I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

El aprendizaje de proposiciones condicionales usando geometría dinámica

Nabil **Ortegón** Domínguez
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
nabilortegon@hotmail.com
Guillermo Andrés **Salas** Rodríguez
Instituto Pedagógico Nacional
Colombia
guillermoasalas@hotmail.com
Carmen **Samper** de Caicedo
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
carmensamper@gmail.com

Resumen

A través de una serie de tareas desarrolladas con un software de geometría dinámica (GD), buscamos propiciar la comprensión de lo que es y lo que expresa una condicional en matemáticas. Por medio de problemas propuestos, en los cuales se debe formular una conjetura como resultado de la exploración realizada y la determinación de invariantes, se busca que los participantes del taller comprendan que las condiciones establecidas en el antecedente son suficientes para concluir el consecuente y que el consecuente es necesariamente resultado de las condiciones que se reportan en el antecedente.

Palabras clave: Proposiciones condicionales, tareas, geometría dinámica.

Planteamiento del problema

El grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ·G) de la Universidad Pedagógica Nacional, en Bogotá, Colombia, en consonancia con otros investigadores como Laudien (1999) en Chile, Laborde (2000) en Francia y Hoyles & Küchemann (2002) en Inglaterra, han identificado algunas dificultades que tienen los estudiantes relacionadas con la afirmación condicional como objeto matemático y como una herramienta en la deducción. Por ejemplo, observaron que los estudiantes interpretan la condicional como equivalente a su inversa pues creen que el antecedente y el consecuente son intercambiables, y que el mensaje es el mismo.

Las condicionales son afirmaciones usadas para expresar generalizaciones de propiedades matemáticas, ya sean como teoremas, postulados o conjeturas. Los investigadores concuerdan en que la falta de esta comprensión afecta la posibilidad de aprender a demostrar matemáticamente porque las condicionales juegan un papel importante en la deducción a través de esquemas de razonamiento válidos como Modus Ponendo Pones y Modus Tollendo Tollens.

A partir de una prueba que realizamos a estudiantes de 14 a 16 años de dos colegios en Bogotá corroboramos la existencia de esas dificultades. Los resultados de la prueba mostraron que los estudiantes: i) interpretan la condicional como bicondicional; ii) no identifican argumentos deductivos válidos; y iii) no pueden determinar si la conclusión dada en un argumento se puede deducir de manera válida de los datos de la hipótesis.

Lo anterior sustenta la pregunta que orienta nuestra investigación:

¿Cómo aprovechar la geometría dinámica para favorecer que los estudiantes escolares comprendan significativamente lo que es una proposición condicional en geometría y la puedan usar para argumentar?

Una aproximación a la respuesta, en calidad de hipótesis podría ser que el uso de la geometría dinámica impulsa la comprensión y uso correcto de la condicional, y ayuda a los estudiantes a mejorar sus habilidades argumentativas para justificar afirmaciones. Laudien (1999) se pregunta a qué edad o nivel escolar (si los hay) comienzan los estudiantes a distinguir una condicional de una bicondicional; a su vez Hoyles y Küchemann (2002) suponen que los estudiantes pasan de lo empírico a lo deductivo en grados superiores de bachillerato. En el desarrollo de nuestra investigación, esperamos poder aportar algún tipo de respuesta a estos interrogantes y suposiciones.

Referentes teóricos

De acuerdo con nuestra hipótesis, nuestra atención se dirigió hacia artículos e investigaciones que aportan algunos elementos conceptuales y metodológicos en torno a esta problemática.

Gutiérrez (2005) asegura que usar la geometría dinámica (GD) como herramienta de mediación es importante porque permite que los estudiantes formulen conjeturas con un alto grado de convicción de la veracidad de estas y ayuda a mejorar su habilidad de razonamiento deductivo. Jones, Mariotti, Gutiérrez y Hadas (en Laborde, 2000) concluyen que la GD proporciona posibilidades para la formulación de justificaciones teóricas, posiblemente con la mediación del profesor. Por último, Samper, Perry, Camargo, Molina, & Echeverry (2010) concluyen que las tareas para un ambiente de GD sugeridas a estudiantes universitarios impulsan la interacción y posibilitan las superación de dificultades asociadas a la comprensión de la condicional.

