



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



El Análisis Didáctico y el estudio de los cambios curriculares en la enseñanza de la aritmética: la implantación del Sistema Métrico Decimal en España

Miguel **Picado** Alfaro

Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica

Costa Rica

mpicado@una.cr

Luis **Rico** Romero

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

España

lrico@ugr.es

Bernardo **Gómez** Alfonso

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

España

gomezba@uv.es

Resumen

Presentamos los resultados de un estudio histórico sobre los cambios curriculares en libros de texto de matemáticas con la introducción del Sistema Métrico Decimal en España durante la segunda mitad del siglo XIX. El estudio se orientó por el método histórico y el Análisis Didáctico como herramienta para el estudio de libros de texto históricos. Esto ha permitido caracterizar la inclusión de este sistema metrológico en libros de texto para primaria, secundaria y la formación de maestros mediante la identificación y descripción de la estructura conceptual, los procedimientos, representaciones y contextos con que se incluyó a las unidades de pesas y medidas métrico-decimales en los tópicos de aritmética. El estudio proporciona antecedentes históricos e información relevante para comparar y caracterizar la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética enfocando el SMD en el currículo español desde su implantación hasta la actualidad.

Palabras clave: aritmética, análisis didáctico, cambios curriculares, libros de texto, Sistema Métrico Decimal.

Introducción

Al igual que otros países, España adoptó el Sistema Métrico Decimal (SMD) en el siglo XIX. La Ley de Pesas y Medidas de 19 de Julio de 1849 estableció el nuevo sistema metrológico. La norma dictó con firmeza que, a partir de 1° de enero de 1852, en todos los establecimientos en que se enseñaban las matemáticas se debía incluir el SMD como parte de este proceso de instrucción derivando que el Sistema Educativo español incluyera dentro de sus disposiciones curriculares la enseñanza de las nuevas pesas y medidas como parte de los contenidos de aritmética.

Esto generó una serie de cambios que repercutieron de manera directa en la manera de enseñar la aritmética en los establecimientos de enseñanza diferente a las actividades comunes fuera de estos recintos. La progresiva adopción del SMD favoreció la extensión de los cálculos con decimales, e influyó en los procesos de enseñanza de los decimales y las fracciones, marcando significativamente la organización didáctica de esta temática desde entonces.

Para dar cumplimiento inmediato a la disposición oficial que mandaba introducir el SMD en el sistema educativo, los libros de texto más reconocidos de la época se reeditaron insertando el SMD como un apéndice o complemento, sin alterar lo más mínimo el resto del contenido.

En cambio, los libros de texto que se publicaron con la intención explícita de enseñar el SMD, y no como un apartado aislado, promovieron un cambio en la enseñanza de la aritmética que supuso un avance en el sistema educativo español aunque, como toda innovación educativa, los cambios en la enseñanza fueron de difícil tratamiento para profesores y alumnos, por la falta de práctica y de estrategias para su implementación.

Presentamos en esta contribución los resultados de un estudio sobre el tratamiento dado al SMD en el sistema educativo español en la segunda mitad del siglo XIX. Resaltamos la utilidad del Análisis Didáctico en la definición de categorías y unidades de análisis para el estudio de libros de texto históricos de matemáticas y, a partir de éstas, describimos las características de los libros de texto de matemáticas utilizados como instrumentos didácticos para llevar a cabo la reforma educativa ante la adopción de un nuevo sistema de pesas y medidas y su incorporación en la enseñanza de la aritmética.

