



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Mediación cultural con SimCalc en la adquisición del conocimiento del movimiento rectilíneo

Leticia **Sánchez** López

Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México

leticiasanlop@hotmail.com

Luis Enrique **Moreno** Armella

Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México

lmorenoarmella@gmail.com

Resumen

Esta investigación de corte cualitativo tiene el objetivo de estudiar cómo un grupo de estudiantes mexicanos de 16-18 años logra significar la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo al interactuar en un entorno digital. Nuestra interpretación se basa en asumir que el conocimiento resulta de las acciones del sujeto cognoscente que se acerca a su objeto de conocimiento provisto de artefactos culturales de mediación. Las gráficas cartesianas atadas a la animación promueven en los estudiantes una actitud para expresar y explorar sus ideas a través de las representaciones simbólicas que ellos mismos producen. Los resultados sugieren que este tipo de experiencias puede ayudar a construir una sólida base para acceder a las ideas del Cálculo.

Palabras clave: Movimiento rectilíneo, mediación, SimCalc, representación simbólica, re-descripción representacional.

Introducción

El movimiento rectilíneo puede considerarse como una experiencia reproducible por un vasto número de seres vivos. Sin embargo, sólo el ser humano tiene la posibilidad de ejercer un control sobre él, no sólo en el sentido corporal, sino en una dimensión simbólica. Esta dualidad en la forma de experimentar el movimiento nos remite a lo que diversos autores reconocen como dos formas de conocimiento. El implícito, de naturaleza inconsciente, reactiva, permanente y fija, que ofrece esencialmente respuestas y que los seres humanos compartimos con otras especies, con la diferencia de que nuestra cognición implícita ya no es natural. En determinado

momento evolutivo, nuestros ancestros adquirieron la capacidad de *simbolizar*, pudieron salirse de su propio cuerpo a través de la gestualidad deliberada, producto del control consciente de esos movimientos y a un sistema sofisticado de memoria que permitió la re-producción de dichos gestos. De esta manera nace la comunicación consciente en nuestra especie y la producción social de artefactos que poseen una dimensión material, pero también una simbólica y que han transformado el entorno de manera incesante. Nuestras capacidades intuitivas quedaron entonces entrelazadas con nuestra capacidad de simbolización lo que permitió que la cognición humana se extendiera, a través de los símbolos, a una cognición explícita pero sin perder su polo a tierra: los conocimientos implícitos, intuitivos, que se van adquiriendo directamente de la experiencia. De manera que la raíz última del significado, de un símbolo siempre se encuentra en una experiencia, en una intuición. En el caso del movimiento rectilíneo, la experiencia sólo puede tener lugar en un espacio y en un tiempo. Pero convertir el movimiento en un objeto conceptual requiere trascender la experiencia corporal, el *aquí* y el *ahora* a través de un proceso de re-descripción de las representaciones iniciales. Elegimos el programa SimCalc MathWorlds como el principal mediador para que los estudiantes accedieran a las gráficas cartesianas porque éstas siempre aparecen vinculadas a una experiencia virtual de movimiento. El medio digital ofrece además, las representaciones tradicionales que son usadas en el estudio del movimiento rectilíneo: tablas y expresiones algebraicas. De esta manera nuestra investigación centra la atención en la evolución de la capacidad interpretativa que los estudiantes desarrollan al interactuar con las diferentes representaciones del movimiento rectilíneo para entender las relaciones entre los conceptos de distancia, velocidad y aceleración a través de sus gráficas.

Antecedentes

En la instrucción escolar, el estudio del movimiento rectilíneo mediado por tecnología puede ubicarse en los años finales de la década de los 70's cuando se implementan los laboratorios basados en microcomputadoras (MBL por sus siglas en inglés) y se promueve el uso de sensores para la enseñanza de las ciencias, permitiendo por primera vez que los estudiantes generaran datos que se graficaban en tiempo real para ser analizados. En una primera etapa, la investigación en el campo hizo posible dimensionar la complejidad de este nuevo programa en la educación. Los métodos en que se basaban eran esencialmente cuantitativos y es posible identificar en ellos una tendencia a clasificar las concepciones de los estudiantes respecto a los conceptos relacionados con el movimiento. Estas categorías generalmente eran contrastadas con aquéllas aceptadas científicamente. Estudios de este corte permitieron advertir que los estudiantes desarrollaban una capacidad sin precedente para medir y explorar el mundo físico, pero que “aunque los dispositivos digitales estimulaban el interés del estudiante, no necesariamente contribuían a mejorar su comprensión en relación con los conceptos físicos fundamentales” (Thornton & Sokoloff, 1990, p. 865). Puede distinguirse una segunda etapa en la investigación vinculada al aprendizaje de los conceptos de movimiento, en trabajos como el de Nemirovsky, Tierney & Wright (1998) - entre otros - quienes sostienen que si solamente se oponen los conceptos erróneos de los estudiantes a los científicamente aceptados se alejan de la posibilidad de entender cómo es la relación de los estudiantes con las herramientas tecnológicas ante la tarea de interpretar las gráficas cartesianas. En esta nueva etapa se adoptan cambios en las metodologías y en el diseño de las investigaciones que permitirán formular nuevas preguntas que tienen que ver con la naturaleza del razonamiento matemático que los estudiantes pueden desarrollar como resultado del uso de la tecnología digital, así como la naturaleza de la relación sujeto cognoscente-tecnología-objeto. En este sentido, también se hace necesaria la búsqueda de marcos teóricos que pueden ayudar a explicar estas preguntas. En este contexto, un enfoque