Echeverry, Samper, Perry, Camargo & Molina (2012) analizaron si unas estrategias didácticas usadas a lo largo de un semestre con estudiantes universitarios favorecieron el uso y la interpretación de la condicional. Para analizar respuestas a dos pruebas realizadas, una a principio del semestre y otra al final, establecieron dos grupos de categorías de análisis. El primero grupo se usó para estudiar el *tipo de justificación*, es decir para identificar en el argumento que expone el estudiante para justificar su decisión, cómo usan la información dada y si el argumento guarda relación con la lógica matemática. El segundo grupo de categorías de análisis las usaron para estudiar el *uso de la condicional dada*; buscaban determinar si el estudiante reconocía la condicional como un instrumento para validar sus decisiones y cómo usaban los esquemas de razonamiento Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Tollens. Estas categorías de análisis se convierten en el punto de partida para diseñar las que estamos usando en nuestra investigación.

Partiendo de que la matemática es una producción cultural, Moreno & Waldegg (2001) sujetos al enfoque sociocognitivo, mencionan que la interacción entre individuos se puede dar en dos líneas: simétrica y asimétrica. La primera se define como la interacción equilibrada; algunas formas de esta son: i) la cooperación y ii) el aprendizaje en grupo. La segunda se define como la interacción que tiene el experto (docente) con los estudiantes. En esta se identifica la interacción tutorial, en la que el experto orienta al aprendiz y le ayuda a realizar alguna tarea. Este enfoque reconoce el conflicto sociocognitivo que se deriva de las interacciones sociales que se dan entre los estudiantes, debido a que se generan puntos de vista, métodos, respuestas y discusiones, como elemento importante en el aprendizaje.

Metodología de la investigación

Para desarrollar nuestra investigación nos enfocamos en una metodología de indagación empírica, a través de experimentos de diseño. La investigación se está realizando con ocho estudiantes de 14 a 16 años de un colegio público en Bogotá. Inicialmente se diseñó y aplicó una prueba con la finalidad de identificar problemáticas específicas de los estudiantes que están participando en este experimento respecto a la interpretación de proposiciones condicionales. Posteriormente, se diseñó una secuencia de tareas para desarrollar en un ambiente de GD, encaminadas a que los estudiantes comprendan que una proposición condicional en geometría es aquella que expresa una dependencia entre propiedades. Simultáneamente, se realizó un análisis previo de las posibles actuaciones de los estudiantes en el proceso de resolución de las tareas, identificando construcciones, exploraciones y respuestas que podrían dar y la mediación correspondiente que debía hacer el profesor. Al finalizar el experimento se realizó otra prueba para determinar efectos de la propuesta didáctica que se experimentó.

Ahora se está analizando el registro de las construcciones que hicieron los estudiantes, las conjeturas que plantearon y las discusiones que tuvieron durante su trabajo y en el momento de la socialización, teniendo como referente las categorías que emergieron del análisis de la prueba inicial que son susceptibles a cambios.

Por último, las conclusiones de esta investigación, tendrán en cuenta aspectos particulares como: i) ambiente de aprendizaje ii) las tareas como herramienta para comprender la importancia de una condicional en una demostración y iii) el uso de la geometría dinámica como mediadora en estos procesos.

Categorías de análisis

A partir de las respuestas de los estudiantes a las cuatro peguntas de la prueba inicial, establecimos nuestro primer conjunto de categorías de análisis. Para ilustrar, presentamos la pregunta dos y las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 2: ¿Usted cree que la siguiente afirmación estaría en un libro de geometría? Explique su respuesta.

Si el cuadrilátero ABCD es rectángulo entonces el cuadrado de un número es mayor o igual a cero.