Sobre el estudio y la metodología

El estudio constituye una investigación cualitativa-descriptiva en el campo de la historia de la educación matemática orientada por el método histórico (Picado y Rico, 2011a; Picado y Rico, 2011b). Su propósito consiste en estudiar el tratamiento dado al SMD en el Sistema Educativo español durante la segunda mitad del siglo XIX. La información se obtuvo mediante el análisis de libros de texto de matemáticas para la enseñanza de la aritmética y el SMD en primaria, secundaria y la formación de maestros editados en el periodo 1849-1892 (Picado, 2012). Este periodo constituye una etapa en la historia de la metrología española delimitada por la promulgación de dos leyes de pesas y medidas: la ley de 19 de julio de 1849 que promulga la adopción del SMD en España y la ley de 8 de julio de 1892 que oficializa la legalidad y obligatoriedad de uso de las unidades métrico-decimales en todas las actividades políticas, educativas, económicas, científicas, comerciales, técnicas y sociales de los españoles. Razones

propias de la historia de España permitieron identificar y definir, dentro del periodo, tres etapas históricas que caracterizan la implantación del SMD (Figura 1).

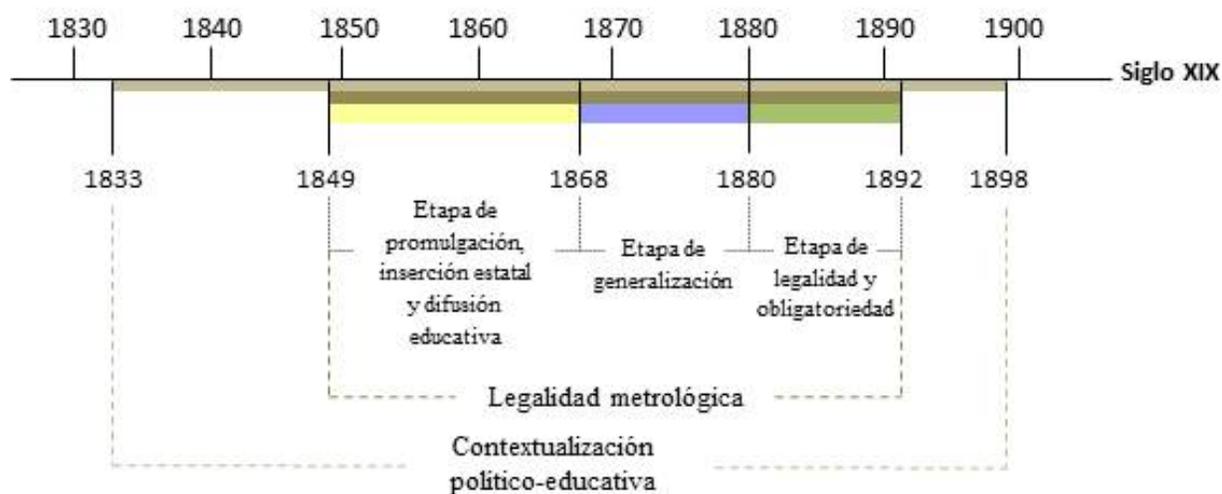


Figura 1. Etapas históricas.

Las etapas posibilitaron en la fase de selección de las fuentes una presencia de libros de texto a lo largo del periodo. Estas son:

- Etapa de promulgación, inserción estatal y difusión educativa (1849-1867)
- Etapa de generalización (1868-1879)
- Etapa de legalidad y obligatoriedad (1880-1892)

Los textos fueron seleccionados mediante la aplicación de criterios que contemplaron la finalidad educativa del documento, el vínculo con la enseñanza del SMD y el año de edición, entre otros. Como parte de este proceso se revisaron 92 de 114 documentos elegidos en la primera de dos fases de selección (el acceso a algunos documentos fue restringido por su estado de deterioro). Finalmente, el estudio contó con 13 libros de texto, de los cuales seis habían sido utilizados en la instrucción primaria, tres para la segunda enseñanza y cuatro para la formación de maestros en las Escuelas Normales del periodo considerado.