prometedor es el que centra la atención en la configuración de la complejidad y riqueza semiótica -los signos matemáticos y las producciones gestuales, orales y escritas- que se producen en el proceso de construcción de conceptos relacionados con el movimiento cuando los estudiantes interactúan en un ambiente tecnológico. Este enfoque se aprecia en los trabajos de Benítez (2012) y Radford (2009). Programas de simulación como SimCal MathWorlds, también han sido usados en la instrucción escolar para acercar a los estudiantes al fenómeno del movimiento. A diferencia de un sensor, en el que el movimiento puede identificarse como un fenómeno unidireccional en el sentido que las gráficas asociadas a éste sólo pueden generarse mediante la acción de un cuerpo moviéndose una sola vez, una simulación virtual puede repetirse tantas veces como se desee. Pero además, se tiene la posibilidad de generar el movimiento a partir de su representación gráfica, tabular o algebraica, por lo que el movimiento puede tener un tratamiento multidireccional. En las investigaciones de Salinas (2013) y Moreno & Hegedus (2009) se destaca la *ejecutabilidad* como principal característica de las representaciones generadas por este tipo de programas, pues es lo que permite un tipo especial de interacción entre el estudiante y el medio digital. El estudio de esta interacción y de cómo a través de ella surge una actitud epistémica que consiste en que los estudiantes se confronten con sus representaciones y las re-describan para transformarlas en nuevas representaciones es el marco en que se inscribe nuestra investigación.

Delimitación del problema de investigación

Se pretende estudiar el cambio cognitivo que los estudiantes experimentan cuando acceden al estudio del movimiento a través del medio virtual que ofrece el programa SimCalc con el fin de promover en ellos concepciones consistentes acerca de la relación entre las gráficas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo en el caso del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Las preguntas de investigación que se desprenden para alcanzar el objetivo son:

¿De qué forma los estudiantes logran dar significado a la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo asociadas al movimiento rectilíneo cuando interactúan con un software de naturaleza dinámica como SimCalc?

¿Cómo se configuran los diferentes medios semióticos –signos matemáticos, producciones gestuales, orales y escritas – para re-describir sus representaciones progresivamente y construir dicho significado?

Perspectiva teórica

De la intuición a la simbolización

En el proceso evolutivo de una especie, su interacción con el ambiente deja marcas profundas en su sistema nervioso que permiten, antes que todo, su supervivencia. Se trata de una base permanente, fija e inconsciente de conocimiento que algunos autores como Reber (1967 citado en Pozo, 2006) llaman *conocimiento implícito o analógico*. Es lo que permite la especie *Danaus plexippus* (mariposa monarca) migrar hacia lugares más prolíficos para su reproducción y alimentación, trasladándose distancias del orden de 5.000 kilómetros, y *conocer* no sólo el espacio, sino también el tiempo en que habrá de viajar. Los seres humanos estamos sometidos a las mismas leyes físicas y, en cierto sentido, a las mismas leyes biológicas de otras especies, también poseemos conocimientos implícitos grabados en nuestro sistema nervioso. Pero la *cognición* humana ya no es natural, “somos seres híbridos porque nuestra cognición implícita está entrelazada con los productos culturales de la acción humana” (Donald, 2001, p. 157). Nos

desenvolvemos en una realidad simbólica, en un mundo profundamente transformado por la cultura humana. Nuestras experiencias no se quedan atrapadas en el cuerpo. A través de los símbolos, el ser humano ha logrado hacer objetivo su conocimiento. Así, la cognición humana se extendió a una *cognición explícita* gracias a su capacidad de *simbolización*.

Re-descripción representacional

Explicar en qué consiste la función simbólica de los signos y el proceso por el cual a través de ellos el contenido semántico de un objeto de conocimiento puede enriquecerse, ha sido descrito por diferentes autores desde diversas perspectivas (Vygostki, Peirce, Kaput, Deacon, etc.). Vygotski (1979 citado en Kozulin, 1990) planteó la existencia de formas intermedias situadas entre los procesos mentales superiores y las funciones naturales: “los procesos mentales superiores no se adquieren ni mediante un proceso de comprensión súbita, ni mediante una copia de la conducta adulta”. Suponía que las operaciones simbólicas surgen de conductas que inicialmente no son simbólicas. Por su parte, Karmiloff-Smith (1992, citado por Tomasello, 2000) ha propuesto el modelo de la re-descripción representacional para explicar el proceso de significación de un símbolo o de un sistema simbólico:

Mi tesis es que una manera específicamente humana para adquirir conocimiento es que la mente explota internamente la información que ha almacenado (de manera innata y adquirida), mediante la re-descripción de sus representaciones, o de manera más precisa, re-presentando de manera iterativa, en diferentes formatos representacionales, lo que sus representaciones internas representan. (p.194).

