



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio

Johan Espinoza González
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
jespinoza@una.cr

Jose Luis Lupiañez Gómez
Universidad de Granada
España
lupi@ugr.es

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada
España
isegovia@ugr.es

Resumen

Presentamos los resultados de la actuación de dos grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su capacidad matemática, al resolver dos tareas de invención de problemas aritmético. El estudio se centró en identificar las características de los problemas inventados por los estudiantes del grupo talento, con base en algunas variables que definimos y que están relacionadas con la estructura sintáctica, semántica y matemática de los mismos; así como establecer diferencias con respecto a los problemas inventados por el grupo estándar. Los resultados muestran que los problemas inventados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los del grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas, etc.

Palabras claves: Invención de problemas, resolución de problemas, problemas aritméticos; talento matemático, Educación Matemática.

Introducción

El problema de investigación considerado en este trabajo de investigación comprende dos campos de estudio: los sujetos con talento matemático y la invención de problemas matemáticos. De acuerdo con el análisis de literatura realizado, se constata que ambos campos han sido de interés dentro de la investigación en didáctica de la matemática (Espinoza, 2011).

Así, la investigación de los sujetos con talento se ha centrado en tres grandes temas: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro, 2008). En el caso de la invención de problemas, existen investigaciones que se interesan en estudiarla como característica de la actividad creativa o talento excepcional, como actividad de clase, como característica prominente de la actividad matemática, para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes, etc.

Sin embargo, existen pocos estudios que relacionen ambos tópicos, de manera que pongan de manifiesto las características particulares que presentan los estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. Por tanto, nos centraremos en caracterizar de forma exploratoria, la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático, ante dos tareas semiestructuradas de invención de problemas aritméticos, construidas especialmente para este estudio y compararlo con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público ante la misma tarea. Además nos interesa identificar algunos indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento en matemática.

Así, los objetivos planteados en esta investigación pretenden:

- a) Construir un instrumento de planteamiento de problemas con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención problemas aritméticos verbales.
- b) Desarrollar y utilizar un esquema analítico para valorar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes.
- c) Definir categorías de análisis que permitan caracterizar las producciones de ambos grupos de estudiantes ante la tarea de invención de problemas aritméticos,
- d) Identificar diferencias entre los problemas inventados por ambos grupos con base en las categorías de análisis definidas.

Marco teórico

La revisión de literatura que se incluye en este apartado comprende tres partes bien diferenciadas: el talento matemático, los problemas aritméticos verbales y la invención de problemas matemáticos. A continuación se tratan algunos conceptos relacionados a los sujetos con talento matemático, así como algunas formas que se han utilizado en la identificación de los mismos. Luego se presentan aspectos relacionados con los problemas aritméticos verbales, su conceptualización, clasificación y algunas variables de estudio que son de interés en nuestra investigación. Por último, se explica en qué consiste la invención de problemas matemáticos.

Talento matemático

Algunos autores sostienen que los estudiantes con talento presentan características que los diferencian del resto de sus compañeros. Por ejemplo, Greenes (1981) menciona que presentan

un mayor ritmo de aprendizaje, excelente memoria y excepcionales capacidades verbales y de razonamiento y gran poder de abstracción. Pero, ¿quiénes son los estudiantes con talento?

Gagné (citado en Benavides, 2008), propone un modelo para distinguir los conceptos de superdotación y talento, denominado Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento. Según esta autora, la superdotación consiste en la posesión de habilidades naturales en alto grado que son espontáneas e innatas, las cuales se presentan en al menos un dominio de habilidad; mientras que el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, adoptamos el punto de vista de Gagné y nos centraremos en estudiar el talento.

Al respecto, se diferencian cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos (Villarraga, Martínez & Benavides, 2004). Dado que en esta investigación nos centramos en estudiar el rendimiento de estudiantes considerados con talento matemático, es que trataremos la noción de talento orientado al logro o rendimiento.

De igual forma analizaremos las habilidades matemáticas que presentan estos estudiantes ante la tarea propuesta, por lo que nos interesa estudiar un talento específico, el talento matemático. Una de las formas más sencillas de definirlo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijo, Díaz & Rodríguez, 2004).

Sin embargo, en esta investigación adoptamos la definición de Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en el área de la matemática.

