Migración: Enfoques y evidencias a partir de estudios regionales en México (pp. 163-186). México: Instituto Nacional de Migración, Tilde Editores.

Secretaría de Educación Pública. Acuerdo número 515 por el que se emiten las "Reglas de Operación del Programa de Educación Básica para Niños y Niñas de Familias Jornaleras Agrícolas Migrantes" México, 2009, 23 pp.

Da Silva Gomes, H.M., Colín Rodea, M., Alfaro Mejía, M.N. y Herrera González, L. (2008). La investigación-acción y la formación teórico-crítica del docente de lenguas extranjeras. México. Universidad Nacional Autónoma de México. Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras.

Terborg, R. y García Landa, L. (coord.) (2010). Los retos de la planificación del lenguaje en el siglo XXI. México. Universidad Nacional Autónoma de México. Coordinación de Humanidades. Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras.

Villaseñor López, V.Y.(1998). De la "proficiencia" a la definición de la competencia semiótica en pruebas de lenguaje, Colección Pedagógica Universitaria, 30, 187-214.

Yurén, T., Rojas, A. Cruz, M., Espinosa, J., Escalante, A.E. (2011). Cuando la justicia falla por simpleza... Análisis de políticas y trayectorias de escolaridad en el caso de la población jornalera agrícola. Revista Electrónica Sinéctica, 37, 1-17.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Preservice Teachers Perception of their Preparation Program to Cultivate their Ability to Teach Proof

Ruthmae Sears
University of South Florida
USA
ruthmaesears@usf.edu

Eva Mueller-Hill
University of Cologne
Germany
eva.mueller-hill@uni-koeln.de

Ilyas Karadeniz
University of South Florida
USA
karadeniz@mail.usf.edu

Abstract

This study describes twelve preservice teachers perceptions of their preparation program to foster their ability to teach proof. Data were collected via structured interview questions, relative to participants' mathematical background, perceptions about proof, and their readiness to teach proof. The study found that most preservice teachers are not afforded many opportunities to prove outside of geometry or bridge to abstract algebra courses, and perceive that they will be challenged to teach proof effectively. The results suggest that the trajectory of preservice mathematics teachers college experience needs to increase opportunities to prove, and practice teaching proof. Furthermore, the findings unveil fundamental misconceptions preservice teachers have about the role and nature of mathematical proof. An analysis of these misconceptions suggests: explanations of the perceptions, and a need to incorporate explicit reflections on the role and nature of proof in teacher education curricula.

Key words: proof, preservice teachers, content knowledge, preparation program

Overview

Proof is important to the field of mathematics. In the United States, the National Council of Teachers of Mathematics (2000) identified Reasoning and Proof as a Process Standard, and the Common Core State Standards Initiative (2010) Standards for Mathematical Practice suggested that students ought to be able to construct arguments, engage in reasoning and evaluate the reasoning of others. The vitality of proof in school mathematics is dependent on teachers' ability to adequately convey the importance of proof, and promote the usage of proof beyond the roles of validation and verification of known facts. If enacted effectively within the classroom environment, proof can also be used for exploration, systematization, communication, and to develop new ideas (De Villiers, 1999). Hence, it is imperative that teachers are adequately prepared to teach proof.

Research findings suggest that in-service teachers may not be adequately prepared to teach proof in secondary mathematics. Teachers may avoid teaching proof, or limit the depth to which they engage students in proving due to their own limited knowledge or comfort level with proof (Sears, 2012). Knuth (2002) acknowledged that teachers were challenged to differentiate proof from non-proof tasks. Teachers also provided positive feedback for non-proof arguments as though they were generalizable statements (Bieda, 2010). Therefore, teachers' knowledge about proof can impact how they facilitate it. If teachers are not prepared to teach proof, there enacted lessons may limit students' opportunity to engage in proving activities. Whereas, with training, the likelihood that teachers will facilitate the unpacking of proof within the classroom environment may increase.

Similarly, preservice teachers knowledge, or lack thereof can potentially influence how they would eventually enact proof within a classroom environment. Martin and Harel (1989) found that of the 101 preservice teachers studied, 38% accepted incorrect deductive arguments as correct for familiar context, and 52% for non-familiar context. Likewise, Stylianides, Stylianides, and Philippou (2007) found that preservice elementary, secondary and middle school teachers have difficulty with inductive proof arguments, and writing inductive statements into generalizable proof arguments. Since preservice teachers, will eventually be responsible for teaching proof, consideration ought to be given to the extent they are prepared. Therefore, there exists a need to examine preservice teachers' preparations to read and construct mathematical proofs on their own, and to teach proof within the classroom.

This study sought to answer the following research questions: What are preservice teachers perceptions of their preparation program to foster their ability to teach proof? Are there specific needs in the perception of preservice teachers that require new ways or foci of teacher education with respect to proof? In a qualitative, multi-perspective research manner (Creswell, 2012; Gill and Johnson, 1991) our examination documents preservice teachers' viewpoints of their preparation relative to proof. The findings of this study suggests that the core reasons for preservice teachers perceived unreadiness to prove or to teach proof are not a mere lack of meta-knowledge on different logical proof types, or poorly developed abilities to recognize correctness or incorrectness of deductive arguments, but also inadequate beliefs about and conceptions of the role and nature of mathematical proof.

Methods

Twelve preservice teachers, ages ranged from 20 to 57 years, agreed to participate in this study. The participants were enrolled in a middle school methods course, at a university in the southwestern region of the United States. For the methods course, students were required to summarize an article, write a literature review, and analyze videos and lesson sketches relative to reasoning and proof. Hence, at the end of the semester, participants were asked to share their perspectives of their readiness to teach proof. Data were collected via an open-ended questionnaire that comprised of 16 questions, which was distributed electronically and in paper format. Participants were asked to describe their academic background, characteristics needed to teach proof effectively, the extent their preservice preparation program prepared them to teach proof, and their perceived readiness to teach proof. Sample questions posed included: What were your experiences in college with proving? Did your preservice classes help you to teach proof? What could be done to improve your preparation for teaching proof? Do you feel ready or comfortable teaching proof? What challenges would you face if you were asked to teach a proof lesson? What characteristics are needed to teach proof effectively? Do you exhibit such characteristics? For each question students were asked to explain their responses. The questionnaire was generally completed within 60 minutes.

The data were analyzed qualitatively using grounded theory research methods (Creswell, 2012; Strauss, Corbin, and Lynch, 1990). Initially, we sorted the data by items on the questionnaire. Next, we identified codes that were derived from the data. Subsequently, we grouped the codes into themes based on commonalities of ideas. Emergent themes identified embodied courses that provided opportunities to prove, definitive viewpoints as to whether the mathematics education preparation course enhanced preservice teachers proof skills, the need for algorithms, recommendations to increase opportunities to prove, and the desire to increase content knowledge relative to proof.

Results

Generally, the results suggested that preservice teachers have little opportunity to engage with proof during their college experience, outside mathematics content courses (such as geometry or bridge to abstract algebra). A quarter of the participants acknowledged that their preservice teacher preparation program highlighted the importance, shed research findings and exposed them to proof. A preservice teacher stated that in the education course, "I really got to understand why proofs are important and why we should be exposed to them at a younger level. I think that it's a trait I will get used to, it'll just take practice to perfect proofs". However, most of the participants also acknowledged that they are not ready to teach proof because of their limited experience with proof, and that they may be challenged to find creative ways to engage students in proving activities. About three quarter of the participants stated that they were not provided guidance of how to explicitly teach proof. For instance, a preservice teacher stated, "…I believe I am still in need of some practice proving myself, as well as chances to practice teaching in front of a room, something that students might have several different ways of completing a problem". The statement suggests that the preservice teacher desires a stronger mathematical knowledge and additional pedagogical strategies for teaching proof.

A closer analysis of participants' comments provided detailed insights about fundamental reasons for preservice teachers perceptions of their own readiness to prove and to teach proof, than just a lack of proving experience and explicit teaching strategies. One of the preservice teachers stated, "All my professors thought that some other professor has taught me how to do proofs so I have never really been formally taught how to do one. Also, each professor has a different idea of what they want proofs to look like". This response suggest that there exists an uncertainty of who should be responsible for teaching preservice how to prove, and there exists variation in how proof is taught at the tertiary level. It also unveils specific misconceptions about the role and nature of mathematical proof: that there is a formal method of proving, which can be taught in teacher education to enable prospective teachers to teach proof in classroom and that there exists a model or uniform appearance of mathematical proof .

According to another preservice teacher, "… no one has taught me the steps in teaching proofs. Also, when I see a professor do a proof, I wonder how do they know when to stop continuing on with the proof?..." The remark suggests the preservice teacher considers the teaching of proof to be algorithmic in nature, and is unsure about the completeness of a proof. It implies that mathematical proofs always have well determined, context independent, starting and ending points.

To summarize and conclude, preservice teachers suggested that to improve their preparation for teaching proof, they need more opportunities to practice, and extra courses that foster their ability to teach and learn how to prove. According to a preservice teacher, "I have learned the importance of them, so now I just need to actually stand at the board and teach a lesson that revolves around proofs." From a normative point of view, these perceptions of reasons and possible cure for the perceived unreadiness to prove and to teach proof might dismiss the core problem. With respect to a normative concept of mathematical proof as described above, the conceptions of proof are inadequate regarding the role and nature of mathematical proof relevant to actual mathematical practice and proving in the classroom. Thus, although preservice teachers are exposed to proof during their tertiary studies, they do not grasp an adequate concept of proof.

Discussion and Implications

The results suggest that the trajectory of preservice mathematics teachers college experience needs to increase opportunities to prove and to reflect on proof on various dimensions. Proof should not be bounded within the parameters of mathematics content courses. Preservice teachers should not only get the opportunities to prove *more,* or learn more or less *algorithmic step-models* as the only explicit instruction on teaching proof in mathematics courses. Furthermore, exposure to literature about proof and its importance is necessary, but it is not sufficient. Instead, engagement with concrete proofs, both on the content level and on a meta-level of evaluation should be evident in pedagogical and content courses.

Aspects of preservice teachers conceptions of mathematical proof can be seen as misconceived, with respect to certain normative conceptions of proof that underlie the discussion of the importance of proof for school mathematics, in mathematics education (De Villiers, 1999; Harel and Sowder, 2007). According to such conceptions, mathematical proof not only serves as a routine to justify mathematical statements deductively, but also has creative potential and a fundamental exploratory function as a collective activity. Proof is seen as a form of argumentation, and communication that is understood within specific communities (Stylianides, 2007). Although standardized and objective to a seemingly high degree, proof essentially is socially determined in nature. Accordingly, proof in mathematics is not restricted to the adherence of algorithms. Rather proof incorporates creative, argumentative communication with respect to general and objective rules of deductive thinking, and negotiated communicative norms for proving discourses, with the aim to rationally convince the other members of the proving community (Harel and Sowder, 2007; Harel and Rabin, 2010; Schoenfeld, 1988; Stylianides, 2007). From this stance, it cannot be the aim of teacher education programs just to teach desired step-models and algorithms of proving, but first and foremost to change preservice teachers underlying conceptions of the role and nature of mathematical proof. This ought to be seen as an essential part of the didactics courses, rather than just as a side effect of mathematics content courses.

Preservice teachers are challenged to connect their experiences with proof and facilitate discourse about proof during enacted lessons. Hence, teacher education programs ought to increase opportunities for preservice teachers to more actively engage with proof. Preparation programs should seek to facilitate discourse and written arguments for various types of proof in an effort to deepen preservice teachers mathematical content knowledge and ability to communicate proof. Additionally, teacher education programs ought to take into consideration the role and nature of mathematical proof and how to teach it explicitly and effectively to preservice teachers. The role and nature, especially the exploratory, social, communicative, and negotiable aspects of proof, should be reflected upon and discussed to foster acceptable standards of argumentation. The aim should be to develop more adequate and sustainable conceptions of mathematical proof in content and pedagogical courses that can be implemented into preservice teachers' teaching practices. Therefore, the process of proving, and the products of proof ought to be infused in all mathematics and mathematics education courses, to improve preservice teachers abilities to prove, as well as reflective meta-knowledge about proving, as a special form of argumentation.

To provide sustainable, advanced beliefs on mathematical proving and conceptions of the role and nature of mathematical proof, and to develop their skills in proving and teaching proof on this basis, pre-service teachers should pass through various dimensions of experience and reflection with and on proving. It remains an open issue as to how we can initiate such experience and reflection in an effective way. It seems quite clear that this should not be an exclusive part of mathematics content courses. In science education, there exists a vivid debate on how to teach the "nature of science (NOS)" in school as well as in teacher education (Akerson et.al., 2000). Central questions in this regard are in how explicit, instructive versus implicit ways of teaching, meta discussion based on texts or hands-on experience with advanced science content, are more effective, and if historical or socio-scientific issues and themes are more adequate for teaching NOS than "pure" content. This debate could serve as a starting point to answer similar question for the case of mathematics, regarding effective ways of teaching proof.

Based on the results presented, we emphasize the following dimensions for teaching proof in preservice teacher education. We acknowledge that the existence and adequateness of these dimensions are hypothesized as an effective approach to unpack proof in teacher education program; hence empirical data are needed to validate the effectiveness of the identified dimensions. During the first dimension, which may be in direct contrast to the individual's own experiences with more or less algorithmic proving in school mathematics courses, the exploratory, creative and individual element of proving could be highlighted. For the second dimension, the notion of what constitutes a proof and different proving formats and standards, that is, negotiable communicative proving norms *and* deductive standards could be introduced and discussed. The tension between algorithmic and non-algorithmic, but still systematic and structured, rigorous proof could be explicitly reflected. To this end, sufficient time would have to be given to carefully unpack the proof and explicitly emphasize and discuss these aspects. This dimension could also include instructive elements on how to develop proofs conforming to standards established by the field of mathematics, and training elements to gain self-confidence in producing proof on their own. Whereas in the third dimension, the didactical element on how to teach non-algorithmic, creative, but still inter-subjective standard conforming proof in school could be implemented. Therefore, efforts to increase preservice teachers opportunities to prove should be done strategically, such that it fosters a conceptual understanding about proof, as well as improves preservice teachers ability to prove. These dimensions can also be explored in other fields, such as science, which seeks to develop individuals' ability to construct viable arguments.

References

Akerson, V. L., Abd-El-Khalick, F., Lederman, N.G. (2000). Influence of a Reflective Explicit Activity-Based Approach on Elementary Teachers' Conceptions of Nature of Science. *Journal of research in science teaching*, 37 (4), 295-317.

Common Core State Standards Initiative. 2010. *The Standards: Mathematics.* Washington, DC: National Governors Association and the Council of Chief State School Officers. Available online at: http://www.corestandards.org/the-standards/mathematics.

Creswell, J. W. (2012). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Thousand Oak, CA: Sage.

De Villiers, M. D. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351-382.

Gill J & Johnson P (1991) Research Methods for Managers, London: Paul Chapman.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 14-19.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88**.**

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-51.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Sears, R. (2012). *An examination of how teachers use curriculum materials for the teaching of proof in high school geometry.* Doctoral Dissertation, University of Missouri - Columbia, Columbia, MO.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational psychologist*, *23*(2), 145-166.

Strauss, A. L., Corbin, J. M., & Lynch, M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques* (Vol. 270). Newbury Park, CA: Sage.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(3), 145-166.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el diseño de una propuesta de intervención en el aula desde un enfoque funcional.

Mónica **Mora** Badilla
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
mokmora@gmail.com
Fabián **Gutiérrez** Fallas
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fgutierrez92@gmail.com
Francisco **Herrera** Arroyo
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fherrera344@gmail.com

Resumen

Por medio de un estudio conceptual y cognitivo se pretende en esta comunicación presentar los avances realizados en una investigación para realizar un diseño de intervención en el aula, donde se realiza un análisis didáctico sobre el estudio de la recta utilizando un enfoque funcional de contenido matemático; El análisis didáctico se basa en un análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, se tomarán solamente las tres primeras etapas; este trabajo es una investigación en proceso lo cual pretendemos mostrar nuestros avances del mismo.

Palabras clave: Análisis didáctico, enfoque funcional, unidad didáctica, recta.

En Costa Rica, la promoción de un nuevo Programa de Estudio en Matemática (2013) para la educación primaria y secundaria ha marcado cambios significativos en cuanto a contenidos y enfoque del proceso de enseñanza; se promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, procesos y aprendizaje por resolución de problemas. Es por ello que esta investigación pretende plantear el análisis didáctico como una herramienta para la planificación del docente y alcanzar los objetivos propuestos en estas nuevas políticas establecidas en el país.

La geometría analítica toma mayor presencia en este currículum, por lo tanto el objeto de investigación es la recta en el plano cartesiano, considerándola como una de las primeras curvas que permite mostrar la relación entre dos sistemas de representación dominantes en la geometría analítica: la representación simbólica-algebraica y la representación gráfica. Por lo anterior, una de las preguntas que guían esta investigación es ¿cómo elaborar una intervención en el aula desde un enfoque funcional para la enseñanza y el aprendizaje de la recta en el plano cartesiano?

Fundamentación teórica

Las teorías que fundamentan nuestro trabajo son: la teoría de análisis didáctico, el enfoque funcional del conocimiento matemático, las reformas internacionales de este enfoque como PISA y su propuesta por competencias, la resolución de problemas como metodología del proceso de enseñanza e intervención en el aula.

En cuanto al análisis didáctico en Gómez (2009) se define como un procedimiento cíclico que incluye cuatro análisis en los cuales el profesor puede organizar la enseñanza: **el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción, el análisis de actuación**. En nuestro acercamiento abordaremos un ciclo de los tres primeros análisis que constituyen la base para que posteriormente se lleve a cabo la aplicación del análisis de actuación por docentes activos de secundaria. Cabe señalar que el análisis didáctico está tomando auge dentro de la formación de profesores, por ejemplo con el proyecto MAD en Colombia dirigido por Pedro Gómez y colaboradores.

Las tareas que dirigen el aprendizaje de la recta responden al enfoque funcional del conocimiento matemático. Según Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008) el enfoque funcional está situado en un análisis fenomenológico, que lo que pretende es establecer funcionabilidad de los conceptos matemáticos, este enfoque permite modelar situaciones reales, como eje central la resolución de problemas en un contexto determinado. A nivel internacional el enfoque funcional responde a las políticas de currículos basados por competencias.

Nuestra investigación consiste en un experimento de enseñanza que se ubica dentro del paradigma de investigación de diseño o investigación basada en diseño (*Design Research*). Este paradigma según Confrey, 2006 y Sawyer, 2006; citados por Molina, Castro, Molina y Castro (2011) es de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollado dentro de las "*Ciencias del aprendizaje*" (*Learning Sciences*).

Análisis didáctico de la recta

Esta investigación toma primeramente el análisis didáctico como insumo para la elaboración de la propuesta de intervención en el aula con un enfoque funcional de la enseñanza y el aprendizaje de la recta. Como ya se mencionó, este análisis toma en cuenta distintos momentos, en este primer acercamiento, se presenta el avance del análisis didáctico en cuanto a los siguiente puntos: (a) un análisis de contenido, que involucra las distintas posiciones del conocimiento matemático referentes a la recta, una estructura procedimental, una organización en subestructuras del contenido matemático y un análisis fenomenológico del conocimiento matemático; (b) un análisis cognitivo, que organiza las expectativas de aprendizaje en cuanto a objetivos, habilidades y procesos que se desean desarrollar en la realización de tareas, y (c) un análisis de instrucción, que permite el diseño de distintas tareas para el cumplimiento de las expectativas planteadas. Dado a que es una investigación en proceso, a continuación nos centraremos en los puntos (a) y (b), tomando en cuenta los resultados obtenidos en estos dos primeros análisis.

El análisis de contenido

En este apartado se desarrolla un análisis de contenido sobre la recta, entendiéndose por el mismo "*el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.*" (Gómez, 2002. p.252) En este primer acercamiento a la recta se busca hacer un estudio de los conceptos, representaciones, fenómenos, y contextos, y las relaciones entre estos, que conlleva el estudio de la recta.

Primeramente es necesario señalar que la recta se percibe dentro dos grandes áreas de la matemática: la Geometría Sintética y la Geometría Analítica; por ende se hace necesario hacer la distinción entre lo que se concibe como cada una de éstas, sus características, particularidades y su posición dentro de la enseñanza y aprendizaje de la geometría de un sistema educativo.

Con relación a la enseñanza de la geometría desde el enfoque sintético y analítico, Gascón (2001) afirma que hay una posible discusión en cuanto al modelo a seguir. Por un lado está la geometría sintética, propia del modelo euclidiano basada en una axiomática explícita y por otro lado una geometría analítica del modelo cartesiano cuya práctica se sustenta en técnicas del álgebra lineal y dejando implícita la axiomatización.

El mismo Gascón (2001) plantea que el uso de técnicas *analíticas* viene dado cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética y aparece la necesidad de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y estos cambios desembocan en la utilización de dichas técnicas, también denominadas *cartesianas* o *algebraicas* porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra.

Nuestro interés es tratar los conocimientos de la recta dentro de la Geometría Analítica, porque permite una mayor transversalidad con otras áreas de la matemática como la geometría, el álgebra y el análisis. Así como también una mayor aprovechamiento de los sistemas de representación para la modelización de distintos contextos y fenómenos en los que están presentes estos contenidos; sin embargo para el análisis de contenido se consideran tres diferentes concepciones de la recta.

Desde lo sintético se pueden encontrar definiciones intuitivas de lo qué es la recta. Iniciando por Euclides, en su primer libro define "*una línea recta es aquella que yace por igual con los puntos sobre ella*"; esta definición es una de las más antiguas es por eso que forma parte de los conceptos llamados primitivos.

Sin profundizar en esta definición, otros autores de manera más convencional definen la recta como: "Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene." (Moise, 1966, p.57); Baldor. (2004) define línea como: "tipos especiales de conjuntos de puntos" (p.10), luego define la línea recta como: "Una imagen de este conjunto de puntos es un rayo luminoso… una recta geométrica se extiende sin límite en dos sentidos. No comienza ni termina" (p. 10). Se considera que cada una de las definiciones de la geometría sintética, que otros autores presentan sobre la recta, puede ser una definición "actual" haciendo uso de un lenguaje más contemporáneo basándose en las ideas de Euclides.

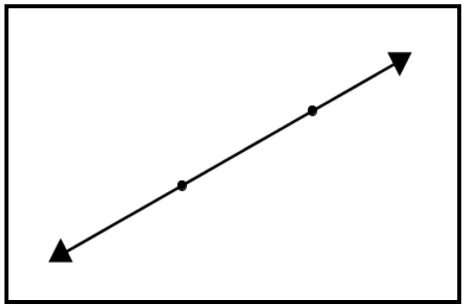


Figura 1. Representación usual gráfica de la recta desde la perspectiva sintética

Dentro de la [illegible] [illegible]cibe la recta como "el lugar geométrico de los puntos cuya distancia desde dos puntos dados están en razón constante r, es una recta si $r = 1$." (p.122). Esta definición está conecta con otros conceptos matemáticos como la razón y la proporcionalidad. Por otra parte, Kindle (1970) establece una relación entre el lugar geométrico y una ecuación de primer grado, al definir la recta como "una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta." (p.22)

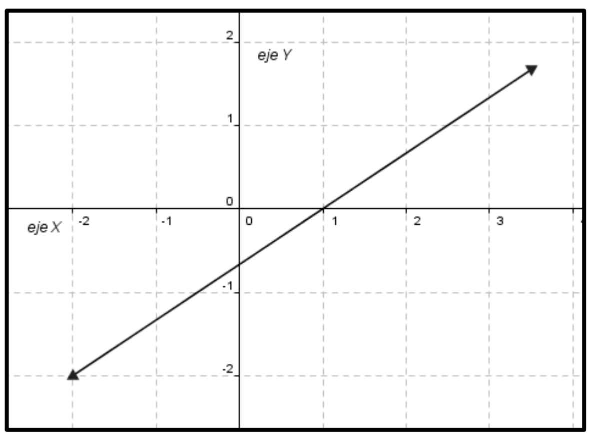


Figura 2. Representación gráfica de una recta en el plano cartesiano

En tercer lugar, dentro del análisis de funciones, la recta se concibe como la representación gráfica de una función lineal real de variable real, definida convencionalmente, mediante la siguiente representación simbólica:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + b; \text{con } m, b \in \mathbb{R}$$

La función lineal se puede observar como un caso particular de la recta, ya que solamente cumplen la relación de dependencia entre sus variables, por otro lado la recta no precisa esa relación, además el campo conceptual de la función lineal, es diferente a al campo de la recta como lugar geométrico.

Por otro lado, la recta posee diversas **representaciones algebraicas**, que mediante transformaciones sintácticas de unas se obtienen otras. Esas representaciones son las ecuaciones que definen el lugar geométrico respectivo, llamadas convencionalmente como ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, ecuación general $Ax + By + C = 0$, ecuación cartesiana $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ecuación normal $x cos \propto + y sen \propto - p = 0$.

Siguiendo la clasificación del conocimiento matemático propuesta por Hiebert y Lefevre que aparece descrita en Rico y Lupiáñez (2008) se han identificado ejemplos de conocimientos conceptuales asociados a la recta desde los enfoques sintético y analítico presentes en la siguiente tabla.

Tabla 1
Ejemplos desde el enfoque Sintético y Analítico de conocimientos conceptuales asociados a la Recta

	Ejemplos desde el Enfoque Sintético	**Ejemplos desde el Enfoque Analítico**
Términos	Constante, Concurrente, Creciente, Decreciente, Intersección, Oblicua, Paralela, Perpendicular, Punto, Punto, Plano, Recta.	Abscisa, Constante, Coordenada, Decreciente, Ecuación, Eje, Intersección, Intercepto, Ordenada, Origen, Parámetro, Par ordenado, Paralela, Perpendicular, Pendiente, Plano, Punto, Recta, Tangente,
Notaciones	$l_1 \parallel l_2, l_1 \perp l_2, \alpha, l, \overleftrightarrow{AB}, A$ $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$,	$y = mx + b, (x, y)$, X, Y, $P(x, y)$, O, $l_1 \parallel l_2, l_1 \perp l_2$, $\tan\theta$, $m \neq 90^0, l$
Convenios	Rectas paralelas con el símbolo ∥ y perpendiculares⊥, Punto se denota por letras mayúsculas, la recta por dos puntos que lo contengan.	“x” variable independiente; “y” variable dependiente, “m” pendiente de la recta, “b” constante de la recta, eje X es el eje horizontal, eje Y es el eje vertical. El origen es $(0,0)$. Rectas paralelas con el símbolo ∥ y perpendiculares ⊥,
Resultados	Si dos rectas se intersecan en un punto se les llama concurrentes. Si dos rectas no se intersecan entonces se les llama rectas paralelas. Si dos rectas son perpendiculares a una tercera recta dada, entonces ambas rectas son paralelas. Si dos rectas se intersecan, su punto de intersección es un único punto.	La proporcionalidad se modela por medio de una función lineal. Si la pendiente se indefine obtenemos la ecuación de una recta vertical. Si la pendiente es cero obtenemos la ecuación de una recta horizontal, si la pendiente es positiva decimos que es creciente, si es negativa es decreciente y si es cero es paralela al eje de las ordenadas-

		Si dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas, si el producto de las pendientes de dos rectas es -1 entonces son perpendiculares.
Conceptos	La línea recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, Rectas oblicuas, Rectas concurrentes, puntos.	Recta, función de proporcionalidad, ecuación de la recta, la pendiente como tangente, la línea recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, recta creciente, recta decreciente, rectas oblicuas, rectas concurrentes. Distancias entre dos puntos.
Estructuras	Sistema axiomático de geometría sintética, la recta como elemento de un plano. Teoría de conjuntos.	Sistema bidimensional de referencia: el plano cartesiano,$\mathbb{R}^2$, estructura del campo de los polinomios con coeficientes reales.

Mediante una revisión bibliográfica realizada del tema de la recta, se encontraron cinco agrupaciones de conceptos específicos, procedimientos y relaciones, que expresan y organizan el desarrollo del contenido sobre la recta a los cuales llamaremos focos de contenido.

1) **La ecuación de la recta.** Se agrupan las distintas transformaciones que sufre la representación algebraica de la recta; en sí mismo, este foco relaciona el contenido matemático de la definición de la recta como curva en el plano cartesiano que satisface una ecuación lineal en dos variables.
2) **La pendiente de la recta.** Se encuentra las definiciones de pendiente, lo cual se trabaja para caracterizar la recta y a partir de este se determinan varias clasificaciones, como la monotonía de la recta (creciente, decreciente o constante) y la relación entre dos o más rectas (paralelas yo perpendiculares).
3) **La posición relativa de dos rectas.** En este foco de contenido se presenta la clasificación de dos o más rectas en: paralelas, concurrentes o perpendiculares. Así mismo se relacionan otros conceptos como punto de intersección y sistemas de ecuaciones.
4) **Los puntos en el plano cartesiano.** Este foco involucra contenidos de puntos colineales pues una recta está formada por infinitos puntos y para representarla en el plano cartesiano es necesario ubicar al menos dos puntos.
5) **El trazo de la recta.** Este foco relaciona contenidos acerca de la geometría en el plano, relacionando ciertas propiedades geométricas para trazar una recta en el plano cartesiano.

La distribución de lo conceptos de la recta se presenta un mapa conceptual que los mismos están distribuidos por focos; se pretende la visualización entre las relación que existe entre cada concepto matemático que se ve involucrado en el estudio de la recta.

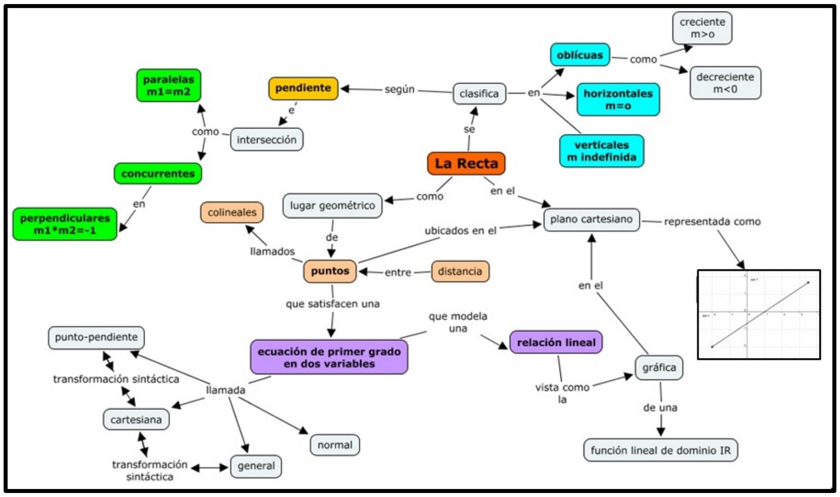


Figura 3. Mapa relacional de los contenidos relacionados con la recta.

Como parte del análisis de contenido, se realizó un **análisis fenomenológico** que organizó los fenómenos relacionados con la recta en cinco contextos[1] que responden a las interrogantes: *¿Para qué se utilizan los conocimientos relacionados con la recta? ¿A qué problemas da respuesta?* Cada uno de los contextos se relaciona, por su parte, con una subestructura matemática del tema.

Los contextos y subestructuras responden a una búsqueda de formas de clasificar los fenómenos dentro de categorías, cada una con características propias que permiten percibir diferencias y similitudes entre un fenómeno y otro. A continuación se muestra una tabla que resume los puntos relevantes de la relación entre los contextos y las subestructuras determinadas para el estudio de la recta.

Tabla 2.
Vinculación establecida entre contextos y subestructuras.

CONTEXTO	SUBESTRUCTURA	RELACIÓN
Calcular la inclinación de una trayectoria lineal con respecto a una recta fija de referencia.	La pendiente de la recta. $(y = mx + b,\ \ m = \tan\theta)$	Concepto de pendiente de la recta como la tangente del ángulo de inclinación entre la recta y el eje X.
Describir el tipo de relación que se presenta entre dos magnitudes.	La recta como la relación lineal en dos variables. $(ax + by = c;\ \ \mathrm{a, b, c} \in \mathrm{IR})$	Criterio algebraico de la recta como modelo de la relación entre dos variables.
Establecer el comportamiento entre dos o más relaciones lineales en dos magnitudes.	La posición relativa de dos o más rectas. $\left(\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}\right)$	La intersección o no entre dos rectas en el plano cartesiano que modelan relaciones lineales.

[1] La palabra contexto es usada aquí de una manera específica, y no estamos usando su uso común

Calcular distancias entre dos o más cuerpos.	Los puntos en el plano cartesiano. $\begin{bmatrix} d(P,Q): P(a,b) \in IR^2 \wedge \\ Q(c,d) \in IR^2 \end{bmatrix}$	Concepto de distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano.

El análisis cognitivo

El análisis cognitivo es la segunda etapa del análisis didáctico. Ésta, a diferencia del análisis de contenido, centra la atención en el aprendizaje del estudiante. "El profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenta a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2007, p. 29). Además Gonzales y Gómez (2013) afirman que "centrándonos en el nivel de planificación del profesor, el análisis cognitivo sirve para concretar, sobre un tema de matemáticas, las visiones del profesor sobre las matemáticas y el aprendizaje." (p. 1).

El análisis cognitivo es un análisis que se desarrolla a priori; es decir, se busca predecir, y anticipar las acciones de los estudiantes en el momento en que las diferentes tareas sean puestas en el aula. Que a su vez está compuesto por tres organizadores del currículo: **expectativas de aprendizaje**, **errores y dificultades asociadas al contenido matemático y las trayectorias hipotéticas del aprendizaje**.

A continuación mencionaremos los objetivos, como uno de los niveles de las expectativas de aprendizaje, los cuales no son exhaustivos, más bien consideran los aspectos centrales de los contenidos a tratar.

O1. Identificar la recta como el lugar geométrico en el plano que satisface una ecuación de primer grado con dos variables.

O2. Determinar la ecuación de la recta utilizando datos relacionados con ella.

O3. Aplicar la ecuación de la recta para el planteamiento y resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.

O4. Relacionar la pendiente de la forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta, con la tangente del ángulo de inclinación de la recta con el eje x.

O5. Aplicar la pendiente de la recta para el planteamiento y resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.

O6. Establecer y clasificar la posición relativa de dos rectas en paralelas y concurrentes.

O7. Aplicar la relación existente entre dos o más rectas en el plano en la resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.

O8. Aplicar propiedades que se pueden establecer entre puntos en el plano cartesiano.

O9. Ubicar el lugar geométrico de una recta en el plano cartesiano.

Para especificar las expectativas de aprendizaje que se esperan desarrollar en los estudiantes se define una serie de capacidades con las cuales se esperan que se logre el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Debido a que se presentan los resultados de una investigación en proceso, a continuación se muestran las capacidades asociadas al objetivo O1, así como una tarea propuesta para el desarrollo de esas capacidades y un camino de aprendizaje de dicha tarea.

Capacidades

C1-Identificar el grado y la cantidad de variables en una ecuación.

C2-Representar en lenguaje matemático los datos involucrados en el enunciado de un problema.

C3-Deducir de un enunciado la información que se conoce y la que se debe hallar.

C4-Interpretar el resultado obtenido según el sistema de representación utilizado.

C5-Establecer una estrategia que permita la resolución del problema planteado.

C6-Asociar parejas de datos relacionados en el problema con pares ordenados.

C7-Representar gráficamente un par ordenado en el plano cartesiano.

C8-Realizar una representación tabular a partir de un conjunto de datos.

C9-Reconocer puntos alineados en el plano.

C10-Trazar el lugar geométrico de un conjunto de puntos alineados en el plano.

C11-Identificar que el lugar geométrico de un conjunto de puntos alineados en el plano representa una recta.

C12-Identificar que una ecuación de primer grado en dos variables representa una recta.

C13-Calcular el valor de una de las variables involucradas en una ecuación, de dos variables, a partir de la otra.

C14- Elige un sistema de representación adecuado para la resolución de un problema.

C15- Realizar una representación mediante un diagrama de Venn de un conjunto de datos.

C16- Ubicar puntos en el plano cartesiano.

Tarea 1

José llama a su hermano Miguel, que se encuentra en Estados Unidos, para felicitarlo por su cumpleaños. Dentro de los temas que conversan, Miguel le dice a José que la condición climática ha estado muy difícil por allá, que en los últimos días la temperatura promedio ha estado en -4 grados Fahrenheit, mientras que José le dice que en Costa Rica se ha registrado temperaturas alrededor de 28 grados Celsius.

Al terminar la llamada, José decide investigar acerca de la relación entre los grados Celsius y los grados Fahrenheit; encuentra que la relación entre la indicación de temperatura en la escala Fahrenheit F y la correspondiente lectura en la escala Celsuis C, está dada por la ecuación: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

Construya una representación gráfica en un plano cartesiano que le permita a José determinar la relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit.

Camino de aprendizaje para la tarea

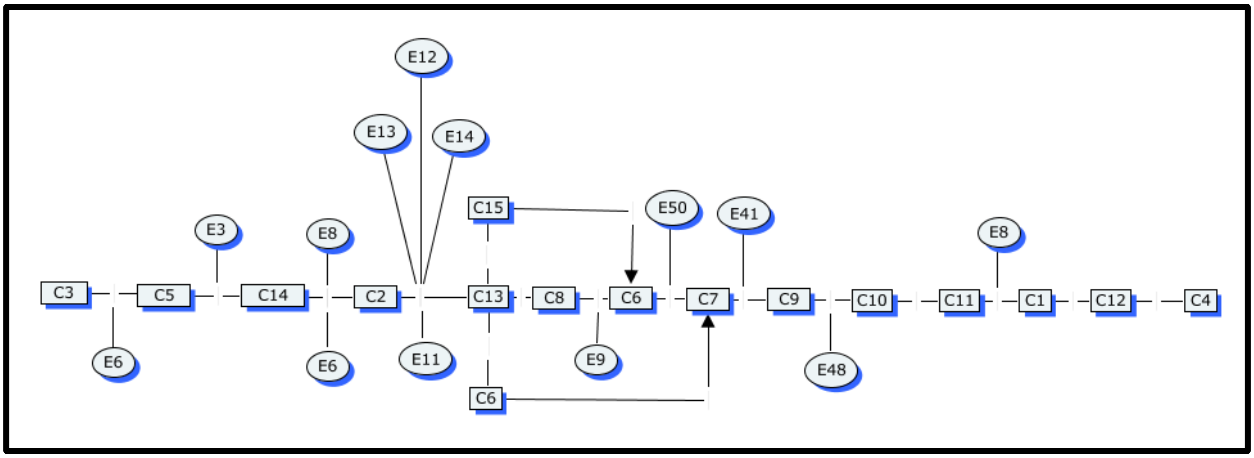


Figura 4. Camino de aprendizaje para la tarea 1.

Observe que en el camino de aprendizaje además de relacionar las distintas capacidades también se relacionan los errores en que pueden caer los estudiantes durante la resolución de la tarea; Los caminos de aprendizaje nos permiten predecir el comportamiento de los estudiantes al elaborar tareas, para poder tomar decisiones en el análisis de instrucción. El cumplimiento de un objetivo se puede basar por alguna tarea o varias tareas las cuales por medio de diversas capacidades lleguen a cumplirlo.

Dentro los erros que están presentes en la figura 4 son los siguientes.

E3. Falta de comprensión en el enunciado de un problema debido a incomprensión del lenguaje.

E6. Errores de traducción de entre códigos. Por ejemplo, traducir "recta" del español especializado a una longitud en la notación simbólica (AB en vez de $\overleftrightarrow{AB}$).

E8. No es capaz de identificar una variable a menos que ésta se represente por "x".

E9. No interpreta la noción de par ordenado para realizar la sustitución respectiva en una ecuación de la recta y verificar que pertenece a la recta.

E11. Utiliza de manera errónea las propiedades de las operaciones algebraicas y aritméticas para hacer uso las diferentes representaciones de la ecuación de una recta.

E12. Fallar en el manejo de variables, que provienen de una generalización incorrecta de las operaciones aritméticas básicas al nuevo ambiente.

E13. Manejar el signo igual como un mandato operacional y no relacionarlo como un equilibrio que solo se mantiene para determinado valor de la incógnita.

E14. Cambiar el signo de uno de los miembros de la ecuación sin modificar el signo del otro miembro.

E41. No relacionan un par ordenado con un punto en el plano.

E48. Utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.

E50. Utilizan escalas inadecuadas para trazar una representación gráfica a partir de su representación tabular.

Un camino de aprendizaje para una tarea permite organizar esa tarea a partir de una posible dirección que puede seguir el estudiante, en relación con las capacidades y errores presentes en su aprendizaje. Cada camino de aprendizaje diseñado para un conjunto de capacidades que permiten el alcance de cada objetivo será un insumo para el análisis de instrucción, en el cual se diseñará la propuesta de intervención en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de la recta desde un enfoque funcional del conocimiento matemático.

Conclusiones finales

Dentro de las conclusiones, se puede mencionar el logro de realizar el primer acercamiento al análisis de contenido y el análisis cognitivo de la recta, que serán insumos para uno de los objetivos a alcanzar en nuestra investigación, que consiste en diseñar una unidad didáctica como medio de intervención en el aula que guíe la labor docente en su proceso de enseñanza de los contenidos relacionados con la recta en el plano cartesiano y que esa intervención responda a las demandas de las políticas curriculares actuales.

Además, dentro de los resultados e impactos que se desprenden de la investigación está el diseño de tareas desde un enfoque funcional del conocimiento matemático, así como la organización de esas tareas y de los contenidos que involucran en cuanto a contextos y subestructuras; es decir, se propone un acercamiento a la relación que se puede hacer entre los contenidos meramente matemáticos y su aplicación en distintos contextos.

Como punto de referencia, es establecer la diferencia entre el estudio de la función lineal y la recta; su estudio y estructura es diferente por lo tanto se refieren a elementos matemáticos distintos; se deja abierto como un posible alternativa, el estudio de la función lineal tomando la recta como punto de partida.

Referencias

Gascón, J. (2001b): Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. Seminario de Matemáticas Fundamentales (28). Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (capítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7(1), 471-498.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), (2013). Programa de Estudio en Matemática, [en línea]. San José: MEP. Disponible en: http://www.mep.go.cr/downloads/RecursosTecnologicos/Programa_matematicas.pdf [Consulta: 2013, 9 de marzo]

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. Suma, 58, 7-23.

Socas, M. (2000). Dificultades obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L Et all. La educación matemática en la enseñanza secundaria 12 (2° ed.)(pp.125-148) Barcelona: Editorial Horsori.

Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel

Zaida Margot **Santa** Ramírez
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
zsanta@ayura.udea.edu.co – zsanta@gmail.com
Carlos Mario **Jaramillo** López
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
cama@matematicas.udea.edu.co – camaja59@gmail.com

Resumen

El presente artículo[1] es resultado de una investigación en curso la cual, a través de un estudio de casos, aborda la manera como la visualización de construcciones con doblado de papel media la producción de conocimiento geométrico en un colectivo pensante de maestros en formación y en ejercicio; por lo tanto, el constructo teórico que fundamenta este estudio, es *Humans-with-media* de Borba & Villarreal (2005). De esta manera, el doblado de papel se convierte en una propuesta alternativa para este colectivo de maestros, pues aporta al desarrollo del conocimiento matemático, desde el mejoramiento de la conceptualización de la Geometría, a través de las interacciones entre personas y medios.

Palabras clave: doblado de papel, producción de conocimiento, Geometría, formación de maestros, *Humans-with-media*.

[1]Este artículo se deriva del estudio: *Producción de conocimiento geométrico en un colectivo con doblado de papel*, que actualmente se lleva cabo en el marco del programa de Doctorado en Educación, línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia.

Introducción

Desde el año 2003, el Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) se ha preocupado por fundamentar tanto las bases de la Geometría del doblado de papel como su incidencia en el aula. Para lograr estos propósitos, algunos de sus investigadores han participado en eventos locales, regionales y nacionales, con el propósito de socializar experiencias relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, aprovechando las oportunidades que brinda el doblado de papel, como medio para construir conocimiento geométrico. Es importante mencionar que el planteamiento de este estudio emerge de los talleres desarrollados con maestros en formación o maestros en ejercicio quienes, de acuerdo a las experiencias vividas en el transcurso de los mismos, manifiestan su interés en proponer alternativas metodológicas que permiten la construcción y comprensión de conceptos geométricos, usando este medio.

Por lo tanto, una de las conjeturas inmediatas que ha surgido del trabajo con docentes y que actualmente viene siendo motivo de estudio del Grupo de Investigación, es la afirmación que un colectivo de maestros puede producir conocimiento geométrico usando el doblado de papel como medio. En este sentido, se pretende dar un paso adelante para intentar mostrar, con algunos casos concretos, que este medio es una alternativa para la producción de conocimiento geométrico, cuando es usado por un colectivo pensante de seres humanos (maestros en formación o en ejercicio). De esta manera, el estudio pretende consolidar una propuesta que aporte a la formación inicial o continuada de maestros, considerando las interacciones entre este colectivo y el doblado de papel.

Por consiguiente, el planteamiento del problema contempla algunas reflexiones sobre la Geometría del doblado de papel y, de acuerdo con la revisión de literatura relacionada con esta temática, se detectan ciertas dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. El marco teórico asumido en este estudio, aborda algunas ideas del constructo teórico *Humans-with-media* (Borba & Villarreal, 2005), puesto que se ha observado en las experiencias con maestros, que la producción de conocimiento se puede generar en un colectivo pensante de seres humanos con medios, en este caso, un colectivo de maestros en formación o maestros en ejercicio con doblado de papel; cabe anotar que esta producción está mediada por la visualización de construcciones hechas mediante el doblado. Finalmente, la metodología pretende mostrar y analizar un episodio en el que un grupo de maestros produce conocimiento geométrico alrededor de los Axiomas de Huzita – Hatori.

Planteamiento del problema

Antecedentes

Se ha observado que con una hoja de papel, un grupo de estudiantes o maestros puede hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás; también, puede experimentar, visualizar, formular conjeturas, justificar procedimientos, comprender conceptos e, incluso, hacer demostraciones.

Al respecto, Santa y Jaramillo (2010) afirman que:

> …el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la Geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además,

> justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático (p. 340).

A nivel internacional, encontramos muchos autores que también justifican el uso del doblado de papel en la construcción y comprensión de conceptos geométricos. Geretschläger (1995), por ejemplo, afirma que:

> La conexión entre Geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras (como el educador alemán Friedrich Fröebel) el origami se puede utilizar para enseñar formas elementales geométricas (p. 357).

En la misma línea, Royo (2002), concluye que: "El ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la Geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186).

Por otro lado, en el año 1989 el ítalo japonés Humiaki Huzita presentó en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología 6 axiomas para la Geometría del doblado de papel (Huzita, 1989). Estos axiomas, llamados Axiomas de Huzita, se relacionan con conceptos básicos de Geometría euclidiana y algunos de ellos, con problemas del cálculo diferencial o Geometría analítica. Posteriormente, el japonés Koshiro Hatori (2003, citado por Lang, 1996 – 2003) presentó un séptimo axioma y desde ese momento, los axiomas recibieron el nombre de Axiomas de Huzita – Hatori.

Teniendo en cuenta su traducción original, estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

Axioma 1: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos" (Lang, 1996 – 2003, p. 38).

Axioma 2: "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2" (p. 38).

Axioma 3: "Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre l_2" (p. 38).

Axioma 4: "Dado un punto P_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1" (p. 38).

Axioma 5: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2" (p. 38).

Axioma 6: "Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2" (p. 38).

Axioma 7: "Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1" (p. 39).

Como se dijo en párrafos anteriores, las ponencias y talleres desarrollados en encuentros locales, regionales y nacionales, con maestros y maestros en formación, ha permitido pensar en la posibilidad de utilizar los axiomas de Huzita – Hatori en la orientación de determinadas actividades, como un medio que le posibilite a un colectivo de personas producir conocimiento geométrico en estrecha relación con dicha axiomática. Aunque, es importante mencionar que autores como Santa (2011), llegaron a la conclusión que: "los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel" (p. 275).

Sin embargo, en dicho estudio, Santa (2011) se centró solo en la descripción de la comprensión individual del concepto de elipse como lugar geométrico, en los estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa pública de la ciudad de Medellín. Esta autora infirió que esa comprensión dependía notablemente de las interacciones del estudiante, con la Geometría del doblado de papel y con la investigadora. En esta línea, parecía que la producción de conocimiento, en particular conocimiento geométrico, se daba mediante la interacción de un colectivo de seres humanos con un medio determinado, que era el doblado de papel; pero dicha inferencia no fue objeto de estudio en esa investigación y, en ese entonces, pasó a un segundo plano.

Considerando las ideas anteriores, se pretende mostrar con este estudio, cómo un colectivo de maestros produjo conocimiento geométrico a través de actividades basadas en la Geometría del doblado de papel y en su axiomática. De esta manera, se espera exponer que esta herramienta se convierte en un medio que posibilita la producción de conocimiento geométrico, en las interacciones que se dan al interior del correspondiente colectivo pensante de maestros, lo que puede permitir, a su vez, el diseño de propuestas novedosas que impacten los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Pregunta de investigación

La Geometría es uno de los componentes de las matemáticas más importante en el currículo escolar debido, en primer lugar, a que puede posibilitar procesos de visualización, argumentación y formalización y, en segundo lugar, porque debería ser la más cercana a los contextos de los estudiantes. De hecho, el ICMI (1994) también lo considera de este modo, cuando afirma que la Geometría es una herramienta para "comprender, describir e interactuar con el espacio en el que vivimos" (Citado por Barrantes, 2002, p. 348) y enfatiza que es la parte de las matemáticas más "intuitiva, concreta y más relacionada" (p. 348) con la realidad de los educandos.

De acuerdo a lo anterior, tales ideas deberían ser aprovechadas para potenciar verdaderos procesos de aprendizaje en los estudiantes. Sin embargo, en la actualidad, son usados en detrimento de la misma, dado que normalmente, la Geometría se ha usado solo como "terreno natural para la introducción de la deducción" (MEN, 2004, p. 8). Es decir, lo que se ha percibido en las aulas de clase colombianas, tanto de bachillerato como universitarias, es el uso de una Geometría formal, que se ha focalizado en la "mera" demostración y validación de conjeturas y en el uso de fórmulas, sin alcanzar una auténtica comprensión de las mismas. Al respecto, Martínez y otros (1989) exponen que la Geometría escolar se ha centrado en el aprendizaje memorístico de conceptos, fórmulas o teoremas y ha eliminado de forma temprana la intuición, que es la primera y principal herramienta de acceso al conocimiento geométrico (Citados por Barrantes, 2002)

Pero los obstáculos no solamente radican en mostrar la Geometría como un cuerpo formalizado de conocimientos en las aulas de clase de colegios o universidades. Por otro lado, también están las dificultades que tienen los maestros en formación o maestros en ejercicio, sobre esta rama de las matemáticas. Estos problemas, habitualmente, tienen que ver con el escaso conocimiento de la disciplina, pues se observa que muchos maestros exhiben grandes falencias en la comprensión de conceptos geométricos.

En esta misma perspectiva, nuestra experiencia docente a nivel universitario, en especial en un Seminario Complementario, del Programa de Maestría en Regiones de una universidad pública de Antioquia, nos ha mostrado que algunos maestros de las regiones desconocen, por ejemplo, los conceptos relacionados con los lugares geométricos. En este sentido, Aballe (2000), en su estudio, demuestra que una proporción importante de futuros maestros o maestros en ejercicio "tienen considerables lagunas en la construcción de los conceptos matemáticos elementales y en las herramientas matemáticas de aplicación" (Citado por Barrantes, 2002, p. 23).

Para solventar las dificultades mencionadas en párrafos anteriores, las cuales son, por un lado, considerar la Geometría como un cuerpo formal de conocimientos y, por otro, la poca comprensión de conceptos geométricos por parte de maestros en formación o maestros en ejercicio, surge entonces el doblado de papel como una estrategia que podría aportar a la solución de dichas situaciones. De hecho, puede mejorar el proceso de razonamiento en Geometría, es decir, le puede permitir al maestro en formación o maestro en ejercicio, dentro de un colectivo: hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, lanzar conjeturas, discutirlas, analizarlas y finalmente, probarlas. En otras palabras, la visualización de construcciones hechas mediante el doblado, puede posibilitar la producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros. Pero, para ello, es indispensable describir y analizar cómo se produce ese conocimiento en ese colectivo, con ese medio específico.

De esta manera, con el estudio se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo un colectivo de maestros en formación produce conocimiento geométrico mediado por la visualización y la interacción con la geometría del doblado de papel?

Marco teórico

Constructo teórico "*Humans-with-media*"

"*Humans-with-media*" o *Humanos-con-medios* es un constructo teórico desarrollado por Borba & Villarreal (2005) en el que se discute de qué manera el conocimiento matemático es el resultado de una construcción hecha por un grupo de personas pensantes con determinados medios, es decir, "un colectivo pensante de *humanos-con-medios*" (Villa-Ochoa & Ruiz, 2010, p. 517).

Estos autores señalan que "los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos" (Villa-Ochoa & Ruiz, 2010, p. 517). En este sentido, "la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento" (p. 517). De la misma forma sucede con los conocimientos geométricos. De acuerdo con las experiencias personales y grupales, mediadas por diferentes herramientas (materiales o simbólicas), se pueden producir diversos niveles de sofisticación del conocimiento, que son indispensables para resolver problemas o interpretar hechos (MEN, 2004).

De este modo, se pretende mostrar que la visualización y la interacción con la Geometría del doblado de papel, median la producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros en formación. Es decir, en un primer momento, estos pueden hacer experimentaciones a través de la construcción de figuras con diferentes dobleces; posteriormente, la visualización e interacción sobre estas figuras elaboradas, puede permitir la afirmación de conjeturas visuales, las cuales pueden ser interpretadas, analizadas y debatidas en un colectivo, con el ánimo de llegar a una primera validación mediante una prueba visual, lo que podría convertirse en un razonamiento formal en el momento en el que el grupo llegue a su consenso.

Visualización

Borba & Villarreal (2005) consideran que la visualización es una forma de razonamiento de la investigación en matemáticas y, en particular, en Educación Matemática. Ellos presentan dos niveles en los que la visualización se puede considerar: el primero, "asociado a su uso en la prueba matemática formal" (p. 86) y, el segundo, "relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes" (p. 86). De acuerdo con estos autores y en la línea de Hanna (2000), se puntualiza que en el primer caso, "las representaciones visuales no son aceptadas como parte de una prueba formal, sino como acompañantes heurísticos para la prueba, inspirando un teorema o su demostración" (Borba & Villarreal, 2005, p. 86) y, en el segundo caso, la visualización se toma más como "un recurso periférico o uno pedagógico" (p. 86). Por lo tanto, todavía se encuentra en discusión si la visualización hace parte o no de una demostración matemática rigurosa, pese a que es fundamental para la Educación Matemática.

De igual manera, la visualización se considera importante por las siguientes razones:

> …constituye una forma alternativa de acceder al conocimiento matemático; la comprensión de los conceptos matemáticos requiere múltiples representaciones y la representación visual puede transformar la comprensión de sí mismo; la visualización es parte de la actividad matemática y una manera de resolver problemas… (Borba & Villarreal, 2005, p. 96).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, la Geometría del doblado de papel se podría convertir en un medio que posibilite que un grupo de estudiantes logre procesos de visualización en las construcciones geométricas y, de esta manera, producir conocimiento. Desde esta perspectiva, el doblado de papel le permite al estudiante pasar de un proceso inicial de observar y tocar la figura, a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras, relacionarlas, clasificarlas y llegar incluso, a producir conocimiento.

Aunque en el doblado de papel no es posible el "arrastre" y el "desplazamiento" de figuras, sí es posible hacer ciertas modificaciones en la construcción y se pueden hacer traslaciones, observar tanto al anverso como al reverso de la hoja e interactuar con "puntos" y dobleces. Con esta herramienta, se pueden generar procesos de visualización que, según Clements & Battista (1992), "integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bidimensionales o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones" (citado por MEN, 2004, p. 10).

Metodología

Método

El estudio propuesto está orientado bajo un paradigma de corte cualitativo, porque las actividades se propusieron y se analizaron de acuerdo con el contexto del colectivo de maestros.

En este sentido, se considera fundamental tener presente la historicidad de los docentes y su aspecto subjetivo de la realidad, para poder llegar a describir sus interacciones dentro de un colectivo con doblado de papel. De acuerdo con este paradigma, el tipo de estudio es un "estudio de casos" múltiple (Hernández, Fernández & Baptista, 2006) de un colectivo de maestros en formación.

Puede indicarse que esta investigación se fundamenta en un proceso inductivo, en el que se pretende "explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas" (Hernández, Fernández & Baptista, 2006, p. 8). En este sentido, la información se recolecta a través de observaciones, entrevistas, revisiones documentales, discusiones en grupo, interacción e introspección con grupos o colectivos, evaluaciones de experiencias, entre otras.

Participantes

En la experiencia que se mostrará a continuación, participaron tres estudiantes (maestros en ejercicio de instituciones educativas de Apartadó o Turbo) de un Seminario Complementario, en el marco del programa de Maestría en Educación en regiones, de una universidad del departamento de Antioquia. Ellos hicieron parte de un colectivo que razona alrededor de los conceptos geométricos asociados con los axiomas de Huzita – Hatori. Los seudónimos que vamos a utilizar para referirnos a estos estudiantes de maestría y, a su vez, maestros en formación y ejercicio, son: Hugo, Paco y Luis. Para efectos del análisis, sólo se les dirá estudiantes.

Experiencia de un colectivo de maestros

La profesora del seminario menciona uno por uno los axiomas de Huzita – Hatori, los estudiantes hacen los dobleces respectivos y establecen algunas conclusiones, a partir del análisis y las interacciones que se dan dentro del grupo. En el siguiente apartado se muestra un episodio, en forma de diálogo, que surgió del trabajo con el axioma 2.

Axioma 2: *Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2* (Lang, 1996 – 2003, p. 38).

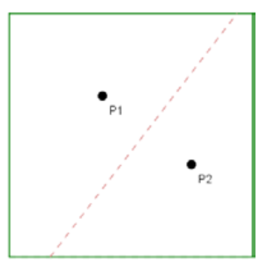


Figura 1: Doblez resultante consecuencia del axioma 2.

Profesora: ¿Con cuál concepto geométrico se relaciona este axioma?

Después de que los estudiantes hacen la construcción, afirman:

Luis: Hummm… Cuando llevo un punto sobre el otro, se genera un doblez… Que parece perpendicular al segmento formado por los puntos P_1 y P_2.

Profesora: ¿Y cómo demostramos que es perpendicular?

Luis: Si utilizamos una regla, tal vez lo podríamos corroborar.

Hugo: Pero sin regla, ¿cómo lo demostraríamos?

Paco: Con otra hoja de papel, ya que sus bordes son rectos y forman ángulos de 90º.

Profesora: Es cierto, pero ¿no habrá alguna manera de demostrarlo?

Paco: Ya sé… Miren, se puede percibir que en el vértice donde se generó el doblez, hay un ángulo de 360º. Si hago el doblez P_1P_2, ese ángulo queda dividido en cuatro ángulos iguales. Es decir, cuatro ángulos rectos.

Profesora: Buenas conclusiones. Ese doblez es perpendicular al segmento P_1P_2. ¿Pasará el doblez por el punto medio de dicho segmento?

Estudiantes: Claro…

Luis: Sí, profe, de hecho si hago el doblez que pasa por los puntos P_1 y P_2 y nombro M al punto de intersección entre el doblez que surgió de llevar P_1 sobre P_2 y el doblez P_1P_2, noto que P_1M es congruente con P_2M. Incluso, se puede mostrar con la misma hoja. Mire, los segmentos son iguales, "casan".

Paco: Luis tiene razón.

Profesora: ¿Cuál es el concepto asociado?

Hugo: ¿Es un eje de simetría?

Paco: Podría ser.

Profesora: Es cierto, pero este axioma está asociado con un concepto particular.

Luis: ¿Es una mediatriz? Es perpendicular al segmento y para por su punto medio.

Profesora: Ok, muy bien. ¿Es la mediatriz un lugar geométrico?

Estudiantes: ¿Un qué?

Profesora: Un lugar geométrico. ¿Saben el concepto de lugar geométrico?

Paco: No conocemos qué es un lugar geométrico.

Profesora: ¿No? Es el conjunto de puntos que cumplen con una determinada propiedad. En este caso, ¿qué propiedad cumplirán los puntos para pertenecer a la mediatriz?

Los estudiantes reflexionan sobre el asunto, pero no logran establecer la propiedad.

Profesora: Si se ubica un punto cualquiera sobre la mediatriz, ¿qué se pude afirmar de ese punto?

Hugo: Forma un triángulo con los puntos P_1 y P_2.

Profesora: ¿Qué tipo de triángulo?

Hugo: Isósceles. Se puede mostrar al hacer el doblez que permite llevar P_1 sobre P_2, que estas distancias (mostrándolas en la hoja) son iguales.

Profesora: Otra vez, ¿qué propiedad cumplirán los puntos para pertenecer a la mediatriz?

Luis: Pues que todos los puntos que conforman la mediatriz estarían a la misma distancia de los puntos P_1 y P_2, ¿verdad?

Paco: Hummm… Si… Que todos los puntos equidistan de los extremos del segmento.

Profesora: Correcto. Hugo, ¿podrías decirnos entonces la definición de mediatriz como lugar geométrico?

Hugo: profe, no sabíamos que la mediatriz o la bisectriz se definieran como lugares geométricos. En este caso, yo diría: "la mediatriz es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento, en este caso de los puntos P_1 y P_2".

Paco: Sí, profe, nosotros pensábamos que la mediatriz y la bisectriz eran solo líneas notables del triángulo y así se las enseñábamos a los estudiantes.

Luis: Voy a pensar una actividad, utilizando el doblado de papel, para que mis estudiantes puedan comprender estos conceptos como lugares geométricos.

Análisis

En este caso, se notó que los estudiantes desconocían algunos conceptos geométricos. Esta situación se podría entender, quizás, porque en su paso por el pregrado no hubo una buena profundización en dichas temáticas o porque son conceptos que normalmente se dejan olvidados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría escolar. También se puede considerar que, en muchos casos, se da una segmentación de las temáticas al momento de llevarlas al aula de clase, lo que podría ser una causa de las dificultades en la comprensión de dichos conceptos. De hecho, lo anterior se evidencia cuando alguno de los estudiantes afirma: "*Sí, profe, nosotros pensábamos que la mediatriz y la bisectriz eran solo líneas notables del triángulo y así se las enseñábamos a los estudiantes*".

El estudio de este episodio permite corroborar la afirmación de Aballe (2000, citado por Barrantes, 2002): que los maestros en formación o maestros en ejercicio presentan lagunas en la construcción de conceptos matemáticos, en este caso específico, de conceptos geométricos. Esto se comprobó cuando uno de los estudiantes mencionó: "*No conocemos qué es un lugar geométrico*". Sin embargo, el éxito de la experiencia vivida por los estudiantes, radica en que ellos pudieron tomar conciencia de sus dificultades para la comprensión de dichos conceptos. Y con base en dicha reflexión y, la construcción hecha mediante el doblado de papel, el diálogo, las interacciones y el análisis grupal, se generó la producción del conocimiento al desarrollar y consensuar los conceptos.

También es importante mencionar que, los maestros reflexionaron sobre sus prácticas pedagógicas y notaron que pueden contribuir con su mejoramiento, al generar estrategias metodológicas que involucren el doblado de papel como medio para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Este hecho, se evidenció cuando uno de los estudiantes manifestó: "*Voy a pensar una actividad, utilizando el doblado de papel, para que mis estudiantes puedan comprender estos conceptos como lugares geométricos*".

Resultados y conclusiones

Considerando la primera experiencia vivida con los maestros en formación, se pudo constatar que en las situaciones planteadas, las interacciones del colectivo de estudiantes con el doblado de papel y con la profesora del seminario, facilitaron la generación de discusiones, que al ser analizadas y consensuadas, posibilitaron la producción de conocimiento geométrico. En ese sentido, las actividades propuestas al colectivo llevaron a los estudiantes a plantear algunas conjeturas visuales y, del mismo modo, a que pudieran corroborarlas o falsearlas, lo que finalmente conllevó a generar un ambiente de colaboración y de construcción social del conocimiento.

Por lo tanto, la realización de la construcción mediante el doblado y, su revisión, análisis y discusión en un colectivo, les permite a los maestros en formación: observar; comparar y ordenar propiedades y construcciones; proponer y demostrar conjeturas visuales; lograr clasificaciones lógicas; hacer representaciones; retener y recuperar información; interpretar geométricamente lo que hace cuando se realiza algún proceso; hacer inferencias y transferencias de las construcciones hechas para lograr abstracciones y, finalmente, evaluar sus conocimientos. Todos estos aspectos contribuyen al proceso de producción de conocimiento geométrico del colectivo de maestros.

El análisis de las situaciones permite inferir, inicialmente, que las discusiones alrededor de construcciones hechas con doblado de papel en un colectivo de maestros en formación, posibilitan la comprensión de conceptos geométricos y una reflexión sobre la práctica pedagógica misma, al pensar en el doblado de papel como un medio que permite el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, porque facilita procesos de visualización, experimentación y argumentación.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje*. Tesis doctoral. España: Universidad de Extremadura.

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine,* (5), 357 – 371.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. En: *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, 143 – 158.

Lang, R. (1996 – 2003). *Origami and Geometric Constructions.* Recuperado el 4 de Junio de 2006, de: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas,* (21), 175 – 192.

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* (31). Recuperado el 15 de septiembre de 2010, de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación. Medellín: Universidad de Antioquia.

Villa-Ochoa J. & Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. En: *Revista Educ. Matem. Pesq., São Paulo, 12*(3), 514 – 528.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

¿Qué aporta el realismo crítico a la investigación en matemática educativa?

Iskra **Nunez**
Departamentos de Matemáticas y C&I, La Universidad de Texas-Panamericana
Estados Unidos
nunezi@utpa.edu

Resumen

Este artículo analiza la posición filosófica del realismo crítico y su utilidad potencial en *la investigación en educación matemática* (IEM). Se divide en tres partes. La primera parte ofrece el marco teórico. Se presenta el realismo crítico en relación con la pluralidad de teorías en IEM. La segunda parte ofrece un análisis de cuatro categorías de teorías usadas en IEM: La psicología cultural, las etnomatemáticas, la perspectiva practico-interpretativa, y aspectos de semiótica y discurso. Se utiliza el método realista crítico denominado crítica del talón de Aquiles para señalar puntos de vulnerabilidad aunque fundamentales en cada categoría. Se argumenta que la identificación del talón de Aquiles puede revelar las ventajas de la no-parcialidad. La tercera parte presenta la síntesis de los resultados. Se identifican los teóricos quienes previamente identificaron algunos posibles talones de Aquiles y se señalan once de estos para así evitar posiciones parciales en IEM.

Palabras clave: crítica del talón de Aquiles, educación matemática, filosofía, ontología, realismo crítico, teorías de aprendizaje.

Introducción

Durante las últimas décadas del milenio pasado y los principios de éste, *la investigación en educación matemática* (IEM) ha expandido su metodología con el uso de teorías sobre el aprendizaje (Cobb, 2007; Jankvist, 2011; Leikin & Zazkis, 2012; Lester, 2005; Radford, 2008; Schoenfeld, 2002; Silver & Herbst, 2007; Simon, 2009;

Sriraman & English, 2005, 2010). La expansión de teorías en IEM ha sido delineada particularmente por los ámbitos culturales, sociales, y políticos (Gutiérrez, 2013; Jablonka, Wagner, & Walshaw, 2013; Lerman, 2000; Sriraman & English 2010; Valero, 2004). Es esta precisa proliferación multi-teorética la que ha motivado a la comunidad de IEM a reducir (Schoenfeld, 2002), armonizar (Sriraman & English 2010), y hacer un balance de la pluralidad de teorías en uso para trazar futuras líneas de investigación (Sriraman & English, 2005). Actualmente existen numerosos intentos guiados a enlazar de una u otra manera las múltiples teorías en IEM pero ninguno desde una perspectiva realista crítica.

Este artículo se suma a estos intentos explorando la posibilidad de una nueva base filosófica para las múltiples teorías en uso. Este objetivo requiere una aclaración preliminar de lo que aquí se entiende por teoría. Radford (2008) propone extender la noción de teoría τ por medio de su estratificación usando la notación $\tau=(\phi, \mu, \varepsilon)$, donde cada uno de los tres niveles aquí se entienden y utilizan de la siguiente manera: ϕ se refiere a la base filosófica o conjunto de principios básicos, las presuposiciones implícitas o explícitas sobre la realidad y el conocimiento delineando las fronteras de discurso;[1] μ se refiere al conjunto de métodos, incluyendo las técnicas para la recolección de datos y sus límites; ε se refiere al conjunto de preguntas de investigación, las cuales pueden surgir también durante o después de aplicar interpretaciones.

En la primera sección de este artículo, se ofrecen los principios básicos del *realismo critico* (RC) como base filosófica ϕ para IEM. Aquí se argumenta que el RC podría beneficiar a IEM porque, contrario al pragmatismo, el constructivismo social, la hermenéutica, y el post-modernismo, no omite una teoría de la ontología. En la segunda sección, se propone la crítica del *talón de Aquiles* (denotado aquí como α) como método μ y se argumenta que puede ayudar a IEM a ver las ventajas de la no-parcialidad. En particular, la técnica de recolección de datos es una revisión de la literatura limitada a una bibliografía selectiva organizada, en parte, por cuatro categorías de teorías.[2] En la tercera parte, se presentan los resultados abordando las siguientes preguntas de investigación ε: ¿Qué aporta el RC a la investigación en matemática educativa? ¿Cuáles son los posibles α de estas categorías de teorías?

Realismo crítico como base filosófica ϕ para IEM

Esta sección describe el RC en relación con otras cuatro filosofías de aprendizaje. En IEM, Ernest (2010a) emplea el término *filosofías de aprendizaje*,[3] en vez de teorías de aprendizaje, subrayando que la idea de teoría está limitada por su capacidad de prueba. En este artículo se adopta esta definición, derivada del entendimiento de filosofía como "el análisis lógico, incluidos los problemas metodológicos tales como las condiciones

---

[1] El término *discurso* se refiriere aquí a la producción de elementos semióticos de formas variadas de comunicación con signos verbales y no-verbales, imágenes visuales, lenguaje, etc.

[2] Se buscaron combinaciones de tres temas: educación matemática, cuatro categorías de τ–la psicología cultural, las etnomatemáticas, la perspectiva practico-interpretativa, y aspectos de semiótica y lenguaje–y sus respectivas críticas en las bases de datos *Education Resources Information Center* (ERIC) y *Google Scholar*. Trece textos fueron selectos por su aporte a explicar ε (Tablas 1-7).

[3] Todas las traducciones son creadas por el autor.

generales de la posibilidad del conocimiento" (Ernest, 1991, p. 48) pero usándola intercambiadamente con la noción de teoría τ, previamente definida. Cuatro de las filosofías de aprendizaje más usadas en IEM son el pragmatismo, la hermenéutica, el constructivismo social, y el post-modernismo. Un resumen breve de algunas ventajas y desventajas de estas cuatro filosofías da pie a la introducción del valor del RC para IEM.

El pragmatismo pone énfasis en términos del éxito de la aplicación de un método, y con razón, postula la posibilidad del conocimiento de la realidad ontológica fuera de su mismo ámbito práctico. Lester (2005) señala que el pragmatismo, por lo menos en los Estados Unidos, desafortunadamente tiende a ignorar las bases filosóficas de una teoría porque existe una infatuación con "lo que funciona" a costa de disminuir u obliterar la investigación de carácter filosófico en IEM. A esta desventaja, Scott (2002) le llama "la falacia del pragmatismo" (p. 2).

La hermenéutica, la teoría de la interpretación aplicada a IEM, da primacía al conocimiento subjetivo derivado de experiencias. Por ejemplo, "[a] pesar de que las personas pueden creer que hay expresiones matemáticas que significan lo mismo para todas las personas, cada persona coloca la expresión en el contexto de su experiencia, perspectiva cultural, e intenciones actuales" (Brown, 1991, p. 447). Sin embargo, esta filosofía de aprendizaje suele estar limitada a la reconstrucción del conocimiento retrospectivo por medio de historias, narrativas, y bibliografías, lo cual podría causar lo que Scott (2002) llama "la falacia prospectiva" (p. 2) en donde la interpretación retrospectiva matemática se confunde con la prospectiva.

El constructivismo social toma en cuenta el significado del conocimiento subjetivo previamente enfatizado por la hermenéutica y se puede entender como un avance sobre las teorías de estímulo-respuesta (Ernest, 1991, 1998, 2010a). Otra de las ventajas de esta filosofía de aprendizaje es el empleo de la metáfora de la construcción como proceso en el aprendizaje matemático. También rechaza la visión del estudiante como tabula rasa—estudiante pasivo de mente vacía para ser acondicionada. El constructivismo social enfatiza que la construcción del conocimiento es un proceso arraigado en un contexto social. Un problema puede surgir cuando se tiende a ver la relación del conocimiento objetivo y subjetivo como dialelo exhaustivo de la realidad.[4] Este problema representaría un ejemplo de "la falacia epistémica" (Scott, 2002, p. 2) porque la dimensión del conocimiento objetivo-subjetivo revuelve en forma de círculo vicioso sin proponer otra dimensión de la realidad ontológica independiente, o al menos, de la existencia previa y eficacia causal de los objetos de la investigación científica.

El post-modernismo se puede entender como una filosofía del aprendizaje guiada a ir más allá de lo que Scott (2002) llama "la falacia determinista" (p. 2), la negación de la intención y creatividad humana. Algunas ventajas del post-modernismo en IEM son el enfoque en el análisis del significado matemático por medio del discurso (Sfard, 2008) y el análisis de las relaciones pedagógicas de poder e interés (Valero, 2004). Otra ventaja es su rechazo a las metanarrativas como teorías ubicuas (Ernest, 2004). Un posible problema del post-modernismo es su tendencia a cometer "la falacia ligüística" (Bhaskar, 1993/2008b, p. 192); es decir, cuando se tiende a ver el mundo exclusivamente como una construcción social de conceptos, lenguaje y semiótica (ver el ejemplo del *ser* mujer en el primer principio del RC en la siguiente sección).

---

[4] Se invita al lector a ver la Figura 4.1 en Ernest (1991, p. 83).

No falta quien pregunte: "¿Ésto es teoría?... ¿ Dónde están las matemáticas?" (Strassmann citado en Lawson, 2001, p. 154). El RC "es una filosofía, pero su atención se centra en la ontología, no en la epistemología" (Sayer, 2000, p. 87). La ontología es la rama que teoriza la naturaleza del ser en el mundo real, y la epistemología es la rama que incluye los métodos, teorías, enfoques, conceptos y otros recursos sobre la realidad. La razón por la cual el RC puede aportar una base filosófica para IEM es que incluye una teoría de la ontología la cual está ausente en, por ejemplo, el pragmatismo, la hermenéutica, el constructivismo social, y el post-modernismo.

Una reseña breve del desarrollo histórico, principios y limites del RC básico

El RC es una filosofía de la ciencia preocupada con "la naturaleza de, y las perspectivas de, la emancipación humana" (Bhaskar, 1986/2009, p. 103). Esta filosofía inició alrededor de 1975 con la motivación de investigar lo que otras filosofías del aprendizaje habían omitido y así reivindicar la noción de ontología (Bhaskar, 1975/2008a; Collier, 2004). Desde entonces, la aplicación del RC en la ciencias es variada. Por ejemplo, la perspectiva realista crítica en el área de la educación tiende a dar pábulo a nuevas visiones anti-reduccionistas (Scott, 2002; Shipway, 2011), a promover la abolición de expectativas bajas en la educación primaria como punto de liberación en comunidades aborígenes Australianas (Sarra, 2011), y a fomentar la reconcepción del aprendizaje matemático como auto-emancipación (Nunez, 2013b).

Los textos clásicos del RC lo diferencian en tres fases: la básica (discernible por sus publicaciones entre 1975-1990s), la dialéctica (1993-2000s), y de Meta-realidad (2002-al presente). Esta investigación se limita a las primeras dos fases ofreciendo los principios del RC básico, los cuales son los siguientes:

- El primer principio establece la distinción entre la ontología y la epistemología. Se distingue entre el estudio de la naturaleza de entidades en el mundo (ontología) independientes de teorías, métodos, y lenguaje sobre estas (epistemología).

Por ejemplo, la gravedad es una entidad real, existe, y tiene efectos en las personas, independientemente de que las personas tengan una teoría sobre ella. (La ontología de la gravedad ≠ la epistemología sobre la gravedad). La fusión de la ontología y la epistemología produce un error en argumentación llamado en términos realista-críticos, *la falacia epistémica* (Bhaskar, 1975/2008a). La fusión de la ontología y el lenguaje produce un error en argumentación llamado *la falacia lingüística* (Bhaskar, 1993/2008b) Por ejemplo, el *concepto* de mujer es construido por la sociedad por medio, en parte, del lenguaje, pero esto no significa que el *ser* mujer se reduzca a su concepto— ser ≠ concepto. En la realidad una mujer es mucho más que su modelo, concepto, o teoría sobre ella. Estas dos y otras falacias dicen que hay que "tener cuidado con las brechas" (Nunez, 2012, p. 2) que existen entre, por ejemplo, el lenguaje, los métodos y las teorías sobre el ser, y el ser mismo para no caer en reduccionismos.

- El segundo principio establece una nueva ontología no empiricista, la cual abarca a la epistemología como su subconjunto.
- El tercer principio establece una visión estratificada de la realidad en tres diferentes niveles diferentes: El nivel empírico (las experiencias), el cual está anidado en el nivel actual (eventos), que a su vez está anidado en el nivel real (los mecanismos y estructuras).

La fusión de la brecha entre el nivel real y el actual crea un error de argumentación llamado *actualismo* (Bhaskar, 1975/2008a, p. 54). Este error identifica los mecanismos reales como patrones que tienen a recurrir en contextos empíricamente cerrados. Uno de los problemas del actualismo es que tiende a llevar a conclusiones deterministas.

- El cuarto principio establece la distinción entre sistemas cerrados y abiertos. Aquí se propone que la realidad es un sistema abierto aunque es susceptible a cierres cuando se trata de contextos experimentales (Bhaskar, 1975/2008a, pp. 23-5).

Estos principios pueden aportar a IEM con una nueva base filosófica sin excluir las ventajas de otras filosofías del aprendizaje, como por ejemplo, el pragmatismo, la hermenéutica, el constructivismo social, y el post-modernismo, pero sí evitando la desventaja de la omisión de una teoría ontológica.

Algunos límites de la perspectiva realista crítica

Es importante hacer notar que el RC es susceptible a críticas. Mearman (2006) argumenta que el RC, con su concepto de realidad abierta, es limitado. Por ejemplo, en instituciones como escuelas y prisiones la realidad no es totalmente abierta por su alto grado de regulación de las experiencias de los internos (nivel empírico), la predicción alta de los eventos diarios (nivel actual), y la baja pero no nula existencia de estructuras como la posibilidad de un brote de influenza en la institución (nivel real). Mearman sugiere diferentes grados de abertura para una mejor conceptualización. En otra crítica, von Glasersfeld (1989), defensor principal del constructivismo radical, argumenta que la función del conocimiento está limitada al nivel empírico de experiencias y organización del mundo y “no al descubrimiento de la realidad ontológica” (p. 162). Por el contrario, el RC no se limita a teorizar las experiencias (nivel empírico), ni reduce los métodos y teorías solo a la organización de la realidad (epistemología). Aquí, el RC se diferencia del constructivismo radical porque no niega la existencia y los efectos causales de entidades reales en el mundo como los mecanismos causales, por ejemplo como la gravedad, las relaciones entre clases sociales y de genero, la eficacia taxonomicamente irreducible del language, etc., (nivel real) sino que afirmativamente los teoriza. Es de esta manera que el RC puede proveer a IEM con principios básicos realistas de donde partir para así evitar reducciónismos e irrealismos en argumentación.

Revisión de la literatura: Crítica del talón de Aquiles α como método μ

Esta sección presenta la revisión de la literatura de cuatro categorías de teorías en IEM. El concepto realista crítico denominado la crítica del talón de Aquiles α se utilizó porque “señala en una teoría, un ángulo muerto [punto ciego o de vulnerabilidad] en lo que característicamente parece ser su punto fuerte” (Bhaskar, 1993/2008b, p. 372). El valor de este método es su potencial para contribuir a la no-parcialidad. Es necesario aclarar las diferencias entre lo que aquí se entiende por imparcialismo, parcialismo, y non-parcialismo.

Cottingham (1983) declara que el imparcialismo es una posición inalcanzable porque mantiene que para ser moral, una decisión debe tomar en cuenta los intereses de otros y los intereses personales deben de tener “el mismo peso” que los intereses ajenos. De acuerdo con Cottingham (1986), lo que sí es posible alcanzar es el parcialismo, la tesis “de que a menos que uno tenga la obligación directa o indirecta de ser imparcial, es moralmente correcto favorecer decisiones de interés propio” (p. 358). Para trascender estas dos posiciones, aquí se usa el no-parcialismo: La tesis que asume cierto grado de sesgo al tomar una decisión. Cada decisión es tomada desde una posición parcial (y temporal) porque es imposible tener toda la información que informaría tal decisión. Aun así, el no-parcialismo abre un juicio no-definitivo tomando en cuenta la posibilidad de intervención. Cada persona puede llegar a una decisión racional entre la variedad de posiciones parciales, porque se pueden dar motivos para elegir y defender una decisión sobre otra. (Esto no significa que la decisión sea correcta, puede ser falible pero no siempre determinista puesto que en la mayoría de los casos la decisión se puede cambiar en el tiempo).

La búsqueda de α puede ayudar a IEM a ver los beneficios de la no-parcialidad precisamente porque se enfoca en encontrar los puntos débiles en las teorías, lo cual puede ayudar a tomar decisiones menos sesgadas. La idea de fondo es adoptar la posición ética (o teoría τ) menos débil, la que de más poder critico y explicativo. Schoenfeld (2000) llega a la misma conclusión cuando argumenta que “los investigadores de la educación tienen una obligación intelectual de impulsar una mayor claridad y especificidad y buscar casos límite o contraejemplos para ver dónde se rompen estas ideas teóricas” (p. 647). La importancia del no-parcialismo puede encaminar a IEM hacia “la supervivencia con dignidad” (D’Ambrosio, 2007, p. 38) en el mercado de las teorías.

Técnica y límites de la recolección de datos

Durante la búsqueda de datos se seleccionó una bibliografía selecta de trece artículos de investigación estructurada por el resultado de Lerman (2006), quien identifica cuatro categorías: La psicología cultural, las etnomatemáticas, aspectos de la perspectiva practico-interpretativa, y aspectos de semiótica y discurso, a través de un análisis de los artículos publicados entre 1985-2005 en tres revistas principales de investigación matemática. La razón del uso de estas categorías es que son de manera prevista las que componen un subconjunto del campo de teorías más usadas en IEM, aunque restringidas a dicho periodo de tiempo y omitiendo otras tendencias.

También se encontraron problemas con la técnica de recolección de datos. Por ejemplo, el enfoque de la búsqueda necesitó describir a grandes rasgos cada una de las cuatro categorías, su presentación requirió de simplificación debido a su complejidad. Se puede argumentar que la simplificación aquí, lejos de diluir la explicación de la teoría, se esforzó en encontrar el argumento central de ideas que comúnmente son conocidas por su grado de dificultad. Segundo, se trató de encontrar por lo menos un articulo que señale un punto de debilidad en cada categoría; sin embargo, se encontraron e incluyeron artículos fuera del campo de matemática educativa que también ofrecen críticas importantes.

Resultados: Hacia una respuesta de las preguntas de investigación ε

Esta sección presenta los resultados del análisis de cuatro categorías previamente definidas. Para la presentación se creo una herramienta tabular en secciones para distinguir al autor y aislar α, en su traducción al español. Estos resultados permitieron reformular una nueva relación $\phi \subseteq \tau = (\mu, \varepsilon, \alpha, \lambda)$ más completa. Es posible visualizarla adaptando una gráfica propuesta por Bikner-Ahsbahs y Prediger (2006) de la siguiente manera (Figura 1):

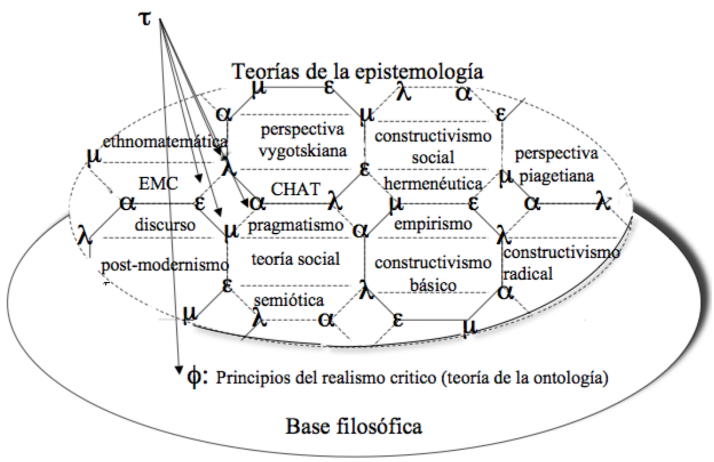


Figura 1. Múltiples perspectivas teóricas $\tau_n = (\mu, \varepsilon, \alpha, \lambda)$, n = 1, 2, 3… comúnmente usadas en IEM entre distancias mínimas --- de una ϕ: base filosófica (no necesariamente única), y entre sus μ: métodos, ε: preguntas de investigación, α: posibles talones de Aquiles, y λ: lenguaje taxonómicamente irreducible a otra τ y que cada τ_n aporta.

La psicología cultural

Los primeros α se identifican en cada una de las subdivisiones de la categoría de la psicología cultural: La perspectiva piagetiana, la perspectiva vygotskiana, las formas del constructivismo, y las formas reconocidas de teorías de la actividad.

Un argumento central de la perspectiva piagetiana propone la primacía de la práctica en el desarrollo cognitivo (Archer, 2000) y una teoría del mismo estratificada en etapas. Para ilustrar, Piaget (1970) declaró que “cada vez que uno enseña prematuramente algo a un niño que el hubiera descubierto solo, el niño es privado de inventarlo y consecuentemente de entenderlo completamente” (p.15). Un posible α de la perspectiva piagetiana revela la brecha que propone que el desarrollo cognitivo es independiente de la instrucción (Engeström & Sannino, 2012; Vygotsky, 1962). La identificación de este α esta fuera de IEM (Tabla 1). Sin embargo, este resultado puede ayudar a ver que es precisamente esta brecha la que omite el grado de impacto que tienen las interacciones de colaboración entre los docentes y estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. En IEM, la investigación de esta brecha estudia el dominio afectivo en términos de las emociones, actitudes, y creencias sobre las matemáticas como un doble efecto de retroalimentación entre las interacciones de colaboración (estudiantes-docente, estudiante-docente-administrador, etc.,) y la instrucción matemática (McLeod, 1992).

Tabla 1

Posible α de la perspectiva piagetiana

Engeström y Sannino (2012)	“La teoría del aprendizaje expansivo también intenta acercar el aprendizaje y la enseñanza en una relación dialéctica, [por medio] del análisis de la brecha y la interacción entre estos dos procesos”. (p. 55)
Vygotsky (1962)	“Nuestro desacuerdo con Piaget se centra en un punto… [El] asume que el desarrollo y la instrucción son procesos completamente separados, inconmensurables, que la función de la instrucción es simplemente introducir formas adultas de pensamiento”. (p. 116)

La perspectiva vygotskiana

Algunos argumentos centrales de la perspectiva vygotskiana revelan la primacía del lenguaje y la socialización en el desarrollo cognitivo como el proceso de internalización de cultura y su externalización al momento de creación (Vygotsky, 1962, 1978). Para ilustrar, Vygotsky (1978) declaró que "el aprendizaje de los niños empieza mucho antes de que asistan a la escuela" (p. 84). Dos posibles α de la perspectiva vygotskiana es una tendencia al reduccionismo (Archer, 2000) y la ausencia de una teoría social (Blunden, 2009). La identificación de estos resultados está fuera del campo de matemáticas educativas (Tabla 2). Sin embargo, este resultado es importante para IEM porque la inclusión del dominio sociológico considera los posibles mecanismos de reproducción y/o transformación social. Algunos ejemplos de estos posibles mecanismos son los textos escolares que jerárquicamente asignan problemas de matemáticas esotéricas a estudiantes de nivel socioeconomico alto y problemas de matemáticas mayormente algorítmicas al resto (Dowling, 1998, 2001), la formación de una identidad matemática mediante la identificación con cierta clase social, racial y/o genero (Solomon, 2007) y las desigualdades en el uso del lenguaje y las experiencias matemáticas previas como formas de desigualdad en capital económico, social y cultural (Zevenbergen, 2001).

Tabla 2

Posibles α de la perspectiva vygotskiana

Archer (2000)	"la practica es una negativa a conceder primacía al lenguaje....no sólo la materia de la [práctica] viene antes que nada ... también es una cuestión de ver el lenguaje como una actividad práctica ... nuestras palabras son literalmente hechos". (p. 121)
Blunden (2009)	"Vygotsky no siguió con las ideas de colaboración interpersonal para desarrollar un enfoque para la comprensión de los fenómenos sociales a una escala más amplia, es decir, una teoría social". (p. 11)

Las formas reconocidas de la perspectiva del constructivismo

Las formas del constructivismo básico, social, y radical forman un conjunto de teorías basadas en la perspectiva piagetiana (Ernest, 2010a). El caso del constructivismo social se discutió en la primera parte de esta investigación. En cuanto al constructivismo radical, éste se basa en dos principios: El primero afirma que los individuos toman parte activa en la construcción del aprendizaje y el segundo afirma que la función cognitiva sirve para experimentar u organizar el mundo pero no para descubrir su naturaleza ontológica (von Glasersfeld, 1989). El constructivismo básico se basa solo en el primer principio. Los posibles α identificados con las perspectivas del constructivismo radical, básico y social incluyen la exclusión de la dimensión sociopolítica en el aprendizaje matemático (Zevenbergen, 1996) y el problema del conocimiento de la naturaleza del mundo (Cobb, 2007). La identificación de estos resultados es crucial porque invita a la comunidad de IEM a empezar a incluir y cuestionar el impacto que tiene la dimensión sociopolítica (Gutiérrez, 2013; Jablonka, Wagner, & Walshaw, 2013; Valero, 2004) y la dimensión ontológica para la pedagogía matemática.

Tabla 3

Posibles α de las formas del constructivismo

Zevenbergen (1996)	"El constructivismo con su valorización del individuo, la construcción subjetiva del significado, ignora este aspecto politico...La negación de la dimensión socio-política de la creación del sentido no es sorprendente dado que la mayoría de la educación se basa en discursos liberales". (pp. 103-4)
Cobb (2007)	"el problema central de la epistemología tradicional, el de la oposición entre el realismo filosófico y posiciones constructivistas [es] que niegan que la realidad ontológica se puede conocer". (p. 4)

Las formas reconocidas de las perspectivas de la actividad

Las formas reconocidas de teorías de la actividad—CHAT, por sus siglas en inglés—tienen linaje en la perspectiva vygotskiana (Engeström & Sannino, 2012; Engeström, 1987). Estas teorías ofrecen una variedad de diferentes unidades de análisis para el estudio de la actividad en el aprendizaje matemático (Nunez, 2009). Algunas unidades dan primacía al individuo como aprendiz—otras dan primacía a las comunidades como aprendiz—en relación con el ambiente educativo mediado por "el potencial semiótico de un artefacto" (Bartolini & Mariotti, 2008, p. 752), la totalidad de una *orquestra semiótica* (Radford, Bardino, & Sabena, 2007), y la historia-cultural de aspectos de la división del trabajo, incluyendo la historia-cultural y los patrones normativos en la actividad matemática (Roth & Radford, 2011). Los posibles α aquí son identificados como una tendencia a alinear el aprendizaje matemático en términos de la equiparación de la historia-cultural del individuo (o comunidad) con sus patrones de actividad (Brown, 2010) y una omisión de la crítica del empirismo (Nunez, 2013a). La identificación de estos resultados es significativa para IEM porque ayuda a revivir un interés por la filosofía mediante el cuestionamiento de las presuposiciones sobre la naturaleza del aprendizaje.

Tabla 4

Posible α de las formas reconocidas de teorías de la actividad

Brown (2010)	"*El aprendizaje no se entiende principalmente como la alineación creciente con las formas culturales más o menos familiar*es, *o con patrones fijos de actividad*[5]...Para el ser humano, el aprendizaje debería de ser sobre aquello que ve y experimenta las matemáticas para llegar a ser, en el marco de uno mismo, un ser que evoluciona en el proceso. (pp. 340-2)
Nunez (2013a)	"es porque la teoría de la actividad no aporta una crítica de Hume y el empirismo, que vemos muchas de sus inconsistencias...Esta omisión es especialmente importante porque Hume articuló la forma más radical y más coherente del empirismo". (p. 150)

La perspectiva etnomatemática

En las etnomatemáticas se señala que algunos de sus argumentos centrales promueven la inclusión de la herencia olvidada de los orígenes no europeos de las matemáticas y la posibilidad de desafiar ideas racistas o eurocentristas (D'Ambrosio & D'Ambrosio, 2013; D'Ambrosio, 1985, 2007). Sin embargo, la identificación de este resultado es importante para IEM porque ayuda a entender que a pesar de que cada teoría aporta un lenguaje λ taxonomicamente irreducible a otras teorías, también hay

[5] Énfasis en el original.

debilidades inherentes con el λ mismo. Por ejemplo, este resultado muestra la vulnerabilidad en el prefijo *etno* en sí, y como su utilización moderna podría enfatizar la casta o linaje y llegar a justificar la educación matemática apartheid (Vithal & Skovsmose, 1997).

Tabla 5
Posible α de las etnomatemáticas

Vithal y Skovsmose (1997)	"un problema con 'etnomatemáticas' en el contexto de Sudáfrica es el uso de 'etno'. Etimológicamente, el prefijo 'etno' es derivado del griego 'etnos' que significa 'nación'. Su uso moderno es una forma de combinación que indica la 'raza', 'pueblo', 'cultura', 'étnica' o 'etnológico'. Así, el uso actual de la palabra no ayuda a resolver la referencia incómoda a la 'raza', sino más bien la profundiza". (p. 138)

Aspectos de la perspectiva practico-interpretativa aplicados a IEM

Los posibles α identificados con los aspectos de la perspectiva practico-interpretativa se subdividen en tres: *La educación matemática crítica* (EMC), la hermenéutica y el pragmatismo. Algunos argumentos centrales de EMC señalan que la pedagogía matemática no es un tema neutral sino cargado de valores y por lo tanto debería preparar a estudiantes no solo en el nivel matemático sino también social y político para la vida democrática (Skovsmose, 1994, 2002). La importancia de este resultado puede ayudar a IEM a ver que la preparación de estudiantes en matemáticas para la vida democrática tiende a promover la razón instrumental con el fin de satisfacer las demandas del mercado laboral (Ernest, 2010b). Ya se discutieron las ventajas de la hermenéutica y el pragmatismo en la primera sección. Ahora los resultados en IEM se identificaron como el limite de historias, relatos y experiencias (Brown, 2010) y una tendencia a minimizar la contribución del valor de la filosofía para pedagogía matemática y su investigación (Simon, 1999).

Tabla 6
Posibles α de la hermenéutica, EMC y el pragmatismo

Brown (2010)	"La negativa a asentarse en alguna historia dada, y en las historias pasadas de los objetos, sustenta la petición de este documento para una mayor alineación entre el aprendizaje matemático y la renovación cultural". (p. 341)
Ernest (2010b)	"Uno de los problemas pendientes de la TC [teoría crítica] es que asume un punto fijo de Arquímedes, una "vista desde el ojo de Dios" del que se pueden determinar posiciones éticas y epistemológicas ... puede darse el caso de que en la EM [educación matemática] y EMC…somos cómplices en la promoción de la razón instrumental a través de EM, a pesar de nuestro compromiso con los ideales de EMC". (pp. 70-82)
Simon (1999)	"Investigadores de la educación matemática no pueden darse el lujo de participar como filósofos en debates de las teorías establecidas. Más bien, tenemos que (en caso apropiado) crear coordinación pragmática de análisis realizados desde diferentes perspectivas teóricas". (p. 488)

Aspectos de semiótica y discurso aplicados a IEM

Un argumento central de los aspectos de semiótica y discurso aplicados a IEM es que la sinergía entre las teorías sociológicas y lingüísticas abre una ventana a la cognición. La identificación de este resultado podría ayudar a IEM a evitar uno de los problemas del postmodernismo, revisado en la primera sección, que tiende a ocurrir “cuando, [como] Wittgenstein, [se] equipara el significado de una palabra con su uso en el lenguaje” (Brown, 2010, p. 331). Un ejemplo en IEM es el término *commongnition* (Sfard, 2008) el cual podría fomentar una perspectiva que niega los niveles ontológicos irreducibles de la comunicación y de la cognición, si ambos son vistos como unidad.

Tabla 7

Posible α de aspectos de la semiótica y el discurso en IEM

Sfard (2008)	“commongnition “término que abarca el pensamiento (cognición individual) y (interpersonal) que comunica; como una combinación de las palabras comunicación y la cognición, se hace hincapié en el hecho de que estos dos procesos son diferentes (intrapersonal e interpersonal) manifestaciones de un mismo fenómeno”. (p. 296)

Conclusiones: Algunas aportaciones e implicaciones del RC para IEM

En este artículo se ha usado la técnica del α, tomada del RC, como heurística aplicada a la revisión de cuatro categorías de teorías en IEM con el fin de investigar los beneficios de la no-parcialidad. Esta revisión no ha pretendido ser completa ni exhaustiva. Los resultados obtenidos, sin embargo, son sumamente importantes porque se han concentrado en la identificación de puntos de vulnerabilidad aunque fundamentales que previamente han sido señalados, ya sea en el área de IEM o fuera de esta. También se ha ofrecido una nueva relación $\phi \subseteq \tau = (\mu, \varepsilon, \alpha, \lambda)$ más completa usando los resultados, la cual es importante precisamente porque la manera en que se teoriza la naturaleza de la realidad, el conocimiento, el ser, la sociedad, etc., tiene implicaciones normativas para la educación matemática: Dicho esto en términos realista-críticos la implicación es que el *debería* es derivado de la naturaleza del *ser*. De esta manera, aquí se ha conseguido aportar más poder crítico y explicativo para IEM.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el apoyo de la Fundación Nacional de Ciencia para el adelanto de la mujer en la ciencia, tecnología, ingeniería, y matemáticas (Nacional Science Foundation, ADVANCE Program at University of Texas-Pan America).

Referencias y bibliografía

Archer, M. S. (2000). *Being human: The problem of agency*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bhaskar, R. (2008a). *A realist theory of science*. London: Taylor & Francis. (Original publicado 1975).

Bhaskar, R. (2008b). *Dialectic: The pulse of freedom*. London: Taylor & Francis. (Original publicado 1993).

Bhaskar, R. (2009). *Scientific realism and human emancipation*. London: Taylor & Francis. (Original publicado 1986).

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education-How can we deal with it? *ZDM*, *38*(1), 52–57.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories-An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. D. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483–506). New York: Springer.

Blunden, A. (2009). An interdisciplinary concept of activity. *Critical Practice Studies*, *11*(1), 1-26.

Brown, T. (1991). Hermeneutics and mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*,

22(5), 475–480.
Brown, T. (2010). Truth and the renewal of knowledge: The case of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 329–343.
Bussi Bartolini, M., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 746–783). London: Routledge.
Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 3–38). Charlotte, NC: IAP.
Collier, A. (1994). *Critical realism: An introduction to Roy Bhaskar's philosophy*. London: Verso.
Cottingham, J. (1983). Ethics and impartiality. *Philosophical Studies*, *43*(1), 83–99.
Cottingham, J. (1986). Partiality, favouritism and morality. *The Philosophical Quarterly*, *36*(144), 357–373.
D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics*, *5*(1), 44–48.
D'Ambrosio, U. (2007). Peace, social justice and ethnomathematics. In B. Sriraman (Ed.), *International perspectives on social justice in mathematics education* (pp. 37–51). Charlotte, NC: IAP.
D'Ambrosio, U., & D'Ambrosio, B. S. (2013). The role of ethnomathematics in curricular leadership in mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(1), 19–25.
Dowling, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths / pedagogic texts*. London: Routledge.
Dowling, P. (2001). Reading mathematics texts. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 180–196). Abingdon: RoutledgeFalmer.
Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.
Engeström, Y., & Sannino, A. (2012). Whatever happened to process theories of learning? *Learning, Culture and Social Interaction*, *1*(1), 45–56.
Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: SUNY Press.
Ernest, P. (2004). Postmodernity and social research in mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 65–84). Boston, MA: Kluwer.
Ernest, P. (2010a). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 39–47). New York: Springer.
Ernest, P. (2010b). The scope and limits of critical mathematics education. In H. Alrø, O. Ravn, & P. Valero (Eds.), Critical mathematics education: Past, present and future: Festschrift for Ole Skovsmose (pp. 65–88). Rotterdam: Sense Publishers.
Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37–68.
Jablonka, E., Wagner, D., & Walshaw, M. (2013). Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 41–67). Springer: New York
Jankvist, U. T. (2011). Theories of mathematics education, edited by Bharath Sriraman and Lyn English: Common ground for scholars and scholars in the making. *Mathematical Thinking*

and Learning, *13*(3), 247–257.
Lawson, T. (2001). Two responses to the failings of modern economics: The instrumentalist and the realist. *Review of Population and Social Policy*, *10*, 155–181.
Leikin, R., & Zazkis, R. (2012). On the connections between general education theories and theories in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(2), 223–233.
Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on mathematics teaching and learning (pp. 19–46). Westport, CT: GPG.
Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *ZDM*, *38*(1), 8–13.
Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, *37*(6), 457–467.
McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan.
Mearman, A. (2006). Critical realism in economics and open-systems ontology: A critique. *Review of Social Economy*, *64*(1), 47–75.
Nunez, I. (2009). Contradictions as sources of change: A literature review on activity theory and the utilisation of the activity system in mathematics education. *Educate~*, *9*(3), 7–20.
Nunez, I. (2012). Mind the gap! An exercise in concrete universality. *International Journal of Žižek Studies*, *6*(3), 1–18.
Nunez, I. (2013a). Transcending the dualisms of activity theory. *Journal of Critical Realism*, *12*(2), 141–165.
Nunez, I. (2013b). *Critical realist activity theory: An engagement with critical realism and cultural-historical activity theory*. London: Routledge.
Piaget, J. (1970). Piaget's theory. In P. H. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology* (Vol. 1, pp. 703–732). New York: Wiley.
Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM*, *40*(2), 317–327.
Radford, L., Bardino, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 24–530.
Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.
Sarra, C. (2011). *Strong and smart-Towards a pedagogy for emancipation: Education for first peoples*. London: Routledge.
Sayer, R. A. (2000). *Realism and Social Science*. London: Sage Publications.
Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, *46*(6), 641–649.
Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 435–487). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
Scott, D. (2002). *Realism and educational research: New perspectives and possibilities*. London: Routledge.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.
Shipway, B. (2011). *A critical realist perspective of education*. London: Taylor & Francis.
Silver, E. A., & Herbst, P. G. (2007). Theory in mathematics education scholarship. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39–65). Charlotte, NC: IAP.
Simon, M. A. (2009). Amidst multiple theories of learning in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(5), 477–490.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2002). Landscapes of investigation. In L. Haggarty (Ed.), *Teaching mathematics in secondary schools: A reader* (pp. 115–128). London: RoutledgeFalmer.

Solomon, Y. (2007). Experiencing mathematics classes: Ability grouping, gender and the selective development of participative identities. *International Journal of Educational Research*, *46*(1-2), 8–19.

Sriraman, B., & English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *ZDM*, *37*(6), 450–456.

Sriraman, B., & English, L. D. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. In *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 7–32). New York: Springer.

Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. In R. Zevenbergen & P. Valero (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 5–24). Boston, MA: Kluwer.

Vithal, R., & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: A critique of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 131–157.

von Glasersfeld, E. (1989). Constructivism in education. In T. Husen & N. Postlethwaite (Eds.), *International encyclopedia of education* (pp. 162–163). New York: Pergamon Press.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. (A. Kozulin, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Zevenbergen, R. (1996). Constructivism as a liberal bourgeois discourse. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 95–113.

Zevenbergen, R. (2001). Language, social class and underachievement in school mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 38–50). Abingdon: RoutledgeFalmer.

¿Qué cambios implementan los profesores de Matemáticas en su práctica docente a partir de sus reflexiones sobre las diferentes reformas y propuestas curriculares?

Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sparada@matematicas.uis.edu.co
María de Lourdes **Miranda** Quintero
CINVESTAV IPN
México
mmiranda2002@hotmail.com

Resumen

En esta contribución presentamos resultados de dos estudios relacionadas con los posibles cambios que implementan los profesor de matemáticas en su pensamiento didáctico (en términos de Parada (2011)) a partir de sus reflexiones sobre las diferentes reformas y propuestas curriculares, mismas que "conocen" por los diferentes programas de desarrollo curricular a los que tienen acceso. En este documento reportamos reflexiones emergentes de experiencias realizadas con profesores del nivel medio superior de México (a propósito de la reforma educativa en México) y de profesores de Educación Básica Secundaria de Colombia que intentan incorporar las tecnologías digitales en sus clases. En ambos estudios se analiza cómo están reflexionando los profesores sobre las diferentes propuestas curriculares (entre ellas las que sugieren el uso de la tecnología como apoyo para la enseñanza) y cómo implementan dichas reflexiones en sus prácticas profesionales.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, currículo.

I Aspectos curriculares que los profesores mexicanos tendrían que reflexionar

En una parte de esta investigación se intentaron identificar (de acuerdo a la reforma educativa) algunos de los conocimientos adquiridos por los profesores de matemática a través de sus procesos de profesionalización. Para ello consideramos las categorías propuestas por Shulman (1987, 2001), relacionadas con el Conocimiento Pedagógico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge – PCK) del cual consideramos: los conocimientos de la asignatura que imparte, del contenido, del currículo, y de los contextos educacionales. Más recientemente, Mishra y Koehler (2006) complementan el trabajo de Shulman, con el Conocimiento Pedagógico del Contenido Tecnológico (Technological Pedagogical Content Knowledge – TPCK); éste está constituido por tres tipos de conocimiento: el tecnológico, el pedagógico y el del contenido, estos autores plantean un modelo de integración tecnológica para la enseñanza y aprendizaje.

Para esta investigación se encuestaron a 180 profesores mexicanos, de ellos se seleccionaron 20 para ser entrevistados y observados en el aula. Estos profesores laboran en 3 instituciones educativas públicas diferentes. Entre los elementos de interés para las observaciones se identificaron los cambios realizados por los profesores a propósito de los cambios plasmados en los documentos educativos oficiales, esto es, si han modificado sus metodologías, estrategias, conocimientos, y formas de abordar la matemática en su didáctica cotidiana y al utilizar las herramientas tecnológicas en el aula.

Por otra parte, en este trabajo se realizó una investigación documental del proceso de reforma educativa. Durante la revisión de las reformas curriculares propuestas en México en el Plan Nacional de Desarrollo (1995-2000), nos dimos cuenta que éstas son consideradas de manera superficial en las diversas instituciones educativas. Aunado a esto, por ejemplo, en nuestro país, el Consejo Mexicano de Investigaciones sobre Educación (COMIE) ha realizado una recopilación, que refleja el estado del arte de la investigación educativa, llamada "La investigación educativa en México 1992 - 2002"; donde se detecta la escasa investigación en el país en temas como: la reforma curricular, metodologías de enseñanza-aprendizaje, tendencias educativas o uso de las herramientas digitales entre otras cosas.

Metodología de investigación

La muestra está conformada por 180 profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior en México. A estos profesores se les realizó una encuesta para observar de manera panorámica dos aspectos: primero observar de manera panorámica la forma cómo han percibido los cambios educativos en el mundo; segundo, permitir seleccionar profesores para observar su práctica. Esta selección se realizó en base a los siguientes criterios: i) si los profesores tienen conocimiento de que, como parte de los procesos de globalización, se han llevado a cabo cambios en todos los niveles educativos, sobre todo en relación a la integración de la tecnología; ii) si los profesores dicen haber modificado su práctica, como parte de las propuestas en la reforma educativa; y iii) si lo profesores utilizan algún tipo de tecnología digital (TD) como apoyo didáctico durante sus clases.

De esta forma se realizó la selección de 14 profesores que cubrieron los tres criterios mencionados. A estos 14 profesores se les realizó una entrevista que considera cinco secciones con dos o tres preguntas cada una. Con la entrevista queríamos profundizar en los conocimientos de estos profesores relacionados con: a) los cambios mundiales; b) el impacto de los cambios curriculares en la institución en que laboran; c) la metodología de enseñanza que usan, específicamente la constructivista –que es la mencionada en los programas de todas las escuelas–; d) cómo perciben su didáctica; y e) el tipo de TD que utilizan como apoyo didáctico. Posterior a la entrevista se realizó la observación de su clase la cual se video grabó. Como parte de este proceso se realizaría también la observación de la clase del profesor utilizando TD con sus estudiantes. Sin embargo, de los 14 profesores sólo 4 de ellos usaron algún tipo de TD con sus alumnos en el momento de la investigación. Por tal motivo, se tuvo que indagar de manera directa en las escuelas, para saber cuáles eran los profesores que utilizaban de manera regular las TD en sus clases y solicitarles su autorización para realizar las observaciones; de allí se obtuvieron otros 6 profesores, por lo que en total en este estudio se observaron en el aula a 20 profesores.