Pozo (2006) ejemplifica los niveles de simbolización en el contexto de la adquisición del concepto de número. Hoy se sabe de la existencia de representaciones pre-verbales de la numerosidad asociadas a una representación intuitiva, no sólo en niños muy pequeños o aún en bebés, sino también en animales. Tales representaciones están fuertemente ancladas en la percepción espacial. En otro nivel se encuentra el uso del cuerpo, como los dedos y los gestos para contar. El cuerpo se convierte en un mediador externo o cultural que permite también realizar operaciones aritméticas como sumar o restar, de manera eficaz ante condiciones estables. A medida que la vida social se vuelve más rica se necesita disponer de nuevos sistemas de representación, un sistema de numeración en forma de sistema de notación. Pero no es necesario conocer, ni mucho menos comprender las propiedades del sistema de numeración como un todo para operar con él. Una reflexión sobre el sistema de numeración está objetivada en la Teoría de Números, que implica el conocimiento del número en un nivel simbólico teórico y no sólo pragmático. Pero, ¿cómo es posible que las representaciones iniciales puedan *desencapsularse* o hacerse penetrables al funcionamiento de otros sistemas?

Karmiloff-Smith (1992) propone cuatro niveles en los que el conocimiento puede representarse: Implícito (I), Explícito 1 (E1), Explícito 2 (E2) y Explícito 3 (E3). En el primer nivel las representaciones tienen una naturaleza esencialmente procedimental. La información que contienen no se encuentra a disposición de otros operadores del sistema cognitivo, por lo que son representaciones impenetrables. En el nivel E1, esas representaciones iniciales se convierten en representaciones simbólicas que son estables, en el sentido de estar presentes en la memoria, aunque el sujeto aún no tiene consciencia de ellas. En E2 las representaciones están disponibles en formato simbólico en la memoria, pero aún no pueden expresarse verbalmente, lo que sólo es posible en el nivel E3. Tomasello reconoce en la categorización de Karmiloff-Smith la relevancia de dos niveles básicos de conocimiento, el implícito y el explícito. Este último, dice, se alcanza sólo después de que el sujeto cognoscente alcanza cierto nivel de maestría en la realización de

una tarea, comenzando a reflexionar sobre las causas y razones de tal éxito. Para Tomasello (2000), el proceso de re-descripción representacional acontece cuando el individuo toma una perspectiva, desde fuera, de su propia conducta y cognición, como si fuera otra persona, pero mirándose a sí mismo. Del ejemplo que Pozo usa para entender el proceso de re-descripción representacional es posible identificar que se trata también de un proceso mediado por sistemas culturales de representación (miméticos, simbólicos, teóricos). El cuerpo, el sistema de numeración, la Teoría de Números son sistemas semióticos que median la explicitación progresiva de las representaciones y su construcción en nuevas formas de conocimiento.

Mediación cultural

El individuo nace inmerso en una cultura de la cual aprende modos de actuar, hablar y razonar. Como individuos sociales, nuestras capacidades cognitivas sólo pueden desarrollarse al compartir el conocimiento que se vehicula a través de los sistemas simbólicos externos. El conocimiento resulta de las acciones del sujeto cognoscente (el estudiante, en nuestro caso) que se acerca a su objeto de conocimiento provisto de artefactos de mediación. Al tener un artefacto desconocido, de manera natural nos cuestionamos sobre su *utilidad*, lo que revela que un artefacto siempre posee una dimensión intencional, la actividad está anclada en el artefacto. Es entonces cuando el artefacto entra en la dimensión cultural del medio, donde los usuarios aprenden nuevas habilidades mediante su empleo. Una vez adquirida esa habilidad, podemos sustituir el artefacto por la materialización de la idea intencional del artefacto. De manera que es posible identificar que un artefacto posee siempre una extensión material y otra simbólica. Wartofsky (1979) se refiere a los artefactos primarios y secundarios para diferenciar la versión material y la que existe en el espacio de habilidades de quien lo usa. Los artefactos son modelos culturales porque objetivan las necesidades, intenciones y modos de acción humanos involucrados en su producción y empleo. En otras palabras, los individuos necesitan usar artefactos para alcanzar sus metas. Al inicio, los artefactos permitieron la transformación del entorno natural. Pero el desarrollo de artefactos como la gestualidad, la escritura, el lenguaje, las formas de organización social, las técnicas de producción, permitieron también la transformación del pensamiento del hombre. En este sentido, la re-descripción de las representaciones de los estudiantes relacionadas con la forma en que dan significado a las gráficas cartesianas asociadas al movimiento rectilíneo debe reflejarse en su conducta, a través de las producciones comunicativas resultantes de la mediación de las representaciones cinestésicas, gráficas, tabulares y algebraicas que el programa computacional les provee.