Seleccionadas las fuentes, se procedió al análisis de su contenido. Este proceso incluyó la aplicación de técnicas como el análisis conceptual (Rico, 2001), el análisis de contenido (Bardin, 1977; Berelson, 1952; Krippendorff, 1990) y dos de los componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007; Rico, 1997; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008): el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

El Análisis Didáctico es una herramienta poderosa para el estudio de documentos históricos (Picado, Gómez y Rico, 2013). Las componentes del ciclo de Análisis Didáctico facilitan la identificación y descripción de conceptos y procedimientos, de estructuras conceptuales matemáticas, los modos en que se representan y los fenómenos que las hacen presentes en el entorno. Aunado a esto, admiten reconocer aspectos cognitivos y de la instrucción sobre un tema específico. La tabla 1 muestra un resumen de algunos de los principales aspectos que caracterizan estos análisis.

Tabla 1

Componentes del Análisis Didáctico para el estudio de libros de texto históricos.

| Componente | Aspectos en estudio | Categorías para el análisis de libros de texto históricos |
|-------------------------|--|---|
| Análisis de Contenido | Sistemas de representación | Representaciones simbólica, verbal, gráfica, icónica, tabular, instrumentos |
| | Fenomenología | Situaciones en contextos natural, matemático, técnico-científico, comercial, social |
| | Estructura conceptual (conceptos y procedimientos) | Conceptos y procedimientos destacados, orden lógico, enlaces y relaciones de inferencia en el texto |
| Análisis Cognitivo | Expectativas de aprendizaje | Propósitos del autor: objetivos planteados |
| | Limitaciones | Dificultades y errores de los estudiantes mostrados por el autor |
| | Oportunidades | Tipos de tareas presentadas: ejemplos, ejercicios |
| Análisis de Instrucción | Secuencia de tareas | Gestión de aula: secuencia en la presentación de tareas |
| | Materiales y recursos | Materiales y recursos propuestos por el autor |

Fuente: Picado, Gómez y Rico, 2013.

Estas técnicas de análisis posibilitaron, por una parte, el estudio de una variedad de aspectos conceptuales y didácticos, relacionados a las matemáticas escolares, que caracterizaron la incorporación del SMD en libros de texto para la instrucción primaria y los otros niveles considerados; por otra, la definición de categorías de análisis a partir de las características propias de estas técnicas y el propósito de la investigación.

En Picado, Gómez y Rico (2013), ampliamos la descripción de las categorías y unidades de análisis para el estudio de libros de texto históricos de matemáticas desde las componentes del Análisis Didáctico.

Resultados

La incorporación del SMD supuso una modificación de la organización (el orden y enlace en la presentación de las nociones) y extensión de los apartados habituales, pero no de los conceptos y definiciones dominantes en la época, ni tampoco una desaparición automática del sistema antiguo de pesas y medidas. Como se indica en uno de los libros de texto sometidos a estudio:

La práctica de la enseñanza nos ha convencido de que es posible obtener buen fruto sin hermanar el sistema antiguo con el métrico decimal; y nuestro objeto es reunir en un solo tratado ambas doctrinas” (Dos profesores, 1860, p. 4).

En relación con el contenido matemático, el SMD se incorporó tras la explicación de la numeración decimal. Sin embargo, algunos autores, como se aprecia en Avendaño (1852), incorporaron esta temática de manera previa a la presentación de los quebrados o fracciones comunes cuya exposición es posterior a la de las operaciones propias del cálculo aritmético con números enteros. Otros autores, más modernos, lo hicieron tras presentar los quebrados comunes y decimales como una consecuencia del sistema décuplo de valor de posición.

Colocamos la explicación del sistema métrico después de las cantidades decimales y números complejos [denominados], porque aunque hubiéramos deseado explicar desde el principio para que el alumno se familiarizase con su uso en los ejemplos, es imposible comprender bien sin el conocimiento de los decimales, ni puede hacerse reducción alguna entre nuestras medidas y las métricas sin saber el cálculo de los números complejos. (Picatoste, p. VII).

Esta organización combinó una presentación en paralelo de teoría y práctica, mostrando las operaciones ordinarias del cálculo aplicadas al SMD. La Figura 2 muestra esta particularidad en el texto de Trauque (1854), uno de los textos analizados correspondientes a la educación primaria.