De los cuestionarios se realizó un análisis cuantitativo; de las entrevistas y las observaciones el análisis fue principalmente cualitativo, con un acercamiento al estudio de casos para cada uno de los 20 participantes en donde se observaron sus conocimientos a partir de las categorías de PCK y TPCK. Finalmente se realizó una triangulación metodológica para identificar de manera general algunas de las barreras que evitan que se integren adecuadamente las TD en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las instituciones educativas del nivel medio superior de nuestro país.

Algunos resultados

De los tres criterios considerados en la encuesta para la selección de los profesores, detectamos lo siguiente,

De los 180 profesores encuestados, el 91% señaló estar enterado de los cambios educativos a nivel mundial. Sin embargo, el 48% considera que el cambio ha sido más notorio en el área metodológica y sólo el 38% mencionó que los cambios tienen relación con el uso de las TD. Específicamente el 40.2% (62) sugiere que el cambio ha sido “mucho” respecto al uso de internet y las tecnologías de la comunicación, en contraste con el 20% (32) que menciona que el cambio ha sido “mucho” en cuanto al uso del software computacional de apoyo para las clases de matemáticas. Se observa con esto que el uso de las TD no ha impactando de manera contundente la didáctica del profesor.

En cuanto al segundo criterio, el 70% de los encuestados mencionó que conoce por lo menos “algunas” de las propuestas contenidas en la reforma educativa realizada en la década de los 90s. Adicionalmente el 79% sugirió que ha modificado su práctica entre medianamente (58%) y mucho (21%) a raíz de esta reforma. De esto se infiere que un número importante de profesores afirma haber modificado su práctica según las propuestas curriculares actuales.

En la tabla 1 se muestran los porcentajes para cada tipo de TD que utilizan los profesores. Cada profesor tenía la libertad de elegir más de un tipo de herramienta; por lo tanto los porcentajes se dan en porcentajes para cada caso.

Tabla 1

Profesores que utilizan las TD.

TIPO DE TD UTILIZADA POR LOS PROFESORES					
CALCULADORA	COMPUTADORA	INTERNET	APPLETS	VIDEO	CALCULADORA GRAFICADORA

154	130	112	22	59	32
87.9%	72.5%	65.1%	14%	34.2%	20.1%

De la tabla 1 se infiere que un alto porcentaje de profesores dice utilizar TD en su práctica y específicamente en el aula con sus estudiantes. Sin embargo, como ya se mencionó en el apartado de metodología, fue muy difícil observar a los profesores utilizar herramientas digitales con los estudiantes; entre sus explicaciones para justificar esta falta de uso, se expresan diversas razones tales como: la falta de tiempo durante la clase, la falta de recursos de la institución, el escaso uso durante el ciclo escolar, entre otros.

De los 180 profesores que respondieron la encuesta, el 91% señaló estar enterado de los cambios educativos a nivel mundial. El 48% considera que el cambio ha sido más notorio en el área metodológica, el 38% mencionó que los cambios tienen mayor relación con el uso de las tecnologías digitales y sólo el 10% considera el cambio curricular como el más sobresaliente.

Al respecto, se observó que los profesores valoran la necesidad de actualización permanente, expresando su disposición para participar en procesos de desarrollo profesional. Algunos de ellos reconocen que no han realizado cambios significativos en su práctica después de la reforma, y manifiestan que se les hace difícil implementar cambios en sus prácticas por factores como: la falta de recursos institucionales –Esto es, no hay suficientes proyectores, o computadoras, inclusive no hay tomacorrientes en los salones de algunas escuelas- También mencionan la escasa capacitación en la forma como el currículo recomienda la implementación de las sugerencias a) como ciertas orientaciones metodológicas (p. e., el constructivismo); b) en el uso y la pedagogía para apoyarse de la tecnología digital en el aula, entre otros. Algunas de estas categorías se han identificado en investigaciones como la de BECTA (2004) donde se mencionan a éstas como barreras para una integración de los diferentes conocimientos.

Es importante notar que el 46% de los profesores encuestados mencionó que los cambios educativos a nivel mundial han impactado entre "poco y nada" los procesos de enseñanza en nuestro país. Entre los resultados sobresalientes se distingue que el 70% de los profesores menciona que conoce algunos o todos los cambios curriculares que fueron parte de la reforma educativa en la mitad de la década de los 90s en México, sin embargo no se detecto evidencia de que los estén implementando en su práctica. Con relación al uso de la computadora como apoyo didáctico en las clases de matemáticas, el 73.8% de los profesores encuestados mencionó que sí las utilizan. Sin embargo, en las observaciones directas en el aula se detectó que en la mayoría de los casos es un proceso mecánico poco significativo para el aprendizaje de los contenidos estudiados.

2. Incorporación de las Tecnologías Digitales por profesores colombianos

A nivel internacional se viene sugiriendo el uso de las Tecnologías Digitales (TD) en las clases de matemáticas de primaria y secundaria. En los NCTM (2003) se enfatiza en que la actividad matemática mediada por las tecnologías debe centrarse en la resolución de problemas y no en las operaciones aritméticas, accediendo a los conceptos y no a los cálculos. Moreno (2002) menciona que las herramientas computacionales han generado un cambio denominado "nuevo realismo matemático" pues allí se pueden **manipular** los objetos matemáticos sobre la pantalla bajo el control del individuo, por eso se consideran objetos matemáticos manipulables. Dichos modelos permiten la exploración y flexibilidad de representación de objetos matemáticos que le permiten al educando comprender muchos elementos que difícilmente se perciben con los modelos tradicionales, allí se manipulan los objetos en la pantalla, a través de esta exploración, se comprueban conjeturas y se crean modelos. Así mismo, Jones & Pratt (2006), consideran que los medios computacionales pueden ser una buena herramienta para que los estudiantes construyan nuevos significados sobre los objetos matemáticos que manipulan directamente en la pantalla. Evidentemente hay una necesidad de que se generen espacios donde los maestros exploren las bondades y limitaciones que puede tener incorporar las TD en la clase de matemáticas, así mismo, para que se reflexione sobre cuándo y cómo implementarlas, según los objetivos de aprendizaje previstos. Parada (2011) menciona que la conformación de comunidades de práctica (CoP) de educadores matemáticos puede ser una posibilidad para fomentar el uso de las TD.

Es por ello que el grupo de investigación en Educación Matemática de la UIS (Edumat-UIS) está desarrollando una investigación cuyo objetivo es: *analizar cómo la constitución de comunidades de práctica de educadores matemáticos que incorporan las tecnologías digitales en sus prácticas profesionales favorece la construcción colaborativa de conocimiento, y cómo este conocimiento aporta en la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes durante la clase.*

Aspectos teóricos

Wenger (1998) explica que las Comunidades de Práctica (CoP) se conforman por un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundizan su conocimiento y habilidad en esta área a través de una estructura social basada en la construcción colaborativa de conocimientos y orientada a mantener la ventaja competitiva de sus miembros. Wenger (1998) declara que la negociación de significados es un proceso motivado por las reacciones de unos y de otros; no necesariamente se tienen que evaluar las razones por las que cada quien cree, sabe o piensa algo. Entonces definiremos la negociación de significados como el proceso mediante el cual se construyen interpretaciones de un saber propio permeado por los saberes de los demás. Además consideramos que el significado negociado es modificable y depende del contexto desde el que se dilucide.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) caracterizan la actividad matemática como un trabajo del pensamiento que construye conceptos para resolver problemas. Estos autores describen tres grandes tipos de actividades que podrían considerarse matemáticas: a) utilizar matemáticas conocidas: el primer gran tipo de actividad matemática consiste en resolver problemas a partir de las herramientas matemáticas que uno ya conoce y sabe cómo utilizar; b) aprender y enseñar matemáticas, frente a un problema que no se sabe cómo resolver; y c) crear matemáticas nuevas: en principio, se podría decir que sólo los matemáticos producen matemáticas nuevas, pero en realidad, en el nivel de los alumnos se puede afirmar que todo aquel que aprende matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador.

La matemática como actividad de resolución de problemas introduce en muchos casos una componente fundamental: la matematización. Matematizar, según Treffers (1987), es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificando los aspectos matemáticos relevantes, descubriendo regularidades, relaciones y estructuras.

El interés de un análisis de la actividad matemática del profesor es identificar las condiciones necesarias del pensamiento reflexivo (en términos de Parada (2011)) de éste, para que logre conducir la apropiación por parte de los estudiantes. Con esta preocupación, nos centramos en que existen algunos requisitos específicos del pensamiento matemático escolar del profesor para que logre desarrollar iniciativas en los procesos de reflexión antes, durante y después de la clase.

Incorporación de las tecnologías digitales (TD) en la Educación Matemática colombiana

En Colombia, el proceso de incorporación de las tecnologías digitales (TD) en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se inicia en la década de 90's por iniciativas de grupos de profesores. En 1998, desde el Ministerio de Educación Nacional, con el apoyo de la OEA, se lideró la primera experiencia de uso de las TD en las clases de matemática, dando lugar a la publicación del documento Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas (MEN, 1999). Producto de esta experiencia, en el periodo comprendido entre los años 2000 al 2004, el MEN apoyó y ejecutó el proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria[1] y Media de Colombia. Con este proyecto se logró conformar un grupo de docentes comprometidos con la diseminación de la cultura informática (500 docentes) en el país; implementar (en 120 colegios y 23 universidades) el uso de calculadoras gráficas basado en un modelo pedagógico.

En el departamento de Santander[2], el proceso empezó en el año 2000, en la fase inicial del proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia, bajo la coordinación de la Universidad Industrial de Santander (UIS), con la participación de cinco instituciones del departamento. Actualmente se viene trabajando con una Comunidad de Práctica (CoP) de profesores de Matemáticas de Educación Básica Secundaria quienes en colectivo están trabajando sobre el diseño de recursos en un Software de Geometría Dinámica (SGD), mismos que se sustentan en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1998). Esta comunidad está conformada por 9 profesores de colegios públicos, 4 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y 2 de Maestría en Educación Matemática y 4 investigadores con doctorado. En el apartado siguiente se presentan algunas evidencias de las maneras como los profesores reflexionan alrededor de la incorporación de las tecnologías digitales en el aula.

Reflexiones con profesores sobre las maneras como han incorporado las TD en sus clases

En esta comunidad los miembros participan en la implementación y análisis de las situaciones a-didácticas. Los profesores y estudiantes expertos en el uso del SGD y la TSD, ayudan a formar a los profesores novatos en el uso del SGD. Los expertos en didáctica de la matemática ayudan a toda la comunidad en la orientación teórica y metodológica. La metodología de trabajo colaborativo en la comunidad está organizado así: a) Los expertos en didáctica diseñan una situación a-didáctica; b) El profesor se apropia de la situación a-didáctica: comprende los objetivos de la misma, conoce todas las posibles acciones que puede realizar el alumno, las distintas retroacciones del medio a cada una de esas acciones, y los efectos esperados de esas retroacciones; de esta manera prepara su intervención durante la situación a-didáctica. c) Durante

[1] La educación en Colombia se conforma por los niveles de educación preescolar, educación básica (primaria con 5 grados y secundaria con 4 grados), educación media y de nivel superior.

[2] Colombia se divide administrativa y políticamente en 33 divisiones: 32 departamentos, los cuales son gobernados desde sus respectivas ciudades capitales, y Bogotá (distrito capital). Santander es un departamento ubicado al nororiente el país.

la implementación de la situación a-didáctica, el profesor observa la interacción de los alumnos con el medio, intentando identificar los comportamientos no previstos en el análisis a priori, clasificando el trabajo de los alumnos según las estrategias previstas en el análisis a priori, interviniendo cuando es necesario para relanzar el problema, para señalar las retroacciones del medio, para solicitar que el alumno valide sus procedimientos; d) La situación a-didáctica conduce a que los alumnos construyan determinados conocimientos que están en relación con el saber a enseñar; e) Después de la situación a-didáctica el profesor organiza una puesta en común, durante la cual a la vez promueve la participación de todos los estudiantes, y verifica que hayan construido los conocimientos que se esperaba durante la situación a-didáctica; g) Posteriormente, institucionaliza el saber, poniéndolo en relación con los conocimientos construidos durante la (o las) situación(es) a-didáctica(s); h)Finalmente, el profesor comenta en las sesiones de trabajo (las que se realizan cada viernes durante dos horas) de la CoP, en esta sesión todos los participan se realizan sus comentarios y aportes buscando refinar las actividades para futuras aplicaciones.

En la CoP debido a la manera como el moderador ha participado en la construcción y negociación de significados de los participantes, se ha podido observar un proceso de desarrollo profesional alrededor de aspectos como: la comprensión y apropiación de la TSD, el manejo de herramientas de un SGD y el refuerzo de conocimientos sobre objetos geométricos, específicamente, los relacionados con los contenidos vistos de sexto a octavo grado de la Educación Básica Secundaria de Colombia. Los maestros han mostrado avances significativos que los ha hecho sentir más seguros a la hora de abordar los contenidos en clase, los ha ayudado a motivar a sus estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría y además le ha permitido conseguir recursos para organizar salas de informática dotadas de computadores. Además, se ha podido evidenciar una relación dialéctica entre los profesores expertos y los novatos, pues han logrado consolidar equipos institucionales con los cuales se apoyan para la implementación de los diseños en las aulas y para el estudio de los análisis a priori y a posteriori que han construido bajo la coordinación del moderador. Aunque esta CoP ha avanzado en la negociación de sus significados geométricos, didácticos y sobre el uso de las TD en sus prácticas profesionales, a veces pierde el norte en cuanto a su trabajo comunitario y se constituye en un grupo que asiste a clases especializadas semanalmente. Hemos podido ver que para los profesores es necesario que el moderador les de un guión claro (como puede ser los análisis a priori de las actividades diseñadas) para implementar lo que han aprendido en sus clases.

Para concluir podemos decir que en esta CoP se han identificado una serie de situaciones, entre ellas: i) los profesores de la comunidad presentan cierta dependencia del moderador (experto) para producir nuevas actividades y para que acompañe las actividades realizadas en el aula. Lo anterior no se percibe como negativo o positivo, dado que esto ha posibilitado la participación permanente y un compromiso mutuo de los profesores; ii) los profesores novatos que también hace parte de esta comunidad, sienten muchos temores de implementar lo que sus colegas con mayor experiencia socializan en las sesiones colectivas, manifiestan que necesitan más tiempo para dominar el Software de Geometría Dinámica con el que se diseñaron las actividades; iii) algunos profesores manifiestan la dificultad para acceder de las salas de computo y que en ocasiones tienen que programar actividades extracurriculares, por último algunos han expresado que no cuentan con el apoyo de sus directivos y compañeros, lo que complejiza la situación.

Las anteriores apreciaciones muestran los diferentes obstáculos que aún se tienen para que las TD lleguen a usarse en clase de matemáticas, tal como se espera. Pero vale la pena mencionar que los participantes que conforman la CoP en Edumat-UIS tienen deseos de incursionar en este campo, y que a pesar de sus limitaciones o dificultades buscan la manera de "usar" las tecnologías.

3. Algunos resultados comunes en el contexto mexicano y colombiano

En el contexto mexicano, como colombiano, se encontraron muchas similitudes en cuanto a la forma como los profesores están implementando las reformas y propuestas curriculares, entre ellas:

- Los profesores resaltan la necesidad de contar con procesos de formación (o de actualización) permanentes y estructurados, dado que éstas se realizan en un tiempo muy corto y por profesionales sin formación pedagógica, o por colegas de la misma institución.
- Aunque para la comunidad de académicos en educación matemática se reconoce la importancia que ha adquirido el uso de las TD en el aula, y que debieran ser un componente importante para lograr una educación integral, ésta no es una realidad. Podemos observar que para algunos maestros de nuestra región, estas verdades aún no hacen parte de sus prácticas profesionales, de hecho, algunos maestros manifiestan temor de utilizarlas.

Referencias bibliográficas

Ávila, A. & Mancera, E. (Coords.) with Block, D., Carvajal, A., Eudave, D., Aguayo, L., & Camarena, P. (2003). El campo de la Educación Matemática 1993–2001, pp 35-353 en Mario Rueda (coord.), Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos, Vol. 7, México, COMIE, 2003, 560 p.

BECTA (2004). A review of the research literature on barriers to the uptake of ICT by teachers. Coventry: British Educational Communications and Technology Agency.

Brousseau G. (1998): Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori

Jones, I & Pratt. D (2006) Connecting the equals sign Centre for New Technologies Research in Education. *The University of Warwick, Coventry International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11:301-325. Springer Science

Ministerio de Educación Nacional (1999). Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Colombia: M.E.N.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge. A Framework for Teacher Knowledge. *Teacher College Record 108 (*6): 1017-1054.

Moreno, L (2002) *Instrumentos matemáticos computacionales*. Recuperado de: http://www.eduteka.org/Tema3.php

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales

Parada, S. (2011). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Plan de Desarrollo Educativo en México, 1995-2000. Educación Media Superior y Superior. ANUIES http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/publicaciones/revsup/res097/txt7.htm#1. Consultado en octubre 2009

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching. Foundations and the New Reform. *Harvard Educational Review*. 57 (1).

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Cambridge: Cambridge University Press.

Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas[1]

Diego **Garzón** Castro
Universidad del Valle
Colombia
diego.garzon.castro@correounivale.edu.co

Octavio **Pabón** Ramírez
Universidad del Valle
Colombia
octpabon@gmail.com

Myriam **Vega** Restrepo
Universidad del Valle
Colombia
myvega43@gmail.com

Resumen

Se presenta una perspectiva alternativa para el estudio de los *recursos pedagógicos*, resultado principal de la investigación "Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica" que se propuso aportar a la renovación de recursos y actividades de los profesores de matemáticas. Bajo el lineamiento epistemológico de la *consiliance*, se articularon metodologías y enfoques de la didáctica de las matemáticas y el análisis discursivo. Los resultados muestran que las interrelaciones profesor -recursos pedagógicos hacen explícitos de manera potente y propicia para orientar procesos de formación inicial y continua de los profesores, los procesos de orquestación, toma de

[1] La presente comunicación se deriva del informe final del proyecto de investigación "Caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica", realizado por Jorge Arce Chaves, Gloria Castrillón Castro, Diego Garzón Castro, Octavio Pabón Ramírez y Myriam Vega Restrepo, miembros del Grupo de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali-Colombia. Proyecto cofinanciado por el Programa Nacional de Estudios Científicos en Educación COLCIENCIAS y la Universidad del Valle con contrato 364-2009 y código 1106-489-25213.

decisiones, prácticas discursivas, situaciones didácticas. Se aportan nuevos argumentos para controvertir la idea, aún común, de que los recursos o materiales didácticos arrastran o llevan de sí unos usos cuyos resultados o fines coinciden con los previstos por su diseñador.

Palabras clave: Recurso pedagógico, enfoque instrumental, gestión didáctica del profesor, trayectorias investigativas, enseñanza de las matemáticas.

Introducción

Procurar analizar, comprender e interpretar la práctica de enseñanza de los profesores de matemáticas ha sido uno de los ejes articuladores de las actividades investigativas del Grupo de Educación Matemática (GEM) de la Universidad del Valle. Más de 40 años comprometidos con la formación de educadores matemáticos conducen, de manera casi natural, a los esfuerzos necesarios para retroalimentar las propuestas formativas con lo que los propios egresados pueden indicar al respecto una vez salen a enfrentar el complejísimo mundo de la práctica docente y de las actividades educativas en las instituciones de educación básica y media.

En ese sentido, entre el 2010 y el 2012, cinco profesores del GEM nos engarzamos en una investigación que articuló los intereses derivados de tres líneas de investigación. Por distintas vías, los integrantes del equipo de investigación habíamos identificado como interesante objeto de estudio aquello en lo cual el profesor se apoya y de lo cual se sirve para el diseño y realización de cada una de sus clases; así mismo, coincidimos en el interés por indagar los modos como circulan entre los profesores en ejercicio esos materiales de apoyo e inspiración. Puestos en la tarea de documentarnos para la elaboración del proyecto que le diera vía de solución a nuestras inquietudes, felizmente encontramos que investigadores comprometidos con una perspectiva instrumental para pensar el campo de la educación matemática, desde pocos años antes estaban en nuestra misma tónica; se acuñó la expresión “recurso pedagógico” para abarcar en un mismo campo de reflexión todo a lo que el profesor apela para la puesta en marcha de sus clases. Alinderamos nuestro proyecto a esta trayectoria investigativa, generando en ella una nueva perspectiva.

Los aportes de estos trabajos son múltiples: ayuda a la comprensión de la actividad de enseñanza en los tiempos reales de las instituciones educativas; da elementos para identificar la gestión pedagógica en términos de las selecciones y de las decisiones que toma el profesor antes y durante la clase; despliega los distintos niveles (institucionales, curriculares, pedagógicos, didácticos y discursivos) en que se articula la acción educativa del profesor; metodológicamente, sustenta la posibilidad de tomar la *clase* como unidad de análisis; permite identificar los ámbitos matemáticos, didácticos, curriculares, sociales e institucionales en los que se desenvuelven las clases de matemáticas; destaca el papel fundamental de la formación personal, en tanto sujeto del discurso, en la formación profesional del profesor de matemáticas.

Perspectivas en la conformación de la noción de recurso pedagógico

La expresión *recurso* vinculada tradicionalmente a la consecución de unos fines determinados y a un uso más o menos técnico en diversos ámbitos de las prácticas sociales ha devenido en una categoría compleja y polisémica: *recurso pedagógico*, que ocupa un lugar central en algunos modelos teóricos que estudian la integración de las TIC y en general de *artefactos* de diversa naturaleza en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El redimensionamiento de la noción de *recurso* ha permitido superar la habitual consideración que los asocia a algún tipo de materialidad o como *procedimiento* en otros campos disciplinarios, tal como aparece en las propuestas e innovaciones curriculares. Vincular la noción de *recurso* con su materialidad supone que cada uno de éstos arrastra o lleva de sí un uso cuyos resultados o fines coinciden con los previstos por su diseñador, lo cual no necesariamente se cumple. Superar tal visión ha requerido consolidar desarrollos investigativos que desplieguen y aborden las complejidades de las *mediaciones* de cualquier tipo de *artefacto* (sea el lápiz y el papel, la regla y el compás o las TIC) en la enseñanza de las matemáticas, en particular, los distintos sentidos que puede tomar la presencia de esos *artefactos* en el aula gracias a la *gestión didáctica* en que el profesor se compromete. Se pueden identificar tres perspectivas importantes del desarrollo de la noción de *recurso pedagógico*, con interesantes posibilidades para la investigación didáctica y la formación docente en matemáticas.

En la ***primera perspectiva***, Guin y Trouche (2007) describen los *recursos pedagógicos* bajo tres componentes: un conjunto de *documentos, la situación matemática, el aprovechamiento didáctico*. En el devenir de sus investigaciones, han destacado particularmente los procesos de documentación de los profesores. Para el estudio de los recursos en tanto *documentos* consideran, de una parte, los *escenarios de uso* que caracterizan la organización de una *secuencia de situaciones* con una estructura en la que, además de la situación, se considera la *mediación* de un *artefacto* en la actividad de los profesores y los estudiantes; de otra, que el *recurso pedagógico* es un *artefacto* que está a disposición del profesor, susceptible de evolución. Asumen los *recursos pedagógicos* como *artefactos* siguiendo a Rabardel (1995), para quien los *instrumentos* no existen *a priori* sino que son construidos por el usuario cuando se los apropia y los integra a su actividad. En la conceptualización de Guin y Trouche es central y consustancial con su concepción de los recursos la *comunidad de práctica*, además del *trabajo colaborativo* de los profesores.

Haspekian y Artigue (2007) en lo que constituye la ***segunda perspectiva,*** formulan la conceptualización de los *recursos pedagógicos* a partir del estudio de la integración en la enseñanza de las matemáticas de *artefactos informáticos* diseñados no para tal fin sino para apoyar o ayudar en otras actividades profesionales, como es el caso de las hojas de cálculo. En este sentido, se proponen el análisis de los recursos profesionales importados por los profesores para su acción educativa con nuevas maneras de entender y dimensionar la *génesis instrumental* en relación con la formación docente, apoyándose en la *Teoría Antropológica de lo Didáctico*. (Chevallard, 1998).

La ***tercera perspectiva*** es la que impulsan Hegedus y Moreno-Armella (2010), quienes amplían la manera de entender el *artefacto* en la *génesis instrumental*, en particular en los procesos de *instrumentación* e *instrumentalización* asociados a diferentes niveles de la *orquestación instrumental* (Rabardel, 1995) y a la clasificación de los artefactos que presenta Wartofsky (citado por Trouche, 2005). Wartofsky distingue los *artefactos* en: ***primarios***, que corresponden al dispositivo que es usado (robot, interface, simulador, etc.); ***secundarios***, que se configuran con base en las representaciones que el usuario se hace de los artefactos primarios tanto como en los modos de acción para su uso; ***terciarios***, constituidos por los expertos quienes los usan tanto para situaciones simuladas como para aquellas en que son dominantes métodos reflexivos y de autoanálisis de la propia actividad o de la actividad colectiva.

Marco teórico inicial para una nueva perspectiva

El resultado principal de la investigación fue la formulación de una ***cuarta perspectiva*** para comprender los recursos pedagógicos de manera que permite su enriquecimiento conceptual y un mejor aprovechamiento en los programas de formación inicial y permanente de los profesores de matemáticas. La particularidad o novedad tiene tres fuentes: de un lado, se amplía el campo de reflexión pedagógica al incluir en la noción de recurso pedagógico mediadores tradicionales además de los informáticos; de otro, se incluyen y/o articulan los aspectos discursivos y comunicativos con los cuales tales recursos llegan al aula y, finalmente, la selección de la geometría elemental. Las teorías de referencia para la investigación se tomaron con base en el interés de caracterizar los *recursos pedagógicos* en el contexto de la *gestión didáctica* del profesor en el aula de clase de geometría. La investigación articuló distintos constructos teóricos procedentes de la didáctica de las matemáticas: la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y los desarrollos teóricos posteriores, en particular la *ergonomía cognitiva* (Rabardel, 1995, 1999, 2002), el *modelo de la actividad del profesor* (Margolinas, 1993, Comiti, Grenier, Margolinas, 1995, Margolinas, 2005, Comiti et. al., 2005; Margolinas & Wosniak, 2010), la reformulación didáctica del rol del conocimiento en la selección y toma de decisiones por parte del profesor (Bloch, 2006), el análisis de la toma de decisiones del profesor en relación con las situaciones (Lima, 2006), el estudio sobre las decisiones didácticas del profesor en relación con su documentación (Trgalova, 2010) y, finalmente, algunos aspectos de la perspectiva instrumental sobre los recursos pedagógicos (Artigue, 2007; Guin & Trouche, 2007; Gueudet & Trouche, 2010, inspirados en Adler, 2000, pioneros en el estudio de los *recursos pedagógicos*).

En esta comunicación nos centramos en algunos aspectos del marco teórico vinculados con la actividad del profesor, objeto de diversas investigaciones (Margolinas (2002), Hersant & Perrin Glorian (2005)) que muestran la importancia de comprender y continuar estudiando dichas prácticas en el contexto de clase. En particular, en alguno elementos de la acción educativa y didáctica del profesor que conforman su *gestión didáctica.* De acuerdo con Llinares (2000, p. 16), un importante foco para el análisis de la acción educativa lo constituyen las características del uso de determinados instrumentos por parte del profesor (entre otras, los distintos modos de representación y tipos de problemas matemáticos) en las prácticas matemáticas en el aula. Entendiendo la práctica del profesor como el conjunto de actividades para la realización de las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas[2], con la comunidad de práctica y las prácticas matemáticas como contexto de referencia, Llinares (2000) considera que tal práctica ocurre en tres fases: *la fase preactiva*, en la cual el profesor está situación de proyecto (selección de una temática, una situación, etc.); *la fase interactiva*, con el profesor en acto y en interacción con los estudiantes, y la *fase postactiva*, que ocurre cuando el profesor reflexiona sobre lo ocurrido en las dos anteriores. Ordinariamente se asocia la gestión didáctica con la fase interactiva, pero en nuestra perspectiva, con una visión más amplia de la gestión, incluimos las tres fases. Así, la *gestión didáctica* la entendemos como macroproceso que articula los procesos de *orquestación*, la enseñanza en acto, las decisiones didácticas del profesor en su práctica de enseñanza y las prácticas discursivas del profesor en el contexto de clase. El profesor es el responsable de la *gestión didáctica* en la clase, en lo que concierne a las decisiones didácticas sobre las situaciones de enseñanza.

[2] Entendido como todo lo que el profesor hace: diseñar tareas y organizar el contenido, interactuar con los alumnos, etc. y también lo que piensa sobre los instrumentos: comprensión y propósito de uso (Llinares, 2000).

La *orquestación* que en sus orígenes se llamó "instrumental" porque se refería más a la puesta en escena de los artefactos tecnológicos y su utilización apropiada como instrumentos, en esta propuesta se entiende en un sentido lo suficientemente amplio como para que permita aunar la integración de tecnologías y de cualquier otro artefacto en las prácticas del aula, así como la coordinación de las diferentes voces que se producen en las preguntas y respuestas de los estudiantes, durante las discusiones en clase o las puestas en común (English, L. D (edit.), 2008 Handbook of International Research in Mathematics Education, Second Edition).

Ahora, en principio, lo que ingresa a clase ha sido seleccionado y decidido por el profesor. Pero, en un primer nivel de análisis, es conveniente diferenciar entre *selección* y *decisión*. Para ello se parte de reconocer que un sujeto puede tomar decisiones únicamente si le es posible identificar las selecciones disponibles. Si inmediatamente antes de la decisión solo se le ocurre una selección única, no puede tomar decisiones sino seguir la única vía disponible, que suele ser seguir "flotando con la corriente" sin hacer ni decir nada por el momento. El *medio didáctico* en sus distintos niveles posibilita o restringe el abanico de selecciones disponibles para el profesor en cada momento. Igualmente se reconoce que las decisiones del profesor dependen de restricciones como por ejemplo, las que provienen de la *noosfera educativa* y la cultura de las instituciones escolares (programas, calendarios, horarios, exámenes y pruebas externas, etc.) o las regulaciones del establecimiento en el que trabaja (asignaciones de tiempo y frecuencia para la asignatura de matemáticas en cada grado).

La reestructuración del *modelo de la actividad del profesor* a partir de los referentes teóricos anteriormente señalados y desde la perspectiva de las decisiones que se toman "sobre la marcha" y desde los distintos niveles del *medio didáctico*, lleva a considerar preferentemente los dominios formulados por Bloch (2006), a saber, el dominio de las competencias matemáticas (el cual incluye la formación universitaria de profesores y otro tipo de formación previa o continua), el de la didáctica práctica o de la práctica didáctica, y el pedagógico o profesional. En la fundamentación teórica ocupa un lugar central La *perspectiva instrumental* que se refiere de manera preferente al proceso de génesis instrumental, el proceso de *orquestación instrumental* y sus vínculos con las decisiones del profesor. En relación con la *perspectiva instrumental* se toman en consideración algunos de sus constructos teóricos de base, entre los cuales se destacan los de *artefacto, instrumento, génesis instrumental y sistema de instrumentos y esquemas de utilización* (Rabardel, 1995, Verillon y Rabardel, 1995, Rabardel, 2002).

Reformulación del Marco Teórico: Modelo de Análisis

Con el propósito de caracterizar los vínculos entre los *recursos pedagógicos* y el conocimiento matemático en la educación básica, se reformuló el marco teórico propuesto inicialmente con la propuesta de un modelo de análisis "local" a partir del esquema de un *tetraedro* como una estructura artificial que permitió modelar las interrelaciones en el marco de un proyecto didáctico, consubstancial a una organización intencional de la enseñanza que permitió articular distintos enfoques teóricos. Uno de los referentes remite al esquema del *sistema didáctico* (Profesor – saber – Alumno) en el marco de las teorías de la didáctica y en particular de las *situaciones didácticas* que han surgido en las últimas décadas como elementos centrales en los debates internacionales en el campo de la educación matemática. Del *sistema didáctico* se retoma su configuración triangular con los vértices profesor, saber y alumno, para dar lugar a su transformación en la cara base de un *tetraedro* (Figura1) en la que si bien se conservan los dos vértices Profesor (P) y Saber (S), se redimensiona el vértice alumno (A) para ser entendido como actor en el contexto de clase (CC). De otra parte, se ha acotado el alcance teórico del *saber a enseñar*, al considerar únicamente la geometría que se enseña en la educación básica, acervo de conocimientos que llamaremos *saber geométrico* de referencia (SG). El vértice que corresponde al *profesor* se plantea ligado a sus *prácticas* (PP).

Para la constitución del *tetraedro* ingresa como elemento nuevo la noción de *recurso pedagógico* (RP). Durante el desarrollo del proyecto se expresaron las siguientes transformaciones que permitieron establecer los vértices, aristas y caras del tetraedro:

- Saber Matemático (S) → Conocimiento Geométrico → Saber Geométrico de referencia (SG), por la importancia de dar claridad al saber específico objeto de enseñanza.
- Profesor (P) → Profesor en sus Prácticas de clase (PP)

Alumno (A) → Contexto de Clase (CC), en tanto se tendrá en cuenta el contexto de clase en su globalidad, que incluye a los alumnos como actores pero no los procesos específicos de aprendizaje de cada uno de ellos.

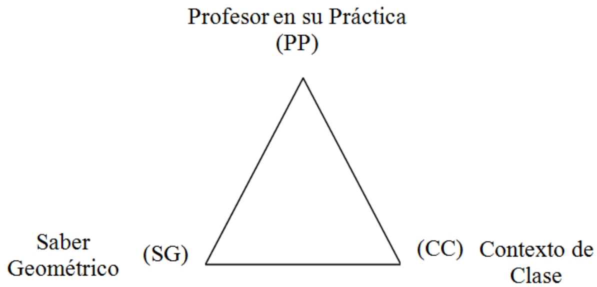


Figura 1. Base de tetraedro

De otra parte, aunque no se explicita en el *tetraedro*, en la cara SG-CC-PP (Figura 2) se sigue considerando el *sistema didáctico* (comparar con la Figura 1) en el cual se incluye el *contrato didáctico* por su importancia como regulador de las interacciones en la clase. Igualmente, se considera el proceso de decisiones del profesor, que va a quedar en la base del tetraedro. Además, se considera que el concepto de "milieu" propuesto por Brousseau, no tiene los alcances conceptuales para abordar el problema propuesto al incorporar la complejidad y nuevos desarrollos de la noción de *recurso pedagógico*; por ello en el modelo de tetraedro se redimensiona teniendo en cuenta la conceptualización de *medio didáctico* para abordarlo en el marco del Contexto de Clase (CC), así: "Milieu" → Medio a-didáctico → Contexto de Clase (CC). Cabe señalar que en el modelo de *tetraedro* que se propone (Figura 2), se considera al alumno no como caso particular e individualizado, sino como actor en sus interacciones con el profesor, con el saber y con los recursos pedagógicos en el contexto de clase.

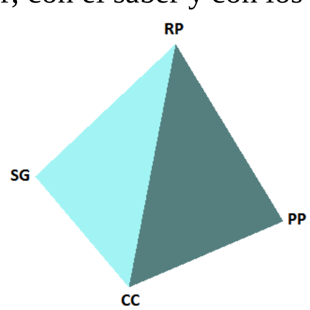


Figura 2. Modelo de tetraedro

Lo anterior constituye el punto de partida para la reformulación del marco teórico, teniendo en cuenta las relaciones entre los elementos del *tetraedro* ya sean vértices, aristas o caras del mismo. Esta consideración permitió establecer la conceptualización necesaria para estructurar el modelo de análisis que se puso en juego en esta investigación. Como puede observarse, en el modelo de *tetraedro* que se propuso para esta investigación, se han referenciado cuatro vértices como elementos fundamentales del esquema, seis aristas que constituyen las interrelaciones de dichos elementos y cuatro caras que interrelacionan caras y aristas y que representan cuatro procesos de acuerdo con el marco teórico. En esta comunicación restringimos la presentación y discusión a los procesos ternarios, o caras del tetraedro.

Las caras

Las caras, que representan las relaciones ternarias, se refieren a cuatro procesos: *orquestación, decisiones, prácticas discursivas y enseñanza en acto*, los cuales resultan de la dinámica de las diferentes interrelaciones de las que dan cuenta las aristas. En la Figura 3 se presenta un modelo ligeramente abierto en la que se resalta el vértice recursos pedagógicos, que constituye la categoría de análisis central y se identifican las cuatro caras que representan los procesos mencionados.

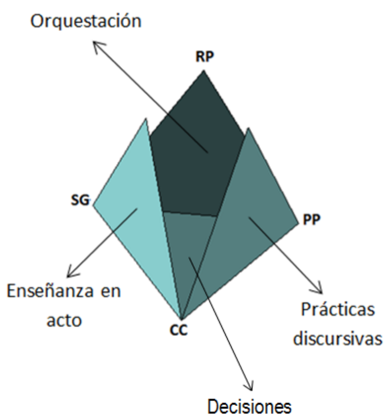


Figura 3. Procesos

Para propósitos analíticos, se consideró una proyección central vertical del esquema del tetraedro, desde el vértice sobre el plano de la base, que permite que, al acabar de abrirlo desde el vértice de los *recursos pedagógicos*, se puedan identificar cuatro superficies triangulares donde se visualizan los procesos (Figura 4). Así, se identifican cuatro procesos relacionados con los constructos teóricos que se configuran en la interacción entre las tríadas de conceptos, los cuales se presentan a continuación:

1. La cara *Saber geométrico – Profesor en su práctica de enseñanza – Contexto de aula de clase* (SG-PP-CC), base del tetraedro, representa el sistema didáctico y, en particular, el proceso ***decisiones didácticas*** del profesor en su práctica**.**
2. La cara *Recurso pedagógico – Saber geométrico – Profesor en su práctica* (RP-SG-PP), representa el proceso ***orquestación.***
3. La cara *Recurso pedagógico – Contexto de clase – Profesor en su práctica* (RP-CC-PP), representa el proceso ***prácticas discursivas.***
4. La cara *Recurso pedagógico – Saber geométrico – Contexto de clase* (RP-SG-CC), representa el proceso ***enseñanza en acto,*** considerada como proceso "en vivo" en la fase interactiva de la gestión didáctica y no como diseño previo.

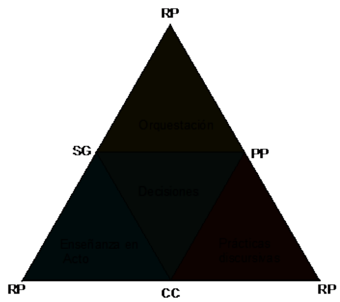


Figura 4: Proyección central del tetraedro

Proceso (de toma) de Decisiones. Las interacciones SG-PP-CC entre saber geométrico - profesor en su práctica - contexto de clase, representan el proceso de toma de decisiones didácticas del profesor. No se considera en su integralidad el sistema didáctico, sino las interacciones profesor – alumno en el contexto de clase, en particular de la clase de geometría.

En este contexto se manifiestan las decisiones y, en particular, las microdecisiones que toma el profesor en el transcurso de la clase en relación con los otros procesos constitutivos del modelo: *orquestación, enseñanza en acto* y *prácticas discursivas.*

Se configura así, como referente central representado por el triángulo de base SG-PP-CC, el proceso continuado de *las decisiones didácticas del profesor,* principalmente en la *fase interactiva* y parcialmente en la *fase preactiva*. La toma sucesiva de decisiones se vislumbra como un proceso cuyas manifestaciones esenciales tienen como referente central la enseñanza en el contexto de la clase. En la *fase preactiva* el profesor selecciona el carácter general de la propuesta mediante la cual interviene, y selecciona las temáticas e intencionalidades de las situaciones de enseñanza. En la *fase interactiva* el profesor pone en escena la situación de enseñanza, en la cual se plasma un contenido particular del saber geométrico de referencia.

Así mismo se reconoce que las decisiones didácticas se hacen manifiestas en la práctica del profesor, en relación con los distintos niveles del modelo de la actividad del profesor.

La perspectiva de toma de decisiones se concibe como un proceso imbricado en el macroproceso de la *gestión didáctica* del profesor. En este caso, interesan las microdecisiones, es decir las decisiones inmediatas tomadas por el profesor en el contexto de clase.

Proceso de Orquestación. En la concreción del marco teórico en el campo de interacciones RP-SG-PP entre ***recurso pedagógico, saber geométrico*** y ***el profesor en su práctica de enseñanza*** se visualiza *la orquestación* como proceso vinculado a la *gestión didáctica* del profesor, durante la puesta en escena del proyecto de lección, en la cual se hace intervenir diferentes tipos de *instrumentos,* no solamente los de naturaleza informática y computacional, así como el documento en el que en la *fase preactiva* había plasmado su organización, equivalente a la partitura del director de la orquesta.

Esta manera de visualizar tal proceso es más cercana a la aproximación de Guin y Trouche (2007), según la cual, la noción de *orquestación instrumental* ha de utilizarse para designar aquello que es relevante para la *gestión didáctica del profesor* en el curso de la actividad, con los *artefactos* presentes en el aula de clase, no solamente los computacionales o el software, sino todos aquellos que ya hayan pasado por procesos de génesis instrumental para convertirse en instrumentos coordinados por el profesor.

El sistema de aprovechamiento didáctico, la geometría elemental, las situaciones problema que propone el profesor, la red de contenidos que estructuran las temáticas abordadas por el profesor. En general, se caracterizó el tipo de actividad geométrica que para el desarrollo de pensamiento espacial y los sistemas geométricos moviliza el profesor en el aula, así como se da cuenta de los conocimientos geométricos que pone en acto durante la fase activa de la enseñanza y la mediación de los "instrumentos" en la construcción de saber geométrico.

Estas consideraciones llevan a enfatizar en una aproximación a la *orquestación* desde la perspectiva del profesor en el contexto de clase en la *fase interactiva*, la cual se concibe como un proceso en el que intervienen las intencionalidades del profesor, las situaciones de enseñanza adaptadas para la clase, el sistema de recursos integrado con los artefactos ya convertidos en instrumentos, las estrategias organizativas encaminadas a auspiciar distintos niveles de participación y la variedad de selecciones que permitan decisiones flexibles y oportunas para la organización del escenario de la clase.

Proceso de Prácticas Discursivas. En el esquema del tetraedro, las interacciones RP-CC-PP entre ***recurso pedagógico – contexto de clase – profesor en su práctica de enseñanza*** configuran uno de los procesos centrales en el modelo de análisis propuesto: las *prácticas discursivas***.**

Esta conceptualización de *recurso pedagógico* permite abordar las *prácticas discursivas* del profesor en el contexto de la enseñanza de las matemáticas encaminada a la construcción de *saber geométrico* por parte de sus alumnos.

Para ubicar las prácticas discursivas se retoma la conceptualización de *recurso pedagógico* de Gueudet & Trouche (2010) con una acotación que ha permitido asumir y entender las *prácticas discursivas* en el contexto de la clase no como un recurso más al cual podría apelar el profesor, como con su espíritu provocador lo hace Adler (2000) al proponer pensarlos como fuente: nacer de nuevo o de manera diferente (p. 8). Si bien se reconoce que uno de los propósitos de la formación inicial y permanente de los docentes es la cualificación y enriquecimiento de sus modos de expresión, el fortalecimiento y ampliación de su constitución como ser del lenguaje, su conformación como interlocutor activo con el saber y con sus estudiantes y, por esta vía, garantizar su función de mediación en la construcción de conocimiento por parte de sus estudiantes, no lo pensamos como formación de la cual un docente pueda prescindir según el momento o el grupo de estudiantes. Esto es, la calidad de ser discursivo y lingüístico, resulta ser consustancial con el ser educador. Las intencionalidades de enseñanza, los modos de asumir los estudiantes y los sentidos específicos que toman los objetos de enseñanza, se hacen manifiestos y adquieren realidad mediante las enunciaciones del profesor y las que promueva en el salón de clase.

Proceso de Enseñanza en Acto. En el esquema las relaciones RP-SG-CC, Recurso pedagógico – Saber geométrico – Contexto de clase, configuran el proceso de la *enseñanza en acto* como proceso "en vivo" en la fase interactiva de la gestión didáctica y no como diseño previo.

El proceso *Enseñanza en Acto* determinado por los vértices recurso pedagógico – saber geométrico – contexto de clase, no incluye en esta cara al profesor en su práctica, quien, por supuesto, se considera relevante como autor del proyecto de lección, como orquestador de los recursos y enunciador de las prácticas discursivas. La ejecución del proyecto de lección en el contexto vivo en el aula es lo que llamamos la *enseñanza en acto*.

Resultados y conclusiones

El resultado principal de esta investigación es la reformulación del marco teórico y la configuración de un modelo de análisis respecto a los sentidos y usos que toman los recursos pedagógicos en la actividad de enseñanza del profesor y su papel en la enseñanza en acto, a partir de la articulación de distintos enfoques teóricos provenientes de la didáctica de las matemáticas, el análisis de redes sociales y el análisis de las prácticas discursivas. La configuración del modelo de análisis se fundamenta en elementos conceptuales de base que incluye una aproximación conceptual a la noción de recurso pedagógico, igualmente una aproximación a las enunciaciones lingüísticas que se fundamenta en la filosofía analítica y la pragmática del lenguaje, e igualmente a la gestión didáctica del profesor desde en la se retoma el sentido que propone Llinares (2000, p. 16), en el cual se le otorga sentido al uso de instrumentos en las practicas matemáticas del profesor en el aula. Con el propósito de caracterizar los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la educación básica, ha sido fundamental cuestionarse sobre cómo ingresa el marco teórico referenciado en la configuración de un modelo que permita capturar su sentido en relación con el problema de investigación. Por ello fue necesario reformular el marco teórico propuesto inicialmente con la propuesta de un modelo de análisis "local" a partir del esquema de un tetraedro como una estructura artificial que permitió modelar las interrelaciones en el marco de un proyecto didáctico, consubstancial a una organización intencional de la enseñanza que permitió articular distintos enfoques teóricos. En general, se plantea de esta manera, la posibilidad de entender a los *recursos pedagógicos* en términos del uso en el contexto de la enseñanza de las matemáticas de todo aquello que llega al aula luego de una búsqueda intencional orientada por un interés e interpretaciones específicos del profesor y que, en el contexto de su *gestión didáctica* en clase, toma un sentido particular con base en la *práctica discursiva* con la cual él hace presencia en el tiempo y en el espacio del aula.

La *gestión didáctica del profesor* se hace manifiesta a través de los tipos y modos de referenciación, de la modalidad discursiva para la objetivación de los objetos matemáticos y la dirección de la movilización que de estos hace, de la modalidad discursiva para establecer vínculos entre *artefactos* y *objetos matemáticos* que se estudian, de la expresividad que tomen las voces de la documentación y de la expresividad narrativa para articular los distintos momentos y recursos de la clase. En consonancia con las perspectivas mencionadas, se entiende a los recursos pedagógicos como los "re-cursos" (con las múltiples connotaciones de *volver a cursar*, *re-correr, re-currir* y *re-nacer*) que toman las propuestas pedagógicas gracias a las interpretaciones, adaptaciones y ajustes que cada maestro hace para su implementación en clase. Así, en una primera aproximación, aún tentativa o provisional, entendemos como *recurso pedagógico* a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de los materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los *actos discursivos* en los cuales aquellos toman un sentido y significación particulares.

Los resultados de la investigación muestran la relevancia del estudio y dilucidación de las interrelaciones entre el profesor y los recursos pedagógicos tanto en los procesos de formación inicial y continuada de los profesores como en la práctica diaria de sus clases de matemáticas, cuando se hacen explícitos los procesos de orquestación, de toma de decisiones, prácticas discursivas, situaciones didácticas. Así mismo, la investigación aporta nuevos argumentos para controvertir la idea, aún común en muchos maestros y administradores de la educación, de que los recursos o materiales didácticos arrastran o llevan de sí unos usos cuyos resultados o fines coinciden con los previstos por su diseñador. Con respecto al saber geométrico de referencia, en la perspectiva empírica de los profesores sobre en todo en el caso de los profesores del primer conjunto de grados es dominante la geometría euclidiana. Una preocupación común se refleja en la selección que hacen los profesores en la selección de nociones básicas de la geometría como punto, recta, ángulo y figuras geométricas como el triángulo para estructurar sus proyectos de lección. A nivel de hipótesis es posible, en relación con la selección de las temáticas, establecer que subyace a las mismas una concepción remedial de la enseñanza de la geometría no obstante la existencia de unos lineamientos de política y la regulación de las instituciones educativas por intermedio del proyecto Educativo Institucional y el Plan de Área. Así mismo fue posible reconocer la importancia que se le otorgó a la interrelación profesor –saber para posibilitar los vínculos entre diferentes elementos del modelo como: recursos pedagógicos y contexto de clase y en general para incidir en la enseñanza de las matemáticas.

En relación con la *orquestación* es posible identificar como los "instrumentos" utilizados por los profesores son la regla con graduación, el compás, el transportador y el papel. Igualmente como procedimientos asociados a tal tipo de "instrumentos" son dominantes en los casos estudiados: el trazado de figuras, el doblado de papel, el recorte de figuras en papel o cartón, los cortes y el doblado de papel, la superposición de figuras. Además, "instrumentos" y procedimientos son articulados a situaciones de enseñanza que en los momentos interactivos de la práctica del profesor de matemáticas se caracterizaron por acciones como direccionar la actividad de los estudiantes a partir de la formulación de preguntas en relación con una noción o un procedimiento puesto en juego y la regulación de la intervención de los estudiantes. En lo que respecta a la *gestión didáctica* del profesor de matemáticas en el contexto de la clase se caracterizó por su complejidad, ya que parte de reconocer su intencionalidad y multitud de momentos que van desde la selección y concepción del proyecto de lección. Momento en el cual, se reconocen múltiples decisiones. Hasta la fase en la cual el profesor en prácticas interactivas con los estudiantes toma distinto tipo de decisiones que van desde la articulación de los "instrumentos" para auspiciar la construcción de conocimiento por el estudiante, hasta la coordinación de estos con la situación propuesta para cualificar la enseñanza.

Referencias y bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education. In: Journal of Mathematics Teacher Education. Vol. 3, 205–224.

Artigue M., Bottino R.M., Cerulli M. & al. (2007). Technology Enhanced Learning in Mathematics: The cross-experimentation approach adopted by the TELMA European Research Team. La Matematica e la sua didattica. 21.1, 67-74.

Bkouche, R (2009).De l'enseignement de la géométrie. REPERES - IREM. N° 76, juillet, p. 85- 103.

Bloch I. (2006).Peut on analyser la pertinence des réactions mathématiques des les professeur dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans situations á dimension adidactique ?, Castela C. et Houdement C., actes du séminaire national de didactique des mathematiques, 2005, Irem Paris 7, p.77-114.

Brousseau, G. (1986).Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, pp. 33 - 115.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. AIQUE.

Comiti, C. ; Grenier, D ; Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. En ARSAC Gilbert et al. Coord, Différents types de savoirs et leur articulation, pp. 92-113. Grenoble : La Pensée Sauvage.

English, L. D (edit), (2008).Handbook of International Research in Mathematics Education, Second Edition.

Gueudet et Trouche(2010).Des ressources aux documents, travail du professeur et genesis documentaires. En Guedet & Trouche (Eds), Ressources Vives (57-74).Lyon: Presses universitaires de Rennes.

Guin & Trouche (2007). Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques. En Baron, Guin, & Trouche (Eds), Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissaje.Concepcion et usages, regards croisés (pp.197-228).

Haspekian, M., & Artigue, M. (2007). L'intégration d'artefacts informatiques professionnels à l'enseignement dans une perspective instrumentale: le cas des tableurs. In M. Baron, D. Guin, L. Trouche (Eds), Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage (pp.37-63). Paris: Editions Hermès.
Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2010). Accomodating the Instrumental Genesis Framework Within Dynamic Technological Environments. For the Learning of Mathematics, 30(1), 26-31
Hersant, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (2005), Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. Educational Studies in Mathematics 59/1-2-3, p. 113-151.
Lima, I. (2006). De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs. Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Encontrada en la base datos Tel. (Tel-00208015).
Llinares S. (2000).Intentando comprender la práctica del Profesor de matemáticas. Publicado en J. Ponte & Serrazina, L. (Eds.) (2000) Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999 (pp. 109-132). Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.
Margolinas C., (2002), Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur, cours, in Dorier J.L. et al, Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp. 141-157 Ed. La pensée sauvage, Grenoble.
Margolinas, C. & Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques (pp. 233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.
Margolinas, C. (1993) De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.
Rabardel P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains, Paris: Armand Colin.
Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En M. Bailleul, Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, ARDM (association pour la recherche en didactique des mathématiques), Caen, p. 203-213.
Rabardel, P. (2002) People and Technology. English version of Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Recuperado en: http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1
Trgalova, J. (2010). Documentation et décisions didactiques des professeurs. In Gueudet G. & Trouche L.(Eds.), (pp. 271-301).Ressources vives. Lyon : Presses universitaires de rennes.
Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. 197-230.
Trouche, L., Durand-Guerrier, V., Margolinas, C., & Mercier, A., (2006). Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques, Actes des journées mathématiques de l'INRP, INRP, Lyon.
Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education, X(1), 77–101.

Resolución de problemas aditivos en estudiantes sordos[1]

Diego Fernando **Guerrero** López
Grupo Matemática y Cognición - Universidad del Valle
Colombia
diego.guerrero@correounivalle.edu.co

Nohemy Marcela **Bedoya** Ríos
Grupo Matemática y Cognición - Universidad del Valle
Colombia
nohemy.marcela.bedoya@correrounivalle.edu.co

Diego Alonso **Medina** Rodríguez
Colombia
Grupo Estudios Psicológicos en Educación - Universidad Cooperativa de Colombia
diego.medinar@ucc.edu.co

Resumen

Se propone una investigación que explora el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos en población sorda vinculados a la resolución de problemas aritméticos aditivos. Se plantea un diseño cuasi experimental de carácter transversal. Participan 27 niños sordos usuarios de la Lengua de Señas Colombiana (LSC), que cursan los grados de transición a 3º grado de básica primaria. En la presente comunicación, se incluyen los resultados encontrados para una de las tareas de comprensión numérica utilizadas en el estudio original, se trata de una tarea de suma de numerales verbales o en LSC (Lengua de Señas Colombiana), que fue aplicada de manera individual. Los resultados evidencian que el éxito de resolución se encuentra en función del rango numérico y la presencia o no del numeral 5; este último se relaciona con las características de la estructura de los numerales en lengua de señas.

Palabras clave: matemáticas, adición, niños sordos, lengua de señas, estrategias.

[1] El presente trabajo fue realizado como parte del proyecto de investigación "Estudio exploratorio sobre el aprendizaje de la secuencia numérica de conteo en lengua de señas, en niños sordos", financiado por COLCIENCIAS y la Universidad del Valle, Cali – Colombia. Contrato RC No. 409 – 2011

Introducción

Los problemas aditivos implican la descomposición y composición de los números. Maza (1989), propone que en una operación aditiva $a + b = c$, se representan dos cantidades iniciales a y b que interaccionan y dan origen a una cantidad mayor c. Para Vergnaud y Durand (1976) la operación de suma cumple todas las características enunciadas en la ley de composición interna binaria, pues en el caso de los números naturales, c es el resultado de la composición de a y b, y todos resultan ser números de la misma naturaleza. A diferencia de lo que ocurre por ejemplo en la operación de resta, en la que esto solo es posible siempre cuando a sea mayor que b. Para algunos autores esta característica constituye una de las propiedades del número y de los sistemas de numeración, denominada "composición aditiva" (Butterworth, 2005; Nunes y Bryant, 1997; Robinson y LeFevre, 2012) y su adecuada comprensión es fundamental en la construcción de conocimiento numérico y matemático.

Las operaciones aditivas son de gran importancia y significancia en el quehacer cotidiano de los sujetos. Su aprendizaje se inicia culturalmente mucho antes de cualquier proceso de escolarización formal (Aubrey, 2003; Maza, 2001; Nunes, Dias y Carraher, 1993). Así, los niños pequeños evidencian el aprendizaje de conocimientos de esta naturaleza, antes de entrar en la escuela, tales como la totalización de colecciones a partir de procedimientos de conteo que les permiten la resolución de problemas aditivos simples (Castro, Rico y Castro, 1999; Hughes, 1986; Medina, 2012). En los primeros grados de primaria esta relevancia es igualmente reiterada y los procesos de enseñanza de las matemáticas se centran inicialmente en la comprensión formal de las operaciones aditivas y su dominio algorítmico (Baroody, 2000).

Algunos autores (Castro, Rico y Castro, 1999; Hernández, 2011; Thompson y Hendrickson, 1986), identifican factores específicos que incrementan para los niños la dificultad de resolución de problemas aditivos: (1) la ausencia de material concreto o representaciones gráficas, (2) las variables como la extensión de los enunciados y el tipo de pregunta, (3) la magnitud de los números y la utilización exclusiva de un lenguaje simbólico, (4) la organización que identifica la presentación de los datos.

En este sentido Thompson (2010), también propone como una dificultad para el proceso de aprendizaje de los niños, la enseñanza mecánica y memorística de las operaciones aditivas. Este autor advierte la necesidad de proponer a los niños el uso de estrategias no formales de resolución - por ejemplo, la línea numérica - para generar en ellos una mayor flexibilidad mental. Igualmente, Hernández (2011), señala la importancia de instar a los niños en la utilización de estrategias propias en el proceso de comprensión del número, así como la de proponer situaciones concretas que conlleven al uso de manipulables y que les faciliten el acceso al conocimiento formal de las operaciones aditivas.

Castro, Rico y Castro (1999), establecen cinco etapas diferentes que describen el proceso de aprendizaje de las operaciones aritméticas: (1) las acciones y transformaciones que dan origen a conceptos operatorios; (2) el uso de modelos que se establecen a partir de la abstracción de regularidades en la aplicación de cada una de las operación aritméticas en contextos diferentes; (3) la simbolización, que consiste en el uso de modelos a nivel operatorio y que representan en sí, la expresión o notación simbólica de la operación; (4) la relación que se establece entre hechos numéricos y tablas, es decir, la memorización o no de los hechos numéricos fundamentales en cada operación; y finalmente, (5) la realización de cálculos a partir del conocimiento de los hechos numéricos y de reglas básicas.

Krebs, Squire y Bryant (2003), proponen que una evidencia primaria de la comprensión aditiva de los números en los niños, se observa en el tipo de estrategia de conteo que ellos usan, específicamente cuando utilizan la estrategia de "conteo a partir de". Esta estrategia consiste en establecer la cantidad de elementos que conforman una colección A, a partir de una sub-colección A[1] que la integra. Thompson (2003a), describe una serie de estrategias adicionales que forman parte del repertorio de los niños al momento de resolver problemas aditivos mediante procedimientos de conteo. La primera de ellas puede ser denominada como "duplicación", la cual alude a la acción de duplicar uno de los dos cardinales - generalmente el de menor valor - que conforman el problema propuesto - por ejemplo, en 3 + 4 los niños pueden llegar a establecer que el 3 está contenido en el 4 y que entonces... de tres a cuatro... uno... y entonces, tres y tres y uno... es la respuesta -. Otra estrategia consiste en la utilización de números que componen el 10 (por ejemplo, nueve y uno) para proporcionar la respuesta a un problema (por ejemplo, en 8 + 4 un niño puede establecer que el 8 está contenido dentro del 10 y que la diferencia que es 2, debe luego ser removida del 4 para establecer el valor total). Finalmente, una última estrategia consiste en el "conteo de pares" (por ejemplo, los niños en 2 + 5 operan así; 2... 4... 6... 7).

Thompson (2003b), identifica tres categorías para clasificar los métodos de cálculo mental que los niños utilizan para la suma de numerales multidígitos. El primer método, lo denomina "sumas acumulativas", que consiste en la adición sistemática al primer sumando - de los dieces que componen el segundo sumando - por ejemplo en 32 + 43, los niños pueden proceder de la siguiente formas, 32... 42... 52... 62... 75). El segundo método consiste en la realización de "sumas parciales" (por ejemplo, en 32 + 43 los niños hacen lo siguiente; 30 + 40 = 70, 2 + 3 = 5, 70 + 5 = 75). Por último, un tercer método aditivo es denominado "sumas acumulativas y parciales" (por ejemplo, en 32 + 43 se opera de la siguiente forma; 30 + 40 = 70... 72... 75).

Problemas aditivos y estrategias de resolución

Los problemas aditivos implican la capacidad de operar con una de las características centrales del número, esto es, su capacidad de descomponerse y componer otros números. Diversos autores reconocen esta característica como una de las propiedades del número y de los sistemas de numeración, denominada “composición aditiva” (Nunes y Bryant, 1997). Tanto la suma como la resta son operaciones de composición aditiva y existe una relación de inversión entre ellas (por ejemplo, 2+1-1=2).

Para resolver problemas que implican este tipo de operaciones, los niños utilizan distintos tipos de procedimientos que pueden ser más o menos precisos; o tal vez, más o menos económicos. Sin embargo, todos dan cuenta de la forma en que los sujetos comprenden esta propiedad del número y de las habilidades con que cuentan. Estos procedimientos han sido categorizados en tipos de estrategias por varios autores. A continuación se describen las principales estrategias reportadas en la literatura.

Estrategias relacionadas con procesos de conteo. La primera de ellas, corresponde a una estrategia inicial que consiste en el conteo reiterativo y exhaustivo de los elementos en ambos sumandos, donde siempre se inicia el conteo desde uno. Por ejemplo, para resolver la operación 3 + 4, el niño cuenta cada uno de los sumandos de forma independiente, así: “uno, dos, tres”, luego “uno, dos, tres y cuatro” y finalmente da el total de la operación contando todos los elementos “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete”. Algunos autores denominan esta como estrategia de "*Conteo Total*" (Bermejo y Lago, 1988; Fuson, 1982; Secada, Fuson y Hall, 1983; Serrano y Denia, 1987), otros la denominan *"Modelo SUM"* (Groen y Parkman, 1972; Suppes y Groen, 1967) o *"modelo de enumeración completa"* (Mayer, 1986).

Una estrategia que aparece posteriormente es conocida como el conteo parcial, en el cual se resuelve la operación a través de un conteo uno a uno que inicia desde el cardinal de uno de los sumandos y se adicionan los elementos del segundo sumando (Fuson, 1982; Secada, et al., 1983; Serrano y Denia, 1987). En el mismo ejemplo de la suma 3 + 4, el niño realizaría uno de los siguientes procedimientos: "(tres), cuatro, cinco, seis siete" o "(cuatro), cinco, seis, siete". Esta estrategia recibe el nombre de *"Conteo desde"* (Bermejo y Lago, 1988) y tiene tres variaciones. En la primera, el niño inicia el conteo siempre desde el primer sumando, esta estrategia recibe el nombre de *"Modelo de enumeración por continuación"* (Serrano y Denia, 1987). En la segunda, el niño inicia el conteo desde el mayor de los sumandos y se ha denominado como *"Modelo MIN"* (Hitch, Arnold y Phillips, 1983; Mulhern y Budge, 1993; Serrano y Denia, 1987) o *"conteo desde el sumando mayor"* (Bermejo y Lago, 1988). En la tercera, el niño inicia el conteo siempre desde el menor de los sumandos y cuenta el número de veces correspondiente al otro sumando, esta estrategia ha recibido el nombre de *"Modelo MAX"* (Hitch et al., 1983; Mulherm y Bull, 1993).

Estrategias relacionadas con procesos de memoria a largo plazo. Posteriormente, para algunos autores, a través de la práctica se establecen asociaciones entre los problemas y sus respuestas, lo que permite que se construyan representaciones mentales denominadas hechos numéricos, que pueden ser recuperadas de la memoria a largo plazo, al momento de dar respuesta a un problema aritmético conocido (Bull, 2008).Este tipo de estrategia no requiere de ningún tipo de procedimiento observable y se obtiene una respuesta a través de la recuperación directa de la misma desde la memoria (Bermejo y Lago, 1988; Imbo y Vandierendonck, 2007).

Las estrategias de transformación. Se relacionan con el conocimiento u hechos numéricos que ha establecido el niño, pues se propone que para la resolución de un problema aritmético no conocido o poco familiar, el niño deriva una respuesta para el problema presentado a partir de un hecho numérico conocido o en referencia a un problema similar (Imbo y Vandierendonck; 2007; Thompson, 2003a).

Todas las estrategias mencionadas de manera previa, se apoyan en el proceso de descomposición de los sumandos del problema, así como en el conocimiento del niño sobre la conmutatividad. Por ejemplo, para resolver el problema 15 + 3, el niño podría realizar el siguiente procedimiento: descomponer el problema y reagruparlo 10 + (5 + 3) y recuperar hechos numéricos conocidos 5 + 3 = 8 y 10 + 8 = 18.

La resolución de problemas aditivos en población sorda

En el caso de la población sorda, los procesos de aprendizaje de las matemáticas no han sido suficientemente investigados desde la psicología cognitiva. La mayor parte de los estudios reportados en el ámbito internacional, establecen comparaciones entre población sorda y oyente, y señalan el menor desempeño de los estudiantes sordos en relación con el de sus pares oyentes (Hitch et al., 1983; Leybaert y Van Cutsem, 2002; Nunes y Moreno, 1998; Wollman, 1965). Sin embargo, comprender este fenómeno implica reconocer las múltiples variables que en él intervienen; la incidencia que tiene sobre el desarrollo cognitivo el acceso tardío a una primera lengua, la escases de propuestas metodológicas y didácticas que faciliten la enseñanza de conceptos matemáticos (Guilombo y Hernández, 2007), el poco reconocimiento de las características propias de la lengua de señas – tales como la sintaxis de la secuencia numérica – o las repercusiones que las inadecuadas condiciones para desarrollar una verdadera propuesta educativa bilingüe tienen sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes (Bedoya, Mejía y Guerrero, 2012).

Específicamente en el caso de la Lengua de Señas Colombiana (LSC) la estructura de los numerales es variable, dependiendo del rango numérico, así como de modificaciones asociadas a ciertos "regionalismos", es decir, al dialecto en distintos sectores geográficos del país. En el presente documento se ofrece una descripción de los numerales en LSC que se utilizan en las dos instituciones educativas para estudiantes sordos de la ciudad de Cali – Valle del Cauca, que proponen un modelo educativo bilingüe para sordos.

Algunas características generales son: (a) El espacio de signación o el "espacio de las señas" está ubicado frente al señante cerca al eje vertical del cuerpo (Oviedo, 2001) sin embargo, este varía de acuerdo a la posición del observador de la seña, pues la mano siempre se orienta en dirección a este. La signación se realiza a la altura del pecho del señante. (b) Los numerales se signan utilizando una sola mano, a excepción de aquellos que contienen la seña de "mil" o "millón". (c) La palma de la mano está orientada hacia el observador.

Otros marcadores lingüísticos como la forma de la mano o el tipo de desplazamiento, se relacionan con las variaciones de la configuración específica de cada numeral según el rango numérico. Guerrero y González (2013), analizan estas configuraciones y proponen la siguiente descripción:

Numerales del 1al 5. Se basan en cinco señas primitivas, en las que se extiende un dedo de la mano para representar de forma análoga el número de elementos. Por ejemplo, para el numeral "1" se extiende el dedo índice y los demás dedos permanecen cerrados sobre la palma, para el numeral "3" se extienden los dedos índice, medio y anular (ver Figura 1).

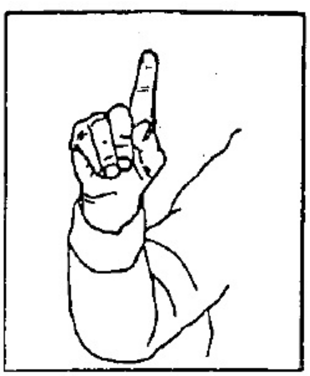


Figura 1. Representación del numeral "1".

Numerales del 6 al 9. Corresponden a la ejecución de las mismas señas que se describen en el rango numérico previo, seguida de una flexión en la segunda falange de los dedos utilizados. Por ejemplo, en el numeral "6" se extiende el dedo índice mientras los demás dedos permanecen cerrados y posteriormente se realiza una flexión (ver Figura 2). La regla de signación de estos numerales, parece presentar un carácter aditivo: cantidad signada más la unidad cinco.

Figura 2. Representación del numeral "6".

Numerales 0 y 10. El signo del numeral “0”se representa con todos los dedos flexionados sobre el pulgar formando un círculo. El numeral “10” es otra seña nueva, ésta se representa con el pulgar extendido y los otros dedos cerrados sobre la palma, se realiza un movimiento de giro de la muñeca en sentido horizontal (ver Figura 3).

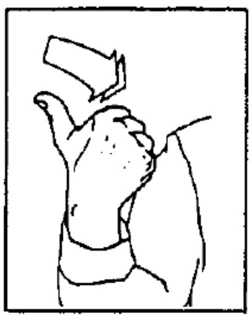


Figura 3. Representación del numeral "10".

Los demás numerales se construyen a partir de estas señas básicas en secuencia, por medio de una regla de signación que consiste en el desplazamiento de la mano hacia el cuadrante distal del cuerpo, que representa el orden de la unidad signada. Por ejemplo, el numeral 16, se representa por la secuencia de los signos “1” y “6”, primero se signa el “1” y posterior a un desplazamiento sobre el eje horizontal de la mano se signa el “6”. En este caso, la seña del 1 representa las unidades y la seña del 6 representa las decenas.

Una vez contextualizado el fenómeno que se intenta abordar, tanto desde el plano del aprendizaje matemático así como desde las características generales del sistema de numeración en LSC, es importante puntualizar el objetivo de esta investigación.

En términos generales, el propósito de este trabajo es aportar en el conocimiento de la forma como los niños sordos afrontan el aprendizaje y la comprensión de la composición aditiva. Para ello, se propone generar un análisis de los desempeños que niños sordos de transición y básica primaria evidencian cuando resuelven problemas aditivos. Dos preguntas específicas orientaron estos análisis: ¿Se presentan diferencias en el acierto y estrategias utilizadas en ambas poblaciones en función de las tareas aplicadas y de las variables de los numerales? ¿Cuáles son los tipos de estrategias que evidencian niños sordos y oyentes cuando resuelven este tipo de problemas?

Metodología

Se propuso un diseño experimental con dos grupos, tomando como variable independiente del estudio, una característica de naturaleza atributiva, esta es, la lengua natural de los sujetos, cuyas modalidades fueron a) lengua de señas y b) lengua oral. Se manipularon dos variables independientes, una de ellas fue el rango numérico de presentación de los estímulos, dividido en a) Rango 1, sumas con un total entre 6 y 10 y b) Rango 2, sumas con un total entre 11 y 15). La segunda variable independiente fue la presencia del numeral 5 como termino, con modalidades con 5 y sin 5.

Este proyecto fue aprobado por el comité de ética de la Universidad del Valle, siguiendo los lineamientos del código de ética de Helsinki. Se trata de un estudio no invasivo, en modalidad de evaluación pedagógica individual. Se contó con el consentimiento de los padres de familia y directivas de la institución educativa, así como con el asentimiento de los estudiantes participantes.

Participantes

Inicialmente participaron el total de estudiantes (58) de los grados Transición, 1º, 2º y 3º de primaria de dos instituciones educativas de la ciudad de Cali que trabajan con un modelo bilingüe para sordos (lengua de señas, castellano escrito). Para el proceso de selección se tomó en cuenta el nivel de aprendizaje de la LSC y la ausencia de síndromes cognitivos severos asociados. La primera condición fue evaluada por la docente y la segunda a través de la presentación del Test de Matrices Progresivas de Raven.

Se seleccionaron 34 estudiantes sordos usuarios de la LSC, en niveles de escolarización de Transición a 3º de básica primaria, pertenecientes a ambas instituciones educativas, con un promedio de edad de 11 años. Esta muestra de estudiantes tuvo un promedio de 3,4 años en el proceso de aprendizaje de la lengua de señas y todos provenían de hogares con padres oyentes. Según los reportes institucionales el tipo de comunicación es mixto, pues los familiares no dominan la lengua de señas y en muchos casos solo conocen las señas de básicas.

Según la evidencia de diferentes estudios previamente reportados, el desfase entre las poblaciones sorda y oyente es de al menos dos años, por esta razón se eligió trabajar con niños oyentes de grado 1º de básica primaria. Este grupo de sujetos oyentes se conformó por 15 estudiantes de una institución escolar pública, los estudiantes fueron seleccionado y pareados según el nivel de conocimiento de la secuencia numérica de conteo.

Todos los participantes, oyentes y sordos, pertenecían a un estrato socio-económico medio-bajo de la ciudad de Cali.

Instrumentos

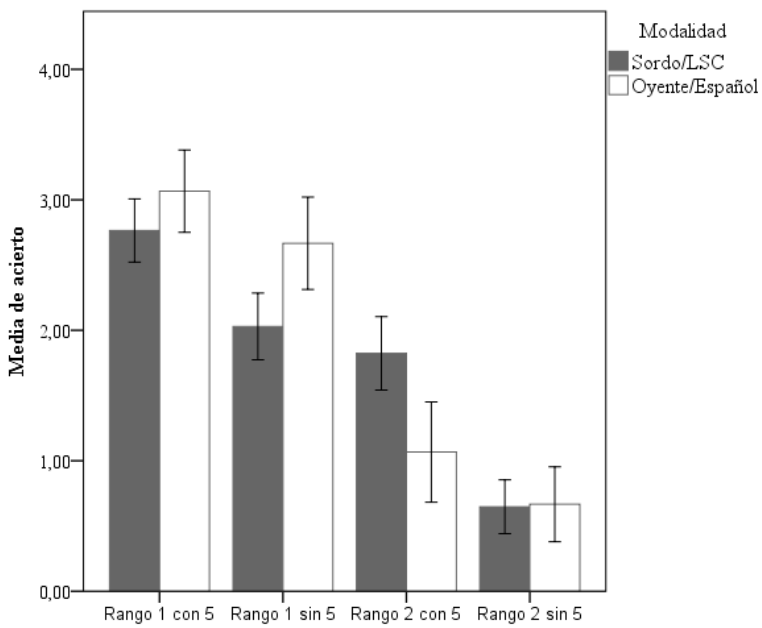
Se utilizó una tarea de Suma de Numerales en LSC, ésta fue presentada individualmente por uno de los experimentadores con ayuda de un video. En un computador portátil ubicado a una distancia de 40 centímetros frente al sujeto, se presentó el video, en el cual uno de los modelos lingüísticos (adulto sordo) dio la consigna, el ejemplo y los estímulos en LSC.

En el ejemplo o fase de familiarización se presentó una suma de numerales (2 + 1) y se orientó la respuesta del estudiante en caso de cometer errores. Una vez que la actividad fue clara para los estudiantes se continuó con la fase experimental, en la que se presentaron un total de 20 sumas con numerales de un sólo dígito (a + b = x). Se utilizó una secuencia de presentación de los estímulos que iniciaba con las operaciones del rango 1 y el orden de las operaciones dentro de cada rango fue aleatorio.

Resultados

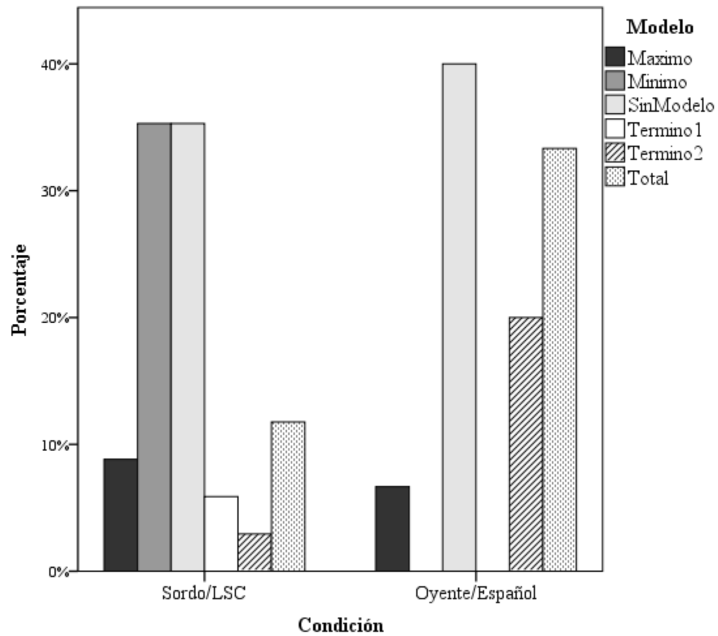
Los resultados mostraron que los niños tendían a presentar un mayor número de aciertos en las sumas con total de 6 a 10 (Rango 1) con numeral 5, y el menor número de acierto en las sumas de 11 a 15 (Rango 2) sin numeral 5. En ambos grupos de niños se observa una tendencia similar de acierto: Rango 1 con numeral 5 > Rango 1 sin numeral 5 > Rango 2 con numeral 5 > Rango 2 sin numeral 5 (ver Gráfica 1).

Para analizar el logro se realizó un análisis de varianza ANOVA de 2 (Modalidad: Sordo/LSC vs Oyente/español) x 2 (Rango: 6 a 10 vs 11 a 15) x 2 (Numeral 5: con vs sin), con medidas repetidas en los dos últimos factores y la modalidad como factor inter-sujetos. Los análisis mostraron efecto principal de Rango ($F(1,47) = 101.383$, $p < 0.001$) y Numeral 5 ($F(1,47) = 32.515$, $p < 0.001$), igualmente se encontró interacción entre Rango*Modalidad ($F(1,47) = 7.126$, $p = 0.010$) y Numeral 5*Modalidad ($F(1,47) = 5.465$, $p = 0.024$).



Gráfica 1. Media de aciertos en función de modalidad, rango y numeral 5.

Con objetivo de determinar la estrategia usada por los niños para resolver los problemas aditivos, se realizó para cada niño un análisis de regresión, con la variable dependiente del tiempo de respuesta y las variables predictoras: termino con valor mayor (máximo), termino con menor valor (mínimo), suma de los términos (total), primer término de la suma (Termino1) y segundo término de la suma (Termino2). Los resultados mostraron que el 74,7% de los niños sordos y el 60% de los oyentes se ajustaban a alguno de los modelos propuestos (ver Gráfica 2).



Grafica 2. Distribución de las estrategias.

Los resultados mostraron que el 52,9% de los niños sordos tendían a usar un modelo de conteo desde (Máximo, Mínimo, Termino1, Termino2), en el caso de los niños oyentes se encontró que el 26,7% presentaba el mismo tipo de modelo. Para los niños oyentes el modelo Total fuel el más frecuente (33,3%), mientras para los niños sordos fue el modelo Mínimo (35,3%).

Conclusiones

De acuerdo a los resultados, es posible evidenciar que en las tareas de suma el logro (resolución correcta del problema) es similar en niños sordos y oyentes. Cuando se analizan los resultados por grado, se encuentra que no hay diferencias en función del mismo en el rango 11 a 15, por esta razón los análisis generales se realizaron sin tomar en cuenta esta variable.

Esto sugiere en primer lugar, que en la tarea de suma no se presenta el desfase esperado entre los estudiantes sordos de 1º de primaria y sus pares oyentes del mismo grado escolar, y en segundo lugar, que el desempeño de los estudiantes sordos de 2º y 3º no mejora en comparación con el de los niños sordos y oyentes de 1º, indicando poco avance en la resolución de problemas aditivos en los estudiantes sordos. A pesar de que los resultados de esta investigación no llegan a ser concluyentes, estos hallazgos van en la misma dirección de las propuestas de autores como Nunes y Moreno (1998) quienes señalan que el desfase entre las poblaciones es mínimo o no aparece durante la etapa pre-escolar y al inicio de la etapa escolar, pero que conforme se avanza en el proceso de escolarización las diferencias tienden a incrementarse, razón por la que se considera necesario explorar el papel que tienen las formas de enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, los resultados muestran que para los niños sordos las sumas en formato de LSC, con resultados entre 11 y 15 (rango 2) y que tienen el 5 como uno de sus términos, son más fáciles de resolver. Estos resultados sugieren que la estructura de los numerales en LSC tiene un impacto en la comprensión de la unidad compuesta de 5 y conociendo esta particularidad se podrían pensar nuevas formas de trabajo en relación con los procesos de enseñanza para la comprensión del número natural en la población sorda.

Cuando se analizaron las estrategias usadas por los niños, se observa que los niños sordos tienden a usar el conteo desde en un mayor porcentaje, específicamente usan con mayor frecuencia la estrategia de conteo más avanzada, el modelo Mínimo, estos resultados sugieren que entre los niños que usan el conteo desde, los niños sordos, son los que presentan un mayor conocimiento de la unidad compuesta. Es necesario anotar, que los niños que no están clasificados en ninguno de los modelos podrían estar usando la recuperación o estrategias mixtas que no se ajustan a ningún modelo.

Referencias

Aubrey, C. (2003).Children´s early learning of number in school and out. En I. Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number* (pp. 20-30).Philadelphia: Open University Press.

Baroody, A. (2000). *El pensamiento matemático de los niños*. España: Aprendizaje visor.

Bedoya, N., Mejía, J. y Guerrero, D. (2012). La enseñanza de las matemáticas a estudiantes sordos: Retos y realidades.Artículo en proceso.

Bermejo, V. y Lago, M.O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje 44*, 109-121.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46* (1), 3–18.

Bull, R. (2008). Deafness, numerical cognition, and mathematics. En M.Marschark & P. Hauser (Eds.) Deaf Cognition: Foundations and Outcomes. Perspectives on Deafness (pp. 170-200). New York: Oxford University Press.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1999).Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá: Universidad de los Andes.

Fuson, K.C. (1982). The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 67-81). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Groen, G.J. y Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple arithmetic. *Psychological Review*, *79*, 329–343.

Guerrero, D. y González, J. (2013). Relación entre la secuencia numérica convencional en Lengua de Señas Colombiana y la comprensión numérica en niños sordos. Capitulo de libro sometido a publicación.

Guilombo, D. M. y Hernández, L. A. (2007) La relevancia del lenguaje en el desarrollo de las nociones matemáticas en la educación de los niños sordos. Informe de proyecto de investigación Colciencias, 2007.

Hernández H. J. B. (2011).*Dificultades de la suma y la resta en niños de primer grado de educación primaria* (Tesis de Maestría).Universidad Autónoma de Yucatán. Yucatán, México.

Hitch, G. J., Arnold, P., y Phillips, L.J. (1983). Counting processes in deaf children´s arithmetic. *British Journal of psychology,74*, 429-437.

Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Malden: Blacwell Publishers.

Imbo, I. y Vandierendonck, A. (2007). The role of the phonological loop and the central executive in simple-arithmetic strategies. *European Journal of Cognitive Psychology*, *19*, 910-933.

Krebs, G., Squire, S., y Bryant, P. (2003). Children's understanding of the additive composition of number and of the decimal structure: what is the relationship? *International Journal of Educational Research*, *39*, 677-694.

Leybaert, J. y Van Cutsem, M. (2002). Counting in Sign Language. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*, 482-501.

Maza, G. C. (2001). Adición y sustracción. En Enrique de Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 177-202). España: Síntesis.

Maza, G. C. (1989). Concepto formal de suma y resta. En C. Maza, y A. Machado. (Ed.), *Sumar y restar. El proceso de enseñanza aprendizaje de la suma y la resta*. (pp. 9–15). Madrid: Visor Distribuciones.

Mayer, R. E. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidos.

Medina R. D. A. (2012). Estrategias de intervención en niños de preescolar y primaria para la construcción de conocimiento matemático significativo. Artículo en proceso.

Mulhern, G. y Budge, A. (1993). A Chronometric Study of Mental Addition in Profoundly Deaf Children. *Applied Cognitive Psychology, 7*, 53-62.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño.Capítulo 3. Comprensión de los sistemas de numeración. México: Siglo XXI Editores.

Nunes, T., y Moreno, C. (1998). Is hearing a cause of difficulties in learning mathematics? En C. Donlan. (Ed.) *The Development of Mathematical Skills*(pp. 227- 254). Hove: Psychology Press.

Nunes, T., Dias S. A., y Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Oviedo, A. (2001). Apuntes para una gramática de la lengua de señas colombiana. Cali: Universidad del Valle, Instituto Nacional para Sordos - INSOR

Robinson, K. M. y LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, *79* (3), 409–428.

Secada, W.G., Fuson, K. y Hall, J.W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 47-57.

Serrano, J. M. y Denia, A.M. (1987). Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. *Infancia y Aprendizaje, 39/40*, 57-69.

Suppes, P. y Groen, G. (1967). Some counting models for first grade performance data on simple addition facts. En J. M. Scandura (Ed.) *Research in Mathematics Education.* (pp. 35-43). Washington, DC: A Special Publication of the National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, I. (2010). *Issues in teaching numeracy in prymary schools*. New York: Open University Press.

Thompson, I. (2003a).The role of counting in derived fact strategies. En Ian Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number* (pp. 52-62).Maidenhead - Philadelphia: Open University Press.

Thompson, I. (2003b). Mental and written algorithsms: Can the gap be bridged. En Ian Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number* (pp. 97-110).Maidenhead - Philadelphia: Open University Press.

Thompson, C. y Hendrickson, A. (1986). Verbal addition and subtraction problems: Some difficulties and some solutions. *Arithmetic Teacher, 33* (7), 21-25.

Verganud, G. y Durand, C. (1976). Structures additiveset complexité psychogénétique. *Revue Francaise de Pédagogie*, *36*, 28-43.

Wollman, D. C. (1965). The attainments in English and arithmetic of secondary school pupils whit impaired hearing. *Theteacher of deaf*, *159*,121-9.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Resultados de un proyecto investigativo en Matemática para ingeniería

María de Lourdes **Bravo** Estévez.
Departamento de Matemática, Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”
Cuba
lbravo@ucf.edu.cu
Domingo **Curbeira** Hernández.
Departamento de Matemática, Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”
Cuba
dcurbeira@ucf.edu.cu
Yohanna de la Caridad **Morales** Díaz.
Departamento de Matemática, Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”
Cuba
ymorales@ucf.edu.cu
Migdalia de los Milagros **Torres** del Toro.
Departamento de Matemática, Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”
Cuba
mtorres@ucf.edu.cu

Resumen

Los profesionales relacionados con el perfil ingenieril, en su ciclo de formación básica constan de la Matemática Superior como una de sus disciplinas, sin embargo, es muy discutido las dificultades que afronta el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina. Es por ello, que un conjunto de profesores se motivaron en desarrollar un Proyecto de Investigación para contribuir al “Perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática en carreras de ingeniería”. Es objetivo de este trabajo presentar los resultados del proyecto, con la implementación de una estrategia didáctica centrada en estrategias de aprendizaje para el desarrollo de habilidades matemáticas. Los resultados se manifestaron en las diferencias significativas entre el antes y el después de aplicada la estrategia en cada una de las acciones de las habilidades: calcular límite, demostrar continuidad y representar funciones relacionadas con las habilidades espaciales, lo que condujo a niveles cualitativamente superiores en las mismas.

Palabras clave: investigación, enseñanza – aprendizaje**,** Matemática, ingeniería.

Introducción

En el ciclo de formación básica de los ingenieros aparece la Matemática Superior como una disciplina básica, ya que esta contribuye a completar, en cierta medida, el sistema de conocimientos matemáticos que necesita el futuro ingeniero para fundamentar los modelos matemáticos que se presentan en la resolución de problemas ingenieriles. Además, desarrolla el pensamiento lógico –deductivo, la formación lingüística, las operaciones mentales generales como el análisis, la síntesis, la generalización y la abstracción, así como el pensamiento heurístico y creativo. (MES, 2007). Sin embargo, por casi todos es sabido, que la Matemática en los diferentes niveles de enseñanza y no queda excepto el nivel superior, es un proceso complejo tanto para enseñarla, tarea de los profesores; como para aprenderla por parte de los alumnos.

La obtención de bajos resultados académicos y/o calidad en el proceso docente – educativo de la disciplina de Matemática Superior o General en las carreras de ingeniería, así como el pobre desarrollo del razonamiento lógico y a la vez creativo ante una determinada situación que requiere del conocimiento matemático o de sus herramientas para su solución, motivó a un conjunto de profesores encargados de la enseñanza de esta disciplina a realizar un proyecto de investigación que contribuyera al "Perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática en carreras de ingeniería". Para ello, fue necesario en un primer paso analizar los planes de estudio, en lo que respecta a esta disciplina, de las carreras de Ingeniería Informática, Industrial, Mecánica, Química y Agronomía que son objeto de investigación y que a su vez son las que se estudian en la universidad en que laboran dichos profesores.

Al adentrarse en el análisis de los programas de las carreras ingenieriles, se vio la necesidad de buscar diferencias y aspectos comunes, es decir, de realizar un estudio comparado que permitiera posteriormente cumplir el objetivo final de elaborar estrategias para el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática para estas carreras. Luego se aplicó un diagnóstico de necesidades y el análisis de sus resultados permitió identificar los elementos lógicos, principales o de base, del conocimiento con dificultades en la enseñanza de la Matemática en las carreras de ingeniería que son de interés en la investigación. En base a lo obtenido, se propone el estudio y diseño de una estrategia didáctica que les permita a los alumnos que se forman como ingenieros ser entes activos en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, reconociendo su aplicabilidad en su futura profesión.

Los propósitos de la investigación, en resumen, estuvieron dirigidos en primer lugar a presentar el proceso y resultados de la aplicación del método comparativo en el estudio de los planes de estudio de las carreras de ingeniería que se estudian en la universidad, en lo que respecta a la disciplina Matemática Superior y/o General. En segundo lugar a exponer los resultados del estudio diagnóstico realizado, para detectar los elementos lógicos del conocimiento que intervienen directamente en la enseñanza de la Disciplina Matemática Superior, como formas invariantes del conocimiento y que aún presentan dificultades los alumnos de las carreras de ingeniería. En tercer lugar a elaborar la estrategia didáctica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Disciplina Matemática en carreras de ingeniería, centrada en estrategias de aprendizaje para el desarrollo de habilidades matemáticas. Y por último, implementar la estrategia y valorar la efectividad de las mismas.

Por lo que el objetivo del presente trabajo es presentar los resultados del proyecto de investigación que contribuye al "Perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática en carreras de ingeniería".

Desarrollo

La investigación tuvo cuatro etapas fundamentales que son:

Estudio de los planes de estudio de las carreras de ingeniería seleccionadas, en lo que respecta a la disciplina matemática superior y/o general.

La educación ha hecho uso de la comparación, vista como un comportamiento, un conocimiento o enfoque de la realidad educativa. Para que una investigación en el campo de la educación comparada pueda ser considerada comparativa debe contener cuatro pasos fundamentales: descripción, interpretación o aplicación, yuxtaposición y comparación. (García, 1991)

Para el trabajo que ocupa, en los pasos de la descripción e interpretación o explicación el grupo de trabajo se situó en la realidad que va a comparar analizando los planes de estudio de las carreras de ingeniería que serán objeto de comparación (Mason, 2004). Se toma en cuenta la trayectoria histórica por la que han transcurrido los programas de la Disciplina Matemática Superior y/o General según los diferentes planes de estudio de forma general. Luego, son observados los elementos que contienen tales programas y se determina qué aspectos de los mismos se quieren comparar para ordenarlos.

Seguidamente, se realizó la yuxtaposición, situando los elementos o aspectos a comparar dos a dos en paralelos, ordenados en una tabla de forma apaisada y afrontando los datos que fueron elaborados en los pasos anteriores. De la confrontación se desprende una información sobre sus semejanzas y diferencias, que en realidad es la primera parte de una comparación completa.

Por último, el paso cuatro el de "la comparación", donde se establecen relaciones entre dos o más fenómenos de un mismo género. De este paso se emiten las conclusiones del estudio por cada elemento determinado en los primeros pasos, las que son:

1) Fundamentación de la disciplina.

En las Carreras de Ingeniería Industrial e Informática está reflejada la necesidad de la disciplina, de cómo esta desarrolla los fundamentos de la formación de un especialista dado que todo ingeniero considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos con los cuales reflejan los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia. En Ingeniería Mecánica y Química de forma concisa se describen los aportes de esta disciplina en la formación del ingeniero desde todas las aristas de su contribución. En Ingeniería Agrónoma determinan que el problema de la disciplina está dado por uso racional de las herramientas matemáticas y de cómputo para evaluar la información, procesarla y establecer criterios de valor.

2) Objetivos educativos e instructivos.

En las Carreras de Informática e Industrial se declaran los mismos objetivos educativos e instructivos y tienen una estrecha relación con los establecidos por la Carrera de Ingeniería Mecánica. Mantienen cierta correspondencia los que asume la Carrera Ingeniería Agrónoma pero siendo más concisos. En la Ingeniería Química se resumen los objetivos educativos e instructivos declarados por el resto de las carreras en uno solo, respectivamente.

3) Sistema de conocimientos.

En la Carrera de Ingeniería Informática, no aparece declarado lo relacionado con la solución de ecuaciones en derivadas parciales. Los sólidos solo se reciben en Matemática II en la Carrera de Ingeniería Mecánica, el resto de las ingenierías no lo tienen declarado.

4) Sistema de habilidades.

El sistema de habilidades declarado por las Carreras de Ingeniería Informática e Industrial es el mismo, teniendo correspondencia con las Carreras de Mecánica, Agronomía y Química en función del sistema de conocimientos para cada una de estas.

5) Sistema de valores.

Los valores universales comunes en las carreras ingenieriles son la responsabilidad, la honestidad, la laboriosidad y la honestidad.

6) Sistema de evaluación.

En todas las carreras el sistema de evaluación se sustenta sobre la base de trabajos de control, seminarios y exámenes finales escritos; en el caso de Agronomía se propone además la realización de trabajos extraclases.

7) Bibliografía.

En las Carreras de Ingeniería Industrial, Informática, Química y Mecánica se observa gran semejanza entre los textos básicos. En Agronomía, se explicitan pocos libros y no se precisa si son básicos o complementarios.

Diagnóstico de necesidades a estudiantes participantes en el proceso docente educativo de las carreras seleccionadas.

En este trabajo se hace referencia al Diagnóstico de Matemática, en sus tres funciones: de búsqueda, exploración e identificación, reguladora-orientadora, interventiva-preventiva y potenciadora (González, 2011). Se asume por los autores de este trabajo para el diagnóstico, una prueba de conocimientos y destrezas con el objetivo de conocer el grado, con que los estudiantes dominan determinada materia. La información obtenida resulta de gran importancia para planificar las alternativas o estrategias en función de las dificultades de los estudiantes.

El diagnóstico se centró en el trabajo con funciones desde su definición, propiedades y representaciones gráficas hasta incluir elementos de la Geometría Analítica. Las mayores dificultades en los elementos lógicos del conocimiento se concretaron en: relacionar los conceptos de inyectividad y función inversa e identificar si una función dada es o no inyectiva, identificar si un objeto dado es un representante del concepto de función, la modelación matemática de una situación dada de la práctica haciendo uso del concepto de función, identificar la región limitada por las gráficas de las funciones y las propiedades al tipo de función, identificar el concepto de límite de una función real e identificar el lugar geométrico en el espacio dado por su ecuación.

Con el diagnóstico quedó ilustrado que existen deficiencias significativas entre lo que debe ser aprendido e interiorizado por los estudiantes desde el punto de vista conceptual en el tema de funciones, de ahí la necesidad de buscar las vías metodológicas que pueden ser empleadas para lograr la plena participación activa y consciente de los estudiantes.

Diseño de la estrategia didáctica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática.

Mientras que la pedagogía estudia todo tipo de proceso educativo en sus distintas manifestaciones, la didáctica atiende sólo el proceso más sistemático, organizado y eficiente que se ejecuta sobre fundamentos teóricos realizado por el profesorado, esto es, estudia los procesos de transmisión y comunicación de conocimientos específicos. Álvarez (1999:3) define la didáctica de cualquier materia como la: "Ciencia que estudia el proceso docente–educativo". La didáctica para una determinada materia, como las Matemáticas, es definida por Rico, Sierra & Castro (2000:352) como: "La disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación."

Uno de los aspectos más discutidos por la didáctica de una disciplina en particular, es el estudio de las dificultades del alumnado y el desarrollo de potencialidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de una determinada materia, para lo que es útil entre otros aspectos la implementación de estrategias didácticas que les permita a los alumnos ser entes activos de su propio aprendizaje, en función de diseñar actividades que generen un conocimiento para su posterior aplicación en el perfil de su profesión.

Las estrategias de enseñanza son los métodos, técnicas, procedimientos y recursos que se planifican de acuerdo con las necesidades de la población a la cual van dirigidas y que tiene por objeto hacer más efectivo el proceso de enseñanza-aprendizaje. (Pacheco, 2008). El diseño, selección y empleo de estas estrategias deberá ser producto de la planificación de las condiciones que favorezcan el aprendizaje. (Bravo, 2002)

El diseño del plan de acciones de la estrategia didáctica propuesta es el siguiente:

1) Caracterizar en una etapa previa a la aplicación de la estrategia didáctica los elementos básicos que intervendrán en ésta directamente, los que son: los estudiantes, el profesorado de la disciplina y la disciplina (Matemática Superior). Realizar actividades de carácter metodológico entre los profesores de la disciplina Matemática Superior, relacionados con la estrategia didáctica y de aprendizaje que lleva como núcleo central.

2) Utilizar métodos productivos, fundamentalmente la conversación heurística, para la elaboración de conceptos y búsqueda de vías de solución de un problema.

3) Realizar ejercicios portadores de información.

4) Analizar y discutir varias vías de solución de un problema. La búsqueda de otras vías de solución del problema permite el desarrollo del pensamiento lateral, además de promover una participación activa del estudiante que es determinante en el discurso. Aunque realmente esta acción consume tiempo, si se sabe aprovechar el debate representa un enriquecimiento de la aplicación del saber matemático y del desarrollo de la comunicación.

5) Elaborar y utilizar guías de estudio cuya estructura contenga: asignatura, año, tema, objetivos generales y específicos, sumario, pre-requisitos, bibliografía, tareas, sistema de ejercicios y auto-examen; como de apoyo para un aprendizaje colaborativo.

6) Elaborar "estrategias de aprendizajes como núcleo central" de la estrategia didáctica que contengan un conjunto de acciones o algoritmos, a modo de una base orientadora para la acción, de modo que contribuya al desarrollo de habilidades en los estudiantes.

7) Resolver problemas modelados y/o modelar vinculados con el perfil de la carrera. Una forma de motivar el estudio de las matemáticas es mostrando su utilidad en problemas relacionados con el campo de la ingeniería.
8) Utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones como medio de enseñanza y herramienta de trabajo.
9) Evaluar el desarrollo formativo e instructivo adquirido en la disciplina.

Las estrategias de aprendizaje, se consideran el núcleo central de la estrategia didáctica. Claxton (1994:122) expone que: "Las estrategias de aprendizaje ofrecen una sucesión de opciones de "recursos" que se pueden utilizar para que el aprendizaje continúe o para volverlo a la vida cuando muere; y cada vez que este tipo de estrategia produce algo prometedor, este producto se puede devolver al ámbito específico del problema para trabajar con él con mayor precisión".

En muchos casos las estrategias están relacionadas con técnicas algorítmicas. En la enseñanza de las Matemáticas es común su uso por varias razones que expone con claridad Calvo (2001), aunque reflexiona muy particularmente sobre el uso abusivo de parte del profesorado de las mismas, proponiendo enfrentar la dimensión técnica a la conceptual de la actividad con una coordinación constante entre ambas.

El autor Pérez (2012) aborda la obra de Vigostky (1977) como plataforma para estimular estrategias de aprendizaje desarrolladoras considerando aportes de indudable valor los siguientes: el carácter mediatizado de las funciones psíquicas superiores, la importancia del contexto como elemento mediatizador del aprendizaje y el desarrollo, la idea de que el aprendizaje precede al desarrollo, ley de la doble formación de los procesos psicológicos, el concepto de Zona de Desarrollo Próximo y su planteamiento de los niveles de ayuda como basamento para la formación de estrategias de aprendizaje para el desarrollo, concepción de la personalidad de manera integral, desde un enfoque de proceso, resaltando la unidad cognitivo-afectivo en la personalidad y el carácter activo del sujeto.

Un factor importante en las estrategias de aprendizaje es la utilización del trabajo cooperativo (Dibut, 2012), pues favorece la autorregulación del aprendizaje, la asunción de responsabilidades, la participación de todos y todas, las habilidades comunicativas orales, la ayuda mutua, el respeto, la empatía entre otras. No es un trabajo fácil, pues no se produce solo colocando físicamente al alumnado en grupos, hay que estructurar la actividad de manera que promueva a contar con los demás para realizar la tarea, asignar responsabilidades al alumnado y combinar de manera equilibrada el trabajo individual con el trabajo en grupo. (Punset, 2011)

Las estrategias de aprendizaje que se proponen en este trabajo están en función de desarrollar determinadas habilidades que son: calcular límite de una función real de una variable real, demostrar continuidad (clasificar discontinuidades) y graficar funciones relacionadas con el desarrollo de las habilidades espaciales. Las que aparecen seguidamente:

Tabla 1

Estrategias de aprendizaje para desarrollar la habilidad calcular límite de una función real de una variable real:

ACCIONES	OPERACIONES
Clasificar el tipo de límite con respecto hacia donde tiende la variable independiente y/o el	Identificar si el límite es en un punto $x \to a$ o es en el infinito $x \to \pm\infty$. Identificar la función en: polinomiales, racionales, irracionales, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas, potenciales; las combinaciones de

tipo de función.	estas y en particular las funciones definidas por partes o por tramos.	
Analizar si la función es definida por partes o tramos.	Determinar los límites laterales. Comparar los resultados, si son iguales existe el límite de la función en ese punto o en el infinito.	
Analizar si se obtienen: Casos especiales: $\frac{L}{\infty}$, $\frac{L}{0}$ Formas indeterminadas: $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}\right)$	Evaluar la función en el punto (si $x \to a$) o analizar según el tipo de función, lo que sucede con los valores de la función cuando la variable independiente se hace infinitamente grande o infinitamente pequeña ($x \to \pm\infty$). Aplicar las propiedades de las operaciones aritméticas. Identificar la forma indeterminada, si es que se llega a alguna.	
Eliminar la indeterminación, en caso de que exista.	Si es $\frac{o}{o}$ realizar:	Transformaciones algebraicas-Límite fundamental trigonométrico-Infinitesimales equivalentes-Regla L´Hospital.
	Si es $\frac{\infty}{\infty}$ realizar:	Transformaciones algebraicas-Regla de Leibnitz-Infinitos equivalentes-Regla L´Hospital.
	Si es $0.\infty$ realizar:	Transformar en $\frac{o}{o}\ 0\ \frac{\infty}{\infty}\left(\frac{f}{1/g}\ 0\ \frac{g}{1/f}\right)$
	Si es $\infty-\infty$ realizar:	Transformar en $\frac{o}{o}\ 0\ \frac{\infty}{\infty}$
	Si es 1^{∞} realizar:	Transformar en $0.\infty$ y luego en $\frac{o}{o}\ 0\ \frac{\infty}{\infty}$ Límite Fundamental Algebraico (LFA)
	Si es 0^{0} realizar:	Transformar en $0.\infty$ y luego en $\frac{o}{o}\ 0\ \frac{\infty}{\infty}$
	Si es ∞^{0} realizar:	Transformar en $0.\infty$ y luego en $\frac{o}{o}\ 0\ \frac{\infty}{\infty}$
Calcular el límite.	Calcular y llegar a un resultado que puede ser: un número real “L” (según definición de límite este existe) o tender a $\pm\infty$ o simplemente no existe.	
Dar una respuesta de acuerdo a la convergencia.	Clasificar la función en: Convergente o divergente.	

Tabla 2

Estrategias de aprendizaje para desarrollar la habilidad demostrar continuidad (clasificar las discontinuidades).

ACCIONES	**OPERACIONES**
Determinar el valor de la función en el punto.	Sustituir el valor del punto en la función. Analizar si la función está definida en el punto.
Calcular el límite de la función en el punto.	Determinar los límites laterales, si es necesario. Comparar los resultados, en cuanto a su existencia e igualdad.
Comparar el valor de la función en el punto y el límite de la función en el punto.	Determinar la igualdad o desigualdad. Obtener un resultado: continua o discontinua.
Clasificar la discontinuidad, si existe.	Identificar: Si al menos uno de los límites laterales es ∞ - Si los límites laterales son desiguales -Si el valor de la función en el punto no existe o no coincide con el límite de la función en el punto.

Tabla 3

Estrategias de aprendizaje para el desarrollo de la habilidad graficar funciones relacionadas con el desarrollo de las habilidades espaciales.

ACCIONES	OPERACIONES
Identificar el lugar geométrico, dada su expresión analítica.	Determinar el lugar de identificación 2D o 3D. Determinar si la ecuación es cuadrática o lineal.
Discutir y trazar una superficie plana y cuádrica.	Determinar interceptos con los ejes coordenados. Determinarlas trazas sobre los planos coordenados. Simetría respecto a los planos coordenados, ejes de coordenadas y origen. Secciones planas paralelas a los planos coordenados. Extensión. Representación gráfica, en el primer octante.
Representar un sólido en el primer octante.	Determinar e identificar las superficies limitantes. Representar todas las superficies limitantes en un mismo sistema de coordenadas. Determinar las rectas y curvas de intersección de las superficies limitantes tomadas dos a dos. Delimitar el sólido y reforzar el contorno.
Representar las proyecciones en los planos coordenados.	Trazar rectas proyectantes paralelas entre si y perpendiculares al plano de proyección (planos coordenados) por los vértices o varios de los puntos de las curvas que limitan las superficies que forman el sólido. Unir los puntos obtenidos.

Es necesario conocer, comprender e interiorizar la estructura de las habilidades en acciones y operaciones y que para formarlas se deben realizar cara al desarrollo de una determinada actividad. En la formación de habilidades, desde el punto de vista psicológico se cuenta con una de las teorías de las más difundidas, la Teoría de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales (Galperin, 1986). Para Galperin la acción, de acuerdo a sus funciones, se puede dividir en: orientadora, ejecutora y de control. La primera se caracteriza por la utilización de un conjunto de condiciones que entran en el contenido de la Base Orientadora para la Acción (BOA). (Talízina, 1992)

Implementación de las estrategias de aprendizaje y valoración de la efectividad de las mismas.

Las estrategias de aprendizaje fueron aplicadas en el transcurso del año 2012, es decir, segundo semestre del Curso Escolar 2011-2012 y primer semestre del Curso Escolar 2012 – 2013. Para ello se explica a continuación la aplicación en cada uno de los casos y el análisis de los resultados obtenidos por habilidades.

Estrategia de aprendizaje para calcular límite de una función real de una variable real y estrategia de aprendizaje para demostrar continuidad de una función real de una variable real. Primeramente se tuvo en cuenta si los estudiantes, en este caso de la Carrera Ingeniaría Mecánica, dominan o no las acciones previstas para cada una de las habilidades (cálculo de límite y demostración de la continuidad) en dos momentos, antes de aplicar la estrategia y después de aplicada la misma, es decir, el diseño del experimento es del tipo antes - después. Como los datos son binarios, se selecciona para el análisis estadístico la Prueba de McNemar.

La prueba McNemar se utiliza normalmente en una situación de medidas repetidas, en la que la respuesta de cada sujeto se obtiene dos veces, una antes y otra después de que ocurra un evento especificado. La Prueba de McNemar determina si la tasa de respuesta inicial (antes del evento) es igual a la tasa de respuesta final (después del evento), por lo que esta prueba es útil para detectar cambios en las respuestas causadas por la intervención experimental en los diseños del tipo antes-después. Al aplicar la Prueba de McNemar se obtiene los resultados que se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 4

Resultados de la aplicación de la estrategia de aprendizaje para calcular límite.

Estadísticos de contraste[b]						
	A1_A y A1_D	A2_A y A2_D	A3_A y A3_D	A4_A y A4_D	A5_A y A5_D	A6_A y A6_D
N	25	25	25	25	25	25
Sig. exacta (bilateral)	,002[a]	,500[a]	,008[a]	,002[a]	,031[a]	,008[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.
b. Prueba de McNemar

Como puede observarse que solo la segunda acción no tiene un nivel de significación (nivel de significación $\alpha < 0{,}05$), pues las diferencias en el antes y después son mínimas, la mayoría de los estudiantes logran tanto en el antes como en el después identificar cuando una función está definida por partes, es un aspecto que se trabajó con fuerza en el Curso Introductorio. Sin embargo, el cálculo del límite para una función con esta característica sí tiene dificultades, que aún con la aplicación de la estrategia se mantiene los problemas lo que se refleja en la acción 2 de la estrategia de continuidad que no se obtiene significación pero a diferencia de la anterior, no logran el dominio de la acción en el antes ni en el después. El resto de las acciones observar que sus niveles están por debajo de 0,05. Al aplicar la Prueba de McNemar para demostrar continuidad se obtienen los resultados que se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 5

Resultados de la aplicación de la estrategia de aprendizaje para demostrar continuidad y discontinuidad (clasificar discontinuidades).

Estadísticos de contraste [b]				
	C_A1_A y C_A1_D	C_A2_A y C_A2_D	C_A3_A y C_A3_D	C_A4_A y C_A4_D
N	25	25	25	25
Sig. exacta (bilateral)	,063[a]	,125[a]	,000[a]	,004[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.
b. Prueba de McNemar

Las dos primeras acciones no alcanzan el nivel de significación, la acción 1 casi lo alcanza a pesar que es un contenido de la enseñanza media los alumnos tienden a obviarlo y la acción 2 ya fue comentada en el estrategia anterior.