Proceso metodológico en la investigación

Diseñamos un escenario experimental conformado en dos etapas que hemos llamado fase de exploración (2012) y fase de enfoque (2013). La selección de los estudiantes se basó en la respuesta a una invitación extensiva, realizada al inicio de cada etapa, para participar de manera voluntaria en el proyecto, ya que de esta manera se tendría más posibilidad de esperar una actitud comprometida y participativa de su parte. Sus edades estaban comprendidas entre 16 y 18 años y en lo que respecta al área de matemáticas, se encontraban cursando la asignatura de Geometría Analítica, correspondiente al segundo año del subsistema de bachillerato mexicano al que pertenecían. Ningún estudiante estaba familiarizado con el programa SimCalc, pero desde que aceptaron participar en el proyecto se les indicó que debían instalarlo en sus computadoras y explorarlo. Las sesiones se desarrollaron en tiempos y espacios fuera de su clase habitual de matemáticas. En cada etapa se trabajó con un grupo de 12 alumnos, conformados en equipos de dos o tres integrantes, cada equipo disponía de una lap-top con el programa SimCalc. Además se

contaba con una lap-top conectada a un proyector, con el objetivo de promover que los alumnos la utilizaran para mostrar su trabajo al resto del grupo y para socializar el uso del programa. Al inicio de cada sesión y de manera individual se les entregaban las hojas que describían el desarrollo de la actividad y en las que debían anotar sus respuestas con bolígrafo. En cada sesión se iniciaba la discusión a través de una animación o bien con gráficas generadas por el programa que eran creadas previamente por la investigadora, quien tomó el papel de profesora. Se planeó el modo en que la investigadora, habría de interactuar en las sesiones. El desarrollo de éstas consistió esencialmente en discusiones de las actividades por equipos y también en discusiones plenarias, no en este orden, sino de acuerdo a las características de la actividad y a las circunstancias y dificultades que los estudiantes fueran enfrentando. La profesora medió la interacción entre los equipos en las discusiones grupales. La técnica utilizada en la recolección de datos en ambas etapas fue la observación sistemática del desempeño de los estudiantes y de la profesora. Ésta se realizó por medio de la videograbación con una cámara fija y dos móviles. Las transcripciones del discurso oral, gestual y las producciones escritas de los estudiantes y del profesor fueron las fuentes que permitieron interpretar cómo los estudiantes fueron re-describiendo sus intuiciones a través de los sistemas simbólicos a los que accedieron a través del programa.

La primera fase (2012) permitió identificar y valorar las posibilidades y los obstáculos en la implementación de las actividades con el software. Se diseñaron 9 actividades que fueron desarrolladas en 9 sesiones de 100 minutos cada una. El resultado principal de la experiencia de la primera fase, fue el diseño de 5 actividades que se aplicarían en la fase de enfoque, así como el ajuste de los métodos para la recolección de los datos, que son explicados en el siguiente apartado.

La segunda etapa, desarrollada en mayo de 2013, consistió en la implementación de 5 actividades, desarrolladas en 5 sesiones de 100 minutos cada una. Algunas actividades se muestran en el Apéndice A. En esta etapa, un medio más que se adoptó para registrar los datos fue la grabación de las producciones digitales de los estudiantes a través del programa Camtasia 8, así como el uso de dos cámaras más, que grabaron sin interrupción la actividad de dos equipos diferentes en cada sesión. Estas modificaciones metodológicas con respecto a la fase de exploración permitieron profundizar en el análisis. La adopción de la técnica de análisis de protocolo verbal fue utilizada en la interpretación de la cuarta actividad.

Análisis

El análisis presentado en este documento se centra en los hallazgos de la cuarta sesión de la fase de enfoque, sin embargo, presentamos una breve descripción de la secuencia temática de las actividades. El interés central de la investigación, como ya se ha señalado, es dar cuenta de cómo los estudiantes logran dar significado a la relación entre las gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo asociadas al movimiento rectilíneo. En la primera sesión se promovió una discusión para entender la relación entre una animación generada en SimCalc, en la que dos actores virtuales seguían un trayecto rectilíneo con velocidad constante, con su gráfica cartesiana de distancia-tiempo ($d-t$) y a partir de ella generar la gráfica cartesiana de velocidad-tiempo ($v-t$). El objetivo de la segunda sesión fue que los alumnos discutieran cómo generar la gráfica $v-t$ a partir de la gráfica $d-t$, primero en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme (mru), luego en el contexto del movimiento uniformemente acelerado (mua). Se procuró que los alumnos se centraran en las diferencias cualitativas de ambos movimientos, en cómo lo veían, en cómo leían sus gráficas y no en cómo se llamaban (mru o mua). En la tercera sesión se trabajó con cuatro animaciones en el contexto del