Con el objetivo declarado de erradicar las dificultades de comprensión del nuevo sistema por su cualidad de innovador y los nombres desconocidos que le dan forma, una parte importante de los textos analizados incluyen tareas (ejemplos y ejercicios numéricos) que son el complemento práctico a la exposición de las unidades básicas del SMD, sus múltiplos y divisores, sus equivalencias con sus homólogas del sistema antiguo y el medio para presentar el uso y aplicación de las unidades métrico decimales en las actividades comunes de los pobladores.

Sobre los conceptos matemáticos

La exposición de contenidos aritméticos comienza con la presentación de algunas definiciones preliminares. Destaca en algunos textos la exposición de las nociones de número y unidad, y en otros la de cantidad y magnitud como sinónimo que, como estas últimas, ponen de manifiesto la inclinación por las concepciones de Euler.

El número se concibe en términos de la antigua concepción Griega de número natural como la totalidad de unidades que componen una cantidad, o de la concepción Newtoniana que lo vincula a la expresión de la relación entre una cantidad y la unidad. La unidad se concibe de forma ecléctica, se combina la vieja concepción griega: unidad unitaria, generadora del número por adición, que es “elemento primero de toda cantidad” (Trauque, 1854, p. 12); con la concepción Newtoniana de unidad relativa: una cantidad constante utilizada en la comparación con otra cantidad. Entendemos este matiz necesario según las concepciones de los autores para comprender el concepto de unidad de medida, que es divisible, y requerido para extender el campo numérico y definir las fracciones y las fracciones decimales.

ÍNDICE

| | Pág. | | |
|---|-----------|---|-----|
| Definiciones preliminares y axiomas. | 9 | Sumar quebrados. | 94 |
| De los números y sus divisiones. | 11 | Restar quebrados. | 100 |
| De la numeración hablada y escrita. | 14 | Multiplicar quebrados. | 102 |
| De los ceros. | 23 | Partir quebrados. | 104 |
| Escribir cantidades. | 25 | Quebrados de quebrados, y extracción de raíces. | 105 |
| Objeto de la Aritmética y sistema métrico. | 27 | Problemas. | 106 |
| Del metro. | 31 | Cálculo antiguo. | 108 |
| Diferentes maneras de considerar el metro. | 32 | Razones y Proporciones. | 116 |
| Del área. | 36 | Regla de tres. | 121 |
| Del litro. | 38 | Problemas. | 121 |
| Del gramo. | 39 | Regla de compañía. | 124 |
| Del real. | 40 | Problemas. | 133 |
| De la adición. | 42 | Regla de Interés. | 135 |
| Problemas de adición. | 47 | Id. tanto por ciento y por mil. | 139 |
| De la Multiplicación. | 49 | Descuento. | 140 |
| Tabla de multiplicar. | 58 | Problemas. | 142 |
| Problemas de multiplicar. | 59 | Regla de Aliación. | 144 |
| Elevación a potencias. | 60 | Problemas. | 147 |
| Problemas de potencias. | 62 | Reglas de Epoca común. | 149 |
| De la sustracción. | 63 | Regla conjunta. | 151 |
| Tabla de restar. | 66 | Tracques. | 152 |
| Problemas de restar. | 67 | Juras. | 153 |
| De la División. | 68 | Cambios. | 157 |
| Tabla de partir. | 78 | Reducciones. | 155 |
| Problemas de partir. | 79 | De las Progresiones. | 158 |
| Extracción de raíces. | 80 | De los Logaritmos. | 165 |
| Tabla de Potencias. | 81 | Del complemento aritmético. | 167 |
| Problemas de raíces. ¹ | 84 | Uso de los logaritmos. | 168 |
| De las pruebas. | 85 | Reglas de Anuidad. | 171 |
| Cálculo de los quebrados. | 85 | Calcular el logaritmo que de un número que no este en las tablas. | 177 |
| Valuación de los quebrados. | 87 | Calcular el número de un logaritmo que no este en las tablas. | 178 |
| Problemas de valuación. | 89 | De las fracciones periódicas. | 179 |
| Propiedad de los quebrados. | 90 | Regla de taxa y reparto. | 182 |
| Reducir a un común denominador. | 92 | | |
| Simplificar quebrados. | 94 | | |
| Reducir enteros a la especie de su quebrado. | 96 | | |
| Poner enteros en forma de su quebrado. | 97 | | |