Estrategia de aprendizaje para graficar funciones relacionadas con el desarrollo de las habilidades espaciales. Se aplica dicha estrategia en el Curso 11-12, a los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica. En este caso se toma como muestra a un total de 23 estudiantes. Se miden cada una de las operaciones que componen las acciones, en tres momentos diferentes antes, durante y después, obteniéndose los siguientes resultados.

En el caso de la acción, Identificar el Lugar Geométrico dada su expresión analítica, se mide en una evaluación escrita, correspondiente a una clase práctica, antes de conocer las operaciones de dicha acción, lo que arroja lo siguiente:

Tabla 6

Identificar en un 1er momento

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	2	14	60,9	60,9	60,9
	3	2	8,7	8,7	69,6
	4	4	17,4	17,4	87,0
	5	3	13,0	13,0	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Puede observarse que sólo 13% logra identificar correctamente los lugares geométricos dados, y que un 60,9%, tiene graves problemas en este sentido. Ya en la prueba parcial ocurre lo siguiente:

Tabla 7

Identificar en un 2do momento

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	2	7	30,4	30,4	30,4
	3	1	4,3	4,3	34,8
	4	7	30,4	30,4	65,2
	5	8	34,8	34,8	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

En este segundo momento donde los estudiantes ya conocen los detalles de la estrategia, los porcientos de identificación correcta se elevan, siendo significativa la disminución de los que desaprueban, un 30,4%.

En la prueba final (3er momento), último instrumento aplicado, los resultados son relevantes en esta acción. Pues solo el 4,3%, un solo estudiante, no logra este indicador como se refleja en la figura:

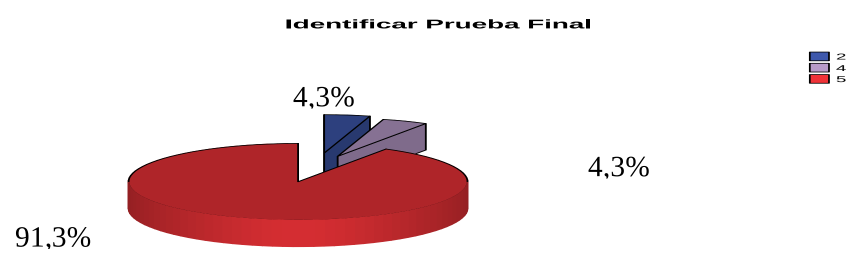


Figura 1: Resultados (tercer momento) de la acción Identificar el Lugar Geométrico.

También se aplica la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en el caso de la acción: *Representación de un sólido en el primer octante*, para analizar cómo se comportan algunas de las operaciones que en ella se incluyen. Esta prueba constituye una prueba no paramétrica pues no plantea hipótesis sobre parámetros, o de distribución libre porque no establecen supuestos demasiado exigentes sobre las poblaciones originales de donde se muestrea.

Tabla 8

Resultados de la Prueba Wilcoxon

	Representan todas las superficies SC pf - pe	Representar todas las intersecciones pf - pe	Logran obtener el sólido pf - pe
Z	-3,289(a)	-3,573(a)	-3,089(a)
Sig. asintót. (bilateral)	,001	,000	,002

a Basado en los rangos negativos.

b Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Según los resultados de la tabla anterior, y observando que la significación asintótica bilateral está basada en los rangos negativos, lo cual permite contrastar las hipótesis de homogeneidad de los momentos analizados contra la superioridad del tercer momento con respecto al primero, y como todos los valores mostrado son menores que 0,05 podemos rechazar el criterio de homogeneidad, por lo tanto los resultados en estos tres indicadores analizados son evidentemente significativos en el tercer momento que fue la prueba final.

Luego de arribar a las conclusiones parciales anteriores en cada uno de los acápites señalados, el grupo de trabajo llegó a las siguientes conclusiones generales, que constituyen a su vez las de este trabajo.

Conclusiones

1. Al aplicar el método comparativo para analizar los aspectos comunes y diferentes en los programas de la Disciplina Matemática Superior y/o General para las carreras de ingeniería se concluyó que: las carreras de mayor similitud en todos los aspectos comparados son las de Industrial e Informática. La disciplina en las distintas carreras difieren en el número de asignaturas y en la distribución de los contenidos, siendo más comunes los sistemas de conocimientos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica y Matemática I y II.
2. El diagnóstico aplicado a los alumnos de las Carreras de Ingeniería Industrial, Informática, Mecánica, Química y Agrónoma, permitió: conocer, analizar, evaluar, la realidad de los elementos lógicos del conocimiento en los estudiantes de ingeniería, relacionados con trabajo con funciones desde su definición, propiedades y representaciones gráficas, hasta incluir elementos de la Geometría Analítica.
3. El estudio del papel de las estrategias didácticas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática contribuyó a: diseñar de forma general una estrategia didáctica cuyo núcleo central sea un conjunto de estrategias de aprendizaje para el desarrollo de habilidades matemáticas de forma que los alumnos participen de forma activa en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática Superior y/o General.
4. Con la implementación de la estrategia didáctica, centrada en estrategias de aprendizaje para un conjunto de habilidades que deben desarrollar los alumnos en el primer año de las carreras de ingeniería, se obtuvieron los siguientes resultados: que existen diferencias significativas entre los resultados del antes y el después en cada una de las acciones de las habilidades “calcular”, “demostrar” y “representar gráficamente estrechamente

relacionada con las habilidades espaciales y que se logra un desarrollo cualitativamente superior en el desarrollo de las habilidades estudiadas.

El trabajo hasta aquí realizado permitirá particularizar en estrategias de aprendizaje en cada núcleo básico del sistema de conocimientos de esta disciplina para las carreras de ingeniería.

Referencias y bibliografía principales

Álvarez de Zayas, C. (1999). *La escuela en la vida*. La Habana: Pueblo y Educación.

Bravo Estévez, M. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas. Tesis doctoral, Universidad de Oviedo. (España).

Dibut Toledo, L., Bravo Estévez, M. & De León Rodríguez R. (2012). The study guide as a tool for the cooperative learning in the teaching-learning process of the Mahematics: a cuban experience for the engineering degree. Comunicación aceptada en ICME-12. Korea.

Calvo Pesce, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona. (España).

Claxton, G. (1994). *Educar mentes curiosas. El reto de la ciencia en la escuela*. [Londres]: Visor Distribuciones, S. A.

Galperin, P. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales intelectuales. En Galperin, P. *Antología de la psicología pedagógica y de las edades*. La Habana: Pueblo y Educación, 114-117.

García Garrido, J. L. (1991). *Fundamentos de educación comparada* (3era edición). Madrid: Dykinson.

González Tirado, R. & González Maura, V. Diagnósticos de necesidades y estrategias de formación docente en las universidades. Universidad Politécnica de Madrid y la Universidad de La Habana. Disponible en: www.rieoei.org/deloslectores/1889Maura.pdf [Consulta: 17/8/2011]

Massón Cruz, R. M. (2004). *Un punto de partida para la reflexión sobre la periodización en la Educación Comparada*. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona.

MES, Ministerio de Educación Superior (2007). Programa de la disciplina: Matemática General. Carrera: Ingeniería Industrial, Ingeniería Informática, Ingeniería Agrónoma, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Química. Plan de estudios D. La Habana.

Pacheco, M. (2008). Estrategias de enseñanza. Disponible en: http://portal.educar.org/foros/estrategias-de-ensenanza. [Consulta: 16/2/2012]

Pérez González, J. (2012). El enfoque histórico-cultural: plataforma para estimular estrategias de aprendizaje desarrolladoras. Disponible en: http://www.ilustrados.com/tema/12309/enfoque-historico-cultural-plataforma-para-estimular.html. [Consulta: 16/2/2012]

Punset, E. (2011). El trabajo cooperativo: una estrategia metodológica para desarrollar competencias. Disponible en: http://irmadel.wordpress.com/2011/01/18/el-trabajo-cooperativo-una-estrategia-metodologica-para-desarrollar-competencias/ [Consulta: 16/8/2011]

Rico Romero, L., Sierra, M. & Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En Rico Romero, L. y Madrid Fernández, D. (Eds.). *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares*. Madrid: Síntesis, S. A., 351-406.

Talízina, N. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. México: Ángeles.

Vigotsky, L. (1977b). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

Ser bom professor de matemática: a visão de professores iniciantes

Sandra Maria Nascimento de **Mattos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
smnmattos@gmail.com

Resumo

Este trabalho versa sobre sondagem inicial a respeito do que seja “bom professor” de matemática na visão de professores iniciantes. Esta sondagem foi realizada por meio de um survey não supervisionado, no Google docs direcionado à população existente em um curso de especialização à distância para professores de matemática, realizado pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro em convênio com o Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino da Universidade Federal Fluminense – Lante/UFF, Brasil. A análise dos dados aponta para a necessidade de o professor estabelecer um vínculo afetivo entre ele, o aluno e o conhecimento na busca de novas formas de ensino e de aprendizagem. Assinala para um conceito de “bom professor” como aquele que consegue trazer o aluno para seu lado e que atua trabalhando a compreensão empática e desenvolvendo o estímulo intelectual.

Palavras chave: bom professor, matemática, afetividade, ensino-aprendizagem, professores iniciantes

Introdução

O que seria um bom professor de matemática na visão dos professores em início de carreira? A busca por um perfil vem acompanhada pela necessidade de relacionar o sucesso dos alunos a qualidade da ação docente. Ter as qualidades e/ou as competências necessárias a uma profissão exige empenho e preparo. Entretanto, o que ocorre é a desvalorização e culpabilização dos professores pelo fracasso escolar. Os professores iniciantes são colocados em turmas com histórico de fracasso, ocasionando um choque de realidade (Tardif, 2002).

Atualmente, o professor de matemática é foco da atenção de governantes e das políticas públicas devido ao baixo desempenho dos alunos. Existe a ideia de que um “bom” professor de matemática conseguiria modificar esse panorama. Entretanto, as condições para tornar-se um “bom” professor estão relacionadas aos aspectos intrínsecos (representações, valores, afetividade, imagem de si e do outro, formas identitárias) e aos aspectos extrínsecos (salário, carga horária, materiais, recursos didáticos).

O que é ser “bom” professor? Quais os desafios que transformam um professor iniciante em “bom professor”? Para obter algumas respostas trazemos Cunha (1988, 1998, 2004, 2012); Rangel (1994); Ghiraldelli Jr (1997, 2010); Freire (1996) e Lowman (2007) estudiosos do assunto. Bem como, Marcelo Garcia (2008, 2009); Tardif (2002) sobre professores iniciantes. Além de consulta aos autores, na busca para alcançar um dos objetivos de pesquisa, foi realizado um survey não superviosinado via Google docs, através da aplicação de um questionário à população de professores de matemática que realizavam curso de especialização à distância em convênio afirmado entre a Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro – SEEDUC/RJ e o Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino da Universidade Federal Fluminense - Lante/UFF, Brasil.

O professor, durante a formação, constrói sua prática adquirida em meio a discursos de diferentes formadores e a variados autores que estes formadores lhe apresenta. Essa construção ocorre vinculada a sua vivência pessoal, a sua experiência profissional e aquilo que o professor traz de sua cultura, seus valores, suas crenças e seus costumes oriundos da família e da sociedade que o circunda. Desse modo, o professor constitui suas representações do que seja bom professor.

Professores de matemática iniciantes: a compreensão de seu papel para a aprendizagem

Quem seria um professor iniciante, ou seja, em início de carreira? Diferentes autores estudam este assunto e sabem que tornar-se professor é um processo longo. O início da docência compreende os primeiros anos de profissão, os quais o professor ainda está fazendo a transição de aluno a professor. É uma etapa cheia de tensões, em que ocorrem múltiplas aprendizagens e aquisição de conhecimento profissional para que o professor consiga sobreviver na profissão escolhida. É um período importante e ao mesmo tempo, difícil, (Gabardo & Hobold, 2011) pelos desafios encontrados e relacionamentos desenvolvidos em sala de aula.

Segundo Feiman (apud Marcelo Garcia, 1999) compreende a terceira fase da profissão docente, denominada Iniciação, abarcando os primeiros anos de exercício profissional, os quais se configuram uma fase marcante na vida do professor. Para Huberman (2000) no contato inicial com a sala de aula ocorrem as fases de sobrevivência ou choque do real e da descoberta. Na fase da sobrevivência ocorre a confrontação inicial com a complexidade da situação profissional e na fase da descoberta ocorre o entusiasmo inicial, a experimentação e a exaltação por estar em uma profissão.

Dos professores que participaram da pesquisa, 25% têm de 0 a 5 anos e 36% têm de 6 a 10 anos na profissão, o que significa que estes professores estão aprendendo o ofício e socializando-se com os alunos. Para os professores de matemática essa fase inicial é complicada, pois já vem carregada por crenças e valores a respeito do fracasso dos alunos, da dificuldade dos conteúdos e da deficiente relação entre professor-aluno-conhecimento. Os próprios professores já trazem esse discurso de dificuldade de aprendizagem dos alunos. De acordo com P2 é preciso despertar “no aluno o interesse pela matemática, que é um grande tabu hoje em dia” e P60 é preciso “ter percepção de encontrar a melhor forma de ensiná-lo detectando as dificuldades dos alunos para sanar o máximo de dúvidas possível".

De acordo com Marcelo Garcia (2008, p.11-12) "Os professores iniciantes necessitam possuir um conjunto de ideias e habilidades críticas assim como a capacidade de refletir, avaliar e aprender sobre seu ensino, de tal forma que melhorem continuamente como docentes. Isso é possível se o conhecimento essencial para os professores iniciantes possa se organizar, representar e comunicar de forma que eles permitam aos alunos uma compreensão mais profunda do conteúdo que aprendem". Segundo P1 para melhorar como docente é necessário "Em primeiro lugar conhecer o que se ensina, buscando sempre formas para apresentação dos conteúdos interligando-os interdisciplinarmente. Saber ouvir, ser uma pessoa atenciosa e atenta as dificuldades do grupo e as individuais. Buscar no próprio grupo de alunos formas de sanar e alcançar o entendimento daqueles que apresentam qualquer dificuldade de aprendizagem ou interesse".

Aprender a ensinar é um processo contínuo na vida profissional de qualquer professor. Neste processo o professor adquire competências, habilidades e atitudes inerentes a profissão. Ele traz uma cultura escolar adquirida em seu processo como aluno, que envolve valores, conhecimentos e modelos.

"Bom professor" por diferentes autores

Qual seria o perfil de professor no século XXI? Se, em cada época existiu um perfil ideal de professor, agora mais ainda é crucial identificá-lo. Aumentam a preocupação com a formação inicial e continuada do professor. Pesquisas avolumam-se sobre a prática docente, sua relação com a teoria e a complexidade do cotidiano escolar. Emergem ideias do professor como prático reflexivo, animador, pesquisador, reflexivo-pesquisador, analítico-simbólico. Um "bom professor" para uma época não o será para outra. Um "bom professor" traz características inerentes ao seu momento cultural e sócio-histórico.

Monteiro e Martins (2009) pesquisaram sobre o que seria bom professor no Brasil em diferentes épocas. Suas descobertas mostraram que um bom professor, no Brasil colônia e no Brasil império, estava vinculado a bons prognósticos morais. Já na época republicana, ser bom professor estava vinculado a um perfil cívico-patriótico, que obedecia aos critérios estabelecidos, seguindo fielmente os conteúdos pré-determinados.

Ghiraldelli Jr (1997) é outro pesquisador que estudou o bom professor em diferentes épocas. Sua proposta é ter uma compreensão histórico-filosófica para olhar a questão do bom professor, separando este conceito segundo o paradigma educacional vigente em cada época. Assim, segundo o autor, no discurso pedagógico humanista um bom professor estava vinculado a aquele que tornaria a criança em um autêntico indivíduo. Para o discurso pedagógico da sociedade do trabalho, o bom professor estava relacionado a aquele que proporcionaria a inserção social do indivíduo, integrando-o no mundo para transformar-se em trabalhador, em um profissional.

De acordo com Ghiraldelli Jr (1997) o discurso pedagógico tecnicista considerava como bom professor aquele que tinha a capacidade de munir o indivíduo das técnicas necessárias a sua sobrevivência. Na modernidade o bom professor é aquele que sabe lidar com as inovações tecnológicas, consigo mesmo e consegue educar o indivíduo na e para a sensibilidade.

Cunha (1988) é outra autora que trabalhou o conceito de bom professor. Para ela este conceito é valorativo, porque dá um valor a alguém, e ideológico, porque representa uma ideia que foi construída socialmente sobre o professor, determinado em um tempo e em um lugar no decorrer da história humana. Portanto, o bom professor está em devir, está em um vir a ser constante. É determinado pelas atribuições que lhe são impostas e por aquilo que ele se apropria pelos atos de pertencimento.

A autora (1988, 1998) afirma que a ideia de bom professor é variável, porque depende do ponto de vista de quem está conceituando esse bom professor. Pode passar pela vocação, pela trajetória pessoal, pela influência de outros professores, pela experiência ou pela formação pedagógica. Tudo está direcionado ao fazer docente e as relações estabelecidas entre professor-aluno-conhecimento. Segunda a autora há um peso grande sobre a relação teoria-prática e a coerência entre o que falam e praticam em sala de aula para ser bom professor, que está imbricado com o dever-ser, estipulado socialmente.

Para Rangel (1994) o bom professor é aquele que ensina o conhecimento, estimula o raciocínio crítico e dá valor ao direito político do cidadão a ser e viver com dignidade. Segundo a autora (1994) a representação das falas de quem define o bom professor se apresentam em imagens, conceitos e afirmações consolidadas ao longo de um processo de formação profissional. Para a autora (1994) o conceito de bom professor caminha conectado ao desafio por que passa o sistema educativo.

Para Labaree (apud Nóvoa, 2009) o conceito de bom professor está interligado com tornar-se não-indispensável, ou seja, tem a ver com o professor que consegue proporcionar aos seus alunos aprenderem por si mesmos. Que características teriam este professor que ao ensinar se dispensável? Este bom professor seria aquele que faz do seu aluno autônomo, que parte de significados dos alunos e seus próprios para chegar ao conhecimento. Este professor possibilita ao aluno construir seu próprio conhecimento.

Lowman (2007) outro autor que estudou sobre o bom professor, elaborou um modelo bidimensional, em que a qualidade de ensino é a resultante da habilidade do professor em criar estímulo intelectual e empatia interpessoal com os alunos. O que corrobora com Freire (1996, p.86) quando afirma que: "o bom professor é o que consegue, enquanto fala trazer o aluno até a intimidade do movimento do seu pensamento. [...] Seus alunos acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas".

Bons professores se fazem no caminhar entre o ensinar e o aprender, o que corrobora com Castro (2009, p.30) quando afirma que "bons professores eletrizam seus alunos com narrativas interessantes ou curiosas, carregando nas costas as lições que querem ensinar". Mais ainda quando se trata da matemática, porque os alunos precisam de contextualização para absorver as abstrações. É Castro que afirma "preparar aulas é buscar as boas narrativas, exemplos e exercícios interessantes, reinterpretando e ajustando (é aí que entra a criatividade)."

Sobre todos esses autores recai a dimensão cognitiva e a dimensão afetiva na visão sobre o bom professor. Epstein (apud Lowman, 2007) afirma que grandes professores, os ditos bons, têm em comum o amor por sua matéria. Esse amor proporciona satisfação em despertar este mesmo amor em seus alunos pelo o que lhe é ensinado. Portanto, não pode haver separação entre razão e emoção, pois para Wallon (2008, p.17) "as ideias, o conhecimento, que geralmente parecem ser ao mesmo tempo o resultado e a condição da atividade intelectual, são apenas uma das suas possibilidades".

Em outro texto Ghiraldelli Jr (2010) propõe mandamentos para o bom professor. Dentre estes mandamentos está o domínio sobre o que se pretende ensinar, ou seja, sobre aquilo que deva ser aprendido pelo aluno. Além disso, o bom professor precisa ter a capacidade de se colocar no lugar do aluno, saber convencer, ser razoável, ter percepção de si mesmo e compreender a profissão docente. O bom professor é um leitor consciente, um desbravador criativo, capaz de fazer do aprendizado uma tarefa coletiva, desafiadora, pelo desenvolvimento da curiosidade, da criatividade e da imaginação.

Bom professor por professores de matemática

Foi disponibilizado a 200 professores de matemática da rede estadual de educação do estado do Rio de Janeiro um questionário através do Google docs, para compreender o que os mesmos entendiam ser "bom professor. Os participantes do survey foram escolhidos por estar realizando curso de especialização à distância em convênio afirmado entre a Secretaria de Estado de Educação – SEEDUC/RJ e o Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino da Universidade Federal Fluminense - Lante/UFF. O retorno foi de 30% do total dos participantes, ou seja, 60 devoluções. A titulo de identificação desses professores foram utilizadas as referências de P1 a P60.

Para os professores as habilidades necessárias ao bom professor de matemática são: despertar o prazer no aluno pela disciplina (70%), estimular a participação dos alunos nas aulas e ensinar o conteúdo matemático de acordo com a realidade ao aluno (50%). Os professores podiam escolher mais de uma opção. Veja no gráfico abaixo:

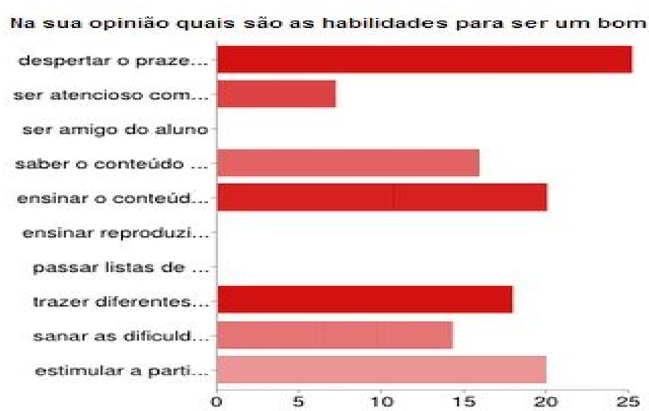


Gráfico 1: Habilidades para ser bom professor

Para P2 o bom professor precisa "planejar a aula com antecedência para ter domínio do assunto a ser abordado, despertando no aluno o interesse pela matemática, que é um grande tabu hoje em dia". Segundo P7 "Ser um bom professor é despertar o interesse do aluno pela disciplina, fazer com que ele compreenda o conteúdo de forma significativa e consiga aplicá-lo em outras áreas de conhecimento". P11 afirma que ser bom professor "é fazer o despertar do aluno, motivando-o sempre que possível". Já P13 declara que o bom professor deve "[...] criar oportunidades para o aluno aprender com todas as ferramentas de ensino. Além da competência, habilidade interpessoal, equilíbrio emocional, tem que ter a consciência de que mais importante do que o desenvolvimento cognitivo é o desenvolvimento humano e que o respeito às diferenças está acima de toda pedagogia".

Nas respostas fica evidente que o professor está preocupado com o fazer aprender por meio do aprender a aprender. Prazer e participação aliados ao conteúdo contextualizado proporcionam sintonia entre o professor, o aluno e o conhecimento e corrobora com Rangel (1994, p.30) quando afirma que o professor foca o aluno "[...] porque vê, no aluno, uma pessoa que espera dele a compreensão, a estima, a paciência e o companheirismo que têm os amigos" e com Freire (1996, p.86) quando afirma que "[...] O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, [...] é dialógica, aberta, curiosa, indagadora [...]".

Com relação às qualidades de um bom professor, eles responderam serem aquelas pertinentes ao desenvolvimento da aula em si, tais como planejar (51%) e estabelecer objetivos a alcançar (36%). O ficou constatado nas respostas de P2 "Planejar a aula com antecedência para ter domínio do assunto a ser abordado, despertando no aluno o interesse pela matemática, que é um grande tabu hoje em dia. Estabelecer objetivos a alcançar e procurando fazer muitos exercícios, para fixação de conteúdo" e P39 "Planejar, ou seja, ter objetivos, meios e avaliações".

Bem como, aquelas que dizem respeito às interações entre ele e seus alunos, tais como estabelecer o diálogo (44%), ser paciente (31%) e ser justo e imparcial (28%). Afirmado na resposta de P43 "O bom professor é paciente, justo, imparcial e incentiva os alunos a participarem ativamente das aulas. Além disso, busca conhecer sua clientela e adaptar os conteúdos a realidade de seus alunos."

Como demonstrado no gráfico abaixo:

Gráfico 2: Qualidades de um bom professor

O que fica constatado que o professor de matemática está preocupado em criar sua aula, em torná-la atraente, dialética e dialógica. Isto devido ao entendimento que o aluno dá mais importância, segundo Cunha (2010, p.44), "[...] às qualidades humanas e relacionais do docente do que às qualidades ligadas à técnica pedagógica [...] e a características relacionadas com a moderação, a paciência e a empatia [...]". Esse professor olha o aluno, seu interesse e ajuda-o, despertando sua curiosidade frente aos novos conhecimentos de matemática. Esta atitude do professor proporciona, no aluno, um estímulo positivo com relação à própria disciplina, que pode libertá-lo da fobia ou ansiedade em relação à matemática.

Em relação às competências necessárias ao bom professor, 73% dos professores afirmam que ter domínio sobre o que ensina é imprescindível, corroborando com Ghiraldelli Jr (2010) em seu primeiro mandamento e com Freire (1996, p. 92) quando afirma: "[...]. O professor que não leve a sério sua formação, que não estude, que não se esforce para estar à altura de sua tarefa não tem força moral para coordenar as atividades de sua classe". O professor que tem o domínio sobre o que ensina consegue criar, transformar e eletrizar o conteúdo matemático, tornando-o acessível ao aluno, permitindo-o aprender com prazer. A esse respeito Cunha (2010, p.41) afirma "que o docente deva conhecer profundamente a matéria de ensino, transmitindo-a, criando assim situações que permitam aos alunos apropriar-se dela de forma eficaz".

Como evidenciado no gráfico a seguir:

Gráfico 3: Competências do bom professor

Dentre as competências citadas, ser criativo (52%), ser mediador (50%) e ser pesquisador (40%) também tiveram destaque entre os professores. P51 afirma que "ser um bom professor é ter um bom domínio do conteúdo, ser um pesquisador e mediador, procurar sempre metodologias alternativas para as suas aulas".

Atualmente o professor de matemática busca novas alternativas para inovar e transformar suas aulas, tornando-as mais prazerosa. Essas alternativas envolvem implicações afetivas, pois a qualidade das mediações desenvolvidas pelo professor faz com que o aluno aprenda a gostar de matemática. Esse professor gosta do que faz. É pela mediação que o professor passa sua intenção de ensinar, ressignificando o conteúdo matemático de forma criativa e favorecendo a integração do mundo interior do aluno com o mundo exterior. Dessa maneira, o aluno consegue aprender pelo desenvolvimento de suas capacidades.

Alguns professores expressaram em suas respostas a necessidade de integração e de envolvimento político entre os pares. Ficou claro que muitos professores estão olhando seus alunos sob outro ponto de vista, acredita que o aluno aprende, que tem potencialidades e exerce sua atividade em um meio de harmonia e confiança. Para P31:

> ser um bom professor é preciso, ainda, que ele seja um eterno estudioso da sua própria disciplina e de suas tendências, interessado nos elementos que as contextualiza e a que estimulem ao aluno a se aperfeiçoar como cidadão responsável, comunicativo e expressivo, capaz de interpretar e atuar autonomamente na sociedade que está inserido. Um bom professor é também pesquisador, aluno e educador integralmente, bem relacionado e que está disposto a fazer projetos interdisciplinares/ trabalhos colaborativos com alunos e/ou professores.

Segundo P27 ser bom professor é:

> ser um mediador entre o ensinar e o aprender contribuindo para a formação de um cidadão crítico, ativo e capaz de fazer suas próprias descobertas. Temos muitos entraves que dificultam a nossa missão. Por

> isso devemos gostar, antes de tudo, da nossa profissão. Caso contrário, por mais esforço que se faça, nada surtirá o efeito que desejamos. Ser um bom professor é respeitar a individualidade e valorizar a capacidade crítica de cada um, é estar procurando se atualizar sempre que puder promovendo assim um ensino de qualidade para a sociedade.

De acordo com P51: "É conseguir trabalhar com baixos salários, sem estímulos dados pelos empregadores, sem materiais básicos para ensinar e, mesmo assim, conseguir ânimo para educar muitos brasileiros para transformar a sociedade e fazer dela um lugar melhor para todas as classes!"

Matemática e afetividade: transformando práticas, subvertendo aprendizagens

Assim como Cunha (2004) afirma que a relação professor-aluno é de capital importância para o desenvolvimento pedagógico, é importante afirmar que está relação é desenvolvida em uma relação afetiva. Para Davydov (apud Libâneo, 2004, p.14) mais importante que o pensamento é a emoção que este desencadeia para a pessoa decidir e agir. Segundo esse autor "[...] as emoções são muito mais fundamentais do que os pensamentos, elas são a base para todas as diferentes tarefas que um homem estabelece para si mesmo, incluindo as tarefas do pensar". Portanto, o gostar de matemática relaciona-se com o modo que desenvolve sua aula, com a atitude que o professor desempenha frente ao aprendizado do aluno.

Wallon (2007, p.93) afirma que "[...] pela emoção com a qual vibrou, o indivíduo encontra-se virtualmente em sintonia com qualquer outro no qual se produziriam as mesmas reações". Desse modo, os processos afetivos, dos quais a emoção é um estado, são todos os estados que desencadeiam sensações de prazer ou desprazer, ligadas as tonalidades agradáveis e desagradáveis. Saber ouvir (38%) e se colocar no lugar do aluno (35%) também são competências apontadas pelos professores, o que permite concluir que ele está preocupado em desenvolver no aluno tudo aquilo que ele consegue.

Esse professor sabe valorizar as relações interpessoais entre ele, o aluno e o conhecimento. Para ele há a necessidade de encontrar um ponto de equilíbrio neste tripé, pela inovação e pelo acolhimento e reconhecimento das dificuldades do aluno diante da matemática, corroborando com Lowman (2007) que afirma que um bom professor precisa desenvolver o estímulo intelectual e fortalecer a empatia interpessoal. É a compreensão empática, em que o professor consegue se colocar no lugar do aluno, compreender as reações do aluno e perceber como ele faz para aprender. Desse modo, o professor aceita o aluno como ele é, como pessoa, com sentimentos e opiniões que podem ser divergentes.

Segundo Paro o aluno "só aprende se quiser" e isso tem como conseqüência que "o papel por excelência do professor é propiciar condições para que o aluno queira aprender" (PARO, 2012, p.600). De acordo com o autor só se consegue essas condições com por meio de uma relação de diálogo entre ambos, que é ao mesmo tempo política. Desse modo, o professor como pessoa relaciona-se com pessoas e para realizar seu trabalho docente "o professor deve desejar o aprendizado do aluno, esse é o seu motivo para ensinar" (PARO, 2012, p.600).

Com a publicação dos PCNs (1997) houve uma maior preocupação com as variáveis afetivas, em sua parte introdutória (1997, p.98) afirma que: "os aspectos emocionais e afetivos são tão importantes quanto os cognitivos, principalmente para os alunos prejudicados por fracassos escolares ou que não estejam interessados no que a escola pode oferecer". Não há interesse nem aprendizagem quando o educando não está imbuído pelo espírito de aprender.

Tanta preocupação, tanto pelos autores como pelas políticas públicas, justifica o interesse dos professores de matemática em ouvir seus alunos, em dar atenção aquilo que ele traz e tentar contextutalizar os conceitos matemáticos voltado para o vivido. De acordo com Wallon (2007, 2008) a afetividade é contagiosa e portanto, um clima emocional prazeroso na sala de aula favorece a aprendizagem. Assim, o que o aluno ganha com um clima emocional de prazer vai repercutir em seu cognitivo, possibilitando sua aprendizagem. Passar em gestos, atitudes e posturas que o aluno consegue aprender é encorajar resultados favoráveis.

Considerações finais

Nas análises realizadas sobre as respostas obtidas dos professores de matemática a pesquisa aponta para a necessidade de o professor estabelecer um vínculo afetivo entre ele, o aluno e o conhecimento. Aponta, também, para a busca de novas formas de ensino e de aprendizagem, em que é trabalhado o estímulo intelectual por meio da valorização do que o aluno traz, da experiência já desenvolvida com a matemática e com suas dificuldades e possibilidades diante do conteúdo abordado. Bem como, assinala para o estabelecimento da compreensão empática desenvolvida pela escuta empática, da compreensão de como esse aluno é e no entendimento de suas opiniões e sentimentos para com a matemática.

Diante dos dados acima apresentados cabe observar que o professor de matemática para ser “bom professor” precisa estar balizado por experiências práticas em sala de aula para compreender seu aluno e sua relação com o conhecimento matemático. Necessita estar em constante formação para adquirir novos meios para ensinar e aprender, proporcionando a troca dialógica e dialética para uma aprendizagem mais significativa.

Em suma, um bom professor é aquele que sabe “seduzir” o aluno, ou seja, que consegue “trazer para o seu lado” (Codo & Gazzotti, 2000, p. 50) e ao mesmo tempo sensibiliza e é sensibilizado pelas relações entre aluno-professor-conhecimento. É o “catalisador” da motivação, da cooperação e da aprendizagem, permitindo ao aluno caminhar e construir conhecimentos. É aquele que ouve empaticamente e se faz empático, que aprende enquanto ensina e enquanto ensina permite ao aluno aprender.

Referências Bibliográficas

Castro, C. de M. (2009). Educar é contar histórias. *Revista Veja*. Ed. 2116, ano 42, 23. p.30. Recuperado de www.veja.com.br/acervodigital.

Codo, W. & Gazzotti, A. A. (2000). Trabalho e carinho. En Codo, W. (Ed.). *Educação, carinho e trabalho*. 2 ed. Rio de Janeiro: Vozes. 48-59.

Cunha, A. C. (2010). Representação do “bom” professor: o “bom” professor em geral e o “bom” professor de educação física em particular. *Educação em Revista*. 11(2), 41-52. Recuperado de

http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/educacaoemrevista/article/view/2320.

Cunha, M. I. (1988). *A prática pedagógica do “bom professor”: influências na sua atuação*. (Tese inédita de doutorado). UNICAMP/FE, Campinas, BR.

Cunha, M. I. (1998). *O bom professor e sua prática*. Rio de Janeiro: Papirus.

Cunha, M.I. (2001). A relação professor-aluno. In: Veiga, I.P.A. (coord.). 21 ed. rev. e atual. SP: Papirus, 2004.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Gabardo, C.V & Hobold, M.S. (2011). Início da docência: investigando professores do ensino fundamental. *Formação Docente*. 3(5), 85-97. Recuperado de http://formacaodocente.autenticaeditora.com.br.

Ghiraldelli Jr, P. (1997). O que é um "bom professor"? O professor no discurso pedagógico no mundo moderno e contemporâneo. *Educação e Filosofia*. 11(21 e 22), 245-262.

Ghiraldelli Jr, P. (2010). *Os dez mandamentos do bom professor*. Recuperado de http://ghiraldelli.pro.br/2010/07/os-dez-mandamentos-do-bom-professor/.

Huberman, M. (2000). O ciclo de vida profissional dos professores. En: Nóvoa, A. (org.). *Vidas de professores*. Porto: Porto.

Libâneo, J.C. (2004). A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. *Revista Brasileira de Educação*, Anped, Rio de Janeiro. 27, 5-25. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a01.pdf.

Lowman, J. (2007). *Dominando as técnicas de ensino*. Trad. Harue Ohara Avritscher. Cons. Téc. Ilan Avrichir, Marcos Amatucci. São Paulo: Atlas.

Marcelo Garcia, C. Políticas de inserción a la docência: de eslabón perdido a puente para el desarrolo profesional decentee. (2008). En Marcelo Garcia, C. (coord.). *Profesores principiantes e inserción a la docência*. 20, 7-57. Octaedro: Barcelona.

Marcelo Garcia, C. (1999). Estudio sobre estrategias de inserción profesional en Europa. *Revista Iberoamericana de Educación*. 19, 101-143. Recuperado de http://www.rieoei.org/oeivirt/rie19a03.PDF..

Monteiro, R.G. e Martins, P.L.O. (2009). Quem é o bom professor para estudantes do ensino médio? IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. *Anais*... PUCPR. Paraná. 1694-1703. Recuperado de

http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/2680_1214.pdf.

Nóvoa, A. (2009). Os professores e o "novo" espaço público da educação. En Tardif, M. e Lessard, C. *O ofício de professor: história, perspectivas e desafios internacionais*. Trad. Lucy Magalhães. 3 ed. Capítulo 11, 217-233. Rio de Janeiro: Vozes.

Paro, V.H. (2012). Trabalho docente na escola fundamental: questões candentes. *Cadernos de Pesquisa*. Outros Temas. 42(146), 586-611. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/cp/v42n146/14.pdf.

Rangel, M. (1994). *Representações e reflexões sobre o bom professor*. 7 ed. Rio de Janeiro: Vozes.

Wallon, H. (2008). *Do ato ao pensamento: ensaio de psicologia comparada*. Trad. Gentil Avelino Titton. Rio de Janeiro: Vozes. (Coleção Textos Fundantes de Educação).

Wallon, H. (2007). *A criança turbulenta: estudo sobre os retardamentos e as anomalias do desenvolvimento motor e mental*. Trad. Gentil Avelino Titton. Rio de J Janeiro: Vozes.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Tiempo Para Aprender Matemática En Escuelas Públicas Y Privadas: Comprendiendo Las Diferencias En Aspectos Del Curriculum Implementado En La República Dominicana

Renzo Roncagliolo Jones
Programa Escuelas Efectivas (PEE)
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
Santiago de los Caballeros, República Dominicana
rroncagliolo@msn.com

Resumen

Se informa acerca de la investigación doctoral *Tiempo para Aprender Matemática en Escuelas Públicas y Privadas: Comprendiendo las Diferencias en Aspectos del Currículo Implementado en La República Dominicana*. Esta explora las diferencias entre el currículo intencional e implementado con respecto a la oportunidad de aprendizaje en la República Dominica que se ofrecen en las escuelas públicas y privadas con respecto a la uso del tiempo, a partir de una muestra estratificada con probabilidad proporcional en 198 escuelas a partir de los datos del Consorcio de Evaluación e Investigación Educativa (CEIE 2005-2007.

Palabras clave: educación, matemática, evaluación, docencia, República Dominicana.

Tiempo para Aprender Matemática en Escuelas Públicas y privadas: Comprendiendo las Diferencias en Aspectos del Currículo Implementados en la República Dominicana.

1. Introducción

Esta comunicación forma parte de mi tesis de doctorado, *Tiempo para Aprender Matemática en Escuelas Públicas y Privadas: Comprendiendo las Diferencias en Aspectos del Currículo Implementado en La República Dominicana*, la cual se desarrolló en el contexto de la evaluación y monitoreo del impacto de proyectos educativos apoyados por la Agencia Estadounidense para el Desarrollo Internacional (USAID) en la República Dominicana desarrollado por el *Consorcio de Evaluación e Investigación Educativa* (2005-2007) en la República Dominicana.

Tiempo para Aprender Matemática en Escuelas Públicas y Privadas: Comprendiendo las Diferencias en Aspectos del Currículo Implementado en La República Dominicana es un estudio longitudinal a partir de una muestra nacional representativa de escuelas en la República Dominicana, utilizando Modelos Multiniveles (HLM) y otros métodos estadísticos multivariados para investigar las relaciones entre prácticas educativas de los profesores y el aprendizaje de los estudiantes de cuarto a sexto grado; ilustrando también algunas de las ventajas de aplicar el análisis multinivel en el estudio de data caracterizada por su organización jerarquizada y en la investigación de oportunidades de aprendizaje.

2. Planteamiento del Problema

Este estudio tiene como objetivo explorar las diferencias entre el currículo intencional e implementado en las escuelas públicas y privadas en los grados cuarto, quinto y sexto, con respecto al uso del tiempo en las actividades y contenidos de matemática.

Dos preguntas de investigación principales se estudian: a) ¿Existen diferencias significativas en el currículo implementado en las aulas dominicanas para aprender matemáticas en cuarto, quinto y sexto grado de las escuelas públicas y privada en la República Dominicana con respecto a la uso del tiempo? b) Si, de hecho, estas diferencias existen, ¿ayudan a explicar las diferencias en el desempeño en matemáticas los estudiantes entre las instituciones públicas y privadas?

En esta investigación se explora cómo son las diferencias en la oportunidad de aprendizaje de las niñas y niños de la República Dominica que ofrecen en las escuelas públicas en comparación con las que se ofrecen a sus pares en las escuelas privadas con respecto a la uso del tiempo, el acreditadas y privado en relación con la específica tiempo para aprender las variables. El *Consorcio de Investigación de Evaluación de la Educación* recogió datos durante el periodo del 2005-2007 a partir de una muestra estratificada con probabilidad proporcional al tamaño de los estratos público rurales, público urbanos y privados, utilizando procedimientos de modelaje multinivel en 198 escuelas durante cuatro años.

3. Análisis de los datos

Los datos de esta investigación corresponden al estudio longitudinal realizado por el Consorcio de Evaluación e Investigación Educativa entre el año 2005 y 2007.

Para la primera pregunta el análisis se caracterizó por análisis de datos exploratorio (EDA; Jambu 1991 and Tukey 1977) y comparación de medias. Para la segunda pregunta, se utilizó el análisis multinivel (Hierarchical Linear Modeling, HLM, Bryk & Raundenbush 1992).

4. Resultados Generales

1. Existe una brecha sustancial entre el currículo implementado y el currículo logrado en las aulas dominicanas.
2. Hay diferencias en las oportunidades de aprendizaje con respecto a específicas actividades y contenidos de matemática en escuelas públicas rurales, públicas urbanas, y privadas en 4^{to}, 5^{to} y 6^{to} grades
3. Las mayores diferencias fueron encontradas más en la comparación entre escuelas públicas y escuelas privadas en 5^{to} grado que en 4^{to} y 6^{to} grado, especialmente en: a) *usando instrumentos de medición, desempeñando procedimientos de rutina, b) desarrollando procedimientos para resolver y calcular problemas, y c) demostrando el uso correcto de la terminología.*
4. Las principales diferencias están más concentradas en 5^{to} y 6^{to} grado, en operaciones básicas tales como a) *sumando sin reagrupar, b) sumando reagrupando, c) realizando restas sin reagrupar, d) realizando sustracciones reagrupando, e)multiplicando número de un sólo dígito, f) construyendo tablas de multiplicar, f) dividiendo número de un sólo dígitos, y g) ordenando y comparando fracciones.*

5. Variables como estrato público y privado, así como el estatus socioeconómico del aula resultaron estadísticamente significativas en 4to, 5to, y 6to grado:
6. La variable *SobreEdadNormal* se encontró estadísticamente significativa en 5^{to} y 6^{to} grado: Estudiantes dominicanos de mayor edad (estudiantes que tienen dos o más años por encima de la edad normal para su grado) desempeñan por debajo que aquellos estudiantes que tiene la edad requerida para 5^{to} y 6^{to} grado.

5. Conclusiones

Con respecto a las diferencias entre escuelas públicas y escuelas privadas:

Los resultados de esta investigación retan el sistema educativo nacional dominicano a encontrar dos maneras de reducir dos críticas brechas en el aprendizaje de la matemática: a) La brecha entre las intenciones políticas y el logro actual de los estudiantes dominicanos y b) La brecha entre los resultados de las escuelas públicas en privadas.

Con respecto a la Sobre Edad:

Este estudio ha mostrado que los estudiantes mayores se desempeñan por debajo que los estudiantes en la edad normal en 5^{to} y 6^{to} grado en matemática. Esto implica que las políticas educativas en la República Dominicana deben reconsiderar: a) la práctica de concentrar más estudiantes con sobre edad en una misma aula, y b) utilizar estudiantes con sobre edad como recursos para la enseñanza.

Con respecto a los Recursos Educativos:

Los resultados en esta investigación retan el sistema educativo nacional dominicano a encontrar mejores maneras de hacer una distribución equitativa de los recursos educativos a través de todas las aulas dominicanas. Los recursos educativos deben ser distribuidos en todas las escuelas dominicanas en la misma manera y sin tomar en cuenta las diferencias en el tipo de escuela (pública, privada, rural o urbana).

Referencias y Bibliografía

Álvarez Benjamín. (2004). La Educación en la República Dominicana: Logros y Desafíos. Washington: Banco Interamericano de Desarrollo.

Byrk, Anthony S. and Stephen W. Raudenbush. (2001). Hierarchical Lineal Models: Application and Data Analysis. Methods (2nd Edition). Newbury Park, CA: SAGE Publications.

Fuller, Bruce. (1987). What School Factor Raise Achievement in the Third World? Review of Educational Research 57 (3), 255-292.

Gonzáles, Sarah, Dulce Rodríguez, y Eduardo Luna. (2001). Matemática 8to grado. Santo Domingo: Corripio.

Jimenez, Emmanuel; Marlaine E. Lockheed; Eduardo Luna; and Vicente Paqueo. (1991). School Effects and Costs for Private and Public Schools in Dominican Republic. Washington: World Bank.

Jambu, M.: 1991, Exploratory and Multivariate Data Analysis. London: Academic Press

Lockheed, M. & Komenan, A. (1989). Teaching quality and students' achievement in Africa: The case of Nigeria and Swaziland. Teaching and Teacher Education, 5, 93-113.

Luna, Eduardo; Sarah Gonzales; and Richard G. Wolfe.(1990). The underdevelopment of educational achievement: mathematics achievement in the Dominican Republic eight grade. Journal of Curriculum Studies 22 (4), 361-376.

González, S., Luna, E. Yunén, R. (1985). Análisis del currículum propuesto en matemática para la población A en República Dominica. Santiago de los Caballeros: PUCMM.

Martinic, Sergio. (1998). Tiempo y Aprendizaje. World Bank: Paper Series No. 26.

Monk, David H ( ). Resources Allocation in Schools and School System. In: Lawrence J. Saha (ed.).International Encyclopedia of the Sociology of Education. New York: Pergamon

Morillo Pérez, Antonio. (2003). Focalización de la Pobreza en la República Dominicana (Edición corregida y ampliada). Santo Domingo: Secretariado Tecnico de la Presidencia. Oficina Nacional de Planificacion

OECD. (2008). Reviews of National Policies for Education Dominican Republic. Paris: OECD.

Secretaria de Estado de Educación. (2008). Plan Estratégico de Desarrollo de la Educación Dominicana 2008-2016: Un instrumento de Trabajo en Procura de la Excelencia Académica. Santo Domingo: Corripio.

TIMSS. (1992). Survey of Mathematics and Science Opportunities, Research Report Series No 42. Michigan University

Tukey, J. W. (1977). Exploratory Data Analysis. Reading, MA, Addison-Wesley Publishing Co.

Valverde, Gilbert A, Leonardo J. Bianchi, Richard G. Wolfe, William H. Schmidt, and Richard T. Houang. (2002). According to the Book, Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Valverde, Gilbert A. (2003). "Monitoring and Evaluation of Educational opportunities and Learning in USAID Sponsored Programs in the Dominican Republic" RFP: 517-03-017 and amendment 1, of 09.03.2003. Albany, New York.

World Bank. (2000). Dominican Republic Social and Structural Policy Review Volume I. Report No. 20192, Poverty Reduction and Economic Management Unit Latin America and the Caribbean.

Xin Ma. (1997). A Multiple Regression Analysis of Mathematics Achievement in the Dominican Republic. International Journal of Educational Development, 17 (3), 313-321.

Transdisciplinaridade e Etnomatemática: uma reflexão acerca da formação de professores

Júlio César Augusto do **Valle**
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo
Brasil
julio.valle@usp.br

Resumo

O propósito desse trabalho é avaliar, em uma abordagem introdutória, em que medida e com que profundidade a Etnomatemática (conforme a concebem D'Ambrosio, 1999; Vergani, 2007) e a Transdisciplinaridade (D'Ambrosio, 1997) podem ser concebidas como soluções para os atuais problemas da Educação e, de modo mais amplo, da própria humanidade. Espera-se refletir sobre tal possibilidade na perspectiva da formação de professores, justamente porque se acredita que a mudança que se faz necessária começa na escola e, por isso, deve partir, inicialmente, de reflexões significativas da prática pedagógica.

Palavras chave: transdisciplinaridade, etnomatemática, formação de professores, educação matemática, paradigma educacional.

Para introduzir o leitor à problemática central, é interessante considerar a crise que se configura na Educação – não só brasileira, mas em todo o mundo, de certo modo – e tem dimensões políticas, estruturais (ou econômicas) e socioculturais (Azanha, 1995; Moraes, 1997). Sob essa perspectiva, existem aspectos que devem ser observados para que se compreenda o que significa, efetivamente, a *crise*. Ao lado da precária organização dos sistemas de ensino (Azanha, 1995), encontra-se, destacado,

> o fato de que a aprendizagem do aluno não é o foco central da escola. As escolas, em sua maioria, não estão preparadas para garantir melhoria na qualidade do processo de ensino-aprendizagem, despendem mais energia com rotinas administrativas e deixam de lado a gestão pedagógica. (Moraes, 1997, p. 14)

Ao lado da dimensão mais administrativa e que requer, portanto, soluções de cunho político, indica-se a enorme insatisfação com o sistema escolar, de um modo geral. Isso porque pais, alunos e professores não escondem seu descontentamento em relação aos serviços oferecidos pela escola. "Na verdade, a escola não cumpre seu papel; está completamente dissociada do mundo e da vida" (Moraes, 1997, p. 14).

Assim, os apontamentos acima indicam aspectos bastante contundentes do cenário educacional brasileiro. É interessante observar que, apesar de não ser possível encontrar explícitos, em ambos os excertos acima, esclarecimentos sobre a "escola" de que a autora fala, pode-se atribuir seu entendimento – tanto sobre as questões administrativas, quanto sobre a insatisfação generalizada – a escola brasileira de um modo geral, pública e privada. Isso significa que, preservadas suas diferentes proporções, é possível detectar problemas bastante semelhantes em ambos os contextos educacionais: público e privado. Sendo assim, podem-se tornar certas asserções sobre a crise mais abrangentes, de maneira a incluir tanto a escola pública quanto a escola particular brasileira. No entanto, existe um entendimento equivocado a respeito de uma das razões que teriam dado origem à crise. Sobre isso, diz-se que "tudo se passa como se a falência da escola pública tivesse sido decretada pela política de expansão maciça de vagas iniciadas alguns anos atrás" (Azanha, 1995, p. 11).

Pode-se contrapor, logicamente, que a expansão maciça de vagas a que se refere o autor em muito contribui para a situação precária da educação brasileira. Todavia, o que se pretende desconstruir é a "justificativa" de que a maior parte dos problemas educacionais do país advém desta expansão. Nesse sentido, é de significativa importância esclarecer, primeiramente, que há um fato cujo entendimento distorcido pode corroborar a lógica de tais explicações. Sabe-se, assim, que o crescimento – verdadeiramente intenso – da rede de escolas de 1º grau tem início, em São Paulo, por exemplo, em 1967, de maneira que,

> anteriormente, o crescimento da rede era apenas vegetativo e jamais alcançou de maneira expressiva a imensa parcela da população de mais baixa renda. Nesse ritmo, crescendo lentamente, a escola pública de 1º grau (na sua parte terminal, o ginásio) recrutava com extrema severidade apenas a elite dos alunos egressos da escola primária. Com critérios de seleção ainda mais estritos do que aqueles utilizados pelas escolas particulares caras, a escola pública ministrava um ensino considerado de bom nível quando comparado com o nível de hoje. No entanto, já cansadas vezes, insistimos na afirmação de que essa comparação não é legítima porque as situações não são comparáveis. A escola de *poucos* de ontem era e é historicamente diferente da escola de *todos* de hoje. (Azanha, 1995, p. 12)

A partir disso, espera-se desmistificar as relações que, conforme explicitadas anteriormente, justificam com o aumento maciço do número de alunos nas escolas brasileiras a "consequente" posição de passividade docente frente à crise que se instala na educação, por exemplo. Tal posição de passividade docente caracteriza-se pela afirmação quase fortuita de que *nada mais pode ser feito*. Embora esteja claro que se trata de um problema multifacetado – que justifica o uso do termo *crise* – o objetivo aqui é, ao mesmo tempo em que não se pretende atribuir a culpa de todos os problemas educacionais aos professores, reconhecer que

> grande parte do magistério não dispõe, hoje, de uma aguçada consciência profissional. Percebemos isso com o descomprometimento do professor com a escola pública, com a escola em que trabalha. Embora esse professor possa, politicamente, ter posições avançadas e até estar empenhado numa luta pela escola pública, há um dia-a-dia, há um cotidiano desse professor que revela uma profunda contradição entre as alegações dele a favor da escola pública e o modo como ele se conduz no seu cotidiano dentro dessa escola. Ao mesmo tempo em que esse professor rejeita as relações de dominação no plano político, combate o sistema de opressão fora da escola, luta e reivindica a

> possibilidade de uma maior participação de todos, quando fechado dentro de quatro paredes com seus alunos, exerce sobre eles toda dominação e toda opressão que pode. (Azanha, 1995, p. 27)

Trata-se, a partir da descrição do autor, de tomar como problemática fundamental a formação política dos professores. Para além do enunciado acima, trata-se, também, de refletir sobre o modo como posturas coerentes, tanto de um ponto de vista mais abrangente e político quanto de um ponto de vista mais específico e metodológico, são imprescindíveis na construção de um ambiente favorável às relações democráticas tão valorizadas discursiva e ideologicamente. Isso significa que, evidentemente – e a despeito de todas as demais questões, majoritariamente políticas e administrativas –, trata-se de uma questão que deve ser pensada acerca da própria formação de professores, justamente porque, na tradicional formação de professores,

> não se conhece o aluno nem seu ambiente cultural e suas motivações. Pretende-se enquadrar o aluno numa faixa etária, à qual estaria subordinada a sua capacidade cognitiva, e numa faixa social, à qual estaria subordinada sua motivação. Com a falsa aceitação de uma homogeneidade cultural e cognitiva, ignoram-se as maneiras próprias que o aluno tem para explicar e lidar com fatos e fenômenos naturais e sociais. Ele é subordinado a faixas etárias e sociais. (D'Ambrosio, 1999, p. 78)

Identifica-se, portanto, uma falha na falsa aceitação da existência, conforme descrita pelo autor, de uma homogeneidade cognitiva e cultural. Assim, conceber um aluno *ideal* cognitiva e culturalmente implica sérias distorções, de cunho filosófico e, mais especificamente, educacional, que podem constituir atores fundamentadores da crise apresentada. Desse modo, é essencial que se reconheça na formação de professores oportunidade rica para mudar essa realidade. Isso significa entender que há necessidade – e urgência – de uma formação de professores mais *apropriada* à prática docente, ou seja, uma formação de professores que se dedique à completa imersão no cotidiano de professores e professoras.

De fato, reconhece-se que, em certa medida, estas afirmações podem *soar* unilaterais, uma vez que isolam uma grande variedade de fatores que, bem como a formação defasada de professores corroboram a situação precária em que se encontra a educação brasileira. Entretanto, há de se observar que “dentre os inúmeros problemas de educação brasileira que precisam ser resolvidos nenhum sobreleva o da formação de professores” (Azanha, 1995, p. 193). Em consonância com o autor, afirma-se, nesse sentido, que nenhum dos problemas educacionais poderá ser prescindir ou ser enfrentado adequadamente sem que se reflita a respeito da formação de professores anteriormente.

Logo, espera-se, com isso, apenas construir *uma* possibilidade de enfrentamento aos problemas descritos. Ademais, é evidente que, se for isolada de outras tentativas complementares, tal possibilidade também pode se mostrar tão contraproducente quanto as que a precederam. Evidentemente, a crise da educação fundamental no país não se resolverá por sugestões de medidas parciais que não atingem essencialmente tal crise, por mais importantes que sejam, como é o caso dos salários aviltados ou dos altos índices de repetência e evasão. Isso significa que é preciso avançar um pouco mais na análise e reconhecer que a falha reside em algo mais profundo, isto é, na criação de uma instituição educativa que seja efetivamente popular na sua abrangência e democrática na sua organização e funcionamento (Azanha, 1995). É importante, por isso, que o professor tenha uma formação mais ampla do que da maneira como tem acontecido. Isso não significa, contudo, que tal formação deva ser apenas “complementada” da maneira como é concebida, justamente porque

> quando se trata da competência do educador escolar, é preciso evitar a adesão a soluções simplistas que reduzem o problema do fracasso na aprendizagem a uma questão de “formação” do professor,

> deixando de considerar que essa mesma formação precisa ser questionada mais radicalmente, de modo a incluir a busca de formas mais vivas de integração da pedagogia com os problemas da própria população alvo. (Paro, 1995, p. 241)

É fundamental evidenciar, como faz o autor acima, a importância da integração e do constante diálogo entre a formação acadêmica do professor e os problemas *reais* da população atendida pela escola. Tal evidência será retomada adiante.

Em suma, está afirmada, então, a necessidade de uma reestruturação dos cursos de formação de professores, propiciando espaços para discussões mais contundentes sobre a realidade docente. Sob essa perspectiva, o objetivo desse artigo é traçar um referencial teórico-reflexivo sobre determinados aspectos da prática docente que possivelmente contribuirão para tais discussões. Em outras palavras, o objetivo é **inspirar** e **provocar**, durante a formação de professores – tanto inicial quanto continuada –, discussões que não só tangenciem, mas abordem consideravelmente pontos nevrálgicos da educação, ao passo que – futuros – educadores se sintam confortáveis para questionar, criticar e corroborar os modelos de educação vigentes e ainda aqueles que estão por vir.

Assim, a primeira constatação sobre a qual se construirá a reflexão é a de que

> não se muda um paradigma educacional apenas colocando uma nova roupagem, camuflando velhas teorias, pintando a fachada da escola, colocando telas e telões nas salas de aula, se o aluno continua na posição de mero espectador, de simples receptor, presenciador e copiador, e se os recursos tecnológicos pouco fazem para ampliar a cognição humana. (Moraes, 1997, p. 17)

Segue do excerto anterior a necessidade uma reflexão que questione objetivamente o que se pretende com a Educação, de modo amplo, além de o que tem sido feito da mesma Educação na realidade. Segue, ademais, a necessidade de elaborar uma proposta educacional que tenha como cerne uma concepção mais *humana* do próprio *ser*[1] humano, assim como todas as suas potencialidades. Seria relevante, portanto, conceber

> uma proposta que trouxesse a percepção de mundo holística, global, sistêmica, que compreendesse o perfeito entrosamento dos indivíduos nos processos cíclicos da natureza, uma proposta capaz de gerar um novo sistema ético respaldado por novos valores, novas percepções e novas ações e que nos levasse a um novo diálogo criativo do homem consigo mesmo, com a sociedade e com a natureza, mas que, ao mesmo tempo, reconhecesse a importância das novas parcerias entre a educação e os avanços científicos e tecnológicos presentes no mundo de hoje. (Moraes, 1997, p. 17)

Então, sob a perspectiva que parte da premissa de que o conhecimento é produto/constructo – sociocultural – humano[2], é relevante questionar o seguinte: quais são as possibilidades em que se pode elaborar tal proposta educacional? A resposta apresentada nesse artigo consiste em considerar como cerne de toda proposta curricular, formulada a partir de tais preocupações, primeiramente, a **cultura** do educando. Por essa razão é essencial considerar que em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento – que sempre é gerado pela necessidade de respostas a problemas e situações reais, distintas e muitas vezes imediatas – está subordinado a um contexto natural, social e cultural. Assim, todos "os indivíduos e os povos têm

[1] É interessante considerar o jogo de palavras elaborado por D'Ambrosio (1999) entre o *ser* (verbo) humano e o *ser* (substantivo) humano.

[2] "A cultura de um povo envolve seus modos de viver, seus sistemas de valores e crenças, seus instrumentos de trabalho, seus tipos de organização social, seja ela familiar, econômica, educacional, trabalhista, institucional, política ou religiosa, além de todas as dimensões éticas e estéticas, bem como seus modos de pensar e fazer" (Moraes, 1997, p. 121).

criado, ao longo da história, instrumentos teóricos de reflexão e observação". (D'Ambrosio, 1997, p. 16)

É elucidativo, a esse respeito, o fato de que a obra de Moraes (1997), por exemplo, é fundamenta em autores como Piaget, Freire, Papert e Gardner, para os quais

> as influências do contexto e dos fatores culturais têm importância fundamental na construção do conhecimento. Piaget, por exemplo, compreende o mundo físico como uma rede de relações. O homem não se separa do meio e vice-versa. É um indivíduo contextualizado, cujas estruturas mentais incorporam o que foi alcançado no estágio anterior e enriquecem as estruturas posteriores, num processo de construção e de reconstrução contínuo. (Moraes, 1997, p. 93)

No entanto, como se daria tal preocupação no âmbito de uma disciplina específica como a Matemática? Isto é, existe uma dificuldade razoável em associar determinados aspectos culturais à produção do conhecimento matemático, que parece *asséptico* e *neutro* (Knijnik, 1996). Todavia, quando se pensa a respeito de uma disciplina supostamente neutra como a matemática, há de se reconhecer, por exemplo, que

> a matemática de uma criança de rua em Angola, a matemática do Movimento dos Sem Terra no Brasil, a matemática urbana vinculada às tecnologias e às mídias, a matemática da aquisição de bens em países em guerra, são exemplos de outras tantas formas de conhecimento matemático vital que se adquirem, em geral, à margem das salas de aula. (Vergani, 2007, p. 7)

O excerto acima sugere que, em alguma medida, existem conhecimentos – matemáticos – que são produzidos à margem das salas de aula e que, em decorrência disso, são desconsiderados no cotidiano escolar. Dentro de uma proposta educacional construída para valorizar o *ser* humano e o conhecimento enquanto constructo sociocultural, parece indiscutível a importância de, para além de reconhecer sua existência, validar e legitimar tais conhecimentos. Para que se possa, portanto, tratar de maneira adequada essa delicada questão, considera-se o que tem se produzido no campo da Etnomatemática. Sobre isso, devem-se considerar algumas dimensões que constituem a própria Etnomatemática. Em primeira instância, pode-se definir que

> Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. (D'Ambrosio, 2011, p. 9)

Pode-se, além disso, afirmar que a Etnomatemática

> atenta às especificidades socioculturais, debruça-se sobre a alteridade dos processos cognitivos, psicoemocionais, comportamentais e práxicos. Esta inserção na antropologia cognitiva e sociocultural é uma fonte inesgotável de descoberta das intersecções reais entre diferentes disciplinas em cada situação vivencial, a partir da experiência e do saber matematizantes. A etnomatemática conhece e "fala" diversas "linguagens" humanas. Compreende, assim aspectos linguísticos, semânticos e simbólicos envolvidos na prática da racionalidade, o que leva a etnomatemática a atender simultaneamente a processos heurísticos e a processos hermenêuticos. (Vergani, 2007, p. 36)

O estudo da Etnomatemática foi proposto por meio do Programa Etnomatemática – de pesquisa –, que surge a partir da observação de diferentes práticas matemáticas nos mais diversos ambientes culturais, e logo foi ampliado para abranger não somente a Matemática, mas todo o conhecimento enquanto produção cultural (D'Ambrosio, 1999). A Etnomatemática é uma **subárea** da História da Matemática e Educação Matemática e tece, portanto, relações naturais com a **antropologia** e as **ciências da cognição**. "Além desse caráter antropológico, a

Etnomatemática tem um indiscutível foco político. A Etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano". (D'Ambrosio, 2011, p. 9). Ademais, a Etnomatemática entende que

> não se pode negar que a formação dos conceitos tem raízes culturais muito profundas. Ao nos referirmos a uma civilização e a uma cultura, logo se destacam como suas principais características a linguagem, a religião, o conjunto de valores, a culinária, a música, as técnicas e tantos outros elementos. Embora seja menos reconhecida como expressão cultural, a matemática é particularmente importante. Esse menor destaque dado à matemática como sendo manifestação de cada cultura é resultado da distorção, de natureza política, que é atribuir universalidade à matemática. (D'Ambrosio, 1999, p. 66)

Logo, o que a Etnomatemática propõe, com maior profundidade, em relação ao entendimento da Matemática, pode ser concebido como um entendimento mais amplo, com relação ao conhecimento em si.

Assim, um caminho para o enfrentamento das situações que assolam a Educação brasileira pode ser concebido a partir do que foi enunciado anteriormente – sobretudo a partir da concepção de Paro (1995) em que a educação precisa estar implicada nas formas de conhecer, bem como nos problemas *reais*, de sua própria população alvo. Tal concepção desposa a atitude etnomatemática, que reconhece na prática cotidiana de grupos socioculturais distintos o conhecimento matemático essencialmente vinculado à cultura e aos problemas sociais da comunidade.

A preocupação da Educação, de modo geral, com a cultura do educando parece, portanto, apropriada aos debates atuais na formação de professores. Pode-se indagar, também a respeito da educação matemática[3],

> se esta aprendizagem é considerada chave a nível da plena integração futura dos jovens nos processos de profissionalização e de especialização, por que razão se tem vindo a transformá-la em um filtro de seleção cruelmente competitiva, ou seja em uma fonte de marginalização socioprofissional massiva das gerações nascentes? Assistimos não só ao impacto nefasto deste estado de coisas no campo da justiça socioeconômica, mas também no domínio da sanidade psicoemocional: frustrações, bloqueios, perda da auto-estima, enfraquecimento do espírito crítico e criativo, submissões resignadas a uma ordem brutalmente alheia ao bem estar vital/pessoal... (Vergani, 2007, p. 23)

De fato, o excerto acima sugere que, às vezes, a educação se perde com relação a seus propósitos, de maneira a corrompê-los, transformando-os em instrumentos de seleção e exclusão[4]. Tal questão caracteriza-se também fundamental para o debate na formação de professores.

Dessa maneira, considera-se que, como a insuficiente formação acadêmica dos professores já configura em si um problema sério, deve-se cuidar para que a formação de professores "esteja impregnada de valores que se identifiquem com os interesses das camadas trabalhadoras e possa criar meios de falar a linguagem dessa população, de modo a proporcionar-lhe condições efetivas de apropriação do saber historicamente produzido. (Paro, 1995, p. 242)

---

[3] É importante observar que tais enunciados, supostamente restritos à matemática, têm o potencial de abranger qualquer um dos campos disciplinares das atuais propostas educacionais. Sendo assim, as mesmas reflexões podem inspirar a Biologia, a Física, a Química, a História...

[4] Ver Knijnik (1996).

É possível que se atinja tal expectativa por meio da Etnomatemática, justamente porque uma de suas tarefas inclui examinar a Matemática popular "restaurando sua necessidade prática, relacionando-a com as condições reais de sua gênese" (Knijnik, 1996, p. 103). Cabe, portanto, ressaltar que, como o cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios de cada cultura, de maneira que, "a todo instante os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando e, de algum modo, avaliando usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura" (D'Ambrosio, 2011, p. 22). Tais asserções reafirmam o potencial da Etnomatemática enquanto possível provedora de recursos teóricos a uma proposta educacional.

Além das dimensões que pertencem *estritamente* ao campo da cultura, existem outras que devem ser igualmente questionadas. Primeiramente, questiona-se a(s) expectativa(s) da incessante apreensão de conteúdos que ocorre em todo o Ensino Básico. Isso porque a crença de que o aprendizado de conteúdos *relevantes* seja necessário e suficiente para propiciar uma consciência crítica ou instrumentalizar os educandos para uma prática social transformadora. Assim,

> para perceber a que absurdos pode levar esta concepção, basta atentar para a incoerência de se "ensinar" conteúdos que visem a um comportamento democrático, por meio de relações autoritárias, ou de se prover os educandos de conhecimentos que visem à apreensão científica do real, por meio de métodos que supõem a aceitação passiva das "verdades" apresentadas pelo professor". (Paro, 1995, p. 223)

Assim, se a preocupação com a **cultura** do educando está associada, na perspectiva apresentada, a uma série de pressupostos que muito tem em comum com os princípios de uma educação emancipatória (Freire, 2009), é importante que o professor esteja atento a determinados aspectos que, por mais enraizados no cotidiano escolar que estejam, precisam ser questionados. Conforme afirma Paro (1995), o método também é conteúdo. Essa constatação inspira outro fator essencial para a reflexão na formação de professores: a **transdisciplinaridade**. Isso porque

> têm sido muito raras as interpretações dos componentes éticos e ideológicos que impulsionaram o desenvolvimento dessas disciplinas. Em consequência, prevalece a concepção equivocada de que o ensino de uma disciplina deve estar subordinado a uma lógica interna da própria disciplina. Isso tem sido particularmente desastroso no caso da matemática. A consequência inevitável dessa postura é o afastamento, e mesmo a exclusão, de reflexões críticas sobre ética e ideologia. Mesmo em se tratando do próprio desenvolvimento da disciplina, essa pretensa autonomia com relação à ética tem conduzido a um conhecimento fechado. (D'Ambrosio, 1999, p. 68)

A transdisciplinaridade, da maneira como é concebida por D'Ambrosio (1997, 1999), entende que o conhecimento disciplinar dificilmente possibilitará a seus detentores o reconhecimento e a resolução dos problemas e situações que advém das transformações sociais, naturais e científicas dos últimos anos. De fato,

> o essencial na transdisciplinaridade reside na postura de reconhecimento de que não há espaço nem tempo culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar como mais corretos – ou mais certos ou mais verdadeiros – os diversos complexos de explicações e de convivência com a realidade. A transdisciplinaridade repousa sobre uma atitude aberta, de respeito mútuo e mesmo de humildade com relação a mitos, religiões e sistemas de explicações e de conhecimentos, rejeitando qualquer tipo de arrogância ou prepotência. (D'Ambrosio, 1997, p. 79)

Além disso, a transdisciplinaridade é relevante porque viabiliza a crítica ao modelo disciplinar, considerado pela maior parte dos teóricos em que se fundamenta este trabalho, restrito e estreito. A dificuldade na elaboração de tal crítica consiste no fato de que o modelo disciplinar fora, conforme tantos outros aspectos do modelo de escola/educação vigente, naturalizado, isto é, tomado como natural, intrínseco à estrutura de qualquer escola. De fato, quando se considera a disposição das mesas/carteiras dos alunos na sala de aula, encontra-se outra característica que advém em maior parte (ou totalmente) de uma reprodução estrutural acrítica do que de um momento de reflexão quando se questionou qual seriam as razões que justificam tal disposição. Sobre isso D'Ambrosio afirma, categoricamente, que jamais houve sequer tentativa de "encarar o busílis da questão: a própria questão do conhecimento, convenientemente fragmentado em disciplinas para justificar – desencorajando crítica – nossas ações em cada setor". (D'Ambrosio, 1997, p. 152)

Azanha, corroborando o que foi enunciado acima, afirma que

> a conclusão, quase inevitável, é que a melhoria da prática somente pode ser feita pela crítica da própria prática, no momento em que ela ocorre, e não pela crítica teórica de uma prática abstratamente descrita, ainda que essa descrição seja feita pelos próprios praticantes. (Azanha, 1995, p. 203)

A transdisciplinaridade compreende, portanto, que os educandos devem ser formados dentro de uma visão sistêmica da educação, que compreende suas relações com o mundo sociocultural dos alunos de maneira holística e toma, em todo momento, proveito disso, num contínuo diálogo entre teoria e prática, conteúdo e realidade...

Dessa maneira, torna-se evidente a aliança fecunda entre a Etnomatemática e a Transdisciplinaridade, uma vez que suas preocupações se reforçam, seus pressupostos coincidem e seus objetivos são absolutamente compatíveis. Espera-se, portanto, que o professor seja concebido, desde sua formação, como importante ator político/ideológico do meio em que atua/atuará. Sob essa perspectiva, é importante que existam momentos, em sua formação, para reflexão acerca de determinados temas que possam lhe ser úteis no cotidiano. Afinal,

> na prática do professor, encontram-se subjacentes um modelo de educação e um modelo de escola, fundamentados em determinadas teorias do conhecimento. Ao mesmo tempo em que o modelo educacional é influenciado pelo paradigma da ciência, aquele também o determina. A atuação do professor traduz sua visão de educação. É impossível separar uma coisa da outra. A teoria da aprendizagem que fundamenta sua ação contém as explicações de como ele crê que o indivíduo aprende e determina o modelo pedagógico adotado pela escola. (Moraes, 1997, p. 18)

O que se espera, finalmente, a partir do que foi enunciado, de maneira introdutória no decorrer deste artigo – no que tangencia tanto a Etnomatemática quanto a Transdisciplinaridade – é que a formação de professores oriente à compreensão da "importância do pensar crítico e criativo, que seja capaz de integrar as colaborações das inteligências humanas e da inteligência da máquina, lembrando, no entanto, que só o ser humano é capaz de transcender e criar". (Moraes, 1997, p. 18)

Referências e Bibliografia

Azanha, J. M. P. (1995) *Educação: Temas Polêmicos*. São Paulo: Martins Fontes.

D'Ambrosio, U. (1997) *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Palas Athena.

D'Ambrosio, U. (1999) *Educação para uma sociedade em transição*. Campinas: Papirus.

D'Ambrosio, U. (2011) *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. (4ª ed.) Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Freire, P. (2009) *Pedagogia da Esperança: um reencontro com a Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Knijnik, G. (1996) *Exclusão e Resistência: educação matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Moraes, M. C. (1997) *O paradigma educacional emergente*. Campinas: Papirus.

Paro, V. H. (1995) *Por dentro da escola pública*. São Paulo: Xamã.

Vergani, T. (2007) *Educação etnomatemática: o que é?* Natal: Flecha do Tempo.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual

Maricela Bonilla González
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
mbonillag@cinvestav.mx
Teresa Rojano Ceballos
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
rojanot@gmail.com

Resumen

El estudio tiene como propósito investigar los procesos de transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica para la resolución de ecuaciones lineales, cuando se utiliza un modelo de enseñanza concreto, virtual y dinámico con estudiantes de nivel secundaria. Al final del estudio, los alumnos muestran un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que en su mayoría logran realizar la transferencia de las acciones efectuadas con el sistema de signos del modelo concreto (balanza virtual) a acciones que se ejecutan con el sistema de signos del álgebra. A su vez, se observó que los procesos de transferencia pasan por diferentes etapas, dependiendo del sistema de signos hacia el cual se logra la transferencia de acciones.

Palabras clave: Sintaxis algebraica, balanza virtual, ecuaciones lineales, affordances, transferencia, aprendizaje situado.

Introducción

Hay pocos indicios de que lo que se aprende en una situación se aplique espontánea o fácilmente a otra distinta, es decir que se dé una transferencia del aprendizaje a otra situación distinta de aquella en la que éste tuvo lugar. Si bien algunos investigadores que han desarrollado la idea de aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991) han cuestionado el uso que se hace de los resultados de estudios de transferencia, lo cierto es que en el terreno de la educación matemática los fenómenos de transferencia (y no transferencia) siguen estando presentes y resultan de interés para la investigación en este campo.

En el trabajo que aquí se presenta interesa estudiar los fenómenos de transferencia de las acciones realizadas en un *modelo concreto virtual* (modelo de la balanza) para la resolución de ecuaciones lineales a acciones en el nivel de la sintaxis del método algebraico de resolución.

Antecedentes.

Cuando los estudiantes se inician en el estudio del álgebra y se enfrentan a trabajar con incógnitas, acceden a otros niveles de pensamiento superando lo numérico y los procedimientos netamente aritméticos. Diversos estudios han documentado los errores de los estudiantes, analizando gramaticalmente las expresiones algebraicas (por ejemplo, Davis, Jockusch & McKnight, 1978; Matz, 1982). Kieran (1992), Matz (1980) y Booth (1984) señalan que es difícil para los estudiantes comprender que los signos de operación cambian su significado al cambiar de un dominio de conocimiento a otro, pues la aritmética y el álgebra comparten muchos de los mismos signos y símbolos, tales como el signo igual, el de adición y el de sustracción, inclusive el uso de letras. Los símbolos + y -, que en la aritmética funcionan como operaciones ejecutables como en los algoritmos de la adición y la sustracción y que llevan a un resultado numérico, en el campo del álgebra relacionan términos que contienen literales y son operaciones suspendidas.

Filloy y Rojano (1989) han reportado que ocurre una *ruptura didáctica* entre la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=c$, las cuales puede resolverse por métodos aritméticos, y la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$ que necesitan métodos algebraicos formales. De acuerdo con estos autores, el tránsito del primer tipo de ecuaciones al segundo no es inmediato, es necesario construir o adquirir elementos de la sintaxis algebraica, y la construcción de estos elementos sintácticos está basada en un conocimiento aritmético pero a su vez, requiere de una ruptura con la aritmética. En este tránsito, las concepciones de estudiantes de operar con los números deben cambiar por el concepto de operar con objetos algebraicos. Aunque algunas investigaciones (Bolea, Bosch y Gascón, 1998; Bolea, 2002) muestran el sentido en que la institución escolar interpreta generalmente el álgebra elemental, como una aritmética generalizada, y las consecuencias sobre tales interpretaciones.

En resumen, estas investigaciones advierten sobre las dificultades que los estudiantes enfrentan en su tránsito al pensamiento algebraico y plantean la necesidad de estudiar a fondo la naturaleza de lo didáctico, cognoscitivo y epistemológico en relación a tales dificultades.

El uso de modelos concretos como uno de los acercamientos para enseñar a los alumnos cómo resolver ecuaciones lineales es a menudo objeto de debate en la literatura científica. De acuerdo con J. Vlassis (2002), durante varios años, una serie de autores (Herscovics y Kieran, 1980; Filloy y Rojano, 1989; Linchevski y Herscovics, 1996) han experimentado con diversas situaciones y modelos concretos con los que los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones. Vlassis basa sus reflexiones sobre los resultados de un estudio empírico; en sus investigaciones hace referencia al uso de modelos concretos para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Sus observaciones muestran que el modelo de la balanza puede ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de métodos formales en la resolución de ecuaciones, con la incógnita en ambos lados de la ecuación. Para Vlassis, el modelo de la balanza es una herramienta efectiva en la transmisión de los principios de transformación, además hay un interés esencial en darle significado concreto a esas manipulaciones y proporcionar operaciones mentales imaginarias, aunque manifiesta que la presencia de números negativos en la resolución de ecuaciones lineales por parte de los estudiantes da lugar a muchos errores.

Filloy y Rojano (1984), Vergnaud y Cortés (1986) argumentaron que la presentación de situaciones-problema usando la balanza de dos platillos es extremadamente útil para la introducción del álgebra, aunque en el estudio de Filloy y Rojano (1984 y 1989) identificaron tendencias extremas en relación a la modelación concreta, consistentes, por un lado, en un arraigo al modelo aún en situaciones en las que éste no se podía aplicar, y por otro, un desprendimiento casi inmediato del modelo para trabajar en el nivel sintáctico "puro". Rojano y Martínez (2009) han investigado sobre el uso del modelo de la balanza (en una versión virtual y dinámica) para la resolución de ecuaciones lineales, la cual favorece en los estudiantes la abstracción.

En esta investigación se utiliza un *modelo de enseñanza* basado en la misma balanza virtual utilizada por Rojano y Martínez (2009) y que está constituido por la unidad interactiva "resolución de ecuaciones lineales", dicha unidad está conformada por applets presentes en una secuencia de escenas y que llevan a cabo una función muy específica. La idea es estudiar los procesos de transferencia (y no transferencia) que experimentan los alumnos al pasar de trabajar con la balanza virtual a resolver las ecuaciones con las reglas de la sintaxis algebraica.

Transferencia situada.

La noción clásica de la transferencia del conocimiento (Greeno, Smith y Moore, 1993), se reduce a explorar si los estudiantes que han aprendido un cierto conocimiento en un contexto determinado pueden utilizarlo para enfrentar y resolver otras situaciones que muestran diferencias notables con las estudiadas inicialmente. Varios modelos alternativos de transferencia han surgido en respuesta a las críticas de la transferencia clásica (véase Bransford & Schwarz, 1999; Greeno, Smith, & Moore, 1993; y Lobato, 2003). Greeno, Smith y Moore (1993) presentan una visión alternativa de la transferencia, denominada transferencia del aprendizaje situado, en donde interesa discutir las características del contexto donde se efectuó el estudio de determinada situación y cuál fue el papel de la interacción social en dicho estudio.

Algunos investigadores (Greeno, 1997, 1998, Greeno, Smith y Moore, 1993) han puesto de relieve la importancia fundamental de las *affordances*[1] (cualidades de los objetos, o entornos, que permiten a un individuo realizar una acción) y sugieren que la transferencia depende de una capacidad de percibir las *affordances* para la práctica que están presentes en una nueva situación. En el estudio que aquí nos ocupa las *affordances* que surgen del diseño de la balanza virtual permiten realizar actividades con dicho artefacto, visto de otra forma las propiedades del artefacto invitan a los estudiantes a su interacción. La *affordance* es entonces el uso potencial de la balanza en relación con el entorno, en donde hay una disposición tanto del agente, del objeto, como del entorno para generar una construcción, capaz de otorgar inmediato reconocimiento, sentido y funcionalidad. La investigación que aquí se presenta, se propone observar y analizar cómo las *affordances* que están presentes en el Modelo de la Balanza son reconocidas y transferidas por los sujetos a la sintaxis algebraica.

Las *affordances* presentes en el diseño de la balanza virtual son:

[1]Aquí usaremos el término en inglés, con esta connotación.

Pesar en la balanza virtual, es decir, colocar pesas en los platillos a través de la manipulación directa, de tal forma que ambos platillos tengan el mismo peso. El alumno obtiene el efecto de estas acciones de manera visual cuando ambos platillos queden equilibrados. Cabe señalar que con la balanza diagramática no hay posibilidad de pesar.

Representar ecuaciones en la balanza virtual permite comprender la noción de equilibrio que es equivalente a la igualdad algebraica en la ecuación sintáctica, mientras que en la balanza diagramática, aunque hay posibilidad de representar ecuaciones, no se percibe visualmente el equilibrio.

Resolver ecuaciones de manera concreta: el estudiante al realizar cada acción obtiene un efecto visual en la balanza virtual y en la ecuación simbólica que se encuentra en la base de la balanza, lo anterior retroalimenta al estudiante en las acciones posteriores. La preservación de la igualdad en cada paso de la transformación de la ecuación se corresponde con el restablecimiento del equilibrio, sin embargo, en la balanza diagramática el estudiante debe anticipar lo que va a suceder con cada acción.

*Manipulación de objetos: e*l estudiante realiza una manipulación virtual de los objetos (bloques de x y de una unidad de peso) realizando acciones que producen determinados efectos y con ello, dan significado a dichas manipulaciones cuando resuelven ecuaciones de manera sintáctica.

*Metáfora del equilibrio: e*l establecimiento de una situación de equilibrio entre los dos platillos permite a los estudiantes dar sentido a las propiedades de la igualdad en la solución de ecuaciones lineales y así llegar a la equivalencia equilibrio-igualdad.

Descripción del modelo de enseñanza.

Se trabaja con la Unidad Interactiva "resolución de ecuaciones lineales" la cual contiene un modelo de balanza virtual y dinámica, se utiliza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones (Rojano y Martínez, 2009). Esta unidad interactiva está dividida en dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 1) y Balanza II (balanza con poleas, figura 2), el primer apartado aborda la resolución de ecuaciones lineales del tipo ax+b=c, y ax + b = cx + d, con a, b, c y d enteros positivos y el segundo apartado con a, b, c y d enteros positivos o negativos.

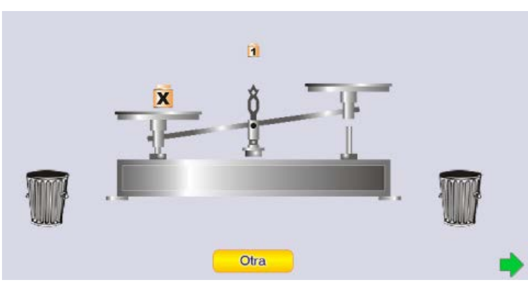


Figura 1. Balanza simple

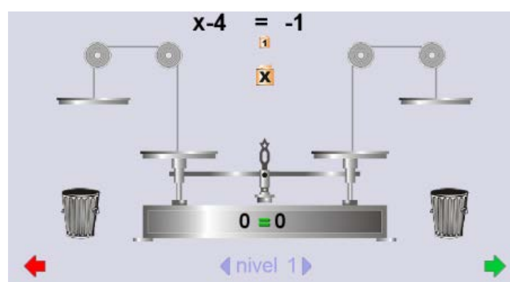


Figura 2. Balanza con poleas

Método.

Se realiza un estudio de corte cualitativo, con intervención en la fase de enseñanza. La población es un grupo de estudiantes que cursan el segundo grado de educación secundaria. Se trabaja con estudiantes que no han recibido instrucción en la resolución de ecuaciones lineales del tipo ax+b=c y ax+b = cx+d, pero sí del tipo $\square + 4 = 9$.

Marco de análisis.

Con el propósito de analizar y discutir los datos recabados con cada uno de los sujetos en el estudio piloto, se utiliza un marco de análisis el cual nos permita identificar estratos de transferencia en la resolución de ecuaciones lineales. Los procesos de transferencia se van manifestando en distintos niveles de abstracción y por lo tanto a través de distintos estratos de sistemas de signos que utilizan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, a partir de la experiencia con la unidad didáctica de la balanza virtual; no vamos a hablar de si hay o no transferencia, sino de una transferencia estratificada.

Estratos de transferencia (se refieren al sistema de signos al que se realiza la transferencia):

Estrato de transferencia del Sistema de Signos de la Aritmética (SSAr)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato resuelven la ecuación utilizando el sistema de signos de la aritmética; recurren a las *affordances* de este estrato que son operatividad numérica y una noción de igualdad, en donde suelen hacer uso de hechos numéricos y técnicas de conteo. Booth (1983) ha señalado el uso de ambos entre estudiantes que se inician en el álgebra.

Estrato de transferencia de la Balanza Virtual (SSBV)

Los estudiantes que realizan transferencia en el modelo de la balanza virtual requieren de la unidad didáctica para resolver ecuaciones, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son manipulación de objetos y la metáfora del equilibrio.

*Estrato de transferencia de la Balanza Diagramática (*SSBD)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato requieren del modelo diagramático para resolver una ecuación, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son metáfora del equilibrio y manipulación mental de objetos, pues para encontrar el valor de la incógnita requieren dibujar la balanza y los bloques, o bien sólo los bloques.

Estrato de transferencia del Sistema de Signos del Álgebra (SSAℓ)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato para resolver una ecuación utilizan métodos formales de resolución de ecuaciones que incluyen la transposición de términos y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son métodos sintácticos de resolución de ecuaciones y la noción de igualdad algebraica restringida.

Los estratos anteriores surgen a partir del análisis de los casos y están íntimamente ligados con el tipo de *affordances* que recupera el sujeto al cambiar de un sistema de signos a otro. En el reporte del estudio se observa que hay estudiantes que transitan por cada uno de los estratos hasta ser usuarios competentes del sistema de signos del álgebra, pero la evolución de la transferencia en los sistemas de signos no es lineal, ni jerárquicamente ordenada, se da por ciclos, pues un estudiante puede haber evolucionado con un cierto tipo de ecuaciones, pero cuando se le plantea una modalidad de ecuación distinta requiere nuevamente del modelo virtual, del diagramático o bien del sistema de signos de la aritmética para apoyarse y poder resolver la ecuación. A continuación se describe el desarrollo del estudio.

Trabajo experimental con la balanza virtual.

Al inicio del estudio se aplicó a un grupo de ocho estudiantes un cuestionario inicial, con el fin de identificar en ellos las características individuales de pensamiento aritmético y pre-algebraico, así como las estrategias utilizadas en la resolución de ecuaciones lineales.

El trabajo experimental se realizó utilizando la unidad interactiva de resolución de ecuaciones lineales. En situación de entrevista con instrucción se enseñó al alumno la resolución de ecuaciones lineales, a través de dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 3) y Balanza II (balanza con poleas, figura 4). El primer apartado está compuesto de cuatro fases: encontrar el peso desconocido (en donde el alumno debía simplemente encontrar cuánto pesa x poniendo bloques de peso 1 del lado derecho de la balanza hasta que ésta se equilibre), representar ecuaciones (del tipo ax+b=cx+d con a,b,c y d enteros positivos en la balanza), encontrar el valor de x (manipulando los bloques de la balanza) y resolver ecuaciones con la balanza fija (aquí el alumno transitó de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica).

En el segundo apartado (Balanza II, figura 4), la cual contiene tres fases, los alumnos aprendieron a representar una ecuación del tipo $ax \pm b = cx \pm d$, posteriormente pudieron encontrar el valor de x (aquí las operaciones válidas son quitar pesas de los platos y poner pesas ya sea tomándolas de las pilas disponibles al centro, o bien pasando pesas de un plato a otro, transponer) y resolver ecuaciones con la balanza fija en donde transitaron hacia la operatividad algebraica dejando atrás el modelo de la balanza.

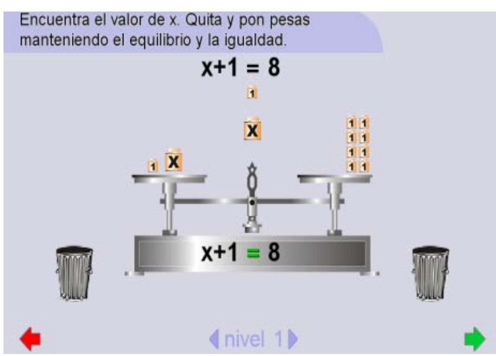


Figura 3. Balanza simple

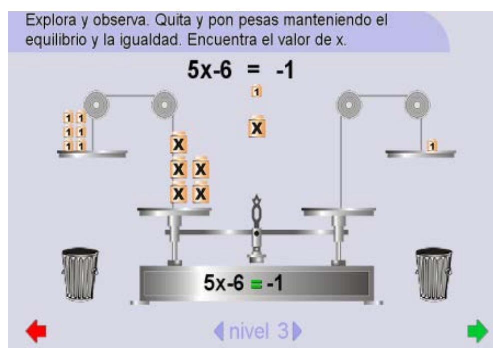


Figura 4. Balanza con poleas

Aplicación de los cuestionarios.

Con el objeto de indagar los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales con el apoyo de la unidad interactiva, se aplicaron cuestionarios en cuatro momentos, uno cuando los estudiantes transitaron de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica (Cuestionario I, balanza simple), dentro del modelo virtual, y posteriormente cuando resolvieron ecuaciones con el apoyo de la balanza fija y así poder observar la transferencia a papel y lápiz (Cuestionario II, balanza simple). De la misma forma se hizo en la balanza con poleas (Cuestionario III y Cuestionario IV).

Discusión final y resultados.

Al finalizar el estudio, todos los estudiantes entrevistados mostraron un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que lograron transferir las acciones del estrato del SSBV al estrato del SSAℓ, pues ya no se apoyan en el modelo diagramático ni en el virtual para encontrar el valor de la x; utilizan métodos formales para resolver los ítems, como la transposición de términos y el quitar los mismos términos en ambos lados de la ecuación. A continuación, se muestra el caso de Jazmín, con el que se ilustran distintas etapas de la transferencia al SSAℓ.

En el diagnóstico, Jazmín resuelve correctamente la mayoría de las ecuaciones aritméticas; en sus resoluciones utiliza métodos intuitivos que incluyen el uso de hechos numéricos y técnicas de conteo. Con respecto a la resolución de ecuaciones algebraicas que poseen la ocurrencia de la incógnita en ambos lados de la igualdad no resuelve ningún ítem.

Después de haber resuelto ecuaciones mediante el apoyo de la balanza virtual (simple), la alumna realiza la transferencia al estrato del SSBD en la mayoría de sus resoluciones. Como podemos observar, en la figura 5, para encontrar el valor de x Jazmín dibuja los bloques, es decir, las *affordances* presentes en el modelo no las transfirió a la sintaxis algebraica, sino al SSBD.

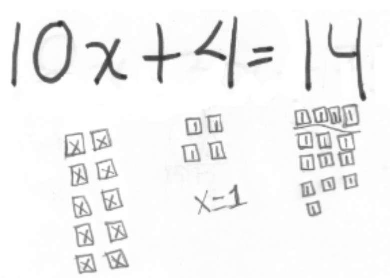


Figura 5. Resolución de Jazmín. Cuestionario I

Posteriormente y después de encontrar la solución de ecuaciones con el apoyo de la balanza fija, la alumna no requiere del modelo virtual ni del diagramático, es capaz de realizar la transferencia al estrato del SSAℓ, aunque la utilización de la simbología algebraica es aún restringida. En la siguiente figura se muestra la resolución de Jazmín, en donde después de simplificar la ecuación inicial obtiene la ecuación 9x=99, sin pasar por ecuaciones intermedias y a diferencia su resolución anterior utiliza el SSAℓ.

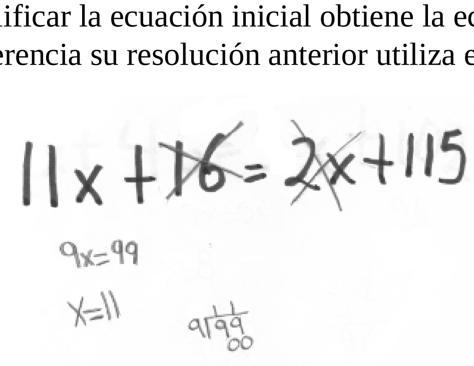


Figura 6. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Además la alumna también es capaz de realizar la transferencia a ecuaciones distintas a las contenidas en la unidad interactiva, ecuaciones que pueden llevar a lecturas polisémicas (lecturas espontáneas en las que los estudiantes de álgebra inicial tienden a involucrarse con las ecuaciones). En la figura 7 se puede observar que Jazmín para resolver la ecuación quita de ambos lados de la ecuación los términos iguales y obtiene el valor de x, es decir, la *affordance* que percibió de quitar los mismos objetos en la balanza virtual la transfirió al SSAℓ.

$$x+\cancel{x^3}=\cancel{x^3}+125$$

$$x=125$$

Figura 7. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Al finalizar el estudio Jazmín es capaz de realizar la transferencia a ecuaciones distintas a las contenidas en la unidad interactiva, ecuaciones que para su resolución requieren de la simplificación de términos semejantes. En la figura 8 se puede observar que Jazmín no posee dificultades para encontrar el valor de x; quita de ambos lados los términos iguales (2x) y obtiene una ecuación más simplificada, es decir, la *affordance* que percibió de quitar los mismos objetos en la balanza virtual la transfirió al SSAℓ.

$$3x+\cancel{2x}+19=\cancel{2x}+x+37$$

$$3x+19=x+37$$

$$2x+19=37$$

$$2x=18$$

$$x=9 \qquad \begin{array}{r} 37 \\ -19 \\ \hline 18 \end{array}$$

Figura 8. Resolución de Jazmín. Cuestionario IV

Por último, los ocho estudiantes entrevistados mostraron signos de transferencia, aunque de manera diferenciada, en el sentido de que dos de ellos logran una transferencia cabal al SSAℓ de manera espontánea, es decir, no requieren del modelo virtual ni del diagramático en sus resoluciones en ninguno de los cuestionarios, pero el resto (seis estudiantes), primero logran transferir las acciones al SSBD y después de haber resuelto ecuaciones con el apoyo de la balanza fija transfieren dichas acciones al SSAℓ. El caso de Jazmín es un ejemplo de la segunda situación, y sólo en el primer cuestionario utiliza el modelo diagramático en sus resoluciones. Cinco alumnos tuvieron una evolución similar, aunque se desprendieron del modelo diagramático de manera diferenciada, en el caso de otro alumno (Oscar) en la mayoría de los ítems del tercer cuestionario no requiere de dibujar la balanza pero sitúa los términos de acuerdo a su posición en la balanza, es decir, evoca el modelo virtual.

Lo anterior nos llevó a replantear el tema de la transferencia situada como transferencia por estratos, en referencia al sistema de signos al que se transfieren las acciones aprendidas en el modelo concreto. Dichos sistemas son estratificados, pues el del modelo virtual es de naturaleza más concreta que el sistema de SSAr y éste a su vez, es menos abstracto que el SSAℓ.

Referencias

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998).*"The role of algebraization in the study of a mathematical organization"* Actas del CERME-1, Osnabrueck, Germany.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Dto. Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Booth, L.R. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications, en Hershkowitz, (eds.), pp. 307-3 12.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Chilcdren´s strategies and errores. A report of the strategies and errores in Secondary Mathematics Proyect*. Winsor, England: NFER-Nelson.

Bransford, J. & Schwartz, D. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Eds.), *Review of Research in Education*, 24, 61-101. Washington DC: American Educational Research Association.

Davis, R., Jockusch, E. & McKnight, C. (1978). Cognitive processes involved in learning algebra. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 2(1), 10–320.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Greeno, J. G. (1997). Response: On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.

Greeno, J.G. (1998). "The situativity of knowing, learning, and research". *American Psychologist*,*53* (1), 5–26.

Greeno, J. G., Moore, J. & Smith, D. (1993). The Institute for Research on earning. Transfer of situated learning. In D. K. Detterman& R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction*, (pp. 99-167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-580.

Kieran, C. (1992). "The Learning and Teaching of School Algebra", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Nueva York, MacMillan.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and viceversa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.

Rojano, T. & Martínez, M. (2009). From Concrete Modeling to Algebraic Syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In S. L. Swars, D. W Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 235-243). Atlanta, GA: Georgia State University.

Matz, M. (1980). "Towards a Computational Theory of Algebraic Competence", *Journal of Mathematical Behaviour*, *3*(1), 93-166.

Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), Intelligent Tutoring Systems, London: Academic Press.

Vergnaud, G. & Cortes, A. (1986)."Introducing algebra to low level 8th and 9th graders", en Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics Educational, Londres, pp. 319-324.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or supportfor the solving of linear responses to timed mathematics test. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Um Panorama das Disciplinas de Fundamentos sobre a Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

Lia Corrêa da Costa
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
n_liaccs@hotmail.com
Saddo Ag Almouloudg
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
saddoag@gmail.com

Resumo

Este artigo refere-se a uma parte da nossa pesquisa de Doutorado, a qual se encontra em desenvolvimento, surgida das inquietações da prática ao lecionar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no curso de licenciatura plena em Matemática. As disciplinas de nivelamento são organizadas adequadamente com conteúdos do ensino médio e cursadas anteriormente à disciplina de Cálculo. Nossa intenção é mostrar a sua importância para que se tenha um referencial de aproveitamento do ensino de Cálculo. O panorama abrange a contribuição das disciplinas de nivelamento, com relação a disciplina de Cálculo, destacando o aumento da média em torno do índice de 70% de aprovações dos alunos matriculados. Índice alto e incomum nas experiências dos convívios de sala de aula, pelo teor de complexidade do Ensino e Aprendizagem do Cálculo.

Palavras chaves: educacão, matemática, ensino de cálculo diferencial e integral, disciplina de nivelamento.

O desafio de ensinar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

É um desafio abordar sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, do nosso ponto de vista e sem desmerecer outras disciplinas, consideramo-lo fundamental e como base para outras disciplinas das ciências exatas. A partir das reflexões, discussões, debates, congressos, cursos de pós-graduação, grupos de pesquisas, reuniões pedagógicas ou nos cursos de graduações, vivenciados por professores e alunos, surge uma variedade de questões condizentes aos problemas de ensino e de aprendizagem e que abrange desde o ensino fundamental até o ensino superior que é o ponto de partida para o nosso estudo.

Nessas situações, retratam-se os elevados índices de retenções, desistências e insucessos dos alunos em muitas das universidades, seja pela incompreensão que aflige os alunos ou pela complexidade apontada pelos conceitos fundamentais; as indagações e as críticas dos alunos encontram-se sempre presentes nesses ambientes. De certa forma, significativamente, o Cálculo, "ainda é considerado uma das mais importantes disciplinas matemáticas, tendo em vista a sua utilidade para modelar fenômenos", segundo Cabral e Catapani (2003). No meio acadêmico, nossos dizeres se acentuam ao apontar a existência de defasagens provenientes do ensino médio e a falta de hábito de estudar por parte dos alunos, os quais apontam e afirmam ser o Cálculo, uma disciplina muito difícil de ser compreendida, com conteúdos abstratos e os métodos de ensino empregados pelos professores, na maioria das vezes insuficientes, o que não contribui com a diminuição da discrepância entre o seu ensino e aprendizagem. É preciso repensar o ensino de Cálculo, seja nos cursos de Licenciaturas, Engenharias ou Tecnologias. Entre as diversidades de pesquisas, deparamos com relatos de experiências que ajudam a entender e lidar com fatores que interferem nesse ensino, mediante suas insuficiências. Se o ensino de Cálculo é sofisticado, não deixa dúvidas, entretanto, tal fato não pode simplesmente justificar as dificuldades ou os fracassos enfrentados pelos alunos.

Levantamento bibliográfico

A intenção deste estudo é analisar o teor da articulação das disciplinas de Nivelamento, com relação aos índices de aprovação, retenção e evasão dos alunos até cursarem a disciplina de Cálculo. Rezende (2003) apresentou um levantamento na Universidade Federal Fluminense (UFF) relativo ao período de 1996 a 2000, apontou que "a variação do índice de não aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, no curso de Matemática, este não é inferior a 65%". Introduziu-se na grade curricular a disciplina de Matemática Básica no curso de Matemática/Niterói da UFF no segundo semestre de 1997 para auxiliar a disciplina de Cálculo 1, entretanto, essa disciplina não atingiu sua principal meta que era de reduzir a quantidade de alunos não aprovados em Cálculo 1, cujo índice permaneceu na faixa de 70 a 90%, chegando a ultrapassar a barreira dos 90% no segundo semestre de 1998. Os resultados obtidos com relação à disciplina de Matemática Básica foram bem parecidos com os de Cálculo I, comentou sobre a falsa impressão do problema de Cálculo estar condicionado pela "falta de base" do aluno. Revela a não veracidade e concluiu que os alunos de matemática apresentaram carência de uma formação básica de matemática, e que os professores da disciplina não conseguiram resolver tal problema.

Barufi (1999) concluiu em seus estudos que não basta somente apontar os fenômenos responsáveis pelo baixo desempenho dos alunos em cálculo, é preciso tornar as investigações desses fenômenos capazes de interferir no ensino e na aprendizagem da Matemática. Dos resultados obtidos entre 1990 a 1995, relacionados aos ingressantes da Universidade de São Paulo (USP), a autora observou elevados índices de reprovações na disciplina de Cálculo, particularmente no Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP). A transformação do curso semestral para anual não trouxe uma melhoria significativa, a taxa de não aprovação (alunos reprovados por nota, falta ou desistência), na disciplina de Cálculo para Funções de uma Variável Real (denominada MAT 135) foi de 66,9%, em Cálculo Diferencial e Integral (MAT 131) o índice atingiu 43,8%. Na tentativa de reoferecer essa disciplina para alunos reprovados anteriormente o índice chegou em 46,9%, em Geociências onde o curso de Cálculo é mais adaptado, a taxa de aprovação foi de apenas 35,1%.

Composição das disciplinas de Nivelamento

Após alterações governamentais, a instituição pública continuou a oferecer o ensino médio e passou a oferecer o ensino superior, dessa forma o curso de Licenciatura plena em Matemática foi implantado conforme parecer CNE/CP 009/2001. Segundo registro, a grade curricular teve validade somente até o primeiro semestre de 2009, acompanhada das seguintes disciplinas de Fundamentos:

1.FCE - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Conjuntos, Equações e Polinômios;

2.FG1 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Geometria 1;

3.FFL - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Funções e Logaritmos;

4.FTC - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Trigonometria e Números Complexos;

5.FSS - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Sistema Linear e Sequências;

6.FCP - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Combinatória e Probabilidade;

7.FGA - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Geometria Analítica;

8.FG2 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Geometria 2;

9.FED - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Estatística Descritiva.

Ressaltando que nos três primeiros semestres, somente as disciplinas de FCE, FFL, FTC, FSS e FGA foram oferecidas, totalizando 285 horas. Abaixo, encontram-se as tabelas de 1 a 9 que com os respectivos índices dos alunos ingressantes, desistentes, matriculados, aprovados e reprovados no curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Tabela 1

Distribuição das disciplinas básicas 1º semestre de 2008.

	Total alunos ingressos: 36		Total de alunos desistentes: 03			
Disciplinas	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FSS	36	100 %	24	66,67 %	12	33,33 %
FTC	36	100 %	23	63,88 %	13	36,12 %
FCE	36	100 %	23	63,88 %	13	36,12 %
FFL	36	100 %	21	58,33 %	15	41,67 %
FGA	24	66,67 %	16	66,67 %	08	33,33 %
CD1	22	61,11 %	16	72,73 %	06	27,27 %

Fonte: pública.2008.

A tabela 1 apresenta a primeira turma ingressante no curso de Licenciatura Plena em Matemática, ocorrido no ano de 2008. Dos trinta e seis estudantes ingressantes, apenas seis desistiram. Das nove disciplinas de Fundamentos apresentadas, observa-se que cinco foram introduzidas no primeiro semestre para serem cursadas anteriormente ao Cálculo, apresentando uma média de aprovação em torno de 63,89%, consideravelmente boa, refletindo uma média de aprovação 72,73% na disciplina de Cálculo (CD1). Um diferencial atenuante se comparado atualmente com a atual situação.

Tabela 2
Distribuição das disciplinas básicas 2º semestre de 2008.

	Total alunos ingressos: 38	Total de alunos desistentes: 14				
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FSS	38	100%	26	68,42%	12	31,58%
FTC	38	100%	27	71,06%	11	28,94%
FCE	38	100%	26	68,42%	12	31,58%
FFL	38	100%	21	55,26%	17	44,74%
FGA	21	55,20 %	16	76,20 %	05	23,80%
CD1	20	52,60 %	16	80,00 %	04	20,00%

Fonte: pública.2008.

Na tabela 2, embora tenha aumentado a quantidade de alunos ingressos e desistentes, o percentual de alunos aprovados aumentou para 67,87% com relação ao semestre anterior. Observa-se que o percentual de alunos aprovados na disciplina de Cálculo passou para 80%, um valor excelente no tocante a essa disciplina.

Tabela 3
Distribuição das disciplinas básicas 1º semestre de 2009.

	Total alunos ingressos: 28	Total de alunos desistentes: 08				
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FSS	25	89,3%	12	48,00%	13	52,00%
FTC	28	100%	17	60,70%	11	39,30%
FCE	28	100%	16	57,10%	12	42,90%
FFL	28	100%	09	32,10%	19	67,90%
FGA	18	100%	13	72,20%	5	27,80%
CD1	13	46,40%	10	77,00%	3	23,00%

Fonte: pública.2009.

Nesse semestre, observamos que a procura para o curso de licenciatura foi menor com relação aos dois semestres anteriores. Mesmo assim podemos afirmar que a média de aprovação das disciplinas de Fundamentos atingiu 54,02% e de Cálculo 77,00 %. O que nos faz pensar sobre a importância das disciplinas de Fundamentos para o bom desempenho do Cálculo. Um fator que nos chamou a atenção e que posteriormente averiguaremos, foi o aproveitamento da disciplina

FFL referente ao conteúdo de funções e logaritmo, o índice de reprovação foi alto, atingiu 67,90% com relação aos semestres anteriores, fato que conduziu para a queda do índice de aprovação que ficou em torno de 32,10%.

Após a reestruturação, segundo parecer CNE/CP 009/2001, as disciplinas de Fundamentos foram agrupadas da seguinte forma, caracterizando uma nova grade curricular, totalizando entre elas 300 horas.

1.FFMM1 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Conjuntos, Funções de 1º, 2º e Modular;

2.FELM1 - Fundamentos para o Ensino de Matemática – Exponencial e Logaritmo;

3.FTRM1 - Fundamentos para o Ensino de Matemática – Trigonometria;

4.FMSM1 - Fundamentos para o Ensino de Matemática - Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares;

5.FCPM2 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Análise Combinatória e Probabilidade;

6.FGAM2 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Geometria Analítica;

7.FCAM2 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Números Complexos, Polinômios e equações Algébricas;

8.FG1M2 - Fundamentos para o Ensino da Matemática – Geometria 1.

Até o momento, observa-se que as disciplinas de Fundamentos contribuíram com a disciplina de Cálculo. Os professores mais antigos da instituição, que lecionam atualmente no Ensino Médio e Ensino Superior, relataram que na época em que a instituição ofertava somente o Ensino Médio, abordavam no último ano o ensino de limites e derivadas, entretanto, os alunos tinham muitas dificuldades em relacioná-los, por esse motivo, discutiram-se possibilidades de implementar o currículo da Licenciatura Matemática as disciplinas de Fundamentos.

Neste artigo, apresentaremos um resultado parcial dos nossos estudos, vale lembrar, que as demais informações estarão na nossa Tese de Doutorado.

Tabela 4

Distribuição das disciplinas básicas 2º semestre de 2009.

	Total alunos ingressos: 41	Total de alunos desistentes: 17				
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	40	97,60%	23	57,50%	17	42,50%
FTR	40	97,60%	21	52,50%	19	47,50%
FFM	40	97,60%	14	35,00%	26	65,00%
FEL	38	93,00%	19	50,00%	19	50,00%
FCA	20	49,00%	14	70,00%	06	30,00%
FGA	21	51,20%	13	62,00%	08	38,00%
CD1	17	41,40%	14	82,30%	03	17,70%

Fonte: pública.2009.