- Respuestas de los estudiantes:
- Si por qué tiene que ver con figuras geométricas.
- No debería estar esta afirmación porque para que un cuadrilátero ABCD sea rectángulo el cuadrado de un número no tiene que ser mayor o igual a cero.
- Pues yo pienso que no porque a veces cosas de geometría se encuentran en libros de matemáticas o problemas de ecuaciones.

En la primera respuesta observamos que el estudiante no identificó dependencia; establecimos la categoría NID (no identifica dependencia). El argumento en la segunda respuesta menciona algún tipo de dependencia y por ello surge la categoría ID (identifica dependencia). Finalmente, la tercera respuesta no tiene relación con lo que se está preguntando y con ello se estableció la categoría RFC (respuesta fuera de contexto).

La siguiente tabla resume las categorías establecidas a partir de la prueba:

Tabla 1

Categorías de análisis

CATEGORÍA	SIGNIFICADO
Respuesta fuera de contexto (RFC)	Realiza una interpretación incorrecta de la situación y lo asocia a otro tipo de respuestas que no tienen relación con lo que se está preguntando
Condicional implícita (CI)	Reconoce la condicional que subyace a la situación pero no lo menciona de forma explícita en su respuesta
Identifica dependencia (ID)	Identifica la dependencia entre las propiedades mencionadas en la situación.
No identifica dependencia (NID)	No identifica relaciones de dependencia entre propiedades.
Condicional explicita sin formato (CESF)	Responde con una condicional pero no usa el formato si… entonces…

A manera de ejemplo

A continuación presentamos un ejemplo de las actuaciones de un grupo de estudiantes cuando resolvían una de las preguntas de una tarea.

Tabla 2

Tarea 2 pregunta 3

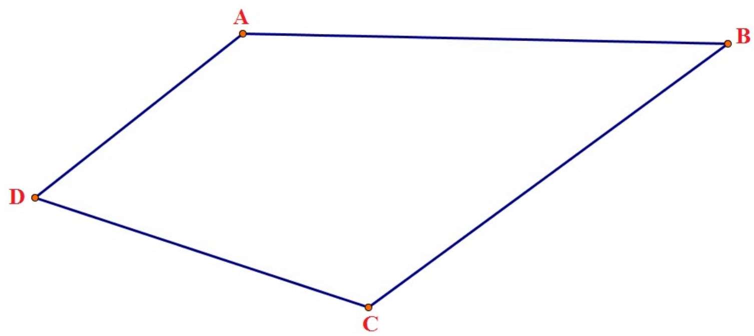


Figura 1. Cuadrilátero ABCD

Construye las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Arrastra hasta lograr que las diagonales sean, congruentes y que se bisequen (que el punto de intersección sea el punto medio de ambos segmentos). Describe el proceso de exploración.

Escribe la conjetura.

Con este problema buscábamos que los estudiantes determinaran la relación entre tipo de cuadrilátero y las propiedades de las diagonales, y que reconozcan que todas las condiciones en el antecedente hacen una diferencia en el resultado que se reporta en el consecuente. Es decir, queríamos que los estudiantes entendieran que no deben concluir propiedades si no están seguros que las condiciones construidas que están reportando en el antecedente realmente se tienen. Por ello, necesitábamos saber qué punto arrastraron, qué medidas tomaron y en qué se estaban fijando cuando realizaron el arrastre.

A continuación describimos cómo esperábamos que procedieran los estudiantes: 1) con el arrastre, hallando el punto medio de cada diagonal y su medida, lograran que fueran congruentes y se bisecaran; 2) hicieran una construcción robusta (Healy, 2000) de un cuadrilátero que cumplía las condiciones, trazando dos diámetros de una circunferencia y luego el cuadrilátero determinado por los extremos de éstos. La conjetura que esperábamos es: si **las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan** entonces **es un rectángulo.**

Un grupo de estudiantes concluyen, a partir de una primera construcción, lo siguiente:

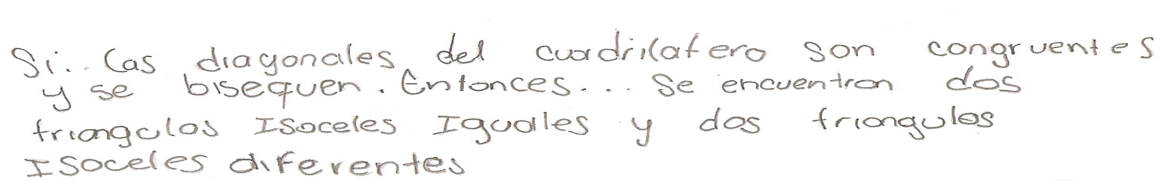
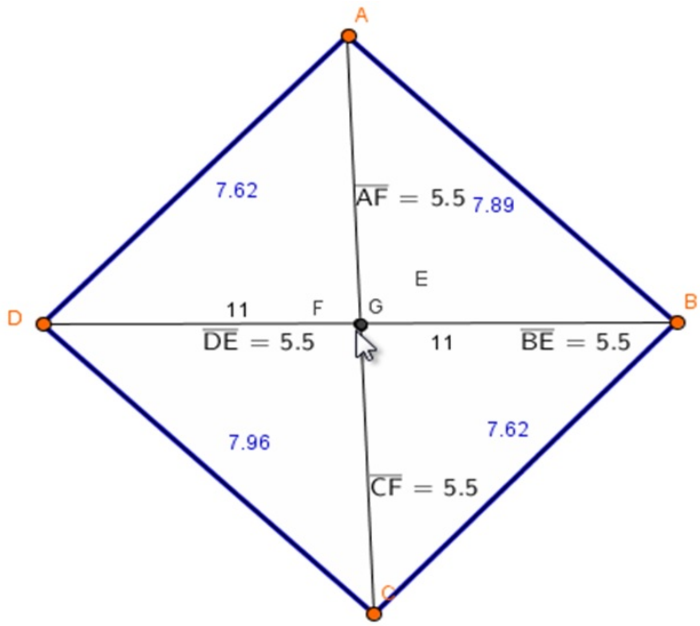

Si. Las diagonales del cuadrilatero son congruentes y se bisequen. Entonces... Se encuentran dos triangulos Isoceles Iguales y dos triangulos Isoceles diferentes

Figura 2. Conjetura incorrecta

Tabla 3

Construcción errónea y consecuente erróneo

 *Figura 3 construcción errónea*	[*…dos triángulos isósceles iguales…*] Triángulo ADG y triángulo BCG [*… dos triángulos isósceles diferentes*] Triángulo ABG y triángulo DCG

Ante el cuestionamiento del profesor sobre la seguridad de su respuesta, procedieron a maximizar su construcción y una estudiante del grupo dice: "*profe hasta que nos hizo descuadrar lo que estábamos haciendo. Hágale otra vez zoom, zoom*."

Observan que en efecto las diagonales no se habían bisecado. Realizan nuevamente la construcción y cambian su conjetura por la siguiente:

Si.. las diagonales del cuadrilatero son congruentes y se bisequen Entonces se excentra un Rectangulo o se forma un Rectangulo