Objetivo de la Aritmética y sistema métrico...
 Del metro.....
 Diferentes maneras de considerar el metro.....
 Del área.....
 Del litro.....
 Del gramo.....
 Del Real.....
 De la adición.....
 Problemas de adición.....
 De la multiplicación.....

Figura 2. Contenidos del texto de Trauque (1854).

De la clasificación numérica destacan tres clases de números: entero, quebrado y mixto. El entero, entendido como número natural, se compone de unidades exactas y se clasifica en simple y compuesto. El número quebrado, entendido también como fracción, se asocia a “todo número que representa un valor menor que uno” (Profesores, 1860, p. 115), “cualquier cantidad menor que la unidad” (Avendaño, 1852, p. 31) cuyo origen se sitúa en la división inexacta de números (la división con resto); ó de otro modo, “todo número que solo representa parte ó partes de la unidad” (Profesores, 1860, p. 115). Esto resalta la tradición de enseñanza alejada de las ideas de Newton que las plantea como uno de los resultados de la medida.

Destaca de los textos la distinción entre fracción (o quebrado) y número fraccionario. Este último se entiende como la denominación para los números mixtos (composición de un entero y un quebrado) concebidos como la expresión fraccionaria de un número que no es expresamente un quebrado (Vallejo, 1855).

A partir de su relación con el sistema décuplo, la fracción se clasifica en decimal o común. El primero se concibe desde dos perspectivas: como “aquel cuya unidad está dividida en partes que son diez en diez veces más pequeñas”; ó como “aquel que tiene por denominador tácito la unidad seguida de tantos ceros como notas tenga el numerador” (Trauque, 1854, p. 12). Es decir, “unos quebrados que tienen por denominador 10; 100; 1000; etc. y en general la unidad seguida de ceros” (Vallejo, 1855, p. 61) que genera los conceptos de décima, centésima, milésima, diezmilésima, etc. Esta concepción de número coexiste con la más avanzada que tiene su génesis en la noción de número de Newton y que toma como referencia la especie que lo define.

multiplicar y dividir por/entre diez (utilizando para expresar sus nombres el significado de determinadas voces griegas y latinas: Deca, Hecto, Kilo y Miria; deci, centi y mili) y su equivalencia con cada una de las unidades básicas, complementado con explicaciones y ejemplos para cada uno.

La exposición del metro, sus múltiplos y divisores, sienta la base para la presentación de las unidades metro cuadrado y metro cúbico, utilizables para las ampliaciones de la dimensión lineal que lo vinculan con las magnitudes superficie y volumen. El área, el litro y el gramo reciben una presentación similar, profundizando en aspectos como la singularidad de algunos múltiplos y divisores, la lectura de estas cantidades y la existencia de convenciones para la utilización de múltiplos y divisores no decimales (doble, mitad, quíntuplo, entre otros).

La riqueza conceptual del libro de texto se complementa con la variedad de procedimientos, representaciones y fenómenos con que son presentadas las ideas. La lectura y escritura de números métricos, la formación de unidades superiores e inferiores para las distintas especies de medidas, cómo efectuar operaciones aritméticas y equivalencias entre unidades de medida son los procedimientos comunes en el libro de texto. Las representaciones simbólica, tabular y gráfica son un complemento ideal para la representación predominante: la verbal (Figura 4).