movimiento uniformemente acelerado. Los alumnos primero describieron de manera oral y escrita cada una de las animaciones y trazaron las gráficas d-t y v-t. Posteriormente compararon sus gráficas con las que el programa generó. Un análisis a partir de esta última, daría la posibilidad de conjeturar acerca de la forma de la gráfica aceleración-tiempo. En la cuarta sesión los alumnos crearon una animación que correspondía a un problema del encuentro de dos carros. Esta tarea fue planeada con el objetivo de captar cómo los estudiantes expresaban las ideas en las que se había trabajado en las sesiones anteriores. Es importante señalar que el tratamiento del movimiento uniformemente acelerado hasta este momento, se había realizado sólo a través de gráficas y que sería hasta esta, la cuarta sesión, en que se haría necesario el tratamiento algebraico, pero buscando que éste surgiera de una necesidad por expresar lo que ya no podía explicarse sólo con gestos, palabras o gráficas. Finalmente, en la quinta sesión se trabajó con dos animaciones de movimiento rectilíneo, cuyas gráficas d-t obedecían a un modelo exponencial y a uno cuadrático, respectivamente.

En los siguientes apartados se presentan el análisis de cómo un equipo abordó el problema. En las transcripciones A1, A2, A3 representan los integrantes del equipo, P se refiere a los momentos de intervención de la profesora. La descripción de gestos, énfasis en el discurso y otras aclaraciones se escriben entre paréntesis en *itálicas*. Las referencias a las figuras se denotan por Fn.x

La actividad de la cuarta sesión

Dos carros se mueven en la misma dirección en trayectorias lineales adyacentes. El carro A se mueve con velocidad constante, comienza a moverse a 20m del origen y en el segundo 6, se encuentra en la posición 32m. En el segundo 0, la posición del carro B es 0m y su velocidad es 12 m/s. Se sabe que la aceleración del carro B en todo su trayecto es constante y es negativa. Crea una animación para mostrar cuál debe ser el valor de la aceleración del carro B para que los carros estén lado a lado en el segundo 4.

Episodio 1 Móvil A. [00:00 a 4:36] A1 toma el control de la computadora en este episodio y crea un actor bajo un modelo lineal para su gráfica d-t. De más de 20 opciones que tiene para elegir la apariencia del mundo, elige la que se llama *Carsz*, en la que los actores toman forma de automóviles.

A2: En el segundo seis se encuentra en la posición 32.

A1: Pero no dice el dominio ¿o sí?

A2: No, no. Dice que en el segundo seis se encuentra en la posición 32.

A3: El rango es de 0 a 6. (*Pausa*) No, el dominio es de 0 a 6.

A1 usa las herramientas del programa para obtener la recta que cumpla las condiciones del problema.

1. P: ¿Por qué dibujaron esa recta?
2. A1: Porque dice que el carro A se mueve a velocidad constante y una velocidad constante.
3. A2: ¿Se supone que debería ser una recta horizontal, ¿no? (*Interrumpiendo*)
4. A1: Pero, cuando la gráfica está así o así (Figura 1) y pones la gráfica de velocidad, la gráfica es una línea horizontal
5. A2: Cierto
6. A3: Y también dice que el oo., comienza en el metro 20 a partir del origen, está aquí el punto. (E3 señala en la gráfica que aparece en la pantalla el punto (0,20))
7. A1: Este sería cero coma veinte y dice que en el segundo 6 está en la posición 32 y aquí nos dice que en el segundo 6, no se ve mucho, pero está en la posición 32 (*Activa la ventana de las coordenadas del punto para que la profesora lo vea*). Tenemos que es una velocidad constante porque

es una línea y ahí si sacamos la de velocidad acá, va a dar que es una recta porque es constante. (A1 activa la ventana para obtener la gráfica de la velocidad y aparece la gráfica).



Figura 1. Gesto como artefacto simbólico para entender la gráfica

Al inicio de este episodio, la primera observación es que A1 hace explícita la necesidad de mantenerse cercana al problema al elegir un mundo virtual en el que los actores son precisamente carros. Identifican como primer tarea, el representar el movimiento del carro A, a partir de la gráfica d-t. A1 elige un modelo lineal y reconoce (2) en él la velocidad constante. A2 también ha asociado la idea de velocidad constante a la imagen de recta horizontal (3), pero en ese momento están hablando sobre la gráfica d-t y A1 lo aclara usando el dedo índice para establecer una relación entre las gráficas d-t y v-t. Podemos reconocer en este episodio un primer nivel de re-descripción de una parte del problema en un formato simbólico a través del gesto.