En cuanto a la identificación del talento matemático, se describen diversos métodos tanto de enfoque cualitativo como cuantitativos; sin embargo, los más utilizados han sido los test estandarizados, corriendo el peligro de rechazar a niños que deberían ser identificados como talentos matemáticos (Benavides, 2008). No obstante, algunos autores destacan el uso de la invención de problemas como herramienta que puede ser utilizada en la identificación del talento matemático (Krutetskii, 1976; Ellerton, 1986; Kesan, Kaya & Güvercin, 2010).

Problemas aritméticos

Dado que en este estudio se proponen dos tareas de invención de problemas matemáticos aritméticos, consideramos pertinente exponer la noción de problema matemático que emplearemos en nuestro estudio. Así, adoptamos la noción propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos; una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

De igual forma, se adoptó la definición de problema aritmético propuesta por Puig & Cerdán (1988), al considerarla como un enunciado verbal o escrito que proporciona información de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

En relación con su clasificación, Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, et al., (1997), mencionan los problemas de una etapa o más de una etapa. También Puig & Cerdán (1988), sugieren otra clasificación que atienden al tipo de estructura operatoria (aditiva o multiplicativa) y al componente semántico involucrado en el problema. Este mismo autor menciona los problemas combinados mixtos que son un tipo de problemas de más de una etapa.

Por último, diversos autores hacen referencia a variables de estudio de los problemas aritméticos. Al respecto, se destacan las variables sintácticas, de contenido, componente semántico (Puig & Cerdán, 1988), el tipo de proposición interrogativa (Castro, 1995), la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta (Castro, Rico & Gil, 1992).

Invención de problemas

El término invención de problemas o planteamiento de problemas, también conocida en la literatura en inglés como “problem posing” (Brown & Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997), implica la formulación de nuevos problemas, así como la reformulación de situaciones dadas (Silver, 1994; English, 1997; Silver & Cai, 1996).

En este sentido, los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung & Kenny, 1996), al realizar algunos cambios al mismo, al reformular el problema y personalizarlo o al estudiar un caso particular de la situación dada, con el objetivo de comprender mejor el problema y así buscar una solución. Por ejemplo, en el trabajo de Polya (1979), se cuestiona ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?

Este proceso podría ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución, sino la formulación de problemas a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Al respecto, Cázares (2000), presentó a estudiantes de primaria varias tarjetas con diferentes ilustraciones de situaciones relacionadas con su contexto, de las cuales debían escoger algunas y plantear varios problemas matemáticos.

Por último, los estudiantes pueden inventar problemas después de resolver un problema, cuando se le indica a los estudiantes que modifiquen el objetivo, condición o pregunta del mismo, con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Por ejemplo, Brown & Walter (1993), proponen una estrategia denominada “¿What if not?”, la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de un determinado problema, para así plantear nuevos e interesantes problemas.

Por otra parte, se identifican tres formas en las cuales se podrían formular problemas: situación libre, situaciones semiestructuradas y situaciones estructuradas (Stoyanova, 1998). En la primera, los estudiantes no tienen restricciones para inventar problemas; mientras que en las situaciones semiestructuradas se les propone que planteen problemas con base en alguna experiencia o situación. Por último, las situaciones estructuradas, son aquellas en las que se reformulan los problemas dados o se cambia la condición del mismo.

De esta forma, los estudiantes pueden inventar problemas a partir de una ilustración que presente o no información numérica, con base en operaciones aritméticas dadas, mediante alguna información presentada de forma textual, modificando la respuesta de un problema o mediante el planteamiento libre de un problema.

Así, con base en la literatura consultada, al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones por diferentes autores. Se le ha designado como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987) y planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990). A nuestro parecer, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que utilizaremos con más frecuencia la expresión invencción de problemas.

Metodología

Esta investigación es de tipo exploratorio descriptivo, pues corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invencción de problemas aritméticos por estudiantes considerados con talento matemático, privilegiando la descripción e interpretación de la información, pero al mismo tiempo dando un tratamiento cuantitativo a los datos (Espinoza, 2011). Los sujetos de estudio corresponden a dos grupos de estudiantes con características diferentes. El primero, denominado grupo talento, está conformado por 21 estudiantes considerados con talento matemático que participaron en el proyecto ESTALMAT Andalucía durante el curso 2010-2011 y que tienen edades comprendidas entre los 13 y 15. Este proyecto pretende detectar y estimular durante dos años académicos el talento precoz en matemática de 25 alumnos de centros andaluces escogidos mediante la realización de pruebas de selección¹.