Após alterações e agrupamentos, a grade curricular passou a ter seis disciplinas de Fundamentos. Nesse semestre, a quantidade de alunos ingressos superou os três semestres anteriores, a taxa de aprovação das disciplinas de Fundamentos foi de 54,5% e a de aprovação de Cálculo I foi de 82,30%. Um fator que pode ser investigado posteriormente, se refere a diminuição do aproveitamento da disciplina de FFM, vale a pena ressaltar, que na reestruturação permaneceu o conteúdo de Conjuntos, excluindo-se os conteúdos de Equações e Polinômios, acrescentando-se o estudo de Funções de primeiro e segundo grau e função modular. Sabemos que o conteúdo de Funções é primordial para o estudo de Cálculo, mas a alteração desse conteúdo e a diminuição desse índice nos alerta quanto as dificuldades dos alunos relacionadas ao estudo de Funções no Cálculo. Continuando as nossas análises, passaremos para a tabela seguinte correspondente ao primeiro semestre de 2010.

Tabela 5
Distribuição das disciplinas básicas 1º semestre de 2010.

	Total alunos ingressos:38		Total de alunos desistentes:17			
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	38	100%	19	50,00%	19	50,00%
FTR	35	92,10%	14	40,00%	21	60,00%
FFM	38	100%	18	47,40%	20	52,6%
FEL	38	100%	15	39,50%	23	60,50%
FCA	16	42,10%	11	68,75%	5	31,25%
FGA	20	52,60%	12	60,00%	08	40,00%
CD1	15	39,50%	11	73,30%	04	26,70%

Fonte: pública.2010.

Nesse semestre, observa-se que a média dos alunos aprovados nas disciplinas de Fundamentos foi de 50,94% e a dos alunos aprovados no Cálculo 73,30%; embora o desempenho dos alunos tenha diminuído em FEL atingindo somente 39,5%, em geral, a expectativa da aprendizagem do Cálculo é satisfatório por parte dos alunos. Veremos o que acontece no semestre seguinte.

Tabela 6
Distribuição das disciplinas básicas 2º semestre de 2010.

	Total alunos ingressos: 41		Total de alunos desistentes:12			
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	39	95,10%	25	64,10%	14	35,90%
FTR	40	97,60%	30	75,00%	10	25,00%
FFM	41	100%	22	53,70%	19	46,30%
FEL	38	92,70%	22	57,90%	16	42,10%
FCA	26	63,40%	20	76,90%	06	23,10%
FGA	25	61,00%	19	76,00%	06	24,00%
CD1	18	44,00%	12	66,70%	06	33,30%

Fonte: pública.2010.

Nesse segundo semestre de 2010, o índice percentual de alunos aprovados nas disciplinas de Fundamentos foi de 67,27% e de Cálculo 66,70%, baseado em nossas experiências e convivências com outros colegas, podemos afirmar que é um índice satisfatório de rendimento dos alunos. Um fato interessante aconteceu nesse semestre de 2010, ingressei nessa época e lecionei exatamente a disciplina de Cálculo I ou CD1 para essa turma. Fiquei surpresa ao observar que o índice de aprovação desses alunos nessa disciplina estava acima da média com relação às Instituições Públicas e Privadas em que trabalhei anteriormente. Naquela ocasião, ao analisar a ementa de Cálculo, achei muito estranho não constar a revisão de funções antes de iniciar o conteúdo de Limites. Na busca por explicações, compreendi a forma de organização, a intenção e os objetivos com que foram implementadas as disciplinas de Fundamentos, cuja intenção serem cursadas obrigatoriamente no início do curso e antes mesmo do Cálculo. Dando seguimento a nossa análise, encontramos as seguintes informações.

Tabela 7
Distribuição das disciplinas básicas 1º semestre de 2011.

	Total alunos ingressos: 41		Total de alunos desistentes: 19			
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	39	95,1%	19	48,70%	20	51,30%
FTR	41	100%	22	53,66%	19	46,34%
FFM	41	100%	13	32,00%	28	68,00%
FEL	39	95,10%	20	51,30%	19	48,70%
FCA	19	46,34%	09	47,37%	10	52,63%
FGA	19	46,34%	12	63,16%	07	36,84%
CD1	10	24,40%	08	80,00%	02	20,00%

Fonte: pública.2011.

Embora o índice de FFM tenha diminuído com relação ao semestre anterior, não foi tão alarmante a taxa em torno de 49,37% de alunos aprovados nas disciplinas de Fundamentos. Nesse primeiro semestre de 2011, trabalhei novamente com a disciplina de Cálculo I, detectei que a quantidade de alunos aprovados aumentaram-se, passando para 80% o índice de aproveitamento dos alunos. Dando continuidade a nossa análise, encontramos no segundo semestre de 2011 seguinte situação.

Tabela 8
Distribuição das disciplinas básicas 2º semestre de 2011.

	Total alunos ingressos:46		Total de alunos desistentes:23			
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	43	93,48%	17	39,53%	26	60,47%
FTR	41	89,13%	17	41,46%	24	58,54%
FFM	45	97,83%	09	20,00%	36	80,00%
FEL	38	82,61%	10	26,32%	28	73,68%
FCA	10	21,74%	05	50,00%	05	50,00%

FGA	09	19,57%	06	66,70%	03	33,33%
CD1	02	4,35%	02	100%	00	0%

Fonte: pública.2011.

Surpreendeu-nos a quantidade de alunos que entraram para cursar a Licenciatura nesse semestre, o qual totalizou 46 estudantes, entretanto, a quantidade de alunos desistentes foi registrada em 50%, ou seja, a metade dos alunos abandonou o curso. O percentual de alunos aprovados em Fundamentos foi de 40,67% considerado baixo e de reprovados 59,34% considerado alto. Considerando que a quantidade de alunos matriculados em Cálculo corresponde a 8,7%, podemos afirmar que o índice de aprovação atingiu 100%. Com relação aos demais que representam os 91,3% e que permaneceram no curso, neste momento não podemos relatar o motivo pelo qual não se matricularam, mas como o índice de reprovação superou o de aprovação, tal fato pode ter influenciado esses alunos. Seguindo com as análises, temos a seguinte situação.

Tabela 9

Distribuição das disciplinas básicas 1º semestre de 2012.

	Total alunos ingressos:45		Total de alunos desistentes:13			
Disciplinas de Nivelamento	Matriculados		Aprovados		Reprovados	
	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual	Quantidade	Percentual
FMS	40	88,90%	20	50,00%	20	50,00%
FTR	40	88,90%	22	55,00%	18	45,00%
FFM	44	97,80%	10	22,73%	34	77,27%
FEL	40	88,90%	18	45,00%	22	55,00%
FCA	03	6,70%	01	33,33%	01	66,67%
FGA	06	13,33%	04	66,70%	02	33,33%
CD1	03	6,70%	03	100%	00	0%

Fonte: pública.2012.

Nesse semestre observa-se uma pequena melhora do índice de alunos aprovados com relação ao semestre anterior, passou para 45,46%, entretanto, a quantidade de alunos reprovados permaneceu alta, cujo índice de 54,54%. Embora a redução seja significativa na quantidade de alunos desistentes, pode-se dizer que a quantidade de alunos matriculados em FCA, FGA e CD1 foi considerada muito baixa. Apesar três alunos matricularem no Cálculo, o índice de aprovação também atingiu os 100% de aprovados. A priori, enfatizamos que as dificuldades encontradas por essa turma em Fundamentos, também pode ser a causa de uma minoria se matricular em Cálculo.

A seguir apresentaremos um resumo proveniente das informações anteriores.

Tabela 10: Resultados obtidos a partir das tabelas de 1 a 9.

	Aprovados em Fundamentos	Reprovados em Fundamentos	Aprovados em Cálculo	Reprovados em Cálculo
2008/1	63,89%	36,11%	72,73%	27,27%
2008/2	67,88%	32,13%	80,00%	20,00%
2009/1	54,02%	45,98%	77,00%	23,00%
2009/2	54,50%	45,50%	82,30%	17,70%

2010/1	50,94%	49,06%	73,30%	26,79%
2010/2	67,27%	32,73%	66,70%	33,30%
2011/1	49,37%	50,63%	80,00%	20,00%
2011/2	40,67%	59,33%	100,00%	0%
2012/1	45,46%	54,54%	100,00%	0%

Fonte: pública.2008 à 2012.

A partir do levantamento de dados e das análises baseadas nas fontes públicas correspondente ao primeiro semestre de 2008 até o segundo semestre de 2012, concluímos com relação as disciplinas de Fundamentos que 54,9% dos alunos foram aprovados e 45,1% foram reprovados; com relação a disciplina de Cálculo, 81,34% foram aprovados e 18,66 reprovados. Evidenciamos que a quantidade de alunos aprovados sobrepõe a de alunos reprovados. Considerando outros fatores que serão levados em consideração e apresentados em nossa Tese de Doutorado, observamos que a disciplina de Fundamentos implantada no programa do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da instituição pública em questão, contribuiu para a aprendizagem de Cálculo quando comparado com os índices de reprovação e evasão constatadas em nossas leituras preliminares que serviram de embasamento para os nossos estudos. No momento, deixamos parte da nossa contribuição para o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, finalizando o panorama desses subsídios, esperando que num tempo não muito longo, possa ser pensando, discutido e implantado, não uma ou duas disciplinas, mas um conjunto de conteúdos capaz de contemplar a complexidade em aprender Cálculo.

Referências e bibliografias

Barufi, Maria Cristina Bonomi. (1999). A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Baldino, Roberto Ribeiro & Cabral, Tânia Cristina Baptista. (2004). O ensino de matemática em um curso de engenharia de sistemas digitais. In: Cury, Helena Noronha (Org), Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre, RS. EDIPUCRS.

Celestino, Marcos Roberto. (2008). Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Rezende, Wanderley Moura. (2003). O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**.** Tese de Doutorado, Universidade São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Rezende, Wanderley Moura. (2012). O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. Recuperado em18 de outubro, 2012, de http://www.nilsonmachado.net/lca19.pdf.

Cabral, Tânia Cristina & Catapani, Elaine. Imagens e olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço. *Zetetiké Revista de Educação Matemática,* 11 (1), 19, 101-116.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Um Pensamento Reflexivo na Utilização das Tecnologias no Ensino da Matemática

Luiz Carlos de Souza **Ramos** Junior
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
Brasil
profsouzaramos@hotmail.com
Armando **Traldi** Junior
Departamento de Matemática,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
Brasil.
traldi.jr@ig.com.br

Resumo

O pensamento reflexivo na utilização das tecnologias no ensino da matemática é o tema propulsor deste artigo que analisa dentre os principais autores que discutem a reflexão no ensino, a possibilidade de utilização das tecnologias como ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática. Diante de tantas ferramentas tecnológicas, diversas propostas de ensino da matemática utilizando tecnologia são apresentadas aos professores de matemática que de um modo geral não tiveram uma experiência com tecnologias como aluno ou como disciplina curricular no curso de formação. Estabelecer uma analise do processo reflexivo da prática docente na teoria e na prática com uso de tecnologias como ferramenta de ensino e aprendizagem nos possibilita contribuir para inserção de tais ferramentas na formação universitária e na prática profissional dos professores de matemática.

Palavras-chave: Tecnologia, Reflexão, Ensino, Aprendizagem, Formação.

Introdução

Hoje, pela falta de familiarização ou resistência por parte dos professores na utilização das tecnologias no ensino da matemática, reforça cada vez mais um ambiente escolar inerte e sem inovação, apenas pautado em metodologias de ensino tradicionais ou tecnicistas. Esta realidade coopera para rejeição da matemática, por parte dos estudantes, resultando em diversos problemas para a escola e para sociedade. Em outra perspectiva, em nenhum outro momento, como hoje, o conhecimento da matemática, "como matriz do pensamento lógico" (Borba e Penteado, 2012), tem ocupado um papel de destaque na educação escolar, pois o resultado da falta de qualidade no ensino da matemática reflete-se na sociedade e no mercado de trabalho.

Uma forma promissora de transformar as aulas de matemática em algo mais dinâmico, motivador e que contribua com a aprendizagem dos estudantes é a utilização de tecnologias, seja esta uma ferramenta ou uma máquina. Porém, ainda se faz necessário investigar os processos de interferência desta atividade no ensino e na aprendizagem dos alunos. Portanto elegemos está temática para realizar um estudo na ação reflexiva no uso das tecnologias no ensino da matemática, com o objetivo de mostrar através de diversos autores e seus respectivos estudos, como a prática reflexiva poderá contribuir para que o professor possa inserir tecnologias no processo de ensino e aprendizagem.

Para traçar a linha de pesquisa foi feito um estudo tomando como base teórica, as áreas de educação aliada à matemática, que discutem tecnologia na educação, educação matemática e ações reflexivas na prática docente. Dentre os principais teóricos, temos os seguintes autores: Shon (1987), Zeichner (1992), D´Ambrosio (1996), Borba (2004), Neto (2005), Pinheiro (2005), Brito e Purificação (2008), Pimenta (2008), Liberalli (2010), Fiorentini e Narcarato (2010), Borba e Penteado (2012) que permitiram analisar a ação reflexiva na utilização de tecnologias como ferramenta de ensino em sala de aula.

A metodologia adotada nesta investigação é a qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), com análise bibliográfica (Lakatos e Marconi, 1997). Tal metodologia tem sido adotada em diversos estudos na área de educação, pois valoriza o olhar do autor diante de um cenário específico em busca de respostas para um determinado problema. A partir dos autores pesquisados, com base num estudo que visualiza o comportamento humano diante da ação reflexiva e o uso de tecnologia no âmbito da matemática, os autores procuram contribuir a partir da exposição dos dados, pelos quais somos interpretes. Estes dados são descritivos e são extraídos a partir da analise bibliográfica dos autores mencionados. Ainda, a postura do investigador é indutiva, ou seja, não recolhem a dados numéricos ou hipóteses construídas previamente, ao invés disso, as abstrações constroem-se no transcorrer da pesquisa à medida que os dados recolhidos vão se agrupando (Bogdan; Biklen, 1994, p.50). Diante de tantas perguntas o método qualitativo permite que o autor exponha sua compreensão ao debruçar sobre o texto cientifico de forma critica, reflexiva e rigorosa.

Para Bodgan e Bikle (1994) o processo indutivo de análise de dados, que é uma característica da investigação qualitativa assemelha-se a um funil: "[...] as coisas estão abertas no início e vão se tornando mais fechadas e específicas no extremo" (Bodgan e Bikle,1994, p. 50). Ao pesquisar a teoria, com base no contato dos pesquisadores com a bibliografia adotada (Lakatos e Marconi, 1997), é possível verificar que a reflexão e um elemento importante para possibilitar a efetivação de práticas pedagógicas que utilizam a tecnologia como mediação entre o ensino e aprendizagem da matemática. No decorrer deste estudo veremos o significado da ação reflexiva em três momentos distintos de acordo com Liberalli (2010).

A primeira etapa passando pela reflexão teórica que busca subsidio cientifico para aplicação de uma determinada tecnologia como metodologia, pensando em primeiro lugar no aluno como alvo da ação de ensino e aprendizagem. A segunda etapa na aplicação da teoria na prática, ou seja, transformar o conhecimento em ação concreta no “executar” em sala de aula e finalmente para verificar o resultado de sua prática faremos a reflexão critica que retoma a aplicação da teoria em prática na visão Shon (1987). Tudo isto para avaliar se os objetivos foram alcançados e quais mudanças, seja instrumentais ou sociais, ocorreram na aplicação da tecnologia mediadora. Sendo também, muito importante analisar as dificuldades e facilidades encontradas com o intuito de aprimorar e reconstruir as ações para alcançar os alvos estipulados na reflexão teórica.

De acordo com o referencial teórico, a prática reflexiva aliada à utilização de tecnologias, promove a ampliação do conhecimento a partir do entendimento conceitual, tal como, a posse de novas competências e habilidades. Estas são provas reveladoras da ação da tecnologia no cumprimento seu propósito na educação (Borba, 2004). Assim, a partir deste estudo é possível considerar que a tecnologia pode cumprir efetivamente um papel mediador que possibilita produzir mais significado quando propomos o uso reflexivo da tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática.

Tecnologia – uma ferramenta de transformação

A tecnologia tem definitivamente transformado as nossas relações com outros seres humanos e com a natureza. A educação matemática sofreu influências destas mudanças, que muitas vezes não estão presentes na sala de aula. Refletir o impacto das novas tecnologias na prática pedagógica do professor de matemática é uma forma de entender quais serão as novas competências e habilidades que deverão ser desenvolvidas por estes profissionais. Mesmo que, em muitos casos, o currículo escolar não estabeleça parâmetros objetivos para utilização de tais ferramentas como apoio ao ensino e aprendizagem; é função do educador, buscar meios para inserir tecnologias.

Para Brito e Purificação (2008), o fato das tecnologias estarem presentes em todos os setores da sociedade, reforça a necessidade da escola e da universidade estarem preparadas para mudar seu ponto de vista a cerca das tecnologias. É fato que existem muitas discussões quando se fala em tecnologia e matemática. Existe a preocupação que a tecnologia não permita que o aluno pense em como chegar nos resultados, haja vista que calculadoras e softwares sejam capazes de fazê-los perfeitamente, também existe o receio que o ensino à distância afaste os alunos dos professores. De fato os problemas são diversos assim como as tecnologias disponíveis. Entretando a exclusão destas tecnologias de acordo com as autoras pode trazer prejuízos para educação: “ [...] estamos em um mundo em que as tecnologias interferem no cotidiano, sendo relevante, assim, que a educação também envolva a democratização do acesso ao conhecimento, a produção e a interpretação das tecnologias”. (Brito; Purificação, 2008, p. 23).

Netto (2005) afirma que:

> [...] o cidadão deste novo tempo precisa ser criativo, participativo, atuante, preparado para enfrentar as mudanças que ocorrem na sociedade; os professores estão diante

> de novas exigências para ajudar o aluno a cumprir tais objetivos. Entre os desafios está a utilização das novas tecnologias da informação. (Netto, 2005, p. 124).

Assim cabe ao professor interpretar cada tecnologia, dando significado para sua utilização em cada momentos específicos no cenário de ensino da matemática.

Embora exista diversas politicas públicas que promovem a inserção da tecnologia na escola e na universidade, neste estudo iremos focar a reflexão do professor como sujeito mediador entre o ensino e aprendizagem, o aluno como objeto de aprendizagem, a tecnologia como ferramenta mediadora e a prática reflexiva para nortear a uilização das tecnologias.

Outro fator importante é a reflexão aliada a pesquisa, pois desta forma é possível aplicá-la dentro da esfera cientifica, haja vista que muitas vezes somos empulsionados pelo senso comum ou pensamento ingênuo . D'Ambrosio (1996, p.79) diz que: "Pesquisa é o que permite a interface interativa entre a teoria e a prática".

Neste caso, por analogia, em uma das propostas temos o uso da reflexão como interfeice interativa entre a tecnologia e o ensino.

Mediar: Intermediar o ensino e aprendizagem

Antes de iniciarmos o conceito de reflexão, abordaremos brevemente o conceito de professor mediador e tecnologia mediadora. Primeiramente é importante entender o que a mediação segundo Oliveira (1995) é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, a relação deixa então de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Conforme Matui (1995):

> O ato de mediar pressupõe a existência de algo que esta em processo. No construtivismo, o que esta em processo é o pensamento que se movimenta da ação para conceituação, de conceitos espontâneos para conceitos científicos; a mediação é o elo entre o aluno e a matéria, o que confirma o papel do professor. (Matui, 2005)

Segundo Libâneo (1994, pg.88), o trabalho docente é atividade que dá unidade ao binômio ensino-aprendizagem, pelo processo de transmissão-assimilação ativa de conhecimentos, realizando a tarefa de mediação na relação cognitiva entre o aluno e as matérias de estudo. Nesta perperctiva é possivel delinear a importância mediadora do professor no processo de ensino e aprendizagem, confirmando seu papel na estrutura da sala de aula. Weisz apud Matui (1995), entende que o professor é o mediador da aprendizagem do aluno. " Para o exercicío desta mediação, o professor precisa ter instrumentos para detectar com clareza o que os alunos já sabem e o que eles ainda não sabem". Por isso o principal objeto deste estudo é a prática reflexiva, pois desta forma é possível deixar de reproduzir aulas, esperando apenas resultados, para construir o conhecimento com os alunos a partir do conhecimento prévio que eles carregam.

Matui (1995) afirma em seu livro que, como mediador, o professor não se perde no processo, mas acelera a possibilidade de aprendizagem, respeitando a natureza do sujeito e do objeto e, principalmente, do processo de construção do conhecimento. Vale lembrar que de acordo com o discurso desta pesquisa, assim como os autores analisados. Estamos abordando uma relação construtivista em que o aluno ora poderá ser sujeito de aprendizagem, ou objeto de aprendizagem. Quando inserimos a tecnologia como ferramenta mediadora, abrimos espaço para que todos participem do processo de ensino em sala de aula, ou seja, todos podem colaboram com a aprendizagem, uns para com os outros, inclusive entre professor e alunos.

Para Brito e Purificação (2008):

> [...] o cenário tecnológico e informacional requer novos hábitos, uma nova gestão do conhecimento, na forma de conceber, armazenar e transmitir o saber, dando origens a novas formas de simbolização e representação do conhecimento. Para tanto, necessitamos ter autonomia e criatividade, refletir, analisar e fazer inferências sobre nossa sociedade. (Brito; Purificação, 2008, p. 23).

Fiorentini e Narcarato (2010) complementam dizendo:

> Os interesses dos adolescentes refletem as transformações sociais e econômicas que o mundo vem vivendo. A sociedade tecnológica lhes impõe novos hábitos: os jogos eletrônicos, a mídia com suas imagens instantâneas, a internet, dentre outros, trazendo satisfações imediatas a seus desejos e anseios. (Fiorentini; Narcarato, 2010, p.97).

As transformações na sociedade impulsionam transformações na educação e da mesma forma que diversos estudos que colocavam o professor como único elemento de mediação, agora as pesquisas incluem a tecnologia como mais um elemento de mediação entre o ensino e a aprendizagem. Entretanto, um dos principais problemas será entender os resultados de sua aplicação, por isso que o movimento da prática reflexiva (Zeichner, 1993) vem surgindo no meio acadêmico, não somente por causa da tecnologia, mas também pelo "*slogan* da reforma do ensino e da formação de professores no mundo inteiro". (Zeichner ,1993, p.15) . A figura 01 representa a função da tecnologia mediadora, que tão somente ampliar as possibilidades de ensino.

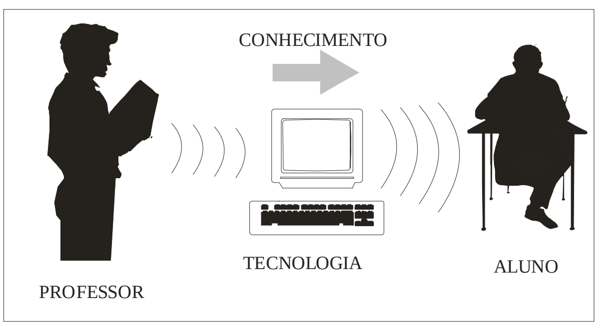


FIGURA 01

A compreensão do conhecimento por parte do professor é fundamental para ensinar com qualidade e tornar a tecnologia como uma aliada. Não cabe apenas transmitir o conhecimento, é necessário ter a compreensão do que esta sendo ensinado, ser capaz de reorganizar, reelaborar e superar dificuldades que envolvem sua didática em sala de aula. Também cabe a ele expressar, questionar e solucionar os problemas que surgem durante a prática.

Refletir: Um ato que pode mudar a sala de aula

Existem diversos autores que falam sobre a reflexão no campo educacional, dos quais podemos destacar John Dewel (1989-1952) que escreveu a cerca do pensamento reflexivo, Donald Schön (1930-1997) que dicutiu o ensino reflexivo como competência do professor e Kennth. M. Zeichner (1993) que faz um discurso a respeito da formação reflexiva de professores. Embora a prática do professor de matemática seja voltada para construção da "matriz lógica", difícil é conscientizar que na sala de aula os exercícios de cálculo não são os principais elementos envolvidos. O conhecimento deve estar voltado para prática e o questionamento das ações, a fim de fortalecer as chances de sucesso na condução do conhecimento.

Nesta perspectiva, Cochran-Smith e Lytle (1999a) defendem:

> Os professores aprendem questionando as suas próprias convicções; identificando temas salientes das suas práticas; formulando problemas; estudando os seus alunos, aulas e escolas; construindo e reconstruindo o currículo; assumindo a liderança no sentido de transformar as aulas, as escolas e a sociedade. (Cochran-Smith e Lytle, 1999a, p. 278).

As tecnologias, quando chegam à sala de aula, mudam completamente nosso cenário de ação. Aumentam-se as expectativas e possibilidades. É muito comum que certas tecnologias sejam ignoradas ou apenas "usadas", ou seja, troca-se a lousa de giz por uma lousa digital para resolver os mesmos exercícios.

De acordo com os estudos de Schon (1987), os profissionais assim formados não conseguem dar respostas às situações que emergem no dia-a-dia profissional, porque estas extrapolam os conhecimentos adquiridos na universidade. De fato isto é uma verdade, pois de acordo com Fiorentini e Narcarato (2010): "Do professor têm sido exigidas competências para as quais não está preparado, pois sua formação inicial não lhe deu e a continuada, quando existe, não aborda essas questões". A partir deste ponto é possivel inserir a ação prática reflexiva em que o professor deve analisar sua propria formação aliada a sua experiência e verificar se está apto para enfrentar os desafios da sua prática profissional em sala de aula. Para Pimenta (2008) o saber docente não é formado apenas da prática, pois também é nutrido pelas teorias da educação. Assim, o conhecimento- teórico- cientifico se torna importante para prática profissional e a partir de então deve ser considerado como elemento chave para promover a inserção das tecnologias em sala de aula.

Para Zeichner (1993)

> O conceito de professor como prático reflexivo reconhece a experiência que reside na prática de bons professores. Na perspectiva de cada professor, significa que o processo de compreensão e melhoria de seu ensino deve começar pela reflexão sobre a sua própria experiência... (Zeichner, 1993, p.17)

A teoria tem importância fundamental, pois incrementa variadas fontes de conhecimento para uma ação contextualizada, permitindo uma leitura correta do contexto histórico, social, cultural no qual está inserido. Afinal o acesso à tecnologia depende de cada um desses fatores.

Segundo Pimenta (2008):

> Pérez-Gomez (1992), referindo-s a Habermas, pontua que a reflexão não é apenas um processo psicológico individual, uma vez que implica a emissão do homem no mundo da sua existência, um mundo carregado de valores, intercâmbios simbólicos, correspondências afetivas, interesses sociais e cenários políticos. (Pimenta, 2008, p.24)

Refletir é um ato de responsabilidade que deve fazer parte da prática do professor de matemática. Como construtores de "mentes" devemos entender que nossa atuação poderá ser um fator decisivo no sucesso ou fracasso de um aluno. Desta forma não caber fazer da profissão uma mera reprodução de conteúdos, ainda mais quando temos tecnologias que podem extrapolar nossa capacidade de ação.

Reflexão no uso das tecnologias

Como base nos estudos de Habermas (1953) sobre o conhecimento humano e Max Van Manen (1977), iremos descrever três formas básicas de prática reflexiva que são: reflexão técnica, reflexão prática e reflexão crítica. De acordo com o autor: "Ao refletir tecnicamente, o professor está ali preocupado em buscar nas descobertas científicas, em estudos, seminários, e conferências, etc, respostas para os seus problemas do dia-a-dia." (Liberali 2010,p.26).

Não conseguiremos entender a finalidade de uma determinada tecnologia sem que haja interesse pela pesquisa. É importante analisar que embora o conhecimento para o ensino de equações no segundo grau não tenha mudado nos últimos 15 anos , a mesma tecnologia que foi inserida há 15 anos atrás, hoje; não mas se aplica nos mesmos moldes e em alguns casos ela se tornou definitivamente obsoleta . Daí a importância entender que, de agora em diante, o conhecimento adquirido no usos das tecnologias não são estáticos, se reconstroem ao longo dos anos e por isso as práticas pedagógicas também mudam. Saimos de uma zona de conforto para uma zona de conflitos e incertezas.

É importante enfrentar esses desafios, pois, segundo Borba e Penteado (2012),

> (...)aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem. (p. 64).

É fato: toda tecnologia foi desenvolvida para uma determinada finalidade. Não compreender seu propósito é um erro que põe em risco o aprendizado do aluno. A busca do conhecimento técnico de cada tecnologia é o primeiro passo para obter bons resultados em sala de aula. Pinheiro (2005), diz

> O conhecer reflexivo e o conhecer tecnológico constituem dois tipos de conhecimentos interdependentes. É necessário ter compreensão do empreendimento tecnológico para dar suporte às reflexões. Nesse sentido, o conhecer tecnológico objetiva a resolução de um problema, ao passo que o objetivo da reflexão está em avaliar até que ponto a solução tecnológica sugerida trará benefícios para a maioria. (Pinheiro, 2005, p. 65).

A próxima etapa se faz na reflexão na prática que seria um momento em que estamos carregadas de informação e é chegada a hora de aplicá-los em sala de aula. Traçar uma correlação entre a teoria e a prática é um fator preponderante para chegarmos ao objetivo da aprendizagem.

Segundo Liberalli (2010),

> A reflexão na prática caracteriza-se essencialmente pela centralização das necessidades funcionais, voltada para compreensão dos fatos. Em outras palavras, a reflexão prática parte de uma tentativa de encontrar soluções para a prática na prática.(Liberalli 2010, p.27-28)

Por fim teremos a reflexão critica que segundo Liberalli (2010,p.32) possui foco na transformação social que ocorre na prática em sala de aula. "[...] ao refletir criticamente, os educadores passam a ser entendidos e entendem-se como intelectuais transformadores, responsáveis por formar cidadãos ativos e critico dentro da comunidade." A reflexão critica também pode ser entendida como sendo a avaliação da teoria colocada em prática, cujo resultado é a transformação social através da aprendizagem.

Visualizando a matemática na visão da autora Maria Muzzi (2004) temos:

> [...] não é hora de buscarmos ressignificar a Matemática com a qual trabalhamos? (...) Não é hora de buscarmos uma Matemática que instrumentalize o cidadão para atuar e transformar a realidade em que vive? Uma Matemática crítica, que o ajude a refletir sobre as organizações e relações sociais? Uma Matemática próxima da vida, útil, compreensível, reflexiva? Uma Matemática que não se mostre perfeita, infalível, mas que seja capaz de ajudar a encontrar soluções viáveis? (Muzzi, 2004, p. 39)

Na figura 2 podemos ilustrar os três momentos que ocorrem na prática reflexiva do professor de matemática. Tendo como ponto de observação a intersecção entre cada momento, pois é fundamental que a teoria seja compatível com a prática e a avaliação condizente com a prática em sala de aula.

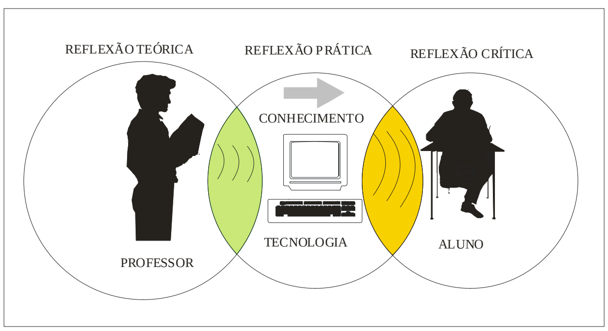


FIGURA 02

Tais refelxões tornam o uso da tecnologia um ato significativo que faz da prática um momento carregado de experiências que coloca os conceitos teoricos bem próximo da prática. Por fim uma das principais funções dos educadores de matemática é esta : colocar o aluno em contato com o conhecimento de tal forma que seja possível construir um ambiente de aprendizagem.

Considerações Finais

Gostaríamos de declarar algumas considerações das quais pudemos observar ao declinar sobre um tema tão contemporâneo que nos deixam inquietos com tantas transformações que vem ocorrendo nos últimos anos. Surge uma preocupação em permitir que a educação matemática também participe deste momento ,assim como, possa usufruir de todo conhecimento teórico que contribua para evolução das metodologias de ensino de matemática que utilizam tecnologias. Explorar a tecnologia nos possibilita quebrar paradigmas que permeiam no ensino matemático, que durante muitos anos resultaram, apenas, um ensino fraco e ineficiente.

Ensinar matemática tem sido um desafio para diversos professores. Existem diferentes politicas públicas que promovem a inserção das tecnologias em sala de aula, com o intuito de melhorar a qualidade do ensino. Porém a tecnologia por si só, não pode cumprir este papel. O professor é um importante articulador no processo de ensino e aprendizagem da matemática, independentemente da tecnologia utilizada. Não importa se é a calculadora, computador ou internet. Investir na formação e no aprimoramento profissional é o primeiro passo para inserir tais tecnologias no ambiente escolar

Nesta investigação podemos observar que os autores, já citados, estão fazendo da reflexão um instrumento eficiente para exploração de novas metodologias de ensino e aprendizagem da matemática, utilizando-se de tecnologias como ferramenta mediadora. Sendo uma forma eficaz de estabelecer metas e corrigir imperfeições que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem . Agora vimos que refletir no uso das tecnologias é uma excelente possibilidade de transformação do ensino de um disciplina que em muitos momentos registram baixos rendimentos nos índices de avaliações nacionais ou internacionais assim como no desânimo por parte dos alunos pela aprendizagem da matemática. Ao analisar a teria da prática reflexica que engloba a teoria e a prática com uso de tecnologias é possível validar sua importância no ensino e na aprendizagem da matemática.

Também acreditamos ser pertinente declarar que não fomos capazes de esgotar o assunto. Desejamos que outros estudos semelhantes surgam após esta publicação como objetivo de delinear diversos aspéctos na formação profissional dentre outras questões que não discutido neste momento. Tenho fé que mais reflexões como essas possam tornar o ensino da matemática aliada a tecnologia, uma forte parceria de desenvolvimento.

Bibliografia

Bogdan, R; e Biklen, S . K (1994). *Investigação Qualitativa na Educação: Uma intridução à teoria e aos métodos*. Trad. Maria J. Alvares, Sara B.dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Editora Porto.

Borba, M.C e Bicudo M. A. V. (org.). (2004). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez.

Borba, M. C.; Penteado, M. G. (2012). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Brito, G. S. e Purificação, I. da. (2008). *Educação e Novas Tecnologias: um repensar*. Curitiba.

Cochran -Smith, M. e Lytle, S. (1999a). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in a communities. *Review of Research in Education*, 24, 249-305.

D'ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. *Perspectiva em Educação Matemática*. Campinas: Papirus.

Fiorentini, D. e Nacarato A. M. (Org.). (2010) *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática*. Editora Musa. São Paulo.

Lakatos, E. M., Marconi, Marina de Andrade. Pesquisa. In: *Técnica de pesquisa*. 3.ed. rev. e ampl. São Paulo: Atlas, 1996. cap. 1, p. 15-36.

Libâneo, J. C. (1994). *Didática*. Editora Cortex. São Paulo,.

Liberali, F. C. *Formação crítica de educadores*: questões fundamentais. Coleção: novas perspectivas em linguística aplicada - vol.8. Campinas– SP: Pontes Editores, 2010.

Matui, J. *Construivismo: teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino*. São Paulo: Moderna, 1995.

Muzzi, M. Etnomatemática, Modelagem e Matemática Crítica: novos caminhos. In: *Presença Pedagógica*, v. 10, n. 56, mar./abr.2004. p. 31-39.

Netto, Alvim Antônio de Oliveira. *Novas Tecnologias & Universidade: da Didática Tradicionalista à Inteligência Artificial*. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2005.

Paulo: Cortez, 2000.

Oliveira Marta kohl et al (2001). *Piaget – Vygotsky: novas contribuições para o debate*. 6 ed. São Paulo: Editota Ática.

Pimenta, Selma Garrido (Org.). Saberes pedagógicos e atividade docente. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2008.

Schön, Donald A. (1995). Formar professores como profissionais reflexivos. In: A. Nóvoa, *Os Professores e sua Formação*. Portugal (Lisboa): Publicações Dom Quixote, (2.a edição).

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Una experiencia de formación continua con educadores matemáticos en Costa Rica

Andrea Araya Chacón
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
andrea.arayachacon@ucr.ac.cr

Resumen

Este artículo tiene como objetivo exponer el proceso de concepción y ejecución de un proyecto de formación continua para educadores matemáticos en Costa Rica. Así, en el texto se especifican los constructos teóricos de la Didáctica de la Matemática que han sido útiles para orientar los diseños de lección y los análisis de la implementación de dichos diseños. También se precisan los cambios metodológicos que se han realizado, explicando las limitaciones encontradas durante el proceso.

Palabras clave: formación continua, formación permanente, experiencia de formación, educadores matemáticos, educación matemática.

[1]La Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, a través del proyecto Juan Félix Martínez, ofrecía desde 1998 un programa de formación continua para profesores de matemáticas ejerciendo en Secundaria. Inscrito como proyecto de Acción Social, se les proporcionó a los docentes participantes, principalmente herramientas sobre conocimiento matemático al asistir a cursos de pre-cálculo y cálculo, con el objetivo de mejorar su formación para reflexionar sobre su labor en el aula.

---

[1] Los primeros cinco párrafos de esta sección son tomados de los “antecedentes” del proyecto escrito presentado por la proponte para su inscripción en Vicerrectoría de Acción Social de la Universidad de Costa Rica a finales del año 2011.

Desde el año 2007, el proyecto Juan Félix Martínez fue absorbido por el proyecto MATEM (Matemática en la Enseñanza Media[2]), quedando inscrito como un objetivo de un proyecto de Acción Social más global. El proyecto MATEM ofrece cursos de Matemática Elemental y Cálculo como opciones para contribuir en la formación matemática de los profesores que laboran en la educación Secundaria (y prioritariamente, cuyos estudiantes participan en MATEM), teniendo como premisa que una mejor preparación matemática de los docentes permitiría que los estudiantes obtengan una educación de mayor calidad, mejorando a su vez el rendimiento académico.

A partir del año 2010 y hasta la fecha, se ha trabajado con este grupo de docentes y otros, bajo otra perspectiva, la concepción de lecciones de matemáticas, que posteriormente son experimentadas y evaluadas. En este sentido, la experiencia de formación continua (proyecto ED-2927 IREM-SJ-UCR) que se comparte en este artículo, está orientada a ofrecer a educadores de matemáticas un espacio de formación e investigación vinculado con las problemáticas profesionales del docente y la aplicación de herramientas didácticas en el diseño y análisis de lecciones.

Esta orientación es más próxima a la labor que llevan a cabo desde 1969 en Francia los Institutos de Investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM: *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), en donde la proponente de este artículo participó durante el año 2004. Según Douady (1998), estos institutos tienen como objetivo hacer avanzar la investigación en didáctica de la matemática, tomar parte en la formación inicial y continua de los profesores de matemática, así como desarrollar documentos y divulgarlos para el uso de docentes y sus formadores.

Actualmente, los IREM funcionan en una red que asocia profesores de primaria, secundaria y de educación superior. Centran sus investigaciones sobre las perspectivas y problemáticas específicas que aparecen en cualquier nivel de enseñanza de las matemáticas; contribuyen a la formación de profesores a través de acciones que se apoyan fuertemente en investigaciones fundamentales o aplicadas; y tienen una visión de producción y difusión de material de apoyo educativo, lo que les lleva a producir, escribir o editar artículos, brochures, libros de texto, revistas, programas, documentos multi-media, etc. (Portail des IREM, s.f.); así como a organizar encuentros y congresos.

Ahora bien, las condiciones ofrecidas a los participantes de los IREM en Francia (por ejemplo, el Ministerio de Educación asigna carga para participar en la formación e investigaciones que se realizan en estos institutos, el docente IREM tiene flexibilidad de horario en el centro educativo en donde labora para poder asistir a las sesiones de trabajo durante todo un día a la semana, en general los docentes tienen alrededor de 15 horas lectivas a la semana, están vinculados con universidades que cuentan con varios especialistas en Didáctica de la Matemática que también participan en las investigaciones, entre otras) no son las mismas posibilidades de los educadores matemáticos en Costa Rica; por lo que el reto del proyecto consiste en acondicionar un espacio que ofrezca a los docentes de matemáticas reflexión, formación e investigación sobre las experiencias de diseño, implementación y análisis de lecciones, desde sus propias

[2] Con este proyecto se ofrece a los estudiantes de décimo (16 años) y undécimo año (17 años) la posibilidad de aprobar los primeros cursos de matemática que se imparten en la Escuela de Matemática de la UCR para carreras relacionadas con administración e ingeniería.

condiciones de trabajo (atención a clases de 30 a 40 estudiantes, carga académica de al menos 28 horas lectivas a la semana, sin asignación de carga para la formación continua, por ejemplo).

El reto descrito en el párrafo anterior se asumió al inscribir a finales del año 2011 el proyecto IREM-SJ-UCR: Investigación y formación continua en enseñanza de la matemática, con el siguiente objetivo general: "avanzar de manera conjunta y cooperativa, profesores de educación secundaria y universitaria, en su formación continua para el diseño, implementación y análisis de lecciones de las matemáticas"; y los siguientes objetivos específicos:

1. Actualizar la formación de los docentes de Secundaria en herramientas teóricas y prácticas de la Didáctica de la Matemática para la descripción y el análisis de la labor docente.
2. Diseñar e implementar lecciones de matemáticas orientadas por herramientas didácticas y otras propuestas sobre el tema.
3. Analizar la implementación de los diseños elaborados y retroalimentarlos para futuras aplicaciones.
4. Difundir los trabajos elaborados en el IREM-SJ-UCR como material de apoyo a docentes en ejercicio.

En este artículo se sintetizan los principales resultados y conclusiones entorno a la puesta en práctica de este proyecto de formación continua. En una primera sección se describe el inicio de la experiencia con un grupo de 16 profesores de Secundaria: herramientas teóricas y aspectos metodológicos que orientaron el trabajo, así como las limitaciones encontradas para alcanzar los objetivos previstos. En la segunda sección, se describen los cambios metodológicos y teóricos que tuvieron lugar para reestructurar la dinámica del proyecto. Seguido, se describen otras herramientas de análisis de las implementaciones de los diseños que se han incorporado.

Inicios de una experiencia de formación continua …

En el año 2010, como lo indicamos anteriormente, iniciamos un proyecto piloto de formación continua, con una dinámica de trabajo inspirada en la experiencia de la proponente en el IREM de Toulouse. En ese momento, la formación se estructuró para todo el año lectivo, orientada por las cuatro fases que expone Artigue (1998) de la metodología de la ingeniería didáctica: (1) análisis preliminar, (2) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, (3) experimentación y (4) análisis a posteriori y evaluación; para temas de la unidad de Funciones, según el Plan de Estudios del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005). Durante el primer semestre (de marzo a junio) se abordaría de la primera fase el "análisis epistemológico como parte de los contenidos contemplados en la enseñanza"; mientras que en el segundo ciclo (de agosto a noviembre), las siguientes tres fases.

Con esta disposición, la dinámica de trabajo convocaba a los docentes participantes a sesiones presenciales de dos horas semanales, durante las cuales las responsables de la experiencia iniciaron retomando los fundamentos matemáticos de las funciones como contenido escolar. Ahora bien, dado los vacíos matemáticos que los participantes evidenciaban a partir de sus preguntas o comentarios, y las constantes intervenciones de los profesores que precisaban sus experiencias didácticas en torno al tema (dificultades que presentan los estudiantes, estrategias de mediación utilizadas, conveniencia de ciertos ejercicios sobre otros, desempeño de los estudiantes en la prueba nacional de Bachillerato, etc.), se consideró pertinente dedicar ese primer semestre a retomar la fundamentación matemática y vincularla con la transposición didáctica que los docentes realizaban en cuanto al "saber enseñado". Esto implicó una reestructuración en el planteamiento original.

Ahora bien, es cierto que durante el ciclo los profesores manifestaron lo provechoso de la actividad; sin embargo, la mayoría priorizaba avanzar en los temas didáctico-matemáticos, en particular, la puesta en práctica de herramientas didácticas que les fueran "de utilidad en el aula". Por esta razón, para el segundo ciclo lectivo se inició la experiencia exponiendo una descripción de la noción de *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) propuesta por Y. Chevallard, las cuales, siguiendo a Rodríguez (2005),

> se caracterizan porque parten de una cuestión generatriz que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999). Así, esta cuestión generatriz se convierte en la razón de ser de las praxeologías que son construidas en su proceso de estudio.

Para comprender mejor lo anterior, se describieron y comentaron las nociones de (OM) *organización matemática* (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997; Chevallard, 1999; entendida en la TAD como un modelo general de una actividad humana formado por un bloque práctico: los tipos de tarea y las técnicas para resolverlas; y un bloque logos: la tecnología que explica y justifica la técnica, y la teoría que justifica y explica la tecnología), *institución* (Chevallard, 2003; entendida como un dispositivo que permite – e impone – a sus sujetos ciertas maneras de hacer y de pensar) y la *visión monumentalista* de las matemáticas escolares, en la que se afirma que los conocimientos escolares son "mostrados" a los alumnos como si se tratara de exhibiciones o exposiciones de arte. De hecho, la noción de AEI, surge para mitigar los efectos del *monumentalismo*, priorizando la búsqueda de las *razones de ser* de las OM; es decir, (re)construyendo las cuestiones matemáticas a las que los conocimientos matemáticos responden.

En el marco anterior, durante el segundo ciclo del año 2010, los 16 profesores que integraban el equipo conformaron tres grupos, asumiendo cada uno "el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos" (fase 1 de una ingeniería didáctica), así como la concepción y aplicación de una situación didáctica de un tema en la unidad de Funciones. Para diseñar la situación, se debían revisar referencias sobre didáctica de Funciones como Azcárate y Deulofeu (1999), de donde se tomaron o adaptaron ejercicios de interpretación de gráficas que los docentes clasificaron como "novedosos" e "interesantes" (ver Figura 1),

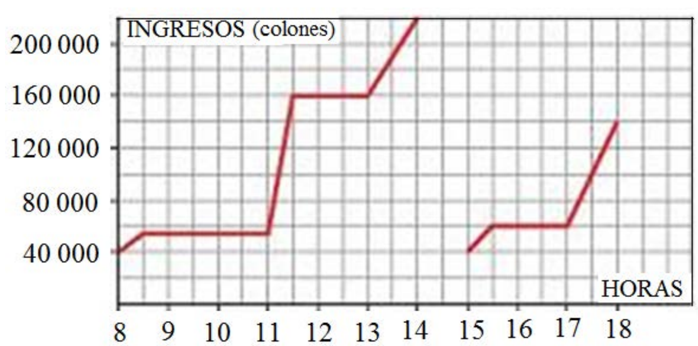
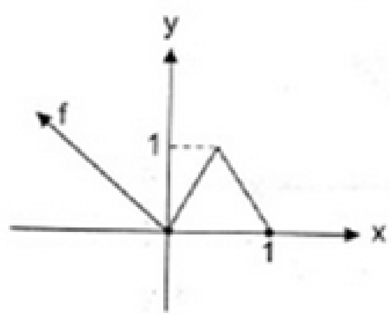


Figura 1. Material adaptado por los docentes para tareas de interpretación de gráficas.

La gráfica adjunta representa la cantidad de dinero que hay en la caja chica de la soda de un colegio a lo largo del día. a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana? b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura? c) El puesto se cierra a las 2pm y el dueño se lleva el dinero, ¿cuáles fueron los ingresos de antes de esa hora? D) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

y que distan del análisis de gráficas “típico” en las pruebas nacionales de bachillerato (ver Figura 2), en libros de texto comúnmente utilizados, o en general, en las aulas costarricenses con estudiantes de décimo año.



Considere la siguiente gráfica de la función f. De acuerdo con los datos de la gráfica, considere las siguientes proposiciones: I. El ámbito de f es $[0, +\infty[$, II. El dominio de f es $]-\infty, 1[$. De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

Figura 2. Ejercicio típico de interpretación de gráfica (tomado de prueba nacional mayo 2012)

La modalidad independiente con la que trabajaba cada grupo (por ejemplo, definiendo ellos mismos los criterios para realizar análisis y los periodos de trabajo en cada aspecto), no favoreció para optimizar el tiempo durante el semestre, por lo que no se realizaron las aplicaciones de los diseños, ni tampoco todos los grupos alcanzaron las metas propuestas en cuanto a la concepción del mismo. Esto implicó indagar sobre otras metodologías de trabajo para reestructurar el avance y los objetivos a alcanzar por grupo.

Modificaciones metodológicas al proyecto piloto de formación continua

Analizar las descripciones sobre la *Japanese Lesson Study* como base para el desarrollo continuo de docentes, su metodología de trabajo y las varias experiencias publicadas al respecto (Lesson Study Research Group, 2000; Marsigit, 2007; Burghes y Robinson, 2009; Natural Science Foundation, s.f.), fueron determinantes para las decisiones metodológicas que se tomaron para el segundo año de implementación de la experiencia de formación continua que aquí exponemos.

En términos generales, la *lesson study* es un proceso en el cual un grupo de docentes de matemáticas trabajan en conjunto la construcción de lecciones (ver Figura 3):

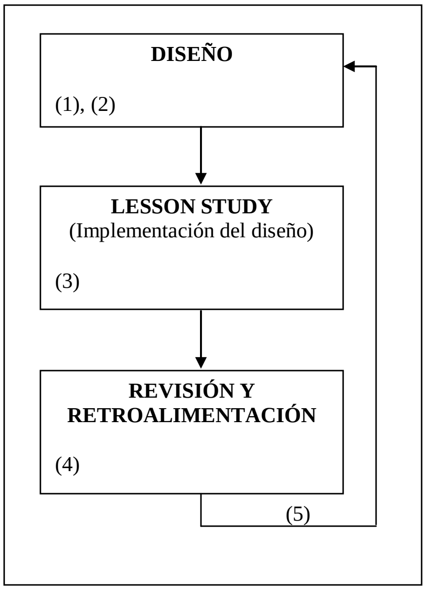


Figura 3. Esquema de la dinámica de trabajo, *lesson study*, para el proyecto piloto

(1) escogen un tema, identifican las metas de su enseñanza, (2) realizan varias propuestas de lecciones que pueden llevarlos a alcanzar el objetivo y escogen la más adecuada, la planean, (3) un profesor del grupo la aplica y los demás observan y toman nota, (4) los docentes se reúnen para analizar y revisar la lección, corregirla y (5) continuar el ciclo (Burghes y Robinson, 2009).

Según los autores la Lesson Study está basada en tres principios básicos:

- es más efectivo aprender y mejorar observando a otros,
- los docentes que tienen conocimientos profundos en pedagogía y les resulta más sencillo realizar este tipo de lección, pueden compartir sus conocimientos,
- cultivar en los estudiantes interés por la materia y hacerlos tomar un rol activo en su proceso de aprendizaje.

Al iniciar el año 2011, durante la primera sesión se analizaron las evaluaciones que los profesores hicieron de la experiencia del año anterior. Se expusieron las razones por las cuales era necesario cambiar la metodología y por qué se asumía la *lesson study* como una opción conveniente. También se presentó y amplió el esquema de la lección de estudio, resaltándolo como la dinámica de trabajo del proyecto.

Se acordó que lo realizado por cada grupo se documentaría en un "Registro de Avances", una guía que se elaboró inspirada en el material proporcionado por el *Lesson Study Research Group* (2000). En éstas se solicitaba:

- Meta, unidad, temática de la lección, semana estimada de aplicación del diseño
- Jerarquía de conocimientos y procedimientos: listado y conexiones entre previos, los esperados a desarrollar con el diseño, y los posteriores (con los que se vinculan los propiciados con el diseño); cada uno debe ubicarse por ciclo lectivo según el curriculum nacional.

- Plan instruccional de la Unidad: distribución del número de lecciones que se dedicarán al estudio de cada temática de la unidad. Debe resaltarse la temática sobre la cual trata el diseño.
- Proceso de aprendizaje. Descripción del diseño expuesto en una tabla en donde cada columna corresponde a: el tiempo estimado para cada episodio de la lección, las actividades de los estudiantes, los aspectos a recordar o apoyos para el docente y las preguntas de evaluación.

Al inicio del semestre también se acordó un cronograma en donde se indicaba lo que se esperaba del progreso de todos los grupos cada semana, en términos del Registro de Avances. Los análisis de las aplicaciones se realizaban oralmente, a partir de las preguntas de evaluación que se habían construido. Únicamente se registraron por escrito los cambios a efectuar en el diseño. Durante el primer ciclo del año 2011, se aplicó un diseño en décimo año para la clasificación de las funciones según su codominio (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva).

Al cierre de la primera mitad del año lectivo, se discutió sobre los diferentes niveles de profundidad que evidenciaban los análisis, según cada grupo; por lo que indagamos sobre otras herramientas teóricas que ofrece nuestra disciplina para el analizar procesos de enseñanza en Matemática. Al estudiar el *Enfoque ontosemiótico* (EOS) *de la cognición e instrucción matemática* (Godino, Batanero, Font; 2009) identificamos varias similitudes entre éste y nuestra primera orientación teórica, la TAD (Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi; 2007; D'Amore, Godino, 2007); por ejemplo, la noción de *institución* y la distinción que a partir de ésta se hacen de los *objetos personales* e *institucionales*. Además, identificamos pautas precisas que Godino (2011) llama "indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", y que se conciben en el EOS como los componentes cuya articulación coherente y sistémica definen la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Al inicio del segundo ciclo, la responsable del proyecto expuso los principales conceptos del EOS, ampliando sobre los criterios de idoneidad didáctica y sus características. Sobre esta temática, se confeccionó una ficha resumen que incluía el esquema en la Figura 4 y seis tablas que precisan los componentes y descriptores de cada criterio (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2011).

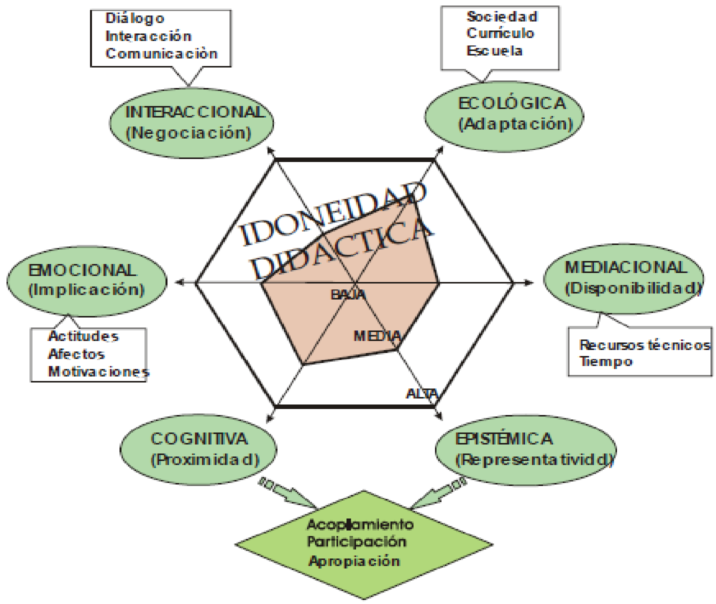


Figura 4. Componentes de la idoneidad didáctica (Tomado de Godino, Batanero y Font, 2009)

Estos criterios se consideraron durante el segundo ciclo del año 2011 al elaborar los diseños de lección. Durante ese año, en grupos de tres a cinco personas, se construyeron *lessons study* para las siguientes temáticas: áreas sombreadas (undécimo año, estudiantes de 17 años), inecuaciones de grado mayor que uno (décimo año), propiedades y simplificación de radicales (noveno año, estudiantes de 15 años).

Durante el periodo indicado se volvió a implementar, por la misma profesora en un colegio técnico profesional, el diseño sobre clasificación de funciones según su codominio, que se había elaborado el año anterior. Esta segunda aplicación y sus respectivos análisis fueron el insumo para elaborar y publicar un corto artículo en una revista local (Vargas, Venegas, Chacón y Araya, 2011).

Inscripción oficial del proyecto de formación continua

En las evaluaciones de la experiencia por parte de los docentes participantes, aplicadas a finales del año 2011, éstos indicaban su alto grado de satisfacción al "ver las metas alcanzadas" en cuanto al diseño, aplicación, análisis y difusión. Así mismo, se calificó positivamente la nueva dinámica de trabajo y la forma en que se incorporaron los constructos teóricos que orientaban los diseños. Por estas razones, se decidió inscribir oficialmente un proyecto de Extensión Docente de la Escuela de Matemática en la Universidad de Costa Rica, con una vigencia aproximada de dos años.

Para el año 2012, se revisaron otras herramientas teóricas que apoyarían la implementación y el análisis de los diseños, desarrolladas en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Así, el proyecto inició analizando la exposición de Sadovsky (2005a) sobre *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*. El objetivo del análisis era comprender los conceptos de *contrato didáctico*, *medio*, *devolución* y *adidacticidad*, para que los profesores los aplicaran en el análisis de sus prácticas docentes. Como material complementario se empleó una traducción libre del informe de observaciones de la situación didáctica "Puzzle" presentada en Brousseau y Brousseau (1987), y un video de una clase de la Escuela Jules Michelet (material del COREM[3]) en donde se realizó una de las aplicaciones del “Puzzle”. Se elaboraron fichas resumen de los cuatro conceptos ya mencionados.

Dado que durante este año lectivo se aprobaría una reforma curricular del Plan de Estudios de Matemática en educación preuniversitaria en nuestro país (de primer grado al décimo primero, estudiantes de 7 a 17 años), se trianguló la información sobre procesos matemáticos en los Fundamentos de esta propuesta ministerial y los descriptores de los criterios de idoneidad, ampliando la ficha resumen que se tenía sobre el tema. En el Apéndice A se enlistan los elementos del “Registro de Avances” que actualmente se utiliza en el proyecto.

En el año 2012 se construyeron *lesson study* para las siguientes temáticas: cálculo mental (para segundo ciclo de la educación Primaria, estudiantes de 10 a 12 años), introducción al concepto de variable (octavo año, estudiantes de 14 años) e introducción al concepto de fracción algebraica (octavo año). Once profesores participantes del proyecto expusieron sus investigaciones (Alfaro, Ballet, Cerdas y Venegas, 2012; Araya, Castillo, Madrigal y Vargas, 2012; Chacon, Trejos, Vargas y Venegas, 2012) en el Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa organizado por el Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA).

Para este año 2013, se iniciaron las sesiones de trabajo discutiendo sobre *La actividad matemática como “asunto” de la enseñanza* (Savosky, 2005b) y *El espacio social de la clase* como una *condición de posibilidad para la producción de conocimientos* (Savosky, 2005b). Esto con el objetivo de ampliar y mejorar los referentes conceptuales de los profesores participantes en el proyecto, para analizar sus prácticas docentes.

Este año en el proyecto han participado 18 profesores (3 maestras de Primaria, 11 docentes de Secundaria y 4 profesores de la UCR) distribuidos en tres grupos que abordan las siguientes temáticas: cálculo mental en Geometría, desarrollo del pensamiento algebraico en Primaria e introducción del concepto de logaritmo y sus propiedades. Está proyectada la participación de cuatro docentes en el *IV Encuentro de Enseñanza de la Matemática* organizado por la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica.

Conclusiones

En Costa Rica, los espacios de formación continua o permanente para educadores matemáticos no son abundantes. Lo son aún menos aquellos que no utilizan una modalidad magistral, y que consideran el contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza, adaptando los diseños de lección a condiciones propias de ciertas instituciones educativas. Iniciativas como la expuesta en este artículo, tienen la ambición de responder a factores de diversidad y de contextualización, tal y como lo expone Imbernón (2010) para potencializar una “formación (continua) desde dentro”; realizada de forma conjunta entre docentes universitarios y de educación básica.

[3] Siglas en francés para “Centro para la Observación e Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática”.

Referencias y bibliografía

Alfaro, H., Ballet, B., Cerdas, A. y Venegas, A. (2012). Iniciación al estudio del Álgebra escolar. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.

Araya, A., Castillo, K., Madrigal, F. y Vargas, D. (2012). Introducción al cálculo mental en la escuela Primaria. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.

Artigue, M. (1998). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33 – 59). Colombia: Una empresa docente.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1999). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Baba,T. (2007). How is lesson study implemented? En Isoda, M., Miyakawa, T., Stephens, M. y Ohara, Y. (Eds.) *Japanese Lesson Study in Mathematics. Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement* (pp. 2 – 7). US: World Scientific Publising.

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Francia: IREM de Bordeaux.

Burghes, D. y Robinson, D. (2009). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning.* Berkshire: CfBT Education Trust.

Chacón, D., Trejos, A., Vargas, K. y Venegas, A. (2012). Áreas sombreadas en Secundaria. Una propuesta para su enseñanza. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221 – 266.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. En Maury, S. y Caillot, M., *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81 – 104). Paris: FABERT.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Enseñar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

D'Amore, B. y Godino, J-D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *RELIME*, 10(2), 191 – 218.

Douady, R. (1998). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 1 – 5). Colombia: Una empresa docente.

Godino, J-D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas digitales de XIII Conferencia interamericana de educación matemática*, Recifre, Brazil, 26 – 30 Junio del 2011.

Godino, J-D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la congnición e instrucción matemática. *Relime*, 9(1), 117 – 150.

Godino J-D., Bencomo, D., Font, V., Wilhelmi, M. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J-D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2007). Articulación de marcos teóricos en didáctica de las matemáticas. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, J. (Eds). *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctica (TAD)* (pp. 53 – 83). España: Universidad de Jaén.

Godino, J-D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Imbernón, F. (2010). *La formación permanente del profesorado. Nuevas ideas para formar en el innovación y el cambio.* España: Graó.

Le Portail des IREM (s.f.). Página oficial de los IREM en Francia. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/spip.php

Lesson Study Research Group (2000). *Lesson study work samples*. Recuperado de http://www.tc.columbia.edu/lessonstudy/worksamples.html

Marsigit (2007). Mathematics teachers' professional development through lesson study in Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(2), 141 – 144.

MEP (2005). *Plan de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica*. SJ: MEP.

Natural Science Foundation (s.f.). *Lesson study communities project in Secondary Mathematics*. Recuperado de http://www2.edc.org/lessonstudy/lessonstudy/

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Sadovsky, P. (2005a). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P., *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 12 – 68). Argentina: Zorzal.

Sadovsky, P. (2005b). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Argentinca: Libros del Zorzal.

Vargas, K., Venegas, A., Chacón, D. y Araya, A. (2011). Clasificación de las funciones según su codominio. Propuesta didáctica. *Variables*, 12(3), 16 – 18.

Apéndice A

Elementos del "Registro de Avances" utilizado en el proyecto

1. Concepción de Matemática para los integrantes del grupo (*Dar elementos de respuesta a ¿qué es matemática y qué es hacer matemática? Incluir reflexión sobre la existencia de factores que obstaculicen la labor docente para que nuestros estudiantes evidencien en clase una concepción de Matemática próxima a la nuestra. Si existieran obstáculos, ¿cómo superarlos?)*

2. Unidad temática (*Para elegir la unidad y el tema, debe haber algún miembro del grupo que pueda hacer la aplicación en las primeras semanas del mes de* ___________).

3. Propósito del área (*Según el Programa de Estudios. Incluir al menos una referencia más que el grupo investigue*).

4. Habilidades general (*Según el Programa de Estudios y otras que el grupo considere importantes*).

5. Conocimientos nuevos (*Según el Programa de Estudios*)

6. Habilidades específicas a desarrollar (*Según el Programa de Estudios y otras que el grupo considere importantes*).

7. Plan instruccional (*En una tabla se enlistan los conocimientos nuevos de la unidad y el número de lecciones de 40 minutos dedicadas a cada uno. Se señala con un asterisco al lado del número de lecciones, el bloque correspondiente al diseño*.

8. Semana estimada de aplicación del diseño (*Debe coordinarse el desplazamiento de la responsable del proyecto para videograbar la aplicación; así como los permisos para que otros miembros del grupo puedan asistir*).

9. Conexiones: Habilidades necesarias, habilidades a desarrollar y habilidades posteriores

10. Aportes de la literatura sobre aspectos de la Didáctica del tema elegido (*Propuestas metodológicas ya existentes, usos de representaciones, errores frecuentes o situaciones que conducen a errores, recursos, etc. Es probable que existan referencias que aporten sobre la enseñanza o aprendizaje en un área en específico (por ejemplo, el modelo de Van Hiele para aprender – enseñar Geometría). Es necesario considerarlas y adaptar sus aportes a la temática.*

11. Esbozos del diseño de lección (*En pocos párrafos y cuando ya se tenga una idea clara de la secuencia de actividades del diseño de la lección, debemos describir en qué consiste la lección).*

12. Indicadores de los procesos a fomentar (*Se deben elaborar indicadores de los procesos matemáticos que fomentará el diseño: enunciados que se refieran a 'qué debo observar que el estudiante haga, diga, escriba,…, para afirmar que un cierto proceso se promovió. Por ejemplo, si "comunicar" es uno de los procesos a priorizar en el diseño, podríamos incluir indicadores como los siguientes: el profesor invita a los estudiantes a responder una pregunta planteada por otro estudiante o el docente pide a algún estudiante retomar las ideas principales para el cierre.*

13. Diseño de la lección

13.1 Contexto de la aplicación *(Se debe indicar el nombre de la institución, y el profesor que aplicará, fecha, número de aula, hora, número de estudiantes, trabajo de la lección anterior y una descripción de los materiales necesarios para la implementación del diseño).*

13.2 Actividades del diseño (*La lección se estructura en n episodios. Para cada uno de ellos se describe el comportamiento matemático que se espera de los alumnos y del docente, aspectos a recordar durante la implementación y el uso de materiales o recursos*).

14. Análisis según los indicadores de los procesos y las habilidades elegidas. Modificaciones al diseño. (*Es necesario primeramente releer los indicadores y las habilidades elegidas; así como los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica. Luego, observar en grupo el video de la implementación, por episodios. Cada integrante tomará nota del nivel de presencia de los indicadores (habilidades o descriptores). Se deben precisar pasajes – anotar minutos y segundos del video – en donde se interpreta que un indicador/habilidad se verifica o no. Al terminar de observar cada episodio, el grupo discute sobre lo anotado. Antes de pasar al siguiente episodio, deben escribirse las modificaciones a ampliaciones del diseño. Esta dinámica se repite para cada uno de los episodios.*

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Una experiencia de formación en “Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas”

Edgar Alberto **Guacaneme** Suárez
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
guacaneme@pedagogica.edu.co
José Leonardo **Ángel** Bautista
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
jangel@pedagogica.edu.co
Jhon Helver **Bello** Chávez
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
jhbelloc@pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta una descripción de una experiencia de un programa de postgrado para la formación de profesores de Matemáticas en el campo de estudio de la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática”. En esta experiencia se aborda el estudio de algunos asuntos matemáticos relacionados con la idea de curva, el papel de artefactos en la solución de problemas y en la construcción del conocimiento matemático y, algunas implicaciones y posibilidades de participación de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Educación del profesor de Matemáticas, Desarrollo profesional del profesor de Matemáticas, Mediación instrumental, Curva.

Introducción

El Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, desde hace 20 años, ofrece a la comunidad de profesores de Matemáticas la “Especialización en Educación Matemática” [EEM], programa de postgrado que tiene tres intenciones formativas esenciales, a saber: generar hábitos de reflexión sobre la práctica educativa, hacer cotidiano el estudio de las Matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas como fuente de saberes funcionales y, procurar la innovación educativa como reto y fuente de conocimiento.

Para la cohorte 2013, el Departamento aunó trabajos docentes e investigativos de algunos de sus profesores para realizar una experiencia de formación en el campo de estudio de la Historia de las Matemáticas [HM] en la educación en Matemáticas. Este documento reseña algunos aspectos relacionados con la planeación y el desarrollo parcial de la experiencia.

Aspectos preliminares de la experiencia

Hoy en día, a nivel mundial, la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" [HM-EM] constituye un objeto de estudio de una inmensa comunidad de investigadores. Muestra de ello es precisamente la existencia de una inagotable literatura especializada (v.g., Barbin & Bénard, 2007; Berlinghoff & Gouvêa, 2004; Calinger, 1996; Katz, 2000; Katz & Tzanakis, 2011; Shell-Gellasch, 2006; Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson, & Katz, 1995), el desarrollo de estudios de tal relación (v.g., Fauvel & van Maanen, 2000), la realización de eventos centrados en esta (v.g., *European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*), y la existencia de grupos internacionales que la asumen como objeto de estudio (v.g., *International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics*). La relevancia del estudio de esta relación se expresó de manera singular en la "Escuela-seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática" (o CANP-2012), a través del curso titulado "La Historia de las matemáticas como recurso pedagógico en la formación de docentes", orientado por el Doctor Luis Carlos Arboleda, y en la decisión de la "Red de Educación Matemática de América Latina y del Caribe", de seleccionar el uso de la HM en la Educación Matemática, como una de sus siete áreas de interés.

Esta dinámica no ha sido ajena a la comunidad académica colombiana, de tal suerte que actualmente en Colombia se cuenta con un acervo que permite identificar en el conocimiento histórico de las Matemáticas, un potente motor de desarrollo del conocimiento del profesor de Matemáticas y una de las falencias más notable en la educación de los profesores (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b).

Bajo esta óptica, el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional ofreció para el 2013 un plan de formación que aborda el estudio de aspectos del conocimiento histórico desde al menos tres perspectivas, que se articulan convenientemente con la estructura curricular distintiva de la EEM. Esta estructura contempla el estudio, durante un año, de tres componentes (las Matemáticas, la Didáctica de las Matemáticas y la Tecnología en las Matemáticas) y el desarrollo de un trabajo de grado que articula lo estudiado en los seminarios con preocupaciones de los profesores en formación y el equipo docente a cargo de la cohorte de la EEM. Así, inicialmente se propuso estudiar: (i) algunas teorías matemáticas, o fragmentos de estas, que son consideradas hitos en la HM y que vistas en su contexto sociocultural de surgimiento, ofrecen una oportunidad sin igual de comprender las Matemáticas de otras épocas y otras gentes; (ii) algunas implicaciones de la HM en la educación en matemáticas, particularmente en la cualificación y mejoramiento del conocimiento del profesor de Matemáticas y en las implicaciones de su uso en las clases de Matemáticas; y, (iii) el papel de algunos artefactos (v.g., máquinas, instrumentos) que se constituyeron en mediadores instrumentales en la constitución de las Matemáticas y, ocasionalmente, en objeto de estudio de las Matemáticas mismas.

No obstante tal propuesta, antes de iniciar el desarrollo de la misma, se consideró la imposibilidad de abordar la HM en su plena extensión o en sus contenidos fundamentales en un programa de dos semestres y, luego de considerar varios temas u objetos matemáticos, se decidió asumir las curvas matemáticas como objeto de estudio.

Aspectos específicos del desarrollo de la experiencia

Durante el primer semestre de 2013 se ha desarrollado parcialmente la propuesta y para el segundo semestre se completa su implementación. En este sentido, la descripción que sigue, pretende explicitar aspectos de los seminarios llevados a cabo, denominados: "Seminario de Matemáticas I", "Didáctica específica I" y "Tecnología en Ciencias y Matemáticas I".

Seminario de Matemáticas

El Seminario de Matemáticas se diseñó partiendo de dos ideas fundamentales. En primer lugar, que las Matemáticas se constituyen en una construcción social y que los conceptos que hoy aparecen como una obra terminada pueden re-significarse a la luz de los usos sociales que se le asocian desde su misma génesis y a lo largo de su evolución y desarrollo. En segundo lugar, que las Matemáticas no deben entenderse como los resultados de una actividad, sino como la actividad misma; no como un producto terminado, sino como un proceso que alberga tanto los resultados y las técnicas, como los interrogantes, las conjeturas y los métodos que en una época determinada se plantearon algunos personajes para abordar la consideración de un determinado problema.

En ese sentido, con el propósito de que los estudiantes se apropiaran de esta filosofía y de organizar el seminario, se propuso trabajar sobre un concepto en Matemáticas que, aunque vive de manera transversal en los cursos de Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística, y es utilizado como una herramienta para abordar otros objetos matemáticos, no es estudiado formalmente, a saber, el concepto de curva. Específicamente, el seminario se planteó en torno a la pregunta ¿qué es una curva?, y las actividades se diseñaron con el objetivo de que el estudiante identificara las nociones de curva manejadas en ciertas épocas por ciertos matemáticos, estudiando parte de las teorías matemáticas en las que surgían dichas nociones.

Ahora bien, la organización de las actividades se pensó a partir de una línea cronológica de autores y sus trabajos y la elección final de los autores o trabajos se realizó teniendo en cuenta sus aportes al tema. Así, la propuesta de contenidos del curso quedó estructurada como muestra la Tabla 1.

Tabla 1

Estructura temática inicial del Seminario de Matemáticas

	Tema	Representantes
Edad Antigua	Contexto: estado de conceptos (v.g., infinito, número y función); escuelas de pensamiento (v.g., aristotélica y atomista). ¿Qué matemáticas son estudiadas?	Heráclito, Demócrito, Pitágoras, Platón, Aristóteles, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Apolonio
	Curvas mecánicas 1	Hipias (La trisectriz), Dinostrato (La cuadratriz) Nicomedes (La concoide) Arquímedes (La espiral) Diocles (Cisoide)
	Curvas "sintéticas": Las cónicas	Apolonio

Edad Media	Las curvas como relaciones de dependencia	Oresme
Renacimiento y Edad Moderna	Curvas mecánicas 2	Galileo y otros (La cicloide)
	Las curvas como expresiones analítico-geométricas	Fermat, Descartes
	Las curvas como expresiones analíticas	Leibniz, Newton, Euler, Lagrange (funciones, funciones vectoriales, Series) Curva logarítmica
	Las curvas a partir de funciones paramétricas (Cardioides)	Weierstrass (series) Peano, Hilbert, Cantor, Jordan (Ecuaciones paramétricas)
	Las curvas fractales: dimensión	Koch (Punto de vista topológico)

Finalmente, para tratar de buscar respuesta a la pregunta guía del seminario se propuso observar los siguientes elementos: las representaciones de las curvas (ecuaciones, proporciones, gráficas, definiciones), las definiciones de curva (mecánica, sintética, analítica), los sistemas de representación gráfica de curvas, los problemas asociados a las curvas o las características de las curvas (continuidad, suavidad, curvatura, simetrías).

Durante el semestre 2013-I se abordaron los tres primeros temas que aparecen en la Tabla 1; sin embargo, se debe reportar un viraje frente a la previsión inicial del tratamiento de la curva. La idea original suponía tratar de observar cómo la noción de curva históricamente apareció como un mecanismo para solucionar ciertos problemas en Matemáticas, bajo contextos sociales y matemáticos determinados, pero sin considerarla como objeto matemático; no obstante esta previsión, la dinámica del seminario exigió adoptar una postura que implicó el estudio de algunas de las herramientas actuales en Matemáticas que permiten estudiar tales objetos, para luego sí estudiar las curvas como objetos matemáticos y así estudiar las Matemáticas en la historia.

A manera de ejemplo de las actividades realizadas en el Seminario, se puede mencionar que en la tercera sesión, después de realizar una reflexión sobre las Matemáticas y el estado de ciertos objetos matemáticos existentes en la Grecia Clásica, se observó que los problemas clásicos (la trisección de cualquier ángulo, la cuadratura de un círculo y la duplicación de un cubo) que no pudieron ser solucionado con las herramientas platónicas (la regla y el compás) ni bajo la naciente geometría euclidiana, fueron abordados desde una geometría mecánica en la que las curvas eran generadas por el movimiento de ciertos objetos que guardan determinadas relaciones entre ellos. Específicamente, la primera curva mecánica trabajada fue la llamada Cuadratríz de Dinostrato y la actividad inicial consistió en tratar de construir una representación de la curva a partir de la siguiente descripción dada por Pappus:

> Dado un cuadrado *ABGD* describamos con centro *A* el arco *BED*. La recta *BG*, manteniéndose constantemente paralela a la *AD* arrastre al punto *B* en su recorrido sobre *AB*, además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman *AB* y *AD*, es decir el punto *B* recorrerá el arco *BED* en el mismo tiempo que la recta *BG* se traslada a lo largo de *BA*. Es evidente que las rectas *AB* y *BG* coincidirán simultáneamente con la *AD* y, como consecuencia dichas rectas *AB* y *BG* coincidirán en un punto constantemente trasportado por ellas [*z*], el cual describirá una línea cóncava en la misma dirección, tal como la *BZH*, en el espacio comprendido entre las rectas *AB* y *AD* y el arco BED. (Arenzana Hernández, 1998, p. 33)

Después de un extenso análisis y como respuesta a esta tarea surgió la necesidad de comprender las relaciones de dependencia que guardan los objetos allí descritos y la forma en que el tipo de movimiento podía traducirse a un lenguaje conocido. Esta tarea, que se desligó de la actividad principal, permitió a los estudiantes en la siguiente sesión, identificar la riqueza que guarda el estudio histórico de parte de una teoría matemática y la posibilidad de estudiar procesos matemáticos, heurísticas, nociones y significados de ciertos conceptos que hoy no son problematizados.

Ahora bien, en el desarrollo de esta tarea se identificó que bajo el contexto de trabajo, el lenguaje que mejor permitía describir tales relaciones era el de las proporciones, lo que condujo a poder generar una descripción manipulable de las relaciones que generan la curva; sin embargo, surgió otro problema: ¿cómo lograr la construcción de la curva de forma tal que el movimiento permitiera su generación? Para esta nueva tarea, se vio la posibilidad de usar programas de geometría dinámica que junto con la descripción de los objetos y las relaciones que permiten definir la curva, entre ellas las proporciones, conducen a obtener finalmente la representación deseada.

Posteriormente, en otra sesión, y con el objetivo de analizar mejor la curva para poder, entre otras cosas, resolver los problemas clásicos, surgió la idea de tratar de describir la posición relativa de un punto. Por la forma en que se construyó la curva (es decir, a partir del movimiento circular), de forma natural surgió el sistema de coordenadas polares como un sistema bajo el cual la relación dada en la proporción se traducía en una ecuación simple y fácil de interpretar.

En este momento del seminario se generó una reflexión en relación con la pertinencia del estudio de un determinado sistema coordenado y de su utilidad para describir este tipo de curvas que, generadas por el movimiento de un punto, no tienen una ecuación simple en otro sistema coordenado; y, de manera más general, se reflexionó sobre la forma en la que las herramientas utilizadas (las curvas) para solucionar ciertos problemas en Matemáticas (los problemas clásicos) dan paso a la aparición de nuevos objetos (sistemas de coordenadas) y de cómo esos objetos luego pueden ser utilizados para analizar de mejor forma dichas herramientas.

A manera de conclusión, se puede reseñar que al abordar el tema "curvas mecánicas", aparecieron dos ideas, una de las cuales modificó substancialmente el rumbo del trabajo en el seminario. Por un lado se observó una estrecha relación entre la Física y las Matemáticas, ya que al parecer el rastro de un punto o una recta "que se mueve" (de forma rectilínea, angular,…) dependiendo de otros objetos geométricos, se convierte en un mecanismo para determinar una curva mecánica, y por otro lado se estableció, desde el punto de vista matemático, que tales curvas mecánicas se convierten en objetos matemáticos cuando se identifican como lugares geométricos y se utiliza algún sistema coordenado de representación para caracterizarlos (como un todo o como un conjunto de puntos). Esta segunda idea, llevó a cuestionar la necesidad de abordar un sistema coordenado para poder estudiar la curva y ello condujo a estudiar el sistema que mejor se adapta a las condiciones del contexto, a saber, el sistema de coordenadas polares.

Didáctica específica

En este seminario se procuraba estudiar algunas implicaciones de la HM en la educación en Matemáticas, particularmente en las implicaciones de su uso en las clases de Matemáticas y en la cualificación y mejoramiento del conocimiento del profesor de Matemáticas. Se previó que este estudio incorporara tanto la reflexión general enunciada y el tratamiento de ejemplos específicos identificados en la literatura especializada en la relación HM-EM, como la construcción de ejemplos y análisis particulares, a propósito de lo estudiado en los dos seminarios paralelos a este y constitutivos de la estructura curricular de la EEM.

Se planteó entonces que como consecuencia de lo estudiado y realizado en el Seminario se pretendía que los estudiantes mejoraran sus competencias para: (i) explorar reflexivamente el papel innovador, para docentes y discentes, de la incorporación de la HM en las clases de Matemáticas, más allá de la obvia transformación que implica la presencia de algo inusual en estas; (ii) analizar críticamente la incorporación de recursos provenientes de la HM a favor de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; y, (iii) revitalizar la imagen del profesor de Matemáticas en torno a las actividades matemáticas de creación y comprensión del conocimiento matemático.

Para lograr lo anterior se planeó abordar el estudio de preguntas tales como: ¿cómo participa la HM en el currículo colombiano de Matemáticas?, ¿cómo se expresa la relación HM-EM en la actividad de la comunidad académica?, ¿qué tipos de ejemplos existen de la integración de la HM a la educación en Matemáticas?, ¿cuáles son las justificaciones y cuáles las intenciones fundamentales para integrar la HM en las clases de Matemáticas?, o ¿cómo se pueden clasificar las intervenciones de la HM en las clases de Matemáticas?

La manera de abordar tales preguntas no fue uniforme; a continuación, a modo de ilustración, se presenta la manera como se abordó la pregunta sobre qué tipos de ejemplos existen de la integración de la HM a la educación en Matemáticas.

Inicialmente se les propuso a los estudiantes que hicieran una búsqueda bibliográfica de documentos que a su juicio constituyeran ejemplos de intervenciones de la HM en la educación en Matemáticas y que a partir de lecturas exploratorias de los mismos procuraran una clasificación de estos. En respuesta a esta tarea los estudiantes presentaron algunos pocos documentos que habían identificado en la Internet, profundizaron en el estudio de algunos de ellos y expusieron las clasificaciones individuales realizadas. Luego, se le suministró un número considerable de documentos (entre los cuales se encontraban los libros reseñados al inicio de este documento y más de cien artículos extraídos en esencia de revistas del campo de la Educación Matemática) y se les pidió que seleccionaran algunos de estos y mejoraran sus clasificaciones.

Con el conjunto de documentos y de las clasificaciones se discutió y elaboró de manera colectiva una clasificación de documentos que contenía las categorías siguientes: documentos de HM, documentos de reflexiones teóricas sobre la HM en la educación en Matemáticas, documentos que exhiben resultados de investigaciones sobre la comprensión o aprendizaje de ideas matemáticas mediada por la intervención de HM, proyectos de aula o talleres donde se integra la HM en la educación en Matemáticas, documentos que exhiben problemas históricos propuestos en el aula, diseños curriculares generados a partir de la consideración sobre el conocimiento histórico, y documentos que versan sobre la HM en la educación de los profesores de Matemáticas.

Esta visión construida a partir de la clasificación de la literatura, no solo exhibió la diversidad de intervenciones de la HM en la educación en Matemáticas y permitió conocer ejemplos concretos de uso de la HM, sino que además fue el marco para discutir las posiciones personales respecto de tres reflexiones, elaboradas por el profesor del Seminario, para motivar la elaboración de discursos críticos frente a lo estudiado. Las reflexiones planteadas fueron:

- Reflexión 1: Integrar la Historia de las Matemáticas a la enseñanza de las Matemáticas implica un reconocimiento previo de su diversidad, es decir, de las diferencias y semejanzas entre Historia de las Matemáticas y Matemáticas. Para ello quizá sea importante advertir que las Matemáticas pueden ser consideradas, en esencia, una actividad humana intelectual, y por supuesto los resultados de la misma. La Historia de las Matemáticas sería, en consecuencia, una actividad humana que explora, describe y analiza la actividad humana de hacer Matemáticas y sus resultados. Podría decirse también que la Historia de las Matemáticas es un discurso que versa sobre el discurso matemático, es decir un meta-discurso sobre las Matemáticas. Estudiar entonces la integración entre la Historia de las Matemáticas y las Matemáticas (por ejemplo en el marco de un proyecto educativo como el de la escuela, en tanto institución social educativa) implica elaborar un discurso sobre tal integración entre un meta-discurso y un discurso; ese nuevo discurso (además del discurso matemático y del discurso histórico) debería hacer parte del conocimiento del profesor de Matemáticas que procure tal integración; así, el estudio de las posturas teóricas que discuten tal integración, de los ejemplos producidos y comunicados por educadores que refieren experiencias de integración, de las experiencias propias de diseño e implementación curricular de experimentos de integración, etc. constituye una de las principales fuentes de formación de los profesores, y un reto mayor y nuevo para las instituciones y profesionales a cargo de la educación de los profesores de Matemáticas.
- Reflexión 2: Una perspectiva que deviene de las posturas constructivistas en/para la educación reconoce la necesidad de re-crear en las aulas, hasta donde sea posible, las condiciones contextuales y conceptuales en las que el conocimiento matemático se construyó. Si se considera que la Historia de las Matemáticas ofrece, por excelencia, la posibilidad de conocer tales condiciones, es innegable la necesidad de conocer el discurso histórico que las re-crea; pero si se considera que la Historia de las Matemáticas es una hermenéutica sobre el discurso matemático (es decir, un discurso que interpreta los eventos y hechos matemáticos), ¿acaso tendría sentido procurar que tales interpretaciones hagan parte esencial del conocimiento del profesor de Matemáticas?
- Reflexión 3: Como parte de los resultados provenientes de la Historia de las Matemáticas se cuenta con descripciones evolutivas de las Matemáticas, de disciplinas matemáticas, de teorías matemáticas o de objetos matemáticos (conceptos, teoremas, procedimientos, procesos, etc.). Algunas voces, incluso conocedoras del debate entre ontogénesis y psicogénesis (o de manera más precisa entre posturas que afirman o niegan un cierto paralelismo entre la evolución humana del conocimiento y la evolución personal del conocimiento), han enunciado la posibilidad de atender a tales descripciones y asumirlas como base firme para el establecimiento del orden curricular para las matemáticas escolares. Sin embargo, atender a tales voces implica el reconocimiento de problemas cruciales que se refieren a: los ritmos y tiempos de evolución del conocimiento versus los ritmos y tiempos del aprendizaje escolar; la suposición sobre la validez y unicidad de tales evoluciones resultantes del trabajo histórico; la necesidad de comenzar los estudios desde paradigmas no actuales de las Matemáticas; etc.

Infortunadamente, aún no se sistematizan las posiciones que tomaron los estudiantes, pero se tiene la percepción de que estas discusiones ejemplifican en buena medida el nivel al que se aspira que lleguen los profesionales de la educación que reconocen la necesidad de un desempeño profesional que supere la imagen de la docencia como un oficio.

Tecnologías en Ciencias y Matemáticas

En este seminario se pretende construir, alrededor del uso de diferentes instrumentos que se han utilizado en el desarrollo del concepto de curva, un ejemplo que les permita a los estudiantes comprender la importancia del estudio de la HM en el conocimiento que podría ser útil para en el desarrollo y reflexión de las Matemáticas que ponen en juego en las aulas. De igual manera, se pretende construir una idea de tecnología como un cúmulo de conocimientos que se configuran para construir artefactos que permitan simplificar una tarea específica. Con estas pretensiones, se plantean tareas alrededor de dos tipos de relaciones: "conocimiento matemático – elaboración de instrumentos" y "papel de los instrumentos en las Matemáticas – noción de Matemáticas". El desarrollo de las actividades se media por el uso del *Cabri* y *Geogebra*.

Para la gestión del espacio, se proponen esencialmente tres actividades: el análisis de la posibilidad de trazar una parábola con regla y compás, el análisis de instrumentos que históricamente sirvieron para la solucionar el problema de la trisección del ángulo y la determinación de las propiedades que sustentan la construcción de instrumentos para realizar cónicas.

A continuación se presenta información sobre la primera y tercera actividad, desde la pretensión que tuvo el orientador de la asignatura y se describen las producciones realizadas por algunos de los estudiantes.

La primera actividad tuvo como propósito llevar a cabo la reflexión sobre el valor epistemológico de "la regla y el compás" en las Matemáticas griegas. Al establecer la importancia y limitaciones de esta heurística constructiva, se abordó la situación propuesta desde la validez del conocimiento matemático y su rigurosidad. Alrededor del desarrollo de la situación, se pretendía que apareciera la diferencia que se estableció en la antigüedad entre curvas geométricas y mecánicas, la discusión sobre la infinitud de puntos necesarios para establecer el objeto matemático pedido en la construcción y los elementos necesarios que permitirían definir este objeto desde los instrumentos propuestos.

Con respecto al trabajo realizado por los estudiantes, se puede señalar que la discusión se desarrolló alrededor de la construcción de Werner (Río Sánchez, 1999), la cual fue consultada y presentada por dos grupos. Esta consiste en el establecimiento de puntos que pertenecen a la parábola a partir de tomar referencia en un par de líneas perpendiculares *r* y *s* que se cortan en el punto *V*; sobre *r* se construye un punto *D* a una distancia *2p* de *V* y se construyen circunferencias con centro en la recta *r* y que pasan por *D*, las cuales cortan a la recta *s* en los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, … y a la recta *r* en *A'*, *B'*, *C'*, *D'* …, respectivamente. Luego se trazan rectas perpendiculares a las parejas de puntos (*A*, *A'*), (*B*, *B'*), (*C*, *C'*), (*D*, *D'*) y sus puntos de corte determinan la parábola, como se muestra en la Figura 1.

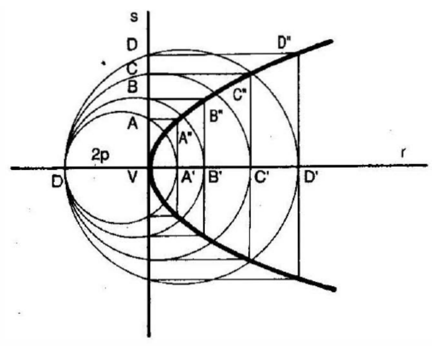


Figura 1 Construcción de una parábola según Werner (Tomada de Río Sánchez, 1999, p. 31)

Junto con los estudiantes entonces se cuestionó esta construcción desde los siguientes aspectos: las posibilidades de trazar curvas con regla y compás, el rigor y validez de la construcción y la finitud del procedimiento. En relación con estos tres aspectos y después de discutirlos y de documentarse sobre aspectos relacionados, acuerdan que en la perspectiva euclidiana la construcción no es válida ni rigurosa; además, establecen que la construcción permite una "aproximación" a la curva, pues sólo se logra la determinación de un conjunto discreto de puntos y que para trazarla se necesitaría un instrumento que permita "trazo continuo", como en las curvas mecánicas.

La tercera actividad abordó el trabajo con instrumentos que fueron utilizados para realizar el trazado de cónicas y tomó como referencia el libro sobre cónicas de Apolonio (Heath, 1896). Este documento, considerado el tratado más importante sobre este tema en la antigüedad, fue la base para abordar el conocimiento sobre estas curvas bajo el enfoque de la geometría sintética. El análisis de los instrumentos, permitió hacer uso de las propiedades descritas por Apolonio, que no son usuales en la aproximación analítica a estas curvas, para realizar construcciones que configuran a las cónicas, más como objetos geométricos que analíticos.

Aunque cada grupo de estudiantes tuvo un instrumento para analizar, el realizado con el trazado de la parábola a partir del parabológrafo de Cavalieri, muestra el tipo de conclusiones y relaciones que los estudiantes encontraron en cada cónica. Así, al intentar justificar por qué la curva que describe el instrumento es una parábola, los estudiantes, realizaron una simulación del instrumento por medio del programa *Cabri* y la verificación de la proposición 11 del libro de Apolonio.

> Proposición 11: Para todo punto tomado sobre la curva, el área del cuadrado construido sobre su *ordenada* es exactamente igual al área del rectángulo construido sobre la abscisa y el lado recto (los lados del rectángulo son el lado recto) y el segmento entre el *vértice* de la curva y el extremo de la ordenada es el diámetro. (Heath, 1896, p. 22).

Así mismo, observan que la definición de *diámetro de la curva* les ofrece un marco de comprensión y justificación.

> Si cada paralela a una dirección dada corta a una curva en dos puntos y los puntos medios de los segmentos entre esos dos puntos están en una misma recta, a la recta generada por los puntos medios de los segmentos se le llama diámetro de la curva. (Heath, 1896, p. 22)

En este contexto realizan la construcción de la Figura 2

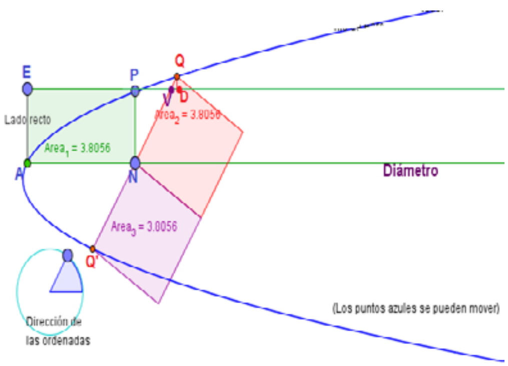


Figura 2 Construcción en Cabri de la propiedad de la parábola presentada por los estudiantes.

A partir de esta construcción realizan la comparación con el instrumento presentada en la Figura 3, determinando que la base de construcción del instrumento se explica desde una definición de parábola que no es frecuente encontrar en la escuela, pero que permitiría entender propiedades geométricas de este objeto.

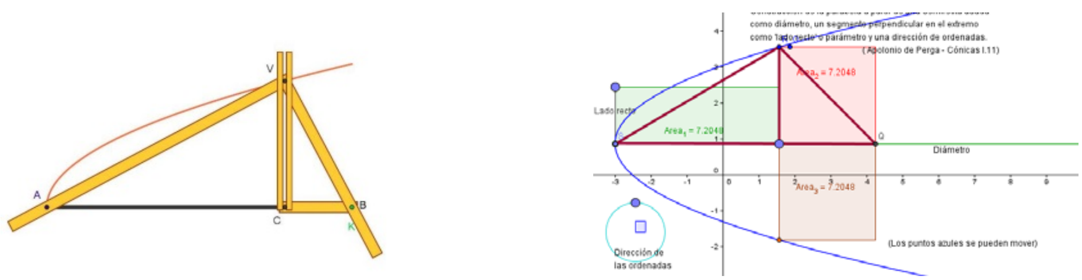


Figura 3 Parabológrafo de Cavalieri comparado con la construcción en Cabri

Algunas conclusiones iniciales

A través del trabajo desarrollado en el "Seminario de Matemáticas" se puede observar que el estudio la HM y particularmente de las Matemáticas en la historia, puede convertirse en una fuente de herramientas para que el docente reflexione sobre algunos de los elementos que en su quehacer intervienen, como la pertinencia de un determinado tema en el currículo, la necesidad de construir una teoría para abordar un objeto en Matemáticas, el significado que adquiere un objeto a la luz del contexto (problemas y situaciones) en el que aparece o se estudia, las relaciones que existen entre otras ramas del conocimiento y las Matemáticas (por ejemplo el cómo otras ciencias o disciplinas ayudan a la generación de conocimiento matemático y viceversa), entre otras cosas.

De manera concreta, en el transcurso del seminario se generaron reflexiones en relación con: el poco conocimiento que se tiene sobre el concepto de curva, el tipo de curvas abordado en la escuela (las gráficas de funciones), la forma en que la Historia permite observar que otras ciencias o disciplinas (como la Física) contribuyeron a la construcción de objetos que aunque no fueron aceptados en su época como matemáticos ahora sí lo son, la forma en que muchos libros de Historia llevan a pensar que la Geometría euclidiana y los trabajos desarrollados bajo la escuela platónica fueron los únicos aportes a las Matemáticas en la Grecia Clásica, la estrecha relación que existe entre las curvas mecánicas y el sistema de coordenadas polares, la posibilidad de modificar el currículo clásico, para abordar el estudio del sistema de coordenadas polares luego de realizar el clásico trabajo en trigonometría y así mostrar otro sistema de representación diferente al usual (cartesiano), la dificultad para manipular un nuevo sistema de representación sin acudir al ya conocido, o la dificultad que existe para interpretar ciertos conceptos a la luz de un nuevo sistema de representación (por ejemplo, interpretar la derivada de una función en coordenadas polares).

Por otra parte, el trabajo realizado en el seminario "Didáctica Específica" efectivamente le permitió a los estudiantes reconocer un amplio campo de investigación y trabajo que reconoce a la relación HM-EM como objeto de estudio, visibilizado, entre otras, por una abundante producción escrita. Por otra parte a partir de la aproximación seleccionada para el curso, los estudiantes pudieron estudiar algunas de las propuestas que colegas, casi siempre de otros países, han diseñado, implementado y evaluado, reconociendo en estas ejemplos a imitar o a utilizar de base para construir propuestas semejantes.

Adicionalmente, varios estudiantes manifestaron que no esperaban algo más del seminario que "recetas" para incorporar la HM en sus clases y que la discusión de las reflexiones presentadas por el profesor del curso (trascritas antes en este documento) constituyeron un reto mayor que los conminó a intentar elaborar un discurso en el que no se sentían muy seguros de tener o no la razón o en el cual ocasionalmente tomaban una postura y luego una opuesta.

Finalmente, en el seminario "Tecnologías en Ciencias y Matemáticas", la primera actividad permitió poner en discusión aspectos no tradicionales de la formación de profesores relacionados con la HM, como lo son: el rigor, la validez y la instrumentalización de aspectos de las Matemáticas. En este sentido, los estudiantes se acercaron a heurísticas clásicas, como las asociadas a las construcciones con regla y compás, y lograron entrever la diferencia entre la solución a una situación problema (v.g., la construcción de una parábola) y una aproximación a la solución. En cuanto a su actividad profesional, la actividad los cuestionó sobre el tipo de problemas que les plantean o plantearían a los estudiantes con regla y compás, al igual que les generó preguntas sobre la relación de los dibujos y construcciones geométricas con el pensamiento geométrico escolar.

Por su parte, la tercera actividad le permitió a los estudiantes formarse en tres sentidos: el primero relacionado, con el propio conocimiento matemático; el segundo, relacionado con la potencia del conocimiento histórico y en especial de una obra como la de Apolonio; y, el último, respecto del papel que puede cumplir un instrumento, modelado en *Cabri* o *Geogebra*, en la comprobación y comprensión de las Matemáticas.

En general, el desarrollo del seminario permitió que los estudiantes a partir de instrumentos utilizados para trazar curvas, reflexionaran sobre: el conocimiento geométrico que tienen de las cónicas, el conocimiento que ponen en juego en las aulas con sus estudiantes, la mediación instrumental que se da al introducir un elemento tecnológico en la resolución de una situación problema y el uso que se le podría otorgar al conocimiento histórico alrededor de su propio conocimiento y el de sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

Arenzana Hernández, V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (28), 31-36.

Barbin, E., & Bénard, D. (Eds.). (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements*. Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Berlinghoff, W., & Gouvêa, F. (Eds.). (2004). *Math through the Age. A Gentle History for Teachers and Others*. Oxton House Publishers & The Mathematical Associations of America.

Calinger, R. (Ed.). (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching*. The Mathematical Association of America.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga, treatise on conic section*. Cambridge: University Press.

Katz, V. J. (Ed.). (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. The Mathematical Association of America.

Katz, V. J., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.

Río Sánchez, J. d. (1999). *Lugares geométricos. Cónicas*. Barcelona: Síntesis.

Shell-Gellasch, A. (Ed.). (2006). *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., & Katz, V. J. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters!* The Mathematical Association of America.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011a). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas* Conferencia presentada en el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas. Bucaramanga.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011b). *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Conferencia presentada en el IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas & V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria. Bogotá.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Uso de software libre para el aprendizaje de la integral definida

Mabel Azucena **Medina**
Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Consejo de Investigaciones. Universidad Nacional de Rosario
Argentina
mmedina@fceia.unr.edu.ar
Héctor Eduardo **Rubio** Scola
Escuela de Electrónica. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Consejo de Investigaciones. Universidad Nacional de Rosario
Argentina
erubio@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Se desarrolla la experiencia de una unidad didáctica en el marco de la teoría de Brousseau y de la Enseñanza para la Comprensión. El Tópico Generativo es la integral definida. Las Metas de Comprensión son la definición de la integral definida y las formas de evaluación de la integral definida. Los Desempeños de Comprensión son actividades autónomas de evaluación de integrales definidas. El propósito de esta actividad es que los alumnos comprendan que pueden calcular aproximadamente una integral definida a través de una suma de Riemann. Las actividades son propuestas a través de material con soporte informático y entre ellas está la realización de un informe sobre la experiencia del cálculo numérico de la integral definida. Posteriormente se analizan los comentarios de los alumnos.

Palabras clave: Enseñanza para la comprensión educación, situaciones didácticas, cálculo integral, Scilab, trabajo autónomo.

Introducción

La materia Análisis Matemático II es una asignatura del segundo semestre de primer año, para los estudiantes de las seis especialidades de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina. En la misma se continúa con el tratamiento de conceptos y aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral para funciones de una variable real, complementando los presentados en Análisis Matemático I.

La Unidad 1 es Cálculo Integral. Se comienza con el problema introductorio de cálculo de áreas, donde partiendo del conocimiento de áreas elementales, como la del rectángulo se obtienen áreas debajo de una curva por el método de exhausción o método de agotamiento (Stewart, 2008 y Thomas, 2006). Éste es el precursor del concepto de Suma de Riemann que permite definir integral de una función en un intervalo. Aparece entonces la primera evaluación de la integral definida, mediante la construcción de la suma de Riemann y el paso al límite cuando la norma de la partición tiende a cero. En este punto el docente desarrolla la clase en forma expositiva-dialogada en un ejemplo de cálculo de integral definida por la definición. Se pone de manifiesto lo laborioso que es el cálculo de la suma ya que se debe recurrir a fórmulas de sumas de potencias de enteros positivos, y el posterior paso al límite. Los alumnos luego trabajan sobre otros ejercicios en el cálculo de valor de la integral.

Con el Teorema Fundamental del Cálculo aparece la segunda forma del cálculo de la integral definida mediante la obtención del función antiderivada del integrando y evaluando dicha función en los extremos de integración. Esta forma de evaluación es recibida con beneplácito por los alumnos, ya que la comparan con la anterior. Suponen además que todas las integrales definidas (entiéndase correctamente definidas) se pueden calcular "fácilmente" por esta segunda forma. Siguiendo con el programa de la materia se trabaja en la obtención de primitivas a través de diferentes métodos, y con el uso de tablas de integración.

Ahora, se instala la pregunta: ¿Cómo se resuelven integrales definidas de funciones cuya primitiva no se puede expresar analíticamente y por lo tanto no se puede aplicar, para el cálculo, la regla de Barrow?

Para responderla se propone entonces una actividad con la utilización de un software libre Scilab (Chancelier et al., 2007). Esta actividad es guiada a través de un material didáctico autocontenido. Este actúa como un "medio" en la teorización de Brosseau (1987), un "dispositivo de apoyo" al estudio a través de los cuales se contextualiza la matemática a enseñar.

En este trabajo se muestra la justificación de la metodología utilizada, el criterio de elección del software libre, el desarrollo de la experiencia y análisis de resultados y por último las conclusiones. Además se adjunta un anexo con el material didáctico utilizado en la experiencia.

Justificación de la metodología usada

En las últimas décadas, los teóricos del aprendizaje han demostrado que los alumnos no recuerdan ni comprenden gran parte de lo que se les enseña. Para comprender ideas complejas y formas de investigación, los estudiantes deben aprender haciendo y deben intercambiar activamente opiniones. Para ello, desde el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (Stone Wiske, 2005) se trabaja a través de:

Tópicos Generativos. Son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc. que ofrecen profundidad, significado, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensiones poderosas por parte del estudiante. Identificamos en este trabajo como tópicos generativos '*el concepto de integral definida*'.

Metas de Comprensión. Son los conceptos, procesos y habilidades que deseamos que comprendan los estudiantes y que contribuyen a establecer un punto central cuando se ha determinado hacia dónde encaminarse. En el trabajo propuesto los estudiantes desarrollarán comprensión en cuanto a*: la definición y las formas de evaluación de la integral definida. ¿Cuáles son las similitudes o diferencias más importantes entre las formas de evaluación? ¿Cuál es la vinculación entre las formas de evaluación?*

Desempeños de Comprensión. Son las actividades que proporcionan a los estudiantes la ocasión de aplicar los conocimientos a una diversidad de situaciones con la guía de un buen entrenador. Ayudan a construir y a demostrar la comprensión de los estudiantes, exigir que los estudiantes muestren sus comprensiones de una forma que pueda ser observada, haciendo que su pensamiento se torne visible. En el trabajo propuesto, estos desempeños de comprensión estarán dados por: *actividades autónomas de evaluación de integrales definidas con lápiz y papel y la evaluación a través de un software. El propósito de esta actividad es que los alumnos comprendan que siempre pueden calcular aproximadamente una integral definida a través de una suma de Riemann.*

Evaluación Continua. La Evaluación Continua es integrar el desempeño y la retroalimentación que necesitan los estudiantes en el desarrollo de la comprensión de un tópico o concepto específico, de tal modo que permitan mejorar sus próximos desempeños. La Evaluación Continua tiene dos componentes principales: establecer criterios de valoración y proporcionar retroalimentación. Es importante que la retroalimentación recoja diferentes perspectivas de las reflexiones de los estudiantes sobre su propio trabajo, de las reflexiones de los compañeros sobre el trabajo de los otros y de los docentes mismos. *En este caso se analizan y trabajan los informes producidos por los alumnos en las horas de clase presenciales.*

¿Por qué elegimos el software libre Scilab?

Existen dos tipos de software de cálculo científico: los programas de cálculo simbólico que 'hacen matemática' y los programas de cálculo numérico, que son principalmente concebidos para las aplicaciones matemáticas. En la primera categoría se encuentran, entre otros, Maple y Mathematica. Estos softwares son utilizados desde hace varios años en las clases de matemática básica de las universidades. En la segunda categoría de programas de cálculo numérico, donde el mercado es más amplio, se encuentran los programas comerciales como Matlab. Aquí se inserta **Scilab**, con la diferencia que es un software libre (al igual que Octave y FreeMath), distribuido con su código fuente.

Scilab ha sido desarrollado principalmente por investigadores del INRIA (Instituto Nacional de Investigación en Informática y Automática de Francia) y de la ENPC (Escuela Nacional de Puentes y Calzadas, Francia) con numerosas contribuciones exteriores, a menudo bajo la forma de toolboxs (ver la página www.scilab.org). El programa se puede bajar de la página anterior, tanto en versiones ejecutables para diferentes configuraciones como en su código fuente. Las ayudas en línea (help) y la documentación se encuentran en inglés y francés.

Scilab posee un intérprete, objetos y funciones adaptadas al cálculo numérico y a la visualización de datos. Además de vectores y matrices (que pueden contener números reales o complejos, enteros, cadenas de caracteres, polinomios, etc.), se pueden definir en **Scilab** objetos más complejos a partir de estructuras y cargar las operaciones correspondientes. Además, el usuario puede agregar a **Scilab** funciones escritas en lenguaje C, C++ o en FORTRAN que se conectan dinámicamente a **Scilab**. Contiene también numerosos útiles de visualización gráfica, gráficas en 2D y 3D, líneas de nivel, curvas paramétricas, animaciones, etc (Chancelier et al., 2007).

Disponibilidad y acceso

En la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, donde transcurre esta experiencia, se dispone de laboratorios donde hay horarios distribuidos por cátedra y horarios de libre uso, además de un laboratorio de libre uso en tiempo completo para los alumnos. A pesar de esto, los alumnos trabajan generalmente en sus propios ordenadores. Los alumnos que cursaron la escuela media en escuelas públicas, han recibido del gobierno nacional una notebook a través del programa **Conectar Igualdad** (http://www.conectarigualdad.gob.ar/). En esta notebook se encuentran instaladas varias aplicaciones de software libre, en particular el programa **Scilab**. Del programa **Conectar Igualdad**, la Facultad también ha recibido notebooks a disponibilidad de los alumnos. Se realiza periódicamente la pregunta si disponen de una computadora con conexión a Internet en sus casas y la respuesta ha sido siempre positiva. La Facultad dispone de una red wifi en todas sus instalaciones, permitiendo el acceso continuo a Internet.

Desarrollo de la experiencia y análisis de resultados

Volviendo al desarrollo del tema de la materia Análisis Matemático II, se ha formulado la pregunta: ¿Cómo se resuelven integrales definidas de funciones cuya primitiva no se puede expresar analíticamente y por lo tanto no se puede aplicar, para el cálculo, la regla de Barrow?

Para responderla se propone una actividad con la utilización de un software computacional. Esta actividad es guiada a través de un material didáctico autocontenido (ver Anexo). Los alumnos se organizan en grupos de hasta tres integrantes y lo realizan fuera del horario de clases. La elección del software libre Scilab permite la descarga “on line” desde cualquier computadora. Los comandos del sistema son introducidos paulatinamente, de manera que el software se puede usar como una calculadora inteligente. Los alumnos generalmente ya poseen conocimientos de utilización de lenguajes computacionales.

La experiencia se ha realizado durante tres años consecutivos, en un curso de noventa alumnos nominales de los cuales participan activamente aproximadamente sesenta alumnos. Estos valores se vienen manteniendo a lo largo en los últimos años. La materia consta de siete horas semanales de clase además de tres horas de consulta a cargo de tres docentes, un profesor de teoría y dos auxiliares simultáneos en las horas de práctica. Las siete horas de cátedra se reparten igualmente entre teoría y práctica. En las horas de práctica y de consulta se realiza una evaluación continua de los alumnos que participan activamente.

Los desempeños de comprensión están dados por las actividades autónomas de evaluación de integrales definidas con lápiz y papel y la evaluación a través de un software. Se realizan en las clases de teoría, de práctica, de consulta y horario extracurricular, ya que todos los alumnos poseen la oportunidad de trabajar en ordenador con conexión a internet.