Episodio 2 Móvil B, primer gráfico. [4:37 a 6:30]

8. A2: Entonces el segundo carro, en el segundo 0 está en el metro cero
9. A1: O sea en el origen
10. A2: Y su velocidad es 12 metros sobre segundo. (Elige para el móvil B un modelo lineal para la gráfica d-t). Se supone que su velocidad es la pendiente, entonces debería estar ahí. (Activando la ventana de velocidad, aparece la gráfica v-t)
11. A1: Que en su trayecto es constante y es negativa.
12. A2: No, pero eso es la aceleración.
13. A3: Si tiene aceleración, no puede tener velocidad constante. O sea su velocidad de cuando empieza es de 12 metros sobre segundo, pero no termina con la misma velocidad, por tener aceleración.
14. A2: ¿Cómo?
15. A3: O sea, si la velocidad es constante, no hay aceleración, no hay cambio de velocidad. Entonces debe de existir un cambio de velocidad.
16. A1: Tenemos que buscar una forma en que se crucen en el segundo cuatro. De lado a lado en el segundo cuatro (leyendo el texto)
17. A3: No tiene dominio tampoco, ¿verdad?
18. A1: 'Mm (En tono de negación). Pues vamos a poner en segundos, 5.

La primera propuesta de A1 para representar el movimiento del móvil B es por medio de una gráfica d-t de forma lineal. La confrontación con su gráfica v-t, genera entre los integrantes una búsqueda de relaciones entre lo que plantea el problema y lo que ven en la gráfica (13, 14). Esta búsqueda también se refleja cuando A3 pregunta por el dominio (17) y al no contar con más información proponen elementos para construir la gráfica (18).

Episodio 3 Móvil B, segundo gráfico. [6:30 a 20:25]

19. A3: Para que la aceleración sea negativa tiene que ser así, ¿no? o así. (F2.a, izquierda) Pero si empieza en cero y es positiva entonces tiene que ser así (F2.a, derecha), la cosa es pues, vemos cómo reacciona, ¿no?
20. A1: Pero el problema es que si lo dejamos así, va a alcanzar la otra línea más rápido. Si lo hacemos al revés (F2.b). (Hace un gesto con el dedo, indicando cambio en la concavidad de la curva)
21. A3: Pero ya no sería aceleración negativa.
22. A2: Pero el problema es que se tiene que cruzar ¿no? (Toma el lápiz) (F2.c)
23. A1: Ajá. Porque se tiene que cruzar hasta el segundo cuatro.
23. A2: La otra está así, entonces se debe de cruzar así.
24. A1: Porque primero tiene que avanzar muy lento para que en el segundo 4 las dos se crucen. Si lo hacemos al revés en muy poco tiempo la otra va a alcanzar la línea.
25. A2: A menos que sea así (F2.d) (Se ríe, pues parece que sabe que su argumento no es convincente).
26. A2: Así se intersectan
27. A3: Pero su aceleración es positiva

Al inicio de este episodio, el equipo deja el trabajo en la computadora por el trabajo en papel y lápiz. A3 toma la iniciativa (19) y hace dos trazos curvos. No sabe cómo caracterizar con una palabra ese tipo de curvas, pues en ningún episodio lo hace, pero recurre a otro artefacto, las gráficas, para comunicar lo que está pensando. Acto seguido A3 traza los ejes cartesianos con la curva que cree corresponde a las condiciones del problema (F2.a, derecha). En ese momento comienza una interesante intervención de los otros integrantes. Los trazos de A3 se convierten en un medio no sólo para que A3 se exprese, sino para que sus otros compañeros piensen a través de ellos. E1 interpreta icónicamente el trazo de A3, porque para refutarlo se basa en un nuevo trazo que hace y en el que las gráficas d-t de ambos carros no se podrían cruzar. La identificación de un cruce entre ambas gráficas, refiere nuevamente una re-descripción del problema en términos simbólicos. En el extracto se puede reconocer que los estudiantes hablan del cruzamiento de las gráficas (usan el artículo femenino, por ejemplo) (20, 23, 24). No hay acuerdo, pero A3 sigue convencida de la forma de la gráfica d-t (21, 27), sin embargo, debe rebasar la representación gráfica para convencer a sus compañeros. E1 borra la propuesta inicial (el modelo lineal) y traza con el programa un modelo cuadrático, que por default tiene concavidad hacia arriba. Enseguida activa la pantalla que presenta la forma algebraica y cambia los parámetros consiguiendo nuevas formas de la parte de la parábola, hasta conseguir con ayuda de sus compañeros el cambio de concavidad. Comienzan entonces de manera arbitraria a cambiar los otros parámetros para conseguir lo tienen en mente y han materializado en el papel: conseguir que se intersecten en el segundo 4.