Figura 4. Conjetura correcta

Tabla 4

Construcción acertada y consecuente correcto

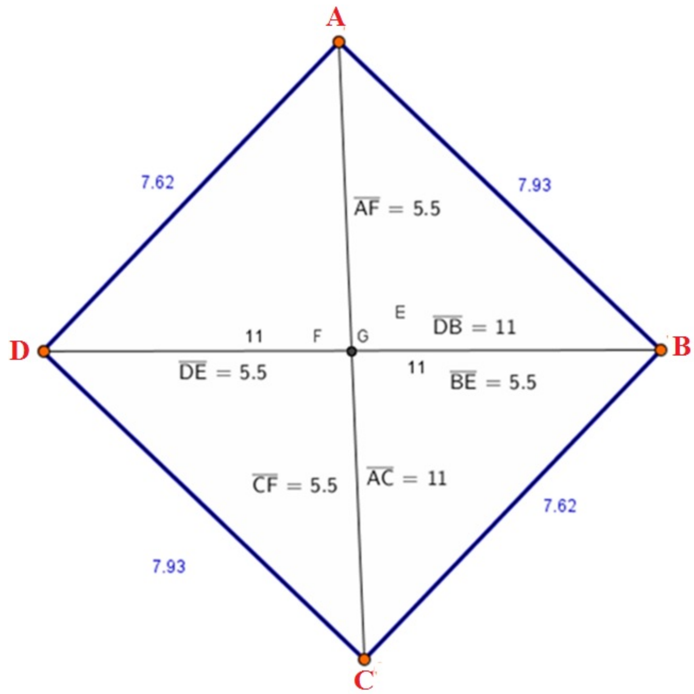


Figura 5 construcción acertada

[…se encuentra un rectángulo o se forma un rectángulo]

Rectángulo ABCD

En la siguiente sesión, el docente retomó lo que había ocurrido en la clase anterior para reforzar la importancia de las relaciones entre los dos conjuntos de propiedades: las que están en el antecedente y las que están en el consecuente. Les explicó que aunque visualmente las representaciones obtenidas parecían cumplir las dos condiciones de las diagonales, haber obtenido resultados diferentes significaba que no están reportando una dependencia real.

El profesor aprovechó la situación para explicar que una condicional reporta una dependencia entre las propiedades dadas en el antecedente y las que constituyen el consecuente; explicó que una exploración a partir del arrastre ofrece ideas de posibles dependencias, pero que, como hay diferentes variables que están en juego, es posible que no se consiga de manera precisa la construcción deseada. Por ello, sólo con una construcción robusta se puede asegurar la posible validez teórica y por ende establecer la conjetura. Así el profesor indica que en la hipótesis de la primera conjetura sólo se podía mencionar que las diagonales eran congruentes y que con ello no resulta un cuadrilátero especial; solo añadiendo la otra condición permite concluir que el cuadrilátero es un rectángulo.

Esperamos que este tipo de experiencias tangibles ayuden a los estudiantes a entender lo que es y expresa una condicional, experiencias que solo en un ambiente de geometría dinámica son posibles.

Aspectos que serían abordados en este taller

El taller tiene por objetivo generar espacios de reflexión entre los asistentes (profesores en formación o en ejercicio), sobre el significado de las condicionales que expresan conjeturas, resultado, estas, de la interacción que tienen con Geogebra para resolver algunas tareas. Es a partir de las conjeturas que proponen como solución que se generará una discusión sobre qué es una condicional y qué expresa, y cómo el diseño de la tarea cumple con ese objetivo.

Justificación del taller

Autores como Gutiérrez (2005) consideran que la GD cuenta con herramientas muy potentes al momento de resolver un problema, como lo es el arrastre. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo para convertirlo en otro asociado a la figura y a través de él verificar que la representación realizada del objeto es correcta.

Por otro lado, Samper y otros (2010) consideran que las tareas sugeridas en un ambiente de GD impulsan la interacción y favorecen el análisis de la problemática descrita con respecto a la condicional.

Con los primeros resultados que ha arrojado nuestra investigación, hemos evidenciado una apropiación por parte de los estudiantes de lo que es una condicional en geometría; es decir las respuestas a las tareas permiten entrever que los estudiantes reconocen una dependencia entre propiedades de los objetos geométricos.

Metodología del taller

El taller se desarrollará en dos momentos: en primer lugar se hará una presentación general del programa Geogebra, las herramientas que lo conforman y cómo realizar algunas construcciones básicas. Posteriormente, se propondrán las tareas para que los participantes, en grupos de dos o tres personas, interactúen entre sí y con el programa, para resolverlas y formulen conjeturas.

Estas tareas buscan que los participantes reflexionen sobre las dependencias que existen entre conjuntos de propiedades y formulen esas dependencias a través de proposiciones condicionales. El uso de la geometría dinámica permite que los participantes identifiquen el antecedente y el consecuente de una proposición condicional a través de las exploraciones y descripciones realizadas.