Del informe que se les pide a los alumnos sobre la actividad, se pueden extraer los siguientes comentarios:

Todos los alumnos han realizado la tabla comparativa de resultados numéricos como la mostrada en el ejemplo, que corresponde a la tarea 1 (Ver anexo).

Con respecto de la tarea 2, que es realizar un informe sobre el desarrollo del trabajo, un 20% de los alumnos no realiza ningún tipo de comentarios, otro 20% realiza comentarios solamente referentes a la tabla. Analizaremos los comentarios del 60% restante, transcribiendo algunas frases de los más representativos.

Se pone de manifiesto:

- Trabajo autónomo "*Me supe manejar bien con el programa Scilab, ya que está muy bien explicado en el archivo como hacerlo para este trabajo", "Incluso yo que no pude asistir a la clase sobre manejo de Scilab, pude realizar sin problemas el trabajo interpretando los ejemplos presentes en las hojas del trabajo práctico", "con la ayuda de la guía y con prueba y error podemos desarrollar bien el trabajo."*
- Vinculación con las asignaturas de informática "*nos resultó muy familiar el ambiente del programa, ya que utiliza funciones similares a las del lenguaje "C/C++", el cual nos enseñan en informática II", "partiendo de la experiencia de Informatica I, que si bien no se utilizan los mismos Softwares la metodología de resolución se asemeja bastante"*
- Facilidad en los cálculos tediosos, *"facilita considerablemente la obtención de resultados"," obtener el resultado de cálculos tediosos de manera rápida y simple"*
- Generalización de los cálculos y apreciación de la rapidez en los cálculos, "*resolución era simple y rápida", "una facilidad que encontramos fue que al lograr hacer prueba para un valor de n, resultaba sencillo realizar los cálculos con los otros valores*"
- Comprensión del tema *"analizamos y comprendimos el manejo del sistema computacional el cual nos facilito la compresión del tema"*, *"Una vez entendidos los conceptos teóricos, el pasaje al software para resolver los ejercicios no fue complicado"*
- Dificultades encontradas "*Las dificultades que encontramos fueron en el método del punto medio a la hora de armar la sentencia"*

Los resultados obtenidos muestran que los alumnos fueron capaces de realizar actividades autónomas, en grupos de hasta tres integrantes. Resolvieron el problema planteado de diferentes formas, en un desempeño flexible. Finalmente se puede decir que las experiencias realizadas podrán ser de utilidad para el futuro profesional y que podrían mejorar los despeños de comprensión en este tópico.

Conclusiones

En el espacio de la materia Análisis Matemático II, se realiza la experiencia de Enseñanza para la Comprensión, donde el tópico generativo es la integral definida. Las metas de comprensión son la definición de la integral definida y las formas de evaluación de la integral definida. Los Desempeños de Comprensión son las actividades autónomas de evaluación de integrales definidas con lápiz y papel y la evaluación frente al ordenador. El propósito de esta actividad es que los alumnos comprendan que siempre pueden calcular aproximadamente una integral definida a través de una suma de Riemann. En relación a esto se propone un trabajo práctico con la utilización de un software. La evaluación continua se presenta en la instancia de las horas de práctica, consulta, evaluación del informe, exámenes parciales y coloquio globalizador.

A pesar de no ser una actividad obligatoria, los alumnos responden favorablemente a la realización del trabajo práctico en un setenta por ciento de un total de aproximadamente sesenta alumnos que participan activamente. Los resultados obtenidos son que los alumnos fueron capaces de realizar actividades autónomas, en grupos de hasta tres integrantes. Se favorece así la inclusión en grupos y el trabajo colaborativo. Resolvieron el problema planteado de diferentes formas, en un desempeño flexible. Respecto a la autonomía, los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio. (Exploración, formulación y validación de la propuesta realizada). Los alumnos han realizado un trabajo autónomo para generar de este modo, un saber que sea utilizable en otras situaciones y que es demandado en el desarrollo curricular

El trabajo con el software Scilab, en este caso, brinda un abanico de posibilidades metodológicas que en general no están cubiertas por los cursos regulares, pero los alumnos pueden descubrir a través de la utilización de la investigación del software armando un verdadero laboratorio de experimentación.

Por último, Guy Brousseau (1999) afirma, y nosotros pensamos como él que: "(...) La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores."

Agradecimientos

Los autores pertenecen al proyecto PID SECYT UNR 1ING382 "El diseño y análisis de los materiales didácticos para la Matemática en Ingeniería. Parte 2"

Referencias y bibliografía

Brousseau G. (1999): Educación y Didáctica de las matemáticas, en Educación Matemática, México.

Brousseau, G. (1987) Fondements et méthodes de la dídactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2. La Pensée Sauvage: Grenoble. pp 34-116.

Chancelier, J-P, Delebecque, F., Gomez, C, Goursat, M, Nikoukhah, R (2007). Introduction à Scilab, 2º Ed., Springer-Verlag France.

Stewart, James. Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. (2008) Sexta Edición. Cengage Learning.

Stone Wiske, M (2005) ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Compiladora. Stone Wiske, M. Bs.As. Paidós

Thomas, George B.(2006) Cálculo. Volumen 1 .Undécima edición. Pearson Educación.

Apéndice A

Trabajo práctico

Titulo:

Cálculo aproximado de la integral definida

Objetivo:

Obtener el valor numérico de la integral definida mediante el uso del software Scilab.

Desarrollo

Veremos primero como integrar una función a través de un ejemplo simple:

La función elegida es f(x)=x^2 y el intervalo de integración es el [0,1]

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Primer camino: Cálculo de la integral de acuerdo con la definición

Ya hemos visto que, según la definición de integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i$$

donde x_i^* es el punto muestra del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; en el caso de $f(x) = x^2$ obtenemos:

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 \Delta x_i$$

Tomando todos los sub intervalos Δx_i iguales, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ se tiene:

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-0)}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2$$

Si aproximamos el límite de n tendiendo a infinito por una cantidad finita de enes

$$I \approx D = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

$$I \approx D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2$$

Tomando el valor x_i^* correspondiente al extremo izquierdo del sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ queda la siguiente fórmula de cálculo:

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i)^2$$

El valor obtenido por esta fórmula será tanto más cercano al valor de la integral como n sea grande.

Programación de la fórmula en el lenguaje Scilab

En negrita escribimos los comandos a teclear en la pantalla del programa y en letra inclinada (itálica) los comentarios.
Como el Scilab es un software de cálculo numérico, vamos a ingresar los subintervalos como las componentes de un vector, donde el primer elemento es el extremo izquierdo del intervalo [0,1] y el último el extremo derecho del intervalo [0,1]. Pero antes ingresamos el número entero n
n=10;
El punto y coma al final de la expresión es para que el sistema no lo vuelva a mostrar, prueba a escribir
n=10
¿que pasó?, el sistema repitió la expresión.
Ahora escribimos el vector de los subintervalos
x=[0:1/n:1];
Si tecleas **x** *en el sistema verás los valores del vector, el sistema contesta:*

```
x  =
   0.    0.1    0.2    0.3    0.4    0.5    0.6    0.7    0.8    0.9    1.
```

Vamos a llamar con la letra s (de suma) las sucesivas sumas parciales
Pero antes vamos a "inicializarla "en cero
s=0;
La fórmula de cálculo la podemos escribir como:
for i=1:n; s =x(i)2/n+s; end**
La instrucción for *quiere decir repita la operación aritmética que viene después del punto y coma y hasta la expresión* end, *tomando la variable* i *todos los valores enteros desde*1 *hasta* n.
La expresión **s =x(i)**2/n+s** *quiere decir que va sumando las áreas de los rectángulos y acumulándolas en la variable **s.*** x(i) *es la componente número* i *del vector* x. *Para elevar al cuadrado se utilizan los dos asteriscos. La división se indica con la barra inclinada hacia la derecha, la multiplicación se indica con un asterisco.*
Pidamos el valor final de s, tecleando:
s
el sistema responde

```
s  =
    0.285
```

Ya obtuvimos el primer valor aproximado de la integral, bastante alejado del valor exacto, tomemos ahora otros valores de n, como por ejemplo:
(Para escribir menos prueba con las flechas hacia arriba y verás que aparecen las instrucciones que tecleaste anteriormente. También puedes usar las flechas hacia abajo si te pasaste.)
n=100, s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=1:n; s=x(i)2/n+s; end;**
respuesta del sistema s = 0.32835
n=1000, s=0
x=[0:1/n:1]; for i=1:n; s=x(i)2/n+s; end;**
s
respuesta del sistema s = 0.3328335
n=10000; s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=1:n; s=x(i)2/n+s; end;**
s
respuesta del sistema s = 0.3332833

Segundo camino: Cálculo de la integral de acuerdo con la definición con la regla del punto medio

En este caso utilizamos la definición, pero tomamos el valor x_i^* correspondiente al promedio de los valores entre el extremo izquierdo y el extremo derecho del sub intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ quedando la siguiente fórmula de cálculo:

$$I \approx M = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$$

donde $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$ y $\bar{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

En nuestro caso particular, donde $I = \int_0^1 x^2 dx$, fórmula de M queda:

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i)^2$$

Programación de la fórmula en el lenguaje Scilab

n=10;s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=2:n+1; s=(x(i-1)/2+x(i)/2)2/n+s; end**;
s
respuesta del sistema s = 0.3325

n=100;s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=2:n+1; s=(x(i-1)/2+x(i)/2)2/n+s; end;**
s
respuesta del sistema s = 0.333325

n=1000;s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=2:n+1; s=(x(i-1)/2+x(i)/2)2/n+s; end;**
s
respuesta del sistema s = 0.3333332

n=10000;s=0;
x=[0:1/n:1]; for i=2:n+1; s=(x(i-1)/2+x(i)/2)2/n+s; end;**
s
respuesta del sistema s = 0.3333333

Tercer camino: Cálculo de la integral de acuerdo con la regla del trapecio

En este caso en lugar de calcular el área un rectángulo calculamos el área de un trapecio con bases $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ y con altura Δx_i quedando la siguiente fórmula de cálculo:

$$I \approx T = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_o) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$

En nuestro caso particular, donde $I = \int_0^1 x^2 dx$, fórmula de T queda:

$$T = \frac{1}{2n}\left[(x_0)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(x_i)^2 + (x_n)^2 \right]$$

Programación de la fórmula en el lenguaje Scilab

```
n=10;s=0;
x=[0:1/n:1]; s=(1/(2*n))*(x(1)**2+x(n+1)**2);
for i=2:n; s=(1/(2*n))*(2*x(i)**2)+s; end;
s
```

respuesta del sistema s = 0.335

```
n=100;s=0;
x=[0:1/n:1]; s=(1/(2*n))*(x(1)**2+x(n+1)**2);
for i=2:n; s=(1/(2*n))*(2*x(i)**2)+s; end;
s
```

respuesta del sistema s = 0.33335

```
n=1000;s=0;
x=[0:1/n:1]; s=(1/(2*n))*(x(1)**2+x(n+1)**2);
for i=2:n; s=(1/(2*n))*(2*x(i)**2)+s; end;
s
```

respuesta del sistema s = 0.3333335

```
n=10000;s=0;
x=[0:1/n:1]; s=(1/(2*n))*(x(1)**2+x(n+1)**2);
for i=2:n; s=(1/(2*n))*(2*x(i)**2)+s; end;
s
```

respuesta del sistema s = 0.3333333

Cómo hacerlo mucho más fácil: Cálculo directo a través del software

Mediante la sentencia **integrate**

```
integrate('x**2','x',0,1)
 ans  =
    0.3333333
```

En este comando del sistema aparece dentro del paréntesis la función a integrar, la variable de integración y los extremos del intervalo. Atención con las comillas que abren y cierran en la función a integrar y en la variable de integración.

Tabla resumen de resultados:

Valor exacto $I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Resultados numéricos

Método	n	10	100	1000	10000
Definición	D	0.285	0.32835	0.3328335	0.3332833
Punto Medio	M	0.3325	0.333325	0.3333332	0.3333333
Trapecios	T	0.335	0.33335	0.3333335	0.3333333

Observa que por la definición calculando en el extremo izquierdo siempre nos acercamos por defecto al valor exacto de la integral, lo mismo que calculando en el punto medio, pero con más precisión. En cambio por el método de los trapecios nos acercamos por exceso. Con 10000 subintervalos llegamos a la máxima aproximación que podemos hacer trabajando con esta precisión.

Producción propia

Tarea 1

La función $f(x) = e^{x^2}$ no posee una primitiva que se pueda expresar analíticamente, sin embargo aparece frecuentemente en cálculos de ingeniería. Es por ello que se debe integrar en forma numérica. Realiza el mismo trabajo que hicimos anteriormente, con esta nueva función, es decir calcula:

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

sabiendo que en sintaxis Scilab e^{x^2} se escribe **exp(x**2)**.
Realiza la tabla de resultados numéricos como la anterior y comento los resultados.

Tarea 2

Realiza **un informe por grupo** (máximo de integrantes 3) donde aparecen los resultados obtenidos y una descripción del desarrollo de este trabajo práctico en cuanto a facilidades o dificultades encontradas

ANEXO

Obtención del software Scilab:
1.- Bajar el software Scilab de la página http://www.scilab.org
Para ello tiquear en **Downlod Scilab Version 5.4.0**
2.- Instalarlo (se instala automáticamente tiqueando el ejecutable que bajaron)
3.- Llamarlo desde el ícono

CONSULTO MIS DUDAS O PROBLEMAS CON LA DOCENTE A CARGO !!!

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Visualizando conjuntos en la recta real y el plano

Mónica del Rocío **Torres** Ibarra
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
mtorres@matematicas.reduaz.mx
Elvira **Borjón** Robles
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
eborjon@matematicas.reduaz.mx
Leticia **Sosa** Guerrero
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@matematicas.reduaz.mx
José Iván **López** Flores
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
jilopez@matematicas.reduaz.mx

Resumen

En esta investigación se reportan resultados relacionados con los errores comunes respecto al tema de conjuntos en la recta real y en el plano que presentan los alumnos que han concluido el bachillerato y que iniciaron una carrera de licenciatura en matemáticas, así como aquellos que han cursado el primer semestre de la misma carrera.

Se realizan sesiones de trabajo de dos tipos: Unas en un ambiente tradicional y otras en un ambiente mediado con las herramientas que proporciona la tecnología TI-NSpire. Con la intención de que los alumnos visualicen (Zimmermann y Cunningham, 1991) distintos tipos de conjuntos (intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, desigualdades con valor absoluto y conjuntos finitos y discretos) en la recta real y en el plano, así mismo, trabajamos las diferentes representaciones semióticas (Duval, 1998) de estos conjuntos.

Finalmente, se realizó una comparación entre ambos grupos de alumnos, obteniendo los resultados que aquí se exponen.

Palabras clave: Representaciones semióticas, conjuntos, recta real, plano, visualización matemática

Introducción

Dada la importancia que tienen los diferentes subconjuntos de la recta real y del plano cartesiano en diferentes materias (cálculo de una y varias variables, variable compleja, análisis real, estadística, etc.) de la formación de un licenciado en matemáticas, en particular cuando se calculan límites de funciones de una y varias variables por definición, se requiere que los estudiantes tengan la habilidad de utilizar este tipo de conjuntos. Se diseñó, aplicó y analizó un instrumento que permitió poner en juego tres diferentes representaciones semióticas de los subconjuntos, a saber: la analítica, la sintética y la gráfica. Así mismo, en el mismo instrumento se consideraron las características de los conjuntos en cuanto a que si eran finitos, infinitos, discretos o continuos, abiertos o cerrados o ninguna, con la finalidad de detectar si a partir de la visualización de los conjuntos en sus diferentes representaciones, los errores más comunes que los alumnos comenten al realizar la identificación de éstos.

Marco Teórico

Teniendo en cuenta las afirmaciones:

Semiosis: Es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica, a través de promover la coordinación de varios registros de representación semiótica que puede manifestarse más simple en ciertos registros que en otros. Pero ésta es compleja por la diversidad de registros que puede movilizar. Es decir, semiosis, es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica.   y

Noesis: es la aprehensión conceptual de un objeto, por lo que no hay noesis sin semiosis.

Duval (1998, pp 174 y 186)

Y a la luz de que no es suficiente observar la representación geométrica para aprender un conjunto, se hace necesario transitar entre varias representaciones como lo afirma Duval (1993), “no puede haber aprendizaje verdadero en tanto las situaciones y las tareas propuestas no tomen en cuenta la necesidad de varios registros de representación para el funcionamiento cognitivo del pensamiento” (p. 199).

En el marco de estas afirmaciones lo que se investiga en este trabajo es si los alumnos son capaces de transitar entre varias representaciones semióticas (si realizan o no la semiosis) para luego analizar si tuvieron o no la noesis es decir si aprendieron o no el concepto, que para nuestro caso será la aprehensión de los objetos matemáticos subconjuntos de la recta real y del plano, se abordan conjuntos tradicionales tales como intervalos abiertos, cerrados, conjuntos de puntos discretos finitos e infinitos, los subconjuntos del plano que se abarcan son abiertos, cerrados, discretos

Luego de que los alumnos relacionaron las distintas representaciones de un mismo conjunto, se solicita que visualicen estas, para que concluya las características específicas de cada conjunto que aparece en el instrumento diseñado ad hoc. Promoviendo con esto la visualización matemática, que según Zimmermann y Cunningham (1991) “*visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama, pero visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología) y usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática*”.

Metodología

Se seleccionaron tres grupos alumnos, denominados A, B y U, respectivamente. Los dos primeros están formados por alumnos recién inscritos al primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y que provienen de diversos bachilleratos, y el último, conformado por alumnos inscritos al segundo semestre y que ya cursaron las materias de Cálculo Diferencial, Geometría Analítica y Álgebra Superior. El grupo A y U trabajaron los ejercicios bajo el esquema de una clase tradicional y el grupo B trabajó con el uso de tecnologías.

La secuencia se estructuró de la siguiente manera: Se presentaron subconjuntos de los números reales y del plano cartesiano, con diversas características: conjuntos finitos, abiertos, cerrados, infinitos y discretos, así mismo se involucraron valores, racionales e irracionales, desigualdades con valores absolutos con la finalidad de analizar los procesos de aprendizaje de los alumnos con problemas de las características mencionadas. Se anexa para cada una de ellas una lista de posibles representaciones analíticas del conjunto para que ellos eligieran la que se asocia a la representación geométrica. Posteriormente se presenta una lista de posibles representaciones sintéticas para que elijan la que corresponda a la representación analítica y finalmente se pide que elijan entre una lista de características del conjunto para su respectiva asociación.

Los alumnos trabajaron realizando transiciones entre las diferentes representaciones, plasmando sus resultados en un instrumento diseñado exprofeso o bien realizando las actividades que la calculadora les iba guiando dentro del programa diseñado para tal fin, para posteriormente contestar por escrito preguntas que nos permitieron hacer conclusiones sobre el grado de comprensión que ellos lograron después de haber contestado el instrumento.

En el instrumento se incluyeron dos ejercicios, uno denominado el cuádruple juego de los subconjuntos de la recta real ($\mathbb{R}$), conformado por ocho planteamientos que permitieron analizar el tránsito entre las representaciones sintética, geométrica y analítica así como apoyándose de la visualización de las diferentes representaciones para asociar las características de los conjuntos, cabe destacar, que dentro de la representación sintética, se incluyó intencionalmente una propuesta que contenía un error en su formulación, con la intención de que éste fuera detectado por los propios alumnos; el segundo ejercicio se denominó el triple juego con subconjuntos de números del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) en este se consideraron también ocho planteamientos, en este ejercicio se contemplaron solo las representaciones geométrica y analítica así como la asociación con las características de cada conjunto.

Puesta en Escena

El grupo U, conformado por un total de 9 alumnos (4 hombres y 5 mujeres) pertenecientes al segundo semestre, trabajó mediante el esquema de una clase tradicional, contestando el instrumento en un tiempo record, ya que no se llevaron más de treinta minutos en contestarlo, sin embargo con algunas limitaciones en los subconjuntos del plano cartesiano.

El grupo B, conformado por un total de 22 alumnos (12 mujeres y 10 hombres) pertenecientes al primer semestre, trabajó mediante el esquema de una clase tradicional, contestando el instrumento alrededor de una hora. Resalta la dificultad de este grupo con respecto a las características de los conjuntos, es decir no fueros capaces de determinar si eran abiertos, cerrados, finitos, infinitos o discretos, observar el anexo uno.

El grupo A, conformado por un total de 21 alumnos (mujeres y hombres) pertenecientes al primer semestre, trabajó mediante el esquema de un ambiente controlado por la tecnología TI-Nspire, contando cada uno de ellos con una calculadora para responder el instrumento. El tiempo que se llevaron en contestar el instrumento fue de alrededor de 45 minutos. Resalta la dificultad de este grupo con respecto a las características de los conjuntos, es decir no fueros capaces de determinar si eran abiertos, cerrados, finitos, infinitos o discretos, observar el anexo uno. La gran mayoría no pudo responder las propuesta que contemplaba los subconjuntos del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

Resultados

Los errores comunes que se presentaron cuando los alumnos de primer semestre contestaron el cuádruple juego de los subconjuntos fueron: Que asociaron incorrectamente las desigualdades con valor absoluto con intervalo semiabierto, por lo tanto, sequió el error cuando intentaron asociar con la representación analítica. En general, los alumnos no fueron capaces de describir las características del conjunto en juego, por ejemplo, se presentaron casos de conjuntos que eran infinitos y ellos contestaban que eran finitos o viceversa, más aún, para el caso de los conjuntos discretos, confundieron con conjuntos infinitos.

Por otro lado, respecto al triple juego, los errores comunes presentados fueron cuando los alumnos de primer semestre sin uso de tecnología, intentaron asociar subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que eran del tipo franjas infinitas o conjuntos que los acotan rectas que no se incluían, es decir, en su representación geométrica no fueron capaces de asociarlos con las otras dos representaciones. Así mismo, aunque visualizaban las representaciones geométrica y analítica, en su mayoría no dieron las descripciones correctas de los conjuntos, por ejemplo, había conjuntos que eran discretos y finitos y ellos afirmaban que eran infinitos.

Errores similares se presentaron en el grupo que trabajó con tecnología, con la diferencia de que el uso de ésta última permitió realizar una retroalimentación y discusión de cada una de las respuestas, ya que la dinámica de trabajo, aunque con las mismas propuestas, fue diferente, pues se trabajó simultáneamente, presentando a la vez una proyección de cada una de las representaciones geométricas, pidiendo después a ellos que en la calculadora seleccionara la representación que le correspondía y mostrando la cantidad de respuestas elegidas, propiciando con ellos que los propios alumnos argumentaran sus respuestas, aunque esto propició que el tiempo no fuera suficiente para completar el instrumento completo.

El trabajo realizado por los alumnos de segundo semestre nos permite ver que en su totalidad fueron capaces de transitar entre las diferentes representaciones, incluso en este grupo se detectó el error puesto intencionalmente en la propuesta, sin embargo, en su mayoría no fueron capaces de determinar los conjuntos finitos y cometieron numerosos errores en la asociación de las características de cada uno de ellos.

Conclusiones

El tema que se eligió tiene grandes repercusiones en temas posteriores, se cometen algunos errores por parte de los alumnos en cuanto al manejo de las diferentes representaciones de los conjuntos.

En este trabajo, se puso de manifiesto que el uso de la tecnología es un fuerte aliado del profesor de matemáticas, ya que por medio de ella es posible acercar el conocimiento a los estudiantes, de forma que ellos logren visualizar el concepto en cuestión por medio de las diferentes representaciones del objeto ya demás la tecnología utilizada permite la retroalimentación en el mismo momento que se cometen los errores a través del uso del navigator.

Coincidimos con Duval (1999) cuando distingue la visualización de la visión. Para él la visión aporta un acceso directo al objeto, pero no proporciona una aprehensión global del concepto. De hecho afirma que “la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión”, en este sentido, la tecnología es un gran aliado para que el proceso de visualización sea exitoso.

Así mismo, desde el punto de vista didáctico, Duval (1999) señala que la visualización requiere un “entrenamiento especial”, específico para cada registro y que no puede limitarse a la construcción de imágenes visuales. Explica que la construcción pone atención en enfocar sucesivamente en algunas unidades y propiedades, mientras que la visualización consiste en comprender directamente el conjunto de la configuración de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella. Y apunta que lo más frecuente es encontrar estudiantes que únicamente logran una aprehensión local de las imágenes, sin ser capaces de “ver” la organización global relevante.

Teniendo en cuenta todo lo anterior nos proponemos realizar una segunda investigación a mas tardar a principios del 2014 que permita analizar la evolución de lo aprendido en sus clases de cálculo diferencial y cálculo de varias variables, con la finalidad de identificar si los errores comunes se superaron o no.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1, 3-26.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, Págs. 173-201). México.

Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático, Ediciones Pirámide, S. A.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washing: Mathematical Association of America.

Anexo 1

Instrumento Utilizado

Universidad Autónoma de Zacatecas
Francisco García Salinas
Unidad Académica de Matemáticas

Nombre del alumno______________________ Género (F o M) ______

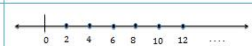
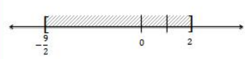
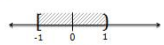
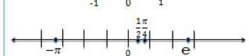
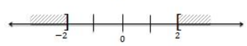
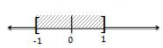
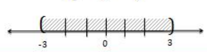
Fecha______________________ Semestre que cursas de la Licenciatura en Matemáticas __________

El presente instrumento está conformado por dos ejercicios. En el primero trabajaremos con números reales en $\mathbb{R}$ (recta real) y en el segundo con subconjuntos en $\mathbb{R}^2$ (el plano).

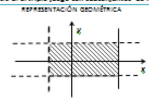
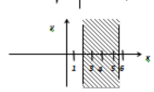
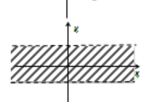
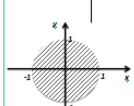
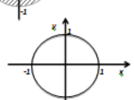
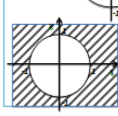
Ejercicio 1. **El cuádruple juego con los subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$ (recta real)**
Indicaciones. En este juego se ofrecen cuatro columnas que contienen subconjuntos de números reales. La solicitud para ti es que las relaciones entre sí, según correspondan las diferentes representaciones de cada una de ellas (la última columna puede corresponder a más de un conjunto).

Ejercicio 2. **El triple juego con los subconjuntos de los números reales en $\mathbb{R}^2$ (plano)**
Indicaciones. El juego es similar, tendrás que relacionar las columnas que se presentan (la última columna puede corresponder a más de un conjunto).

Ejercicio 1. **El cuádruple juego con los subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$ (recta real)**

REPRESENTACIÓN SINTÉTICA	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA	CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO
$A = (-1, 3]$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x \le 1\}$	Abierto
$B = [-1, 1)$		$\{x \in \mathbb{R}: x \ge 2 \text{ ó } x \le -2\}$	Cerrado
$C = \left\{-\pi, \frac{1}{2}, \mathrm{e}, \frac{\pi}{4}\right\}$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x < 1\}$	Infinito
$D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$		$\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 3\}$	Finito
$E = \left[-\frac{9}{2}, 2\right]$		$\{x \in \mathbb{R}: 2n, n \in \mathbb{N}\}$	Discreto
$F = \lvert x \rvert < 3$		$\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{9}{2} \le x \le 2\right\}$	Ninguno
$G = \lvert x \rvert \ge 2$		$\left\{x \in \mathbb{R}: x = -\pi, \frac{1}{2}, \mathrm{e}, \frac{\pi}{4}\right\}$	
$H = \lvert x \rvert \le -1$		$\{x \in \mathbb{R}: -1 < x \le 3\}$	

Ejercicio 2. **El triple juego con subconjuntos de números reales en $\mathbb{R}^2$ (plano)**

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA	CARACTERÍSTICAS
	$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \ge 1\}$	Abierto
	$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x = -1, -2, -3\}$	Cerrado
	$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$	Infinito
	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x = 1, 2 \text{ ó } 3, y = 3\}$	Ninguno
	$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x \le 3 \;\; y - 1 < y < 1\}$	Finito
	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -\infty < x < +\infty, -3 < y < 2\}$	Discreto
	$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 2 \le x \le \frac{16}{3} \;\; y - \infty < y < +\infty\right\}$	Continuo

Talleres

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE UNA EXPLORACIÓN DIGITAL SECUENCIADA

Eduardo Basurto Hidalgo
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

El uso de tecnologías digitales a favor de la enseñanza de las matemáticas ofrece hoy en día una amplia gama de dispositivos y software, así como una diversidad en los modos de uso de la misma, el presente taller pretende mostrar a los docentes e investigadores interesados en este tipo de herramientas, una alternativa novedosa llamada HP Prime Graphing Calculator, la cual ha sido diseñada no sólo en el ámbito ejecutor de la resolución de algoritmos, sino también con prestaciones que permiten realizar orquestaciones didácticas que ofrecen la posibilidad de explorar situaciones problemáticas desde diversas perspectivas que aporten sentido a la actividad matemática y ayuden en la creación de significados de los objetos matemáticos.

Palabras clave: resolución de problemas, sentido a la actividad matemática, orquestación didáctica.

Introducción

El hombre ha podido extender sus capacidades cognitivas vía la interacción establecida con herramientas materiales y simbólicas. El desarrollo del conocimiento ha estado acompañado del uso de las tecnologías cognitivas. Investigaciones como las de Duval (1998), Godino y Batanero (1999), D'Amore (2001), entre otros, han afirmado el hecho de que la actividad matemática, dada la generalidad de su objeto de estudio, es esencialmente simbólica. Por otra parte, ha surgido una creciente utilización de la tecnología digital en los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas como lo muestran los trabajos de Arzarello (2004), Borba y Villareal

(2006), Artigue (2002), Verillon y Rabardel (1995), Guin y Trouche (1999), etc.

Estos hechos vuelven necesario recurrir a la semiótica para entender los procesos de significado y sentido expresados en sistemas de signos surgidos en las producciones verbales y escritas de los sujetos al resolver tareas donde intervienen tecnologías digitales.

Objetivo del taller

El taller pretende generar la exploración de situaciones problemáticas cotidianamente incluidas en las currícula de la enseñanza media, a través de un entorno tecnológico digital con novedosas prestaciones didácticas en sus aplicaciones, a fin de reconocer la posibilidad que este tipo de dispositivos tiene para reinventar secuencialmente las situaciones problemáticas y llevarlas más allá de la simple ejecución sin una trayectoria reflexiva de dichos tipos de problemas.

Perspectiva teórica del taller

En taller analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión sígnica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser *"una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento" (p.253).* La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado ***génesis instrumental.***

El proceso de *génesis instrumental* según Artigue (2002) se desarrolla en dos direcciones:

La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como**: *instrumentalización del artefacto***

La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: ***instrumentación***

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental (ver Figura 1).

Figura 1. Esquema del proceso de génesis instrumental.

La resolución de problemas y el uso de tecnología digital.

Menciona Santos (2007, p.107) que *"El método inquisitivo se refiere a la importancia de que los estudiantes desarrollen la comprensión del conocimiento matemático a partir de la identificación de dilemas y la formulación de preguntas que se representan y exploran en términos de recursos y estrategias matemáticas."*

Este uso constante de herramientas computacionales permite a los estudiantes construir representaciones dinámicas de los conceptos y problemas matemáticos, lo cual resulta importante para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las justifiquen o soporten.

La cita anterior refleja la esencia del enfoque actual de muchas curricula de matemáticas en diversos países, ya que, en todos ellos, este ciclo de visualizar, reconocer, examinar, argumentar, y comunicar resultados son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes deben practicar sistemáticamente. Ahora bien estos ciclos pueden ser enriquecidos de manera sustancial con la ayuda de herramientas de tecnología digital.

El empleo de instrumentos de tecnología digital en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solamente facilita la identificación e implementación de estrategias de resolución, sino también potencia el repertorio de las heurísticas. El uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas.

Esto es posible ya que las herramientas digitales permiten al estudiante despojarse de esfuerzos largos y complejos en algoritmos que si bien son parte importante del conocimiento matemático que el estudiante debe desarrollar, también es fundamental que centre su actividad cognitiva de análisis de relaciones, regularidades, ejemplos y contraejemplos, ya que en muchos casos el estudiante desvía la mayor parte de su atención a las técnicas y procesos en momentos en los que debe centrarse en la reflexión.

Kaput (1992) afirmó que “las limitaciones mayores del uso de la computadora en las siguientes décadas serían probablemente menos debidas a las limitaciones tecnológicas y más a las limitaciones de la imaginación humana y a las restricciones de los viejos hábitos y estructuras sociales” (p. 515)

A más de dos décadas de esta afirmación es evidente que se ha vuelto una realidad ya que hoy en día, una dificultad al intentar utilizar herramientas digitales en la enseñanza de la matemática, es el cambio necesario en la actuación pedagógica del profesor, ya que su uso implica un cambio de estrategia de enseñanza. Ya no es útil un esquema expositivo y lineal. Se requiere diseñar y experimentar estrategias para facilitar la interacción del alumno con los conceptos matemáticos. Así, surgen actividades como: experimentar, conjeturar, generalizar, poner a prueba hipótesis, deducir, reflexionar, etc., que son elementos extraños a una situación de clases expositiva normal.

Para organizar la forma en que la tecnología pueda tener efectos importantes en la educación de las matemáticas, Rubin (2000) propone cinco tipos de oportunidades generadas por las TIC, las cuales son: conexiones dinámicas; herramientas sofisticadas; comunidades ricas en recursos matemáticos; herramientas de diseño y construcción; y herramientas para explorar complejidad.

En este sentido, el dispositivo HP Prime concebido desde su diseño para permitir este tipo de oportunidades de manera natural desde sus módulos de aplicaciones creados para ofrecer mayor ergonomía cognitiva a los estudiantes.

Por ejemplo, sin mayores técnicas instrumentadas un alumno podrá explorar en cada aplicación diferentes representaciones de un mismo objeto matemático a través de la terna de herramientas, SYMB, PLOT y NUM, en cualquier aplicación (ver figura 2)

Figura 2. Esquema de vinculación entre las herramientas de representación y las aplicaciones del dispositivo.

Dentro de sus módulos de aplicación esta la presencia de elementos dinámicos como se ve en la Figura 3.

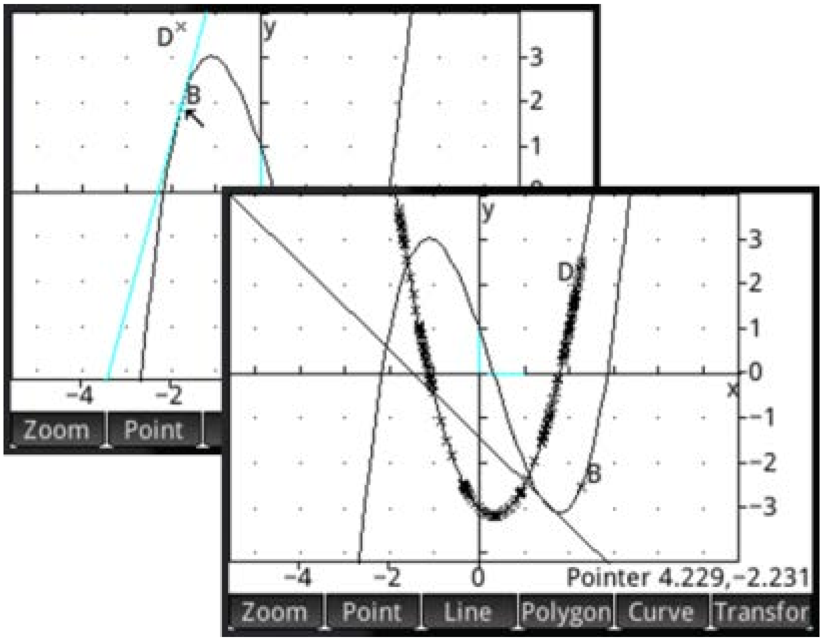


Figura 3. Ejemplo de elementos dinámicos en gráficas.

Al respecto de poder explorar la complejidad sin complicaciones técnicas se tiene un módulo de graficas avanzadas que permite profundizar en gráficos poco explorados como son, secciones cónicas, fórmulas generales de polinomios y ecuaciones implícitas en x e y entre otras (ver Figura 4).

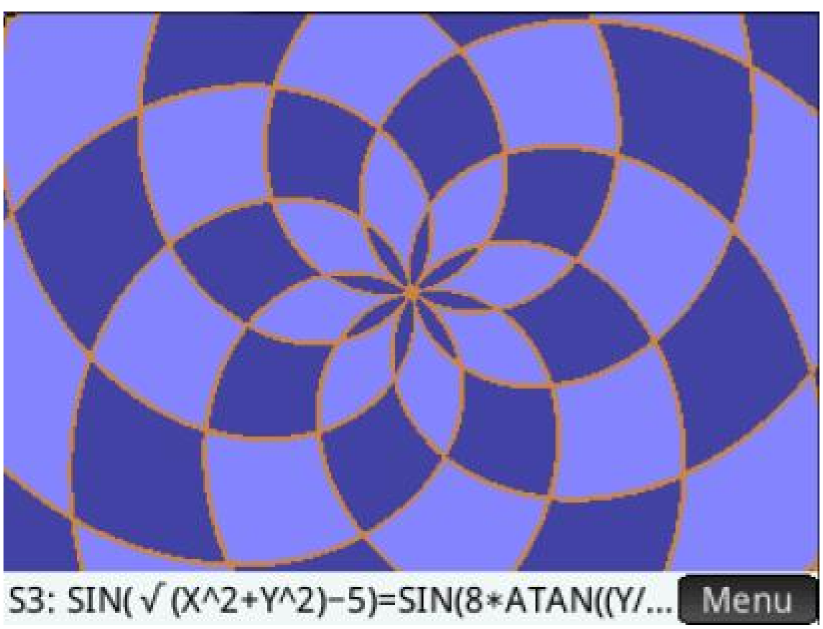


Figura 4. Ejemplo de un gráfico avanzado.

Desarrollo del taller

El taller se desarrollará en 4 partes:

- La primera tiene como objetivos discutir acerca de las posturas sobre el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas, así como plantear dos problemas digamos conocidos por su estructura en la mayoría de los curricula de los países de la zona, a fin de ser analizados y resueltos sin el uso de tecnología digital.
- La segunda parte pretende mostrar la nueva herramienta digital HP Prime Graphing Calculator, destacando las potencialidades que algunas de sus aplicaciones ofrecen desde el punto de vista de didáctico, y o no solo ejecutor como la mayoría de los dispositivos de su tipo.
- En la tercera parte se pedirá a los asistentes al taller que analicen algunos aspectos de los problemas planteados en la primera parte del taller, vía ciertas aplicaciones del dispositivo HP Prime, con la finalidad de que al explorar las versiones digitales de los objetos matemáticos involucrados en dichos problemas hagan vivencial el potencial que tiene el uso de entornos tecnológicos en problemas que cotidianamente se incluyen en las currícula, pero analizados desde una exploración digital secuenciada.
- La cuarta parte y cierre del taller pretende generar una discusión objetiva sobre las ventajas, desventajas, limitaciones, potencialidades y posibilidades de institucionalización de este tipo de tratamientos didácticos de los contenidos de la matemática escolar vía entornos digitales.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). “Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work”. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 7(3) P. 245 – 274.

Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapesand their inhabits: perceptions, languages, theories.Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.

Borba, M; y Villareal, M. (2006). Humans – with – Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. New York: Springer.

D´Amore, B. (2001) Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position <<naïve>> dans une théorie <<réaliste>> contre le modèle <<anthropologique>> dans une théorie <<prgamatique>>. En A. Gagatsis (Ed), Learning in Mathematics and Science and Educational Technology (Vol. 1, pp. 131-162).

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasburg, 6, 139-196.

Godino, J.D; y Batanero, C. (1999). The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics. Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.

Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 3(3):195 – 227.

Rubin, A. (2000). Technology meets math education: Envisioning a practical future forum on the future of technology in education. En http://www.air-dc.org/forum/abRubin.htm

Santos, M. (2007). Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Vrillon, R y Rbardel, G (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education 10(1): 77 -101.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Aprendiendo modelación matemática de sistemas físicos a través del diseño y programación de videojuegos serios

Angel **Pretelín-Ricárdez**
Instituto Politécnico Nacional, UPIITA
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)
México
apretelin@ipn.mx
Ana Isabel **Sacristán** Rock
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)
México
asacrist@cinvestav.mx

Resumen

En este taller los participantes diseñarán y programarán videojuegos serios (Serious Games) como una actividad de construcción que permita aprender conceptos de modelación matemática de sistemas físicos. Los participantes se organizaran en equipos de unas tres personas para construir juegos serios dentro de un micromundo de aprendizaje. Se utilizará como elemento de mediación del aprendizaje matemático un motor de programación de videojuegos llamado Game Maker Studio. Las actividades seguirán una visión construccionista que pueda ayudar a relacionar y contextualizar temas de modelado matemático de sistemas físicos. Los ejemplos que se darán para el juego serio son de temas aplicables en los niveles medio superior y superior, aunque las ideas del taller pueden ser utilizadas en cualquier nivel.

Palabras clave: juegos Serios, programación, construccionismo, modelación matemática, micromundo de aprendizaje.

Introducción, antecedentes y marco teórico

Para entender nuestra propuesta hay que situarse en los trabajos relacionados con el aprendizaje basado en el diseño y programación de videojuegos, lo que nos remite a los resultados mostrados por Yasmin B. Kafai y colaboradores (ver Kafai & Resnick, 1996; Kafai, Franke, Ching & Shih, 1998; Kafai, 2006) que sientan los bases y la estructura de esta metodología y su relación con el construccionismo.

Este paradigma del construccionismo, se basa en el constructivismo de Piaget y fue desarrollado por Seymour Papert quien señaló, como idea fundamental del mismo, lo siguiente:

> El construccionismo – la palabra que se escribe con N, en contraposición a la palabra que se escribe con V – tiene la misma connotación del constructivismo del aprendizaje como "construcción de estructuras de conocimiento", independientemente de las circunstancias del aprendizaje. Luego se agrega la idea de que esto ocurre en forma especialmente oportuna en un contexto donde la persona que aprende está comprometida conscientemente para construir una entidad pública, ya sea un castillo de arena en la playa o una teoría del universo[1]. (Papert & Harel, 1991)

Relacionado con lo anterior, Kafai, Franke, Ching & Shih (1998, p. 180) dicen "que el nuevo conocimiento puede ser adquirido con mayor eficacia si los alumnos se comprometieron en la construcción de productos que son personalmente significativos para ellos".

Otra de las ideas principales en los trabajos de Kafai y colaboradores es que

> El diseñar juegos proporciona una situación que combina naturalmente problemas teórico-prácticos así como la reflexión de esta relación, además de que proporciona oportunidades para el debate, la reflexión y la colaboración dentro de un contexto significativo. (Kafai et al., 1998; p. 180)

Otros trabajos recientes y relacionados con lo propuesto por Kafai y colaboradores son los de Baytak & Land (2010) y Holbert, Penney & Wilensky (2010). El primero habla de un caso de estudio hecho con niños en donde interviene el diseño y programación de videojuegos para que los niños reflejen el entendimiento que tienen sobre conceptos de nutrición. El segundo es un ensayo sobre las consideraciones que se deben de tener si se quiere implementar el construccionismo en el diseño y programación de juegos de acción.

En nuestro caso, nos interesa que el diseño y programación de un videojuego, para el desarrollo de conceptos matemáticos en el estudiante, se realice, no sólo en un contexto construccionista, sino dentro de lo que se conoce como un micromundo de aprendizaje.

Al respecto, Hoyles & Noss (1987) definen un micromundo "como un ambiente bien definido pero limitado, en el cual, pasan cosas interesantes y en el cual hay importantes ideas por aprender" (Hoyles & Noss, p. 586; citando a Goldenberg, 1982), y proponen que un micromundo involucra los siguientes cuatro componentes (ver *Figura 1)*: componente pedagógico, componente estudiante, componente técnico y componente contextual, interactuando entre sí.

[1] Las citas de artículos en inglés están traducidas.

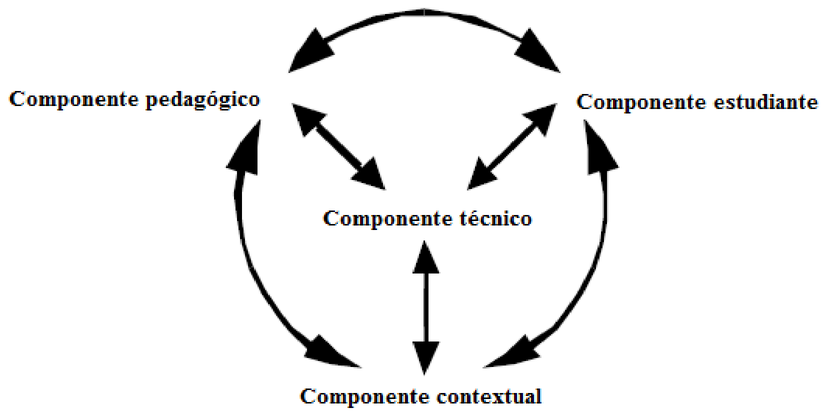


Figura 1. Componentes de un micromundo (Hoyles & Noss, 1987, p. 591).

Como puede verse, el componente técnico está situado en el centro o núcleo del micromundo de aprendizaje, interactuando con los demás componentes. Este componente será el medio para la construcción del aprendizaje. Sin embargo no hay que perder de vista que el componente técnico se interrelaciona con los otros tres componentes y que, por sí solo, no cumpliría con el propósito de servir como mediador para que el aprendizaje emerja.

Por último es necesario hablar acerca de lo que se pretende construir: un videojuego serio (*Serious Game*). Los videojuegos serios o *Serious Games* por su nombre en inglés, pueden definirse de forma simple pero concisa como "juegos con un propósito más allá del juego" (Klopfer, Osterweil & Salen, 2009, p. 22). Es posible consultar, en Sawyer & Smith (2009), una taxonomía de los múltiples propósitos que tienen este tipo de juegos; en nuestro caso, el propósito que les daremos a los juegos que se construyan, será educativo. La *Figura 2* ilustra los elementos que debe contener un videojuego serio: En un videojuego convencional interviene la historia, el arte y el software, pero en un videojuego serio (*Serious Game*) además de todos estos elementos, entra en escena el elemento pedagógico subordinado al contexto de la historia, que es lo que da el propósito más allá de ser un simple juego a este tipo de videojuegos.

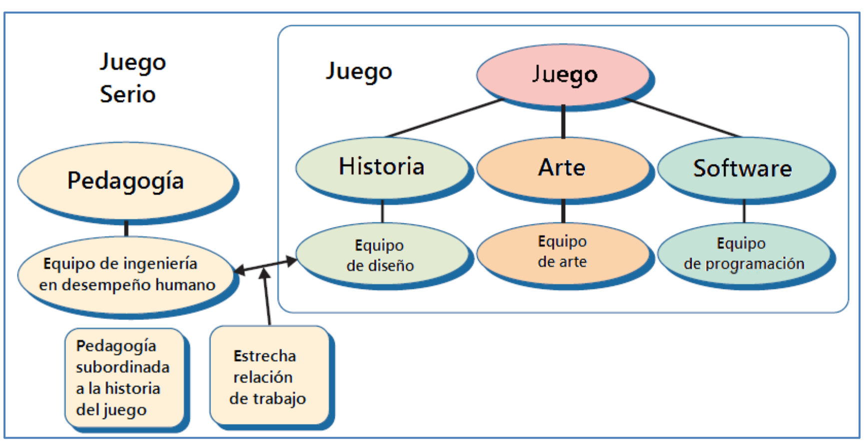


Figura 2. Videojuego serio (Serious Game) (Zida, 2005, p. 26)

Habiendo descrito los elementos conceptuales involucrados en el taller, pasemos ahora a describir el problema que se pretende abordar en dicho taller, que se relaciona con el aprendizaje de modelación matemática de sistemas físicos a través de la programación de videojuegos serios.

El problema

Según el NCTM (2000), la modelación matemática requiere identificar y seleccionar las características relevantes de una situación, representarlas simbólicamente, analizar el modelo y las características de la situación, razonar sobre el modelo en el contexto de la situación y considerar la precisión y las limitaciones del modelo. En contraste, cuando se enseña modelación y simulación de sistemas en ingeniería, se sigue la siguientes secuencia: (1) Se explican los conceptos teóricos y la matemática asociada al modelo que se estudia; (2) posteriormente se pasa a una etapa de exploración y experimentación a través de la simulación de los modelos matemáticos mediante el uso de entornos tecnológicos de tipo ingenieril como *Matlab, LabVIEW, Comsol, Mathematica*, etc., utilizando estos entornos como elementos mediadores para el desarrollo de conocimiento matemáticos a través de la construcción de simulaciones.

En nuestro caso, la propuesta es similar: utilizar la tecnología como elemento mediador en la construcción de aprendizaje matemático, pero proponiendo un elemento mediador robusto que genere un alto compromiso y motivación en quien va a construir: un motor de videojuegos, que en este caso es el *Game Maker Studio* (Yoyo Games, 2013), que contiene un *physics engine*, i.e. una biblioteca de programación que permite generar videojuegos que se rijan por leyes físicas del mundo real.

Partiendo de lo planteado anteriormente se intenta dar respuesta a preguntas como las siguientes:

1. ¿Cómo poner en práctica el paradigma del construccionismo para enriquecer el aprendizaje de los alumnos, utilizando como elemento mediador un motor de videojuegos?
2. ¿Cómo se construye o se transforma el concepto de modelación y simulación en el estudiante a través del uso de motores de videojuegos y la creación de un juego serio?

El micromundo de aprendizaje y la metodología a seguir

A continuación se presentan los elementos del micromundo de aprendizaje y la metodología que se utilizará para conducir el taller.

Para el caso particular de este taller, los cuatro componentes del micromundo se establecen de la siguiente manera:

El componente técnico

Hoyles & Noss (1987) definen a este componente de manera simple y concisa: se refiere al software, programa o programas en el cual se enfoca la atención del estudiante sobre una idea o proceso específico.

En este caso, el aspecto técnico estará conformado por el motor de videojuegos *Game Maker Studio* que utiliza programación orientada a objetos, así como el lenguaje unificado de modelado (UML); también, como ya se mencionó arriba, contiene un *physics engine*, e incluye un conjunto de recursos prediseñados para la creación de personajes, escenarios, música y sonidos. Se pretende que a través de cada uno de estos elementos se pueda hacer la mediación adecuada para que el alumno construya de manera estructurada el conocimiento matemático. A través del *physics engine*, el estudiante podrá construir simulaciones, y no emulaciones, dentro de su videojuego en un ambiente virtual que se rija por, al menos, las leyes físicas básicas del mundo real.

Los recursos prediseñados son de licencia libre y serán proporcionados al inicio del taller como parte del material para el desarrollo del mismo; lo que se busca con esto es que los estudiantes logren productos visualmente atractivos, pero que no tengan que consumir tiempo en la creación de los mismos. Finalmente con el uso del UML se pretende que el estudiante estructure mentalmente lo que va a construir a través de la modelación (desde el punto de vista de la ingeniería de software) de su videojuego. La idea general es que los elementos que conforman el componente técnico sean herramientas “abiertas”, como se describe en Sacristán Rock (2003), es decir (re)construibles y modificables por los estudiantes.

El componente estudiante

Este componente engloba aspectos cognitivos y afectivos (tales como los conocimientos previos y la historia del participante) que influyen en la forma en la que las actividades son percibidas, debido al sistema de representaciones que el estudiante tiene (Hoyles & Noss, 1987).

En este caso, los participantes (estudiantes) serán asistentes al I CEMACYC, los cuales tendrán conocimientos heterogéneos sobre matemáticas, modelación de sistemas físicos y programación.

El componente contextual

Este componente se refiere a las situaciones sociales y culturales en las cuales las actividades de programación toman lugar, afectando el aprendizaje del estudiante (Hoyles & Noss, 1987).

En nuestro caso, el objetivo será conformar cuatro equipos conformados por tres participantes (estudiantes), tal vez de diferentes nacionalidades, que tengan diferentes niveles de conocimiento o competencias buscando de esta forma heterogeneidad para propiciar el intercambio de ideas a través de distintos niveles de comprensión. También se quiere que cada equipo trabaje principalmente en una sola computadora, para favorecer el intercambio de ideas y el aprendizaje colaborativo.

El componente pedagógico

Es el que se encarga de

> estructurar la investigación y exploración de los conceptos incorporados en el componente técnico, para enfocar la reflexión sobre aspectos particulares, sugerir el orden productivo de las operaciones, indicar los puntos de partida útiles, y provocar relaciones con otras actividades. El aspecto físico del componente pedagógico puede incluir un profesor (que puede ser tan joven como el estudiante, libros, posters, etc.) (Hoyles & Noss, 1987; p. 588)

Este componente estará conformado por la secuencia mostrada más adelante en este apartado, el diseño pedagógico del videojuego, manuales para el profesor (Guía) y para el participante (Estudiante) así como bibliografía adicional recomendada para lecturas futuras. El diseño pedagógico del videojuego serio estará basado en el GAM (*Game Achievement Model*) de (Amory & Seagram, 2003) como una forma de estructurar lo que se quiere enseñar a través del juego. Los manuales para el profesor y participantes se crearon para dotarles de un instrumento concreto para poder seguir la secuencia didáctica; asimismo la bibliografía adicional servirá de complemento a lo expuesto por el profesor.

La metodología

Se espera un grupo de una docena de participantes distribuidos en cuatro equipos de tres integrantes: Cada equipo trabajará en una computadora que le servirá para diseñar y programar un videojuego serio a partir de los conceptos de modelación matemática de sistemas físicos que se enseñen. Se abordarán algunos ejemplos para el juego serio de temas aplicables en los niveles medio superior y superior, aunque las ideas del taller pueden ser utilizadas en cualquier nivel. Dichos ejemplos se abordarán siguiendo la siguiente secuencia:

1. Explicar, de manera general, la propuesta a los participantes. (5 minutos)
   Aquí se pretende situar a los participantes en el propósito general de la propuesta y particularmente del taller, explicando los alcances y limitaciones que tiene la propuesta y las reglas de operación del taller.
2. Exploración de conocimientos previos de los participantes. (5 minutos)
   Con esta exploración se pretende definir de manera general los perfiles de los participantes para proceder a conformar los equipos de trabajo, de tal forma que estén integrados de forma heterogénea con individuos con distintos niveles de conocimiento. Con esto se pretende favorecer el intercambio de ideas y de visiones entre los integrantes de cada equipo.
3. Explicación de la filosofía de micromundos computacionales a los participantes. (5 minutos)
   Se explicará a los participantes lo que es un micromundo de aprendizaje, sus componentes y cómo se busca que se relacionen cada uno de los componentes en el micromundo planteado para este taller.
4. Explicación del motor de programación de videojuegos a través de un ejemplo. (10 minutos)
   Se pretende explicar el funcionamiento y características de algunos elementos y comandos del motor de videojuegos *Game Maker Studio*, a través de un ejemplo guiado.
5. Explicación de conceptos de modelación matemática de sistemas físicos. (10 minutos)
   Se explicaran los conceptos de modelación matemática que se abordarán para el desarrollo del juego serio.
6. Relación de conceptos con comandos o instrucciones del *physics engine*. (5 minutos)
   Establecer la relación de los conceptos de modelación matemática explicados previamente con los comandos y características del *physics engine* del motor de videojuego.
7. Análisis de los conceptos matemáticos utilizados en el ejemplo propuesto para el videojuego serio. (5 minutos)
   Mostrar la forma en la que operaran estos conceptos matemáticos en el mundo del videojuego y contrastar la relación que guardan con el mundo real.
8. Programación guiada de un videojuego serio a través del motor de videojuegos donde se utilicen las relaciones anteriores. (15 minutos)
9. Explicación de lo que es un juego serio y lo qué no es un juego serio. (5 minutos)
   Habiendo desarrollado un juego serio previamente con los participantes, sin haber explicado la metodología de su desarrollo, se procede a explicar lo que es un juego serio y lo que no lo es, para analizar de manera grupal, si lo que se construyó cumple con esas características.
10. Explicación de la metodología de diseño de un videojuego serio, para contrastar si la construcción del “juego serio” cumplió con lo que se abordará aquí. (10 minutos)
11. Diseño por parte de los participantes de un videojuego serio, poniendo en práctica lo

aprendido. (10 minutos)

12. Programación de un videojuego serio por parte de los participantes. (20 minutos)
13. Presentación, análisis y discusión de los videojuegos serios construidos. (10 minutos) Mesa redonda y lluvia de ideas dónde se expondrán y probarán los juegos sérios construidos.
14. Cierre. (5 minutos)

Se proveerá a cada equipo con un CD que contendrá los recursos tecnológicos que se utilizarán, además de un pequeño cuadernillo del participante.

Resultados esperados

Se pretende entonces que los participantes experimenten con el uso de motores de videojuegos en el micromundo de aprendizaje, y a partir de esta experiencia puedan entender esta propuesta, y cómo puede la misma ser implementada para impactar en la construcción de aprendizaje significativo en torno al concepto de modelación matemática de sistemas físicos.

La interacción de los componentes del micromundo de aprendizaje que se propone, pretende favorecer la exploración y la construcción de aprendizaje relacionado con la modelación matemática de sistemas físicos.

Una idea fundamental que se busca también es que el participante no sólo construya, sino que se establezca un método estructurado para que la construcción de lo concreto se haga eficiente y por consecuencia suceda lo mismo con lo abstracto, todo esto favorecido por la relación adecuada de cada uno de los componentes del micromundo de aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Amory, A., & Seagram, R. (2003). Educational Game Models: Conceptualization and evaluation. *South African Journal of Higher Education*, 17 (2), 206-217.

Baytak, A., & Land, S. M. (2010). A case study of educational game design by kids and for kids. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 5242-5246.

Goldenberg, E. P. (1982). *BYTE*, 2, 210-229.

Holbert, N., Penney, L.,& Wilensky, U. (2010). Bringing Constructionism to Action Gameplay. In J. Clayson & I. Kalas (Eds.), *Proceedings of the Constructionism 2010*. Paris, France, 1-7.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-base school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematics education in science and technology*, 18(4), 581-595.

Kafai, Y. B. (2006). Playing and making games for learning: Instructionist and constructionist perspectives for game studies. *Games and Culture*, 1(1), 36-40.

Kafai, Y. B., Franke, M., Ching, C., & Shih, J. (1998). Game design as an interactive learning environment fostering students' and teachers' mathematical inquiry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(2), 149-184.

Kafai, Y., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Klopfer, E., Osterweil, S., & Salen, K. (2009). *Moving learning games forward. Obstacles opportunities & openness*. Recuperado de http://education.mit.edu/papers/MovingLearningGamesForward_EdArcade.pdf.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Papert, S. & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel & S. Papert (Eds.) *Constructionism*. Recuperado de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Sacristán Rock, A.I. (2003) La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC)*, Cartago, Costa Rica.

Sawyer, B., & Smith, P. (2009). *Serious games taxonomy*. Recuperado de http://www.dmill.com/presentations/serious-games-taxonomy-2008.pdf.

Yoyo Games. (2013). Game Maker Studio [Software para desarrollo de videojuegos]. Recuperado de http://www.yoyogames.com/gamemaker/download

Zyda, M. (2005). From visual simulation to virtual reality to games. *IEEE Computer*, 38, 25-32.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Sofware GeoGebra

Andriceli **Richit**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
andricelirichit@gmail.com

Maria Margarete do Rosário **Farias**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
margarete333@hotmail.com

Resumo

A ênfase algébrica dada ao longo do tempo nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral não oportunizou que tratamentos gráficos e numéricos fossem privilegiados, visto a ausência de softwares que possibilitassem uma abordagem diferenciada aos conceitos inerentes a esta disciplina (Richit, 2010, Guimarães, 2001). Contudo, iniciativas no mundo inteiro têm dedicado esforços e desenvolvido softwares que possibilitam explorações qualitativamente diferentes para conceitos de Cálculo a partir de representações gráficas, numéricas ou algébricas envolvendo visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações, etc. Deste modo, a incorporação das tecnologias digitais na aula de Cálculo remove um pouco o fardo da manipulação algébrica, possibilitando a transição entre a ação física (interação do estudante com a tecnologia) e a representação matemática de um conceito. Assim, a proposta de oficina aqui apresentada objetiva explorar conceitos de Cálculo (Funções, Limites, Derivadas e Integrais) em uma perspectiva de investigação com o software GeoGebra.

Considerações Introdutórias

Iniciamos este artigo, apresentando algumas pesquisas brasileiras que articulam Tecnologias Digitais e Cálculo Diferencial e Integral destacando características que emergem quando os conceitos inerentes ao Cálculo Diferencial e Integral são trabalhados em uma perspectiva de investigação possibilitada por softwares e outros recursos tecnológicos, privilegiando a experimentação, a visualização, o levantamento de hipóteses e conjecturas. Na sequência, apresentamos as características metodológicas da oficina aqui proposta, além de atividades que serão desenvolvidas no decorrer da mesma. Encerramos este artigo com algumas considerações finais.

Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Tecendo considerações sobre os processos de ensino-aprendizagem a partir de estudos desenvolvidos

Atualmente, o Cálculo Diferencial e Integral assume o posto de uma das grandes realizações da humanidade, cujas ideias datam de aproximadamente 350 anos. Assim, ao longo do tempo, o estudo de Cálculo foi enriquecido por novas metodologias, começando com as concepções originais de Leibniz e Newton sobre infinitesimais e limites e caminhando para uma variação de métodos formais modernos, a partir de abordagens intuitivas que caminham para abordagens numéricas, simbólicas e gráficas possibilitada, mais recentemente pela utilização das tecnologias digitais. O resultado é uma larga escala de pontos de vista a respeito de como o Cálculo deve ser concebido e ensinado (Tall, Smith e Piez, 2008).

A literatura de pesquisa a qual nos remetemos será considerada para evidenciar este ponto de vista, essencialmente no que diz respeito ao fato de que abordagens bem projetadas, utilizando recursos das tecnologias digitais podem produzir "ganhos" [1] consideráveis nos processos de ensinar e aprender Cálculo.

Olimpio Junior (2005), a partir da integração oralidade, escrita e Informática, investigou as compreensões emergentes sobre conceitos de Função, Limite, Continuidade e Derivada produzidos por ingressantes em um curso de Matemática. Como resultados de seus estudos, o autor sugere que os conflitos emergentes poderiam ter suas raízes numa limitada compreensão conceitual de Função. Além disso, essa pesquisa sugere, também, uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica do Cálculo Diferencial e Integral por meio da utilização de softwares gráficos.

Javaroni (2007) também nos apresenta uma valiosa contribuição, por meio da qual buscou analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Para tanto, realizou uma abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos (modelos de objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei de resfriamento), auxiliada pelas tecnologias digitais. A interação entre os alunos e as mídias utilizadas propiciou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, levando assim a sugerir a necessidade de repensar

[1] Modos alternativos na busca de solução de problemas.

o ensino das equações diferenciais ordinárias, enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos, além do aspecto algébrico.

Menk (2005) apresenta uma investigação acerca das possíveis contribuições do software Cabri-Géomètre II na exploração de problemas de Máximos e Mínimos, principalmente aqueles que, de alguma forma, estão relacionados aos conceitos e às propriedades geométricas. O estudantes engajados na investigação puderam construir, experimentar, formular, testar, validar ou refutar hipóteses relacionadas às condições do problema de uma forma dinâmica e diferente da habitualmente utilizada por eles nas aulas da disciplin. Com base nos resultados observados, a autora acredita que esse procedimento possa criar condições, que possibilitam facilitar a interpretação, a observação, a análise e a resolução dos problemas considerados. A forma como foram desenvolvidas as atividades, privilegiando a simulação e a visualização, permitiram criar situações nas quais se pôde "ver" o processo de *como* se desenvolveu o raciocínio dos alunos em várias situações.

A partir do panorama apresentado compreendemos que a transição entre a ação física (representada por interações de estudantes com diversos recursos informáticos), e a representação matemática tem fornecido suporte para idéias, as quais têm potencial tanto para serem usadas em aplicações do Cálculo, quanto para o desenvolvimento da teoria formal, colaborando, assim, com os processos de aprendizagem dos estudantes.

A transição acima referenciada pôde ser evidenciada em Scucuglia (2006). Esse autor discutiu, em sua dissertação de Mestrado, como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Nesse trabalho, ao explorar exemplos de funções polinomiais com o comando de integração definida da calculadora gráfica, estudantes estabeleceram conjecturas sobre o TFC antes mesmo da sua formalização matemática. Nessa abordagem o autor propôs que, inicialmente, fossem utilizadas notações mais simplificadas envolvendo os programas da calculadora gráfica antes que uma simbologia mais formal (padronizada pela matemática acadêmica) fosse discutida por eles. Igualmente, o autor sugere que esta abordagem possibilitou o engajamento gradativo dos estudantes em discussões matemáticas dedutivas a partir de resultados obtidos experimentalmente com as atividades propostas na pesquisa.

O autor trabalhou na perspectiva de experimentos de ensino, e uma das atividades desenvolvidas consistia em encontrar os valores das Integrais Definidas nos intervalos dados, utilizando o comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83. Assim, os estudantes calculavam o valor das Integrais com relativa facilidade. Contudo, durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes tiveram algumas dificuldades em encontrar o valor da Integral no intervalo [a,b]. Assim, a intervenção e mediação do pesquisador se fizeram necessárias para que os estudantes chegassem ao resultado. Após várias conjecturas os estudantes chegaram à conclusão de que o valor da Integral da função real f: $[a, b] \to \Re$, definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \Re$, era $b^2 - a^2$. Assim, seguindo o mesmo raciocínio, os estudantes encontraram a integral para as funções reais f: $[a, b] \to \Re$ e g: $[a, b] \to \Re$, definidas por $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x^3$, para todo $x \in \Re$ com maior facilidade.

Na sequência do experimento de ensino, Scucuglia (2006) buscou comparar juntamente com os estudantes cada valor encontrado para a Integral, no intervalo dado com a função de origem. Por exemplo, apontou que para a função real f: $[a, b] \to \Re$, definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \Re$ o valor da integral era $b^2 - a^2$. Destarte, buscou fazer os estudantes perceberem tais padrões envolvendo $f(x) = 3x^2$ e $b^3 – a^3$ e também $g(x) = 4x^3$ e $b^4 – a^4$. Ao final da atividade, os estudantes conjecturaram que a Integral de uma função f(x) em um intervalo [a, b], com antiderivada F(x) é "F aplicada em b menos a F aplicada em a". Isto é, F(b) – F(a).

A interação entre estudantes e o pesquisador e as diferentes mídias utilizadas no desenvolvimento da atividade exibida aponta que a coordenação de diferentes mídias na abordagem de conceitos de Cálculo traz, também, possibilidades para o entendimento e compreensão, e mais ainda, para a formalização de conceitos matemáticos (Scucuglia, 2006).

Outro aspecto muito importante no que tange a construção de conhecimento inherentes aos processos de ensino e aprendizagem está pautado nas representações matemáticas e suas coordenações, as quais possibilitam um maior entendimento, e, por conseguinte, uma compreensão ampliada dos conceitos matemáticos. Este aspecto é evidenciado por Farias (2007) em sua dissertação de mestrado. A autora realizou um estudo epistemológico, em uma perspectiva Semiótica, das representações matemáticas mediadas por softwares educativos. Para tanto buscou investigar e ressaltar as diferentes formas representativas de conceitos matemáticos, e suas dimensões didático-pedagógicas no Ensino de Cálculo.

Com este estudo, Farias sugere que ao explorarmos o universo das representações, agregamos valores à constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática. Além disso, aponta a importância de conscientizar estudantes/professores da perspectiva semiótica implícita à abordagem de transitar entre várias representações matemáticas no processo de investigação e interpretação de conceitos, por meio da utilização de softwares adequados à disciplina, proporcionando a estes novas formas de abordagem dos conteúdos e permitindo um maior grau de compreensão.

Essa coordenação e mobilidade das representações matemáticas podem ser evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade envolvendo o conceito de continuidade de função empreendido por Farias (2007) junto aos estudantes engajados em sua pesquisa. A atividade consistia em avaliar a continuidade da função real $f : [a,b] \to \Re$, definida por $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 \ se \ x \le 1 \\ 2x - 3 \ se \ x > 1 \end{cases}$, para todo $x \in \Re$. Como proposto na atividade, os estudantes iniciaram a discussão sobre a continuidade da função afirmando que esta era contínua. Contudo, logo perceberam que a referida função era definida por partes e dependia de um parâmetro k, o qual iria interferir na continuidade desta função.

Na sequência da atividade os estudantes plotam o gráfico, e lançam mão do recurso "animação" do software Winplot, para visualizar o que haviam conjecturado a respeito do parâmetro k.

Notamos que antes dos estudantes plotarem o gráfico de f, a maior parte deles havia afirmado que a mesma era contínua. Contudo, ao utilizarem o comando "animação" do Winplot e variar o parâmetro k, os estudantes puderam perceber que apenas para k= –2 a função tornava-se contínua.

Por meio da visualização os estudantes verificaram que para k = –2 a função tornava-se contínua, e que o limite da função supracitada era igual a – 1. Para comprovar o que haviam observado, os estudantes utilizaram-se de outra forma representativa (a algébrica) para justificar os resultados visualizados no Winplot.

Após a investigação e exploração por meio do software Winplot as dúvidas dos estudantes foram esclarecidas. Além disso, por meio da coordenação das representações matemáticas (gráfica e algébrica), puderam refletir sobre o conceito de Continuidade de uma Função, e repensar sobre "o engano" que inicialmente haviam cometido a respeito da continuidade da mesma. Atividades como estas são comumente trabalhadas na maioria dos cursos de Cálculo, mas sem a abordagem tecnológica, ao mesmo tempo que a abordagem dada (algébrica) acaba deixando muitas lacunas em seus estudos.

É nessa perspectiva, que entendemos que as tecnologias propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados. Além disso, o professor de Cálculo tem aí uma possibilidade de tornar a abordagem de certos conceitos significativa para os estudantes, gerando novas compreensões em função da ampliação das formas de interação aluno-conteúdo, comparando-se com estratégias metodológicas clássicas, que priorizam a abordagem estática do conteúdo. Sobre isso, Richit, Richit e Tomkelski (2009, p.6),

> a criação de ambientes de aprendizagem, baseados no uso de tecnologias, pode propiciar distintas abordagens para o conteúdo matemático, contribuindo com a construção do conhecimento dos estudantes. Nesse sentido, cabe ao professor proporcionar aos estudantes tais cenários de aprendizagem, pois é uma forma de privilegiar os diferentes estilos e ritmos de aprendizagem dos alunos.

Características Metodológicas da Oficina

A proposta de oficina aqui apresentada tem por objetivo explorar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (Funções, Limites, Derivadas e Integrais) em uma perspectiva de investigação matemática tomando como apoio o software GeoGebra. O desenvolvimento da mesma dar-se-á em Laboratório de Informática, com o software GeoGebra devidamente instalado e contará com 20 participantes. Principiaremos a referida oficina com a apresentação do software fazendo alguns comentários de suas potencialidades, comandos. Dando sequência a oficina, realizaremos uma atividade visando à familiarização dos participantes com os comandos e recursos do software. Em seguida, desenvolveremos junto aos participantes, algumas atividades, de caráter investigativo envolvendo Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Na próxima seção apresentamos uma das atividades que serão desenvolvidas durante a oficina.

Apresentação e Desenvolvimento das Atividades

Nesta seção, apresentamos um exemplo de atividade a ser desenvolvida no decorrer da oficina.

Atividade – Explorando geometricamente o Conceito de Derivada de uma Função[2]

1) Seja f a função definida por $f(x) = x^2$. Construa no GeoGebra o gráfico de f, digitando no campo entrada f(x)=x^2 e tecle enter. Explore propriedades, cor e estilo.

[2] Esta atividade foi baseada na atividade disponível em: http://ensinolivre.pt/files/derivada_explorar.pdf

2) Em seguida, insira um ponto A sobre a função f, representada na janela gráfica do GeoGebra, digitando no campo de entrada do GeoGebra: A=ponto(f). OBS: Este ponto pode ser arrastado para uma outra posição qualquer, ao longo da função f. Explore propriedades, cor e estilo.

3) Adicionamos agora uma reta tangente a f no ponto A. Para isso, digite no campo de entrada do Geogebra: t=tangente[A,f]. Explore propriedades, cor e estilo.

4) Para mostrarmos a equação da reta na janela gráfica, clicamos com o botão direito do mouse sobre a reta e selecionamos a Opção “Propriedades”, “Básico”, “Exibir Rótulo”, “ Valor”, como mostra a figura abaixo:

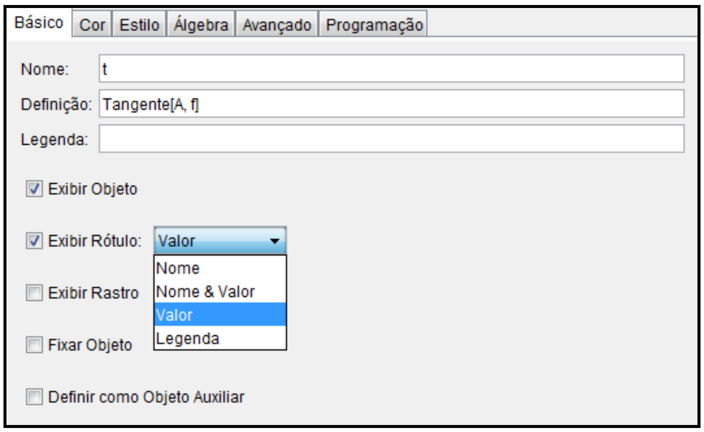


Figura 1. Exibindo o valor de uma reta no software GeoGebra

5) Agora, adicionamos um ponto, Q, cuja abcissa é igual à abcissa de A e ordenada igual a inclinação da reta tangente t no ponto A. Para isso escrevemos no Campo de Entrada: Q=(x(A),inclinação[t]). Explore propriedades, cor e estilo.

6) Pretende-se que o ponto Q deixe um rastro de forma a transmitir a ideia de como é construída a função derivada. Para isso clique com o botão direito do mouse sobre o ponto Q ou na sua definição na janela algébrica e selecione a opção “Habilitar Rastro”.

7) Para ser mais fácil de perceber as coordenadas dos pontos Q e o valor da inclinação da reta tangente a f no ponto A, selecione a opção “Inserir Texto”. Na janela de diálogo que abre, digitamos "Inclinação da tangente =" + (Declive[t]) + "
Coordenada do ponto Q = (" + x(Q) + "," + (y(Q))) + ")". Feito isso, ao movimentarmos o Ponto A sobre f, visualizaremos na janela gráfica o valor da inclinação e as coordenadas de Q quando movemos o ponto A, além do rastro que o ponto Q vai deixando. A figura a seguir ilustra a construção final.

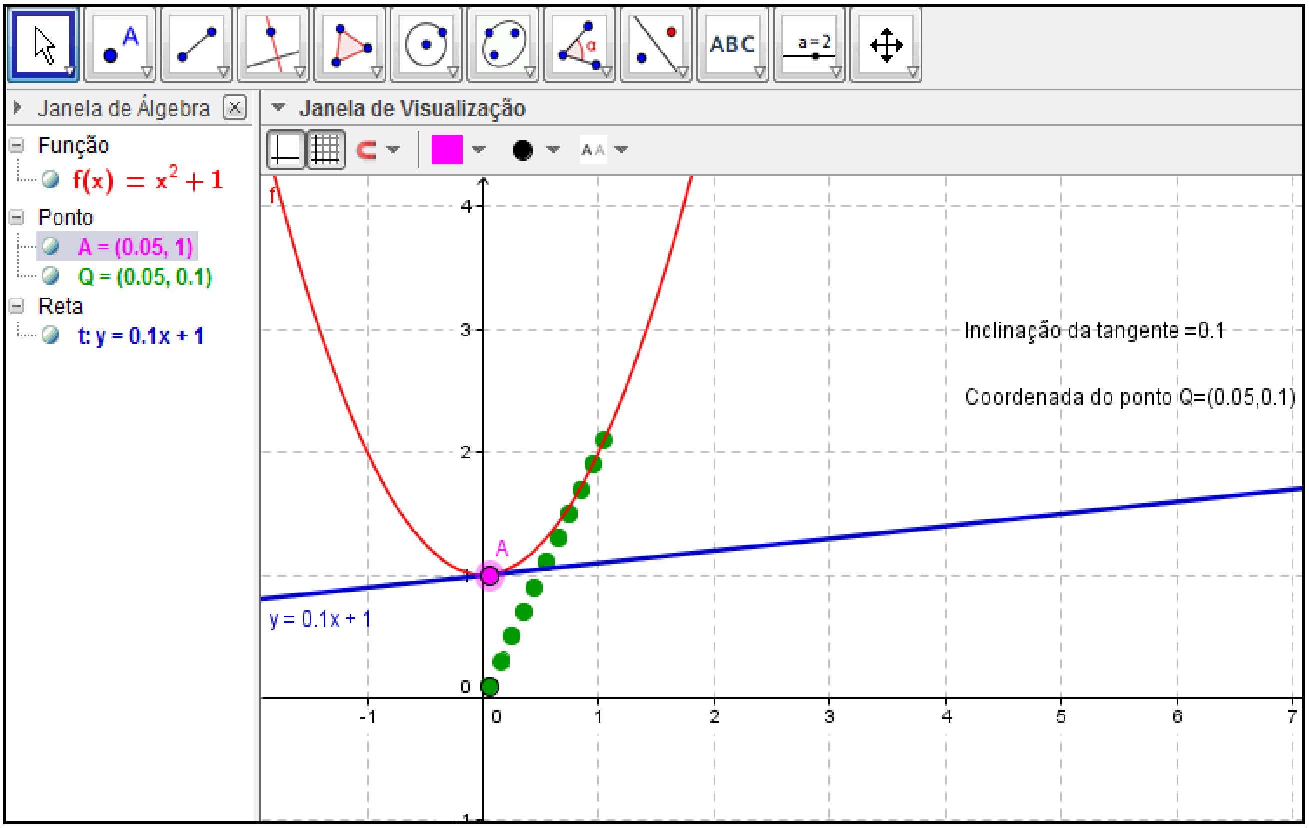


Figura 2. Construção final no GeoGebra relacionada a exploração geométrica da ideia de Derivada.

8) Ao variar o ponto Q, o que você pode observar considerando o rastro produzido por ele?

A atividade ora apresentada constitui-se em um dentre tantos exemplos que fazem uma abordagem geométrica do conceito de Derivada. Salientamos, que durante o desenvolvimento da oficina, evidenciaremos posibilidades pedagógicas relativas ao Cálculo Diferencial e Integral com o software GeoGebra, discutindo roteiros de atividades envolvendo Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

Considerações Finais

A vasta literatura concernente a Educação Matemática sugere que a incorporação de recursos tecnológicos (como o software GeoGebra, entre outros) na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada, e que seja menos enfatizada a abordagem algébrica. Podemos observar, que ao longo dos anos, não houveram mudanças substanciais na forma como grande parte dos conceitos de Cálculo são abordados. A abordagem de tais conceitos, ainda pauta-se em tecnicalidades, formalismo e rigor, aspectos estes que distanciam e muito da forma como estes conceitos foram construídos e formalizados. As idéias iniciais do Cálculo são de origem geométrica, mas o que vemos hoje é a ênfase no aspecto algébrico. É nesse sentido que entendemos a necessidade do resgate geométrico do Cálculo, por meio de recursos tecnológicos (Richit, 2010).

Embora exista um reconhecimento sobre as potencialidades e possibilidades advindas da utilização de recursos das tecnologias digitais na abordagem de conceitos de Cálculo, sabemos que essa característica por si só não é suficiente para que sejam integradas a estas aulas as tecnologías. Nesse sentido, uma aula de Cálculo que leve em conta a utilização de tais recursos não se constitui em uma tarefa simples, nem tampouco em uma mudança instantânea, ou seja, não se espera que o professor mude sua prática de uma hora para a outra, mas que seja a ele oportunizado momentos de formação, que possibilitem ao mesmo repensar sua prática atrelada ao uso das tecnologias digitais. Nesse viés, Miskulin, Escher e Silva (2007) apontam que é possível ao professor de Cálculo transcender as didáticas tradicionais de ensino e trabalhar em uma abordagem metodológica da Investigação Matemática, por meio das Atividades Exploratório-Investigativas e das potencialidades didático-pedagógicas advindas de ambientes computacionais, como os softwares.

Referências

Farias, M. M. R. (2007). *As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor dematemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Guimarães, O.L.C (2001). *Cálculo Diferencial e Integral uma mudança de foco: do Algebrismo às Representações Múltiplas, através de atividades de Modelagem e Ambientes Informatizados.* Dissertação de Mestrado, Engenharia da Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Javaroni, S.L (2007)**.** *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.*Tese de Doutorado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Menk, L. F. F (2005). *Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos.* Dissertação de Mestrado, Ensino de Ciência e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil.

Miskulin, R. G. S., Escher, M. A. & Silva, C. R. M. (2007). A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do Maple em Cálculo Diferencial. *Revista de Educação Matemática, 10*(1), 29-37.

Olimpio Junior, A (2005). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.* Tese de Doutorado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Richit, Adriana, Richit, Andriceli, & Tomkelski, M. L. (2009). Multi-Representações Matemática com o Software GeoGebra na Abordagem de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. In: *Anais do Encontro Baiano de Educação Matemática*. (pp. 01-05). Jequié, Bahia, Brasil: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Jequié.

Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Scucuglia, R. (2006). *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.* Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Tall, D; Smith, D.; & Piez, C. (2008) Technology and Calculus. In M. Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume I: Research Syntheses, p. 207-258.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas

Hilduara **Velásquez** Echavarría
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
sarcavelasquez@gmail.com
José Wilde **Cisneros**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Jose.wilde@gmail.com

Resumen

Este taller discute sobre los conocimientos que debe tener un maestro o maestra que enseña matemáticas para asumir su labor. Se discuten los modelos del conocimiento del maestro propuestos por Shulman, Ball y Godino, para analizar las diversas dimensiones del conocimiento del maestro que se requieren para describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las actividades están orientadas tanto a diferenciar el conocimiento común del conocimiento especializado como a analizar la idoneidad didáctica de las situaciones propuestas a los estudiantes, por parte de los maestros.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático, Conocimiento pedagógico del contenido, Conocimiento común, Conocimiento especializado, Idoneidad didáctica.

Presentación

El taller del conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas está orientado a maestros-de matemáticas- en formación inicial y continuada. Shulman(1987) se refiere a este conocimiento como “Conocimiento Pedagógico del contenido” (PCK); el equipo de investigación de Ball (2005) lo denomina “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT); el equipo de Godino (2009) lo denomina “conocimiento didáctico-matemático”. Cada uno de estos modelos permite analizar las diferentes dimensiones del conocimiento que un maestro debe tener para llevar a cabo el proceso de enseñanza en forma eficiente y eficaz[1].

En el taller se abordan algunos elementos teóricos y prácticos incluidos en las actividades que se usan a guisa de reflexión. El taller se desarrolla durante tres momentos: en el primero, se proponen tres situaciones matemáticas para ser analizadas por el grupo de participantes; en el segundo momento, los participantes diseñan situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por ellos; y durante el tercer momento se discute y analiza colectivamente las propuestas de los participantes.

Marco Teórico

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros de matemáticas ha sido un asunto de reflexión e investigación. Diversos investigadores (Shulman,1986-1987; Ball y colaboradores, 2001-2004-2008; Godino y colaboradores, 2007-2009-2011; Gómez, 2007; Ponte, 2008-2012) han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático y de la educación matemática, diferentes modelos que han permitido describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Shulman (1986–1987) considera "…debe existir un «conocimiento base para la enseñanza» esto es, un conjunto codificado o codificable de conocimientos, destrezas, comprensión y tecnología, de ética y disposición, de responsabilidad colectiva, al igual que un medio para representarlo y comunicarlo" (p.5); conocimiento que debe orientar el quehacer del docente en el aula. El autor propone categorías de conocimientos que un maestro debería tener:

- *Conocimiento del contenido*, la disciplina a enseñar, en este caso las matemáticas.
- *Conocimiento didáctico general*, relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, relaciones con los niños, estrategias de motivación y organización de la clase.
- *Conocimiento del currículo*, organización de las temáticas, secuenciación de los contenidos, utilización de los materiales y recursos, planeaciones, evaluación y seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Conocimiento de los alumnos*, del contexto, de sus necesidades, intereses, expectativas y de sus características.
- *Conocimiento de los aspectos teleológicos* de la institución educativa donde desempeña su labor docente.
- *Conocimiento pedagógico del contenido* (PCK)[2], entramado entre la disciplina de estudio y la pedagogía; tiene que ver con la didáctica, el uso de estrategias de aprendizaje y los mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje. Nuestro interés se centra en este conocimiento, que es propio del educador matemático.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), propuesto por Shulman (1987) ha servido de referencia para otros trabajos de investigación como los de Ball (2000); Ball, Lubienski & Mewborn (2001) quienes han estudiado el proceso de enseñanza en las aulas de matemáticas, y han introducido la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT)[3]. Hill, Ball, & Schilling (2008) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y

---

[1] Eficiente-uso de recursos, Eficaz-logro de objetivos (Toranzos, 1996).
[2] Por sus iniciales en inglés: Pedagogical Content Knowledge (PCK).
[3] Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

desarrollo en el alumno" (p.374). Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas "Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático como virtud por haber estudiado matemáticas avanzadas…más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas". (Ball et ál., 2001, p. 448)

Los autores clasifican el conocimiento del maestro de matemáticas en dos grupos: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. En el primer grupo se incluye: el Conocimiento Común del Contenido [4](CCK), el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK). Para el conocimiento pedagógico del contenido, se incluyen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo (Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008).

En ésta categorización del conocimiento del maestro de matemáticas resalta la distinción entre el Conocimiento Común del Contenido (CCK) y el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK); el primero se refiere a los conocimientos requeridos para resolver problemas matemáticos, que un matemático, un ingeniero o un sujeto con alguna preparación en matemáticas, podría resolver; el segundo se refiere al conocimiento del maestro que lo faculta para enseñar y para orientar la resolución de problemas matemáticos; este incluye: un ordenamiento de las secuencias con las cuales podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico, el conocimiento de los errores y dificultades comunes de los estudiantes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona tal comprensión. Es posible que un adulto informado o, inclusive un matemático, no puedan dar cuenta de la comprensión ni de la evolución de esa comprensión (Hill, Schilling & Ball, 2004).

El "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007) incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales, un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas, un modelo instruccional sobre bases socioconstructivistas y un modelo sistémico–ecológico que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática. El enfoque propone el concepto de "Idoneidad Didáctica"[5] que aborda la "pertinencia" de las diversas actividades propuestas por el maestro durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido específico.

Un análisis didáctico del proceso de enseñanza debe incluir el contenido matemático, los estudiantes, el profesor, el currículo, el contexto institucional y social, los medios y recursos utilizados. (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006) consideran seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática: epistémico, cognitivo, mediacional, emocional, interaccional y ecológico.

[4] Hemos incluido las siglas en inglés para facilitar la referencia a los artículos mencionados.
[5] Idoneidad didáctica: herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva –explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes: Epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. (Godino et ál., 2006)

Idoneidad Epistémica. Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución temporal de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos). Esta idoneidad permite valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". (Font, Planas & Godino, 2009, p. 14).

Idoneidad Cognitiva. Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes. Su valoración permite identificar antes de iniciar el proceso de enseñanza, si lo que se quiere enseñar concuerda con los conocimientos de los alumnos y, después de la actividad de enseñanza, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; lo cual permite hacer un paralelo entre lo que se enseña y lo que realmente se aprende.

Idoneidad Afectiva. Estados emocionales (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno en relación con los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. Permite valorar el interés, motivación y entusiasmo de los alumnos en el proceso de instrucción.

Idoneidad Mediacional. Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos. Se valora la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

Idoneidad Interaccional. Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados. Se puede valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.

Idoneidad Ecológica. Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico y educativo que soporta y condiciona el proceso de estudio. Se valora la adecuación del proceso de instrucción al Proyecto Educativo Institucional[6], las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

Metodología

La participación de los asistentes es clave para la reflexión y análisis del conocimiento didáctico-matemático; las ideas emergentes de las actividades se discuten en pequeños grupos.

Las actividades se desarrollan durante tres momentos; en el primero se presentan tres situaciones matemáticas, cuyo análisis y solución ponen en juego el conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas, donde se establece una diferenciación entre el Conocimiento Común del Contenido (CCK) y el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK); en el segundo momento, los asistentes diseñan situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por ellos, y desde los seis componentes de la Idoneidad didáctica se analiza la pertinencia de las situaciones propuestas ; y durante el tercer momento se discute y analiza colectivamente las propuestas de los participantes.

Las reflexiones se orientan hacia el establecimiento de algunas relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento que se requiere para la enseñanza de las matemáticas. En ellas, se pretende establecer la diferencia entre el conocimiento común y el conocimiento especializado, además de hacer un análisis epistémico de las mismas situaciones,

---

[6] El proyecto Educativo Institucional (PEI): Es el plan de navegación de las escuelas y colegios, en donde se especifican, entre otros aspectos, los principios y fines de la institución, los recursos docentes y didácticos disponibles y necesarios, la estrategia pedagógica, el manual de convivencia escolar, el sistema de evaluación institucional y el sistema general de gestión administrativa y académica. El PEI debe responder a situaciones y necesidades de los estudiantes, de la comunidad local, regional y nacional; además debe ser concreto, factible y evaluable.

en la medida que se identifican los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos.

Primer momento. Se presentan tres situaciones matemáticas, cuyo análisis y solución ponen en juego el conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas.

Situación 1[7]. ¿Cuál de estos ítems les plantearía a sus estudiantes para introducir el concepto de relaciones orden entre números decimales?; justifique

a) 0.5 7 0.01 11.4
b) 0.60 2.53 3.14 0.45
c) 0.6 4.25 0.565 2.5
d) Cualquiera de ellos serviría para introducir el concepto.

Ésta actividad se aplicó tanto a maestros en formación de la licenciatura en matemáticas y física, que cursaban VII semestre (2013-1) en la Universidad de Antioquia, como a maestros de matemáticas con varios años de experiencia docente. A continuación se analizan algunas de sus respuestas:

- Maestros en formación: Uno de ellos, considera que el ítem (b) es el más apropiado, porque todos los números tienen igual cantidad de cifras decimales; parece que el maestro busca patrones únicos de formación, lo cual se constituye en un obstáculo epistemológico.
  Otros, plantean la opción (d), dado que para ellos importa tanto identificar las relaciones de orden, como comparar las cantidades, primero la parte entera y después la parte entera decimal; en ésta opción los maestros en formación no logran identificar las diferencias entre las opciones ofrecidas.
- Maestros con experiencia docente: Tres de ellos, consideran que el ítem (a) es el más apropiado para introducir el concepto, dado que es el único que contiene un número entero. Los maestros establecen las relaciones de orden por el valor posicional.

Un maestro considera que “cualquiera de ellos serviría para introducir el concepto, ya que el orden se establecerá en relación con la unidad y las partes que se toman de ella, comparando con la unidad y ordenando”[8].

Es posible que al proponer la actividad a un grupo de estudiantes, se observe que establecen la relación como cantidades de números enteros; para lo cual, en la opción a) identifiquen (a) 5, 7, 1, 114; y su orden sería: 0.01; 0.5; 7; 11.4; lo cual es correcto. En el ítem (b) ocurriría algo similar; pero si se utiliza el mismo criterio en el ítem (c), la ordenación resultante sería incorrecta.

En este tipo de actividades se evidencia el conocimiento Especializado del Contenido (SCK), ya que además del conocimiento matemático se requiere del conocimiento específico para la enseñanza del contenido.

Situación 2. ¿Cuál de las siguientes situaciones, NO usaría para introducir el concepto de número racional a partir de la razón? Justifique su elección.
a) Un estudiante tiene una cuerda cuya longitud corresponde a 3 lápices, pero esa misma longitud, equivale a 12 clip. Otro estudiante tiene una cuerda cuya longitud corresponde a 10 clip y él desea expresar la longitud de su cuerda en términos de lápices.

[7] Tomada de Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008).
[8] Respuesta textual de un maestro con experiencia docente.

b) Con las regletas de Cuisenaire, se representa el símbolo $\frac{1}{2}$ de dos formas.

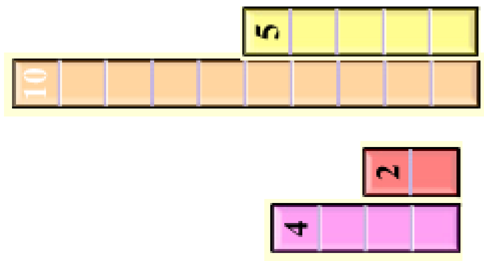


Figura 1. Regletas de Cusenaire.

c) Tomando como unidad de medida el siguiente paralelogramo,

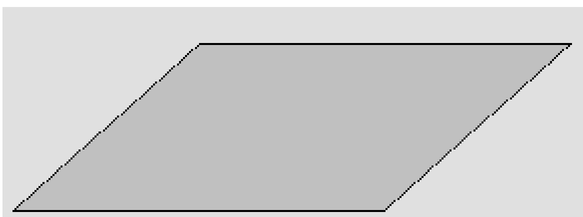


Figura 2. Paralelogramo.

¿Qué cantidad del área del paralelogramo de la Figura 2 representa el área del triángulo de la Figura 3?

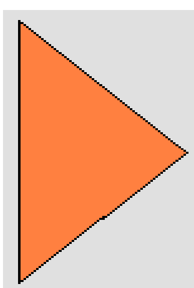


Figura 3. Triángulo.

d) Señale $\frac{1}{3}$ de cada uno de los conjuntos de esferas.

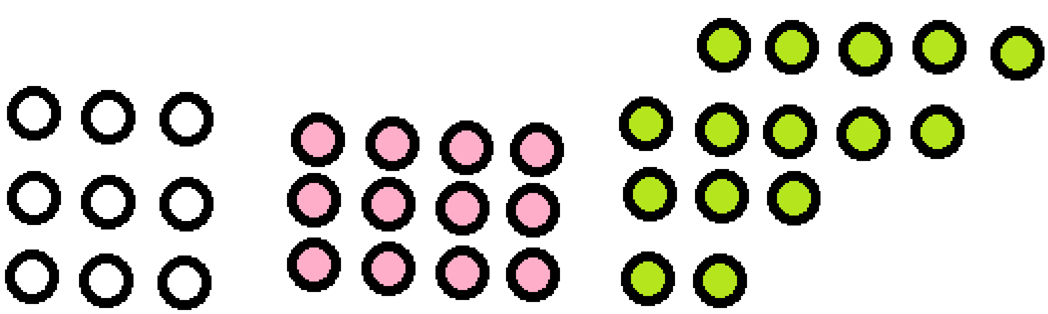


Figura 4. Conjuntos de esferas.

Situación 3. Un estudiante va a construir la cola de una cometa, y cuenta con una cinta de $\frac{4}{5}$ de metro. El estudiante solo utiliza $\frac{6}{8}$ de metro. ¿Qué cantidad le queda de cinta?
Diseñe una representación de la situación que permita explicar a los alumnos. ¿Cuáles contenidos matemáticos se abordan en ésta situación?

Segundo momento. Diseño de situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por los participantes. Los temas que se proponen son:
a) Relaciones de orden entre números fraccionarios
b) División de fracciones
c) Multiplicación de números naturales

En la Tabla 1 se presentan los componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2011), que fueron adaptados para realizar un análisis de las situaciones propuestas.

Idoneidad	Indicadores
Idoneidad Epistémica	¿La situación planteada corresponde al nivel de desarrollo de los niños? ¿Se propician diferentes esquemas de representación: verbal, gráfico, simbólico…? ¿Se favorece la generación y negociación de conceptos, procedimientos y argumentos?
Idoneidad Cognitiva	¿Los niños tienen los conocimientos necesarios para abordar la solución de la situación? ¿Ha considerado otras situaciones para discutir más el concepto abordado, en caso de no lograrse el objetivo? ¿El proceso evaluativo tiene en cuenta los diferentes niveles de comprensión de los niños?
Idoneidad Mediacional	¿Los materiales utilizados (manipulativos físicos y virtuales) son los apropiados para resolver la situación? ¿El tiempo previsto es suficiente para resolver la situación? ¿El aula, la distribución de los niños y el horario son los apropiados?
Idoneidad Ecológica	¿La situación planteada hace parte del contexto sociocultural de los niños? ¿Está orientada a las directrices curriculares de la institución? ¿Permite explorar conexiones intra e interdisciplinares?
Idoneidad Afectiva	¿Es significativo y motivante para los niños resolver la situación? ¿Permite valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional? ¿Cómo promueve la autoestima, evitando el rechazo, o miedo hacia las matemáticas?
Idoneidad Interaccional	¿El uso de los diferentes recursos y argumentos permiten captar el interés y la atención de los niños? ¿Permite que los niños discutan, argumenten y confronten las soluciones? ¿La situación enfatiza los conceptos clave del tema?

Tabla 1. Componentes de la Idoneidad didáctica

Tercer momento. Discusión y análisis de las propuestas de respuesta a las temáticas sugeridas en la actividad anterior.

Resultados

En las discusiones y análisis que se generan en el taller, se espera que el maestro reflexione no solo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para la enseñanza de los mismos.

En el segundo momento del taller se espera que el maestro diseñe situaciones adecuadas para presentar ciertos temas matemáticos a los niños, además de discutir sobre la pertinencia de las propuestas teóricas de Ball et al., (2008) y de Godino (2009).

Se espera que los maestros en formación inicial y continuada de matemáticas, reflexionen sobre la complejidad de procesos de estudio matemático, sobre sus propias prácticas de enseñanza y discutan sobre la idoneidad didáctica según la propone Godino (2009).

Conclusiones

Los niños pueden presentar dificultades en el aprendizaje, debido a la complejidad del conocimiento matemático, a las creencias epistemológicas de los maestros y al diseño de actividades de aprendizaje.

Aún en actividades matemáticas aparentemente sencillas se manifiesta la complejidad de la estructura del conocimiento matemático y la necesidad de un “conocimiento matemático para la enseñanza” para abordarla. Es deseable por tanto generar espacios de formación continuada de maestros, donde se reflexione sobre los conocimientos que se requieren para asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se requiere diseñar e implementar instrumentos que permitan valorar los conocimientos del maestro, para generar procesos de transformación de las prácticas en la escuela.

El análisis del conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas, puede contribuir al diseño de programas de formación de maestros, a la implementación de normas y de políticas educativas que podrían ayudar a mejorar el proceso de formación matemática de los niños.

Referencias

Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. *Research on teaching mathematics, Handbook of research on teaching, (*4th ed), 433–456.

Ball, D. (2004). What are teachers learning?. National Council of Supervisors of Mathematics, Philadelphia, PA.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Delaney, S., Ball. D., Hill, H., Schilling. S., & Zopf, D.(2008). "Mathematical knowledge for teaching" Adapting U.S. measure for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (3), 171-197.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2009). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje,* 33 (2).

Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V., (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39, (1-2), 127-135.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática,* 20, 3-31.

Godino, J.D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM. Recife, Brasil.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*.[Tesis doctoral]. Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática, España.

Graeber, A., & Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge: ¿Useful concept or elusive notion? In P. Sullivan & T. Woods (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development,* 117–132. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*, 11–30.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4), 372-400.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education –Second Edition,* 225-263.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática,* 93-98. Barcelona: Graó.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

Toranzos, L. (1996). Evaluación y calidad. *Revista iberoamericana de educación,* 10, 63-78.

Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática

Ronald **Arias** Madriz
Liceo Elías Leiva Quirós
Costa Rica
ramartec@gmail.com

Resumen

En la sociedad educativa actual no se puede considerar al uso de las TIC’s como una opción más, sino como una importante necesidad para lograr un aprendizaje más propio en el estudiante, siendo este el constructor de su conocimiento. El objetivo del presente taller es el conocer al programa gratuito GeoGebra como una potente herramienta para el aprendizaje y enseñanza de la matemática. Para esto se realizarán construcciones diversas en el área de la geometría y funciones, con el fin de conocer el funcionamiento del programa para luego aterrizar en lo que respecta a elaboración de guías de trabajo para estudiantes y docentes.

Palabras clave: Educación Matemática, GeoGebra, construcciones dinâmicas, geometría, funciones, formación

Introducción

En la época actual la tecnológica ha pasado a ser de un lujo a una necesidad en donde la sociedad depende mucho de ella para poder existir como tal. Así es como hoy en día utilizamos las tecnologías, ya sea para poder transportarnos al lugar de trabajo o al supermercado, para informarnos de los acontecimientos del mundo, e incluso para poder alistarse una buena taza de café. Tanto se han acortado las distancias gracias a las tecnologías de la información y comunicación (que hoy en día las conocemos como TIC o NTIC en alusión a las nuevas tecnologías de educación), que nos podemos enterar de lo sucedido en el otro lado del mundo con un solo clic minutos e incluso segundos después de ocurrido.

Así como la tecnología ha envuelto de tal manera al ser humano desde muchos aspectos (como en la comunicación, el trabajo, ocio) era normal que su potencial producción llegase al ámbito educativo, ofreciendo la oportunidad de permitir nuevas y mejores formas de que el estudiante aprenda, específicamente desde el punto de vista explorativo, es decir, que el estudiante, mediante la manipulación de un software educativo pueda logra un mejor aprendizaje, y en el mejor de los casos, llegar a sus propias conclusiones.

Sin embargo la línea que separa lo que utilizar las TIC como medio y como fin es muy delgada, tanto así que, cuando vamos a utilizar un software didáctico como GeoGebra para las lecciones de matemática, es muy fácil que los docentes terminen enseñando a sus estudiantes a utilizar GeoGebra (sus herramientas, cómo realizar construcciones, etc) en lugar de utilizarlo como la herramienta que es para lograr un objetivo, o una habilidad en el alumno.

Existen docentes que tienen la creencia que enseñando a usar un programa como GeoGebra se está enseñando matemática convirtiendo al software en un fin, perdiendo así el objetivo establecido inicialmente de obtener un aprendizaje significativo en el estudiante como dominar o conocer algún concepto específico de su materia, en donde más bien pueden obtener un resultado inverso, donde el estudiante puede desarrollar un rechazo hacia el uso de una computadora, o aún peor si desea visitar un laboratorio en sus clases de matemática, pero teniendo otra meta establecida, diferente a la deseada por el docente.

Otro error común que lamentablemente es normal notarlo en docentes, el de utilizar un computador y un proyector para explicar un concepto concreto, pero sin cambiar realmente la metodología, es decir, realizan lo mismo que hubiera hecho en una pizarra, por lo que no hay ganancia alguna al utilizar las tecnologías, sino más bien hay pérdidas y contratiempos, pensando en por ejemplo, gasto de electricidad innecesaria, tiempo preparando el trabajo que presentará en la computadora, tiempo en preparar el equipo conectándolo y luego desconectándolo, entre otros aspectos.

El uso de tecnologías en la educación están permitidas siempre y cuando se obtenga una ganancia adicional que al utilizar cualquier otra metodología más sencillo o que incurra de menos recursos y/o esfuerzo en su elaboración.

Un ejemplo de un uso adecuado de una computadora en un lección de matemática se puede utilizar en el tema de Función Lineal donde el estudiante pueda manipular de manera dinámica los valores de “m” y “b” de una función con criterio $y = mx + b$ y así poder descubrir por ejemplo mediante sus propios medios cómo determinar si una función lineal es creciente, decreciente o constante, además de investigar e incluso conjeturar el punto de intersección de la función con el eje de las ordenadas.

De igual forma, además de la actividad dinámica por computadora, es importante que el estudiante sea acompañado por una o varias preguntas dirigidas que le ayuden a dirigir su atención hacia aquel objetivo que el docente desea que el estudiante logre ya que, sin esta guía, puede que el alumno no llegue a ese cierre o aprendizaje esperado.

Arias, Guillén & Ortiz (2011) sostienen que el uso adecuado de las tecnologías permite por ejemplo una mejor visualización de los problemas y entes matemáticos ayudando desde diferentes ópticas a comprender de mejor manera los temas esenciales y ayudando a desaparecer algunos obstáculos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero debe usarse sabiamente ya que no es sustituto de los conocimientos básicos, sino que es una herramienta que permite potenciarlos y con esto adquirir un conocimiento más profundo que permita a docentes y educandos reflexionar, razonar y resolver problemas.

Sin embargo, para realizar una clase asistida por computadora se deben tener varias consideraciones para la hora de planificar una lección de este tipo entre las que podemos mencionar:

- Preparar con bastante anticipación la lección: Una lección asistida por computadora requiere mucha planificación, por lo que se recomienda contar con el suficiente tiempo para poner planearla y de ser necesario, tener tiempo para realizar alguna corrección que necesitemos. Una aplicación hecha sin cuidado en un software podría provocar un resultado inverso al que buscamos, ya que podría confundir al estudiante durante su exploración en el software.
- Realizar una guía de trabajo para el estudiante con las instrucciones a seguir y las preguntas que se desee que el estudiante responda: El objetivo de la guía es justamente la de guiar al estudiante por el camino que lo conducirá a descubrir su conocimiento en donde el docente es un mediador.
- La actividad debe ser lo suficientemente sencilla como para que el estudiante la pueda realizar sin necesidad de tener conocimientos avanzados del GeoGebra: Debemos crear una actividad donde el estudiante no necesite aprender a usar las herramientas de GeoGebra para lograr su conocimiento, sino que la opción más básica como lo es mover y arrastrar, sea más que suficiente.
- El GeoGebra es un medio, no un fin: Existe una línea muy delgada de los que es enseñar matemática utilizando GeoGebra y lo que es enseñar GeoGebra (error que muchos docentes cometen).
- Revisar con anterioridad que la o las computadoras de la institución tengan los programas o herramientas necesarias para utilizar su actividad, así como solicitar permiso al director para realizar la actividad: A veces por falta de una buena planificación puede ocurrir que se nos prohíba o simplemente no tengamos acceso al laboratorio de la institución, por lo que el trabajo que habremos planeado no podrá ser aprovechado. En estos casos, si no se puede utilizar un laboratorio, se podría planificar una lección asistida con GeoGebra con una única computadora y un proyector multimedia.
- Se debe contar con un plan B: Aunque planeemos de forma adecuada una lección asistida por computadora, eso no significa que todo saldrá como pensamos. Podría pasar que ese día el proyector no funcionó, o se va la luz en la institución o algún otro imprevisto fuera de nuestro control. Por este motivo debemos contar una segunda opción que cubra los contratiempos que puede traer el uso de aparatos electrónicos.

Justificación del Taller

Por motivo a la falta de preparación y de conocimiento de posibles herramientas didácticas a utilizar, y tomando en cuenta los nuevos programas de estudio en matemática de nuestro país, se ha implementado el presente taller con el fin de que docentes, sean desarrolladores de nuevas y más adecuadas metodologías utilizando el software GeoGebra como herramienta educativa en diversas áreas como por ejemplo geometría, álgebra, estadística, entre otros.

Se ha demostrado además que el simple uso de una herramienta computacional (de forma adecuada) en un aula de matemática logra motivar al estudiante a construir su propio conocimiento. De no ser utilizada de forma correcta, como por ejemplo por abuso, puede obtener un resultado negativo al volver su uso algo cotidiano, y monótono.

En Costa Rica, es difícil encontrar docentes que utilicen las TIC's en su aula, ya sea por falta de conocimiento, temor a cambiar su metodología educativa, o bien, por el simple hecho de que el docente no cuenta en su trabajo con un laboratorio donde desarrollar su clase.

Por este motivo, y bajo la experiencia adquirida de utilizar diversos tipos de programas educativos, se ha desarrollado pautas importantes las cuales se recomienda conocer, antes, durante y después de la aplicación de una lección de matemática asistida por computadora los cuales serán uno de los puntos más importantes a tratar durante el taller.

Junto con otros investigadores del software GeoGebra hemos desarrollado talleres virtuales con este software con una duración mínima de 40 horas, con lo cual se cubre, por lo que, al tener un tiempo bastante limitado, se trabajará en dos áreas de la matemática, como lo son geometría y funciones, aprovechando el potencial que cuenta GeoGebra en estas dos áreas.

Ventajas del uso del software GeoGebra

Entre las ventajas que podemos encontrar por utilizar el software están:

1) Es un software libre:

   Puede ser descargado libremente de la página web sin necesidad de pagar por una licencia para su uso.

2) Es multiplataforma:

   Existe instaladores del software para diversas plataformas, tales como Windows, Ubuntu, Mac, e incluso tabletas bajo el sistema Android.

3) Multiárea:

   GeoGebra trabaja tanto en el área de Geometría (su principal fortaleza) como también en otras áreas tales de Trigonometría, Álgebra, Funciones, Estadística, Probalidades entre otros. Actualmente existe una versión beta que trabaja también con Geometría en tres dimensiones.

4) Aspecto motivacional:

   El simple hecho de utilizar una computadora en una clase de matemática crea un efecto motivacional en los estudiantes, por lo que

5) Apto para demostraciones visuales:

   Al ser GeoGebra un software dinámico educativo, permite poder realizar demostraciones visuales y dinámicas para un uso práctico y ameno en las clases de matemática, esto gracias a herramientas tales como deslizadores y creación de botones, entre otros.

6) Actualización constante:

   Hay un gran grupo de investigadores que trabajan constantemente y sin fines de lucro en el software con la finalidad de agregar nuevas funciones o mejorar las que ya cuenta.