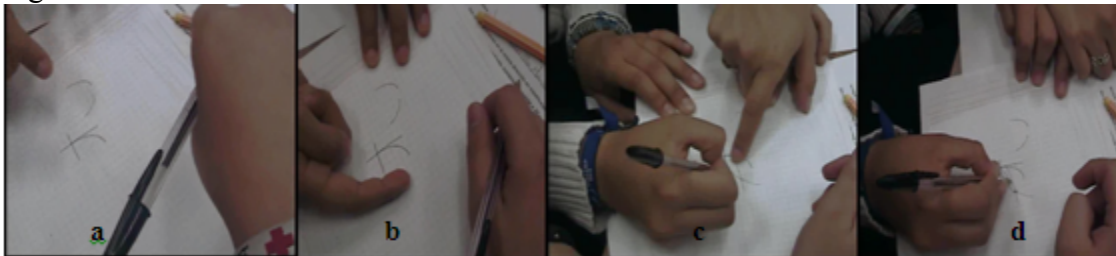


Figura 2. Re-descripción del problema en un nivel simbólico mediado por las gráficas

A1 expresa una confusión que tiene, pues cree que la velocidad del móvil B debe ser siempre igual que 12 m/s. A3 hace la aclaración que en el texto se plantea que esa es la velocidad inicial de B. Este intercambio de ideas conduce a traer a la pantalla las gráficas de velocidad de los

móviles A y B, que hasta el momento no las habían requerido. Ahora las gráficas de velocidad toman una nueva dimensión. A diferencia del primer episodio (7), la gráfica no sólo tiene la función de comprobar una construcción, sino que propiamente les dará la posibilidad de construir la animación.

Episodio 4 Validación gráfica por medio de las áreas. [20:27 a 23:10]

28. P: ¿Cómo pueden decir que esa es la gráfica correcta, que se encuentran los dos carros en el segundo cuatro?
29. A3: Eh. Haciendo el área de ¿velocidad? Por ejemplo, hacemos que es ..., es que no se ve. (*ajusta la escala de la gráfica para poder calcular el área*), entonces decimos que en cuatro, aquí son ocho.
30. P: ¿Qué quiere decir ese 8?
31. A3: Que...que....
32. A2: Que en el segundo cuatro, a partir de su origen que es el veinte, se le va a sumar otros ocho, para que sea en el segundo cuatro, entonces va a estar en el 28.
33. P: y ¿qué tendría que pasar con el otro?
34. A2: Su área tendría que estar en 28 al llegar al cuatro. Serían 11 menos 3, ocho. Y por cuatro, veintiocho. Sí.
35. A1: No. Treinta y dos, entre dos, dieciséis.
36. A3: Y... y... los otros, estos, son doce y dieciséis más doce, veintiocho. Se encuentran en el metro 28 en el segundo cuatro.

En la Figura 3 se muestran las construcciones consecutivas del equipo. Su construcción final no cumplía con la condición de que la velocidad del móvil B en el segundo 0, fuera 12 m/s, en su construcción era igual que 11 m/s. La figura F3.d fue obtenida por medio de la manipulación de la gráfica de velocidad, que el programa permite. Sin embargo, la construcción está lejos de ser una construcción por ensayo y error. El argumento se basa en el extracto del Episodio 4. La manipulación de la gráfica de velocidad no fue arbitraria, tal como lo muestran las intervenciones de A3 (29, 36) y A2 (32), ellos re-describen el significado de las gráficas de velocidad en términos del área bajo los cuadriláteros que forman las curvas con los ejes cartesianos y lo relacionan con las gráficas d-t correspondientes.

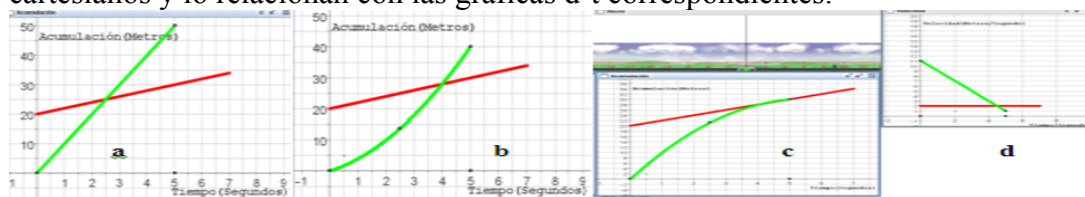


Figura 3. Gráficas cartesianas d-t (a,b,c), v-t (d) para carro A (rojo) y carro B (verde).

Conclusiones

Hemos descrito en las secciones previas la experiencia de un grupo de estudiantes cuando interactuaron en un entorno digital con el objetivo de dar significado a la relación entre las gráficas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo, en situaciones específicas. Aunque estos resultados involucran un número pequeño de estudiantes, los resultados sugieren que la herramienta digital elegida puede contribuir a que ellos desarrollen diferentes formas de representar, explorar y expresar ideas matemáticas de manera complementaria con el lápiz y el papel. También puntualizamos el hecho de que se requieren métodos que permitan acercarse lo suficiente cuando los estudiantes trabajan en un entorno digital, de aquí la decisión de mostrar en el escrito esa parte de la experiencia. No obstante, creemos que los resultados obtenidos son parte de un proceso social que comenzó aún antes de la primera sesión de trabajo con ellos, pues