El segundo lo conforman 19 estudiantes de tercer grado del Instituto de Educación Secundaria Nazarí, ubicado en Salobreña, provincia de Granada, España y que llamamos “grupo estándar”. Estos estudiantes tienen entre 14 y 15 años.

Descripción del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un cuestionario con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invencción de problemas (Stoyanova, 1998), con características diferentes que permiten a los estudiantes poner en práctica sus habilidades, conocimientos y creatividad.

Para el diseño de este instrumento se tomaron en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto escolar presentado en la situación sea muy familiar para los estudiantes (Moses et al., 1990). Además, debía ser una situación que motive a plantear diferentes tipos de problemas, estimule la creatividad, permita el empleo de diferentes tipos de números, así como favorecer e incentivar la invencción de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

Con respecto a esta última condición, solicitamos a los estudiantes plantear problemas que consideren difíciles de resolver, ya que nos interesa que los estudiantes muestren y pongan en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas. Además, consideramos que esto puede hacer que el estudiante ponga su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad de inventar problemas originales. Este instrumento fue revisado y analizado por expertos en Didáctica de la Matemática y aplicado a un grupo de estudiantes con el fin de valorarlo.

La primera tarea plantea lo siguiente: “de acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución

¹ <http://thales.cica.es/estalmat/>

se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”.

La figura propuesta² a los estudiantes para que inventen el problema es la siguiente:



Figura 1. Imagen utilizada en la primera tarea

Las indicaciones de la segunda tarea son similares a la anterior; pero en ésta tuvieron que inventar un problema matemático a partir de la siguiente situación expuesta de forma textual: “Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros”.

Descripción de las categorías de análisis empleadas

Para elaborar las categorías de análisis consideramos las características propias de esta investigación y realizamos una revisión de las variables de estudio de los problemas aritméticos propuestas por Puig y Cerdán (1988); Castro (1995); Castro et al., (1988) y los esquemas empleados por Leung & Silver (1997); Silver & Cai (2005; 1996); Cázares (2000); Ayllón (2012). Así, definimos las siguientes tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio. Dichas variables se explican con mayor detalle y sustento teórico en Espinoza (2011).

En la primera categoría, denominada estructura sintáctica, se estudió la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. La longitud del enunciado fue analizada de acuerdo a la cantidad de proposiciones presentes, las cuales corresponden a expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. El tipo de proposición interrogativa se relaciona con la pregunta del problema y se clasifican en proposiciones de asignación, condicionales o relacionales (Silver & Cai, 2005)

La segunda categoría, llamada estructura matemática, fue analizada de acuerdo con el tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Por último, en la categoría de estructura semántica, los problemas fueron estudiados en relación a su estructura semántica y cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado.

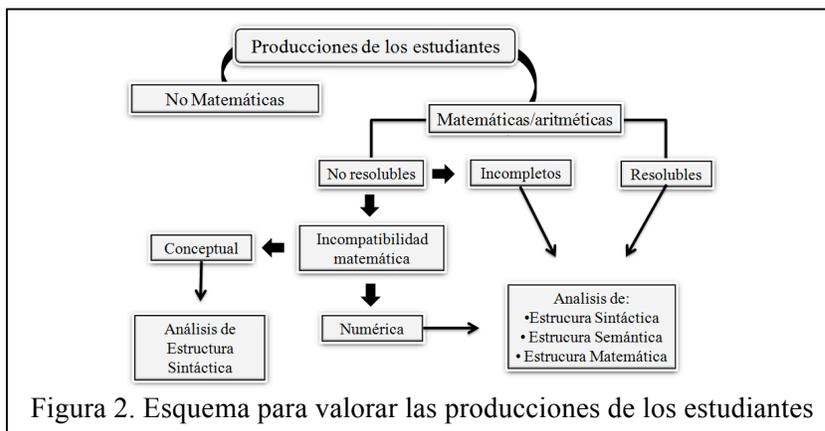
Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Todas las producciones correspondieron a problemas matemáticos, por lo que los autores del estudio los resolvieron y clasificaron en resolubles y no resolubles. Dentro de éstas encontramos problemas matemáticos no resolubles que presentaron características importantes de analizar. Por ello las clasificamos como incompletas (Puig & Cerdán, 1988) y los distinguimos de aquellos que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérico o conceptual. A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles incompletos o que presentan

² <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppall.html>

incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplicó el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual fueron analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática.