Aceptando que la construcción de conocimiento es un acto social, las respuestas a las tareas serán discutidas con los asistentes para que a partir de ellas esta pequeña comunidad mejore su comprensión de lo que es una condicional. Es decir se hará una socialización de las respuestas con el ánimo de resaltar asuntos problemáticos relacionados con la condicional y consolidar el significado de esta.

Ejemplos de las tareas que se presentarán en el taller

Algunas de las preguntas que conforman las tareas que serán propuestas en el taller son las siguientes:

Tarea 1: Tiene por objetivo introducir la condicional como una afirmación que establece una dependencia. Planteamos preguntas y problemas como los siguientes:

Tabla 5

Tarea 1. Pregunta 1

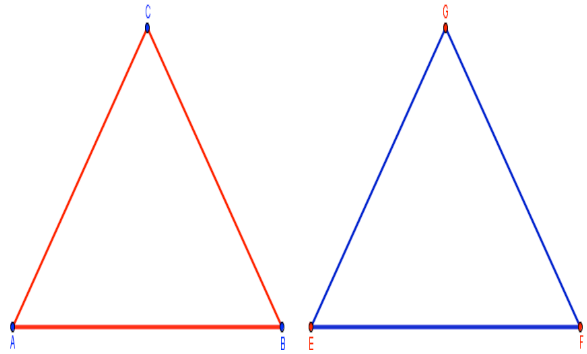


Figura 6. Triángulos

Abre el archivo en GeoGebra llamado Actividad1

- ¿Qué propiedades del ΔABC se mantienen cuando se arrastra? Escribe la mayor cantidad posible de propiedades que encontraste.
- Repite el ejercicio anterior para el ΔEGF .
- ¿Difiere en algo el arrastre de cada uno de los vértices del ΔABC? Si existe, escribe en qué consiste la diferencia.
- Escriban las ideas principales que han discutido. Completa la siguiente expresión en la que comunicas lo que descubriste: *Si…entonces…*

Tarea 2: Tiene por objetivo reconocer que las condiciones en el antecedente hacen una diferencia en el resultado del consecuente. Presentamos problemas como el siguiente:

Tabla 6

Tarea 2. Pregunta 4

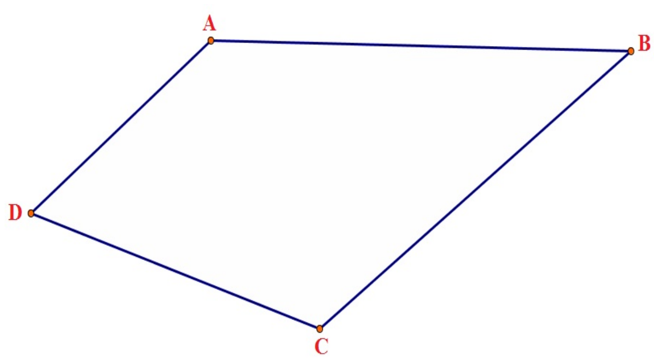


Figura 7. Cuadrilátero ABCD

- Construye las diagonales del cuadrilátero ABCD.
- Arrastra los puntos A, B, C y D hasta lograr que las diagonales sean, congruentes, se bisequen y sean perpendiculares. Describa el proceso de exploración

Escribe una conjetura.

Tarea 3: Tiene por objeto reconocer que todas las condiciones dadas en el antecedente son completas para que necesariamente se dé el consecuente. A manera de ejemplo proponemos el siguiente:

Tabla 7

Tarea 3. Pregunta 3

Realiza la siguiente construcción:

Paso 1: Construya un segmento AB

Paso 2: Construya una recta m perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por A y una recta n perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por B .

Paso 3: Construya la circunferencia A con centro en A y radio $\overline{AB}$.