ya para ese momento, los estudiantes tuvieron que re-describir sus intuiciones y creencias acerca del movimiento rectilíneo para poder internalizar los artefactos simbólicos creados culturalmente. Estas intuiciones son parte de la identidad cognitiva del ser humano, no se pueden abandonar, sino más bien re-describir. Los resultados de este proyecto pueden alimentar favorablemente la discusión de la fuerza conceptual de una gráfica. Por ejemplo, mediante la representación gráfica de una función, podemos hablar de manera inmediata de su concavidad, lo que resulta inaccesible si tratamos de hacerlo a través de su representación algebraica. Pero cuando además, la gráfica está anclada en una experiencia de movimiento, se tiene la posibilidad de acceder a las ideas matemáticas de variación y acumulación de manera sustancial. Un acercamiento intuitivo al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) puede ser posible desde el inicio de un curso tradicional de Cálculo y no esperar al final, como es común, para mostrar un TFC útil solamente en una faceta algorítmica.

Referencias y bibliografía

- Benítez, A. (2012). *Estudio sobre la variación y el cambio: mediación del sensor de movimiento*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México.
- Donald, M. (2001). *A Mind so Rare: The Evolution of Human Consciousness*. New York/London: W.W. Norton and Company.
- Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond Modularity*. Cambridge, Ma.: Cambridge University Press. Trad. cast. de J. C. Gómez y M. Núñez: *Más allá de la modularidad*, Madrid: Alianza, 1994.
- Kozulin, A. (1990). *La psicología de Vygotski*. Madrid: Alianza Editorial.
- Moreno, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital Technologies. *ZDM Mathematics Education*, 41, 505-519.
- Nemirovsky, R., Tierney, C. & Wright, T. (1998). Body Motion and Graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119-172.
- Pozo, J. (2006). *Adquisición de conocimiento*. Madrid, España: Morata.
- Radford, L. (2009). “No! He starts walking backwards”: interpreting learning motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM. The International Journal of Mathematics Education*, 41(4), 467-480.
- Reber, A. (1967). Implicit learning of artificial grammars. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 6, p. 317-327.
- Salinas, P. (2013). Approaching Calculus with SimCalc: Linking Derivative and Antiderivative. En Hegedus, S. & Roschelle, J. (eds.) *The SimCalc Vision and Contributions*. EUA: Springer-Verlag.
- Thornton, R. & Sokoloff, D. (1990). Learning motion concepts using real time microcomputer-based laboratory tools. *American Journal of Physics*, 58(9), 858-867.
- Tomasello, M. (2000). *The Cultural Origins of Human Cognition*. Cambridge: Harvard University Press.
- Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial

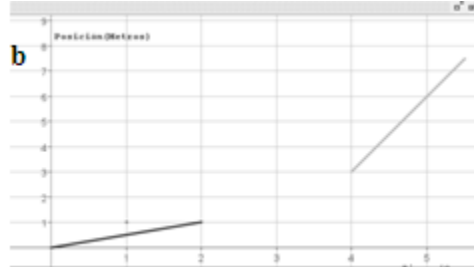
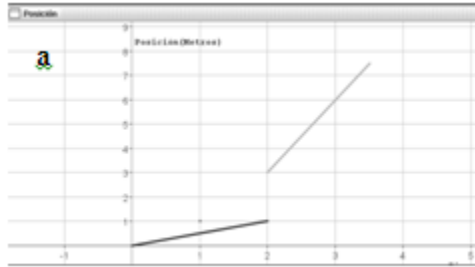
Crítica.

Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and Scientific Understanding*. Holland: D. Reidel Publishing Company.

Apéndice A

Algunas respuestas de los estudiantes a las actividades propuestas

En la primera sesión los alumnos debían interpretar las gráficas distancia-tiempo a través de descripciones verbales referidas al movimiento rectilíneo, algunas no eran posibles.



Si es un solo actor no es posible porque el salto de y el cambio de una velocidad a otra es instantáneo y la única posibilidad es que sean 2 personajes.

Esto sí es posible por ser que haya brincado o lo hayan cargado o algo diferente.

En la quinta sesión se mostraron dos animaciones en la pantalla del salón de clases. Sólo una correspondía a un movimiento uniformemente acelerado. Los alumnos debían identificarla y dar argumentos a su respuesta.

Haz un bosquejo de las gráficas p-t, v-t y a-t para cada actor.

p-t

v-t

aceleración

LA VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO DEL PAYASO

PRIMERA APROXIMACIÓN	SEGUNDA APROXIMACIÓN
(0,1) $v_1 = 1.72$	(0,1) 11
(1,2) $v_2 = 4.67$	(1,2) 11
(2,3) $v_3 = 12.7$	(2,3)
(3,4) $v_4 = 31.51$	
(4,5) $v_5 = 93.81$	

1) (0,1) (1,2.72)
pendiente: 1.72

3) (2, 7.30) (3, 20.09)
12.7
3, 20.09, 4, 54.60
4, 54.60 148.41

GRÁFICAS

93.81

34.5

12.7

9.67

1.72