7) Applets:

   GeoGebra cuenta con una opción en la que puede crear un applet con la construcción de manera que puede ser subida a internet y ser trabajada desde allí sin necesidad de tener instalado el software en la computadora.

8) GeoGebratube:

   Existe una gran comunidad virtual llamada GeoGebraTube en la que tanto investigadores como público en general pueden publicar construcciones o recursos relacionados con GeoGebra con el único fin de compartir conocimiento y trabajos entre otros compañeros, se puede acceder a ella mediante la página web www.geogebratube.org/?lang=es

Objetivos del Taller

Utilizar el software GeoGebra como recurso didáctico, dinámico y metodológico para el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática a nivel de secundaria en las áreas de geometría y funciones.

1. Experimentar con la interfaz gráfica, las herramientas y el entorno interactivo del programa mediante construcciones base para otras más elaboradas.
2. Realizar construcciones, simulaciones y animaciones que se pueden realizar con el programa.
3. Diseñar guías para estudiantes y docentes para realizar lecciones asistidas por computadora utilizando GeoGebra.

Metodología a seguir

El taller se dividirá en cuatro etapas:

<u>Primera etapa</u>

Duración: 5 minutos

Esta es una etapa meramente introductoria en donde se les habla a los participantes de la importancia de incluir en el aula herramientas tecnológicas, esto con el fin de poder utilizar estrategias constructivistas para mejorar la enseñanza - aprendizaje de la matemática.

<u>Segunda etapa</u>

Duración: 15 minutos

Se realizará una construcción básica guiada, con el objetivo de que el participante se familiarice con diversas herramientas y propiedades presentes en el software GeoGebra. La construcción consiste en crear mediante las herramientas básicas un triángulo equilátero. Una vez hecha la construcción, se utilizará la misma para explorar herramientas complementarias presentes en el GeoGebra, tales como grosor, color, y estilos de segmentos así como de sus ángulos.

Tercera Etapa

Duración: 70 minutos

Se realizará tres construcciones guiadas, las cuales requieren para su construcción el uso de herramientas dinámicas tal como lo son los deslizadores y uso de los botones.

La primer construcción consiste en realizar la graficación de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c corresponden a deslizadores. Con esta construcción se podrá estudiar las propiedades de la función cuadrática cambiando de forma dinámica los valores de dichas variables.

La segunda construcción consiste en realizar el gráfico de una función por partes para el estudio de su monotonía. Esta construcción está diseñada para ser llevada a la lección de matemática con el fin de que el estudiante, con la mera observación o una simple manipulación de la construcción pueda deducir cómo saber sobre qué partes la función se considera creciente, decreciente o constante. Lo valioso de esta construcción es que es totalmente funcional para cualquier tipo de función que el docente desea utilizar.

La tercera construcción consiste en preparar una demostración visual del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Similar que la construcción anterior, el objetivo de esta nueva construcción es que, además de que el docente aprenderá como realizar dicha construcción (y otras similares), este podrá utilizarla en su clase de matemática para que el estudiante, tanto con la manipulación como también con la simple observación pueda deducir dicho teorema sin necesidad que el docente lo indique de forma conductista como se ha hecho tradicionalmente.

Cuarta Etapa

Duración 20 minutos

En esta última etapa, se les dará inicialmente a los participantes consejos y recomendaciones acerca del planeamiento de una clase que utilice por herramienta computacional un software educativo como lo es GeoGebra. Luego de los consejos, se procederá a crear una pequeña guía para estudiantes y docentes a partir de alguna de las construcciones realizadas previamente en el taller, siguiendo las recomendaciones y tomando en cuenta el objetivo que se quiere aplicar en el estudiante.

Información General	
Título: Construcciones dinámicas con GeoGebra para la aprendizaje-enseñanza de la matemática	
Autor: Ronald Arias Madriz	
Institución: Liceo Elías Leiva Quirós	
País: Costa Rica	
Nivel educativo al que va dirigido el taller	Secundaria
Número máximo de participantes	20 personas
Equipos audiovisuales, o informáticos que se requeriría	Laboratorio de cómputo con unas 20 computadoras con cualquier versión de Windows o Ubuntu con GeoGebra instalado (en su versión 4.2.55.0 o superior), editor de texto (Microsoft Word, o en su defecto OpenOffice) proyector multimedia, conexión a internet.

Bibliografía y referencias

Arias, R., Guillén, C & Ortiz, L. (2011). GeoGebra, una herramienta para la enseñanza de la matemática. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

"GeoGebra Quickstart, a quick reference guide for GeoGebra". En http://www.GeoGebra.org/help/GeoGebraquickstart_en.pdf . Consultada en Noviembre, 2010.

Hohenwarter, J. Hohenwarter, M. "Introduction to GeoGebra". En http://www.GeoGebra.org/book/intro-en/ .Consultada en Noviembre, 2010.

MEP (2012), Programas de Estudio Matemáticas I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Desarrollo del concepto de fracción en la escuela elemental: Aportes de la matemática en contexto

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Jorge M. **López** Fernández
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
jorgemar.lopez@gmail.com
Ana Helvia **Quintero**
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
aquinter_2000@yahoo.com

Resumen

A pesar de que las fracciones están ligadas a múltiples situaciones de la vida cotidiana, la tradición de privilegiar en su enseñanza las habilidades computacionales sobre su comprensión, ha creado un abismo entre los procedimientos y su significado. A pesar de las investigaciones realizadas, la percepción de los maestros es que se han realizado pocos avances para encontrar metodologías efectivas para la enseñanza-aprendizaje de este tema tan importante (Lamon, 2007). Una explicación podría ser el espacio que separa la investigación educativa de las prácticas del salón de clases. En este taller se presentará una mirada crítica a los resultados de la *investigación educativa* y las *prácticas de salones de clases* en cuanto al tema de las fracciones en la escuela elemental. Se proveerán ejemplos que permiten el desarrollo del concepto de fracción y su transición al número racional.

Palabras Clave: números fraccionarios, fracciones, número racional, matemática en contexto, matemática realista.

Resultados de las investigaciones realizadas

Un análisis del documento de Estándares de Contenido y Expectativas de Grado del Departamento de Educación de Puerto Rico, permitió determinar que se promueven tres sub-constructos al enseñar fracciones: *parte de un todo*, *razón* y *punto en la recta numérica*. En la práctica, los maestros privilegian la fracción como *parte de un todo*. Esto es así, no solo en la escuela puertorriqueña sino en todos Estados Unidos. Lamon (2007) indica que esta interpretación de las fracciones es casi la única que se enseña a tal punto que las fracciones y la *parte de un todo* se han convertido en sinónimos.

El tema de fracciones se introduce bien temprano en la escuela puertorriqueña, sin embargo, la preocupación no es la introducción temprana del concepto, sino el énfasis en ciertos aspectos que se ha evidenciado promueven la emergencia de obstáculos cognitivos (Fandiño, n/d; Humarán, 2012; Lamon, 2007; Valdemoros, 2004). Por ejemplo, la dificultad de entender la notación $\frac{a}{b}$ como un número y no dos números enteros unidos por un vínculo; también se han reportado los problemas cognitivos inherentes al sub-constructo *parte de un todo* de las fracciones impropias.

Para determinar el conocimiento de los estudiantes, se crearon varias pruebas utilizando los siguientes criterios: que estuvieran alineadas al currículo de Puerto Rico que evaluara los conocimientos por los niveles (correspondientes a los grados K-3, 4-6 y 7-9); y que tuvieran cierto grado de validación (por experto, prueba piloto o entrevista cognitiva). Las pruebas fueron administradas a estudiantes de maestros participantes en varios proyectos de desarrollo profesional del Programa Mathematics and Science Partnerships del Departamento de Educación de Puerto Rico. Los resultados indican que los estudiantes, en efecto, dominan mejor la interpretación *parte de un todo* de las fracciones, seguido de la interpretación de *razón* y luego la de *punto en la recta*. En efecto, cerca del 90% de los estudiantes de séptimo grado (N=134) contestaron correctamente las preguntas relacionadas al sub-constructo *parte de un todo*, mientras que sólo 50% de los mismos estudiantes contestaron correctamente las preguntas de la fracción como *un punto en la recta*. Otros resultados interesantes indican que los estudiantes del nivel 4-6 identifican sin ningún problema las fracciones unitarias; reconocen mejor la representación simbólica que la verbal; reconocen como partes iguales las que son congruentes, sin embargo, no reconocen como partes iguales las que tienen igual área; la representación que mejor dominan los estudiantes es la representación circular, los estudiantes tienen dificultad reconociendo las fracciones equivalentes; y, reconocen la interpretación de razón, sin embargo, si la fracción está simplificada, les causa mucha dificultad reconocerla.

Si consideramos que un concepto se comprende a cabalidad cuando se puede transitar libremente por sus diferentes interpretaciones (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983**)**, podemos decir que los estudiantes que egresan del nivel 4-6, no poseen el concepto de fracción. Esto representa una gran dificultad ya que algunos autores consideran este tema como la llave que abre la puerta de acceso al álgebra (Wu, 2011). Por otra parte, las fracciones son indispensables para la comprensión de los números racionales y por lo tanto de los números reales, éstos últimos indispensables para la comprensión de los temas fundamentales del pre-cálculo. En suma, si un estudiante no domina las fracciones, tendrá mucha dificultad para acceder a los temas que lo preparan para la universidad.

Implicaciones para el desarrollo de materiales educativos

Los resultados de estas investigaciones y de las realizadas en otras partes del mundo, proveen información valiosa para crear materiales educativos. Las actividades que se proponen están fundamentadas en la Matemática Realista desarrollada en el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht y la Universidad de Wisconsin, en Madison. Los principios de la Matemática Realista fueron introducidos en Puerto Rico a través de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM) bajo la dirección del Dr. Jorge López Fernández. En los años noventa, un grupo de profesores puertorriqueños tradujeron, revisaron y publicaron los primeros materiales con la colaboración de Thomas A. Romberg entonces director del National Center for Research in Mathematical Sciences Education (NCRMSE) del Departamento de Educación Federal y catedrático de Currículo e Instrucción de la Universidad de Wisconsin, en Madison y Jan de Lange director del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht, en Holanda. En Estados Unidos la Matemática Realista adoptó el nombre de Matemática en Contexto.

La Matemática Realista plantéa que los conceptos requieren experiencias que le den sentido previo a representar el simbolismo. Las fracciones como los números surgen en diferentes contextos y con diferente sentido. Debemos desarrollar estas diferentes nociones y las conexiones entre ellas (D'Ambrosio, 1994). La primera tarea que tenemos es ofrecer contextos que le den sentido a las fracciones, realidades que les permitan desarrollar metáforas que les ayuden a interpretar las operaciones y relaciones de las fracciones.

Contextos

Partir de una situación contextual permite a los estudiantes construir el concepto de fracción con sentido (Quintero, 2011). Se eliminan las operaciones mecánicas y se promueve la reflexión en el propio aprendizaje. Al requerir un ejemplo concreto, el estudiante puede recurrir a una representación anclada en su cotidianeidad que de otra forma está carente de sentido.

Ya que la representación de parte todo es la que mejor los estudiantes entienden presentaremos ejemplos de contextos que le dan sentido a las interpretaciones de la fracción como medida y como razón.

Midiendo

Al medir, las fracciones surgen en forma natural. En la siguiente actividad se utiliza un franjita de papel como cinta de medir sin graduar (Figura 1).

Actividad. Le ofrecemos a cada niño una franjita del largo del ancho de un papel:

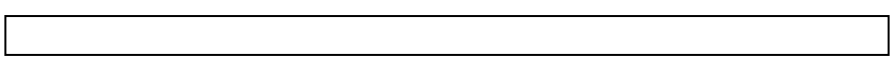


Figura 1. Franjita para medir.

Le pedimos que mida el largo de diversos objetos. Una vez comenzamos a medir objetos con franjitas del mismo tamaño surgirán situaciones donde un objeto no mida exactamente un número de franjitas. En este caso preguntamos, qué podemos hacer para obtener una medida más exacta. A partir de las sugerencias de los niños podemos ir guiándolos hasta que surja la idea de dividir la franja en fracciones: $\frac{1}{2}$ franja; la mitad de la mitad, $\frac{1}{4}$ de franja. Para los niños no es obvio que la mitad de la mitad es un cuarto. Llegar a esa conclusión requiere tiempo, pero como hemos insistido es importante tomarnos nuestro tiempo y aprender con sentido. Continuamos este proceso hasta que lleguemos a una división razonable para el nivel de los niños. De hecho, en un mismo salón pueden existir diversidad de divisiones razonables, unos niños pueden entender hasta $\frac{1}{8}$ y otros pueden llegar a $\frac{1}{16}$.

La franjita es una de las metáforas que apoya la comprensión de las fracciones a la par que permite la integración de diversas interpretaciones de la fracción. Por ejemplo, una vez el estudiante tenga más experiencia midiendo, podemos integrar la representación de las fracciones en la recta numérica, utilizando la metáfora del medir.

La representación de las fracciones en la recta numérica no es tarea fácil. A continuación mostramos una serie de errores que hemos encontrado en estudiantes de escuela intermedia y en estudiantes universitarios al representar fracciones en la recta numérica. A la par que describimos el error pasamos a analizar la concepción sobre la fracción que lleva al mismo.

Problema: Representa gráficamente (en la recta) $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}$.

Error 1. La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante

Figura 2. Representación incorrecta de fracciones en la recta numérica.

Esta estudiante no entiende bien la representación de las fracciones en la recta. De hecho, después de hacerla dijo "yo no entiendo". Al hacer la representación se fijó primero en el numerador y éste le indica en que intervalo localizar la fracción. Luego organiza las fracciones de acuerdo al denominador.

Error 2. La Figura 3 muestra la representación que hizo un estudiante de $\frac{1}{2}$.

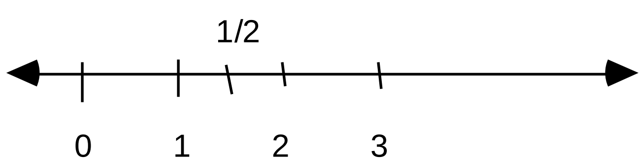


Figura 3. Representación incorrecta de $\frac{1}{2}$.

Este error se repitió en varios estudiantes. Su dificultad estriba en partir del 1 en lugar del 0. Estos estudiantes tienen dificultad en identificar dónde comienzan las unidades al medir.

Estos errores muestran que los estudiantes no tienen claro ni las fracciones ni la recta numérica. Por esto es importante relacionar la recta numérica con la medida y ésta a su vez con las fracciones.

A continuación ejemplos de ejecicios para apoyar la comprensión de las fracciones en la recta numérica. En la misma se presenta la recta como la suma de franjitas, cada franjita representa una unidad. Es important resaltar que las franjas no se sobreponen (Figura 4).

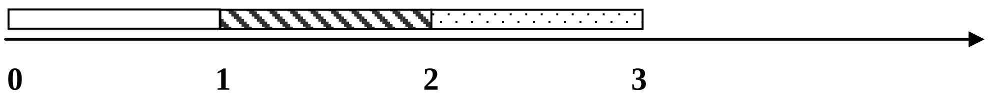


Figura 4. Alineación de franjas sin sobreponerse.

Una vez el estudiante ha entendido que cada espacio en la recta representa una unidad, podemos pasar a pedirle que represente, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$. En el primer caso es la mitad de la primera unidad, en el segundo es una unidad y $\frac{2}{3}$ de la segunda (Figura 5).

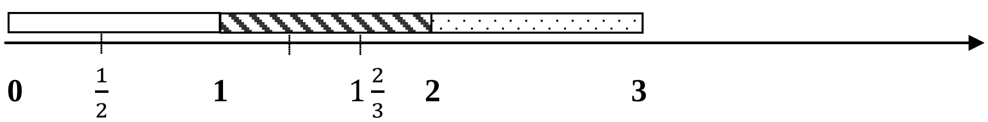


Figura 5. Transición de la medición a la recta numérica.

La representación de las fracciones en la recta apoya también el aprendizaje de las fracciones equivalentes. La Figura 6 muestra la unidad, luego se dividide en medios y posteriormente en cuartos. Los estudiantes deben concluir la equivalencia de las fracciones.

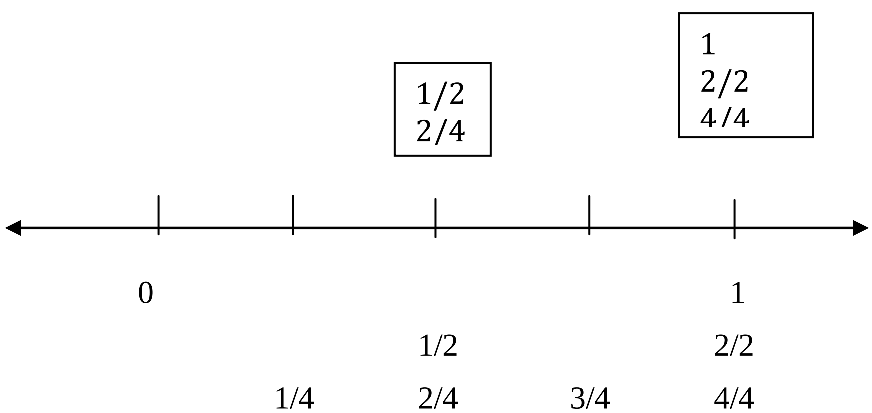


Figura 6. Fracciones equivalentes en la recta numérica.

La fracción como razón

La fracción como razón es un concepto muy importante tanto en la matemática como en la ciencia y la estadística. Si reflexionamos sobre el currículo veremos que rara vez se enseña directamente la razón. La razón, sin embargo, es un concepto díficil para el estudiante. Al igual que muchos conceptos requiere que se vaya construyendo poco a poco.

La investigación muestra que el primer tipo de razón que entienden los estudiantes es la *razón - unidad*. . Esta es la razón que se expresaría en fracción como $\frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{12}{1}$. Por ejemplo:

4 dulces en cada bolsita.

8 chinas por peso.

12 niños por maestro

Desde los grados primarios podemos integrar problemas con razones de este tipo. Algunas de las dificultades de los estudiantes con este tipo de razón es con el lenguaje. Entender que

"8 chinas por peso"

es equivalente a

"8 chinas por cada peso"

Una vez el estudiante entienda la razón unidad podemos, a partir de cuarto grado, comenzar a presentar actividades de repartición justa que introducen otro tipo de razón.

Por ejemplo, ¿es lo mismo 4 pizzas por cada 6 estudiantes, que 2 pizzas para 3 estudiantes?.

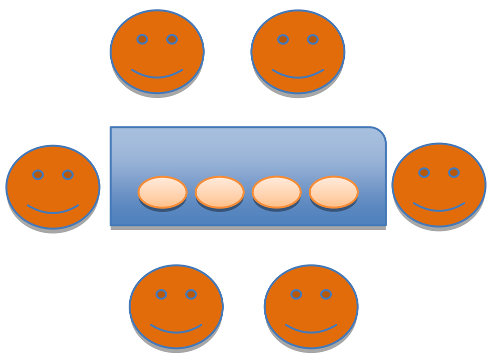


Figura 7. Representación de 4 pizzas para 6 estudiantes.

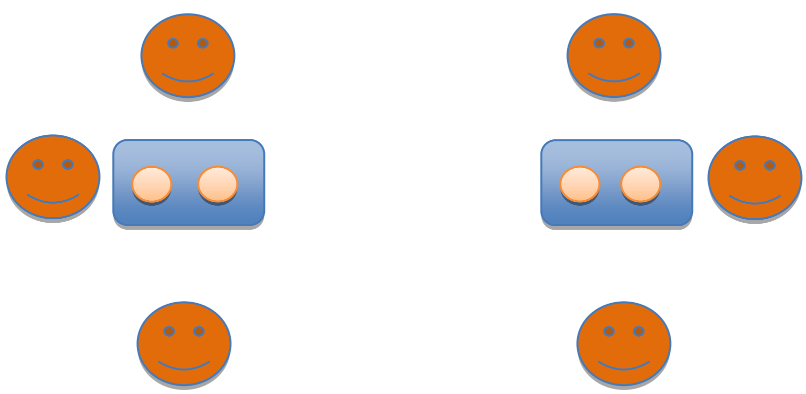


Figura 8. Repartición justa para mostrar la equivalencia de 4 pizzas para 6 estudiantes y 2 pizzas para 3 estudiantes.

La repartición justa también ayuda a explicar las fracciones equivalentes (Figuras 7 y 8).

Otra forma de apoyar el que los estudiantes entienden las razones es que estos vean la relación de ésta con la razón unidad. Una forma de lograr que vean esta relación es utilizando las tablas.

Por ejemplo; analicemos el siguiente problema: Carmín compró 10 bombones por 5₡. ¿Cuántos bombones le darán por 8₡?

Construimos una tabla como la de la Figura 9:

Dinero		5 ₡	8 ₡
Bombones		10	

Figura 9. Tabla para representar la situación.

Si conseguimos cuántos bombones dan por 1 ₡ entonces es más fácil saber cuántos dan por 8₡. Si dan 10 bombones por 5 ₡, por 1 ₡ darán 2 bombones. De aquí podemos calcular que por 8₡ darán 16.

Dinero	1 ₡	5 ₡	8 ₡
Bonbones	2	10	16

Figura 10. Tabla para mostrar equivalencia entre razones.

Las tablas también pueden ser utilizadas para el desarrollo del razonamiento proporcional. Por ejemplo:

"María fue a comprar paletas, le dieron 10 paletas por 25 ₡. ¿Cuántos dulces le darán a Roberto por 10 ₡?"

La representación de la situación en tablas puede ayudar a resolver situaciones de proporciones (Figuras 11-13). Una vez el estudiante domine la solución de situaciones de proorcionalidad por medio de tablas, pueden ser utilizadas para mostrar las propiedades de las proporciones.

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas					10

Figura 11. Tabla para representar la siruación.

Le pedimos a los estudiantes que piensen cómo pueden conseguir los otros valores. Entre las estrategias puede surgir la siguiente.

Paso 1

5 ₡ cabe cinco veces en 25 ₡. Por tanto, las paletas que den por 5 ₡ deben caber cinco veces en 10. El número que cabe cinco veces en 10 es 2. Tenemos pues:

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas	2				10

Figura 12. Tabla para introducir las proporciones.

Paso 2

Si dan dos paletas por 5 ₡, por diez darán el doble, o sea 4.

Dinero	5 ₡	10 ₡	15 ₡	20 ₡	25 ₡
Paletas	2	4			10

Figura 13. Tabla para mostrar equivalencia entre razones.

Las tablas nos pueden llevar a la idea de las líneas dobles, que también pueden ser utilizadas para mostrar equivalencia y desarrollar el razonamiento proporcional (Figura 14). Además, se puede favorecer la representación rectangular que permite un tránsito más cómodo a la representación lineal, por analogía, como lo recomienda English (1999). A continuación ejemplos de la doble línea:

En esta un entero se divide en una forma por un lado y en otra por el otro:

Arriba en tres.

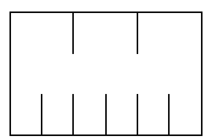


Figura 14. Líneas dobles para mostrar equivalencia entre fracciones.

Abajo en seis.

Al comparar observamos que 2 de 3 es lo mismo que 4 de 6.

La doble línea también es muy útil para introducir el concepto de porcentaje. Esto de paso apoya que se entienda el porcentaje como una fracción. Por ejemplo, estamos trabajando con un grupo de 45 estudiantes. De estos 15 están en el Club de Dibujo. ¿Qué porciento de la clase está en el Club de Dibujo?

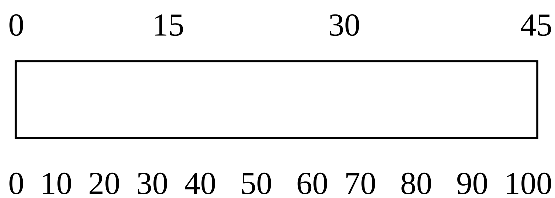


Figura 15. Líneas dobles para introducir el concepto de porcentaje.

De esta representación observamos que 15 de 45 equivale a un poco más de 30 de 100, o sea a un poco más de 30%.

En el proceso de trabajar estos problemas es importante que el estudiante entienda que en las razones las cantidades absolutas no son lo importante sino la relación entre ellas. Así podemos introducir actividades que promuevan esta idea: -- ¿qué jugo es más concentrado en limón, uno donde usamos 2 limones por 3 vasos de agua o uno donde usamos 3 limones por 5 vasos de agua?

Muchos estudiantes dirán que el jugo de tres limones tiene más sabor a limón, pues son más limones. Aquí le señalamos que a la par que tiene más limón tiene más agua, lo que lo hace más aguado. ¿Cómo resolvemos el problema? De esta discusión debe surgir la idea que en la razón es importante analizar la relación entre ambas, ¿dónde es mayor la cantidad de limón por vaso de agua?

Otro contexto que apoya el darle sentido a las fracciones es el dinero. Esto se puede obtener en una situación cotidiana familiar a los niños y niñas de todas partes del mundo que utilizan el sistema decimal. Utilizado con propiedad, se pueden realizar actividades que favorezcan la matematización horizontal y posteriormente la vertical al utilizar puntos de referencias para mitades, cuartos, décimos y vigésimos. Con esto se puede realizar equivalencias y comparaciones entre fracciones, el orden también sería algo natural. Utilizando un razonamiento por analogía, se podría extender los conocimientos a los decimales y porcentajes, dos temas que también son difíciles para los estudiantes.

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

D'Ambrosio, B., and Mewborn, S. D. (1994). Children's Construction of Fractions and their Implications for Classroom Instruction. *Journal of Research in Childhood Education. 8 (2), 150-61*.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L.V. Stiff, and F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Fandiño Padilla, M. I. (n/d). Autoreport of the disertation of María Isabel Fandiño Padilla. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/Autoreport_Pinillo_06.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Humarán Martínez, Y. (2011). El entendimiento conceptual de fracción de los maestros de escuela elemental en formación. Documento sin publicar.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Quintero, A. H. (2011). *Matemáticas con sentido: aprendizaje y enseñanza.* San Juan, Puerto Rico: La Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Valdemoros Alvarez, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7* (3), 235-256.

Wu, H. (2011). *Understanding numbers in elementary school mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

El origami y el doblado de papel como herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos

Orlando **Monsalve** Posada
Departamento de Ciencias y Artes Universidad de Antioquia
Colombia
Orlandomonsalve@gmail.com

Resumen

El objetivo del presente taller es explorar las diversas posibilidades que tanto el doblado de papel como el origami le brindan a los docentes para un mejor aprestamiento en la enseñanza y el aprendizaje matemáticos.

Palabras clave: doblado de papel, origami, geometría, trigonometría, teoremas, axiomas, congruencia, semejanza, simetría .

Presentación

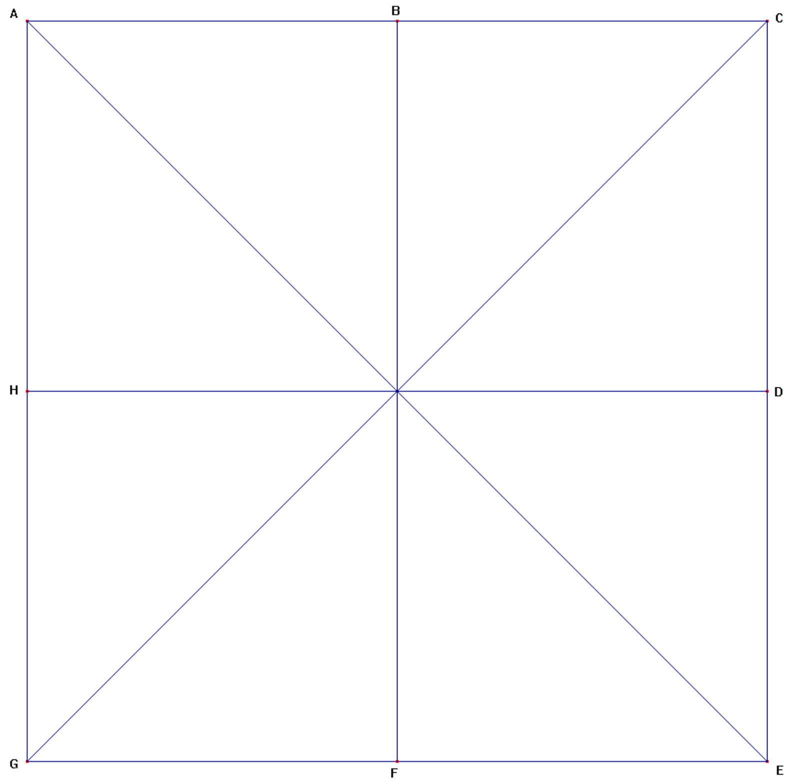
Las Matemáticas a través del lenguaje hacen visible lo invisible: Keith Devlin
Dentro del currículo de la Licenciatura de Matemáticas Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se trabaja el Curso de Integración Didáctica IV: Estrategias y Medios no Convencionales para la Enseñanza y el Aprendizaje Significativos de la matemática Escolar. Este es el cuarto curso dentro de una serie de Diez Integraciones Didácticas que el estudiante debe cursar durante toda su Carrera.
Como su nombre lo indica, el curso establece conexiones no sólo entre las diversas ramas de la Matemática sino también con la Química, la Física, la Biología, la lengua Natural y todas las ramas de estudio que implica esta última. Algunos de los énfasis del Curso son: el lenguaje

natural como fuente del lenguaje científico; Comprensión lectora, Etimología de las palabras, elaboración de materiales para la enseñanza, origami y doblado de papel entre otros.
En el año 2000, se seleccionaron seis estudiantes del Programa, que mostraron su especial interés en el doblado de papel y el origami para trabajar durante toda su carrera, en el libro de Sundara Rao *Geometric exercises in paper folding:* Como resultado final los estudiantes presentaron adelantos de sus trabajos en diversos eventos académicos nacionales: Congresos, Conferencias, Talleres, Seminarios. Finalmente presentaron como Tesis de Grado, para optar al título de Licenciados en Matemática Física, buena parte de lo elaborado a lo largo de los cuatro años que duraron sus estudios. Algunos continuaron su Maestría y Doctorado en la misma línea: Origami y doblado de papel.
De otro lado se aprovechó la oportunidad de trabajar un Curso denominado Metodología del Aprendizaje para estudiantes de todas las Ingenierías de la Universidad EAFIT, situada también en la ciudad de Medellín. La novedad del Curso consistía en que todos los estudiantes matriculados repetía por segunda, tercera y cuarta vez el Cálculo Diferencial y Cálculo Integral; por esta razón estaban matriculados en un **Semestre Especial**; el trabajo se desarrollaba poniendo en práctica toda la estrategia del Curso de Integración Didáctica IV para que los estudiantes superaran este impase no sólo académico sino emocional y económico.
Los resultados alentadores y estimulantes de esta labor, desarrollada durante doce semestres, quedaron consignados en el Trabajo de Investigación llevado a cabo por las doctoras Jeannette Lerner y Marcela Gil, referenciados en la bibliografía.

Origami, doblado de papel y mostraciones

El origami, estrictamente hablando, consiste en elaborar una figura – generalmente tridimensional **–** a partir de una hoja de papel; el doblado, en cambio no pretende la elaboración de una figura sino en doblar la hoja y luego analizar geométricamente los doblecesa de la misma; No obstante lo anterior, ambas actividades son complementarias; se puede elaborar la figura y luego regresar la hoja a su estado original y proceder al respectivo análisis matemático.
Las **mostraciones geométricas** cumplen a cabalidad con el epígrafe que encabeza este escrrito; una **mostración** es una aproximación intuitivo – operatoria, de carácter multisensorial,a conceptos matemáticos, químicos o físicos.

Primera actividad . Los axiomas de Huzita – Hatori



1. Dados dos puntos A y E, hay un doblez que pasa por los dos puntos

2. Dados dos puntos A y C, hay un doblez que lleva a A sobre C

3. Dadas dos rectas AG y CE, hay un doblez que lleva a AG sobre CE

4. Dados un punto B y una recta GE hay un doblez perpendicular a GE que pasa por B

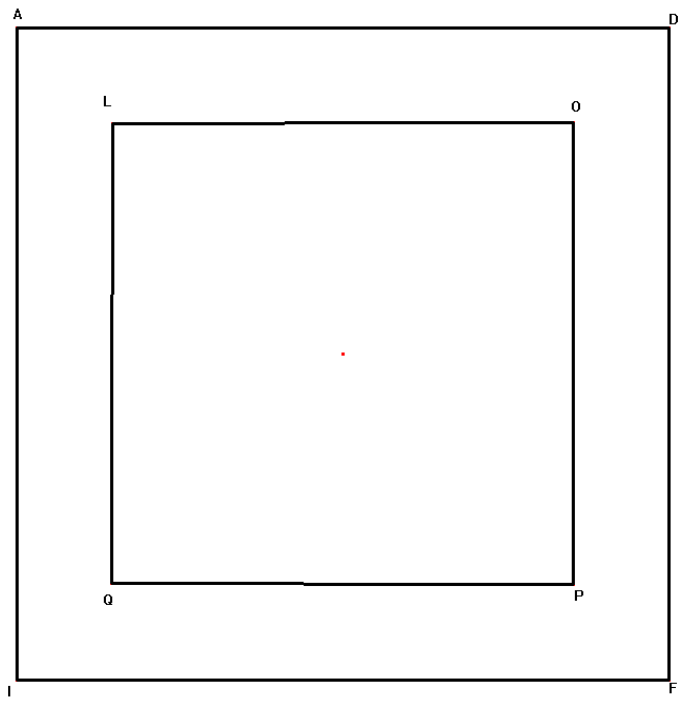
5. Dados dos puntos A y B y una recta CE hay un doblez que lleva a A sobre CE y pasa por B

6. Dados dos puntos B y H y dos rectas CE y GE hay un doblez que lleva a B sobre CE y a H sobre GE

7. Dados un punto A y dos rectas CE y GE, hay un doblez que lleva a A sobre CE y es perpendicular a GE

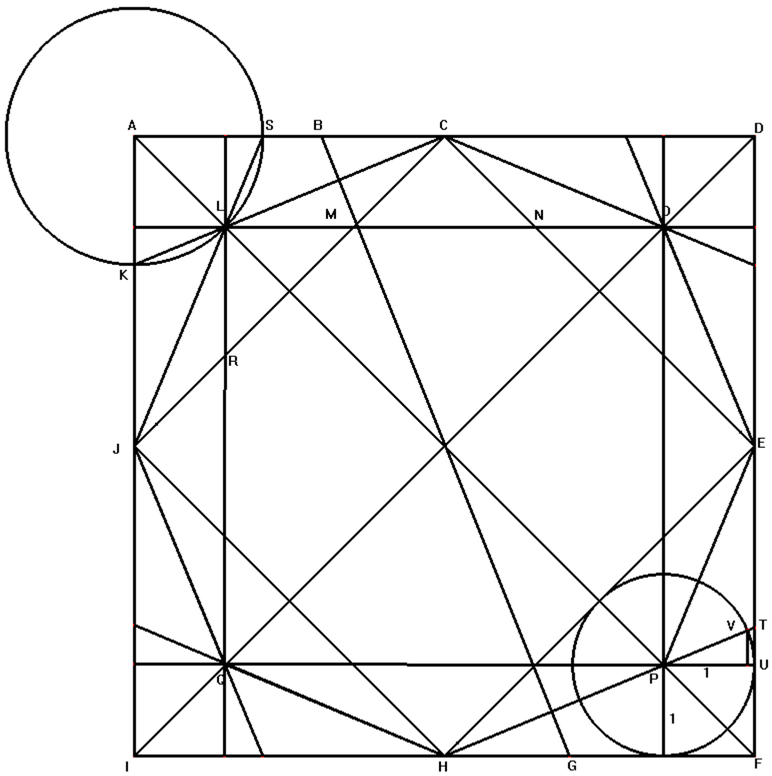
Segunda actividad

¿Cómo mostraría, probaría, comprobaría o demostraría que el área del cuadrado LOPQ es La mitad del cuadrado ADFI.



Tercera actividad

Elaboración de una mesa octogonal



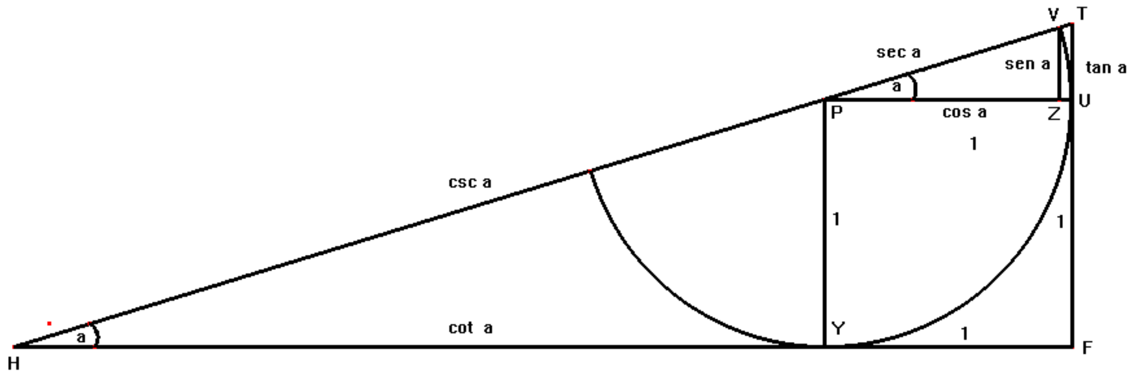
Con excepción de las dos circunferencias y el doblez BG que no pertenecen a la grilla de dobleces de la mesa, todas las maniobras que siguen están justificadas en el plano arquitectónico de la misma.

Comprobación de que el cuadrado LOPQ es la mitad del grande mediante la aplicación del axioma 6 de Huzita – Hatori

Dados dos puntos J, L y dos rectas LD, AD hay un doblez que lleva a J sobre LD y a L sobre AD

Cuarta actividad

En el diagrama de la mesa, tomamos el triángulo TFH y la semicircunferencia que se indica para justificar las siguientes identidades trigonométricas



PV = 1 PU = 1 PY = 1 FY = 1 FU = 1

En el Δ VPZ, sen a = $\frac{VZ}{1}$ **VZ = sen a**; en el mismo Δ VPZ cos a = $\frac{PZ}{1}$ **PZ = cos a**

En el Δ TPU, tan a = $\frac{TU}{PU}$ = $\frac{TU}{1}$ **tan a = TU;** en el mismo Δ TPU

sec a = $\frac{PT}{PU}$ = $\frac{PT}{1}$ **sec a = PT** En el Δ PHY, cot a = $\frac{HY}{PY}$ = $\frac{HY}{1}$ **cot a = HY;** en el

mismo Δ PHY csc a = $\frac{HP}{PY}$ = $\frac{HP}{1}$ **csc a = HP**

1 **$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$**

2. **$(1 + \tan a)^2 + (1 + \cot a)^2 = (\sec a + \csc a)^2$**

3. $\boldsymbol{\tan a = \frac{\tan a + 1}{\cot a + 1}}$

4. **$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a$**

5. **$\csc^2 a = 1 + \cot^2 a$**

Segunda sesión

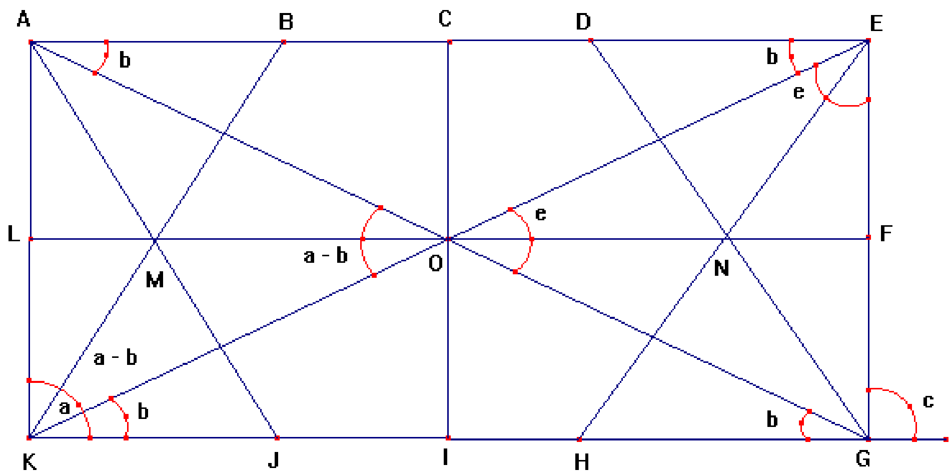
Primera actividad

En la presente actividad están presentes los siguientes genios matemáticos**:** Pappus, Arquímedes, Pitágoras, Tolomeo, Giovanni Ceva

Elaboración del perfil de un monje

1. Recorte, por el lado largo, la mitad de una hoja tamaño carta

2. Divída nuevamente, por la mitad; marque los puntos como se indica en la figura adjunta

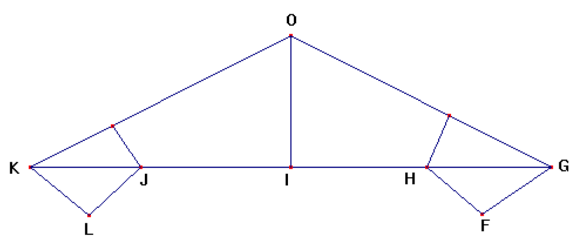


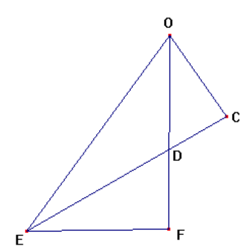
4. Lleve el punto K a O y trace el doblez AG, llevando AE sobre AO

5. Lleve el punto A a O y ejecute el doblez KE, llevando a KG sobre KO

6. Efectúe el doblez EG y recorte la hoja por ese doblez; queda el rectángulo AEGK

7. Los dobleces hendidos por OL y OF, llevan a A sobre K y a E sobre G.





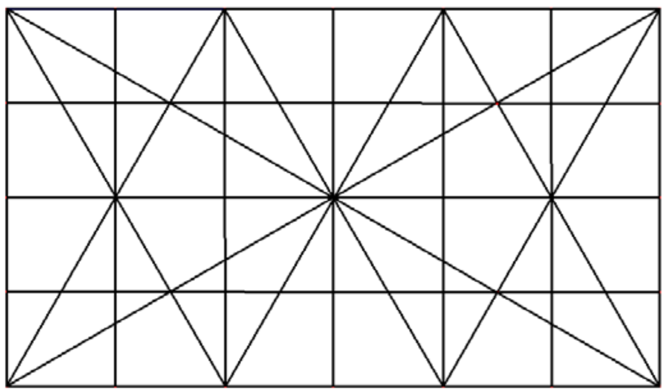
8. Por OI lleve a G sobre K
   Hemos elaborado el perfil de la figura de un monje con su capucha

El trisector múltiple arquimediano

En la construcción de Pappus el < (a – b) es el exterior del AOE que es isósceles y es igual a 2b ∴ > a – b = 2b; a = 3b
En la construcción arquimediana, el Δ EKG, el < c es exterior y es igual < b + < e;
El < e es el exterior del triángulo KOG y es igual a 2b <e = 2b ∴ $< c = 3b$

Segunda actividad:

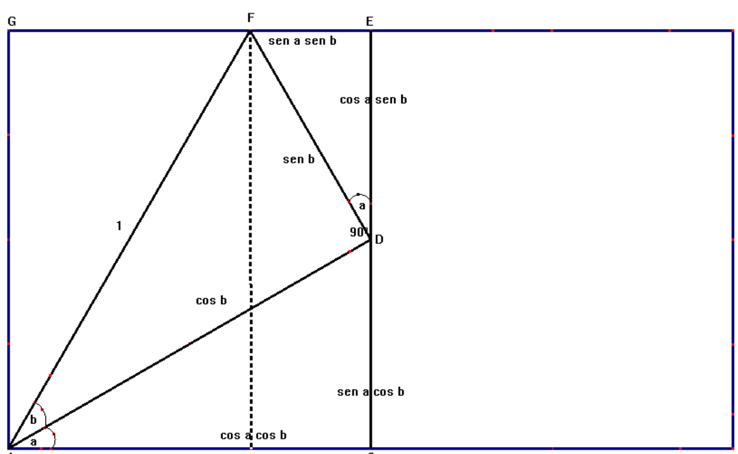
División de una hoja en dos, tres, cuatro, partes iguales: igualdad, semejanza, congruencia y simetría comparación de áreas



Si agregamos unos cuantos dobleces a la figura básica del monje, cada uno puede hacer visible la geometría invisible implícita en el mosaico de la figura.
A continuación ilustraremos sólo seis, de las diez y siete identidades trigonométricas, presentes en el trisector múltiple

Tercera actividad

Solución al ejercicio, one figure six identities , propuesto por Roger Nelsen (2000)



1. $\boldsymbol{sen(\alpha + b) = sen\ \alpha \cos b + cos\ \alpha\ sen\ b}$

$sen\alpha = \frac{EF}{DF}; EF = DFsen\alpha;$ $\boldsymbol{EF = sen\ asen\ b}$

$cos\alpha \frac{DE}{DF}; DE = DFcos\alpha;$ $\boldsymbol{DE = \ cos\ a\ sen\ b}$

$sen\ b = \frac{DF}{AF}; DF = AFsenb$ $\boldsymbol{DF = sen\ b}$

$\cos b = \frac{AD}{AF};\ \ AD = AFcos\ b$ $\boldsymbol{AD = \cos b}$

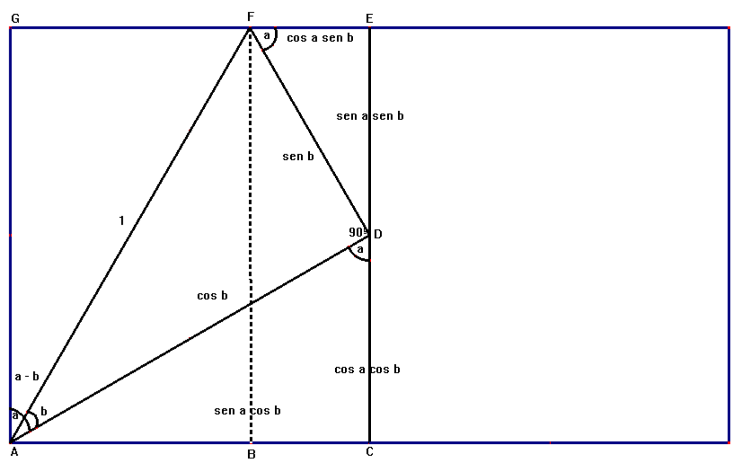
$sen\alpha = \frac{CD}{AD}; CD = ADsen\alpha$ $\boldsymbol{CD = sen\ a \cos b}$

$cos\alpha = \frac{AC}{AD}; AC = ADcos\alpha$ $\boldsymbol{AC = cos\ a \cos b}$

$sen(\alpha +\ b) = \frac{FB}{1} = \frac{CD+DE}{1}$

$cos(\alpha +\ b) = \frac{AB}{1} = \frac{AC-BC}{1}$ **BC = EF**

2. $\boldsymbol{cos(\alpha + b) = cos\alpha \cos b - sen\alpha senb}$



3. $\boldsymbol{sen(\alpha - b) = sen\alpha \cos b - cos\alpha senb}$

$sen\alpha = \frac{DE}{DF}; DE = DFsen\alpha;$ $\boldsymbol{DE = sen\alpha senb}$

$cos\alpha \frac{EF}{DF}; EF = DFcos\alpha;$ $\boldsymbol{EF = \ cos\alpha senb}$

$sen\ b = \frac{DF}{AF}; DF = AFsenb$ $\boldsymbol{DF = sen\ b}$

$cos\ b = \frac{AD}{AF}; AD = AFcos\ b$ $\boldsymbol{AD = \cos b}$

$sen\alpha = \frac{AC}{AD}; AC = AD\ sen\alpha$ $\boldsymbol{AC = sen\ \alpha \cos b}$

$cos\alpha = \frac{CD}{AD}; CC = ADcos\alpha$ $\boldsymbol{CD = cos\ \alpha \cos b}$

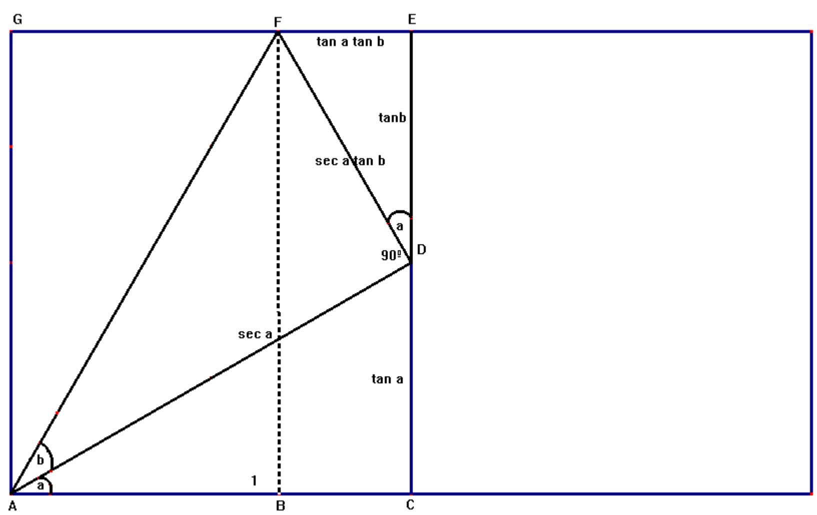
$\Delta AFG = \Delta ABF; BC = EF$ FG = AB **AB = AC – BC**

$\boldsymbol{sen(\alpha - b) = \frac{FG}{1} = \frac{AB}{1} = \frac{AC-BC}{1} =}$ $\boldsymbol{AC - EF}$

$\boldsymbol{AG = CE}$ $\boldsymbol{CE = CD + DE}$ $\boldsymbol{AG = CD + DE}$

$cos(\alpha - b) = \frac{AG}{1} = \frac{CD+DE}{1}$

4. $\boldsymbol{cos(\alpha - b) = cos\ \alpha \cos b + sen\ \alpha\ sen\ b}$



$sec\ \alpha = \frac{AD}{AC};$ $\boldsymbol{AD = AC\ sec\ \alpha}$ $\boldsymbol{AD = \sec \alpha}$

$\tan b = \frac{DF}{AD};$ $DF = AD \tan\ b$ $\boldsymbol{DF = \sec \alpha \tan b}$

$AD = \frac{DF}{DE}$ $AD.DE = DF$ $DE = \frac{DF}{AD}$ $DE = \frac{sec\ \alpha \tan b}{sec\ \alpha}$

$\boldsymbol{DE = \tan b}$

$sec\ \alpha = \frac{DF}{DE};$ $DF = DEsec\ \alpha$

$tan\alpha = \frac{EF}{DE};$ $EF = DE\ tan\ \alpha$ $\boldsymbol{EF = tan\ \alpha \tan b}$

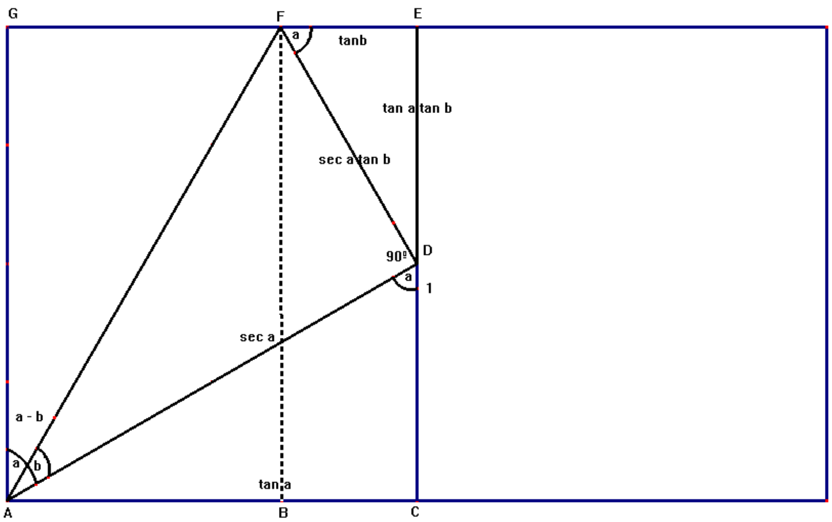
$\tan a = \frac{CD}{AC}$ $CD = AC \tan a$ $\boldsymbol{CD = \tan a}$

BF = CE CE = CD + DE $BC = EF$ **AB = AC – BC**

$tan(\alpha + b) = \frac{BF}{AB}$ $tan(\alpha + b) = \frac{CD+DE}{AB}$

$tan(\alpha + b) = \frac{CD+DE}{AC-BC}$

5. $\boldsymbol{tan(\alpha + b) = \frac{\tan\alpha + \tan b}{1-\tan\alpha\tan b}}$



$\tan\alpha = \frac{AC}{CD}$; $AC = \tan\alpha$ $\boldsymbol{AC = \tan\alpha}$

$\sec\alpha = \frac{AD}{1}$; $AD = \sec\alpha$ $\boldsymbol{AD = \sec\alpha}$

$\tan\beta = \frac{DF}{AD}$; $DF = AD\tan b$ $\boldsymbol{DF = \sec\alpha\tan b}$

$AD.EF = DF$ $EF = \frac{DF}{AD}$ $EF = \frac{sec\,\alpha\tan b}{sec\,\alpha}$ $\mathbf{EF = \tan b}$

$\tan\alpha = \frac{DE}{EF}$; $DE = EF\tan\alpha$; $\boldsymbol{DE = tan\,\alpha\tan b}$

$\sec\alpha = \frac{DF}{EF}$ $DF = EFsec\,\alpha$;

$\Delta AFG = \Delta ABF$ FG = AB **AB = AC – BC**

AG = CD + DE BC = EF

$tan(\alpha - b) = \frac{AB}{AG}$ $tan(\alpha - b) = \frac{AC-BC}{CD+DE}$

6. $\boldsymbol{tan(\alpha - b) = \frac{tan\,\alpha - \tan b}{1+tan\,\alpha\tan b}}$

Bibliografía.

Alsina Claudí. (2006). Math made visual. Washington D.C. Mathematical Association of America.

Devlin, Keith. The language of mathematics: making the invisible visible (1998). New York. W H. Freeman.. 344p.

Hull, Thomas (2006). Project origami. Activities for exploring mathematics.

Lerner Matíz, Jeannette y Gil Congote Lina Marcela.(2006). Metodología del Aprendizaje: Una experiencia analítica en el aula.

Monsalve Posada Orlando. (1994). Un paseo fascinante por la tabla de multiplicar. Educación y Pedagogía. Nos 12 – 13, 232 – 260.

Monsalve Posada Orlando. (2000). Una brisa refrescante para la iniciación matemática.

Monsalve Posada Orlando.(2001). Actividades sobre una hoja de papel. Cuadernos Pedagógicos 16.

Monsalve Posada Orlando y Jaramillo Carlos Mario.(2003). El placer de doblar papel: mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. Educación y Pedagogía.35, 11 – 24.

Monsalve Posada, Orlando y O. (2006). Diplomado en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia Módulo 4: Pensamiento Espacial ySistemas Geométricos.

Monsalve Posada Orlando.(2008). Monstrations as a complementary concept for visual Thinking: implications in the teaching and learning of elementary geometry. 11 Congress of Mathematical Education.

Monsalve Posada Orlando (2012). XI Encuentro sobre la Enseñanza de las Ciencias. La importancia de la Interdisciplinariedad. La matemática escondida en los objetos cotidianos

Monsalve Posada Orlando (2013). Módulo de Matemática Básica. Formador de Formadores en la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas.

Nelsen, Roger B (2000). Proofs without words. Washington. Mathematical Association of America.

Sawyer, W.W. (1964). Vision in Elementary Mathematics.

Sundara Rao, Tandalam. (1966). Geometric exercises in paper folding

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

El pensamiento algebraico, multiplicativo y aditivo desde una perspectiva semiótica cultural

John **Gomez** Triana
Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Colombia
johngomezt@gmail.com
Javier **Mojica** Vargas
Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Colombia
javiermojicav@hotmail.com
Oscar Leonardo **Pantano** Mogollón
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
leonardopantanom@gmail.com

Resumen

Se propone un taller práctico para docentes investigadores que tiene como objetivo principal contribuir a ampliar la mirada de los signos que dan cuenta del pensamiento matemático, particularmente en la resolución de tareas en contextos algebraicos, aditivos y multiplicativos. Para tal fin se utilizará el análisis realizado de la actividad matemática de un grupo de estudiantes colombianos cuando resuelven tareas asociadas a la generalización de patrones y a tareas de tipo aditivo y multiplicativo. Tales tareas hacen parte de los trabajos de maestría de los talleristas Gómez (2013), Pantano (2013), Mojica (2013). El propósito del taller se capitaliza al proponer a los asistentes un ejercicio de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando resuelven tareas inmersas en los contextos ya mencionados. Para tal fin se usan algunos elementos de la teoría cultural de la objetivación como categorías de análisis.

Palabras Clave: Pensamiento, semiótica cultural, medios semióticos de objetivación, objetivación, pensamiento multimodal

Introducción

Es probable que durante la formación y posterior ejercicio profesional de los profesores de matemáticas se presenten cuestionamientos sobre la caracterización del pensamiento matemático, más aún, sobre la clasificación del mismo en tipos de pensamiento (pensamiento numérico, pensamiento variacional, pensamiento algebraico, pensamiento espacial, pensamiento aleatorio, etc.). Si se acepta la idea de que el pensamiento matemático es una categoría general que puede ser dividida en subcategorías, partiendo de particularidades que están estrechamente ligadas a las diferentes ramas que posee la matemática vista como disciplina científica (aritmética, geometría, álgebra, cálculo, etc.), surge la necesidad de establecer características que permitan clasificar la actividad matemática de los estudiantes como parte de un tipo de pensamiento o de otro. Atendiendo a esta necesidad la comunidad académica interesada en la educación matemática ha hecho varios esfuerzos, desde diferentes enfoques, que tienen como objetivo encontrar una caracterización de los diferentes tipos de pensamiento matemático.

Un ejemplo de lo anterior lo constituye la perspectiva semiótica cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuesta por Radford (2006) en la *Teoría Cultural de la Objetivación* (TCO). Dentro de esta perspectiva se resalta la importancia de reconocer en la actividad matemática de los estudiantes una serie de acciones ligadas al uso de artefactos y signos tales como gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos. Dichas acciones, según Radford (2006, 2008), dan cuenta del desarrollo del pensamiento matemático las cuales tradicionalmente suelen ser ignoradas por los profesores de matemáticas. Además, algunos investigadores se han interesado por estas acciones al momento de teorizar elementos que permitan reconocer la manifestación y evolución del pensamiento matemático, centrando su interés en la identificación de estas acciones movilizadas por los estudiantes al resolver tareas en contextos algebraicos y recientemente esta teoría ha sido abordada en otros contextos diferentes al algebraico, como por ejemplo en el contexto de lo multiplicativo y de lo aditivo.

De este modo, con el objetivo de contribuir con alguno ejemplos del desarrollo del pensamiento matemático visto desde una perspectiva semiótica cultural, en este taller se pretende mostrar algunos ejemplos de la manera como las acciones utilizadas, por los estudiantes, en la actividad matemática sirven de evidencia en la manifestación y evolución del pensamiento matemático. A través de estos ejemplos, atendiendo a los propósitos prácticos del taller, se busca que los asistentes realicen un ejercicio de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes de educación básica y media de la ciudad de Bogotá-Colombia donde puedan reconocer y analizar los signos y expresiones lingüísticas y corporales movilizadas por los mismos cuando resuelven tareas de tipo aditivo, multiplicativo y algebraico.

Marco de referencia conceptual

El presente taller se sitúa en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, en la cual se asumen los preceptos de la perspectiva histórico cultural y se acude a la teoría cultural de la objetivación (TCO) (Radford, 2006, 2013). Entonces, asumiendo un enfoque semiótico cultural del aprendizaje de las matemáticas, se presentan a continuación los elementos teóricos más importantes que sustentan el desarrollo del taller, iniciando con uno de los planteamientos teóricos que da solidez y coherencia a la TCO y que tiene que ver con una concepción no mentalista del pensamiento.

El pensamiento puede ser observado dado que emerge a través de los gestos, la actividad perceptual, el movimiento del cuerpo y el uso de signos. Curiosamente, a pesar de su importancia "el pensamiento como concepto en sí no forma parte de las teorías didácticas actuales, sin duda una de las razones tiene que ver con la idea popular de que el pensamiento es inobservable" (Radford, 2006). Lo anterior se debe, como lo menciona Radford (2010a), a que ideas occidentales y epistemologías racionalistas han transmitido la idea de que el pensamiento es inmaterial y algo puramente mental, sin cuerpo. En este orden de ideas, en la TCO se expone que el pensamiento es "una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (Radford, 2006, p. 107). Según este autor, esta reflexión mediatizada está influenciada por la utilización de artefactos, signos, movimientos corpóreos, por parte de los aprendices, en la realización de la actividad matemática. En otras palabras, las acciones ligadas al uso de artefactos y signos tales como gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos son parte constitutiva y consustancial del pensamiento.

Por otro lado, en esta teoría se amplía la idea de *signo*, no sólo como medio de representación de los objetos matemáticos sino también como elemento constitutivo del pensamiento y de la actividad, introduciendo así el concepto de *Medio Semiótico de Objetivación* entendido como un recurso que intenta comunicar algo, que hace evidente una intención. Un ejemplo de esto lo constituyen aquellos objetos, herramientas, recursos lingüísticos y señales que utilizan intencionalmente las personas en la construcción social de significados, con el propósito de lograr una conciencia estable, hacer evidente una intención y realizar una serie de acciones para alcanzar el objetivo con el cual se encuentra impregnada la actividad matemática de los estudiantes. Para Radford (2010a, 2010b) los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de los actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. De acuerdo con Radford (2010b), los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median.

De acuerdo con Radford (2006, 2008, 2010a), D´Amore (2006), Wertsch (1988), los signos juegan un rol importante en tanto son los elementos que no sólo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que hacen parte constitutiva de la actividad y de los procesos sociales. En el marco de la TCO se precisan los procesos sociales por medio de los cuales los sujetos aprenden a pensar de acuerdo a modos culturales ya establecidas, de esta manera se configura la idea de procesos de objetivación que Radford (2006, 2008) caracteriza como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes comprenden la lógica cultural con la que los objetos del conocimiento se han dotado, y se familiarizan con su constitución histórica de las formas de acción y pensamiento. Particularmente se distinguen los procesos de objetivación: contracción semiótica e iconicidad.

En el contexto del pensamiento algebraico, en Radford (2012a) se postula que en el álgebra para operar en lo desconocido o en cantidades indeterminadas (por ejemplo, variables, parámetros) es necesario pensar de forma analítica. Es decir, se tiene que considerar las cantidades indeterminadas como si se tratara de algo conocido, como si fueran números específicos. Es decir, las características principales del pensamiento algebraico se centran en la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Es en este contexto en el que los avances investigativos realizados por Radford (2010, 2011, 2012a, 2012b), Villanueva (2012); Vergel (2012), Gómez (2013) muestran que en las tareas asociadas a generalización de patrones existen estratos de generalidad caracterizados de acuerdo a los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes. Estos estratos son presentados por Radford (2010a) por medio de una tipología de formas de pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación:

- El *Pensamiento Algebraico Factual*. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.
- El *Pensamiento Algebraico Contextual*. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son reemplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.
- El *Pensamiento Algebraico Simbólico*. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

Esta tipología junto con los medios semióticos de objetivación movilizados en cada uno de estos brindan información acerca del desarrollo del pensamiento algebraico permitiendo así, realizar una caracterización de este; como afirma Arzarello (2006) los medios semióticos de objetivación emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. Teniendo en cuenta la información brindada por los medios semióticos de objetivación una parte de la comunidad de investigadores se ha interesado por indagar si estos (los medios semióticos de objetivación) se manifiestan en otro tipo de pensamiento distinto al algebraico, tal es el caso del pensamiento numérico, más específicamente a las tareas asociadas a lo aditivo y lo multiplicativo.

En el caso del pensamiento aditivo el interés de los investigadores ha centrado la atención en análisis teóricos relacionados con la clasificación de los tipos de problemas que se pueden proponer en el aula (transformación, comparación, entre otros), el tipo de incógnita por la cual se puede indagar (estado inicial, transformación o estado final) y la identificación de los criterios semánticos a través de los cuales se pueden analizar los problemas de enunciado verbal (Bonilla, Sánchez, Vidal, Guerrero, Lurduy, Romero, Rojas, Mora & Barón, 1999; Castro, Rico & Castro, 1995; Vergnaud 1991). Sin embargo, dada la importancia que tiene el pensamiento aditivo en el desarrollo del pensamiento numérico es indispensable generar investigaciones que contribuyan a la caracterización de la manera cómo piensan los estudiantes y las acciones realizadas por estos que permiten dar cuenta de la construcción de este pensamiento. Por esta razón, Pantano (2013), en la propuesta de investigación titulada "Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo", pretende describir y analizar los medios semióticos y los procesos de objetivación con el propósito de hacer una aproximación a la caracterización del pensamiento aditivo.

En cuanto a lo que se ha denominado pensamiento multiplicativo existen diversos pronunciamientos al respecto, algunos referidos a las dificultades de los estudiantes en la resolución de tareas de multiplicación y división, a la estructura semántica y sintáctica de los problemas propuestos, a su relación con el razonamiento proporcional y aditivo, entre otras. Sin embargo aún no se tiene una caracterización de la naturaleza del pensamiento multiplicativo, de sus elementos constitutivos, de los medios semióticos de objetivación, ni de los estratos de generalidad que lo caracterizan. La ausencia de una caracterización del pensamiento multiplicativo que tenga en cuenta aspectos socioculturales y que incluya los estratos de generalidad que lo constituyen legítima la necesidad de identificar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, de manera que tales hallazgos permitan acercarnos a la comprensión de aspectos semióticos del aprendizaje de la multiplicación. En tal sentido Mojica (2013) pretende estudiar los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de sexto grado de educación básica (10 - 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, intentando así contribuir a la caracterización del pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótico cultural.

Teniendo los referentes investigativos en el campo del pensamiento algebraico y las hipótesis de investigación en el campo del pensamiento aditivo (Pantano, 2013) y en el pensamiento multiplicativo (Mojica, 2013) interesa en el presente taller presentar un ejemplo de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando se enfrentan a tareas en contextos de generalización de patrones, en contextos aditivos y en contextos multiplicativos. Esto con el objetivo de que los asistentes al taller puedan conocer los elementos teóricos de la Teoría Cultural de la Objetivación y utilizarlos como herramienta en un ejercicio de análisis que se les propondrá durante el desarrollo del taller. El propósito de tal ejercicio es que los asistentes al taller realicen una observación y lleven a cabo un análisis minucioso de la actividad matemática de los estudiantes al enfrentarse a actividades matemáticas en diversos contextos.

Dicho análisis comprende la convergencia de diversas disciplinas teóricas como la psicología o la sociología, sin embargo la literatura en el campo de la educación matemática ofrece algunos hallazgos que se fundamentan en la perspectiva de análisis multimodal del pensamiento (Arzarello, 2006; Manghi, 2009). Es decir, una concepción multimodal de la cognición humana en la que la acción de los estudiantes se analiza más allá de la producción escrita u oral, se tiene en cuenta la movilización o emergencia de recursos semióticos que permiten objetivar el saber y que van de la mano con la elaboración social de significados que es propia de una perspectiva sociocultural. En otras palabras, dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.). Ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes será analizado de manera aislada. Estos recursos o modalidades incluyen también comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos y movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009).

Contexto Problemático

Entendida una situación problemática más allá de las tensiones entre lo deseable y lo acontecido en las aulas, se considera que una necesidad también puede configurarse problemática en la medida que se presente como carencia de información al respecto de un fenómeno. Particularmente consideramos que en el fenómeno de aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos, presentados a través de actividades que median entre el saber y el conocimiento, emergen o se movilizan ciertos recursos corporales y lingüísticos entendidos como signos que tienen intenciones comunicativas. Cambiar nuestras maneras de valorar acciones de los estudiantes, reconociendo en su actividad información que permita dar cuenta de la anatomía de sus razonamientos, sin querer con ello listar exhaustivamente un vademécum de acciones plausibles, consiste en adaptar o entrenar el ojo crítico y observador del docente de manera que su atención pueda empezar a centrarse en otros aspectos que ofrecen información acerca de posibles maneras de comprender el fenómeno del aprendizaje.

En concordancia con lo anterior, el taller pretende brindar a los participantes herramientas tanto teóricas como prácticas para identificar acciones como el uso de artefactos, signos, gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos en la actividad matemática de los estudiantes al resolver tareas en diferentes contextos, dado que, reconocer estas acciones proporciona información acerca de la constitución y manifestación del desarrollo del pensamiento matemático (Radford, 2010; Gómez, 2013 & Vergel, 2012).

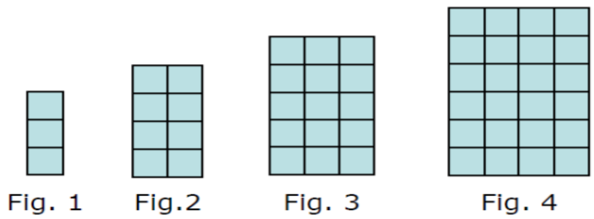
La importancia de reconocer en la actividad matemática de los estudiantes los medios semióticos de objetivación que son movilizados radica en que, como lo afirma Radford (2010a), se considera un desperdicio desaprovechar un arsenal de aspectos tanto corpóreos cómo lingüísticos que dan cuenta de la evolución del pensamiento matemático. Entonces, el taller está dirigido a docentes que estén interesados en la investigación en educación matemática y busca ampliar la mirada que tradicionalmente se ha tenido de los signos que dan cuenta del pensamiento matemático. Para tal fin se utilizará el análisis realizado de la actividad matemática de un grupo de estudiantes colombianos cuando resuelven tareas asociadas a la generalización de patrones y a tareas de tipo aditivo y multiplicativo. Tales tareas hacen parte de los trabajos de maestría de los talleristas (Gómez, 2013; Pantano, 2013; Mojica, 2013). Seguido al análisis ya mencionado, se propone a los asistentes que participen en un ejercicio en el cual deben poner en juego las herramientas teóricas presentadas para analizar el proceso de solución de los mismos estudiantes pero en tareas diferentes a las ya expuestas.

Metodología

Pragmáticamente la TCO propone "prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el estudiante en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales" (Radford. 2006, p. 125). De esta manera se cuenta con una serie de herramientas para analizar la actividad matemática de los estudiantes desde una perspectiva semiótica cultural. Es así como en el taller se centra la mirada en tales herramientas para el análisis de la actividad matemática de los grupos de estudiantes que son foco de investigación en los trabajos de Gómez (2013), Pantano (2013) y Mojica (2013). El taller está dirigido a un grupo aproximado de 30 participantes que conformarán grupos de 3 integrantes y está diseñado para desarrollarse en dos sesiones de 1 hora y 50 minutos cada una. En cuanto a los recursos físicos se requiere que se disponga de herramientas multimedia (video beam, sistema de sonido, computadores y conexión a internet). Cada sesión está dividida en 3 momentos los cuales se describen a continuación:

Sesión 1

Momento 1. Resolución de tareas. Inicialmente se presentará a los asistentes al taller un grupo de tareas enmarcadas en el pensamiento algebraico (Ver figura 1), el pensamiento multiplicativo (Ver figura 2) y el pensamiento aditivo. Se conformarán grupos de tres asistentes de los cuales dos de ellos resuelven las tareas propuestas mientras que el tercer integrante asume el rol de observador, recopilando en un documento (Ver figura 3) la forma de proceder y las acciones realizadas por los otros dos miembros de su grupo al resolver las situaciones propuestas.



1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros en la figura **n**
5. ¿Cuál es la figura que tiene 440 cuadros?

Figura 1. Ejemplo de una tarea asociada al pensamiento algebraico

Para unas onces hay en la mesa tres tazas de café y cuatro buñuelos. Pero llegan cinco personas. Si a cada persona se le debe dar una taza de café y se quiere mantener la relación inicial entre el número de tazas de café y la cantidad de buñuelos.

- ¿Cuántos buñuelos deben servirse?
- Cuantos buñuelos deberían servirse si llegaran 9 personas
- Como le explicarías a un mesero la cantidad de buñuelos que debe poner en la mesa según la cantidad de invitados.

Figura 2. Ejemplo de una tarea asociada al pensamiento multiplicativo

Mientras los compañeros de su grupo resuelven la tarea, solicitamos el favor de registrar detalladamente la forma de proceder de cada uno de ellos en la resolución de la tarea.

Asistente1.____

Asistente 2. ____

Figura 3. Instrumento de recolección de información

Momento 2. Presentación videos. Se presenta a los participantes los videos correspondientes a la actividad matemática de los estudiantes foco de investigación de los trabajos ya reseñados, cabe aclarar que dicha actividad matemática corresponde a la resolución de las tareas que previamente han desarrollado los asistentes en el taller.

- Se entregan las transcripciones de los respectivos videos proyectados a cada grupo conformado.
- Se propone confrontar los registros de los asistentes con la producción de los estudiantes y generar una discusión al respecto.

Momento 3. Análisis los vídeos. A partir de los videos proyectados, los talleristas presentan el análisis multimodal de la actividad matemática de los estudiantes utilizando como herramientas de análisis los constructos teóricos de la TCO.

Sesión 2.

Momento 1. Resolución de tareas. Se propone a los asistentes resolver un nuevo grupo de tareas en contextos algebraicos, aritméticos y multiplicativos.

Momento 2. Presentación de videos.

- Se presenta a los participantes los videos correspondientes a la actividad matemática de los estudiantes al resolver el nuevo grupo de tareas.
- Se entregan las transcripciones de los respectivos videos proyectados a cada grupo de asistentes
- Teniendo en cuenta las unidades de análisis (medios semióticos de objetivación) presentadas y discutidas en el video presentado en la Sesión 1, se solicita a los asistentes asumir el rol de investigadores para analizar cuáles serían los medios semióticos de objetivación que podrían dar cuenta del pensamiento algebraico, el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo en la actividad matemática de los estudiantes protagonistas de los videos.

Momento 3. Reflexión. Finalmente se planteará una reflexión frente a la importancia de reconocer en la actividad matemática la movilización de diferentes medios semióticos de objetivación, ya que se pueden utilizar (por los profesores de matemáticas) para identificar características que dan cuenta del pensamiento matemático, particularmente del pensamiento algebraico, el pensamiento multiplicativo y el pensamiento aditivo. Lo anterior se logrará partiendo de los hallazgos hechos en el ejercicio de análisis realizado por los asistentes al taller a la luz de los elementos teóricos de la TCO y comparado con las experiencias que tienen los asistentes en la enseñanza de las matemáticas en sus diferentes niveles.

Resultados y conclusiones

Se espera ofrecer a los asistentes la posibilidad de conocer la potencia y pertinencia de algunos constructos de la teoría cultural de la objetivación de manera que puedan empezar a incorporarse en sus prácticas docentes a través del reconocimiento de un conjunto de signos, movimientos corpóreos y expresiones lingüísticas que pueden llegar a dar cuenta del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, generando así cierta sensibilidad ante las apreciaciones o juicios que emitimos respecto a los desempeños de los mismos.

En el ejercicio práctico se espera socializar con los asistentes los hallazgos de tres investigaciones fundamentadas en los constructos de la teoría cultural de la objetivación, en las cuales los tesistas de maestría realizan análisis de la actividad matemática en diferentes contextos matemáticos, a partir de los cuales los asistentes tienen la posibilidad de realizar tres ejercicios de análisis que luego puedan ser reproducidos en otras investigaciones.

Algunos hallazgos iniciales demuestran que tras un cuidadoso análisis de la actividad matemática es posible reconocer signos que son auténticas manifestaciones de estratos de pensamiento que pueden llegar a caracterizar tipologías de pensamiento desde una perspectiva semiótico cultural, en tal sentido se espera mostrar que los medios semióticos de objetivación son parte consustancial de toda actividad matemática en el desarrollo de la cual emergen gestos, objetos, movimientos corporales y registros semióticos que dan cuenta, semióticamente hablando, de cómo los estudiantes elaboran significados de los objetos matemáticos encarnados en una práctica social y cultural. De esta manera se podrá reflexionar sobre como los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes, durante la actividad matemática, permiten identificar la existencia de lo que se ha teorizado como procesos de objetivación.

Complementariamente los resultados de los análisis se convierten en una invitación a que los participantes interesados en ampliar las miradas del quehacer de sus estudiantes empiecen a indagar acerca de otros medios semióticos de objetivación en estos u otros dominios. Se espera propiciar posibles preguntas de investigación a partir de los hallazgos, por ejemplo: ¿cuál es la naturaleza de las contracciones semióticas en otros dominios?, ¿qué significados culturales pueden atribuirse a las acciones realizadas por los estudiantes, por ejemplo en el conteo con los dedos, que hace que deban ocultarse tales conteos? ¿Dan cuenta los registros escritos de estrategias novedosas de resolución de problemas?, ¿cómo pueden capitalizarse esos medios semióticos de objetivación en las evaluaciones de los estudiantes?

Referencias y bibliografía

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking,* 267-299.

Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, J., Romero, J., Rojas, P., Mora, L., & Barón, C. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Bogotá. Gaia.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización,* Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo***.** Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.

Manghi, D. (2009). C*outilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. multimodalidad e intersemiosis en el discurso pedagógico de matemática en 1año de enseñanza media*. Tesis doctoral no publicada. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Mojica, J. (2013). *Procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*. Anteproyecto de trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Distrital Francisco José de caldas. Bogotá, Colombia.

Pantano, O. (2013). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Anteproyecto de trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning. 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. ZDM, 40(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010a). Elementary forms of algebraic thinking in young students. Paper presented at the Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. Paper presented at the Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education.

Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental isuues. Regular lecture ICME 12, Seoul.

Radford, L. (2012b). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117-133.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of theTheory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2(1), 7- 44 doi: http: //doi.dx.org/1 0.4471 /redimat.201 3. 1 9

Vergel, R. (2012). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Proyecto doctoral, Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogota D.C. Colombia.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. Colombia.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Versión original: *Vygotsky and the social formation of mind*, Cambridge: Harvard University Press, 1985.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

"Enseñanza del concepto de número o competencia matemática temprana con TIC"

Aleyda Yudit Velázquez Hernández
Directora de Jardín de Niños en Mazatlán, Sinaloa, México de la
Secretaría de Educación Pública y Cultura del Gobierno del Estado de Sinaloa y
Colaboradora del Centro de Ciencias de Sinaloa
Culiacán, Sinaloa, México.
aleyday20026@gmail.com
Jesús Enrique Ruiz Cortez
Director de Innovación Educativa del Centro de Ciencias de Sinaloa
Culiacán, Sinaloa, México
jesusenriqueruizcortez@gmail.com

Resumen

Las matemáticas son una ciencia que en el desarrollo histórico de México, se reconoce públicamente como uno de los rezagos educativos más fuerte del sistema educativo nacional. De ello dan cuenta las diversas evaluaciones nacionales ENLACE y EXCALE e internacionales PISA.

Aspirar a mejorar la calidad de la educación matemática en nuestro país, pasa necesariamente por la mejora de la calidad de sus docentes, desde el preescolar hasta el bachillerato y asumir la importancia que tiene la responsabilidad compartida para lograr el perfil de egreso; tal y como lo plantea la NCTM(2003) al definir unos estándares sobre contenidos y procesos matemáticos idénticos aunque, con expectativas diferentes en cada etapa educativa desde la educación infantil hasta el bachillerato.

Con el propósito de contribuir a resolver dicha problemática, la Dirección de Innovación Educativa del Centro de Ciencias de Sinaloa, México, está implementando un Programa de Mejora de la Calidad de la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Básica, (preescolar, primaria y secundaria) partiendo del principio (De Nurias Planas y Ángel Alsinas, en Educación Matemática y Buenas Prácticas; Edit. GRAÓ) de que en la educación infantil existen contenidos y procesos matemáticos que desarrollar que son propios de estas primeras edades y que si no se trabajan e interiorizan adecuadamente impiden tener una base solida para seguir construyendo conocimientos matemáticos, cuyas finalidades deberían de formar parte del resto de las etapas educativas y De Nunes y Bryant en Las Matemáticas y su Aplicación: La perspectiva del niño, y la de Jean Piaget, (1965) en donde establecen la importancia de los principios lógicos para la construcción del concepto de número o competencia matemática temprana, así como la de los interaccionistas Van de Rijt y Van de Luit; todo ello con la ayuda de las Tecnologías de la Información y Comunicación como competencia básica docente tal como lo establece la UNESCO, Londres, 2008.

Palabras clave: Educación, competencia, preescolar, enseñanza, matemáticas, situaciones de aprendizaje, TIC”

Introducción

Las matemáticas son una ciencia que en el desarrollo histórico de México, se reconoce públicamente que tiene uno de los rezagos educativos más fuerte del Sistema Educativo Nacional. De ello dan cuenta las diversas evaluaciones nacionales: Examen nacional de logro académico en centros escolares (ENLACE) y Examen para la calidad y el logro educativo (EXCALE) e internacionales: Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en ingles), que nos colocan muy por debajo de los niveles de competitividad académica, requeridos para una sociedad basada en el conocimiento. Se reconoce también, que esta problemática es muy compleja, pero que sino iniciamos ya, es decir, con sentido de urgencia y sin menoscabo de los esfuerzos hasta hoy realizados, esta situación (según Rodger Bybee, ex presidente del comité de ciencias del PISA), “se puede convertir en un verdadero problema de seguridad nacional, porque México no tendrá los suficientes ingenieros, científicos y tecnólogos para competir en una sociedad en donde el conocimiento define cada vez más nuestro futuro”.

Aspirar a mejorar la calidad de la educación en el campo de formación pensamiento matemático, que permita desarrollar en los estudiantes las competencias indispensables para el siglo XXI, y así contribuir al desarrollo científico y tecnológico y en consecuencia al desarrollo social y económico de nuestro país, pasa necesariamente por instrumentar adecuadamente el Plan y los

Programas de estudio emanados de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) 2011, desde el preescolar hasta la secundaria, asumiendo, la importancia que tiene la responsabilidad compartida para lograr el perfil de egreso de la Educación Básica y del compromiso que todos los actores involucrados en cada uno de los periodos deben de asumir para el logro del mismo.

En el nivel Preescolar, Kinder o Jardín de Niños desarrollar el concepto de número o competencia matemática temprana, se considera que puede favorecer el desarrollo del pensamiento matemático del niño durante toda su vida académica.

Nuria Planas y Ángel Alsinas (Educación Matemáticas y Buenas Prácticas; Edit. GRAÓ), señalan que la etapa preescolar, tiene contenidos y procesos matemáticos qué desarrollar que son propios de estas primeras edades y que si no se trabajan e interiorizan adecuadamente impiden tener una base sólida para seguir construyendo conocimiento matemático, que tiene aprendices y métodos propios, cuyas finalidades deberían formar parte de la manera de trabajar del resto de las etapas educativas.

Desde el punto de vista de estos autores, los contenidos y procesos matemáticos, son habilidades que se van aplicando y conectando con otras habilidades más complejas a medida que avanza la escolaridad, en un ciclo que recuerda la espiral. Estas habilidades básicas darán lugar, en etapas posteriores, al desarrollo de estrategias de pensamiento y, más concretamente de pensamiento crítico. El embrión de todos ellos, sin embargo, ya aparece en la educación infantil. Esta afirmación, que puede parecer atrevida, viene reforzada por el planteamiento de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) al definir unos estándares sobre contenidos y procesos matemáticos idénticos, aunque con expectativas diferentes en cada etapa educativa desde la educación infantil hasta el bachillerato.

De acuerdo con Terezinha Nunes y Peter Bryant; (LAS MATEMÁTICAS Y SU APLICACIÓN: LA PERSPECTIVA DEL NIÑO; Edit, siglo XXI) consideran que la dependencia de la lógica no es característica exclusiva de las matemáticas. Nadie puede ir muy lejos en cualquiera de las áreas del conocimiento si viola las reglas de la lógica. Pero la relación entre lógica y matemáticas es particularmente fuerte y clara. Por ello sostienen que: PARA TENER APTITUDES NUMÉRICAS, LOS NIÑOS Y NIÑAS NECESITAN SER LÓGICOS, ya que es fácil darse cuenta de que sólo quien reconoce las reglas lógicas puede entender y realizar adecuadamente incluso las tareas matemáticas más elementales y toman como ejemplo la forma de cómo aprendemos a contar, "para entender qué están haciendo cuando cuentan objetos, los niños y niñas tienen que obedecer muchos principios lógicos. Primeramente, tienen que comprender la naturaleza ordinal de los números, su cardinalidad, etc.

Para Jean Piaget (1965) Hugo Balbuena Corro; El desarrollo de competencias matemáticas en la educación básica; México,sep,2006, (documento interno)existen también requisitos lógicos que son determinantes para comprender el número, los que están interrelacionados entre sí, y sólo al ser alcanzados los requisitos básicos se desarrolla dicha comprensión. Entonces, según Piaget, para adquirir y comprender el número existen requisitos lógicos previos determinantes, ya que el autor considera que la unión de los conceptos de clasificación, seriación, correspondencia y comparación, lleva a comprender y desarrollar el concepto de número, apareciendo el estadio operacional del desarrollo mental (Baroody, 2000) y (Bryant y Nunez, 2002), en cambio, sugieren que además del pensamiento lógico, la base del desarrollo matemático ancla también su fundamento.

Tanto el enfoque piagetiano, basado en el desarrollo espontáneo de la lógica, como el de Gelman y Gallistel (1978), más sustentado en el entrenamiento práctico, son integrados en el enfoque teórico llamado interaccionista, que propone Van de Rijt (1996) y Van de Rijt y Van Luit (1998). Este enfoque postula que tanto las operaciones lógicas como el conteo, contribuyen al desarrollo del sentido de número o Competencia Matemática Temprana.

La teoría interaccionista de estos autores propone ocho componentes básicos, los cuales establecen la base de las Matemáticas Tempranas, que a su vez se homologan a la estructura de la Escala de Evaluación Matemática Temprana.

Los componentes considerados por Van de Rijt et al., (1999) son: 1. Comparación (capacidad de determinar diferencias o semejanzas entre grupos); 2. Clasificación (establecer relaciones entre objetos agrupándolos según criterios); 3. Correspondencia uno a uno (habilidad de parear uno a uno elementos de un conjunto con otro); 4. Seriación (intuir una noción de orden de los objetos de acuerdo a un rango); 5. Conteo Verbal (capacidad de repetir la secuencia numérica de memoria); 6. Conteo Estructurado (habilidad de etiquetar cada elemento al ir contabilizando); 7. Conteo Resultante (habilidad de etiquetar un conjunto en donde la última etiqueta asignada es la cantidad del conjunto); 8. Conocimiento General de los Números (contempla la aplicación de todos los componentes anteriores, ya que se refiere a la capacidad del menor de usar las habilidades adquiridas en la resolución de problemas de la vida diaria que requieren la numeración).

Todos estos antecedentes sugieren que reforzar las competencias matemáticas tempranas en niveles preescolares puede reportar un gran beneficio para dichos estudiantes a lo largo del tiempo.

Para contribuir y atender esta problemática, la Dirección de Innovación Educativa del Centro de Ciencias de Sinaloa, México, está implementando el diplomado en el desarrollo de competencias matemáticas para preescolar, que tiene como propósito que los profesores egresados cuenten con una actualización docente que les permita:

- Manejar en forma más eficiente el uso de las Tecnologías de Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas.
- Tener un mayor entendimiento de las bases teóricas necesarias para orientar su práctica docente con el enfoque por competencias.
- Seleccionar las mejores alternativas didácticas para temas educativos de matemáticas.
- Enriquecer sus ambientes de aprendizaje mediante estrategias más innovadoras de razonamiento matemático y resolución de problemas.

Para el logro de estos propósitos se ha estructurado el plan de estudios del diplomado, de la siguiente manera:

- El uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas.
- Los principios pedagógicos para la práctica docente.
- Alternativas didácticas para la enseñanza de las matemáticas.
- Razonamiento matemático y resolución de problemas.

Módulo I. El uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas. El nuevo paradigma de la enseñanza requiere de nuevas formas de intervención docente, de nuevas metodologías y nuevos roles que requieren de cambios de actitud, de percepción del contexto tanto áulico como social, también de un esfuerzo de adaptación y actualización permanente en el aspecto tecnológico. Esta perspectiva conlleva un cambio importante en el rol del docente, pasando de ser sólo un expositor; a guía y coordinador del conocimiento, basado en la incorporación de medios tecnológicos al aula, lo cual nos puede permitir promover un uso más adecuado de las habilidades digitales de nuestros alumnos constituyendo, un aporte muy significativo al cambio e innovación educativa para que mejore sus condiciones de comunicación, aprendizaje y participación entre sus pares y con sus alumnos.

Lo anterior nos deberá permitir también construir ambientes colaborativos dentro de las comunidades escolares en las que intercambien experiencias, construyan conocimientos, objetos de aprendizaje, reactivos y planes de clase, así como el desarrollo de una plataforma para la creación de redes sociales educativas donde puedan converger padres de familia, alumnos y docentes.

Con la integración de las nuevas tecnologías al ámbito educativo, las aulas en las que estas son debidamente utilizadas se convierten en un espacio abierto e interactivo, sin límites ni fronteras (más que las que uno se ponga), y estas herramientas tecnológicas son parte importante de la semilla que produce el cambio.

Las TIC representadas por la computadora ha impactado al proceso educativo de manera significativa por sus múltiples cualidades. De manera especial su capacidad para la comunicación a través de la red de Internet, la búsqueda de la información, el uso del Software Educativo (SWE) y las diversas herramientas para el desarrollo de materiales didácticos. Además, se enriquece por los tipos de información que almacena, como son: datos, imágenes estáticas (fotos y gráficas) y dinámicas (videos y software) sonidos, textos, etc. Y toda la utilería para los procesos académicos y administrativos y de gestión escolar.

Estas posibilidades que brinda la computadora para el desarrollo de diversas actividades potencializan el trabajo del docente, permitiéndole crear varios ambientes de trabajo y para su aprovechamiento es fundamental la capacitación y el entrenamiento de éstos.

La capacitación del docente en las TIC para el siglo XXI de acuerdo con la UNESCO (Estándares de competencias en TIC para docentes; Londres, Enero 2008) deben ser tal que ayuden a los estudiantes a adquirir las capacidades necesarias para llegar a ser: (1) competentes para utilizar Tecnologías de la Información. (2) buscadores, analizadores y evaluadores de información. (3) solucionadores de problemas y tomadores de decisión. (4) usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad. (5) comunicadores, colaboradores, publicadores y productores. (6) ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad.

De aquí que las valoraciones de las competencias de los docentes de la era digital incluyen indicadores de desempeño organizados en las categorías siguientes: (1) facilitar e inspirar el aprendizaje y la creatividad de los estudiantes. (2) diseñar y desarrollar experiencias de aprendizajes y evaluaciones propias de la era digital. (3) modelar el trabajo y el aprendizaje característico de la era digital. (4) promover y ejemplificar tanto la ciudadanía digital, como la responsabilidad. (5) comprometerse con el crecimiento profesional y con el liderazgo.

El logro de estos lineamientos es factible con la inclusión de las TIC en cualquier programa de capacitación docente y esto es necesario porque la innovación tecnológica y la educación básica son consideradas por el índice de competitividad global (presentado en el foro mundial, en Davos, Suiza*) como uno de los 12 pilares para el desarrollo y sustento de los nuevos paradigmas competitivos, pues son, de los principales factores que subyacen en los cimientos de las economías que revelan finalmente el nivel de competitividad que van alcanzando los países en su camino hacia el desarrollo del bienestar social*. En suma, las TIC son un factor de movilidad social, que coadyuvan a eliminar la desigualdad social, mejora la calidad educativa y son consideradas parte importante de las competencias docentes básicas del siglo XXI.

El módulo relacionado con el uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas, está constituido por cuatro momentos y pretende desarrollar habilidades y destrezas para desenvolverse en un contexto tecnológico que se busca contribuir a lograr en el sistema educativo mexicano por medio de ejes transversales como es el del uso de las TIC en la enseñanza.

Un primer momento en que se aborda lo conceptual, la comunicación y el trabajo en ambientes virtuales de aprendizaje; un segundo momento en el que se trabaja con algunas herramientas de producción del paquete office, las cuales contemplan actividades que se orientan hacia el trabajo que le brinde un apoyo inmediato al docente como son la utilería, así como algunas actividades básicas que lo ayuden en su quehacer administrativo cotidiano; un tercer momento con la utilización de un software de aplicación gratuita, como apoyo para la actividad docente y se concluye con una actividad integradora de estos tres momentos que contempla el diseño de una situación de aprendizaje utilizando las herramientas usadas y presentadas durante el diplomado.

Competencias docentes a desarrollar:

- Identifica los componentes esenciales de un sistema de cómputo, así como de dispositivos comunes que los componen y los hábitos más saludables de utilización por los usuarios.
- Desarrolla habilidades y herramientas teórico-prácticas suficientes para manejar aplicaciones de Internet y recursos de la plataforma virtual.

- Elabora textos, presentaciones y hojas de cálculo electrónicos que le faciliten su práctica docente cotidiana.
- Utiliza el software educativo de distribución libre más utilizado en la enseñanza de las matemáticas.

Módulo II. Principios pedagógicos para la práctica docente.

El mundo se debate en cambios vertiginosos que plantean un reordenamiento de la organización social, de sus instituciones y sus individuos. Este proceso conduce a la redefinición o al replanteamiento de conceptos, tan fundamentales como identidad, competencias, inclusión, paradigmas, reforma, sociedad, educación, innovación, familia, comunicación, democracia y valores, entre otros, que se manifiestan en formas muy concretas en la vida cotidiana y abren nuevas perspectivas de la interpretación del pasado, la comprensión del presente y la construcción del futuro.

El nuevo paradigma que plantea la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) sobre la enseñanza requiere de nuevas formas de intervención docente, de nuevas metodologías, nuevos enfoques y nuevos roles que requieren de cambio de actitud, de percepción del contexto escolar como social, además de un esfuerzo de actualización permanente (educación para la vida) en el aspecto tecnológico, en los nuevos enfoques pedagógicos y en una comprensión más profunda de las matemáticas elementales. Esta perspectiva conlleva un cambio importante en el papel que juega el docente, basado en el empoderamiento de los medios tecnológicos y su uso adecuado en el aula, porque "sin duda el desafío más importante que enfrentamos en la actualidad es lograr que la educación que anhelamos se concrete efectivamente en el salón de clases y en la escuela. Para lograr esto es preciso emprender cambios importantes en las prácticas de enseñanza de los maestros"[1].

La realidad de nuestro país evidencia que los docentes se encuentran en una etapa de transición entre la estructuración de la práctica docente y la exigencia de una urgente renovación pedagógica que la RIEB requiere. Por ello, es preciso tomar conciencia sobre la necesidad de cambio, y estar preparados para experimentar una nueva forma de trabajar los contenidos vinculados a problemas reales, con la finalidad de que participando en un trayecto formativo fundamentado en el Plan de estudio 2011 se apropien de elementos para idear estrategias didácticas que permitan un cambio en sus prácticas pedagógicas cotidianas, lo que posibilita la formación de alumnos en concordancia con las exigencias de un mundo complejo, dinámico, que requiere promover la formación de ciudadanos en múltiples esferas de competencia en su vida personal, social y, posteriormente laboral.

Para comprender la necesidad de cambio en la práctica docente, es indispensable reconocer que a cada maestro le corresponde la tarea de traducir los planteamientos de la RIEB en propuestas concretas en el aula, que favorezcan el desarrollo de competencias en los alumnos.

Por lo que es necesario, que se empoderen, asuman y analicen los fundamentos y principios pedagógicos para que comprendan los procesos y características infantiles de sus alumnos y creen ambientes de aprendizaje más significativos y efectivos, que puedan identificar los métodos más adecuados y seleccionar en qué situaciones utilizarlos.

[1] Plan Nacional de Desarrollo 2001-2006.

Además, se requiere que los docentes reflexionen críticamente sobre sus formas de intervención pedagógica porque son los encargados de acompañar a sus alumnos y compartir tanto con ellos como con su familia, los logros, alcances de su formación y desarrollo de competencias; deben mantenerse permanentemente alertas a las manifestaciones de sus alumnos respecto a sus estilos y formas de aprendizaje, a sus necesidades, debilidades y fortalezas; a la apropiación de los conocimientos; a la comprensión de los significados; a la construcción de conceptos, transferencia y aplicación en su conjunto, en la solución de problemas a los que se enfrenta.

Por lo anterior, el **Módulo II. Principios pedagógicos para la práctica docente** pretende acompañar al participante en el desarrollo de sus competencias docentes y en el fortalecimiento de la práctica profesional, entre ellas la comprensión de elementos teóricos, pedagógicos y prácticos, aspectos que se deben considerar para el desarrollo de competencias de sus alumnos.

Se pretende además, que en los contenidos y las actividades diseñadas sean tomadas como referencia diversas situaciones concretas que el docente experimenta desde sus contextos y respectivas funciones que realiza dentro del ámbito educativo, sus experiencias relativas a la implementación de planes y programas diversos y su relación con los temas y materiales de estudio, propiciando el autoestudio, la autonomía y el autodidactismo, impulsado hacia el aprendizaje permanente en congruencia con las exigencias de la sociedad del conocimiento, de la práctica profesional que requiere la Reforma y en beneficio de una sociedad más democrática, justa e inclusiva, colocando en el centro del acto educativo al alumno, y enfocado en éste, por ello, es de suma importancia que tanto la planeación como la evaluación contemplen una estructura interna que parta de las necesidades, dudas e intereses de los alumnos, situación que resulta complicada para los docentes ya que el Programa de estudios 2011. Guía para la educadora (PE 2011), no establece un formato estandarizado para realizar el plan de trabajo. Lo cual implica para el docente, mayor esfuerzo, creatividad y preocupación al momento de su diseño; por otra parte, se reconoce que las orientaciones relacionadas con ésta, responden principalmente a un requisito administrativo y los criterios de su formulación no están asociados a procesos de reflexión para la organización de su práctica y que la mayoría de los docentes evidencian que sus orientaciones están alejadas a lo que establece el PE 2011, y según datos del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2011) la disonancia llega hasta un 90%.

De lo que se trata entonces, es que el docente asuma que los principios pedagógicos de la Reforma son teorías que se deben practicar de manera cotidiana para la implementación del currículo, la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes esperados y la mejora de la calidad educativa.

Además de que los docentes deben poseer otras competencias vinculadas con la capacidad para diseñar experiencias de aprendizaje, involucrar a los alumnos en su aprendizaje, utilizar pedagógicamente nuevas tecnologías, y organizar su propia formación a lo largo de toda su vida profesional. Asimismo, deben propiciar que los estudiantes experimenten una sensación del control sobre su propia educación al autorregular su aprendizaje y trabajen en colaboración con otros para favorecer el desarrollo de sus competencias.

La conexión entre las actividades matemáticas espontáneas e informales de los niños, y su uso para propiciar el desarrollo del razonamiento matemático, es el punto de partida de la intervención educativa en el campo formativo pensamiento matemático, fundamentos que están presentes desde edades tempranas, que deben ser consideradas desde la práctica, tanto los procesos de desarrollo como las oportunidades de aprendizaje que se brindan al alumno que permita interactuar con su entorno y vivan experiencias que, de manera espontánea los llevan a desarrollar nociones numéricas (actividades de conteo), espaciales y temporales herramientas básicas del pensamiento matemático, que les permitan avanzar en la construcción de nociones matemáticas más complejas.

"La actividad con las matemáticas alienta en los alumnos la comprensión de nociones elementales y la aproximación reflexiva a nuevos conocimientos, así como las posibilidades de verbalizar y comunicar los razonamientos que elaboran, de revisar su propio trabajo y darse cuenta de lo que logran o descubren durante sus experiencias de aprendizaje" (PE 2011. Pág. 56).

Por tanto, la enseñanza de las matemáticas requiere, además de una comprensión significativa de conceptos matemáticos, una comprensión de los principios pedagógicos para hacer congruentes sus prácticas docentes y con los aprendizajes que se espera desarrollar en los alumnos.

Competencias docentes a desarrollar:

- Analiza a partir de un diagrama de la RIEB (elaboración propia), los elementos que integran el Acuerdo 592 para la articulación de la Educación Básica para comprender la importancia del rol del docente en la adquisición de los aprendizajes esperados, en el desarrollo de ambientes de aprendizajes y el logro del perfil de egreso.
- Identifica la estructura general del Plan de Estudios 2011 de Educación Básica para que contextualice el campo formativo pensamiento matemático.
- Enfatiza su análisis en los principios pedagógicos y los asume como condiciones esenciales para la implementación del currículo, para la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes y la mejora de la calidad educativa.
- Asume que el centro y el referente fundamental del aprendizaje es el alumno, para establecer los ritmos de aprendizaje, en función de la diversidad social, cultural, lingüística, de capacidades y estilos.
- Reconoce que la planificación es un elemento sustantivo de la práctica docente para potenciar el aprendizaje de los alumnos hacia el desarrollo de competencias, reconociendo que los referentes para su diseño son los aprendizajes esperados.
- Establece en el grupo un ambiente de aprendizaje que favorece actitudes de confianza, motivación, respeto, creatividad, curiosidad y placer por continuar aprendiendo.
- Valora el trabajo en equipo y orienta acciones para el descubrimiento, la búsqueda de soluciones, coincidencias y diferencias para construir aprendizaje en colectivo, promoviendo comunidades educativas.
- Asume que las competencias, los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados proveerán a los alumnos de las herramientas necesarias para la aplicación eficiente del conocimiento matemático.
- Posee alta capacidad como mediador en el uso adecuado de materiales y recursos educativos informáticos para el aprendizaje permanente, en la integración de redes y comunidades de aprendizaje, promoviendo el concepto de aula sin muros.

- Asume que la evaluación debe tener un enfoque formativo, obtener evidencias de los aprendizajes esperados a lo largo de su formación para potenciar los logros y enfrentar las dificultades, compartiéndolo con los alumnos y sus familiares.
- Reconoce las diferencias individuales y promueve entre los integrantes del grupo el reconocimiento y respeto a la pluralidad social, lingüística y cultural como una característica del contexto en que viven.
- Diseña y aplica estrategias de enseñanza y aprendizaje diferenciadas en sus alumnos, para promover y ampliar oportunidades de aprendizaje, accesibilidad, participación, autonomía y confianza en sí mismos.
- Valora y comprende la importancia de su función para atender los programas de relevancia social que ocurren en su contexto tales como: violencia, valores, medio ambiente, de salud, etc.
- Promueve normas que regulan la convivencia, el vínculo entre derechos y responsabilidades, la delimitación del liderazgo y de la autoridad en la escuela con la participación de la familia.
- Valora la función educativa de la familia y brinda orientación para que participen en la formación del alumno, estableciendo una relación receptiva, colaborativa y respetuosa.
- Asume que el liderazgo es un compromiso personal y con el grupo, mediado por el diálogo informado, para favorecer la toma de decisiones centrada en el aprendizaje de los alumnos.
- Valora el acompañamiento pedagógico como un medio para la formación continua, el mejoramiento de la escuela, la re significación de conceptos y la transformación de la práctica.

De ahí que el **Módulo III. Alternativas didácticas para la enseñanza de las matemáticas** aporta una serie de estrategias didácticas que sirven como punto de partida en la construcción de la planificación didáctica por competencias, las cuales fortalecen las competencias docentes fundamentadas en el Programa de estudio 2011. Guía para la Educadora, específicamente del campo formativo pensamiento matemático para estar en condición de aplicar las más idóneas en sus dos aspectos: Número y Forma, espacio y medida. Al apropiarse de los elementos conceptuales, los docentes podrán crear ambientes de aprendizaje más efectivos así como identificar los métodos de instrucción adecuados y en qué situaciones utilizarlos.

El desarrollo de las competencias matemáticas en preescolar requiere de una comprensión significativa de conceptos matemáticos, de las formas de diseñar, aplicar y evaluar situaciones de aprendizaje acorde a las teorías del aprendizaje de la reforma actual, mediante dichas estrategias, los profesores de preescolar podrán ser menos disociantes con sus prácticas docentes, con los objetivos y enfoques del PE 2011. Es necesario entonces, que se apropien de elementos conceptuales para que puedan crear ambientes de aprendizaje más efectivos, además, identifiquen los métodos de instrucción más adecuados y conozcan en qué situaciones utilizarlos. Para ello, se requiere que los docentes reflexionen críticamente sobre su práctica docente, y estén conscientes que la educación matemática en el preescolar es de gran importancia ya que ésta tiene características propias, es decir, tiene contenidos y procesos matemáticos a desarrollar que son propios de estas edades. A través del conocimiento que tengan los docentes de dichos elementos, podrán de manera intencionada lograr que sus alumnos se acerquen de manera más efectiva a una mejor comprensión de la matemática.

Debido a las necesidades anteriores, el módulo plantea el estudio de las situaciones de aprendizaje cooperativo, alternativas didácticas y los fundamentos teóricos del PE 2011. En cuanto a la selección y aplicación de las alternativas, los docentes deben sustentarlos con base en los fundamentos teóricos del PE 2011 relacionándolos con autores como: González, Adriana y Weinstein, Edith; Sperry Smith, Susan; D'Angelo, Estela; Kamii, Constance; Schiller, Pam (autores de la Reforma incluidos en el volumen I del Curso de formación y actualización docente de educación preescolar). Se espera que los docentes intervengan activamente estableciendo un vínculo entre teoría y práctica, que los conduzca a la mejora de su acción en el aula con actividades como: reflexiones sobre la propia práctica, búsqueda de alternativas didácticas, presentación y análisis de las mismas y discusiones asíncronas en los foros a través de la plataforma del curso.

Competencias docentes a desarrollar:

- Analiza un marco referencial sobre la importancia de la didáctica de las matemáticas en preescolar para fortalecer las competencias docentes fundamentadas en el Programa de estudio 2011. Guía para la educadora.
- Analiza conceptos matemáticos como referentes en el proceso de la enseñanza de las matemáticas y en el manejo de los elementos necesarios para la construcción de la planificación didáctica por competencias.
- Revisa y comprende los aspectos teórico conceptuales de las alternativas didácticas en el campo formativo pensamiento matemático, para estar en posición de aplicar las más idóneas en sus dos aspectos: Número y Forma, espacio y medida.
- Genera ambientes de aprendizaje para el desarrollo de competencias infantiles en el campo formativo pensamiento matemático y la transformación de la intervención pedagógica.
- Amplía sus conocimientos respecto a las características del desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos y reflexiona respecto a las formas de intervención pedagógica más adecuadas para favorecer sus competencias cognitivas mediante el análisis de lecturas.
- Amplía sus referentes acerca de las estrategias, creencias y formas tradicionales o rutinarias de trabajar las matemáticas en el aula, para la modificación de la intervención pedagógica.
- Actualiza su marco referencial respecto a la organización de estrategias y situaciones de aprendizaje para el logro de los aprendizaje esperados del campo formativo pensamiento matemático en preescolar.
- Identifica algunas consideraciones didácticas respecto a las características del pensamiento matemático en los niños y los retoma reorientando su forma de intervención pedagógica para favorecer competencias cognitivas infantiles, apoyándose en los recursos tecnológicos disponibles.

- Analiza los aspectos que incluye el diseño de la planeación de una situación de aprendizaje del campo formativo pensamiento matemático, considerando los contenidos temáticos de los Módulos II y III utilizando materiales concretos, para el desarrollo de sus competencias profesionales y la transformación de la práctica.
- Desarrollan habilidades y conocimientos docentes para diseñar estrategias constructivistas de enseñanza y aprendizaje aplicadas al logro eficaz de las competencias matemáticas en los niños de preescolar.
- Retoma los principios pedagógicos para el diseño de una situación de aprendizaje correspondiente a los aspectos de Número y Forma, espacio y medida para el fortalecimiento de las competencias profesionales.
- Diseña situaciones de aprendizaje a partir de alternativas didácticas propuestas para el desarrollo de competencias infantiles, utilizando como punto de partida la evaluación para la mejora de los aprendizajes.
- Diseña, aplica y evalúa situaciones de aprendizaje del campo formativo pensamiento matemático en sus dos aspectos: Número y Forma, espacio y medida con adecuaciones pertinentes acorde al PE 2011 para el fortalecimiento de las competencias matemáticas infantiles.

El **Módulo IV. Razonamiento matemático y resolución de problemas**, pretende acompañar a los docentes para que fortalezcan los fundamentos teóricos y asuman los principios pedagógicos en los que se sustenta el enfoque de resolución de problemas en educación preescolar y reconozcan su potencialidad para el desarrollo de los procesos centrales de competencias matemáticas, le ayuden a empoderarse del enfoque de la reforma 2011 y sus implicaciones en el campo formativo de pensamiento matemático, para reorientar su intervención pedagógica y de asesoría académica estableciendo espacios de reflexión para seleccionar las estrategias didácticas que le faciliten el desarrollo de sus competencias profesionales y comprendan la función de los problemas en el aprendizaje matemático, así como las condiciones que debe reunir el trabajo pedagógico para propiciar, mediante ellas, el razonamiento y la evolución de conceptos que poseen los niños en el aula, reflexionando sobre autores como: Irma Fuenlabrada, Francesco Tonnucci, Margarita Arce, Elena Bodrova, Luz Manuel Santos Trigo y sus respectivas aplicaciones e implicaciones en el nivel preescolar.

Además pretende que los docentes retomen los contenidos abordados en los Módulos I, II, III para el diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aprendizaje, como insumo para evaluar los aprendizajes y competencias desarrolladas en el diplomado.