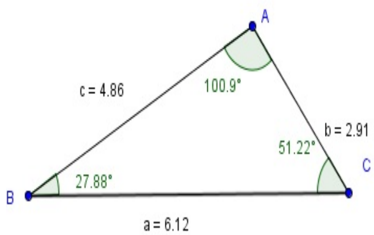
Paso 4: Nombre con D al punto de intersección de la circunferencia A y la recta n

Paso 5: Construya una recta l perpendicular a $\overline{AD}$ que pase por D .

Tarea 4: Tiene por objeto formular de manera natural conjeturas usando proposiciones condicionales a través de las exploraciones realizadas.

Tabla 8

Tarea 4. Pregunta 1



	A	B	C
1	Lado a	Lado b	Lado c
2	6.12	2.91	4.86
3			
4	Lado a²	Lado b²	Lado c²
5	37.46	8.49	23.61
6			
7	N=c²-(a²+b²)		
8	-22.34		
9			
10			
11			
12			
13			

Figura 8. Triángulo

Abre el archivo Actividad triángulos en el cual se representa un triángulo.
En la hoja de cálculo (parte derecha de la pantalla) se muestran las longitudes de los lados del ΔABC que se ve en la vista gráfica y el cuadrado de las mismos. La letra N representa la expresión algebraica conformada con los cuadrados de las longitudes de los lados.

- Caractericen los posibles valores de N. (Describan propiedades de esos valores,)
- Dejen fija una de las características de N. Exploren para determinar propiedades especiales de los ángulos del triángulo. Reporten su resultado.

Resultados y Conclusiones esperados en el taller

Esperamos que los asistentes comprendan qué es una condicional, qué es lo que expresa y que reconozcan que ese proceso es una cuestión que requiere la intervención didáctica del docente y, por tanto, el diseño y realización de tareas, como las que se presentaron en el taller.

La condicional es un tipo de enunciado usado en todas las ramas de las matemáticas. Esperamos que los asistentes acepten nuestras hipótesis: i) el tratamiento de condicionales en el campo de la geometría, apoyados en algún programa de geometría dinámica, contribuye a comprender la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes, dado que fácilmente se evidencian los cambios en las representaciones cuando se modifica una propiedad del antecedente o del consecuente de la condicional; ii) entender lo que es una condicional favorece la comprensión de lo que es una demostración y cómo construirla, actividad que es central en la matemática.

Evidenciamos que el uso de la GD favoreció que los jóvenes de 14 a 16 años, al solucionar las tareas propuestas, formularan enunciados condicionales en los cuales el antecedente planteado recogía el conjunto completo de propiedades, y el consecuente, el tipo de figura que cumplía esas condiciones; es decir el antecedente reportaba un conjunto de propiedades suficientes, para poder determinar que una figura es de un tipo especial.

Comprender qué un enunciado condicional expresa dependencias es el primer paso hacia entender el esquema de razonamiento Modus Ponendo Ponens, artífice principal en la construcción de argumentos deductivos, y por tanto, de demostraciones matemáticas. Por tanto, no se puede pretender enseñar a demostrar sin anteriormente abordar la comprensión de lo que expresa una condicional.

Referencias y bibliografía

Echeverry, A., Molina, O., Perry, P., Camargo, L., & Samper, C. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias , 30* (1), 77-92.

Gutierrez, A. (2005). Aspectos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploración con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Ed.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (págs. 27-44). Cordoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robst and soft cabri Construtions. En T. Nakahara, & M. Koyama (Ed.), *Proceedings of the 24 conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 1013-117. Hiroshima: Universidad de Hiroshima.

Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students´ understandings of logical implication. *In Educational Studies in Mathematics , 51* (3), 193-223.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics , 44*, 151-161.

Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. En F. Hitt, & M. Santos (Ed.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 225-231). Columbus,OH: Eric Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.

Moreno, L., & Waldegg, G. (2001). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. En A. C. Castiblanco Paiba, L. E. Moreno Armella, F. Rodríguez García, M. E. Acosta Gempeler, L. Camargo Uribe, & E. Acosta Gempeler (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional. Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (págs. 52-57). Mexico: Ministerio de Educación Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O., & Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica. Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática , 22*, 119-142.