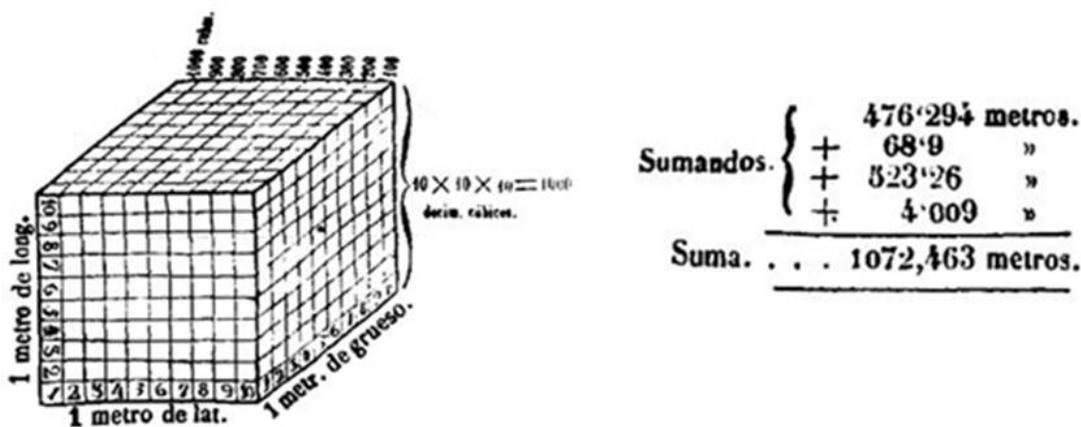


Figura 4. Modos de representación gráfica y tabular (Trauque, 1854, pp. 34-35).

Las representaciones tabulares incluidas en el texto, además de las propias del cálculo de columnas, se usan para la exposición de múltiplos y submúltiplos, equivalencias y correspondencias entre pesas y medidas métricas y las antiguas españolas y las de algunas naciones con vínculos comerciales con España.

Para ilustrar la aplicabilidad de las nuevas unidades de pesas y medidas del SMD, éstas se muestran a partir de situaciones y fenómenos característicos de los contextos matemático, comercial, fisico-natural, social y técnico. Así, por ejemplo, en el contexto matemático solo se realizan cálculos netamente aritméticos sin un contexto físico particular como el paso unidades superiores a inferiores. En el contexto comercial se incluyen situaciones como la compra y venta de vino, textiles y madera, el precio del producto. En el contexto físico - natural se hacen referencias a la pureza de sustancias o la temperatura. Desde un contexto técnico se utilizan situaciones de topografía, construcción y agrimensura como el cálculo de distancias y superficies de terrenos (Figura 5). Y, en el contexto social, situaciones como el cálculo de edades o vinculadas a determinados grupos sociales.

XI. Un agrimensor midió el terreno siguiente: 345 hectáreas 27 áreas (345°27 hectár.) de una parte; 845 hectár. 09 áreas de otra; 25 hectár. 12 áreas de otra; y 469 hectár. 27 de otra. Cuanto terreno midió? = 1684 hectár. 75 áreas.

Figura 5. Medición de terrenos con la unidad métrica área (Trauque, 1854, pp. 48).

Los ejemplos para ilustrar las situaciones más comunes que requieren de la utilización de las nuevas unidades métricas, suelen referirse a los modos para llevar a cabo las operaciones básicas con las nuevas unidades métricas y a la reducción de las antiguas medidas españolas a las del sistema métrico legal y al contrario. Estos últimos, muestran el procedimiento para efectuar los cambios de unidad, en dos pasos: uno es la reducción a una sola unidad y el otro es la aplicación del factor de cambio dado en una tabla de equivalencias.

Otro método sería el reducir los 2 pies, 5 pulgadas y 3 líneas a líneas; los que daría 351 líneas; y como la vara se compone de 423 líneas, el número propuesto equivale a 40 varas y 351/423 de vara. Si este número lo quisiéramos reducir, así como está, a metros, multiplicaríamos el valor 0,83590575 primero por 40 y luego por 351/432, y sumariamos después los resultados. (Vallejo, 1855, p. 16)

Consideraciones finales

Los libros de texto editados para la incorporación del SMD en la enseñanza de la aritmética en España durante la segunda mitad del siglo XIX dejan entrever una serie de indicadores para caracterizar la reforma curricular en matemáticas.