Competencias docentes a desarrollar:

- Analiza y asume los principios pedagógicos del plan de estudio 2011 y los aplica para desarrollar competencias matemáticas en los niños y niñas.
- Comprende las bases teóricas necesarias para orientar la práctica docente y de asesoría con el enfoque de competencias, asumiendo la importancia que tienen los principios pedagógicos de la RIEB como condiciones esenciales para la transformación de la misma.

- Reflexiona sobre las acciones que realizan los niños y niñas para resolver problemas en diversas situaciones que implican el uso del número, la forma, el espacio y la medida.
- Identifica las consignas para trabajar los aspectos del pensamiento matemático y los retoma para el diseño de la situación de aprendizaje.
- Comprende que las interacciones espontáneas y las relaciones que el educando establece con los objetos del medio físico y social desde las etapas tempranas de su desenvolvimiento constituyen la base para potenciar los procesos centrales del pensamiento matemático.
- Reflexiona sobre las características de las actividades en las que los niños y niñas ponen en juego el pensamiento matemático para establecer las condiciones que requiere el trabajo y fortalece su intervención pedagógica para el razonamiento y la evolución de conceptos.
- Diseña, aplica y evalúa situaciones de aprendizaje que atienden y potencian las características y necesidades de aprendizaje y de desarrollo en el pensamiento matemático de sus alumnos y alumnas.
- Analiza e identifica aspectos y prácticas que favorecen o limitan el desarrollo de competencias matemáticas sobre nociones de número, forma, espacio y medida.
- Transforma su formas de asesorar a los profesores creando en todo momento oportunidades de aprendizaje interesantes y retadoras que propicien el logro de competencias fundamentales, partiendo siempre de los saberes y las competencias que poseen los maestros y maestras que atiende.
- Comprende que los recursos didácticos para propiciar las competencias matemáticas son múltiples y variados y que su valor educativo radica en el uso adecuado y en las competencias que se persigan.
- Selecciona y utiliza medios tecnológicos como recursos didácticos en su práctica docente para generar y fortalecer los aprendizajes esperados del campo formativo pensamiento matemático.
- Innova y comparte constantemente su práctica reflexiva con sus pares, la aplicación de las situaciones de aprendizaje diseñadas e identifica su propio proceso de aprendizaje para fortalecerlo.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Matemática Divertida: Una Estrategia para la enseñanza de la Matemática en la Educación Básica.

Ivanovnna Milqueya **Cruz** Pichardo
Departamento de Matemática, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
ivanovnnacruz@pucmm.edu.do

Resumen

Este taller consiste en la aplicación de algunos juegos didácticos y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las matemáticas en el Nivel Básico. Se darán estrategias de cómo crear actividades lúdicas para la enseñanza de la matemática del este nivel. Trabajaremos los aspectos principales que se deben tener en cuenta al momento de aplicar las actividades, seleccionar los recursos y evaluar. Se darán estrategias de cómo forma grupos cooperativos eficientes, los roles de cada miembro del grupo y las responsabilidades que tienen los docentes dentro de la formación y desarrollo del trabajo grupal.

Palabras clave: Nivel Básico. Juegos didácticos. Aprendizaje Cooperativo

Introducción

Nuestras aulas están llenas de estudiantes con distintos estilos de aprendizajes[1] tenemos el *sensitivos-intuitivos* que necesitan información externa o sensitiva (visual, auditiva) como la información interna o intuitiva (a través de memoria, ideas y lecturas). Están también los *visuales-verbales* que además de necesitar lo visual necesitan lo verbal (expresarse). Tenemos los *inductivos-deductivos* estudiantes se sienten a gusto y entienden mejor la información si está organizada inductivamente donde los hechos y las observaciones se dan y los principios se infieren o deductivamente donde los principios se revelan y las consecuencias y aplicaciones se deducen. Y los que son activos-reflexivos que la información se puede procesar mediante tareas activas a través de compromisos en actividades físicas o discusiones o a través de la reflexión o introspección. Con un modelo tradicional no podemos abarcar todos estos aspectos y por ende nuestros estudiantes no aprenden ciertos conceptos que luego le son necesarios para próximos temas.

Con los juegos y el Aprendizaje Cooperativo se pueden desarrollar un ambiente agradable, placentero para el aprendizaje donde no solo fijaríamos conceptos sino que ayudaríamos a los estudiantes a desarrollar otras áreas y funciones que como seres humanos necesitamos para relacionarnos el medio y las personas que nos rodean.

Los podemos utilizar en cualquiera de las etapas del proceso enseñanza- aprendizaje y tocamos los diferentes estilos de aprendizaje así como la formación en valores y destrezas motoras.

Juegos Didácticos

Clasificación de los juegos

Piaget (1966) presenta el desarrollo del juego en la vida del niño identificando tres maneras sucesivas del juego:

- Juegos prácticos: corresponde la etapa senso-motora. Comprende desde los 6 a los 18 meses y consiste en la repetición de secuencias bien establecidas de acciones, sin propósito alguno, sólo por el hecho de sentir placer al dominio de esas destrezas motoras. En la medida en que estas acciones empiezan a tener un propósito, los juegos prácticos se transforman en juegos simbólicos.
- Juegos simbólicos: corresponde a la etapa pre-operacional. Comprende desde los 2 años aproximadamente. Son aquellos en los que el niño disfruta de imitar acciones de la vida diaria, como comer, bañarse, hablar por teléfono, entre otros.
  A través de estos juegos se desarrolla la representación, la asociación, el lenguaje, la socialización y sirve de medio para canalizar emociones. Hacia los cuatro años aproximadamente el juego simbólico comienza a hacerse menos frecuente, esto ocurre en la medida en que el niño se integre a un ambiente real.
- Juego de reglas: corresponde a la etapa de operaciones concretas. Comprende desde los 6 a 11 años aproximadamente. Esta forma de juegos es más colectiva y está constituida por reglas establecidas o espontáneamente determinadas que se realizan con dos o más personas. El juego de reglas marca la transición hacia las actividades lúdicas del niño socializado, ya que en éstos se someten a las mismas reglas y ajustan exactamente sus juegos individuales los unos a los otros, a diferencia del juego simbólico en el que los

[1] Modelo de estilos de aprendizaje de Felder y Silverman. www.pcazau.galeon.com/guia_esti.htm

niños juegan cada uno para sí, sin ocuparse de las reglas de los demás.

Groos(1902), clasificó los juegos en dos grandes grupos:

Los de experimentación o funciones generales, que comprenden:

- Juegos sensoriales: auditivos, visuales, táctiles, silbidos. Por ejemplo juegos en los que la música nos guía o identificar figuras.
- Juegos motores: carreras, saltos. Por ejemplo el pañuelo, el primero que llegue a la meta, etc.
- Juegos intelectuales: en los que actúa la imaginación, la resolución de problemas, la curiosidad. Ejemplo formar figuras con otras, descripción de una figura.

Afectivos y ejercitación de la voluntad.

- Los juegos de funciones especiales: comprenden los juegos de persecución, de lucha, de ocultamiento, de caza, imitación, actividades familiares y sociales. Ejemplo los parches, imitaciones de juegos de mesa. Cacería de figura.

Chateau (1958) denomino a los juegos, que son simples ejercicios de las funciones, juegos funcionales. La actividad que comportan los juegos funcionales permite a cada función explorar su dominio y extenderse para originar nuevos resultados. Así se ha podido señalar que la aparición en el niño de toda función nueva da siempre lugar a múltiples juegos funcionales como el niño quisiera ¨ probar la función en todas su posibilidades ¨

También podríamos clasificar los juegos de la siguiente manera

- *Juegos creativos*: nos permiten desarrollar en los estudiantes la creatividad y bien concebidos y organizados propician el desarrollo del grupo a niveles creativos superiores. Estimulan la imaginación creativa y la producción de ideas valiosas para resolver determinados problemas que se presentan en la vida real. Existen varios juegos creativos que se pueden utilizar para romper barreras en el trabajo con el grupo, para utilizar como vigorizantes dentro de la clase y desencadenar un pensamiento creativo en el grupo de estudiantes.
- *Juegos didácticos*: El juego didáctico puede ser definido como el modelo simbólico mediante el cual es posible contribuir a la formación del pensamiento teórico y práctico de los/las estudiantes y a la formación de las cualidades que deben reunir para el desempeño de sus funciones: capacidades para dirigir y tomar decisiones individuales y colectivas, habilidades y hábitos propios de la dirección y de las relaciones sociales. Cuando creamos un juego debemos tener presente al grupo para qué grupo lo estamos preparando. Que característica tiene ese grupo, la cantidad de estudiantes que posee, las edades promedio y los intereses colectivos del mismo.
  Se diseñan fundamentalmente para el aprendizaje y el desarrollo de habilidades en determinados contenidos específicos de las diferentes asignaturas, la mayor utilización ha sido en la consolidación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades. Estos deben tener una correspondencia directa con los objetivos, contenidos y métodos de enseñanza y adecuarse a las indicaciones, acerca de la evaluación y la organización escolar
- *Juegos Profesionales*: son aquellos juegos que podemos comprar, que han sido elaborados por empresas especializadas. Estos pueden ser transformados y adaptados para su uso en el aula.

Efectividad de los juegos didácticos

Tenemos que entender que los juegos no son una estrategia de enseñanza nueva, pero si efectiva siempre y cuando se organicen con un propósito claro y de manera organizada.

Deben corresponderse con los objetivos, contenidos, y métodos de enseñanza y adecuarse a las indicaciones, acerca de la evaluación y la organización escolar.

Cada actividad de comprender los objetivos y reglas claras, ya que esto impedirá que se torne de un ambiente educativo a uno hostil y desordenado. Debemos preparar para cada juego una ficha de trabajo que comprenda:

- Los objetivos de la actividad
- La descripción y reglas del juego
- Los materiales a utilizar
- Debate o discusión que se realizara después de terminada la actividad
- Tiempo de duración
- Estructura del grupo
- Rúbrica de evaluación de la actividad.

Esto nos permitirá tener mayor control de la situación en momentos donde nuestra total atención es necesaria.

Elementos para el éxito del trabajo con los juegos didácticos

- Delimitación clara y precisa del objetivo que se persigue con el juego.
- Metodología a seguir con el juego en cuestión.
- Instrumentos, materiales y medios que se utilizarán.
- Roles, funciones y responsabilidades de cada participante en el juego.
- Tiempo necesario para desarrollar el juego.
- Reglas que se tendrán en cuenta durante el desarrollo del juego
- Lograr un clima psicológico adecuado durante el desarrollo del juego.
- Papel dirigente del profesor en la organización, desarrollo y evaluación de la actividad.
- Adiestrar a los estudiantes en el arte de escuchar

Aprendizaje Cooperativo

El aprendizaje Cooperativo (A.C) aportan a la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica una serie de estrategias que nos permiten obtener un mayor grado de motivación y atención por ende mejor aprendizaje. También nos permite dentro del salón de clases, crear grupos que trabajan juntos como un equipo para resolver problemas, completar tareas y alcanzar objetivos en común. Dentro de estos grupos cooperativos podemos encontrar unos niveles de igualdad y responsabilidad que nos permiten tener un mejor desempeño de las actividades.

Por lo tanto es importante denotar que para poder utilizar las estrategias que nos aporta el A.C. debemos formar grupos cooperativos. Según Artzt y Newman (1997), los factores que debemos tener presente al momento de crear ambientes cooperativos son:

- Los miembros del grupo deben sentirse parte de un equipo y tener una meta en común.
- Deben entender que el problema/actividad a resolver es común para todos.
- Deben tener en cuenta que el fracaso o el éxito es del grupo no de un individuo.
- Todos los miembros del grupo deben plantear soluciones y discutir el problema.

- Deben estar claros (todos los miembros del grupo) que el trabajo de cada miembro individual afecta a todo el grupo.

Formación de Grupos Cooperativos

Para lograr ambientes cooperativos necesitamos grupos que funcionen de manera integral, que cada miembro pueda suplir las necesidades, que como célula de trabajo tienen. Debemos seleccionar cada miembro de ese grupo tomando en cuenta el mecanismo de selección que vamos a utilizar.

Si los asociamos mediante las habilidades, características y aptitudes de cada individuo tendremos grupos heterogéneos, los cuales nos permiten mejores resultados ya que cada estudiante puede dar o recibir ayuda de otro miembro del grupo, pueden aprender de las diferencias étnicas que tienen. La dificultad que presenta este tipo de asociación es que debemos conocer las destrezas, habilidades de nuestros estudiantes.

Otro tipo de asociación es la de libre elección o al azar donde cada individuo selecciona su par o el maestro selecciona los estudiantes utilizando etiquetas o números que seleccionan introduciendo sus manos a una fundita. También podemos darles felpa de colores para que escriban sus nombres y se asocien por colores. La dificultad de este tipo de asociación es que cuando los alumnos eligen sus compañeros, normalmente eligen a sus amigos o pares muy parecidos a ellos, por lo tanto la mayoría de los grupos que se forman son homogéneos y a veces dejan estudiantes marginados. Hay que tener mucho cuidado con la formación de estos grupos, ya que aunque los estudiantes se sientes a gusto trabajando así, pueden llevar a indisciplina.

Roles dentro de los Grupos Cooperativos

Cada miembro de los grupos debe tener un rol, los cuales se asignan de manera interconectada y rotativa. Según Johnson, Johnson y Holubec (1992), los roles deberían ser:

- Compendiador: se encarga de resumir las principales conclusiones o respuestas generadas por el grupo.
- Inspector: se asegurará que todos los miembros puedan decir explícitamente como llegaron a las conclusiones o respuestas.
- Entrenador: corrige los errores de las explicaciones o resúmenes de los otros miembros.
- Narrador: pide a los integrantes del grupo que relacionen los nuevos conceptos y estrategias con el material aprendido previamente.
- Investigador-Mensajero: consigue los materiales que el grupo necesita. Se comunica con los otros grupos y con el profesor.
- Registrador: escribe las decisiones del grupo y edita el reporte del trabajo.
- Animador: refuerza las contribuciones de los miembros.
- Observador: cuida que el grupo esté colaborando de manera adecuada.

Dependiendo del tamaño del grupo un alumno puede asumir uno a más funciones.
Como docentes debemos tener en cuenta que la cantidad de miembros en los grupos afecta la habilidad productiva del mismo. Según Davidson (1990), los grupos ideales son de 3 a 4 integrantes. Las parejas son efectivas cuando se trabajan en grupos pero no en grupos cooperativos ya que tienen limitada interactividad y están afectados por la inasistencia de cualquiera de los miembros. Y si tiene muchos estudiantes es muy difícil que trabajen

cooperativamente.

Las Actividades Cooperativas

Otro factor que debemos tener pendiente al momento de crear ambientes cooperativos, son las actividades. Estas deben estar diseñadas teniendo en cuenta los siguientes factores:

- Especificar con claridad los propósitos del curso y la lección en particular.
- Tomar ciertas decisiones respecto a la forma en que se ubicará a los alumnos en grupos de aprendizaje previamente a que se produzca la enseñanza.
- Explicar con claridad a los estudiantes la tarea y la estructura de la meta.
- Monitorear la efectividad de los grupos de aprendizaje cooperativo e intervenir para promover asistencia en las tareas, responder preguntas, enseñar habilidades e incrementar las habilidades interpersonales del grupo.
- Evaluar el nivel del logro de los estudiantes y ayudarles a discutir que tan bien colaboraron los unos con los otros.

Dentro del aprendizaje cooperativo hay una diversidad de técnicas que se pueden utilizar en el proceso de enseñanza/aprendizaje. Nos centraremos en la técnica de Aprendiendo Juntos (Johnson y Johnson, 1975), “es uno de los métodos de aprendizaje cooperativo que más cerca se encuentre de la cooperación pura” (Serrano, González, Pons, 2008, pág. 55), también conocido como *Learning Together*.

Cuando vamos a desarrollar actividades cooperativas el material que les entregamos a los estudiantes deben contener:

- *Los roles del grupo*, debe estar clara cada función de los miembros. Cuáles son sus responsabilidades para con el grupo
- *Las normas de trabajo*, como debe manejarse el grupo dentro del aula. Como deben interactuar fuera de sus grupos, tanto con el profesor/profesora como con los demás grupos que conforman el aula.
- *Las competencias y propósitos a desarrollar*, qué queremos lograr con la actividad, que contenidos y destrezas deseamos que nuestros estudiantes alcancen con dicha actividad.
- *Los recursos*, que materiales van usar para llegar a su meta u objetivo.
- *La actividad a desarrollar*, las preguntas a contestar, los ejercicios a realizar, la lectura a analizar, etc.

Aulas letradas

Luego de terminar el trabajo dentro del grupo debemos socializar el resultado final de la actividad con los demás. Esto lo podemos hacer mediante lluvias de ideas o mediante el uso del aula letrada. Podemos crear afiches con preguntas establecidas en el material, que les entreguemos a los estudiantes, colocarlos en el aula y hacer una rotación de grupo. Cada grupo analizara cada afiche y dará su opinión de la estrategia que utilizó el grupo en cuestión o el resultado obtenido, de esta manera se afianzarán los conceptos trabajados y nos permitirá hacer el cierre de la actividad.

Evaluación

Todo lo que hacemos en el aula, en grupos cooperativos, es importante. Para evaluar podemos:

- *Evaluar el trabajo del grupo*. Como profesores evaluamos cada situación dentro del grupo y los alumnos evalúan como fue el trabajo de cada miembro del grupo. Esto podría ser utilizando una escala para que indiquen que tan eficiente fue el trabajo tanto de sus compañeros como de ellos mismos
- *Pruebas grupales e individuales.*
- *Murales de desempeño*, donde se registran las cantidades de aciertos de los grupos. Estos murales pueden ser por temas o por personajes históricos relacionados con el tema que estamos tratando. Este último es interesante ya que no solo tendremos el factor motivación sino que también trabajaremos un aspecto importante como es la historia de las matemáticas. Crearemos un mural con el nombre del matemático(a) que trabajo con el concepto y colocaremos datos de su biografía. Luego pondremos los nombres de los grupos y llevaremos el desempeño de ellos. Al final le entregaremos un certificado a los grupos con el nombre del matemático(a).
- *Competencia entre grupos*, podemos crear competencias, donde mezclemos los miembros de los grupos y mediante juegos de mesas, preguntas, evaluar el aprendizaje de los conceptos. Esto es una manera divertida de hacerlo, ya que la mayoría de los niños y niñas les gusta jugar. Esta estrategia no sólo evalúa sino que afirma los conceptos y les permite hacer la transición de memoria de corto plazo a largo plazo.

Actividades

Primera etapa. Selección de los miembros del grupo.
A cada niño y niña se le entregará un número de tres dígitos y un tira de lana. En el aula en cada mesa habrá cuentas de colores (blanca, azul y roja), cada color indica un nivel de posición.

Tabla 1

Indicación del color y el valor posicional.

Centena	Decena	Unidad
Roja	Azul	Blanca

Fuente: elaboración propia

Formarán sus pulseritas y luego mediante la dinámica de asociación pediremos que se mezclen. Podemos decidir que se mezclen por decenas, o centenas hasta por unidad. Depende cómo profesor lo que esté buscando. *Sugerencia*: Pida que se mezclen de diferentes formas hasta encontrar el grupo que les de tranquilidad. Puede llevar las pulseras formadas.

Segunda etapa. Desarrollo de las actividades

Buscando el Número de Timoteo. Esta actividad consiste en utilizar una tabla de 100 y pistas (características del Número) para encontrar cuál es el número de Timoteo (ver apéndice A y B). Los contenidos que se trabajan son concepto de Número primo, compuesto, par, impar. Además se trabaja mayor que y menor que, así como posición y ecuaciones simples para resolver problemas.

Se le entregara una ficha a cada grupo que contiene las reglas y los roles del grupo en la parte delantera (figura 1) y en la descripción del trabajo en la parte de atrás, además se les entrega los materiales necesarios para desarrollar la misma.

Figura 1. Parte delantera de ficha

Tabla 2:

Ficha de trabajo de la actividad Buscando el Número de Timoteo

Tarjeta de trabajo: Los enteros positivos	
Conceptos: par, impar, múltiplo, dígitos, suma y diferencia **Propósito:** Identificar números pares e impares **Objetivo de la actividad:** El grupo debe encontrar un número específico en la tabla de cien siguiendo las claves dentro del sobre dado. Estas claves ayudan a eliminar o seleccionar posibles números. El número encontrado debe cumplir todas las condiciones especificadas en las claves. **Material** Tabla de Cien Sobre con Claves Círculos de colores adhesivos Claves en blanco	**Actividad 1:** En esta parte de la actividad el grupo encuentra el número que satisface las claves incluidas en el sobre. Tomando un turno a la vez cada miembro: - saca una clave a la vez - la lee a su grupo le propone al grupo los números de la tabla de cien que la clave selecciona o elimina. Cuando el grupo se pone de acuerdo marca en la tabla de cien los posibles números. **Actividad 2:** Use las claves en blanco para generar nuevas pistas para encontrar un número en la tabla de cien. Crean un afiche que contenga las estrategias de cómo saber si un número es par o impar y ejemplos.

Fuente: elaboración propia

Viajando por la Tabla. Esta actividad donde mediante un tablero gigante (ver apéndice C) y unos dados se presentará una estrategia divertida para la enseñanza de la tabla de multiplicar para niños y niñas de edades de 5 y 6 años.

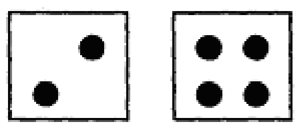
Los estudiantes se agrupan en 4 equipos (esto depende de la cantidad de estudiantes), se selecciona un capitán y una ficha de cada equipo. El capitán es el que selecciona a su compañero del grupo que tira el dado y responde la pregunta (incluyéndolo a él y a la ficha). La ficha es el estudiante que camina en el tablero.
Los materiales que se necesitan para esto son cartulinas para hacer las casillas y dos dados. A continuación presentamos las reglas del juego:

Meta: Ser el primer equipo llegar en la meta gana.

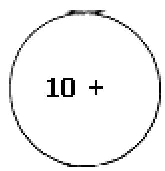
Para Iniciar: Cada jugador- ficha se coloca en Inicio **y** lanzan el dado para determinar qué equipo sale primero.

Reglas

Cuando al jugador le corresponda su turno procederá a lanzar los dados. Si por ejemplo le sale:



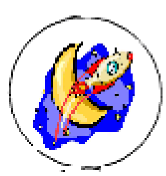
Esto indica que se moveremos 6 espacios a la casilla que le corresponda. Por ejemplo si sale de inicio y caerá en la casilla



Entonces combinamos la combinación de la operación que nos indica la casilla con la cantidad que nos indican los dados.

$$6 + 10 = ?$$

La operación y respuesta se dirán en voz alta. Si la respuesta es correcta ha ganado la casilla sino la respuesta es incorrecta debe volver al inicio o a la casilla de donde vino. Si cae en una casilla



Está seguro es un comodín, no tiene que responder y ha ganado la casilla. Si cae en una casilla de penalidad debe seguir las instrucciones que ella indica así como si cae en una casilla de privilegios.

Cajitas de Origami[2]. En esta actividad los estudiantes construirán una cajitas de origami siguiendo unas instrucciones (ver apéndice D), luego estimaran el volumen de ellas utilizando diferentes recursos y planteando sus estrategias para realizar la estimación. Los estudiantes reciben una ficha de trabajo donde en la parte delantera tiene las normas y reglas (ver figura 1) y en la parte de atrás las indicaciones de lugar (ver tabla 3) y los materiales necesarios para realizar la actividad.

Tabla 3:

Ficha de trabajo de la actividad Cajita de Origami

Tarjeta de trabajo: Estimación de volumen	
Conceptos: estimación de volumen **Propósito:** Estimar el volumen de la cajita. **Objetivo de la actividad:** El grupo debe desarrollar una estrategia para estimar el volumen de las cajitas **Material** Hoja con instrucciones para construir cajitas de origami Papel cuadrado de diferentes colores (miden de largo 10, 14, 18, 22 cm.) Habichuelas Cubitos de cm Marcadores Cartulina	**Actividad 1:** Utilicen la hoja de instrucciones para construir las cajitas de origami. Cada persona en el grupo debe hacer una de las cajitas. Después midan y anoten el volumen de cada cajita utilizando dos maneras: • Con habichuelas • Con cubitos centímetros Luego, usando los datos obtenidos, desarrollen una estrategia para predecir los volúmenes de cajitas de diferentes tamaños de los que tienen hechos – cajitas que sean más grandes, más chiquitas, y cajitas de tamaño medianos o que estén entre las cajitas ya construidas. **Actividad 2:** En una cartulina el grupo debe escribir claramente y en detalle suficiente para que la clase pueda leer lo que han escrito sin necesitar explicaciones orales. En esta cartulina deben escribir lo siguiente: Una estrategia de conteo que su grupo utilizó correctamente para determinar el volumen de una de las cajas que construyeron. Dos estrategias de predicciones con sus justificaciones (utilizando ya sea un listado de datos, o gráficas, o dibujos, etc.) de cómo hallar el volumen de cajitas que no fueron construidas.

Muñecos Glotones. Consisten en el uso de pelotas de colores, música y los muñecos para trabajar con los conceptos de probabilidad. El juego consiste en insertar, por turno, la mayor cantidad de bolitas o pelotas dentro de la boca del muñeco hambriento. Se colocaran 3 o 4 cajas (muñecos) a una distancia prudente y una fila de niños en correspondencia a cada caja. Los primeros niños de cada fila, lanzará la bolita, insertándola dentro de la boca del muñeco en un tiempo determinado. Al finalizar la

[2] Esta actividad es una adaptación de Origami estimation del grupo Teachers Development Group

ronda, cada uno deberá contar cuántos aciertos obtuvo y luego comparar quien obtuvo mayor, menor o igual cantidad de aciertos. Luego con cada muñeco se determinara cuál fue el color que más le gusto y por qué. Y con ayuda de las pelotas o bolitas se trabajará el concepto de probabilidad.

Referencias y Bibliografía

Cartoon Corner. (2007). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Artzt, A. F., & Newman, C. M. (1997). *How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class* (2nd ed.). Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bally, G. (1992). *El juego como expresión de libertad.* México: Fondo de cultura económica.

Barson, A. (1992). *Mathematics Games for fun and practice*. Editora Addison-Wesley publishing.

Camilli, T., & Tuttle, W. (2005). *Math Cooperative learning Cards.* California: Evans-Moor Corp.

Chateau, J. (1958). *Psicología de los juegos infantiles.* Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Cohen, E. (1994). *Designing group work: Strategies for heterogeneous classrooms.* New York: Teachers College Press.

Davidson, N. (1990). Cooperative Learning research in Mathematics. *International Convention on Cooperation in Education.* Baltimore.

Erickson, T. (1997). *Háganlo Juntos: Problemas de matemáticas para grupos – Grados 4-12.* (D. Martínez, Trad.) Berkeley: EQUALS.

Groos, K. (1902). *The play of man.* Appleton, New York.

Jonhson, D., & Johnson, R. (1975). *Learning Together and Alone: Cooperation, Competition and Individualization.* NJ: Prentice Hall.

Jonhson, D., Johnson, R., & Holubec, E. (1992). *Advanced cooperative learning* (2nd ed.). Edina: Interaction Book Company.

Piaget, J. (1966). *The psychology of the child.* New York: Basic Books.

Serrano, J. M., González, M., & Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas* (1ra ed.). Murcia: Universidad de Murcia. Servicio de publicaciones.

Apéndice A

Tabla de Cien

Tabla de Cien

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Apéndice B

Fichas de pistas

El número de Timoteo no esta localizado ni al borde ni en una esquina

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

El número de Tmoteo no esta localizado ni al borde ni en una esquina

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

La diferencia de los dígitos del número de Timoteo es tres

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

El número de Timoteo no es un múltiplo de tres,cinco o siete

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

El número de Timoteo es menos de cincuenta

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

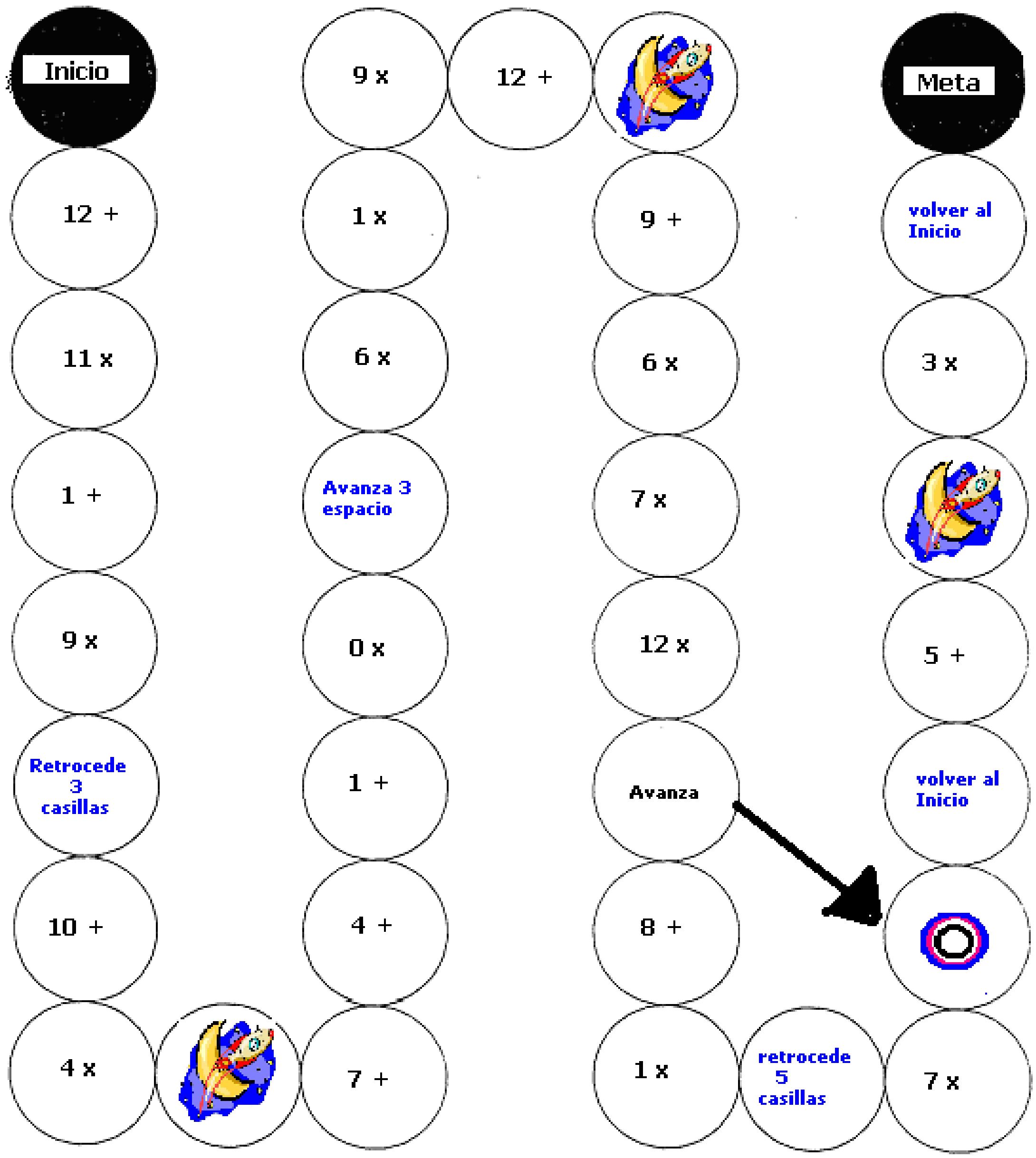
La suma de los digitos del número deTimoteo es once

¡Ayúdale a tu grupo a encontrar el número de Timoteo en la tabla de cien!

Haganlo Juntos. Equal, Lawrence Hall of Science

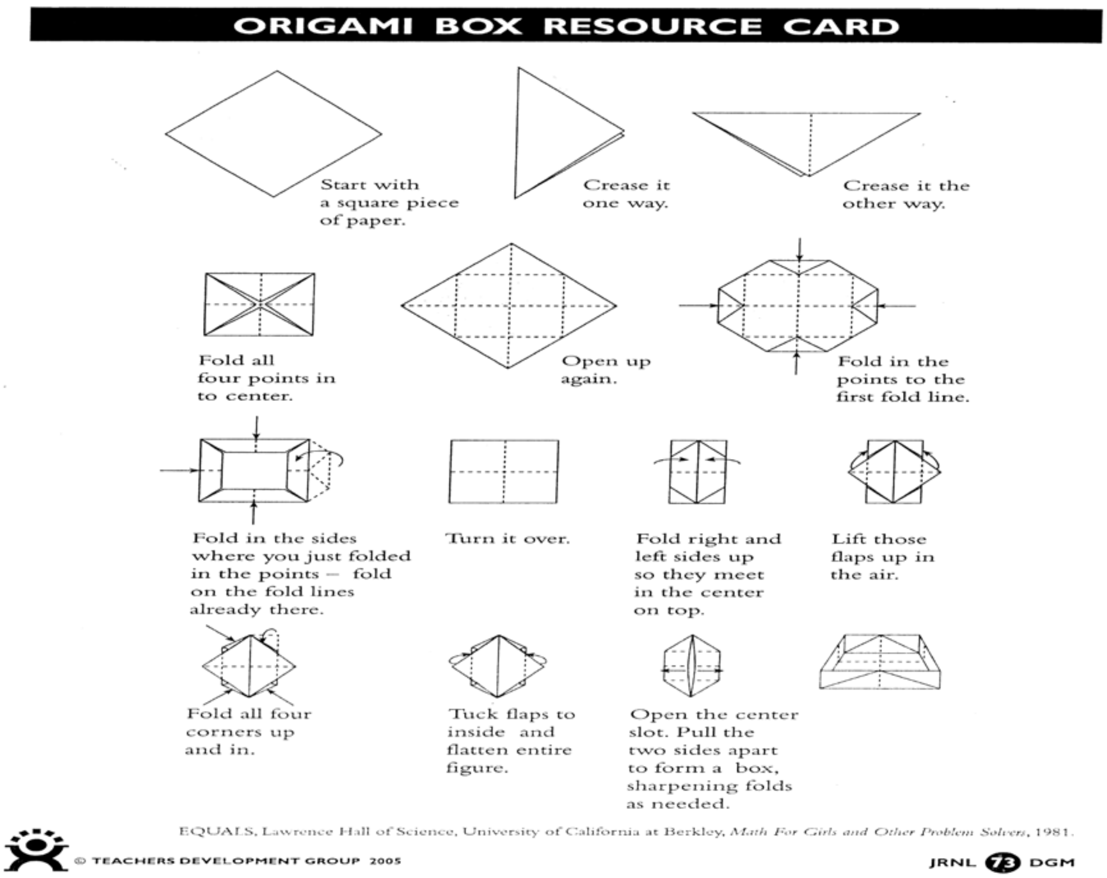
Apéndice C

Tablero Viajando por la tabla



Apéndice D

Instrucciones Cajita de Origami



I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Modelagem computacional para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia

Maria Madalena **Dullius**
Centro Universitário Univates
Brasil
madalena@univates.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta para exploração de equações diferenciais ordinárias a partir de situações-problema utilizando como ferramenta de apoio o software Powersim. O estudo é parte integrante de uma tese de doutorado e foi desenvolvido com alunos de diferentes cursos de Engenharia. A abordagem teórica que fundamenta o estudo é a aprendizagem significativa de Ausubel e a teoria interacionista de Vygostky. Resultados coletados em práticas pedagógicas realizadas com estudantes dos cursos de Engenharias e Química Industrial indicam que a metodologia proposta é um meio viável em direção a uma aprendizagem significativa de equações diferenciais.

Palavras-chave: **e**quações diferenciais ordinárias, ensino, aprendizagem, software Powersim, graduação.

Introdução

Estudos apontam que a metodologia dominante no contexto do ensino de equações diferenciais (EDs) está fortemente voltada para a resolução analítica, mas os recursos computacionais hoje disponíveis permitem ir além da mera aplicação de técnicas, podendo auxiliar os alunos na interpretação das equações diferenciais e suas soluções.

Trabalhando com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia (de Computação, de Automação e Controle, de Produção e Ambiental) e Química Industrial notamos a insatisfação dos alunos por não perceberem importância desse conteúdo para o seu curso. A cada nova turma, repetem-se os questionamentos: por que fazer a mão essas contas enormes se existem máquinas para isso? Por que "decorar" tantas fórmulas, se o dia que precisar posso buscar em livros ou na *internet*? Por que preciso saber tudo isto, afinal?

Comparando o contexto de ensino das EDs hoje em dia com o que se tinha na metade do século passado, percebemos que os tipos de alunos são outros, as necessidades e exigências do mercado de trabalho não são as mesmas, assim como as ferramentas disponíveis, mas a maioria das aulas continuam, em essência, sendo ministradas da mesma forma. Os currículos precisam ser repensados e os avanços tecnológicos considerados. Em função dessa problemática, nos propusemos a elaborar, aplicar e avaliar uma abordagem pedagógica que auxilie os alunos na superação das dificuldades e proporcione condições favoráveis à aprendizagem significativa de EDs.

Para o desenvolvimento do trabalho elaboramos uma proposta de ensino focada na solução de situações-problema com o uso de recursos computacionais, buscando trabalhar as EDOs de forma contextualizada e com abordagens analítica, numérica e gráfica, contando com a ajuda de recursos computacionais para facilitar o processo (Dullius et al, 2011).

Na elaboração do material instrucional levou-se em conta os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003). A metodologia empregada na prática pedagógica teve como suporte a Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky (2000 e 2003) especialmente no que diz respeito à interação professor-aluno-material didático no ambiente com recursos computacionais.

Na abordagem do conteúdo de EDOs, nos concentramos nos seguintes pontos: a) representar matematicamente, por meio de EDOs, situações-problemas; b) favorecer o domínio de técnicas de soluções analíticas de EDOs, sabendo classificá-las segundo critérios de ordem e linearidade; e c) obter informações sobre o comportamento das soluções de EDOs sem resolvê-las analiticamente, por meio da análise semiquantitativa de variáveis e parâmetros. Nesse último ponto, foi explorado o impacto da alteração de valores de variáveis e parâmetros em representações gráficas das soluções das EDOs trabalhadas.

Apresentação da proposta

Ao modelar um sistema podemos representá-lo de várias maneiras e uma destas é através da elaboração de diagramas de fluxo utilizando a metáfora de Forrester[1]. Forrester considera que existem dois tipos fundamentais de variáveis associados a sistemas dinâmicos: os **níveis** e as **taxas**. Estes podem ser simulados usando o software Powersim. O Powersim usa a metáfora de tanques, torneiras e canos. O tanque (estoque ou nível) representa uma quantidade cujo valor inicial pode crescer, decrescer ou permanecer igual. Uma torneira (taxa) conectada a um tanque decide quão rapidamente a quantidade no tanque varia. As constantes são representadas por um losango. O Powersim permite a construção de um modelo através da conexão desses objetos básicos e, fornecendo apenas as relações algébricas o programa gera as equações diferenciais que regem o modelo. Também permite a obtenção de gráficos de quaisquer variáveis contra outras, e contra o tempo, e gera uma tabela de dados.

1 Forrester, J. W (1990). *Principles of systems*. Portland, OR.: Productivity Press.

Na sequência apresentamos um exemplo de atividade explorada com o *software* Powersim. Por meio do estudo de uma situação-problema que envolve o decaimento radioativo propúnhamos investigar o comportamento da solução e da taxa de variação das grandezas relevantes nesta situação de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica.

Exemplo: Decaimento radioativo

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam 1.000.000 átomos radioativos em certa amostra, pode-se simular esta situação no Powersim, conforme as Figuras 1 e 2, e explorar questões como:

1. O número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante?

2. O gráfico do número de átomos contra o tempo, medido em anos.

3. O gráfico da taxa de variação do número de átomos em relação ao número de átomos.

4. O gráfico da taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo.

5. Quantas horas são necessárias para que o número de átomos seja reduzido a 25% da quantidade inicial?

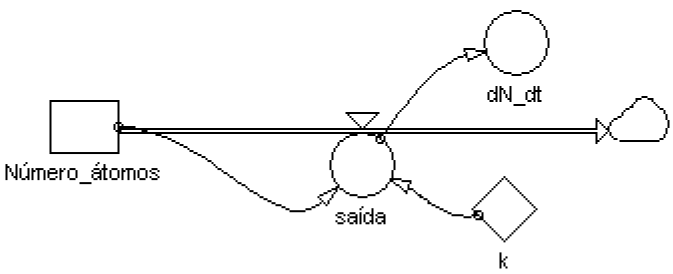


Figura 1. Diagrama que representa uma situação de decaimento radioativo.

Após abordar as questões acima para contextualizar o conteúdo, explorava-se a equação que o Powersim gerou, *taxa = k*Número_átomos.* Nesse momento destacávamos para os alunos que todas as situações em que a taxa de variação de certa quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade existente no instante *t*, pode ser descrita pela equação diferencial $\frac{dN}{dt}=kN$

Somente após essas análises passávamos à resolução analítica da EDO pelo método da separação de variáveis para comparar resultados e procedimentos.

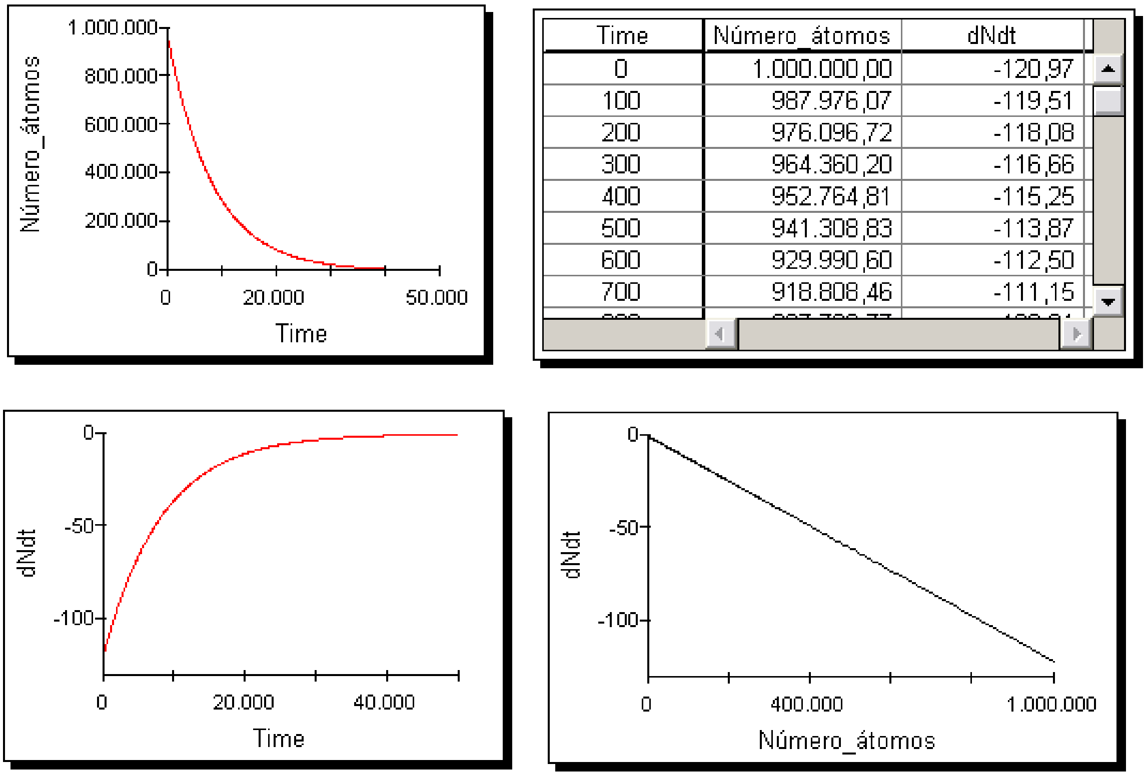


Figura 2. Dados sobre o decaimento radioativo.

Atividades a serem desenvolvidas

A atividades serão desenvolvidas em um laboratório de informática com instalação do software Powersim, também é importante um datashow para que os participante possam acompanhar a construção dos modelos. O número de participantes não deve ser maior que 30 para conseguirmos acompanhar as construções e fazer atendimentos individuais. As atividades consistem na construção de modelos, simulações e interpretação das situações-problema exploradas durante o desenvolvimento da proposta.

Na Figura 3, apresentamos uma situação onde o nível representa uma população, a taxa representa nascimentos desta população e o k é a constante de crescimento. As setas que ligam a população e o k com a taxa, indicam que a taxa de nascimentos depende do tamanho da população e do valor do k. A nuvem representa uma "fonte" fora do sistema onde o fluxo começa e não existe um ícone específico para criá-la, ela surge junto com o ícone da válvula (torneira). Se a válvula é de entrada a nuvem representa uma "fonte" e aparece no início da válvula e se esta for de saída, a nuvem representa um "sumidouro" onde o fluxo termina, e aparece no final da válvula.

Vamos construir o diagrama representado na Figura 3, considerando que estamos trabalhando com uma população de coelhos, cuja quantidade inicial é de 100 coelhos e esta população está crescendo a uma taxa 8% ao ano.

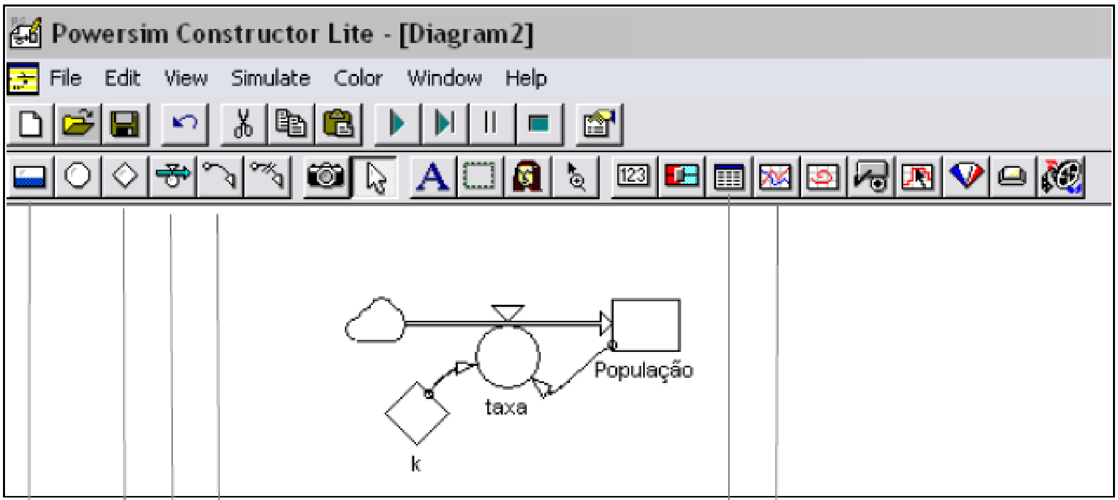


Figura 3. Tela principal do *software* Powersim com um exemplo de crescimento populacional.

Para inserir os valores das constantes e variáveis no diagrama, clicamos duas vezes no objeto, por exemplo o tanque, e abre uma janela, conforme a Figura 4. Digitamos o valor e clicamos em OK para confirmar. Quando definimos o valor de um objeto que possui dependência de outro, por exemplo a taxa, precisamos definir como estes se relacionam. Veja a Figura 4.

Podemos construir tabelas e gráficos referentes a esta situação. Para tal, selecionamos o ícone correspondente, conforme Figura 3 e depois clicamos duas vezes sobre o gráfico ou tabela para definir as variáveis.

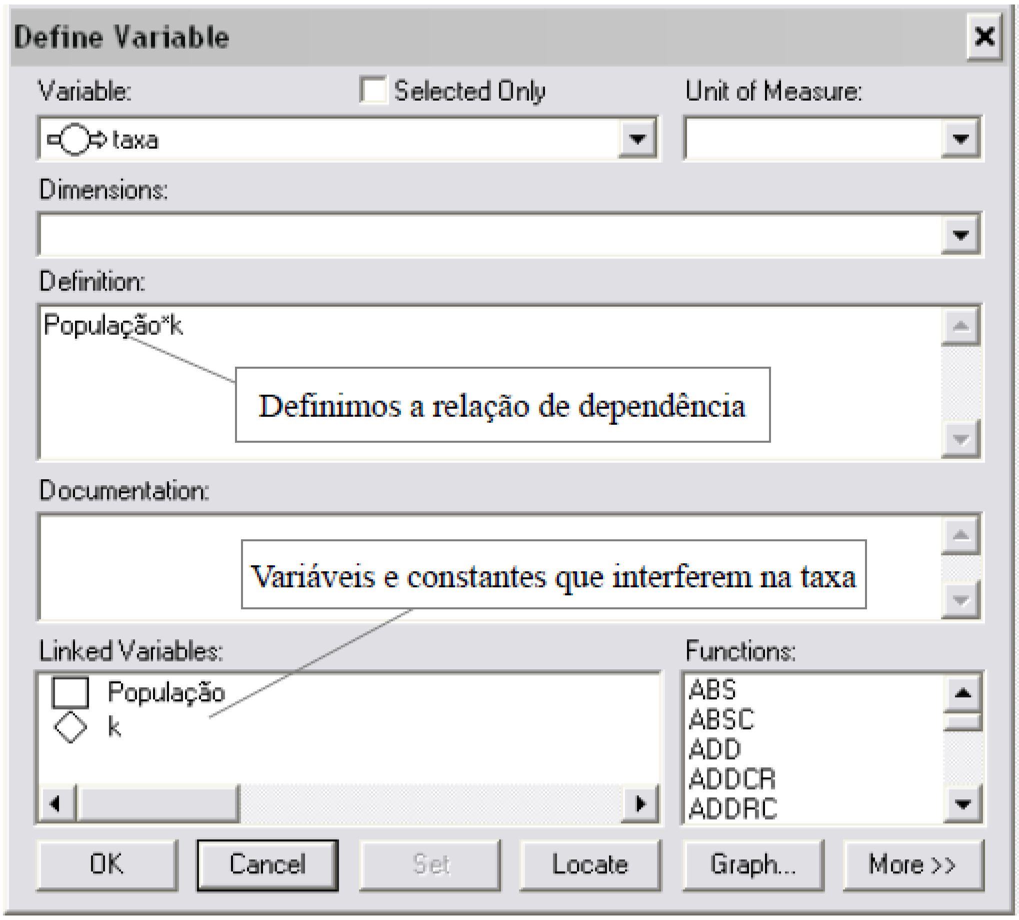
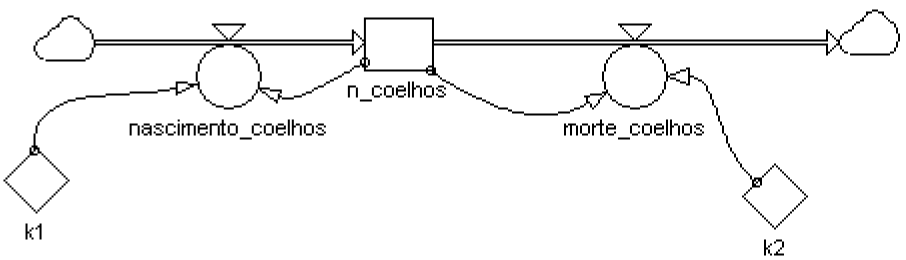


Figura 4. Tela onde definimos os valores e funções das constantes e variáveis.

Agora consideremos também que exista uma taxa de morte desses coelhos a um percentual de 2%. Podemos representar esta situação conforme diagrama da Figura 5, onde



k_1 e k_2 são constantes associadas às taxas da natalidade e mortalidade da população.

Figura 5. População com taxa de nascimento e taxa de morte.

Atividade A

Considere um tanque com uma quantidade inicial de 100.000 litros de água, em que há um furo na base por onde, a cada hora, sai 10% da água existente no tanque.

I. Esboce o gráfico da **quantidade de água no tanque** em função do tempo.

II. Construa, com auxílio do *software* Powersim, um diagrama para representar esta situação. Note que o furo na base é representado por uma torneira que retira água do tanque.

III. Construa o gráfico do item I com auxílio do Powersim.

IV. Se considerarmos o tempo em horas, é correto afirmar que a quantidade de água que sai do tanque a cada hora é a mesma? Justifique sua resposta.

Verificando as equações geradas pelo programa, encontraremos a equação $taxa = Qágua * k$. A taxa significa a taxa de variação instantânea que pode ser descrita pela derivada, portanto, temos:

$\frac{dQ}{dt} = kQ$, onde Q representa a quantidade de água no tanque e $\frac{dQ}{dt}$ a taxa de variação da quantidade de água no tanque em função do tempo. A Equação informa que **a taxa de variação da quantidade de água no tanque em relação ao tempo é proporcional a quantidade de água existente no instante t**.

Esta Equação é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (Q).

V. Acrescente, no diagrama do Powersim, uma torneira colocando água no tanque a um fluxo de $1.000\, litros / hora$. O que acontece com a quantidade de água no tanque a medida que o tempo passa?

VI. Suponha que o tanque de capacidade total de 100.000 litros se encontra, no instante inicial, com 50.000 litros. Escolha valores para a taxa de entrada e saída de água tais que:

a) a quantidade de água no tanque seja menor que 100 litros em aproximadamente 20 horas.

b) o tanque encha em aproximadamente 25 horas.

c) o nível de água do tanque não se altere.

Atividade B

Estudo da variação da população do Estado do Rio Grande do Sul e do Brasil em torno do ano 2000.

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade. Por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies.

I. De acordo com os dados do censo do IBGE, realizado em 2000, a população do RS era de 10.187.798 e a taxa de crescimento anual da população, aproximadamente 1,2%. Faça a simulação no *Powersim*.

a) Verifique o tamanho da população do RS em 2020, se continuar com este crescimento.

b) Esboce o gráfico da variação da população em relação ao tempo *t*.

c) De acordo com o censo de 2007, a população do RS é de 10.582.840. Os resultados obtidos no *Powersim* estão próximos desse valor?

Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus, que corresponde ao que acabamos de explorar. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, pois **a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t**. O modelo malthusiano descreve como as populações crescem ou decrescem quando nada mais acontece (ausência de quaisquer fatores perturbadores) e mesmo sabendo que existem estes fatores, o modelo nos dá uma descrição razoável para o crescimento populacional dentro de seu contexto de validade.

O modelo exponencial ajustou-se ao crescimento da população mundial e da população de várias regiões muito bem durante décadas, e mesmo séculos, mas com o tempo as taxas de crescimento relativo tendem a diminuir. É o que também podemos verificar com a população do RS. O modelo exponencial deve falhar em algum momento, pois ele prevê que a população continuará a crescer sem limites à medida que o tempo passa, e isto não pode ser verdade para sempre. As populações crescem dentro de sistemas ecológicos que podem somente suportar um certo número de indivíduos ou ainda, o crescimento pode ser inibido por efeitos da concentração, emigração, doença, guerra, falta de alimentos, entre outros. Devemos reconhecer que um modelo mais realístico deve refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento foi formulada por Pierre F. Verhurst, em 1837. Ele é chamado o **Modelo Logístico** ou **Modelo de Verhulst-Pearl**. Este modelo incorpora fatores limitantes ao crescimento desenfreado da população em estudo, pois supõe que, vivendo num determinado meio, uma população deverá crescer até um limite máximo sustentável, ou seja, tende a se estabilizar.

No modelo logístico, a taxa de variação da população pode ser expressa por: $\frac{dP}{dt}=kP-\frac{k}{L}P^2$; onde k é coeficiente de crescimento (este coeficiente é específico de cada população e é calculado baseado no índice de mortes e nascimentos da população em estudo, além de outros fatores como alimentação disponível) e L é a capacidade de suporte populacional do meio, ou seja, o nível máximo de população sustentável.

II. Em 1950, a população do Brasil era de aproximadamente 51,944 milhões de pessoas, simule o modelo logístico no *Powersim*, sabendo que $k=0.04182402$ e $L=248.656$

a) O que acontece com a população a medida que o tempo passa?

b) Faça uma análise da taxa de crescimento da população.

c) De acordo com o censo do IBGE[2], em 2000 a população do Brasil era de 169.799.170 pessoas e, em 2007, de 183.987.291 pessoas. Estes valores aproximam-se com os do modelo logístico?

d) Sabendo que em 1950 a população do Brasil estava crescendo a uma taxa de 3,2%. Simule esta situação no Powersim usando o modelo de Malthus e compare com o modelo logístico.

e) Sabendo que em 2000 a população do Brasil estava crescendo a uma taxa de 1,48%. Simule esta situação no Powersim usando o modelo de Malthus e veja o tamanho da população em 2007. É uma aproximação razoável?

Atividade C

Um problema de mistura pode ser representado por um tanque preenchido, até um nível especificado, com uma solução que contém uma quantidade conhecida de substância solúvel (por exemplo cloro). A solução completamente misturada flui do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida de uma substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não ser diferente da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. A descrição matemática desta situação pode ser representada por

$$\frac{dQ}{dt} = taxadeentrada - taxadesaída$$

Este tipo de problema serve como modelo para muitos outros fenômenos: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea, migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, reações químicas, entre outros.

Consideremos que um tanque contenha 500 litros de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma certa quantidade de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 *ℓ/min*; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 3 *kg/ℓ*. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa de entrada. Supondo que o tanque contenha inicialmente 50 *kg* de sal, estime a quantidade de sal no tanque a longo prazo. Simule esta situação no *Powersim.*

Resultados e conclusões

Em nossa proposta consideramos as EDs como um instrumento para explorar modelos e resolver problemas e procuramos abordar, equilibrada e simultaneamente, representações gráficas, numéricas e simbólicas das equações e respectivas soluções. Buscamos uma abordagem mais qualitativa das EDs, trabalhando o conteúdo com maior ênfase na contextualização através de situações-problema passíveis de serem representadas por meio de equações diferenciais. No delineamento das atividades, procuramos explorar também

2 www.ibge.gov.br

questões conceituais, de modo a auxiliá-los a dar significado às EDOs e às suas soluções. Nosso intuito foi estimular os estudantes a mudarem o foco da simples manipulação analítica das equações, para a compreensão de seu caráter representativo. Inicialmente exploramos a interpretação das EDOs e o comportamento das soluções, contando com a ajuda de recursos computacionais para facilitar e agilizar o processo e somente depois abordamos as técnicas de solução analítica.

Após a abordagem qualitativa da ED, passávamos à resolução analítica, e explorávamos diversos problemas que podem ser tratados com a ED em estudo. Por exemplo, discutíamos diversas situações em que a taxa de variação da quantidade em função do tempo é proporcional à quantidade existente num determinado instante de tempo t, como situações de decaimento radioativo, absorção de medicamentos, juros compostos e reações químicas.

Em relação à proposta das atividades, podemos observar que os alunos, de modo geral, mostraram-se satisfeitos com a resolução de situações-problema em sala de aula, pelo fato de poderem ver as aplicações e implicações dos aspectos teóricos, facilitando o estabelecimento de relações entre o conhecimento novo e os subsunçores adequados, em sua estrutura cognitiva. Porém, sentiram muitas dificuldades para as interpretações que lhes eram requeridas e quatro meses, que é a duração de uma disciplina, é pouco tempo para desenvolverem esta capacidade de tal forma a produzir resultados satisfatórios em termos de aprendizagem significatica do conteúdo.

Referências

Ausubel, D. P. (2003) *Aquisição e Retenção de Conhecimentos*: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Platano, 226p.

Dullius, M. M., Araujo, I. S. & Veit, E. A. (2011). Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: um experiência em Cursos de Engenharia. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), 24, 17-42.

Vygotsky, L.S. (2000). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 77p.

Vygotsky, L.S. (2003). *Pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria
Brasil
leivasjc@unifra.br

Resumen

A oficina tem por objetivo empregar a metodologia da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de Geometria, em conteúdo de geometria plana, utilizando o GeoGebra. Busca-se a compreensão do significado dessa metodologia à luz de alguns autores. Entendemos como problema qualquer atividade que possa chamar atenção dos estudantes para resolvê-la. Dessa forma, atividades de construções geométricas, usualmente realizadas com instrumentos como régua e compasso, e resolvê-las explorando o software, podem contribuir para a formação do professor de Matemática e proporcionar novas formas de aprendizagem. Propõe-se para a oficina seis problemas de Geometria Plana para serem resolvidos no GeoGebra, seguindo a metodologia da resolução de problemas. A aplicação dessa sequência de problemas junto a estudantes de uma disciplina de mestrado demostrou que a metodologia utilizada, juntamente com esse software, foi relevante para a aprendizagem de conceitos geométricos de inscrição e circunscrição em triângulos.

Palabras clave: resolução de problemas, GeoGebra, geometria plana, educação matemática, formação de professores.

Introdução

No Brasil um movimento que tem, de certa forma, estimulado professores e estudantes ao ensino e à aprendizagem são as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBEMEP), inclusive com publicação sugerindo atividades que podem ser realizadas por professores na preparação de seus alunos para realizar as provas (Wagner, 2013). Propõe-se realizar uma oficina na resolução de seis problemas, retirados dessa publicação, envolvendo construções geométricas planas de lugares geométricos, a ser realizada com base na metodologia da resolução de problemas, empregando o software GeoGebra.

Ao propor a resolução dos problemas, acredita-se que os participantes da oficina poderão adquirir algumas habilidades que o software desenvolve como: percepção e visualização. Além disso, poderão utilizar posteriormente tanto a metodologia, quanto o conhecimento desse software, na elaboração e aplicação de outras atividades de acordo com o interesse e o nível de escolaridade em que cada um atua.

Para Fischbein (1987), a percepção é um elemento importante na construção do conhecimento e, para ele, ela difere da intuição, pois intuição vai além dos fatos perceptíveis, necessitando uma extrapolação das informações advindas desses fatos. Assim, percepção se faz presente na compreensão do que é esencial em Geometria.

Freudenthal (1973), ao refletir sobre o que há de essencial em Geometria e sobre as perspectivas sobre a educação geométrica, afirma que ela pode ser pensada num nível mais elevado como: *é alguma forma axiomaticamente organizada, é certa parte da Matemática que, por algumas razões, é chamada Geometria* (p.403). Mais além, num nível mais elementar afirma: *é essencial compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor* (p. 403). Para ele, a Matemática, quando aprendida, deve estar intimamente ligada à realidade.

Dessa forma, essa realidade pode ser encontrada por meio de atividades, no caso, com o uso de um software, que conduzam à visualização, o que para nós é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Para Arcavi (1999), o termo visualização se constitui em uma habilidade ou processo, o qual pode ser pensado como produto de uma criação ou interpretação, quando o sujeito forma imagens, figuras ou diagramas em sua mente, utilizando papel, ferramentas tecnológicas ou outro meio.

Para Fischbein (1987), essa criação se constitui em conhecimento intuitivo. Indica ele: *é uma afirmação trivial que se tende naturalmente a pensar em termos de imagens visuais e que aquilo que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente* (p. 103). Ainda mais, *uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios* (p. 104).

A resolução de problemas

Resolução de problemas é uma metodologia utilizada por pesquisadores como Polya (1978), Onuchic (2009), Van de Walle (2009), Schoenfeld (1992), dentre outros. No entando, problemas estão na base da própria Matemática desde seus principios, pois eles, muitas vezes, são o elo motivador para o desenvolvimento de criações tanto teóricas quanto práticas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) indicam a resolução de problemas como se contrapondo à simples reprodução de procedimentos e, também, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Consideram que a situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição, e que a resolução de problemas não deve ser uma atividade a ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, senão como uma orientação para essa aprendizagem.

De acordo com as normas emanadas pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics – NCTM – a resolução de problemas deve se constituir numa parte integrante de toda a aprendizagem matemática, pois ela não só constitui o objetivo de sua aprendizagem como também é um meio importante para que os alunos aprendam esta disciplina. Afirmam ainda que os contextos dos problemas podem variar de acordo com a vivência dos alunos.

Para Hiebert et al. (1997, apud Van de Walle, 2009, p. 57) o significado do termo problema é *qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução.*

Isto proporciona ao estudante aprendizagens de diversos conteúdos que são necessários para ele poder desenvolver um projeto de resolução da atividade que lhe é proposta pelo professor, uma vez que não é imposta nenhuma regra a seguir, proporcionando autonomia e criatividade nas tentativas de resolução do problema.

Onuchic (2009) concebe problema como tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que há interesse em fazê-lo. A autora utiliza o termo metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação com o seguinte objetivo: *expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação* (p. 97).

O processo avaliativodeve estar embutido nessa metodologia, uma vez que ele é diferenciado do tradicional, no qual o professor expõe o conteúdo e o aluno pratica, geralmente, por repetição e memorização. Dessa forma, a aprendizagem é dimensionada por provas escritas que identificam o quanto de conhecimento o aluno absorveu e não sua própria construção de conhecimento, o que, em geral, ocorre na metodología de resolução de problemas.

O ensino por resolução de problemas, no entanto, não é fácil para o professor, pois esse necessita planejar cuidadosamente as atividades para seus alunos, selecioná-las de acordo com a turma e fazer o acompanhamento, quase que individualmente, de modo que eles não se sintam perdidos e sem rumo a seguir. Nesse sentido, a metodologia exige mais do professor do que aulas convencionais, elaboradas da mesma forma para todos.

O NCTM indica que o currículo da escola básica, utilizando a resolução de problemas, deve habilitar os alunos para: *construir novos conhecimentos matemáticos; resolver problemas que surgem em Matemática e em outros contextos; aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas; analizar e refletir sobre a resolução matemática de problemas*. (2008, p. 57).

Algumas fases na resolução de problemas indicadas por Polya (1978) são: compreender o problema, antes mesmo de iniciar a resolvê-lo, procurando verificar o que é pedido no enunciado e quais os dados são fornecidos; elaborar um plano, a fim de que se sinta orientado na busca da resolução, buscar algum problema similar que já tenha resolvido ou que esteja a seu alcance; executar o plano, passo a passo, realizando cuidadosamente os cálculos e construções, se for o caso e, finalmente, fazer uma revisão da resolução desde o seu começo, verificando se a solução encontrada é compatível com o solicitado e com os dados fornecidos.

Visualização e Geometria Dinâmica

Piaget e Inhelder (1993) ao pesquisarem sobre a contrução do espaço na criança afirmam que ela começa no plano perceptivo e, após, passa para o plano representativo. A imagen visual das formas, para eles, supõe uma representação intuitva, cuja construção é realizada quando o objeto permanece fora do campo perceptivo da visão. Assim, a imagen não resulta apenas da percepção senão também dessa representação intuitiva, por isso sendo relevante compreender-se a passagem do plano perceptivo ao plano representativo.

O uso de tecnologias como a régua e o compasso, em tempos atuais, não são mais motivadoras para estudantes e professores, que apresentam dificuldades no seu manuseio, como foram em tempos passados. Até mesmo pelo próprio abandono de construções e representações em Geometria com o advento do movimento da Matemática Moderna, as representações visuais dos objetos geométricos deram lugar às representações algébricas. Entendemos por visualização não somente aquela habilidade adquirida com o órgão físico da visão, senão como construtos mentais, os quais podem ser adquiridos por diversos caminhos, como pelo tato para os deficientes visuais ou pelo uso de softwares.

Visualização por si mesma é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas e a possibilidade de os alunos fazerem mudanças instantâneas em suas representações visuais acrescenta uma dimensão dinâmica na construção do conhecimento. As tecnologias computacionais e, particularmente, os software de Geometria Dinâmica, parecem estar despertando para uma nova forma de reconstruir os aspectos visuais da Geometria. As construções, em geral, não precisam ser refeitas, como no caso com régua, compasso e outros instrumentos, pois os softwares permitem reconstruções rápidas, sem perda daquilo que o estudante já realizou. Por sua vez, é possivel buscar o histórico da construção e refazer etapas que não foram adequadamente construídas. Dessa forma, o estudante não se desmotiva ao perder ou ter de refazer as construções. Outro aspecto relevante no uso de tecnologia computacional é a não necessidade de realizar uma demonstração formal para perceber a veracidade de determinadas afirmações, as quais podem ser percebidas visualmente na tela do computador.

Segundo Klotz (1991), Philip J. Davis argumentou que *geometria visual deve ser restaurada a uma posição de honra na matemática. Computação gráfica que inclui animação e cor oferece a possibilidade de ir muito além de desenhos convencionais*. Afirma, ainda, que infelizmente essas ferramentas têm sido raramente utilizadas para fins educacionais.

O software GeoGebra, por ser livre, tem despertado grande interesse tanto por estudantes quanto por pesquisadores. Nele se pode fazer construções como se estivessem disponibilizados os instrumentos usuais geométricos: régua, compasso, etc…, os quais existem e podem ser usados de forma virtual dinâmica. Além disso, podem ser acrescidas no menu outras ferramentas que o utilitário desejar fazer uso frequente, por exemplo, com as macro construções. O software propicia modificar construções, tais como formato, tamanhos, posições, cores, porém, mantendo a estrutura da construção inicial. Ao construir um triângulo retângulo, pode-se modificar os comprimentos dos lados, os ângulos agudos, para exemplificar alguns, sem que deixe de ser triângulo retângulo.

Na resolução de uma grande classe de problemas geométricos a utilização de lugares geométricos merece atenção especial, como inscrição e circunscrição de uma figura em outra. Nesse sentido, o GeoGebra é um grande aliado do estudante no seu planejamento para a resolução problemas, uma das fases da metodologia de resolução de problemas enunciadas antes.

Os PCN (Brasil, 1998) indicam que as tecnologias não devem apenas se reduzirem à aplicação de técnicas por meio do uso de máquinas, mas serem utilizadas na escola para ampliar as opções de ações didáticas, criando ambientes de ensino e de aprendizagem que favoreçam a criticidade, a curiosidade, a observação e análise, a troca de ideias, de modo que o estudante desenvolva sua autonomía, construindo seu conhecimento. Acredita-se que, aliando a isso a metodologia da resolução de problemas, novas perspectivas para o ensino e a aprendizagem de Geometria serão alcançadas.

A oficina

A oficina se constitui, num primeiro momento, de uma apresentação de características fundamentais da metodologia de resolução de problemas, segundo autores que pesquisam o tema. Num segundo momento, irá explorar as ferramentas do software GeoGebra para que todos possam se apossar das mesmas a fim de realizar a resolução dos problemas a serem propostos

Problema 1

A partir da apresentação do problema: construa um quadrado cuja diagonal tenha 4,5cm de comprimento, acompanha-se as etapas de sua resolução utilizando as ferramentas do GeoGebra. Após o acompanhamento da resolução far-se-á discussão sobre possibilidades levantadas junto ao grupo de participantes. Espera-se que os estudantes realizem uma construção similar à apresentada na figura 1, inclusive fazendo a verificação de que a mesma seja, de fato, um quadrado, com suas propriedades de lados e ângulos de mesmas medidas.

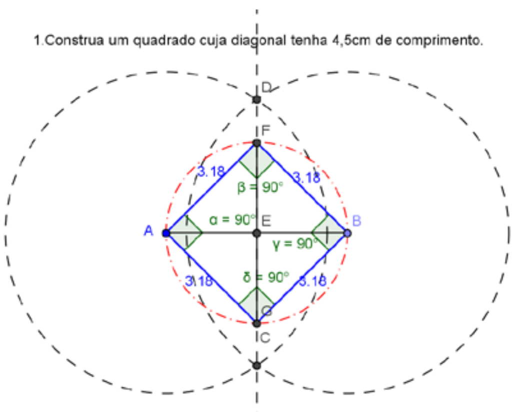


Figura 1. Construção de um quadrado conhecida sua diagonal. Construção do autor.

Após discutir com o grupo de participantes as dificuldades e as soluções encontradas dar-se-á sequência aos demais problemas.

Problema 2

Desenhe uma circunferência de 3,2cm de raio e construa o triângulo equilátero inscrito nela.

Espera-se uma construção similar à apresentada na figura 2.

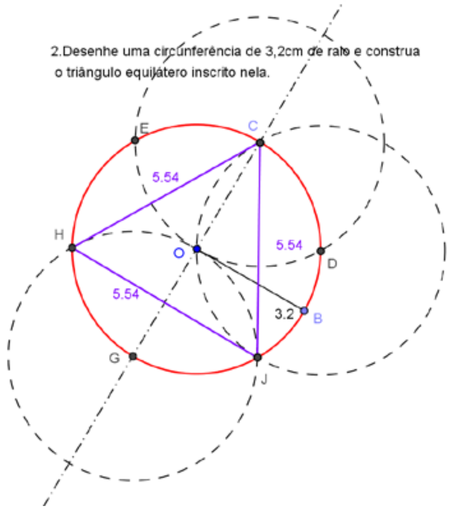


Figura 2. Construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência. Construção do autor.

Problema 3

Desenhe um triângulo cujos lados medem 5cm, 6cm e 7cm. Quanto mede o raio da circunferência circunscrita?

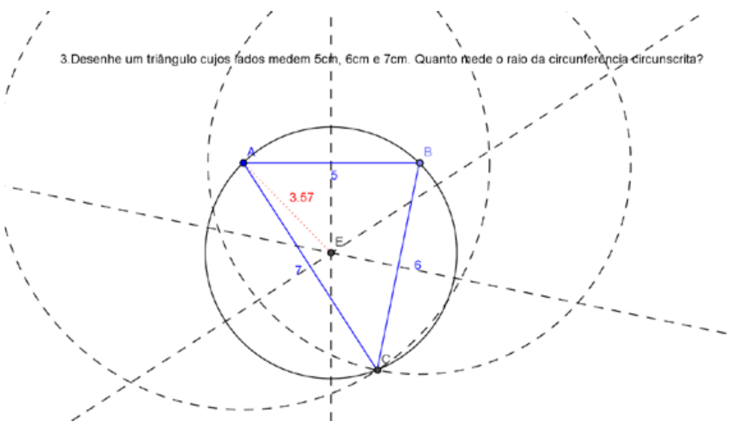


Figura 3. Circunferência circunscrita. Construção do autor.

Problema 4

Construa o triângulo ABC conhecendo a medida do lado BC = 7cm e as das alturas BD = 5.4cm e CE = 6.7cm.

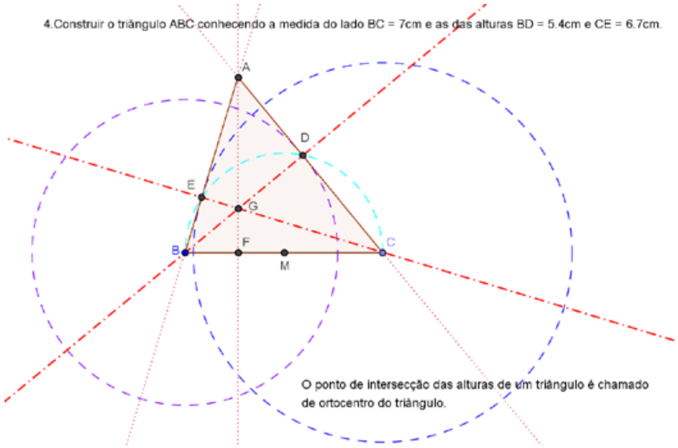


Figura 4. Triângulo conhecido um lado e duas alturas. Construção do autor.

Problema 5

Construa um triangulo ABC conhecendo a medida dos lados BC = 5cm, AC = 4cm e da altura relativa ao vértice A igual a 3cm.

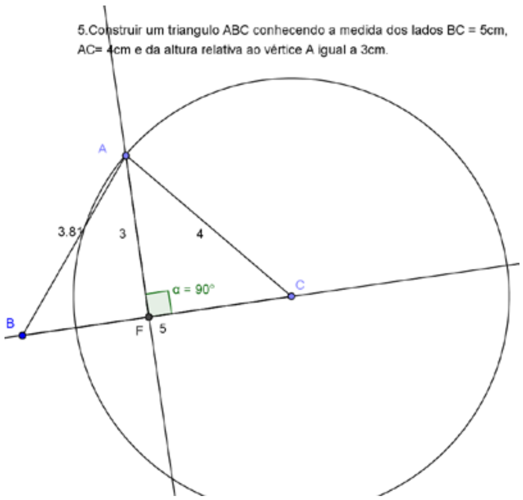


Figura 5. Triângulo conhecidos dois lados e uma das alturas. Construção do autor.

Problema 6

Construa um triângulo ABC, conhecendo a medida dos lados AB=5cm, AC=4,5cm, e altura relativa ao vértice A igual a 3cm.

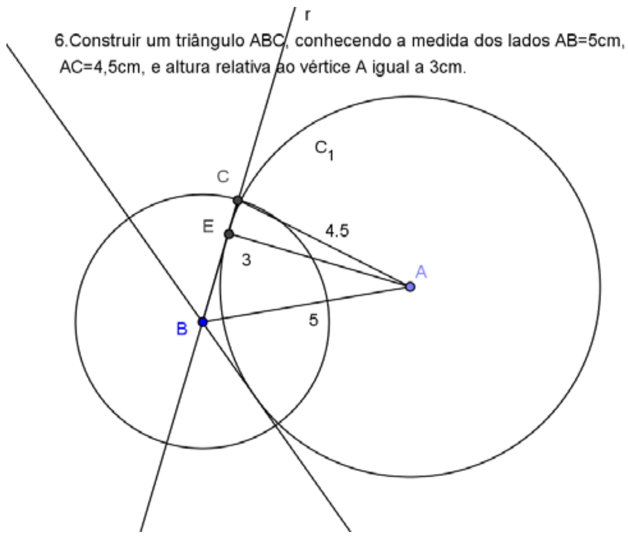


Figura 6. Triângulo conhecidos dois lados e uma das alturas. Construção do autor.

Observa-se que os problemas propostos exigem a elaboração de estratégias de resolução uma vez que, para sua resolução, não se encontra uma ferramenta imediata a menos que seja, posteriormente, feita uma macro construção e acrescida ao menu do software.

Como última etapa da oficina, se irá solicitar que cada participante faça registros utilizando a ferramenta “caixa de texto”, disponível no menu do software, e salve suas construções em um arquivo, o qual será encaminhado ao proponente da oficina ou por e-mail ou salvando num pendrive. Posteriormente, serãodevolvidas, por e-mail as considerações sobre tais estratégias individualmente com comentários e solução caso o participante não tenha conseguido consolidar sua resolução corretamente.

A oficina será concluída com um pequeno debate sobre as estratégias utilizadas nas resoluções e avaliação crítica dos participantes sobre a metodologia empregada e os conhecimentos adquiridos.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In *Proceedings… NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME*. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

Brasil. (1998). Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília, Brasil..

Klotz, E. A. (1991). Visualization in Geometry: a case study of a multimedia mathematics education Project. In: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Walter Zimmermann; Steve

Cunningham, (editors). Mathematical Associatin of America. Editorial Board. USA.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: *an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1973). *Revisiting mathematics education***:** China Lectures. London: Kluwer Academic Publisher. Mathematics Education Library.

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 2. ed. Edição Portuguesa. Associação de Professores de Matemática. Lisboa.

Onuchic, L. de la Rosa. (2009). Trabalhando volume de cilindros a través da resolução de problemas. *Educação Matemática em Revista-RS*, v. 1, 95-103.

PIAGET, J.; INHELDER, B.. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan

Wagner, E. (2013). *Uma introdução às construções geométricas*. Rio de Janeiro: IMPA.

Walle, J. A. Van de. (2009). *Matemática no ensino fundamental*: *formação de professores e aplicação em sala de aula*. (6th ed.). Porto Alegre: Artes Médicas.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización

Viviana Paola **Salazar** Fino
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.vsalazar@pedagogica.edu.co
Sandra Milena **Jiménez** Ardila
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.sjimenez@pedagogica.edu.co
Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
lmendieta@pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta una alternativa para la enseñanza del proceso de factorización mediante el uso de las "*Tabletas algebraicas*", material manipulativo construido por un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2011.Estematerial permite establecer una conexión entre la noción de área y la expresión de algunos polinomios de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f$, $a, b \in \mathbb{N}$, $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, como producto de factores. Se hace especial énfasis en reducir a la mínima expresión los factores cuyo producto determina el polinomio que representa el área del rectángulo formado por las tabletas, buscando conceptualizar el significado del proceso de factorización.

Palabras clave: polinomios, sistemas de representación, materiales manipulativos, enseñanza, formas geométricas.

Abstract

We present an alternative for the factorization process teaching by of use of "*Tabletas Algebraicas*", manipulative material made by a group of preservice teachers form the Universidad Pedagógica Nacional in the year 2011.This manipulative material allows to establish a connection between the concept of area and the expression of some polynomials of the form$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f$, $a, b \in \mathbb{N}$, $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$,as product of factors. Special emphasis will be made to reduce to the minimum expression the factors which product determines the polynomial that represents the area of the rectangle formed by the *Tabletas Algebraicas*, we finding the conceptualization of factoring process.

Keywords: polynomial, representation systems, manipulative materials, teaching, geometric shapes.

Presentación

Este taller surge del trabajo realizado en el espacio académico Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra[1], del componente Pedagógico y Didáctico en el Programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La propuesta de enseñanza ofrece una alternativa para enseñar el proceso de factorización de algunos polinomios (de la forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, $a, b \in N; c, d, e, f \in Z$), temática propia del álgebra escolar del grado octavo, en nuestro país (Colombia), mediante el uso de las *Tabletas Algebraicas*, material concreto manipulativo que se fundamenta en la teoría de las representaciones de Raymond Duval.

Descripción del material

Las *Tabletas Algebraicas* son un material manipulativo derivado de los bloques multibase (BAM), o Bloques de Dienes. Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado *a*, otro de lado *b*, otro de lado 1 (unidad), un rectángulo de lados *a*y *b*, otro de lados a y 1, un tercer rectángulo de lados b y 1, como puede verse enseguida:

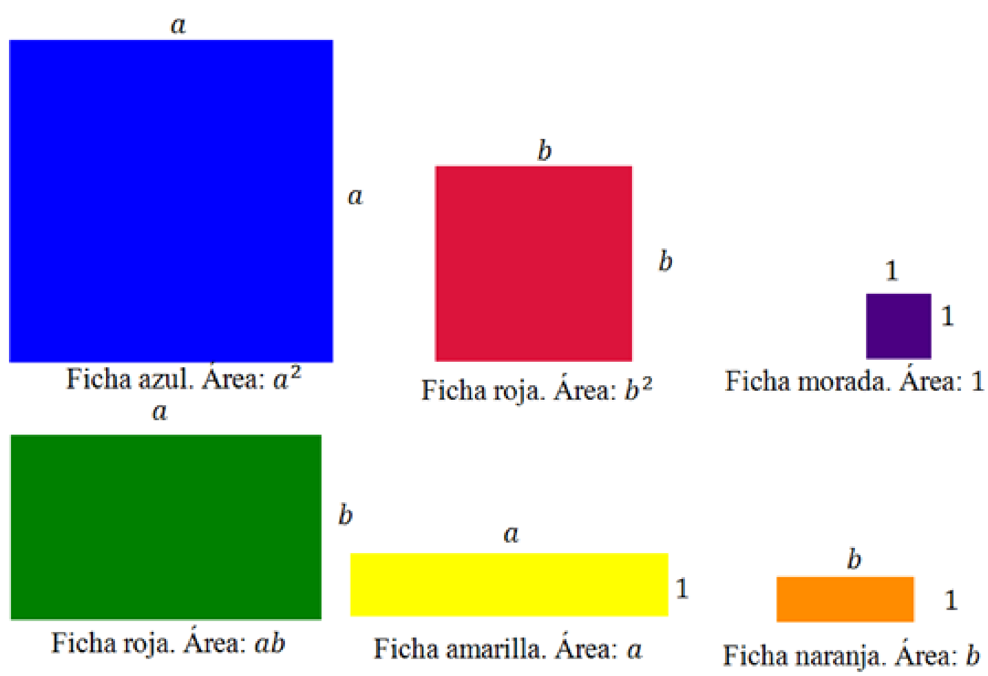


Figura 1. descripción de las fichas

[1]Bajo la asesoría de la profesora Lyda Mora.

Ya que este material se puede construir con medidas arbitrarias y en una gran variedad de materiales, es importante que las medidas de las longitudes a y b sean números primos relativos, e incluso, que estas dos medidas no tengan tampoco factores en común con la medida de longitud unidad. El material que hemos construido (usado en la prueba piloto descrita más adelante), tiene como medidas de longitud las siguientes: $a = 6\ cm,\ b = 4\ cm,$ $unidad = 1.5\ cm.$

Génesis del material

El nombre *Tabletas Algebraicas* fue dado por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Dayana Guantiva, Sandra Jiménez, Kevin Parra, Viviana Salazar y Duván Sánchez, a un conjunto de fichas rectangulares de colores. Dicha idea se inspira en los trabajos de Euclides y los árabes, quienes relacionaban áreas y términos de una ecuación. A continuación, se presentará de forma breve el marco referencial de esta propuesta de enseñanza.

Referentes teóricos

Materiales manipulativos

En las últimas décadas, las investigaciones en educación han mostrado la necesidad de modificar los procesos de enseñanza de las matemáticas, siendo una de las principales conclusiones la invitación a que en el aula existan diferentes vías para construir los conocimientos en los estudiantes.

De acuerdo con esto, algunas de las vías que más se ha destacado ha sido el uso de materiales tangibles en la enseñanza, los cuales aparecen en los años sesenta con las publicaciones de Zoltan Dienes (1960) y Jerome Bruner (1961), esto desató una oleada de investigaciones que articulaban materiales que involucraban simultáneamente la percepción táctil (como ábacos, regletas, balanzas, etc.) y temas matemáticos (como conteo, fracciones, suma y resta), que arrojaron resultados satisfactorios, sobretodo en estudiantes de primaria a los cuales se les realizó un seguimiento.

Ya más recientemente Godino, Batanero & Font (2003, citado en Uicab, 2009) han clasificado los recursos para la enseñanza de las matemáticas en dos grupos: ayudas al estudio (libros, tutoriales, etc.) y materiales manipulativos enfocados en apoyar y potenciar el razonamiento matemático: manipulativos tangibles (concretos) y manipulativos gráfico-textuales-verbales. Las Tabletas Algebraicas clasifican como recurso manipulativo tangible debido al énfasis que se da a los elementos visuales y táctiles (forma, color, tamaño, longitudes).

Raymond Duval. Representación semiótica

Duval (1999) plantea una teoría en la cual afirma que el libre tránsito entre las diferentes representaciones de un objeto matemático le permite al estudiante tener una mayor comprensión del mismo, además, "las representaciones semióticas[2] son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento" (Jiménez, Guantiva & Sánchez, 2011, p.2).

Sistemas de representación. Las configuraciones hechas con las *Tabletas Algebraicas*

[2]Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento (Duval, 1998a).

para representar los polinomios son consideradas, lo que Duval llama“[una] representación que facilita la interiorización de un objeto”. Se utilizarán básicamente tres registros de representación: enactiva (representación utilizando las fichas de las *Tabletas Algebraicas*), físico (representación gráfica del polinomio con fichas) y simbólico-algebraico (escritura del polinomio en términos algebraicos y como producto de factores). De esta manera, se ofrece una alternativa al estudiante para interpretar la factorización de un polinomio dado por medio de manipulación geométrica y tangible de los términos del polinomio.

Duval menciona tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis: formación, tratamiento y conversión, de las cuales nos enfocaremos en las dos últimas. El tratamiento es una transformación que se da dentro de un mismo registro, como por ejemplo, expresar de diferentes maneras el polinomio $a^2 + 2ab + b^2$: con la manipulación de las fichas se espera lograr la transformación del polinomio original a expresiones como $(a + b)(a + b)$ o como $(a + b)^2$(que además es el orden en que se espera que se den las transformaciones). En el caso en el que el polinomio tenga dos formas diferentes de representarse con las fichas, por ejemplo, $12a^2 + 14ab + 4b^2$, pueden construirse dos rectángulos de longitudes de lados diferentes: uno de lados $(6a + 4b)$ y $(2a + b)$ y otro de lados $(3a + 2b)$ y $(4a + 2b)$. Al orientar al estudiante para que busque una configuración diferente, se realiza un tratamiento dentro del registro físico.

La otra actividad cognitiva es la conversión, una transformación externa relativa al registro de representación de partida, y que para el caso particular de las *Tabletas Algebraicas* permite realizar el cambio de registro físico a registro algebraico. Es importante resaltar que las tareas propuestas con el material implican varias conversiones: de registro algebraico a físico al asociar los términos del polinomio con fichas organizadas en rectángulo, de físico a algebraico cuando, con ayuda de la configuración, se obtienen los factores que dan origen al polinomio original.

Aprehensión conceptual de un objeto. Duval (1998) propone también el concepto de aprehensión conceptual de un objeto, de la cual afirma hay tres tipos: aprehensión perceptiva, en la cual se asocian elementos de la vida cotidiana con figuras geométricas; aprehensión discursiva, en la cual se asocian configuraciones identificadas con afirmaciones matemáticas; aprehensión operativa, el sujeto realiza una modificación a la configuración inicial. La aprehensión discursiva propicia el cambio en las dos direcciones entre lo que Duval llama anclaje visual (configuraciones identificadas) y anclaje discursivo (afirmaciones matemáticas), lo que se trabaja directamente mediante la manipulación del material y que sustenta el cambio de registro físico del polinomio dado por una configuración rectangular con las fichas (anclaje visual) a producto de factores representando el área del rectángulo formado anteriormente (anclaje discursivo).

Metodología

Para el diseño de las tareas a proponer con el uso de las Tabletas algebraicas se realizó una fundamentación teórica, como la ya presentada y consulta de antecedentes relacionados con la idea original de combinar la geometría y el álgebra para la enseñanza del proceso de factorización, también se hizo un estudio acerca de la génesis de esta combinación en la historia de las matemáticas. El equipo de estudiantes elaboró el material de manera artesanal y propuso un conjunto de tareas que fueron inicialmente piloteadas con compañeros de la Licenciatura y que luego se implementaron en un colegio público de la ciudad de residencia de los talleristas.

Con el paso del tiempo se comunicó esta propuesta de enseñanza a profesores en formación inicial y continuada en un evento nacional de Educación Matemática en Colombia. Posteriormente esta idea se constituyó en un trabajo de grado que actualmente se adelanta.

En cuanto a la metodología del taller que se presenta aquí, la cual puede ser útil si se desea replicar el trabajo con los estudiantes, se propone que los participantes se organicen en parejas en un espacio que cuente con proyector multimedia (no se requiere laboratorio de computadoras). Para el desarrollo del taller, primero se hará una presentación del material departe de las talleristas a los participantes, con fichas de mayor área que las originales. A continuación se repartirá a cada pareja una hoja con una secuencia de tareas a desarrollar y un paquete de fichas; cada grupo irá resolviendo las actividades con orientación de las talleristas y principalmente con las instrucciones y definiciones proporcionadas en las guías. Finalmente, se hará una retroalimentación con los asistentes, por medio de una pequeña exposición de lo que se encuentra en el trasfondo del trabajo, es decir, la importancia del trabajo con materiales manipulativos. Se ha dividido la guía en cinco partes, las cuales corresponden a: reglas de manejo del material, construcción de configuraciones, representaciones equivalentes, áreas y factores reducibles.

Consideramos importante hacer un registro en hojas de las actividades propuestas para que las talleristas puedan verificar la comprensión de las reglas de manejo de material, la interpretación de longitudes y las definiciones. Las guías con las tareas contienen lo que se muestra a continuación.

Reglas de manejo del material

Primero se darán instrucciones y ejemplos para términos positivos de un polinomio.

Unión de fichas. Sólo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud.

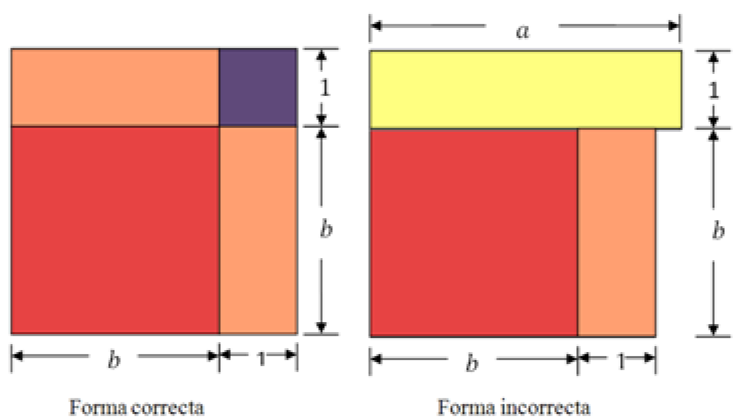


*Figura 2.*Ejemplo de unión de fichas

Construcción de configuraciones

El primer objetivo de cada configuración será formar rectángulos de tal manera que no queden espacios "en blanco" al interior del rectángulo. Una vez formado, se deben interpretar correctamente las longitudes de los lados necesarios (comúnmente llamados base y altura). Para esto, se sumará la longitud de cada "segmento" que compone el lado total, por ejemplo:

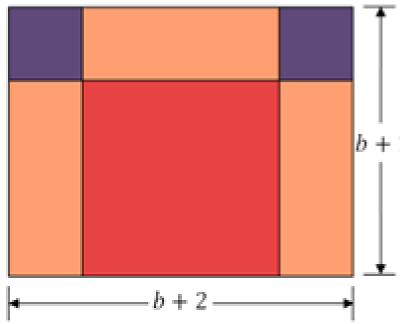


*Figura 3.*Ejemplo de interpretación de longitudes de lados

El anterior caso muestra la unión de 6 fichas, lo que indica que el polinomio era originalmente $b^2 + 3b + 2$. Acotados se encuentran los lados como suma de los segmentos que los componen: $b + 1$ y $1 + b + 1 = b + 2$.

Sobreposición de fichas. Para indicar que un término del polinomio es negativo se colocará sobre otra ficha de mayor área, siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados, por ejemplo:

*Figura 4.*Ejemplo de sobreposición de fichas

En este caso, para representar el binomio $a^2 - a$, se coloca sobre una ficha de área a^2 una ficha de área a, y para conocer las longitudes de los lados se procede así:

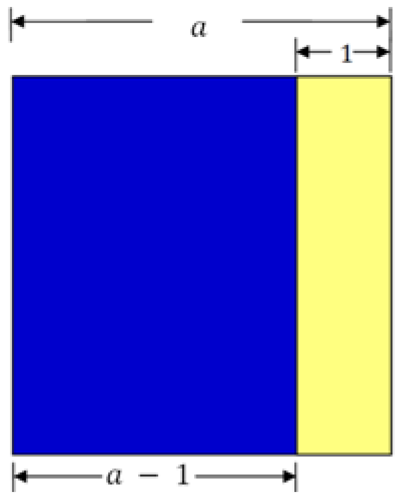


*Figura 5.*Ejemplo de interpretación de longitudes de lados donde aparecen términos negativos

¿Cuáles son las longitudes de los lados que tendría la configuración que representa el polinomio $a^2 - ab$?

Representaciones equivalentes

Con el fin de evitar la confusión entre posibles diferentes configuraciones del mismo polinomio, se exhorta al participante a definir representaciones equivalentes a partir de la siguiente imagen:

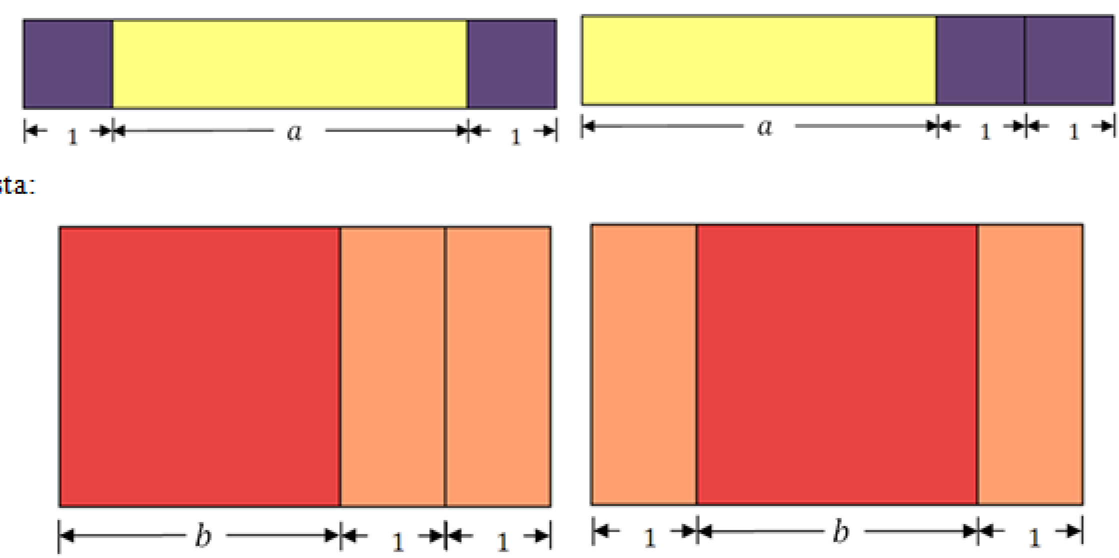


*Figura 6.*Ejemplos de representaciones equivalentes

Dos o más representaciones son equivalentes si las longitudes de los lados correspondientes entre éstas son iguales

Áreas

Recogiendo los pasos anteriores, esta sección se ocupa de construir la configuración con las Tabletas Algebraicas que representa un polinomio dado y encontrar la relación entre representación algebraica y geométrica.

Los participantes comenzarán representando con las fichas el polinomio $b^2 + ab + 3a + 3b$. Seguidamente, se tomará la longitud de los lados (llamados de ahora en adelante factores) asociados a base y altura del rectángulo formado. Se desarrollará el producto de dichos factores, es decir, encontrar el área del rectángulo compuesto por los términos del polinomio.

¿Cómo es la expresión algebraica en relación con el área de la representación geométrica?

Se propone expresar como producto de factores los siguientes polinomios:

- $4b^2 + 10b + 6$
- $2a^2 + 3ab + b^2 + 2b + 3a + 1$
- $a^2 + 2a - 15$
- $a^2 - 1$

Después de realizar los ejercicios propuestos y con base en lo presentado anteriormente, ¿Qué definición (parcial) de factorización daría?

Factores reducibles

Representar con las fichas el polinomio $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$ y expresarlo como producto de factores.

¿Existe más de una configuración (no equivalentes) con las fichas?

Como se obtienen dos pares de factores diferentes, $(a+1)(2a+2b)$ y $(a+b)(2a+2)$, se debe decidir cuál par será el aceptado como resultado final del proceso de factorización. Para eso, se introduce la siguiente definición:

Un factor es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes, con las tabletas.

Es decir que cada factor se representará con las fichas:

Par	Factores del par correspondiente	Configuración no equivalente # 1	Configuración no equivalente # 2
Primero	$(a+1)$	$1(a+1)$	
	$(2a+2b)$	$1(2a+2b)$	$2(a+b)$
Segundo	$(a+b)$	$1(a+b)$	
	$(2a+2)$	$1(2a+2)$	$2(a+1)$

*Tabla 1.*Estudio de los factores del polinomio $\boldsymbol{2a^2 + 2ab + 2a + 2b}$

Los factores irreducibles se identifican porque no se pudo obtener dos configuraciones no equivalentes con las fichas. Pero quedan factores reducibles, ¿Qué hacer con ellos?

Se escoge un par (con el otro par el proceso es análogo), por ejemplo, el primero. Como el segundo factor es reducible, se buscan los dos factores que le dan origen, de los cuales se escoge el que no tiene como factor a una de las variables (con coeficiente 1) o al 1.

Así, del primer par se tomarán los factores $a+1$ (irreducible) y $2(a+b)$ (reducido).

Para el segundo par se tomarán los factores $a+b$ (irreducible) y $2(a+1)$ (reducido).

Es evidente la equivalencia entre las respuestas anteriores, ya que el orden de los factores no altera el producto, entonces, la factorización correcta del polinomio $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$ es $2(a+1)(a+b)$.

Si bien se puede enunciar desde el comienzo un caso de factor común, es importante mantener la relación geometría-álgebra y hacer notar que el concepto de factor irreducible tratado en esta actividad es abordable a través de representaciones físicas.

Para finalizar se propone realizar la factorización por medio de las Tabletas Algebraicas de los siguientes polinomios:

- $2b^2 + 6a + 2a^2 + 4ab + 6b + 4$
- $3b^2 + 9b + 6$

Conclusiones

En general el material permite asignar sentido a la proceso de factorizar algunos polinomios utilizando representaciones enactivas, físicas y simbólico-algebraicas; naturalmente, como todo material físico, posee algunos limitantes, por lo cual solo se considera una alternativa para introducir la factorización de algunos polinomios de segundo grado.

Fue necesario crear una definición de factorización de polinomios, debido a que la definición de factorización usualmente utilizada se aplica polinomios con entradas en un campo, y el conjunto de polinomios que pretendemos manejar con el material no tiene sus coeficientes en un campo, por ello fue necesario crear una definición alternativa para "factor irreducible" (utilizando el material, como se mostró), basándonos en el documento de Zalamea (2007), quien escribe:

> Sea $P(x) \in A[x](A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}).P(x)$ es irreducible en $A[x]$ si y solo si P no puede descomponerse en un producto de dos polinomios en $A[x]$ de grado estrictamente menor: no existen $S, T \in A[x]$ tales que $P = ST,\ grad\ (S) < grad\ (P)\ y\ grad\ (T) < grad\ (P)$. (p. 137) [3]

La propuesta de taller que exponemos nos permite decir que no consideramos oportuno iniciar la enseñanza de la factorización de polinomios al modo de Al-Khwarizmi, o de "manera elemental" y tradicional partiendo de la repetición de "los casos de factorización", limitando la posibilidad de un trabajo simultáneo entre la geometría y el álgebra, integrando sus diversas representaciones, que son una herramienta poderosa para dotar de sentido conceptos matemáticos como la factorización, al interior de las mismas matemáticas.

Gracias al taller se puede verificar cómo se da la interacción entre participante y material manipulativo, las dificultades que emergen durante su manipulación y los aspectos que requieren ajustes.

Es importante resaltar que, aunque es altamente probable que los asistentes al taller no sean estudiantes de secundaria, sino docentes y personas en busca de alternativas de enseñanza, en este caso particular, de factorización, se busca ante todo lograr un proceso de retroalimentación que permita, por un lado, dar a conocer este tipo de estrategias relacionando geometría y álgebra a quien interese, y por otro lado recibir aportes que converjan a la mejora del material en pro de ofrecer herramientas "innovadoras" para la enseñanza de las matemáticas.

[3] Es importante resaltar que si el grado de S o T es cero, se contemplan lo valores constantes, que serán determinantes en el desarrollo del trabajo de grado.

Referencias y bibliografía

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica [Versión electrónica]. Números, 71, 57-74.

Covas, M., Bressan, A. (2009). La enseñanza del álgebra y los modelos de área. Argentina: Fundación GEB.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *En Investigaciones en Educación Matemática II*. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, pp. 173-201. México.

Duval, R. (1999). Registros de representación, comprensión y aprendizaje. En semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Jiménez, S., Guantiva, D., Sánchez, D. (2011). Taller: uso de las Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Memorias 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (2), 574-584.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica [Versión electrónica]. Revista IRICE, 13.

Montoya, E., Montoya, J. (1999). Áreas mágicas (Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Morales, I., Sepúlveda, A. (2006). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. En: Memorias 3 XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas.

Uicab, G. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), 1007-1013.

Viviente, J. (1988). Geometría y/o Álgebra geométrica [versión electrónica]. Zubía, 6, 91-97.

Zalamea, F. (2007). Fundamentos de matemáticas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Taller: Concepciones en torno al infinito actual: análisis mediado por el software Cabri - Geometre

Juan Carlos **Vega** Vega
Maestría en Educación, Universidad Militar Nueva Granada
Colombia
edumatematicas@hotmail.com

Resumen

El interés de este proyecto se centra en mostrar la relación entre un objeto matemático como lo es el infinito actual con el ámbito tecnológico en el campo educativo. Siendo el infinito actual un concepto matemático intuitivo, se piensa implementar de una serie de situaciones problema en forma de taller-capacitación a docentes de esta área del conocimiento para que por medio del software educativo Cabri Geometre, se modelen algunos de estos contextos y permitan un cambio de representación sobre la noción instintiva del infinito.

Palabras clave: Concepciones, Infinito Actual, Cabri Geometre, Situaciones Problema, Fractales

Presentación

El término infinito hace parte del lenguaje común en los seres humanos y juega un papel importante dentro de la matemática actual, pues aunque no tiene un fundamento empírico determinado, posee una estructura rigurosa que históricamente ha mostrado un desarrollo axiomático, evolución que se ha venido dando a la par con diferentes conceptos y nociones matemáticas desde la antigüedad hasta nuestros días.

Cuando se habla acerca de las concepciones intuitivas sobre el infinito, se escuchan frecuentemente percepciones relacionadas a situaciones en los que interviene este objeto matemático, incluyendo diversas representaciones que puede llegar a tener dicho término, lo que algunos autores llaman la intuición del infinito (Fischbein, Tirosh, & Hess. 1979) y también, aquellas definiciones que coinciden con la conceptualización matemática contemporánea del mismo.

En el contexto educativo, el concepto de infinito no aparece como una temática específica en el currículo de matemáticas, ni se establece un grado en el cual se deba aprender dicho término. En las aulas de clase, este objeto matemático es presentado intuitivamente, pues como lo explica Efraim Fischbein en su obra *Intuition in Science and Mathematics*, lo intuitivo es “una forma de conocimiento primitiva, opuesta a interpretaciones y concepciones científicas, afirma también que en la enseñanza, la intuición debe prevalecer a las prácticas formales, pero que las secuencias didácticas y metodológicas deben estar de acuerdo con el desarrollo formal de las matemáticas para no inducir a los estudiantes a concepciones erróneas.

Con lo mencionado anteriormente, se busca que por medio de la implementación del software Cabri Geometre y la generación de situaciones problemáticas se puedan determinar las concepciones que se tienen acerca del concepto de infinito actual en cuanto a su carácter intuitivo, tomando como base la visión que tienen de éste los profesores de matemáticas de todos los niveles de escolaridad, y analizar si es posible la re conceptualización del mismo por medio de la simulación y modelación dada por el software.

Marco teórico.

Para el desarrollo de este apartado se tendrán en cuenta tres aspectos relevantes para la respectiva contextualización de la propuesta:

Referente Matemático

En primer lugar se realizó un acercamiento histórico de la evolución conceptual del infinito basado en algunos personajes que dedicaron parte de su vida al estudio de este objeto matemático, ellos son: Aristóteles, Bernhard Bolzano y George Cantor.

Referente Didáctico

En segundo lugar se tomó como referencia a Bruno D´Amore, este autor ha realizado varias investigaciones en torno a las concepciones sobre el infinito actual en estudiantes de educación básica, media y superior utilizando contextos matemáticos como la biyección y equipotencia entre conjuntos, todos estos planteados con lápiz y papel. En estos estudios se manifiesta que al momento de presentar este objeto matemático se pueden llegar a contradicciones entre lo intuitivo y lo formal, ya que el medio físico no permite identificar la diferencia entre el infinito actual y el potencial por sus características. Por otra parte, se tomaron como referentes los obstáculos epistemológicos y didácticos del infinito actual planteados por D´Amore para determinar las posibles causas por las cuales los docentes de matemáticas, al momento de enfrentarlos a situaciones problema, identifican solamente la existencia de un infinito potencial, hipótesis que se tiene por el carácter intuitivo del infinito actual.

Referente Tecnológico

En este tercer momento se tuvieron en cuenta algunos de los aportes que el software Cabri Geometre ha tenido en la contribución de la enseñanza de las matemáticas por medio de su dinamismo, específicamente de Luis Moreno Armella y su implementación de dicho software en el ámbito educativo. En primer lugar se buscó una descripción del software así como también sus ventajas y desventajas en el aula de clase, seguidamente se desarrollaron algunas reflexiones en torno a la implementación de Cabri en el ámbito educativo específicamente en América Latina y finalmente se consultaron algunas de las actividades realizadas en este software desde el campo geométrico y variacional que sirvieron como base para la elaboración de las situaciones problema en relación con el infinito actual.

Infinito Actual

Algunos autores como De Lorenzo y Le Goff (De Lorenzo, 2001) consideran el infinito actual como un objeto matemático originado en un contexto geométrico puesto que es un infinito ilimitado y métrico, que permite la cuantificación y la resolución de problemas del mundo real y en el cual se involucran elementos de las matemáticas tales como: número infinito, punto infinito, construcciones infinitas en espacios finitos y series con infinitos elementos Esta concepción del infinito surge al ser considerado como una unidad, dicho en otras palabras, como "un objeto unitario" que es infinitamente grande o numeroso, un ejemplo de esto es el conjunto de los números naturales, racionales o simplemente subconjuntos propios de éstos, al tomar algunos de estos conjuntos aparece el infinito en acto cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto tomado y una parte propia de éste.

Metodología del taller.

A continuación se describirán cada una de las etapas que se desarrollarán en el taller:

Etapa Diagnóstica 1.

Para identificar cuáles son las concepciones que tienen los docentes de matemáticas en torno a este objeto matemático y que se esperan sean desde lo intuitivo, se implementará un instrumento de entrada en forma de cuestionario y que busca dar respuesta a algunas de las siguientes preguntas: ¿qué entiende por infinito actual? ¿Qué conjunto numérico tiene mayor cantidad de elementos? ¿Qué es un fractal? ¿Conoce el software Cabri Geometre? Esta etapa tiene una duración de 15 minutos.

Etapa Diagnóstica 2.

Con papel y tijeras se les mostrará a los docentes un primer acercamiento a la geometría fractal por medio de la construcción de dos fractales por medio de procesos reiterativos. Esta etapa tiene una duración de 15 minutos

Etapa De Aplicación.