La figura 2 muestra el esquema utilizado para valorar las producciones de los estudiantes.



Resultados

En este apartado se presentan los principales resultados obtenidos de las producciones de ambos grupos de estudiantes a las dos tareas planteadas. Para transcribir las producciones se utilizó una codificación con seis caracteres para hacer referencia a las mismas, de manera que los primeros cuatro indican el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes a la producción, ya sea de la primera o segunda tarea. Por ejemplo, el código 6GE-T2 se refiere a la producción del estudiante número seis del grupo estándar ante la segunda tarea de inventión de problemas.

A continuación se muestran las características generales de los problemas inventados por dichos estudiantes y seguidamente se exponen los resultados obtenidos según la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas.

Características generales de los problemas inventados

En primera instancia resultó que todos los enunciados inventados por los estudiantes son problemas matemáticos, de los cuales el 65% son resolubles. Es interesante hacer notar que los estudiantes del grupo estándar plantearon una mayor proporción de problemas resolubles (74%) que el grupo talento (57%). Este último resultados nos sorprende en la medida que se espera que ocurra lo contrario; a falta de la realización de otro estudio más amplio que los confirme, pueden ser varios los factores que inciden en los mismos: mejor actitud del grupo talento ante las matemáticas, menor ansiedad, menor miedo a equivocarse, el no tener que resolver los problemas que inventaban, etc.

También se obtuvo que los problemas no resolubles por incompatibilidad matemática representan el 22,5% (18 problemas) y los problemas incompletos 12,5 % (10 problemas). Estos dos tipos de problemas representan el 35% de los problemas matemáticos producidos por los estudiantes. Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente: *En este viaje va lleno. En una*

primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenían cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Este problema es interesante porque propone una serie de relaciones entre los datos y presenta una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque el estudiante no indicó el total de personas que quedaron en el interior del tren luego de la última parada.

Un problema planteado que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 294 no es divisible por 4 es el siguiente: *De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra? (6GE-T2)*

Análisis según la estructura sintáctica

El análisis según la estructura sintáctica comprende el estudio de tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. A continuación se describen los principales resultados en relación con estas tres variables.

Longitud del enunciado. Resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas planteados por el grupo talento (5,27) es mayor que en los problemas inventados por sus compañeros del grupo estándar (3,44). Además, resultó que el 69,1% de los problemas matemáticos inventados por el grupo talento están formados por cinco o más proposiciones, mientras que el grupo estándar planteó 31,6% de problemas con dicha característica.

También se observó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas no resolubles (5,58) es mayor que en los resolubles (5,04). Esto se evidenció en el planteamiento de una mayor proporción de problemas no resolubles que presentan cinco o más proposiciones (77,8%) que resolubles con la misma característica (62,5%).

Tipo de proposición interrogativa. Con respecto a esta variable, resultó que la mayoría de las proposiciones interrogativas que plantearon los estudiantes del grupo talento y estándar son de asignación (52,4% y 60,5% respectivamente), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos preferidas por los estudiantes de ambos grupos. El siguiente es un ejemplo de problema que presenta una proposición interrogativa de asignación: *A las 9:00 de la mañana sale un tren con 50 pasajeros, a las once vuelve con 70 pasajeros, vuelve a salir y vuelve con 30 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros han entrado y salido en total? (2GE-T2).*

Tipo de número empleado. Se observó que ambos grupos prefirieron utilizar números naturales en el planteamiento de su problema, con un 97,6% en el grupo talento y 97,4% en el grupo estándar. También resultó que el 43,9% de los problemas planteados por el grupo talento presentan el uso de número racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria; mientras que el uso de este tipo de número en los problemas planteados por el grupo estándar representó el 18,5%. Además, el grupo talento planteó casi el doble de proporción de problemas con dos o más tipos de números que el grupo estándar, los cuales corresponden a 34,1% y 18,4%

respectivamente.

Análisis según la estructura matemática

Esta categoría fue analizada con base en cuatro variables. A continuación se presentan los principales resultados en cada una de ellas. Este análisis fue aplicado a 78 problemas ya que dos que presentaron incompatibilidad matemática son imposibles de resolver incluso con información adicional.