Los cambios curriculares mantuvieron la memorización y el automatismo como las bases metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la nomenclatura métrico-decimal y su implementación y utilización en las prácticas cotidianas. La enseñanza del SMD, su nomenclatura y estructura matemática, se definió a partir de la presentación del metro desde tres enfoques: etimológico, instrumental y científico. Estas últimas perspectivas, caracterizan la presentación de los términos que conforman el sistema a partir de la nomenclatura adoptada por Francia y las relaciones con sus homólogas castellanas.

La presentación de las unidades principales de medidas se derivó de su vínculo con la unidad fundamental del sistema: el metro. De esta forma, las unidades para longitud, superficie, volumen o solidez, capacidad y peso se mostraron invariables, uno de los beneficios del sistema presentado por los autores de los textos. Esto se acompañó de la aplicación de relaciones decimales entre cada unidad principal y las unidades superiores e inferiores (múltiplos y submúltiplos) que fue, en la mayor de los casos, el enlace entre el sistema metrológico y los contenidos en el libros de texto referidos al Sistema Decimal de Numeración, y otra de las razones expuestas para adoptar el nuevo sistema metrológico.

El modo más común de organizar las equivalencias decimales entre unidades de la misma especie, al igual que las correspondencias con las unidades del sistema de pesas y medidas de Castilla (vigente desde 1801 como uno de los últimos intentos para unificar la metrología tradicional en España), lo constituyeron las tablas de equivalencias, uno de los complementos del modo verbal en la presentación de conceptos y procedimientos.

La incorporación del SMD en la enseñanza de las matemáticas, específicamente del aritmética, destacó un modelo de instrucción basado en la presentación teórica de conceptos y

procedimientos seguida de ejemplos para ilustrar el modo de proceder ante determinadas situaciones propias de contextos matemáticos, comerciales y técnicos vinculadas a las distintas unidades de medida y sobre todo, a los usos más comunes de la cotidianidad española.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el apoyo de la Junta de Becas de la Universidad Nacional (UNA) y el Fondo de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la República de Costa Rica. Se ha realizado dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico, (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Referencias

- Avendaño, J. (1852). *Elementos de aritmética*. Madrid, España: Imprenta de Araujo.
- Bardin, L. (1977). *L'Analyse de contenu* [El análisis de contenido]. París, Francia: PUF.
- Berelson, B. (1952). *Content analysis in communication researches* [Análisis de contenido em las investigaciones sobre comunicación]. New York, NY: Free Press.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Recuperado de http://documat.unirioja.es/servlet/listatesis?tipo_busqueda=INSTITUCIONYTEXTOCOMPLETO&clave_busqueda=819043
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.
- Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Picado, M. y Rico, L. (2011a). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.
- Picado, M. y Rico, L. (2011b). La selección de textos en la investigación histórica. *Épsilon*, 28(1), 99-112.
- Picado, M., Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del Sistema Métrico Decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 403-414). España: Comares
- Picatoste, F. (1861). *Principios y ejercicios de aritmética y geometría*. Madrid, España: Imprenta y Librería de D. Eusebio Aguado.
- Profesores. (1860). *Aritmética para uso de los niños*. Huesca, España: Imprenta y Librería de Lucas Polo.
- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria* (pp. 377-420). Madrid, España: Síntesis.
- Rico, L. (2001). El Análisis Conceptual. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Trauque, L. (1854). *Aritmética decimal y demostrada para uso de las escuelas primarias*. Gerona,

España: Imprenta y Librería de Grases.

Vallejo, J. M. (1855). *Compendio de matemáticas puras y mixtas*. Madrid, España: Imprenta de los herederos del autor.