Teniendo como base el contexto en el cual los docentes están inmersos, se les presentarán cuatro situaciones problema que deberán ser modeladas con el software Cabri Geometre, esto con el fin de determinar los cambios de representación que se hacen frente al concepto de infinito actual. Se necesitará una sala de cómputo con acceso al software.

Cada una de las situaciones problema involucra la construcción de un fractal en Cabri Geometre, por lo que se mostrará paso a paso la generación del fractal "copo de nieve" y contextualizar a los docentes del software antes de la aplicación de los instrumentos. Esta etapa tiene una duración de 90 minutos.

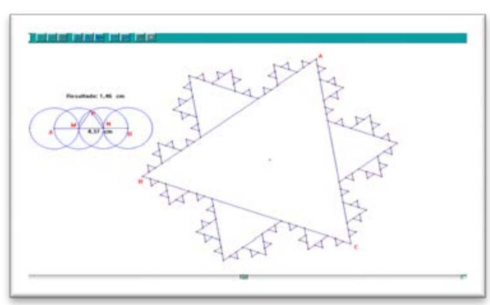


Figura 1. Representación del fractal "copo de nieve" en Cabri Geometre

Se muestra a continuación las situaciones problema con su respectivo objetivo y categoría de análisis:

SP1. Formatos de papel DIN y carnetización en la Universidad Militar

Los formatos de papel DIN fueron definidos en el año 1922 en la norma 476 del DIN -Deutsches Institut für Normung (Instituto Alemán de Normalización) y desarrollados por el ingeniero berlinés Dr. Walter Porstmann; ha sido la base de su equivalente internacional 216 de la ISO (Organización Internacional para la Estandarización). En la actualidad es más usual denominarlos sin prefijo alguno: "A4", "A3", etc.

Estos tamaños estandarizados están divididos en "series", cada una de las cuales está pensada para un uso concreto que determina sus proporciones. La forma de obtener el formato A1 se realiza doblando por la mitad el formato A0, así como el formato A2 se consigue doblando el formato A1 de la misma manera y sucesivamente hasta obtener un formato de menor área según el uso correspondiente1.(Figura 2)

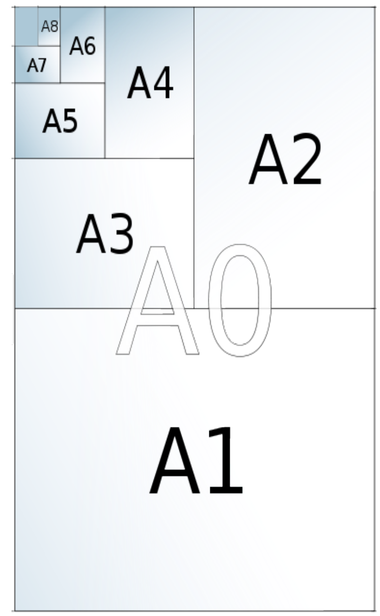


Figura 2. Formatos del papel DIN

Jaime Pedraza, encargado de la carnetización en la Universidad Militar Nueva Granada en la ciudad de Bogotá, recibe una resma de 500 hojas de tamaño A4 para la producción de los carnés de los estudiantes nuevos de primer semestre de 2013. Con las indicaciones dadas en la figura 1, Jaime debe realizar los cortes hasta obtener un formato estándar para cada uno de los carnés y que por cada hoja salgan la mayor cantidad de documentos. Si el encargado de la carnetización realiza los cortes adecuadamente en su totalidad y utiliza 24 hojas de la resma entregada. ¿Qué formato utilizó Jaime para los carnés? ¿Cuántos estudiantes se inscribieron en toda la Universidad para el periodo 2013 – I? (Utilice la información de la figura 3)

Nombre	Tamaño
4A0	2.378 × 1.682 mm.
2A0	1.682 × 1.189 mm.
A0	1.189 × 841 mm.
A1	841 × 594 mm.
A2	594 × 420 mm.
A3	420 × 297 mm.
A4	297 × 210 mm.

Figura 3. Dimensiones del papel

[1] Tomado de http://carlinvallecas.es/wp-content/uploads/2012/11/el-papel-procesos-de-fabricacion-historia-y-tipos.pdf

SP2. Viaje en bicicleta.

Natalia desea ir en su bicicleta desde el punto A hasta el punto B y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego ella debe pasar por el punto D, el punto medio entre C y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿es posible que en algún momento Natalia alcance el punto B con su bicicleta?[2] Justifique su respuesta.

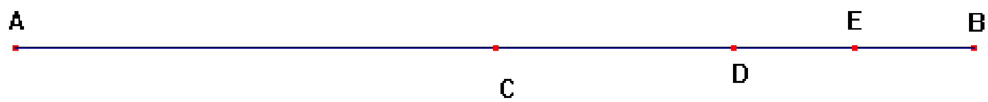


Figura 4. Recorrido de Natalia

SP3. Salones de clase del gimnasio campestre Sierpinski

Según las políticas del Ministerio de Educación, el tamaño estándar de las aulas de clase de una institución estará reglamentado según el número de estudiantes inscritos. Un salón de 1 a 15 estudiantes debe tener 24 metros cuadrados de área, de 16 a 30 estudiantes 48 metros cuadrados y de 31 a 40 estudiantes se requieren 64 metros cuadrados.

José Luis Suárez es un licenciado en matemáticas que ha decidido montar su propia institución educativa a la cual llamará Gimnasio Campestre Sierpinski en honor a Wacław Sierpinski, personaje quien describió por primera vez en 1916 el fractal “La alfombra de Sierpinski” y el cual se construye de la siguiente manera:

Se comienza con un cuadrado.

El cuadrado se divide en 9 cuadrados congruentes, y se elimina el cuadrado central.

El paso anterior vuelve a aplicarse recursivamente a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

La alfombra de Sierpinski es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.

José decide aplicar la forma de este fractal para la construcción de sus salones de clase haciéndole las siguientes modificaciones:

1. El terreno tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 132 metros.

2. El cuadrado se corta en 9 cuadrados congruentes, y se obvian los cuadrados con números pares. (Ver figura 5)

3. Se realiza este procedimiento dos veces más a cada uno de los cuadrados resultantes.

---

[2]: Modificado de Fuenlabrada I. & Armella L. (2008)

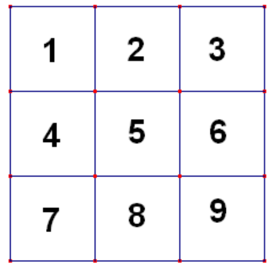


Figura 5. Numeración salones del gimnasio Sierpinski

Si los lados de cada uno de los salones del Gimnasio Campestre Sierpinski tendrán la medida de los cuadrados resultantes del paso número tres. ¿Qué rango de número de estudiantes tiene pensado el licenciado para cada uno de los salones de su institución educativa? ¿Estaría de acuerdo usted con esa cantidad?

SP4. Pirámide Telefónica Telecom Bogotá

En una reciente entrevista a Jorge Álvaro Ramírez al canal JcV, arquitecto quien diseñó la pirámide de la sede principal de Telefónica Telecom ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia, menciona que cada uno los lados de la pirámide están formados por mínimas figuras triangulares de vidrio azul teniendo en cuenta la construcción del fractal "Triángulo de Sierpinski" hasta su cuarta iteración.

Figura 6. Pirámide Telefónica Bogotá

Si la longitud de los triángulos de menor área resultantes del proceso fractal es de 1.16 metros. ¿Cuál es la altura de la sede Telefónica Telecom Bogotá?

Tabla 1.

Categorías de análisis para situaciones problema

INSTRUMENTO	FASE	OBJETIVO	SE ESPERA QUE	CATEGORÍAS E INDICADORES
PD	Diagnóstico	Identificar las concepciones intuitivas que los docentes de matemáticas tienen acerca del infinito actual	Por medio de una encuesta escrita, los docentes de matemáticas se enfrentarán a algunas preguntas que giran en torno a las concepciones acerca del infinito dividido en dos partes. En primer lugar se presentan algunos interrogantes acerca del infinito en su dualidad potencial-actual.	PRIMERA PARTE **REPRESENTACION** Geométrica y Verbal **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Infinito potencial • Cardinalidad • Correspondencia Uno a Uno. *Indicadores* 1.Intuición sobre el Infinito 2.Infinito Potencial 3.Infinito Actual
SP1	Contextualización	Identificar el significado del proceso de la “iteración” como acercamiento inicial con el concepto de infinito actual en una situación problema.	Utilizando como base la norma DIN que establece el formato del papel, se busca que por medio del software Cabri Geometre se hagan las construcciones correspondientes para que el docente de respuesta a los planteamientos dados y que con ayuda de la simulación, se encuentre una primera relación entre la iteración en mitades y el infinito actual	**REPRESENTACION** Geométrica y numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Semejanza • Longitud • Área *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

SP2	Estructuración	Enfrentar al docente a una modificación realizada de la paradoja de Zenón en una situación específica y determinar concepciones en torno a su planteamiento y resolución.	Por medio de la simulación y dinamismo del software Cabri Geometre, se busca que el docente realice la construcción del segmento dado y por medio de macros encuentre los puntos medios correspondientes y deduzca una posible solución a la paradoja de Zenón.	**REPRESENTACION** Geométrica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Infinito Potencial • Iteración • Segmento • Punto medio *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Intuición sobre el Infinito 2.Infinito Potencial 3.Infinito Actual
SP3	Estructuración	Relacionar los términos “auto semejanza” e “iteración” con el concepto de infinito actual en una situación problemática específica por medio de la construcción del fractal “alfombra de Sierpinski”	La construcción de la alfombra de Sierpinski se utiliza como pretexto para que, en primer lugar, se obtengan las dimensiones de un salón de clase para deducir información adicional y en segundo lugar, se utilice la iteración y auto semejanza por medio de macros y se estructure un concepto sólido del infinito actual.	**REPRESENTACION** Geométrica y Numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Polígono • Trisección de un segmento • Semejanza • Longitud *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

SP4	Validación	Aplicar los términos "auto semejanza" e "iteración" con el concepto de infinito actual en una situación problemática específica por medio de la construcción del fractal "Triángulo de Sierpinski"	La construcción del triángulo de Sierpinski se utiliza como pretexto para llegar a un concepto de infinito actual. Por medio de un proceso finito con macros y la ayuda del teorema de Pitágoras se obtendrá la respuesta a la situación problema y la modelación realizada se mostrará otra representación del infinito actual utilizando animaciones con el software Cabri Geometre.	**REPRESENTACION** Geométrica y numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Polígono Regular • Punto medio • Semejanza • Longitud • Teorema de Pitágoras • Longitud *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

Etapa De Verificación.

Finalmente se dejarán registros escritos de cada una de las intervenciones realizadas por los docentes así como también un cuestionario de salida para identificar si se modificaron o no las concepciones intuitivas sobre infinito luego de la aplicación del taller, a continuación se presentan algunas de las reflexiones a las que se esperan que los docentes identifiquen en cada actividad:

Prueba diagnóstica.

Se evidencia una concepción intuitiva sobre el infinito, pues de acuerdo con (Núñez, 1997) es más fácil comprender el infinito en lo grande como un proceso que continua sin parar y que no tiene fin, que el infinito en lo pequeño, en donde a pesar de conservarse el hecho de un proceso sin fin, aparece una nueva situación que sugiere que dicho proceso tiene un límite. Desde los primeros años de vida y aún durante la formación profesional, se asocia el infinito a la noción de crecimiento en la posibilidad de encontrar un número natural mayor a uno dado, la noción de límite, y en la cardinalidad de un conjunto numérico, por lo que se puede concluir que este objeto matemático no pasa de ser concebido como algo que no tiene fin, que no se puede contar o que no tiene límites.

Sp1.

Al realizar las construcción en Cabri se espera que el docente determine las dimensiones del papel para realizar los carnés correspondientes, sin embargo, más que el resultado numérico, se espera que en primer lugar, los docentes identifiquen que por medio de la creación de macros se pueden generan espacios geométricos infinitos en una superficie finita como lo es una hoja de papel y en segundo lugar, se genere un análisis de las potencialidades del software en la enseñanza de contextos disciplinares matemáticos pues a partir de construcciones en papel algunos de estas temáticas se mantienen de manera intuitiva, retomando lo inicialmente mencionado, conlleve a concepciones erróneas de dichos contenidos.

Sp2.

En esta situación hay una caracterización del todo como mayor que la parte. Es sin duda una de las características de los conjuntos finitos que se asocian a la noción de infinito, que además es compatible con la teoría de conjuntos estudiada en la matemática escolar. Este axioma, se constituye así en uno de los obstáculos necesarios de superar a fin de comprender una delas características fuertes de los conjuntos infinitos. (Arrigo, G. & D'Amore, B, 1999). Para esto se puedo tomar como ejemplo la cantidad de pasto de una hacienda, siendo esta última el “todo” y la cantidad de pasto que hay en el corral del ganado, “la parte”. ¿Será posible hacer ese conteo?, ¿En dónde hay mayor cantidad de pasto, en la hacienda, en el corral o tendrán la misma cantidad?

Sp3. y Sp4.

Estas dos últimas situaciones problema modelan la concepción del infinito actual, pues al tener superficies finitas en contextos reales, permite que los docentes identifiquen por medio de la iteración y la autosemejanza, la caracterización de este tipo de infinito, que como plantea De Lorenzo, permite hacer construcciones infinitas en espacios finitos. Las situaciones problema a pesar que requieren el hallazgo de una respuesta numérica a partir de la construcción de fractales y operaciones matemáticas específicas, se utilizan como pretexto para que el docente caracterice de un tipo de infinito que va en contra de lo intuitivo, es decir hacia lo grande y de algo que no termina sino también hacia lo infinito en lo finito y que a pesar de que se puede extender el proceso de iteraciones hasta donde se quiera, es necesaria la implementación de herramientas tecnológicas que permitan visualizar este otro tipo de infinito.

Resultados y Conclusiones

Con la implementación de este taller se espera que en primer lugar, se conozcan las concepciones que tienen los docentes sobre el infinito actual y se puedan abstraer sus diferencias con el infinito potencial por medio del software Cabri Geometre, en segundo lugar, se mejoren las prácticas docentes y la formalización de conceptos matemáticos abstractos intuitivos como es el caso del infinito en acto y finalmente, que para futuras investigaciones, se busque el desarrollo de habilidades espaciales y de simulación con docentes y estudiantes por medio de la resolución de problemas y situaciones de cambio e incertidumbre, siendo estos últimos algunos de los retos educativos del siglo XXI.

El concepto de infinito está muy alejado de constituir un objeto de conocimiento que las personas, especialmente los docentes de matemáticas, generan fácilmente a partir de su interacción con el mundo físico. Tanto el análisis histórico como el análisis de la resolución de las situaciones problema indican que, para que el infinito se convierta en un objeto de estudio, es necesaria la implementación de herramientas tecnológicas en el aula que permitan la modelación y simulación de este tipo de objetos matemáticos.

Finalmente, las situaciones problema sirven como pretextos para enfrentar a las personas a contextos a los cuales no sólo necesiten realizar una serie de procedimientos para encontrar la solución numérica, sino que a partir de los hallazgos encontrados, generen una reflexión de los procesos involucrados en su resolución, es decir se encuentre la aplicabilidad de las matemáticas en la vida real.

Referencias y bibliografía

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. En: Educación Matemática. México

Bolzano, B. (1857). Las Paradojas Del Infinito. En Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México

D'Amore, B. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático.* Editorial Magisterio. Bogotá

De Lorenzo, J (2001) *"El infinito matemático".* Investigación y Ciencia, temas, 23.pp4-9

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, Tirosh, & Hess. (1979). The Intuition Of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10 .pp. 2-20

Fuenlabrada I. & Armella L. (2008) Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá. MEN

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

Moreno, L.; Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity.Educational Studies in Mathematic. ,pp 211-231.

Nuñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. Educación Matemática, Madrid.

Orozco, J. (2006) Uso pedagógico de los programas Derive 6.1 y Cabri Geometré II Plus en las clases de matemáticas. Colegio Champañat. Bogotá

Uso de tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales

Eduardo Basurto Hidalgo
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

Los estudiantes de enseñanza media se enfrentan al uso e interpretación de los parámetros en funciones polinomiales, lugares geométricos y expresiones algebraicas en general. Este hecho conduce a la necesidad no sólo de diferenciar los parámetros de otro tipo de literales como variables o incógnitas, sino también dar un sentido de uso a los mismos con la finalidad de agrupar los objetos matemáticos en entidades más generales como son las familias de funciones. El presente taller tiene como objetivo mostrar la influencia que puede tener el uso de un recurso tecnológico dinámico en la comprensión de esta polisemia de las literales, así como en la optimización de la ideas como puede ser la generalización.

Palabras clave: entornos tecnológicos, funciones polinómicas, polisemia de las literales, parámetros y familias de funciones.

Introducción

Desde la década de los años ochenta, la literatura de investigación sobre el tema, advierte que los estudiantes son enfrentados a una *polisemia* de las literales, es decir, a diferentes significados atribuidos a una misma literal, involucrada en los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática escolar. De los primeros autores en señalar este fenómeno, se encuentran Usiskin (1988) y Küchemann (1981) que de manera general identifican tres usos de las literales (ver Tabla 1).

Tabla1.Uso de las literales

Incógnitas específicas	Donde la literal tiene un valor desconocido como en las ecuaciones
Números generalizados	Donde la letra puede tomar más de un valor, como en el caso de patrones en sucesiones numéricas o figurativas
Variables en relación funcional	Donde las literales representan un rango específico de valores y existe una relación entre dos conjuntos numéricos.

A la polisemia anterior se unen otro tipo de literales llamados *Parámetros*, surgidos en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias, expresiones algebraicas en un nivel aún más abstracto. Por ejemplo, y = ax significa "y es una función lineal de x, donde a es un parámetro, pero puede leerse también como el lugar geométrico de una recta que pasa por el origen con pendiente a. En cursos de Pre-Cálculo existe una presencia abundante de *Parámetros,* en objetos tales como familias de funciones, lugares geométricos e incluso en expresiones algebraicas que modelan diversos fenómenos.

Antecedentes

El hombre ha extendido sus capacidades cognitivas vía la interacción con herramientas materiales y simbólicas. El desarrollo del conocimiento ha estado acompañado de las tecnologías cognitivas. Investigaciones como las de Duval (1998), D'Amore (2001), han afirmado que la actividad matemática, es esencialmente simbólica. Por otra parte, ha surgido una creciente utilización de la tecnología digital en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como lo muestran Arzarello (2004), Borba y Villareal (2006), Artigue (2002), Verillon y Rabardel (1995), Guin y Trouche (1999), etc.

El presente taller toma como punto de partida una investigación realizada sobre la conceptualización de parámetros a través de entornos tecnológicos dinámicos. En nuestro estudio analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión sígnica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser "una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento". La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado génesis instrumental.

El proceso de génesis instrumental, según Artigue (2002), se desarrolla en dos direcciones:
La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como: *instrumentalización del artefacto*
La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: *instrumentación*

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental (ver Figura 1).

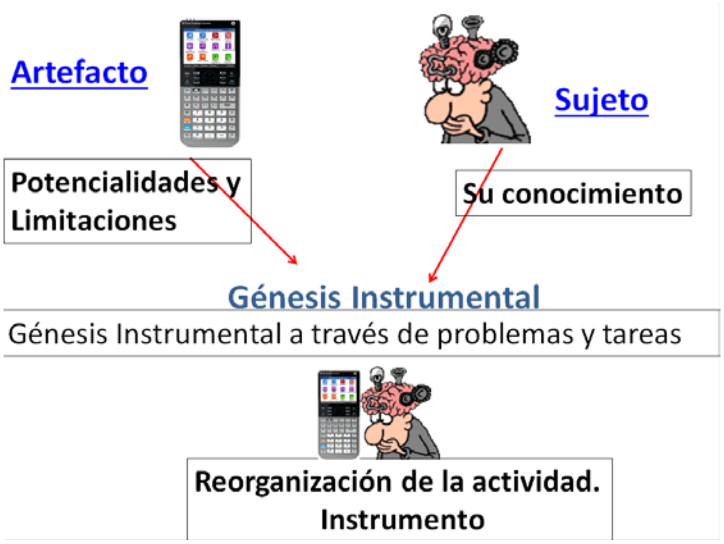


Figura 1. Génesis Instrumental.

En lo referente al análisis de las limitaciones del artefacto Guin y Trouche (1999) las clasifican en tres tipos:

- *Limitaciones internas*, relacionadas con las representaciones intrínsecas en que el artefacto exhibe los objetos así como a los procesos de cálculo. Esto se debe a que las representaciones de los objetos en papel y lápiz pueden cambiar al introducirlos en el medio tecnológico y mostrarlos en su propia forma de representación.
- *Limitaciones de comando*, respecto a las posibilidades de acción proporcionadas al usuario, es decir, son los requerimientos sintácticos que deben ser memorizados por los estudiantes para operar con el dispositivo digital. Esta limitación refleja el entrenamiento adquirido por el estudiante sobre el conocimiento de las funciones del artefacto, es una limitación de interface.
- *Limitaciones de organización*, referidas no sólo a las funciones de cada comando sino a la relación de dichos comandos para poder establecer planes de acción.

Las potencialidades del artefacto serán identificadas dependiendo de su complejidad, de acuerdo a las especificaciones del mismo en el sentido de qué tantas funciones pueda ofrecer, así como la manera en que éstas puedan simplificar la consecución de las tareas.
El conocimiento del sujeto manifiesta su concepción sobre los objetos trabajados en el artefacto. Comúnmente los estudiantes tienen sus planes de acción fuera del artefacto, representados por sus técnicas con papel y lápiz.
Los alumnos, deben combinar estas técnicas con el artefacto a través de la resolución de problemas, y es en esta vinculación de ambientes donde se produce la génesis instrumental.
Otros aspectos importantes a considerar son los procedimientos llevados a cabo con el instrumento, es decir, la ejecución de los planes de acción o también llamados técnicas instrumentadas que tienen un valor técnico por sí mismas, pero deben ir de la mano con el discurso teórico para no convertirse en rutinas de memoria.
Como menciona Artigue (2002) las técnicas instrumentadas tiene un valor epistémico que contribuye a la comprensión de los objetos generalizados no accesibles a los estudiantes de forma inmediata.

El convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas. Y esto necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo obtenido con lápiz y papel. Desgraciadamente, tales tareas no son creadas tan fácilmente cuando se entra en el mundo de la tecnología con una cultura de lápiz y papel (Artigue, 2007).

Investigaciones sobre parámetros.

El parámetro como generalizador en la resolución de problemas.

Drijvers (2003), realizó una investigación sobre el aprendizaje del concepto de parámetro que incluyó el uso de ambientes tecnológicos y a partir de la cual ha podido generar aseveraciones como las siguientes: "El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro es considerado una meta – variable: la a en y=ax+b puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición, una cantidad desconocida o que cambia pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular, sino completamente a la gráfica. Los diferentes roles de las variables son nuevamente considerados, pero ahora en un nivel más complejo, y la función genérica se convierte en el objeto de estudio. El concepto de parámetro resalta la abstracción de situaciones concretas. Las representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes" (Drijvers, 2001, p.222).

Dentro de nuestra investigación se realiza un análisis conceptual del fenómeno parámetro que permite identificar los tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador. El rol de parámetro como incógnita no es explícito ya que tiende a cambiar la jerarquía entre parámetro y variable.

La siguiente tabla muestra las categorías de análisis del parámetro tomadas por Drijvers (2001) en el escenario didáctico (ver Tabla 2)

Tabla2.
Roles del Parámetro

Rol del parámetro	*a en y = ax + b*	*Modelo gráfico*	Actividad del estudiante	Función del CAS
Fijador de posición	*a* contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra	Variación sistemática de los valores de un parámetro	Resolver ecuaciones, sustituir gráficas animadas
Cantidad que cambia Parámetro que se desliza	*a* transita a traves de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rapidamente las páginas de una historieta		
Generalizador Parámetro que determina una familia	*a* representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas	Generalización de situaciones y soluciones	Gráficas de grupos Resolver ecuaciones paramétricas.

La investigación de Drijvers (2001) además de tener en común con la nuestra, el análisis de los parámetros, comparte la postura hacia la tecnología del grupo francés de Artigue, Trouche y Guin (1999), señalando, que el uso adecuado de un CAS requiere hacer explícitos los diferentes roles de las literales a diferencia del trabajo con lápiz y papel como parte del proceso de convertir un artefacto en instrumento. Dentro de las conclusiones de esta investigación destaca el hecho de que el escenario didáctico confirmó que el CAS fue útil para utilizar el parámetro como generalizador en la resolución de problemas en los que intervienen expresiones algebraicas tales como ecuaciones o funciones. El uso de la máquina libera a los estudiantes de la preocupación sobre los cálculos y enfatiza una concepción global de los procedimientos de solución.
Distinción del uso de literales como parámetros del uso como variable.

Bloedy – Vinner (1994)~~,~~ realizó una investigación con estudiantes de bachillerato en Israel con el propósito de distinguir el uso de literales como parámetros del uso como variable. Menciona que los parámetros se estudian tanto de manera explícita como implícita, cuando se analizan familias de ecuaciones, familias de funciones, en problemas de enunciado verbal y otros tipos de problemas matemáticos.

Bloedy – Vinner (2001)~~,~~ menciona que para analizar las dificultades de los estudiantes en entender la noción de parámetro, y distinguirla de incógnitas y variables, primero se debe explicitar la distinción entre ellas como es asumida para la comunidad matemática. Esta noción tiene dos componentes, una proveniente del contexto donde hay que distinguir cuáles son parámetros y cuáles son variables. El segundo componente se refiere a los diferentes roles de los parámetros, incógnitas y variables.
Cuando se preguntó a un grupo de alumnos de nivel medio cuál era el rol de un parámetro, un estudiante dijo: *Es una constante*. El grupo completo dijo *pero varía*. Otro sujeto comentó: *Es una variable con valor constante*. En esas respuestas hay un conflicto entre si el parámetro es constante o variable (Bloedy – Vinner, 2001, p. p. 180).

Fundamentación del taller

En la investigación de referencia a la propuesta de taller que presentamos, acudimos a estudiantes de nivel bachillerato en la ciudad de México, jóvenes de edades entre 15 y 17 años, a los cuales, se aplicaron cuestionarios exploratorios en papel y lápiz para indagar sobre las ideas y uso que tenían al respecto de los parámetros. Se impartieron sesiones de enseñanza en ambientes tecnológicos como TI-Navigator y Geogebra utilizando tareas y problemas relacionados con funciones constantes, lineales y cuadráticas. Todas las sesiones de enseñanza fueron video grabadas, y analizadas para poder extraer fragmentos que nos otorgaran evidencia empírica para responder cuestionamientos sobre el tema, a saber: ¿Cómo contribuyen los entornos tecnológicos en la distinción de los usos de las literales y en la visualización de la representación gráfica de funciones polinomiales al variar los parámetros que intervienen en las mismas? ¿Puede el uso de entornos tecnológicos favorecer la comprensión de la noción de parámetro involucrada en funciones polinomiales?

Con el fin de responder estas interrogantes se propuso una ruta didáctica, construida por medio de trayectorias hipotéticas de aprendizaje conformadas por secuencias de tareas, donde se pretenden capturar los hitos fundamentales que conducen al avance progresivo del conocimiento.

Dentro de nuestra investigación se realiza un análisis conceptual del fenómeno parámetro según Drijvers (2003) quien en su investigación sobre el aprendizaje del concepto de parámetro incluyó el uso de ambientes tecnológicos y a partir de la cual ha podido permite identificar los tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Las rutas didácticas fueron ensambladas y analizadas bajo las perspectivas teóricas antes mencionadas y hemos encontrado los siguientes aspectos relevantes respecto a la diferenciación de parámetros y variables a partir de entornos tecnológicos. Las trayectorias hipotéticas trazadas en la ruta didáctica, mostraron un avance en la noción de parámetro ya que se crea una concepción de naturaleza más continua que discretizada debido a las ventajas dinámicas de la herramienta a diferencia de la enseñanza regida por la cultura de papel y lápiz, en la que comúnmente se utilizan solamente medios estáticos de representación de objetos matemáticos, lo cual hace que la evolución de lo discreto a lo continuo en el estudio de funciones, se logre en periodos de tiempo más largos y en un menor número de estudiantes. Podemos también destacar que las potencialidades dinámicas de manipulación de objetos, permitió llevar las exploraciones de los efectos de los parámetros en gráficas correspondientes a expresiones como $f(x) = ax+b$ y $f(x)= ax^2+bx+c$.

Desarrollo del taller

Debido a que los avances antes mencionados se lograron a través de la conjunción de dos entornos tecnológicos, nos dimos a la tarea de buscar algún dispositivo digital que pudiera integrarlos en una sola herramienta, llevándonos al conocimiento de un nueva tecnología desarrollada por Hewlett-Packard, conocida como HP Prime Graghing Calculator, en la cual es posible condensar las bondades encontradas de los entornos anteriores en uno solo, además de ofrecer una mejor interfaz de uso para estudiantes tanto de nivel secundaria como pre-universitarios, además de que en la reformulación y primeras puestas en marcha de las rutas didácticas en este nuevo instrumento digital parecen ofrecer mayor ergonomía cognitiva, la cual favorece una mayor centración del análisis de los objetos matemáticos en cuestión sin necesidad de desviar la atención demasiado en los vericuetos de instrumentalización del propio artefacto. El dispositivo físico en cuestión y su versión digital para PC se muestran en la Figura 2.

Figura 2. Dispositivo HP Prime Físico y Virtual.

Dentro del el taller que será dividido en tres partes ajustadas al tiempo indicado por comité organizador del evento en la primera tercera parte del mismo mostraremos el tipo de actividades

y problemas desarrollados en la investigación previa al respecto de la conceptualización de parámetros, así como del estudio realizado con el uso de tecnología digital para su exploración., junto con sus antecedentes y resultados obtenidos.
En la segunda parte del taller se mostrarán las funcionalidades de la nueva herramienta HP Prime Graghing Calculator, con la finalidad de que el público asistente las reconozca y desarrolle uso básico de algunas de las aplicaciones principales haciendo visible la sencillez en el tránsito de las categorías conceptuales del parámetro aportadas por Drijvers, a través de cuatro de sus principales aplicaciones, función, Creación de gráficas, Explorador cuadrático, Explorador lineal (ver Figura 3).

Figura 3. Indicar el título.

Mostrando que por medio de un orquestación instrumental de aplicaciones, podemos lograr diferentes acercamientos a la noción de parámetro, así como de su influencia en funciones lineales y cuadráticas, dejando entre ver que su adecuado manejo didáctico en la enseñanza de las matemáticas en la educación media permite al estudiante concebir este uso de la literal como un potente generalizador de ideas capaz entre otras cosas de agrupar los objetos matemáticos en cuestión en familias de funciones.
En el último tercio del taller se pedirá la solución de algunos problemas vía el uso de las aplicaciones exploradas en la HP Prime Graghing Calculator relacionadas con el uso de parámetros. Tales como pedir condiciones específicas que deben cumplir ciertas gráficas, asociadas y no asociadas a fenómenos contextualizados como elongación de resortes, caída libre, uso de proyectores de video, entre otros.

Expectativa del taller

A lo largo del taller, se discutirán las potencialidades y limitaciones del uso de este tipo de dispositivos digitales y de otros como pueden ser incluso software libre, como posibles recursos que puedan ayudar en potencializar la conceptualización del uso de la literal como parámetros, la cual es un tema poco explorado tanto en la investigación como en la puesta en marcha de orquestaciones didácticas en favor de su comprensión en la enseñanza regular de las matemáticas escolares; de igual manera se tomara lo explorado para que los asistentes reflexionen sobre otro tipo de objetos matemáticos que consideren relevantes para realizar indagar sistematizadas sobre la exploración de los mismos en sus versiones digitales.

Referencias

Artigue, M. (2002). "Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 7(3), 245 – 274.

Artigue, M. (2007). "*Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*". Historia y perspectiva de la Educación matemática. Memoria de la XII CIAEM. P. 9 – 21.

Arzarello, F. (2004). *Mathematical landscapesand their inhabits: perceptions, languages, theories.* Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.

Bloedy-Vinner, H. (1994). "The analgebraic mode of thinking – The case of parameter", En Ponte, J. P. y Matos, J.F. (eds), *Proccedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 82-95). University of Lisbon, Lisbon – Portugal.

Bloedy-Vinner, H. (2001). "Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra", Em R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school Algebra* (pp.177-189). Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Borba, M; y Villareal, M. (2006). *Humans – with – Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer.

D´Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position <<naïve>> dans une théorie <<réaliste>> contre le modèle <<anthropologique>> dans une théorie <<prgamatique>>. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).

Drijvers, P. (2001). *The concept of parameter in a computer algebra enviroment.* En H. Chick et al. (eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Vol. 1 (pp. 221-227). The University of Melbourne, Australia.

Drijvers, P. (2003). The concept of parameter in a computer algebra environment. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics *education, Vol 2* (pp. 385-392). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Duval, R. (1998). *Signe et objet, I et II. Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasburg, 6, 139-196.

Godino, J.D; y Batanero, C. (1999). *The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics.* Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.

Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3)195 – 227.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102 – 119). London: Murray.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook of the NCTM* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vrillon, R y Rbardel, G (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1): 77 -101.

Posters

Abriendo puertas

Sonnia **Méndez** Matos
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
soquime21@hotmail.com
Bárbara **Campos** Guzmán
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
bcampos26@hotmail.com

El propósito de este póster "Abriendo puertas" es socializar una experiencia en el marco del Programa Escuelas Efectivas- PEF, componente Matemática al incorporar una escuela especial para estudiantes con discapacidad auditiva, a fin de sensibilizar y promover la construcción de una sociedad cada vez más inclusiva. Este programa con el auspicio de la Agencia Interamericana de Desarrollo de Los Estados Unidos-USAID y bajo la ejecución de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra- PUCMM se desarrolla en algunas escuelas de la Región del Cibao y en las escuelas del Distrito 15-05, en Santo Domingo Oeste, en la República Dominicana. El programa, que asume el modelo Good and Grouws, como estrategia pedagógica… "busca contribuir de manera significativa con el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes del primer ciclo de la Educación Básica, a través de intervenciones dirigidas a mejorar la efectividad de los docentes del sector público del primer ciclo de la educación básica" (Valverde, González, 2011).

En el año 2009 inicia en Santo Domingo este programa, implementándose en 24 escuelas del Distrito 15-05 en una primera fase y en una segunda fase (2012-2013) en 19 escuelas. Pero existían 3 escuelas del Distrito que por distintas razones no se habían incorporado; entre éstas, el Instituto de Ayuda al Sordo Santa Rosa, estaba particularmente interesado. Cuando se recibió la solicitud, por intermedio de una técnica distrital relacionada con el programa se analizó la pertinencia, porque se creó cierta expectativa por la naturaleza del centro. Después de consultar la Coordinación General del programa se asumió el reto, considerado como tal, porque hasta el momento, en el PEF no se había incluido ninguna escuela especial, porque no se concibió con tales fines.

En la actualidad participan 22 escuelas del Distrito 15-05. El programa se aborda desde dos vertientes: una enfocada en el desarrollo de jornadas de capacitación que incluye el uso de estrategias y recursos para posibilitar aprendizajes y reflexiones que confrontan y complementan experiencias pedagógicas variadas entre especialistas del área y docentes; la otra es un proceso de acompañamiento del docente en su aula, que implica observación y reflexión posterior sobre la clase observada, en busca de mejoras. Para enriquecer las clases de Matemática el programa entrega a cada escuela una caja con material educativo. Cada niño tiene un libro de texto "Explora la matemática, elaborado por el equipo de del Programa Además, a cada docente participante se le entrega otra caja con manipulativos y material gastable para elaborar otros recursos. El Instituto de Ayuda al Sordo Santa Rosa fue incluido con las condiciones regulares con las que se ejecuta el PEF en el resto de las escuelas; el Instituto atiende una población de 60 niños/as con pérdidas auditivas en el primer ciclo, con una sección por grado. Participan 5 docentes en el PEF, además de la coordinadora del ciclo. Los aprendizajes en esta experiencia fueron para todos: acompañantes, docentes y estudiantes. Los niños asumieron la presencia de las acompañantes en sus clases de Matemática con naturalidad y las acompañantes admiradas de las posibilidades de los niños, ya que en las primeras visitas algunos niños no se atrevían a participar en las clases y luego lo hacían como los demás. Las docentes asistieron regularmente y con una participación satisfactoria a las jornadas de capacitación, las cuales incluyeron modelación de clases con el modelo asumido por el programa, talleres, análisis de los contenidos del currículo de Matemática para el ciclo, entre otros. En los espacios de reflexión las docentes socializaban sus ideas y en algunas ocasiones sus experiencias particulares en la escuela.

Entre los logros a destacarse en esta experiencia cuentan: Docentes motivadas preparan las clases utilizando recursos y estrategias sugeridas en las jornadas de capacitación. Niños más interesados por participar y aprender en las clases de Matemática, las cuales se convertían en espacios de construcción colectiva de conocimientos. Niños que muestran habilidades en el manejo de los recursos como los bloques de base 10, las cintas métricas y otros proporcionados por el programa. A este respecto, la directora del centro, Onelia Aybar resalta en documento enviado a la coordinación del programa "Esta clase se ha convertido en una de las más esperadas por los estudiantes, por lo interesante, amena e interactiva que les resulta. Es maravilloso el asistir a las clases de nuestros niños y niñas con sordera y observar su comprensión de los distintos temas, gracias a las novedosas estrategias que están utilizando las maestras, apoyadas en el material manipulativo donado por el programa".

La enseñanza que deja la experiencia en esta escuela, que en estos momentos arriba a su segundo año en el PEF lleva a la siguiente conclusión " los niños con discapacidad auditiva también pueden aprender Matemática como otros niños del programa, por lo tanto no deben subestimarse ya que con las estrategias y los recursos adecuados se pueden viabilizar sus aprendizajes.

Referentes Bibliográficos

Taller sobre elaboración de pósters científicos
http://www.occ.upf.edu/img/imatges_cms/manualposters.pdf
Consejos para elaborar un panel o póster para una reunión científica
http://travesia.mcu.es/documentos/posters.pdf
Experiencias en la Enseñanza de los Contenidos Matemáticos con Alumnos con Discapacidad Intelectual y Auditiva.
http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/escuela/documentos/publicaciones/ExperienciasMatematicas.pdf
Valverde,G. y Gonzalez, S. (06 de 2011). *CIAEM*. Recuperado el 10 de 08 de 2013, de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/982/151
Good, T., Grouws,D., y Ebmeier, H. (1993). *Active Mathermatics teaching*. New York: Research on teaching , Monograph series.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Al abordaje de las estructuras lógicas de la Lengua de Señas Mexicana (LSM)

Elizabeth **Becerra** Ramos
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.
México
ebecerra@cinvestav.mx
Ricardo **Quintero** Zazueta
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.
México
quintero@cinvestav.mx

Durante siglos se ha debatido acerca de los problemas de comunicación y de educación de los Sordos. Alrededor de 1880, incluso se prohibió a alumnos y maestros el uso del lenguaje de señas durante la escolaridad. Posteriormente alrededor de los sesentas, el reconocimiento científico del lenguaje de señas como una lengua natural, dio un giro en la manera de investigar a las comunidades de Sordos.

Partiendo del reconocimiento de los lenguajes de señas como lenguas naturales, y de una cultura Sorda, trabajamos desde una perspectiva sociocultural, abordamos los problemas del Sordo como los problemas de una minoría lingüística y cultural, no desde una perspectiva médica.

Vygostki (1995, 1997) señala que el desarrollo de funciones psicológicas superiores requiere mediación, cultura, un instrumento cultural; el instrumento cultural más importante es el lenguaje. Además el niño Sordo puede lograr en el desarrollo lo mismo que el oyente, pero lo logran de distinto modo. La clave será la compensación: el uso de instrumentos culturales alternativos. Algunos de estos instrumentos culturales pueden ser mediados por la lengua de señas, que a su vez es el principal instrumento cultural de la comunidad Sorda.

Por otro lado la actividad de matematizar, es decir cuantificar, clasificar, medir, comparar, en menos palabras: abstraer y generalizar, pueden ser las mismas entre diferentes culturas, pero su organización funcional puede ser muy distinta, por que los miembros de cada una, tienen sistemas de representación distintos. La matemática es pues un fenómeno cultural (Moreno, 2006).

En la cultura oyente el conocimiento matemático se conserva, comunica y disemina socialmente a través de lenguajes orales, escritos y simbólicos especializados, propios de la matemática. Pero podrían desarrollarse instrumentos culturales alternativos para el conocimiento matemático mediado con la LSM.

Además, el razonamiento matemático no se lleva a cabo enteramente en una lengua natural. Utiliza ciertas representaciones visuales y sistemas de signos sobre las cuales se razona y opera, la lengua natural funciona como metalenguaje para controlar y explicar el trabajo con representaciones y signos, y para formular explícitamente conceptos y teorías. Este metalenguaje puede ser la lengua de señas.

En este trabajo queremos mostrar las nuevas perspectivas de investigación que surgen de una pesquisa previa, en la cual los alumnos partieron de una actividad visual sobre el Teorema de Pitágoras, mediada por la LSM y lograron una representación algebraica ($a^2+b^2=c^2$) véase (Becerra y Quintero 2011). Quisiéramos en futuras intervenciones lograr que realicen una demostración algebraica del Teorema de Pitágoras (por ejemplo), en donde la lengua natural juegue el papel de metalenguaje. Pensamos que puede accederse mediante la LSM a lenguajes simbólicos especializados, sistemas de signos de la matemática (como el álgebra elemental), sin la mediación del español escrito

A pesar del reconocimiento de los lenguajes de señas como lenguas naturales los estudios de las lenguas viso-gestuales-somáticas con herramientas de la lingüística son muy pocos y se han enfocado en el análisis de la fonología, la morfología y la sintaxis. En particular los estudios de la LSM son contados, estudios sobre argumentación y razonamiento deductivo son nulos.

No es suficiente saber LSM para poder generar los instrumentos culturales que ayuden a las personas Sordas acceder al conocimiento matemático, se necesita una mejor compresión de la LSM, es necesario investigación para entender mejor algunas de las construcciones de la lengua de señas, por ejemplo la manera en que se manejan conectivos e implicaciones lógicas, para trabajar temas matemáticos. Es imperioso investigar cuales y como son las estructuras lógicas en la LSM.

Hemos indagado en videos arbitrados o aceptados por la comunidad Sorda, expresiones lingüísticas en LSM que contienen conjunciones y disyunciones, además algunas oraciones que expresan condiciones. Sin embargo, en la mayoría de las oraciones los conectivos sólo son utilizados como conectivos gramaticales y no lógicos.

Nuestra propuesta es mostrar la importancia y necesidad de analizar la LSM desde la lógica matemática, para poder construir los instrumentos adecuados mediados con la lengua de señas para dar acceso a los lenguajes simbólicos y /o formales de la matemática, sin la mediación del español escrito.

Quisiéramos que sea la matemática, mediante la LSM, la que permita a los Sordos acceder al conocimiento del que han sido excluidos; que permita el desarrollo del pensamiento y que fortalezca su cultura y su lengua.

Referencias y bibliografía

Becerra, E. y Quintero, R. La Lengua de Señas Mexicana (LSM) como mediador entre el Sordo y la Matemática. Em: Conferência Interamericana de Educação Matemática (13: 2011 :Recife, PE). *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática : 26 a 30 de junho, Recife, PE / Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. – Recife: EDUMATEC-UFPE, 2011*
http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/438.pdf (22 de sep. de 2013)

Moreno, L. (2006). *El signo y la mediación: Lenguaje y Matemáticas.* "Escriviendo", revista pedagógica, 7, 3-6.

Sacks, O. (2003). *Veo una voz: viaje al mundo de los sordos*. Anagrama, colección argumentos. Barcelona, España.

Stokoe, W. (1960). *Sign Language Structure*. Reedición. Silver Spring, Md: Linstok Prees.

Vygotski, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidos.

Vygotski, L. (1997). *Obras Escogidas*. *Tomo V.* Madrid: Visor

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Diferencias por género en Matemáticas: La brecha continua

Tulia Esther **Rivera** Flórez
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
trivera@uis.edu.co
Adriana Alexandra **Albarracín** Mantilla
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
albarram66@hotmail.com
María Angélica **Toscano** Salas
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
mariatoscanosalas@gmail.com

Introducción

La historia muestra que hasta inicios del siglo XX las mujeres en Colombia se preparaban para ejercer su papel de madres y esposas, en 1932 (Ley 28) se les reconoció la igualdad en cuanto a derechos civiles, pero sólo hasta 1958 adquirieron el derecho a votar[1]. La inclusión de la categoría de género en las políticas educativas aparece en el plan decenal de educación (1996-2004). Actualmente, cerca del 52% de la matrícula en educación superior corresponde a mujeres, también se cuenta con los lineamientos en los que se enmarcará la política pública nacional de equidad de género para las mujeres que junto a otras disposiciones pretenden disminuir las brechas y la transformación cultural en pro de la mujer colombiana[1].

Pese a estos antecedentes, a inicios de este año, el New York Times analizó los resultados del desempeño en ciencias obtenido por jóvenes de 15 años, la clasificación ubica a Colombia como uno de los países con más amplia brecha en cuanto a diferencias por género[2]. Esta preocupante referencia y el interés por aportar en el campo de estudios de género y educación

[1] Educación de la mujer en Colombia entre 1780 y 1930. Academia antioqueña de historia. Recuperado en http://www.lestonnac.org/doc_noticias/villegas.pdf

[2] Datos provenientes de una prueba estandarizada administrada por Organization for Economic Cooperation and Development

motivaron la realización de este trabajo. El objetivo es mostrar el rendimiento en matemáticas discriminando por género en diferentes contextos de evaluación.

Resultados

Pruebas SABER-PRO 5° y 9°

En 2012 se evaluaron cerca de 2,4 millones de estudiantes matriculados en estos grados, la prueba evaluó lenguaje, matemática y ciencias. En Matemáticas se incluyen los componentes Numérico-Variacional, Geométrico-métrico y Aleatorio. Se hacen dos tipos de aplicaciones una censal y otra muestral que obedece a un experimento controlado. Un resumen de los datos muestrales se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Distribución por nivel de desempeño prueba SABER-PRO 2012

		Nivel de desempeño en Matemáticas				
		Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado	Total
5°	Niñas	14802 (45%)	10526 (32%)	5262 (16%)	2302 (7%)	32892
	Niños	14142 (42%)	10101 (30%)	6397 (19%)	3030 (9%)	33670
9°	Niñas	8848 (30%)	15632 (53%)	4424 (15%)	589 (2%)	29493
	Niños	5568 (21%)	13524 (51%)	6099 (23%)	1325 (5%)	26516

Fuente: Página web del ICFES, ftp://ftp.icfes.gov.co/

Sobre estos valores el ICFES, ente gubernamental que organiza y administra la prueba concluye [2]: "En 5°, no se presentan diferencias apreciables entre los resultados de niñas y niños, aunque es menor el porcentaje de hombres ubicados en nivel insuficiente y mayor la proporción que alcanza o supera el nivel satisfactorio". Para 9°, " los resultados por género muestran una proporción similar de niños y niñas que se ubica en el nivel mínimo. No obstante, mientras 28 de cada 100 hombres alcanzan o superan los aprendizajes esperados en el área, sólo 17 de cada 100 mujeres lo hacen. Además, hay una mayor proporción de niñas que no logran los aprendizajes mínimos. Estos resultados son preocupantes, pues revelan una brecha entre géneros en detrimento de las mujeres".

Olimpiadas Regionales de Matemáticas (2012)

La competencia se realiza anualmente y los participantes provienen de los municipios pertenecientes al departamento de Santander, región nororiental de Colombia. La Tabla 2 permite comparar la distribución de los puntajes obtenidos por todos los inscritos en la competencia (Fase clasificatoria) y la fase final a la que acceden sólo los mejores participantes de cada nivel.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de la distribución de los puntajes en las Olimpiadas Regionales.

		Fase Clasificatoria								**Fase Final**							
Nivel		n	$\bar{x}$	P_{50}	s	CV	P_{25}	P_{75}	Max	n	$\bar{x}$	P_{50}	s	CV	P_{25}	P_{75}	Max
Avanzado 10° y 11°	M	883	14	15	9,0	62%	9	20	**46**	7	5	3	5,3	110%	1	**6**	**16**
	H	961	16	15	9,4	59%	10	21	**52**	14	12	13	9,4	76%	2	**19**	**27**

Medio 8° y 9°	M	574	12	10	7,5	63%	5	15	**41**	8	6	4	5,7	98%	1	11	**15**
	H	780	12	10	7,4	61%	5	16	**55**	14	6	6	4,9	78%	2	9	**18**
Básico 6° y 7°	M	566	11	10	7,3	66%	5	15	**40**	8	7	6	5	71%	2	11	**16**
	H	702	11	10	7,4	64%	5	15	**40**	14	8	7	6,2	79%	2	12	**21**

En la fase clasificatoria las distribuciones de los puntajes para hombres y mujeres son similares, las diferencias importantes se observan sólo en el puntaje máximo alcanzado en el nivel avanzado. En general se observa bajo rendimiento en la fase final, en el caso de las mujeres el máximo puntaje obtenido no supera los 16 puntos en una escala de 0 a 36 lo cual puede interpretarse como que la mejor competidora responde a menos de la mitad de la prueba que en esta fase contiene sólo preguntas abiertas y demostraciones, se observa alta variabilidad en los resultados (ver CV= coeficiente de variación en la Tabla 2). También, debe resaltarse el nivel de participación en las finales, podría decirse que hay una mujer por cada dos hombres, sólo en el nivel avanzado hay evidencia de superioridad masculina (ver n = tamaño de muestra, P_{75}= percentil 75 y Max = Puntaje máximo en la Tabla 2).

Resultados Curso de Cálculo I

Los siguientes son los resultados de los estudiantes matriculados en el curso de Cálculo I de la Universidad Industrial de Santander. Para calcular el intervalo de confianza para la diferencia en los puntajes promedios por género se seleccionó una muestra aleatoria en cada semestre.

Tabla 3 Resultados del desempeño en el curso de Cálculo I.

Año	Semestre	Matriculados en Cálculo I	% Mujeres		Resultados basados en una muestra aleatoria						
					Promedio	Aprobado	P_{50}	P_{75}	P_{90}	IC 95% para la diferencia	Valor P
2011	I	1390	31.22%	H	2.72	47%	2.8	**3.5**	**4.3**	-0.36 - 0.63	0,25*
				M	2.58	41%	2.7	**3.0**	**3.4**		
	II	1334	34.48%	H	2.08	28%	2.3	3.0	3.5	-0.48 - 0.49	0.49*
				M	2.07	24%	2.3	2.9	3.8		
2012	I	1225	33.30%	H	2.47	43%	2.5	3.3	**3.7**	-0.61 - 0.29	0.24*
				M	2.63	50%	2.9	3.2	**3.4**		
	II	974	40.34%	H	2.24	29%	2.3	3.1	**3.7**	-0.71 - 0.33	0.23*
				M	2.43	40%	2.5	3.1	**3.3**		

Fuente: Registro de notas, Escuela de Matemáticas-UIS *Prueba no significativa (α=0,01)

Es preocupante el desempeño de los estudiantes en este curso, sin embargo, los porcentajes de aprobación, los valores p y los intervalos de confianza en la Tabla 3 indican que en promedio no hay diferencias significativas en el rendimiento debidas al género; los percentiles 75 y 90 revelan leves diferencias en la parte derecha de la distribución de las notas a favor de los hombres. La muestra nos permite confirmar que hay una menor participación de mujeres en programas de Ingeniería y Ciencias Básicas aunque los porcentajes observados admiten la posibilidad de estar experimentando una tendencia creciente.

Discusión

Las evidencias encontradas sugieren que las diferencias por género en el rendimiento en Matemáticas se hacen presentes a partir de la adolescencia y se hacen más notorias cuando se analiza a los más talentosos, en este subgrupo hay mujeres que se destacan por su desempeño pero hay alta variabilidad en los puntajes. Uno de los aspectos más notorios en el estudio es la reducción en el porcentaje de participación femenina conforme se avanza en el sistema escolar llegando al punto que en programas universitarios que incluyen formación en Cálculo se ha llegado a tener una mujer por cada tres hombres; sin embargo, en el rendimiento no hay diferencias debidas al género en este nivel.

Bibliografía:

[1] Consejo nacional de política económica y social. (2013): Documento CONPES Social. Departamento nacional de planeación-Colombia.

Referencias electrónicas:

[2] Informe nacional de resultados, ICFES, 2013. Recuperado en http://54.208.2.57/datos/Informe%20nacional%20de%20resultados%20de%20SABER%205o%20y%209o%202009.pdf

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Diseño de un aula virtual de matemática I

Dorenis Josefina **Mota** Villegas
Departamento de Formación General y Ciencias Básicas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
dorenismota@usb.ve
Ricardo Enrique **Valles** Pereira
Departamento de Formación General y Ciencias Básicas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
revalles@usb.ve

En este poster se presentará la descripción general del diseño de *un aula virtual* para la asignatura de Matemática I, de código FC-1129, que forma parte del programa básico de las carreras cortas afines a la administración y economía que se imparten en la Universidad Simón Bolívar, Sede Litoral, Venezuela (USB-SL); la cual tiene como propósito ser un complemento de las clases presenciales de Matemática I, pero que se cree, puede ser un primer paso para la creación, en un futuro próximo, de una modalidad de enseñanza b-learning y posteriormente e-learning.

En ese sentido, la plataforma utilizada para el diseño del aula virtual fue la proveniente de un software libre: Moodle, con la cual cuenta la USB-SL y además ha capacitado a los docentes en para su manejo e implementación mediante cursos y talleres de desarrollo profesoral; adicionalmente esta plataforma permite, entre otras cosas, crear cursos de aprendizajes en línea. El diseño estuvo fundamentado en cuanto a la estructura de la información en la Teoría de las representaciones y el Aprendizaje matemático (Duval 1995, 2006; D´Amore, 2004 y Rojas, 2012), y la Teoría conectivista del aprendizaje (Siemens, 2004); en lo referente a la forma y estilo se basa en la metodología de la lectura y escritura de la imagen digital (Azzato, 2012).

Adicionalmente, en cuanto a la estructura general del diseño, se tomó en consideración la *teoría de los organizadores del conocimiento* de Ausubel (1983), mediante la cual podemos señalar que la incorporación lógica y la organización de los recursos virtuales de enseñanza y aprendizaje puede ser posible por medio de: 1.- la producción de sistemas de acoplamiento de aprendizajes nuevos a los conocimientos previos del estudiante es decir, diseñar recursos que sirvan de "anclaje" entre lo que el discente ya conoce y lo que se le pretende enseñar. 2.- La inserción de estrategias metodológicas que involucren la confirmación, la realización de las actividades, su revisión contante y su retroalimentación 3.- El diseño y la aplicación de acciones tutoriales que supervisen la consistencia metodológica de los recursos creados y 4.- El diseño de diferentes actividades que permitan al estudiante aplicar lo aprendido en diversas situaciones con la finalidad de que lo aprendido sea significativo y se posicione en la memoria a largo plazo del estudiante para que en el futuro ese conocimiento sea la base de otro conocimiento nuevo.

De manera resumida, podemos señalar que el diseño de un aula virtual de Matemática I como apoyo a las clases presenciales será un complemento idóneo a la forma tradicional de enseñanza debido a que ésta será reforzada por las numerosas actividades que podrá realizar fuera del espacio físico de aula convencional, cabe destacar que el grado de idoneidad será analizado de forma definitiva cuando se implemente el diseño propuesto y sean los mismos estudiantes quienes valoren a través de sus opiniones y de los resultados de las evaluaciones la influencia del aula virtual en sus procesos de aprendizajes.

Palabras clave: Aula virtual, Matemática I, enseñanza.

Referencias y bibliografías

Ausubel, N. (1983). Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo .2° Ed.Trillas: México.

Azzato, M. (2012). *My Online Course: A Methodological Proposal for Reading and Writing the Image of a Digital Resource*. XIII Virtual Educa 2012. Panamá.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Uno, 35, 90-106.

Duval, R**.** **(**1995), *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals,* Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La gaceta de la rsme, 9 (1), 143–168. [en línea] de http://cmapspublic.ihmc.us/

Rojas, P. (2012). *Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas*. Artículo de sección. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 1 (1), 1-5. [en línea] de www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/

Siemens, G (2004) Connectivism: A learning theory for a digital age. [en línea] de http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Duplicação do cubo: um experimento em sala de aula

Carla **Alves** de Souza
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo
Brasil
carla.souza@usp.br

Introdução. O presente trabalho traz um relato de prática em sala de aula. Trata-se do experimento Duplicação do Cubo (Matemática Multimídia/Unicamp), que foi aplicado em turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública com o objetivo de rever e aprimorar habilidades estudadas em séries anteriores, uma vez que tal necessidade foi evidenciada nos resultados da aplicação de uma avaliação externa elaborada pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo – Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP)[1].

O objeto de aprendizagem em questão – Duplicação do Cubo – tem como objetivos: 1) obter, experimentalmente, a aresta de um cubo, que possui o dobro do volume de um outro cubo de arestas já conhecidas; 2) Obter numericamente um valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$; 3) Desenvolver a noção de número irracional. A proposta desde experimento (Roteiro, Ficha do aluno e Manual do Professor) esta disponível na versão para a tela e para impressão na página da Coleção M^3 – Matemática Multimídia.

[1] A *Avaliação da Aprendizagem em Processo* é uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e um grupo de Professores Coordenadores das Oficinas Pedagógicas de diferentes Diretorias de Ensino.

Desenvolvimento da atividade. O Experimento Duplicação do Cubo se desenvolveu em, praticamente, três etapas assim denominadas: 1) construção de cubos; 2) o valor da razão; 3) uma aproximação decimal para $\sqrt[3]{2}$. Foram utilizados materiais como massa de modelar e régua (etapa 1); calculadora (etapas 2 e 3).

O objetivo da Etapa 1 foi o de observar que o volume do cubo maior é o dobro do volume do cubo menor, fato percebido por meio da visualização do processo de construção dos dois cubos. A Etapa 2, teve o propósito de mostrar, utilizando resultados teóricos, que a razão entre as arestas dos dois cubos é igual a $\sqrt[3]{2}$, observando que na Etapa 1 foi obtido experimentalmente um valor próximo a $\sqrt[3]{2}$ para essa razão. E, finalmente, a Etapa 3 utilizou um algoritmo para a determinação de uma aproximação numérica para o número irracional $\sqrt[3]{2}$.

Foram utilizadas duas aulas em cada uma das turmas de 1º ano para a realização da atividade experimental e outras duas aulas, por turma, para comentários gerais e uma síntese das ideias e conceitos trabalhados.

Considerações Finais. Embora tenham sido evidentes as inúmeras dificuldades dos alunos nas principais etapas da atividade – no que diz respeito a conceitos básicos e cálculos elementares – a experimentação foi proveitosa, sobretudo por permitir aos alunos uma interação diferenciada entre eles e deles com os conteúdos de matemática. A atividade experimental pôde servir de ilustração, de certa forma, para elucidação e compreensão dos objetivos que foram alcançados por parte dos alunos na aula de síntese. Além disso, proporcionou a oportunidade de estudo e desenvolvimento de algumas habilidades específicas da disciplina de matemática (PCESP, 2008; Experiências Matemáticas, 1997) e habilidades outras relacionadas ao comportamento e/ou atitudes implicadas no convívio de sala de aula.

Referências bibliográficas

Matemática Multimídia – Unicamp. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1007. (Acesso em 19/09/2013).

Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP): *Matemática* /Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE (2008). ISBN 978-85-61400-04-0. 1.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. (1997). Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências Matemáticas: 5a a 8a series*. São Paulo: SE / CENP.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

El efecto de utilizar la plataforma Edu 2.0 en el aprovechamiento y actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes en la escuela secundaria

Yamily **Colón** Negrón
Proyecto Maestro Master (PRMMT-NSF Funded), Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
yamilycolon@hotmail.com
Josiel **Rosado** Tirado
Proyecto Maestro Master (PRMMT-NSF Funded), Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
josielrosado@yahoo.com
Amabel **Soto** Guzmán
Proyecto Maestro Master (PRMMT-NSF Funded), Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
amabelsoto@yahoo.com

El propósito de este estudio fue investigar, desde la perspectiva de estudiantes de escuela pública del nivel secundario, el efecto que tiene el uso de la plataforma virtual Edu 2.0 en el aprovechamiento en los temas de funciones cuadráticas, sistema de ecuaciones lineales en dos variables y ecuación del círculo, y su actitud hacia las matemáticas. Incorporamos el uso de esta Plataforma para combinar actividades en línea con la clase presencial, tomando en consideración que el estudiante actual es tecnológico y necesita herramientas adicionales que abarquen la diversidad de estilos de aprendizaje que estos poseen.

Las Pruebas Puertorriqueñas de Aprovechamiento Académico (PPAA) para el año académico 2011-2012 reflejaron, como en los pasados años, una deficiencia en el dominio de contenido matemático y en la adquisición de destrezas matemáticas. Así se establece en el Perfil del Progreso Anual Adecuado (APY) 2011-2012 divulgado por el Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) acerca de los resultados de las PPAA administradas durante el mes de abril de 2012, las cuales muestran que un 92% de los estudiantes examinados alcanzaron los niveles pre-básico y básico, entendiendo como nivel básico el dominio parcial de la materia.

En esta investigación acción se utilizó Edu 2.0 como plataforma virtual; la misma fue creada por Graham Glass. Edu 2.0 es un sistema de fácil administración para cursos en línea; este concepto de enseñanza se conoce en inglés como “course management system” (Nuñez, 2011). Con el uso de la Plataforma, el estudiante tiene la oportunidad de interactuar con el maestro de diversas formas, como por ejemplo, por medio de mensajes electrónicos para exponer sus preguntas. Esta forma de interacción social permite que el maestro individualice la enseñanza y fomente en el estudiante el deseo continuo de aprender y desarrollarse mejorando su aptitud y dominio de las matemáticas.

Entre las variables que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, una de ellas lo son las actitudes hacia las matemáticas. Las mismas han sido consideradas clave, en el proceso educativo porque, al parecer, condicionan diversos procesos psicológicos, y parecen estar relacionados con el rendimiento escolar (Sánchez y Ursini, 2010).

El marco conceptual de esta investigación en acción está fundamentado en la teoría del desarrollo cognoscitivo. Todo individuo, como ser social, se desarrolla mediante la interacción con otros, es esta dinámica influyen mediadores que guían al estudiante a desarrollar sus capacidades cognitivas. A esto denomina Vygotsky, la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1976).

En este estudio, realizado en tres escuelas secundarias del sistema público de enseñanza puertorriqueño, participaron 52 estudiantes. En esta investigación en acción se utilizó el diseño “one- group before-after (pretest-posttest) design”. Este diseño toma como indicador de la efectividad del tratamiento experimental la diferencia entre la pre y posprueba. La intervención educativa que se utilizó en este estudio fue la estrategia tecnológica “web-enhanced”, integrando el uso de la plataforma Edu 2.0 para combinar actividades en línea, entre ellas videos, tutoriales, pruebas y recursos multimedia, entre otros; con la enseñanza tradicional en el salón de clases. “Web- enhanced” incorpora la eficiencia del estudiantado y un flexible y agradable ambiente de aprendizaje que abarca la diversidad de estilos de aprendizaje del estudiante (Khan, 2000).

Para recopilar los datos de esta investigación se utilizaron los siguientes instrumentos: a) prueba de aprovechamiento de los temas funciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, y ecuación del círculo, b) la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas (Auzmendi, 1992), y c) un grupo focal de cada grado. Los hallazgos encontrados reflejaron que los estudiantes de los grupos de todas las escuelas participantes mejoraron su aprovechamiento significativamente al usar la plataforma Edu 2.0 en los temas estudiados. Los resultados de la prueba t revelaron que las diferencias en la variable aprovechamiento son estadísticamente significativas ($p < .05$). En relación a la variable actitud hacia las matemáticas, los análisis de estos resultados revelaron, por medio también de una prueba t, que se encontraron diferencias estadísticamente significativas ($p < .05$) solamente en los estudiantes de una de la escuelas. Sin embargo, esto no significa que la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas no haya cambiado favorablemente, ya que otros elementos pudieron haber afectado los resultados, entre ellos que muchos de los participantes ya tenían una actitud positiva hacia las matemáticas y aunque haya ocurrido un cambio, éste no fue significativo. De acuerdo al análisis de los grupos focales, los estudiantes coinciden en que la integración de Edu 2.0 en su clase de matemáticas es beneficiosa, pues les permite aclarar aquellos que no entienden en el salón.

Referencias y bibliografía

Auzmendi, E. (1992). Las actitudes hacia las matemáticas-estadísticas en las enseñanzas medias y universitarias: características y medición. España: Ediciones Mensajero.

Khan, B. (2000). A framework for e-learning. *Distance Education Report*, 4 (24), 3-8.

Sánchez J. & Ursini S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Relime*, 13(4).

Vygotsky, L. (1976). *Mind in society*. Cambridge, MA, EE. UU.: Harvard University Press.

Estatística no curso tecnólogo: a pesquisa como ferramenta para a tomada de decisão

Susana Beatris Oliveira Szewczyk
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Porto Alegre/RS
Brasil
susana.szewczyk@restinga.ifrs.edu.br

Resumo

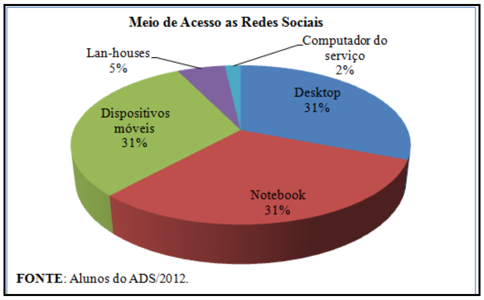
Este trabalho apresenta os resultados da pesquisa realizada pelos alunos do Curso Superior de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas (ADS), na disciplina de Fundamentos de Estatística Aplicada, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Câmpus Restinga, em Porto Alegre/RS – Brasil. Seu objetivo foi o de analisar as possibilidades que a Modelagem Matemática oferece à aprendizagem contextualizada e significativa dos conceitos de estatística no curso tecnólogo. Justifica-se a escolha pela Modelagem Matemática por possibilitar explorar questões relacionadas ao contexto do aluno e, desta forma, dar significado aos conteúdos da disciplina.

Metodologia

O trabalho em sala de aula foi realizado a partir da escolha do tema por parte do grupo e seguiu os seguintes passos: pesquisa exploratória, levantamento de dados, organização dos dados coletados, representação dos mesmos e interpretação dos resultados. Os alunos escolheram investigar o Uso de Redes Sociais pelos 29 Alunos do 1º ano do Curso Técnico em Informática para Internet Integrado ao Ensino Médio no Câmpus, sendo que a escolha do tema levou em consideração a facilidade para obtenção dos dados já que este grupo de alunos trabalha nos demais turnos. O levantamento dos dados foi realizado através de questionários e os resultados foram organizados em tabelas, planilhas e gráficos. Para tal, os alunos estudaram os conteúdos referentes à estatística e utilizaram pacotes do *Office* para a análise e interpretação dos dados. O grupo estudou e calculou as medidas posição (MP) e as medidas de dispersão (MD) para as várias variáveis analisadas. Durante todo o processo o grupo foi acompanhando pela professora para que os objetivos de ensino-aprendizagem fossem atingidos.

Conclusões

Como o trabalho foi desenvolvido a partir de um tema escolhido pelos alunos, o interesse e a curiosidade provocaram mudanças significativas nas atitudes e habilidades dos mesmos. Eles perceberam a necessidade de diferentes formas de análise e representações para as variáveis quantitativas e variáveis qualitativas (Figura 1) analisadas. Também, o cuidado que se deve ter ao elaborar o questionário para a coleta dos dados e a importância das MP e das MD (coeficiente de variação de Pearson - **CV** e coeficiente de assimetria - **As**).



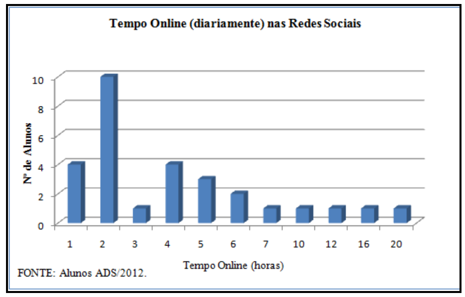


Figura 1. Gráficos utilizados de acordo com a variável analisada.

Assim, observaram que as MP indicam um valor que melhor representa o conjunto de dados, enquanto que as MD caracterizam o quanto o conjunto de dados está disperso em torno de sua tendência central. Também, que o **CV** permite comparar fenômenos expressos em diferentes unidades de medida (Tabela1) e que valores extremos influenciam a média ($\bar{x}$) de um conjunto de dados. Também perceberam que a média da variável perfil foi influenciada por valores extremos (valores muito baixos), que ambas as variáveis apresentam **As** positiva moderada e que o **CV** da variável perfil é altamente disperso enquanto que o **CV** da variável idade tem média dispersão.

Tabela 1

Coeficientes de variação de Pearson e assimetria e média para as variáveis analisadas

MD	**Idade**	**Perfil**
CV	18,20%	53,03%
As	0,86	0,93

MP	**Idade**	**Perfil**
$\bar{x}$	10,55	4,79

Ao final do trabalho, percebeu-se a compreensão dos conteúdos matemáticos, o desenvolvimento da habilidade de pesquisa, o significado e o envolvimento com o trabalho colaborativo, sendo estes aspectos positivos registrados por essa investigação.

Bibliografia e referências

Burak, D. (2004). Modelagem Matemática e a sala de aula. In: I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, Londrina. Anais do I EPMEM.

Cargnin-Stieler, M. e Bisognin, V. (2009). Contribuições da metodologia da modelagem matemática para os cursos de formação de professores. Revista Iberoamericana de Educación, 49, 3-25.

Guanacastequizando los nuevos programas de estudios de matemáticas

Oscar Mario **Castrillo** Duarte
Universidad Nacional Sede Regional Chorotega
Costa Rica
ocastrillo22@gmail.com

Eilyn **Duarte** Abarca
Universidad Nacional Sede Regional Chorotega
Costa Rica
eimyeily@yahoo.com

Gaudy Julissa **Jiménez** Ordoñez
Universidad Nacional Sede Regional Chorotega
Costa Rica
gaujj31@yahoo.es

Palabras clave: Guanacastequidad, Interculturalidad, nuevos programas de matemáticas, costumbres, tradiciones, Resolución de Problemas.

Este poster, pretende ser un preámbulo justificante para la elaboración de un libro con ejercicios que contemple el área temática de "Números", de los nuevos programas de estudio de Matemáticas en Costa Rica, que se han puesto en marcha para este 2013 en todo el país, pero que incorpore a su vez, dos programas muy importantes en la provincia de Guanacaste los cuales son: Guanacastequidad e interculturalidad. Los mismos, tratan de conservar las costumbres y tradiciones de dicha provincia y se deben de incorporar de una u otra forma en las lecciones de matemáticas a través del planeamiento didáctico.

El programa "Vivamos la Guanacastequidad", fue un proyecto fundado en 1989 por Marco Tulio Gardela, quien era el Asesor de Español en la Dirección Regional de Educación de Liberia y se logra transformar en programa, mediante el Decreto Ejecutivo 33000-MEP, publicado en la Gaceta no. 70 del viernes 7 de abril del 2006.

El programa, determina que se debe Guanacastequizar los programas de estudio desde la educación preescolar hasta la educación diversificada, incorporándoles la realidad guanacasteca. Por lo tanto dicho programa debe ser eje fundamental en el planeamiento didáctico.

Es aquí donde se hace imprescindible, buscar un punto de convergencia entre los nuevos Programas de Estudios de Matemáticas y el afán de Guanacastequizarlos, realizando un libro de ejercicios que ayude al docente en su labor diaria de planeamiento didáctico y mediación pedagógica, proporcionando ideas de aspectos propios de la cultura, historia y tradiciones de Guanacaste. Es decir un libro Guanacastequizado, que logre, tal y como lo indica el programa "Vivamos la Guanacastequidad", armonizar con la propuesta de los nuevos programas de estudios de matemáticas y lograr así la incorporación de los elementos pertenecientes al contexto de la realidad de la provincia y que se enmarquen dentro del mundo de la afectividad y los valores.

La nueva metodología, de acuerdo con los Fundamentos para un currículo por Resolución de Problemas (2012), se rige por habilidades que el estudiante debe adquirir durante las lecciones, contemplando principalmente la resolución de problemas como estrategia pedagógica, además de la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las matemáticas, la modelización y el uso de la historia y de la tecnología, de una manera contextualizada y dinámica.

De acuerdo con los nuevos Programas de Estudios de Matemáticas (2012), en el desarrollo de las lecciones hay dos etapas que se pueden distinguir por los propósitos de la enseñanza y aprendizaje, estos son: aprendizaje de conocimientos y la movilización y aplicación de los conocimientos. Por lo tanto, se le dará una estructura al libro que contenga por habilidad específica un problema orientado a la guanacastequidad y un ejercicio de movilización, y paralelo a ello un poco de historia o curiosidades de la cultura guanacasteca que hablen de lo tratado en el problema. Luego, se plantean un grupo de cinco o seis problemas y un grupo de cinco o seis ejercicios de movilización.

Esta iniciativa surge como una necesidad de preservar el acervo cultural de Guanacaste, el cual, tal y como lo indica el Programa Vivamos la Guanacastequidad (2013), se expresa en diversas manifestaciones autóctonas, destacándose la música y danza, comidas y bebidas, el lenguaje, las bombas, tallas y retahílas, la cultura sabanera, etc. así también es importante pensar en rasgos, como la constitución y los tipos de las familias, las relaciones que se establecen entre sus miembros, estabilidad familiar, ocupación laboral y profesional, tipo de vivienda, recursos domésticos, ocio y vacaciones, valores, creencias, ideología, religión, hábitos de alimentación, higiene, expectativas sociales y educativas. Además, incorporar el conocimiento de los centros culturales y de recreo, como parques nacionales, museos, bibliotecas, diversos tipos de producciones manufactureras, reservas biológicas y forestales, leyendas, tradiciones y todo tipo de creaciones literarias y artísticas en general. Y por último, en lo económico, se exige conciencia y búsqueda de solución a los angustiosos problemas del pueblo: desempleo y pobreza extrema.

Por tal razón, la realización de este poster significa toda una propuesta pedagógica, que proporcionará al educador situaciones contextualizadas, propias de la provincia de Guanacaste, con el afán de preservar todo el arraigo cultural que ello conlleva, sin perder el rumbo que exigen los nuevos Programas de Estudios de Matemáticas.

Referencias

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio de Matemáticas. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Fundamentos para un currículo por Resolución de Problemas. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013). Programa “Vivamos la Guanacastequidad”. Direcciones Regionales De Educación de Cañas, Liberia, Nicoya Y Santa Cruz.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Iniciación al álgebra: reporte de una experiencia de aula

Ángela María **González** Pascagaza
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
anmagonpas84@hotmail.com

Palabras clave: iniciación al álgebra, significado de los símbolos, representación del lenguaje algebraico, carácter operatorio de los símbolos.

Descripción del trabajo

En diversas investigaciones sobre iniciación al álgebra escolar se reportan dificultades que encuentran los estudiantes para dotar de significado los símbolos y reconocer el carácter operatorio de los mismos (Küchemann, 1978; Kieran & Filloy, 1989). En el contexto colombiano, Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo & Mora (1999) reportan dificultades similares a partir de pruebas realizadas en diversos colegios de Bogotá. Éstas además se evidenciaron en una prueba piloto realizada en un colegio de carácter privado en donde labora el presente autor.

Lo anterior muestra que los resultados encontrados coinciden con algunas dificultades reportadas desde las investigaciones, pero tales resultados distan de lo esperado institucionalmente y de lo planteado desde los estándares curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) en donde se espera que los estudiantes desarrollen *"la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula"* (p.67). Que los lleve directamente al uso de expresiones algebraicas.

Por lo que surgen cuestionamientos referentes a qué podría deberse esa distancia y si las dificultades que encuentran los estudiantes se deben a problemas de aprendizaje o de enseñanza.

Al parecer, estas dificultades podrían estar más relacionados con la manera en que los contenidos curriculares son abordados en el aula, Según lo reportan Butto & Rojano (2004, p.3), con frecuencia estos contenidos son desarrollados a partir de fuentes limitadas de significado. De hecho, el acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en aspectos manipulativos. Se empieza por enseñar las expresiones, las ecuaciones y las manipulaciones en ellas para terminar con la resolución de problemas, vistos más como posibilidad de aplicación de las reglas sintácticas.

Todo lo anterior lleva a reconocer que en el aula es necesario:

- abordar esta problemática en grado octavo, grado en el cual institucionalmente se tiene dispuesto el trabajo del álgebra escolar.
- trabajar a partir de actividades, en una variedad de contextos significativos, que potencien tematizar aspectos semánticos de los símbolos y se reconozca su carácter operatorio.

Y es en tal sentido, se desarrolla una experiencia en el aula con estudiantes de grado octavo (13-14 años) en dicha institución con el fin de aportar a la superación de algunas de esas dificultades a partir de la adecuación de una secuencia de actividades que han mostrado ser favorables para el trabajo del pensamiento algebraico y que se abordan en el aula a través de una metodología de investigación-acción.

Como ya se ha planteado en este escrito desde diferentes reportes de investigación se destaca la necesidad de dar prioridad a la construcción de significado para el lenguaje algebraico como objeto matemático (y que es motivo de estudio), por lo que es pertinente plantear situaciones que requieran diferentes interpretaciones de la letra, pero otras también que incluyan el trabajo con diferentes universos numéricos.

El enfoque y metodología investigativa seguido por el docente proporciona bases de una posible estrategia curricular que responde a necesidades particulares de instituciones educativas pero que tiene énfasis en el proceso seguido tanto del docente como del estudiante y que va hacia la promoción de un aprendizaje significativo como alternativa a la práctica tradicional, que parece conlleva a tantas de las dificultades que presentan los estudiantes en la matemática escolar.

Referencias y bibliografía

Agudelo, C., (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Barajas, C., González J., & Mejía L. (2000). *Interpretaciones de la letra, manifestaciones de dificultad y niveles de razonamiento en el álgebra escolar.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Butto, C. y Rojano, T. (2004).Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1). 113-148

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Alertes.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(3), 229-240. Recuperado de http://die.udistrital.edu.co/node/5717

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Radford, L. (2002b). Algebra as tekhnē. Artefacts, symbols and equations in the classroom. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(1), 31-56.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Interpretação e construção de conceitos gráficos com o auxilio do *software* open office calc: uma experiência com alunos das series finais do ensino fundamental

Bruno Grilo **Honorio**
Universidade Luterana do Brasil ULBRA
Brasil
brunoghonorio@yahoo.com.br

Resumo

Este trabalho foi extraído das ações desenvolvidas no *software Open Office Calc* em duas escolas da rede municipal de educação da cidade de Sapucaia do Sul do Rio Grande do Sul. Trabalho esse financiado pelo projeto de Formação Continuada do projeto Observatório da Educação/2010, no âmbito do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), financiado pela CAPES/INEP. Foram escolhidas três turmas de sexta a oitava séries, totalizando 6 horas aula em cada turma. Foram desenvolvidas atividades com construção de tabelas e gráficos, nas seguintes etapas: revisão de conceitos básicos da Matemática com números pares, ímpares e primos, potências e frações; construção de tabelas, leitura e interpretação de dados em uma tabela; construção de gráficos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tecnologias Matemáticas. *Software* educativo.

Resumo estendido

A presente pesquisa foi desenvolvida com reuniões de estudo com o grupo do Observatório da Educação e reuniões de estudo para discussão e análise das atividades a serem desenvolvidas com o uso do *software Open Office Calc* e com o tema construção de tabelas e gráficos nos anos finais do Ensino Fundamental.

Foi realizado um experimento com a aplicação das atividades desenvolvidas em duas escolas do município de Sapucaia do Sul, em três turmas do Ensino Fundamental, uma sexta série, uma sétima série e uma oitava série. Com três encontros de duas horas aulas. As TIC como estratégias educacionais ajudam a compor o cenário de ensino e aprendizagem, segundo Bairral (2009), associando quatro características essenciais ao estudo com as TIC: conectividade, integração de mídias, dinâmica e construção hipertextual e interatividade.

Para o autor um ambiente virtual de aprendizagem deve ter:

- integração com diferentes formas de expressão: escrita, oral e áudio-visual;
- possibilidade de compartilhamento de informações e a comunicação de muitos indivíduos com muitos em diferentes tempos e espaços;
- propiciar informação distribuída, também com construção hipertextual do conhecimento;
- trabalho coletivo, embora cada usuário necessite de tempo para reflexão individualizada;
- trabalho colaborativo;
- diferentes interações e discursos.

O objetivo foi o de implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um experimento com o uso do *software Open Office Calc*, com o tema tabelas e gráficos no Ensino Fundamental.

Foram aplicadas dezessete atividades didáticas: introdução ao *software;* organização de dados em tabelas e gráficos; interpretação de dados organizados em tabelas e gráficos; desenvolvimento de uma pesquisa de opinião.

Observou-se que estendido os alunos não estão acostumados a terem aulas no laboratório de informática da escola. Todos os alunos responderam terem gostado da proposta e que esta lhes proporcionou uma oportunidade de terem uma aula com conteúdo matemático no laboratório de informática de suas escolas.

As atividades foram desenvolvidas com interesse pelos alunos, que não apresentaram problemas de disciplina e elogiaram a iniciativa. Apesar das dificuldades dos alunos relativas ao uso do *software*, os mesmos alegaram ter sido produtivo e terem aprendido conteúdos novos.

Referencias

Bairral, M. A. (2009). *Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática.* (1ª ed., v. I.). Rio de Janeiro: Editora da Universidade Federal Rural do RJ.

Groenwald, C. L. O. & Ruiz, L. (2006). *Formação de professores de matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias.* Acta Scientiae, v.9, p. 19-28.

Kaiber,C.T. & Conceição,C. P. D. (2007). *Softwares educativos e o ensino da trigonometria*. Educação Matemática em Revista - RS, Canoas, v. I, n. 8, p. 37-50, Novembro. ISSN 1518-8221.

La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia

Sandra Milena **Jiménez** Ardila
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.sjimenez@pedagogica.edu.co
Viviana Paola **Salazar** Fino
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.vsalazar@pedagogica.edu.co
Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional
lmendieta@pedagogica.edu.co

Enseguida se presenta un breve recorrido histórico sobre la factorización de polinomios de segundo grado, sus primeros vestigios y uso, destacando la relación entre el lenguaje simbólico-algebraico y el lenguaje geométrico. También se exhiben evidencias históricas acerca del uso de factorización de polinomios de segundo grado.
La primera evidencia que se halla relacionada con la factorización data de los babilonios, estuvieron interesados en resolver ecuaciones particulares, asociadas a la solución de problemas comunes, propios de su desarrollo cultural; en este contexto nace la idea de completar cuadrados utilizando figuras, de cuyos procesos se puede identificar lo que en el ámbito escolar se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*.
El siguiente hito en este recorrido histórico es Euclides, quien en el libro II de *Elementos* enuncia algunas proposiciones que se pueden asociar con identidades algebraicas (aunque algunos historiadores afirman que dichas identidades representaban exclusivamente nociones geométricas), entre las cuales se destaca la II.5 que se puede asociar actualmente con la *diferencia de cuadrados*.

Posteriormente, en la obra *Arithmetica* de Diofanto se encuentran indicios de uso de factorización, una evidencia de esto es el problema 7 del libro IV, relacionado con lo que en el ámbito escolar es conocido como el *cuadrado de una suma o de una diferencia*.
La manera general de resolver ecuaciones usando figuras (como los babilonios) se le debe a Thābit Ibn Qurra, quien hace uso de las proposiciones planteadas por Euclides para relacionar cuadrados con rectángulos de forma tal que con ello logra plantear un método para resolver ecuaciones que hoy se puede asociar, en lenguaje simbólico-algebraico, con la igualdad: $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$; es entonces Ibn Qurra quien realmente utiliza los resultados euclidianos y las heurísticas particulares propuestas por Al-Khwārizmī presentando métodos generales para resolver ciertas ecuaciones.
Casi un milenio después, en la época del renacimiento, François Viète es quien sienta las bases para la distinción entre variables y coeficientes, lo que contribuyó a que el álgebra se transformara de un estudio particular a uno general. Pocos años después, en la obra *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot, aparece por primera vez la factorización como método de solución de algunas ecuaciones cuadráticas. Las proposiciones de la sección 4 constan de cuatro pasos, de los cuales el último es la demostración del lema (que plantea la unicidad de la raíz encontrada) y en el cual usa la *factorización por factor común* para demostrar la no igualdad de dos expresiones que deberían serlo. Incluso, Hill (2011) afirman que “La primera ecuación resuelta es $a^2 - (b + c)a - bc = (a - b)(a + c) = 0$, [sin embargo] la forma factorizada de la ecuación cuadrática no aparece en la prueba” (p. 50).
Vietè intentó demostrar geométricamente algunos resultados algebraicos, lo que lo obligó a ignorar las raíces negativas o complejas. René Descartes logró solventar dicho problema en su *Geometría*, con lo que se conoce como “álgebra de segmentos”. En esta, construyó segmentos de longitud $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} y \sqrt{a}$ y eliminó así la obligatoriedad de la homogeneidad entre expresiones de Vietè. Entre sus principales preocupaciones estaba la determinación del número de raíces de una ecuación polinómica, lo que lo lleva a enunciar el teorema del factor: “si r es raíz de $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$, entonces $p(x) = (x - r)q(x)$, es decir $x - r$ es factor de $p(x)$, donde $grad\ q(x) < grad\ p(x)$”. De lo anterior, y para contestar cuántas raíces tiene la ecuación, se aplica este teorema recurrentemente y se obtiene que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas. Entonces, el polinomio se puede expresar como producto de factores, es decir, $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_i)$.
Hacia el siglo XVIII, el álgebra trascendió de la solución de ecuaciones al estudio de estructuras como grupos, anillos y campos. Como menciona Kleiner (2007), Euler y muchos matemáticos intentaron realizar la prueba del último teorema de Fermat, para el cual, escribía, por ejemplo, $x^3 + y^3 = z^3$(un caso particular de la ecuación de Bachet ($x^2 + k = y^3$) como $(x + y)(x + y\rho)(x + y\rho^2) = z^3$, y esta es ahora una ecuación en el dominio $D_3 = \{a + b\rho: a, b \in \mathbb{Z}\}$. Aparecen formalmente los Dominios de Factorización Única (DFU) de la mano de los *ideales* de Dedekind. Luego, aparecen las “formas cuadráticas binarias”, expresiones de la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2, a, b, c \in \mathbb{Z}$. El objetivo de la teoría de formas cuadráticas binarias es encontrar un número entero m para el cual $f(x, y) = m$. Al igual que el caso anterior, estas formas cuadráticas se expresan como producto de factores. A lo largo del estudio de los DFU surgieron algunos teoremas referentes a la factorización, como el Teorema de Factorización Única en $F[x]$: “Cada polinomio $p(x) \in F[x]$, de grado positivo, es el producto de un elementodiferente de cero de F y polinomios mónicos irreducibles en $F[x]$.

Excepto por el orden de los factores, esta factorización es única”. Debido a que siempre existió interés por encontrar expresiones análogas al número primo en $\mathbb{Z}$ en otros conjuntos numéricos, los teoremas de divisibilidad en el anillo de los números enteros se extienden al anillo de polinomios, estableciendo, entre otras nociones, la definición de polinomio irreducible, así: “Sea $P(x) \in A[x](A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}). P(x)$ es irreducible en $A[x]$ si y solo si P no puede descomponerse en un producto de dos polinomios en $A[x]$ de grado estrictamente menor: no existen $S, T \in A[x]$ tales que $P = ST,\ grad(S) < grad(P)\ \ y\ grad(T) < grad\ (P)$” (Zalamea, 2007, p. 137). Con lo anterior se concluye que la factorización de polinomios de segundo grado aparece inmersa en la búsqueda de soluciones al problema de resolver ecuaciones del mismo grado, siendo entonces este proceso –la resolución de ecuaciones- el germen de la factorización, interés que luego se va desvaneciendo hasta formular una teoría abstracta donde el concepto se incluye; utilizando los términos de Sfard (1991), se puede afirmar que la factorización surge, como casi todas las nociones matemáticas, en su concepción operacional y se va dirigiendo hacia una concepción estructural.

Referencias y bibliografía

Acevedo de Manrique, M. & Falk de Losada, M. (1997). Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al algebra abstracta. Colombia: Colciencias.

Benito, M., Fernández, E. & Sánchez, M. (2007). Diofanto de Alejandría. La aritmética y el libro sobre los números poligonales. España: NIVOLA Libros y ediciones, S.L.

Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. Boston. EEUU: Birkhäuser

Heath, T. & Heiberg, and J. (1908) .The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1.EEUU: Cambridge: The University Press.

Hill, R. (2011) Thomas Harriot’s Artis Analyticae Praxis and the Roots of Modern Algebra. Kansas City: University of Missouri. Extraído el día 4 de marzo de 2013 de http://www.homsigmaa.org/Hill.pdf

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. [Versión electrónica]. Revista SUMA, 68, 93-102.

Zalamea, F. (2007).Fundamentos de matemáticas. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Mezcla de registros de representación: un obstáculo para el aprendizaje

César Fabián **Romero** Félix
Cinvestav - IPN
México
cesar.rfelix@gmail.com
Osiel **Ramírez** Sandoval
Cinvestav - IPN
México
osielr@cinvestav.mx
Asuman **Oktaç**
Cinvestav - IPN
México
oktac@cinvestav.mx

Problemática

Presentamos un uso problemático de representaciones que surgió al investigar la coordinación de registros al resolver problemas que involucran al concepto de Transformación Lineal. Encontramos situaciones en las que no se logra la coordinación de registros debido a que se han mezclado dos registros diferentes sin coordinarlos y esto obstruye la solución o interpretación de los problemas.

La coordinación requiere el uso simultáneo de registros e implica la selección consciente de los registros para aprovechar las ventajas de éstos en una situación particular. Un estudiante podría intentar utilizar varios registros pero sin hacer esa discriminación y sin tomar en cuenta las particularidades de cada registro no estaría realizando coordinación. Además, no mantener presente la diversidad y heterogeneidad de registros podría llevarlo a mezclar dos o más de ellos.

La mezcla de registros consiste en la utilización de representaciones que no respetan las reglas de formación del registro al que se supone pertenecen, mezclando reglas de dos o más registros. Al mezclar dos registros se acaba trabajando en un tercero que podría ni siquiera ser ya un registro al no conservar alguna de las tres propiedades definitorias de los registros de representación (ver Duval, 1999). Esto resulta problemático ya que los estudiantes pueden no ser conscientes de que han mezclado registros y actuar como si siguieran trabajando en uno de los registros originales habiendo perdido propiedades y posibles ventajas de éste.

Caso de estudio

Al trabajar situaciones de transformaciones lineales, varios estudiantes mezclaron dos registros gráficos diferentes. Llamamos a estos registros *gráfico-sintético* (RGS) y *gráfico-cartesiano* (RGC). En el primero los vectores son representados por flechas definidas por su magnitud, dirección y sentido, por lo que se pueden tener flechas en distintas posiciones que representen al mismo vector (ver Figura 1).

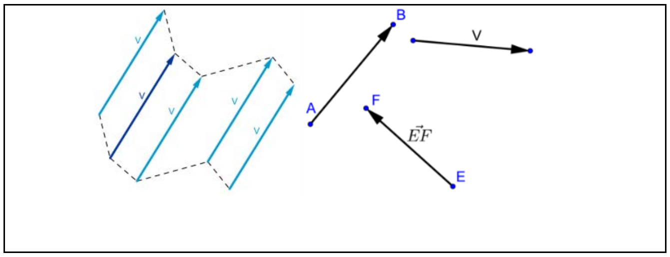


Figura 1: Representación te vectores en el registro gráfico sintético

La múltiple representación para los mismos vectores suele resultar confusa para algunos estudiantes, además, por las reglas de formación de representaciones de este registro se puede interpretar una misma representación como situaciones significativamente distintas, como es el caso de la región con forma de M.

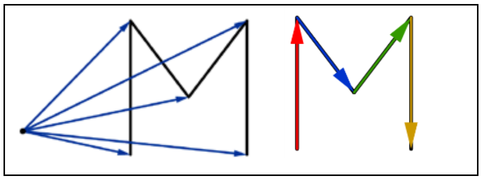


Figura 2: Interpretaciones válidas de la misma región en el RGS

En el segundo registro gráfico, también se utilizan flechas pero construidas iniciando en la intersección de dos rectas y caracterizadas por su extremo final, por lo que sólo hay una flecha para cada vector (ver Figura 2).

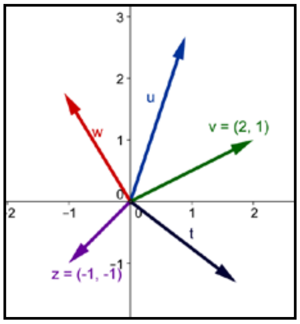


Figura 3: Representación te vectores en el registro gráfico cartesiano

El caso más recurrente de mezcla de registros fue que los estudiantes interpretaban en una misma situación algunas flechas como si fueran del RGC y otras como del RGS, obteniendo así datos inconsistentes que no les permitían resolver y en algunos casos ni siquiera interpretar los problemas, como se muestra en las figuras x y y.

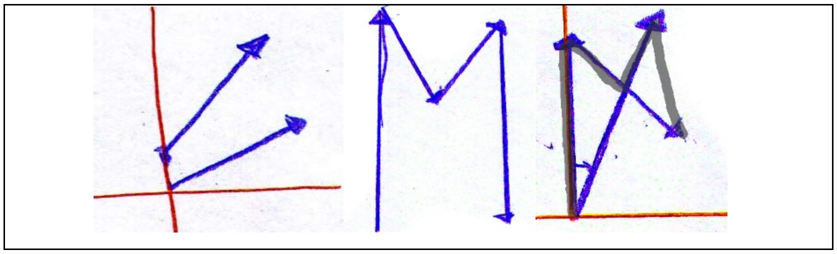


Figura 4: Representaciones obtenidas debido a la mezcla de registros gráficos

Conclusiones

Duval (1999) afirma que es primordial para el aprendizaje jamás confundir un objeto con alguna de sus representaciones; paralelamente, en esta investigación afirmamos que es importante no mezclar los registros mismos. La mezcla de registros que observamos surgió por ignorar las propiedades definitorias del registro en el que se pretendía trabajar, usando conjuntamente propiedades de otro registro, al parecer inconscientemente. La mezcla de registros es un problema importante porque no sólo inhibe la coordinación, obstruye la exteriorización de las ideas y la interpretación de representaciones; provoca además la imposibilidad de las conversiones y que no se pueda estimar de manera correcta la conveniencia de usar un registro u otro.

Referencias

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Resolución de problemas como medio para la construcción de aprendizajes y el logro de competencias: una experiencia en educación superior.

Mónica **Mora** Badilla
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
mokmora@gmail.com
Fabián **Gutiérrez** Fallas
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fgutierrez92@gmail.com
Francisco **Herrera** Arroyo
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fherrera344@gmail.com

Existe una fuerte crítica al modelo tradicional de enseñanza de la matemática, en particular, se cuestiona la forma en que se transmiten aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles, escasamente motivacionales y de relevancia social limitada (Díaz y Hernández, 2002).

El proyecto que se presenta propone, desde una perspectiva constructivista, la resolución de problemas como medio para promover el aprendizaje significativo de los estudiantes en la educación superior. El mismo se fundamenta en el aprendizaje y las competencias matemáticas propuestas en PISA 2003 (OCDE, 2004).

Uno de los fines de la Educación Matemática es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas. Diferentes argumentos sustentan esta afirmación, uno de ellos se refiere la utilidad de la enseñanza de la resolución de problemas para la vida cotidiana de los alumnos y, por otro lado, el incremento en la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal. (Carrillo (1998), citado en Pifarre y Sanuy. (2001))

En cuanto a la metodología de investigación utilizada para este trabajo, se trata de un estudio de carácter exploratorio y descriptivo en el cual para el análisis de la información se utiliza un enfoque mixto; se analiza la información tanto cualitativa como cuantitativamente, mediante una integración de algunos aspectos de cada uno de estos enfoques.

La estrategia planteada se basa en la resolución de problemas e involucra la indagación y descubrimiento de los conceptos matemáticos. Según Kamii (1994), citado por Ruiz, D. García, M (2003, p. 326) "La resolución de problemas debería darse al mismo tiempo que el aprendizaje de las operaciones en vez de después, como aplicaciones de éstas." En este sentido, en el estudio realizado los problemas se perciben como medio para el aprendizaje y no como fin.

Bajo la guía establecida en la indagación en la resolución de problemas, donde las preguntas guiadas lo llevan al descubrimiento del concepto matemático, se plantearon actividades como la siguiente:

Juan en marzo del 2009 abre una cuenta en "*BanQuito*" con una tasa de interés anual del 10% con un capital inicial de $1000. El estado de cuenta de Juan desde marzo del 2009 hasta marzo del 2012, se resume en el siguiente cuadro.

Año	Capital Ahorrado
Marzo del 2009	C=$1000
Marzo del 2010	C_1=$1100
Marzo del 2011	C_2=$1210
Marzo del 2012	C_3=$1331

Figura 1.Ejemplo de problema propuesto en el estudio.

Resultados:

El ítem 8 propuesto para el problema de la figura 1 requería escribir una expresión que represente el capital ahorrado por Juan en determinado año. Además definir el significado de cada variable que se utilice. El resultado en cuanto al logro alcanzado por los estudiantes fue de un 83% del total de los 12 grupos de trabajo. Por otro lado, se obtuvo un resultado global de esta primera situación planteada que muestra que el ítem 3: Exprese el capital ahorrado en el 2011 en términos del capital ahorrado en el 2009 y el ítem 5: Exprese el capital ahorrado en el 2012 en términos del capital ahorrado en el 2009, fueron en los cuales se obtuvo menor rendimiento.

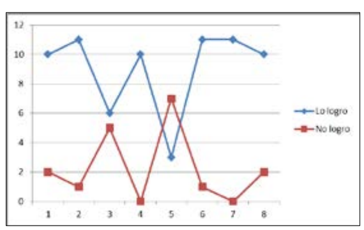


Figura 2.Resultados de la situación #1

Tomando en cuenta factores como el hecho de ser el primer problema presentado y el cambio en el papel de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, detectamos una confrontación entre las habilidades cualitativas, relacionadas con la motivación, desempeño, comunicación de ideas, y las habilidades cuantitativas, relacionadas con el logro de las expectativas de aprendizaje esperadas.

De acuerdo con algunos autores: Schoenfeld, 1992; De Corte, 1993; Carrillo, 1998; citados en Pifarré y Sanuy (2001), detectamos que el proceso de enseñanza dirigido a mejorar las estrategias de resolución de problemas, no sólo incrementa el rendimiento del sujeto, sino que también se puede modificar su sistema de creencias, actitudes y emociones en relación con las matemáticas.

Referencias

Díaz, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2ª. ed.). México: McGraw Hill.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Pifarre, M. Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Revista Enseñanza de las ciencias, revista de investigación y experiencias didácticas*. *19 (2)*, 297-308

Ruiz, D. & García, M. (2003). El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de Educación Básica. *Educere la Revista Venezolana de Educación, 23(7)*, 321-327.

I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Trayectoria académica de los estudiantes de las licenciaturas en matemáticas de la Universidad Simón Bolívar durante la última década

Ramón **Abancín**
Doctorado en Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
rabancin@usb.ve

Vladimir **Strauss**
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Universidad Simón Bolívar
Venezuela
str@usb.ve

Las matemáticas escolares en su ámbito natural como es el aula de clases presenta nuevos retos cada día para los profesores, cuando estos tratar de persuadir a sus estudiantes a través de sus clases que las matemáticas son importantes y útiles, sobre todo en la vida cotidiana. Sin embargo, estos esfuerzos se ven desperdiciados porque existe una resistencia por parte de los estudiantes hacías las matemáticas, trayendo como consecuencia que cada año el número de estudiantes que se presentan en los procesos de selección de las diferentes instituciones de educación superior para optar a un cupo para estudiar matemáticas es mínimo. Y aun aquellos que logran ingresar en el transcurso de la carrera optan por pedir cambio a otras carreras, desertar o son retirados del programa de estudio por régimen de permanencia en la institución de educación superior. Así, solo pocos estudiantes son los que logran concretar una carrera de matemática con éxito, ya sea en el tiempo estipulado o a largo plazo.

Objetivo

Comparar la trayectoria académica de los estudiantes de las licenciaturas en matemáticas de la USB durante la última década.

Introducción

Este artículo hace un seguimiento de los estudiantes de pregrado de la Licenciatura (Carrera) en Matemáticas (0500 Matemáticas, 0501 Matemáticas opción: Estadística y Matemáticas Computacionales, y 0502 Matemáticas opción: Docente) de la Universidad Simón Bolívar (USB), Sede Sartenejas, Venezuela, desde el año 2000 hasta el año 2012. Considerando aspectos como número de inscritos, activos, inactivos, cambios de carrera y graduados se podrán estudiar, analizar y comparar la trayectoria académica de los estudiantes de cada carrera.

Método

El proceso se centra en el estudio y análisis de la trayectoria de los estudiantes inscritos en las Carreras de Matemáticas desde el año 2000-2012, a través de datos suministrados por la Dirección de Admisión y Control de Estudios (DACE) de la USB.

Resultados

Como resultados se obtuvieron: (1) De las tres Licenciaturas en Matemáticas (Matemática, Matemática opción Estadística y Matemáticas Computacionales; y Matemática opción Docente), la opción Estadística y Matemáticas Computacionales siempre reflejo una cantidad superior de estudiantes inscritos con respecto a las otras dos Licenciaturas en Matemáticas, siendo las más desfavorecida la opción Docente; (2) La cantidad de graduados de la Licenciatura en Matemáticas en cualquiera de sus tres opciones siempre estaba muy por debajo de la cantidad de estudiantes inscritos inicialmente, siendo la más afectada la carrera de la opción Docente; (3) La Licenciatura en Matemáticas y la opción Docente reflejan grandes migraciones (cambios de carrera) a otras áreas del conocimiento; y (4) Existe un elevado índice de estudiantes que pasan hacer inactivos (ya sea por reglamento de permanencia en la USB o por deserción escolar). A continuación se presentan tres figuras que describen el comportamiento de los estudiantes en las tres licenciaturas de la USB.

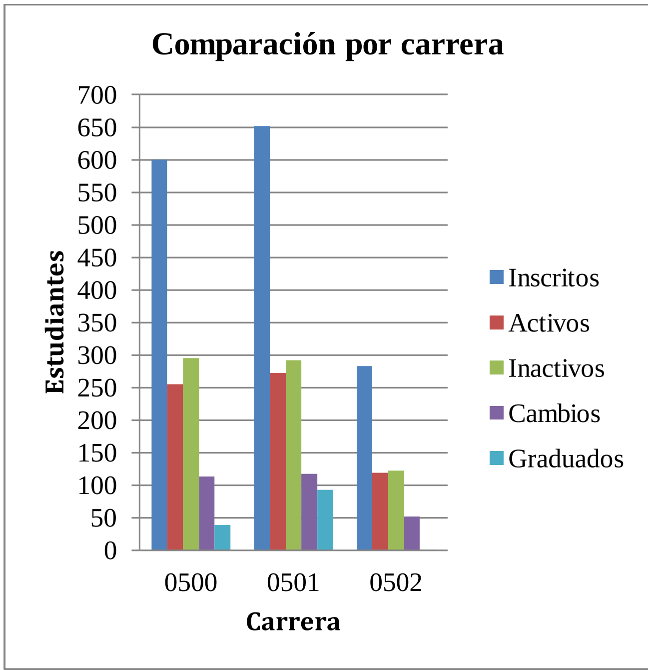


Figura 1. Comparación de las tres licenciaturas en matemáticas

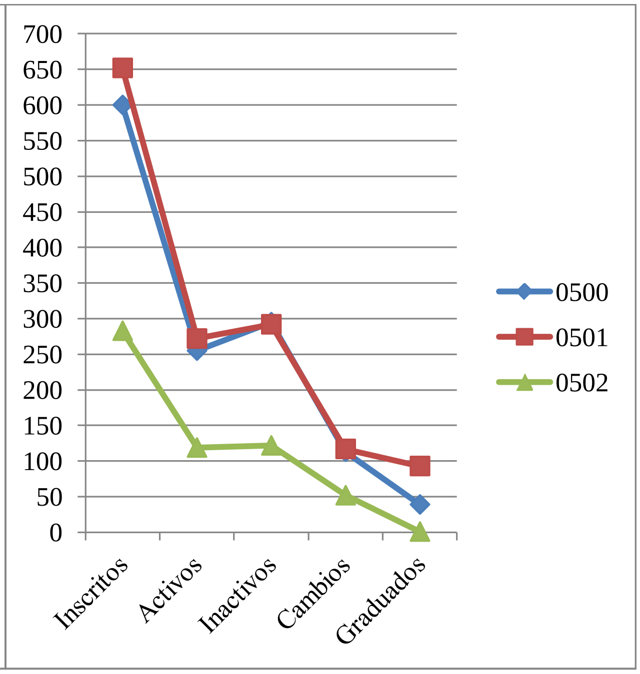


Figura 2. Comparación de variables involucradas en la trayectoria academica

.

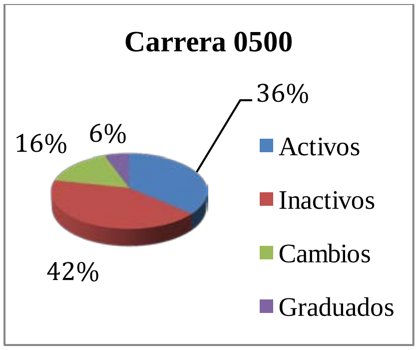


Figura 3. Carrera de matematicas

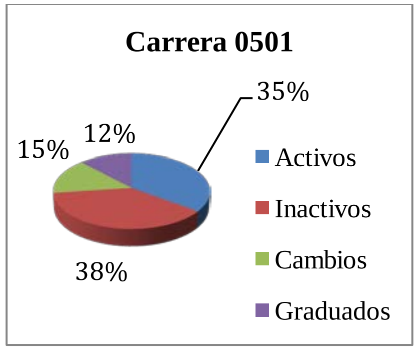


Figura 4. Carrera de matemáticas opcion estadistica y computacionales

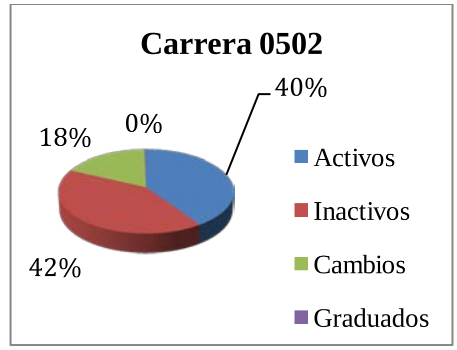


Figura 5. Carrera de matemáticas opcion docente

Conclusiones

Los resultados arrojados por la investigación dan pie a la necesidad de revisar los intereses y condiciones académicas de los aspirantes a ingresar a la carrera de matemáticas, debido a que las tablas y gráficas presentadas en este trabajo reflejan una cantidad considerable de estudiantes inscritos como estudiantes regulares de la Licenciatura en Matemáticas y sin embargo los graduados son pocos y los cambios de carreras e inactivos son elevados. Este último comentario sobre la cantidad de inscritos en la carrera de matemáticas tal vez se deba a la posibilidad que da la Universidad Simón Bolívar de que los estudiantes cuando realizan la preinscripción al proceso de admisión coloquen tres opciones de posibles carreras deseadas. Así, dependiendo de la calificación que obtengan en la prueba de admisión interna, los estudiantes serán asignados en algunas de las tres carreras seleccionadas. Entonces como la carrera de matemáticas no goza de favoritismo entre los aspirantes a una carrera universitaria, estos la suelen colocar entre segunda y tercera opción para garantizar el ingreso a la universidad, debido a que la demanda en matemáticas es baja y no requiere de una calificación alta, contrario a lo que pasa en las carreras del área ingeniería que está entre las más anheladas por los estudiantes aspirantes a una carrera universitaria (Abancín & Strauss, p.10). Por tanto, al conseguir un cupo en algunas de las carreras de matemáticas, estos comienzan con los trámites de cambio de carrera que sean necesarios, para cambiarse a las otras áreas de conocimientos sobre todo la de ingeniería.

En vista de esta situación, se podría pensar en la posibilidad de buscar mecanismos de comunicación persuasiva para despertar el interés de los estudiantes de bachillerato por el área de matemáticas, y lograr así que la asistencia a las licenciaturas de matemáticas en los procesos de selección sean considerables y provechosas, tanto para el ingreso como para la permanencia en los programas de estudio.

Referencias y bibliografía

Abancín, R. & Strauss, V. (s.f.). Vías de admisión para estudiantes en algunas instituciones de educación superior en Venezuela.

Almeida, L., Guisande, A., Primi, R., & Lemos, G. (2008). Contribuciones del factor general y de los factores específicos en la relación entre inteligencia y rendimiento escolar. European Journal of Education and Psychology, 1(3), 5-16.

Garnica, & Garnica, E. (1997). El rendimiento estudiantil: Una metodología para su medición. Economía, XXII(13), 7-25.