Tipo de estructura operatoria y cantidad de etapas. Con respecto a esta variable resultó que la mayoría de los problemas planteados por ambos grupos son de estructura mixta; sin embargo, el grupo talento planteó una mayor proporción de este tipo (80%) que sus compañeros del grupo estándar (55,3%). Además, se observó que el grupo estándar planteó una proporción mayor de problemas de estructura multiplicativa y aditiva (31,5% y 13,1% respectivamente) que sus compañeros del grupo talento (17,5% y 2,5% respectivamente). Por último, se encontró que el 97,5% y 94,8% de los problemas planteados por el grupo talento y estándar, respectivamente, son de más de una etapa.

Tipo de operación y cantidad de procesos implicados en la solución del problema. En relación con el tipo de operación encontramos que el grupo talento prefirió plantear problemas que implicaban el uso de multiplicación-división, suma-multiplicación y suma-resta-multiplicación-división, los cuales corresponden al 60% de los problemas planteados por este grupo. En el caso del grupo estándar, los problemas requieren aplicar las operaciones de multiplicación, multiplicación-división y suma-multiplicación que corresponden al 55,2%.

Con respecto a la cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, resultó que el grupo talento y estándar plantearon respectivamente el 92,5% y 81,6% de los problemas con dos o más procesos. También se observó que aproximadamente la mitad de los problemas inventados por el grupo talento (47,5%) presentan tres o más procesos distintos; mientras que el 21,1% de los problemas del grupo estándar presentan tal cantidad de procesos. Es importante resaltar que los estudiantes del grupo talento y estándar plantearon una proporción similar de problemas con dos procesos o tres procesos (70% y 73,7% respectivamente).

Cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Los resultados muestran que el promedio de pasos requeridos para resolver los problemas planteados por el grupo talento (3,95) es mayor que el promedio de pasos que incluyen los planteados por el grupo estándar (2,92). Esta diferencia también se reflejó en la cantidad de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos, puesto que el grupo talento planteó más del doble en proporción de problemas con dicha característica (67,5%), que sus compañeros del grupo estándar (31,6%). En contraste, el 68,4% de los problemas planteados por el grupo estándar requieren tres o menos pasos distintos para ser resueltos.

Otro aspecto interesante es que los estudiantes del grupo estándar plantearon una gran cantidad de problemas que requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos (80%); en contraste con el grupo talento donde el 39% presentan dicha característica. También resultó que el 66,6% de los problemas del grupo talento que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas, implican cuatro o más pasos para ser resueltos; mientras que el 42% de los inventados por el grupo talento presentan dicha característica. Por último, se observó que de los problemas que incluyen dos o tres procesos, los estudiantes del grupo talento plantearon una mayor proporción que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos (60,7%) que los inventados por el

grupo estándar con dicha característica (35,7%).

Análisis según la estructura semántica

En esta categoría se analizó el tipo de estructura semántica presente en los problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Además, se estudió la cantidad de relaciones semánticas implicadas en los problemas inventados por los estudiantes. Es importante recordar que en esta categoría, al igual que en la anterior, sólo se analizaron 78 problemas.

Estructura semántica de los problemas aditivos. Resultó que el único problema aditivo planteado por el grupo talento presenta la relación semántica de cambio, mientras que en el grupo estándar se encontraron cuatro (80%) que presentan la estructura semántica de combinación, tres de cambio (60%) y uno de comparación. Además, de los 59 problemas de estructura aditiva y mixta, de los cuales 33 fueron inventados por el grupo talento y 26 por el estándar, se encontró que ambos grupos prefirieron plantear problemas de combinación, seguido de problemas que incluyen la componente semántica de cambio.

Estructura semántica de los problemas multiplicativos. Observamos que las estructuras semánticas más utilizadas por el grupo talento fueron la de producto de medidas (71,4%) e isomorfismo de medida (57,1%). En el caso del grupo estándar, el 91,7% de los problemas multiplicativos presentan la relación semántica de isomorfismo de medida y el 25% producto de medidas. También se encontró que de los 72 problemas de estructura multiplicativa y mixta, de los cuales 39 fueron planteados por el grupo talento y 33 por el grupo estándar, ambos grupos de estudiantes prefirieron plantear problemas que incluyeran la componente semántica de isomorfismo de medida, seguida de producto de medidas y en menor proporción comparación multiplicativa.

Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos. En relación con esta variable, resultó que la mayoría de problemas mixtos planteados por el grupo estándar (66%), incluyen las componentes semánticas combinación-isomorfismo de medida o cambio-isomorfismo de medida, mientras que el grupo talento planteó sólo el 13% de los problemas mixtos con estas características. En el caso del grupo talento la combinación que tiene mayor frecuencia (30%) es cambio-combinación-isomorfismo de medida o cambio-comparación-isomorfismo de medidas.

Cantidad de relaciones semánticas distintas. En esta variable observamos que los estudiantes del grupo talento inventaron problemas con una mayor media de cantidad de relaciones de estructura semántica distintas (2,83) que el grupo estándar (1,89). Además, el grupo talento planteó una proporción mayor (65%) de problemas con tres o más relaciones semánticas distintas que sus compañeros del grupo estándar (15,8). Además, todos los problemas del grupo estándar poseen tres o menos relaciones semánticas y un alto porcentaje (84,2%) presentan dos o menos relaciones semánticas distintas. También resultó que el grupo talento y estándar plantearon un porcentaje similar de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas (67,5% y 73,7 respectivamente).

Conclusiones

En primera instancia, concluimos que los problemas inventados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los inventados por el grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas. Este resultado es similar al obtenido por Ellerton (1986), ya que los problemas

inventados por los estudiantes más hábiles requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones e implican un sistema numérico más complejo.

Consideramos que estas diferencias también se reflejaron en la sensación de dificultad percibida al resolver los problemas, ya que en el caso del grupo estándar, al terminar de leer el enunciado se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo. Sin embargo, esto no siempre fue así en el grupo talento, donde varios problemas daban la sensación de no ser tan fáciles de resolver a simple vista. De hecho, en uno de ellos, no fue posible encontrar la solución aun cuando creemos que sí tiene.

Por otra parte, tomando en cuenta las limitaciones de este estudio, podemos concluir que un estudiante con talento se puede caracterizar por:

- a) Inventar una gran cantidad de problemas no resolubles.
- b) Incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones.
- c) Emplear números naturales y en menor proporción números racionales.
- d) Emplear dos tipos de números distintos, ya sean naturales o racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria.
- e) Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación.
- f) Combinar la estructura aditiva y multiplicativa para plantear problemas de estructura mixta.
- g) Incluir las relaciones semánticas de combinación y producto de medidas.
- h) Plantear tres o más relaciones semánticas distintas.
- i) Inventar problemas que requieren cuatro o más pasos para resolverlo.
- j) Plantear problemas que presentan dos o más procesos de cálculo distintos en su solución y en menor proporción tres o más procesos.
- k) Combinar los bloques de contenido curricular de aritmética y física

El siguiente es un ejemplo de problema que cumple con las características citadas

En este viaje va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Por último, consideramos que a pesar de las limitaciones de nuestra investigación, identificamos algunos indicios del uso de la invención en la identificación de estudiantes con talento matemático. Por ejemplo, los problemas planteados por el grupo talento presentan características distintas a los inventados por el grupo estándar. Además, si consideramos que la capacidad de los estudiantes para inventar problemas aritméticos se relaciona con la riqueza de los problemas planteados, entonces los estudiantes con talento mostraron una mayor capacidad ante dichas tareas. Esto también se refleja en la solución de los problemas planteados por este grupo, ya que desde nuestro punto de vista, estos dan la sensación de mayor dificultad, puesto que al leer el enunciado no se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo.

REFERENCIAS

- Ayllón, M. (2012). *Invencción-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.
- Brown, S. & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. & Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp. 63-76). Granada: SEIEM.
- Castro, E (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & B. Lorenzo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Cázares, J. (2000). *La invencción de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Ellerton N. (1986). Children's made up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
- English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.
- Espinoza, J. (2011). *Invencción de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematic. *Arithmetic Teacher*, 28 (8), 14-17.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*. (pp. 123-148). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Moses, B., Bjork, E. & Goldenberg, E. R (1990): Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 83-91.

- Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faisca, Revista de altas capacidades N° 11*, pp. 83-102
- Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.
- Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Silver & Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.
- Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S. & Kenney, P (1996). Posing mathematical problem: an exploratory study. *Journal for research in mathematics education*. 27(3), 293-309.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp. 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.
- Villarraga, M., Martínez, P. & Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.